UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Demostración elemental del teorema de convergencia acotada de Arzelà.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Jobian Gutierrez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Ramón Bruzual

Caracas, Venezuela
Marzo, 2017

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Demostración elemental del teorema de convergencia acotada de Arzelà**", presentado por el **Br. Jobian Gutierrez**, titular de la Cédula de Identidad **17.984.144**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ramón Bruzual
Tutor

Alejandra Aguilera
Jurado

Ángel Padilla
Jurado

Resumen

El siglo XIX trajo de la mano una notable evolución en la teoría de integración. La definición de Riemann de la integral definida dió origen a un importante número de estudios en análisis. Uno de los resultados más sobresalientes en este contexto es atribuido al matemático Cesare Arzelà (1885) al hacer referencia al *teorema de convergencia acotada* también conocido como *teorema de Arzelà*, el cual marcó el inicio de un mejor entendimiento de las propiedades de continuidad de la integral de Riemann como una función de su integrando.

Las primeras demostraciones del teorema de convergencia acotada ofrecidas por Arzelà y Hausdorff fueron largas y complicadas. Dada la importancia de este resultado otros matemáticos han abordado dicho teorema demostrandolo con técnicas que varian desde teoría de conjuntos hasta análisis funcional. El presente escrito pretende hacer una breve revisión del teorema de Arzelà, teniendo como objeto central el estudio de varias publicaciones que ofrecen pruebas del teorema en un contexto de integración Riemann haciendo uso exclusivo de herramientas elementales de análisis matemático. Así mismo, indagaremos el contexto histórico que lo hace un resultado importante y finalmente se vincula dichas demostraciones en un contexto de teoría de la medida.

Palabras Clave:

Sucesión de funciones, sucesión uniformemente acotada, convergencia puntual, convergencia uniforme, integral de Riemann, integral de Lebesgue, medida.

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Ante todo, mi agradecimiento hacia mi familia: a mi padre Jose Gutierrez, mi respecto por las ciencias puras siempre será tu mejor herencia; a mi madre Nubia Romero, tu apoyo incondicional me permite estar donde estoy; a mi tio Iván Gutierrez, por iniciarme en el mundo del cálculo a tan corta edad; a mi hermana Jannabel Gutierrez, tu admiración ha sido incontables veces mi fuente de voluntad; y en especial a mi hermana Nuyddy Fernandez, tu crítica frontal motivó la reafirmación de mi apego e interés ferreo por las matemáticas, estaré siempre en deuda contigo.

Al Prof. Ramón Bruzual, mi tutor, muchas gracias por toda su ayuda en la realización de este trabajo y sobre todo por tenderme la mano en el momento más crucial de mi licenciatura. Ser su tesista fue un privilegio.

A mis compañeros de carrera, que luego de tanto compartir, discutir y debatir, terminaron por ganar el título de amigos: Jefferson Prada, Fernando Adorno y Arturo Carreño. Así mismo, a Ninoska Medina, tu fe casi ciega hacia mi persona fue un valioso soporte. El mérito que pueda representar mi grado es en gran medida de ustedes cuatro.

A todos los profesores que me dictaron los diversos cursos durante la licenciatura, muy agradecido por su paciencia.

A las personas que formaron mi cotidianidad en la Facultad de Ciencias, demasiadas para ser enumeradas, muy agradecido de compartir con ustedes.

A Alexandra Vásquez, a ti también, muchas gracias.

Introducción

Motivación

El Teorema de convergencia acotada, demostrado en el año 1885 por el matemático Cesare Arzelà establece lo siguiente:

Teorema (Cesare Arzelà, [**1**], ver también página 22)**.**

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$ *y sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones integrables Riemann en* $[a, b]$*, que converge puntualmente a una función* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, que también es integrable Riemann.*

Si existe $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f_n(x)| < C$ *para todo* $x \in [a, b]$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Como la integral de Lebesgue extiende a la integral de Riemann, este resultado es una consecuencia inmediata del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Sin embargo este hecho no le ha restado interés al resultado de C. Arzelà y se ha escrito y se sigue escribiendo abundante literatura alrededor del mismo. Por citar un ejemplo muy significativo en el año 1917, el destacado matemático F. Riesz en su trabajo "Über integrationen unendliche folgen"(Acerca de la integración de secuencias infinitas, [**10**]) dio una nueva demostración de este resultado. Es importante destacar que para ese momento ya se conocía el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, ya que esta teoría de integración fue desarrollada entre los años 1902 y 1904. Como ejemplos recientes de trabajos alrededor de nuevas demostraciones de este teorema se pueden citar los trabajos de J. Lewin [**6**], W. Luxemburg [**7**], W. Eberlein [**2**], R. Gordon [**3**] y E. Scheinerman and N. de Silva [**12**]. El lector interesado puede encontrar más referencias históricas en el trabajo ya citado de W. Luxemburg.

Entre las razones que motivan el que se mantenga el interés alrededor del teorema de convergencia acotada de Arzelà destacan:

(1) A pesar de tener un planteamiento sumamente sencillo, la demostración original dada por C. Arzelà resultó ser tediosa, muy complicada y con algunas "lagunas" (gaps) según se señala en [**3**].
(2) Otras demostraciones que se dieron posteriormente a la original también resultaron complicadas y tediosas.
(3) Llama mucho la atención que sea tan fácil de demostrar en el contexto de la teoría de la medida y tan complicado en el contexto de la integral de Riemann.

Por esto muchos autores han dedicado tiempo y energía a proponer demostraciones sencillas, comprensibles y elementales del resultado de Arzelà.

La intención fundamental de este trabajo es exponer en detalle la demostración del teorema de convergencia acotada de Arzelà dada por J. Lewin en su trabajo [**6**].

Algunos antecedentes históricos

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) fue un matemático Alemán que realizo diversas e importantes contribuciones al análisis y la geometría diferencial.

La primera definición formal y rigurosa de integral se le debe a B. Riemann y fue dada en su trabajo "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", Habilitationsschrift 1854, (Sobre la posibilidad de representación de una función por una serie trigonométrica,1854 disertación de habilitación). Este trabajo fue presentado por B. Riemann a la Universidad de Gotinga en 1854 como su "Habilitationsschrift" (disertación de habilitación, trabajo para convertirse en instructor), ver [**9**, página 101 a 103].

Antes del trabajo de B. Riemann y aún a principios del siglo XIX la integral se consideraba simplemente como una operación inversa a la derivación, relacionada con el problema del cálculo del área bajo una curva

Para plantear su definición de integral de una función f sobre el intervalo $[a, b]$, B. Riemann empezó por dividir dicho intervalo en subintervalos más pequeños, para ir aproximándose al área limitada por gráfico de f y el eje de abscisas.

El trabajo de B. Riemann se desarrolla en medio de un momento en que se plantean diversos problemas interesantes del cálculo infinitesimal, entre ellos el problema de la integración de series término a término.

El problema de la integración término a término, lo planteó W. Osgood en su trabajo [**8**] del año 1896 de la siguiente manera:

Supongamos que

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots, \quad a \leq x \leq b$$

donde $f(x)$, $u_i(x)$ funciones continuas de x sobre $[a, b]$.

Sea

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

entonces $s_n(x)$ también es continua.

La pregunta que hace W. Osgood es la siguiente: ¿Bajo que condiciones se puede asegurar que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx\ ?$$

es decir, ¿cuándo se puede asegurar que se cumple

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx\ ?$$

Es muy clara la importancia que puede tener el poder realizar estos cambios de límites en todo lo que se refiere a la representación de una función en series de funciones más simples, en particular el problema es sumamente relevante en el análisis de Fourier.

Los matemáticos W. Osgood (1864-1943) y C. Arzelà (1847-1912) obtuvieron resultados en esta dirección. W. Osgood trabajó mucho con convergencia uniforme y C. Arzelà obtuvo su resultado de convergencia, que es uno de los más generales conocidos para la integral de Riemann. Tal como ya se indicó, en general sus demostraciones resultaron largas y bastante complicadas.

Organización del trabajo

Este Trabajo Especial de Grado está organizado de la siguiente manera:

El Capítulo 1 está dedicado a exponer algunos resultados básicos de topología de la recta y de convergencia de funciones que serán necesarios en el trabajo.

En el Capítulo 2 se expone, con bastante detalle, la construcción de la integral de Riemann. Esta construcción rigurosa da la base para poder desarrollar el siguiente capítulo. Además se dan algunos resultados referentes a cambio de límite con integral y se desarrollan algunos ejemplos que muestran que no siempre es posible intercambiar límite e integral.

En el Capítulo 3 se expone en detalle la demostración del Teorema de convergencia acotada dada por J. Lewin y se da la idea de otras dos demostraciones dadas por E. Scheinerman y Nadish de Silva y por W. Eberlein. Se debe destacar que W. Eberlein solamente considera el caso de funciones continuas.

Finalmente el Capítulo 4 está dedicado a ver como la teoría de la medida de Lebesgue contiene resultados que, aparte de simplificar el teorema de Arzelà, simplifican la prueba de algunos de los resultados auxiliares que aparecen en los trabajos de J. Lewin y de E. Scheinerman y Nadish de Silva.

Capítulo 1

Prerrequisitos de topología de la recta y de convergencia de funciones

Este capítulo está dedicado a exponer algunos resultados y definiciones básicas que serán necesarias para el desarrollo del trabajo.

1. Topología de la recta

Definición 1.1. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos:

(1) Decimos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión creciente* si se tiene que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Decimos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión decreciente* si se tiene que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2. *Sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de subconjuntos de $\mathbb{R}$ cerrados y no vacíos. Si C_1 es acotado entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ no es vacía.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n un elemento de C_n.

Como $C_n \subset C_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y C_1 es acotado, se tiene que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea $x_o = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Sea $p \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $x_{n_k} \in C_{n_k}$ se tiene que $x_{n_k} \in C_p$ si $n_k \geq p$. Por ser C_p cerrado se tiene que $x_o \in C_p$.

Por lo tanto

$$x_o \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

□

Observación 1.3. Considerando $C_n = [n, +\infty)$ se observa que la hipótesis de acotación en el teorema anterior es indispensable.

Teorema 1.4. *Todo conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}$ se puede escribir de forma única como unión contable de intervalos abiertos disjuntos.*

Demostración. Para cada $x \in A$, sea $\mathcal{F}_x = \{(a,b) \,:\, x \in (a,b) \text{ y } (a,b) \subset A\}$ y sea

$$I_x = \bigcup_{I \in \mathcal{F}_x} I.$$

Entonces se tiene lo siguiente:

(1) $x \in I_x$, porque x pertenece a todo elemento de $\mathcal{F}_x$.
(2) I_x es un subconjunto abierto de A, ya que I_x es unión de conjuntos abiertos contenidos en A.
(3) I_x es un intervalo, por ser unión de intervalos con un punto común que es x.

Además si $x, y \in A$ se tiene que

$$I_x = I_y \quad \text{ó} \quad I_x \cap I_y = \emptyset.$$

Para probar esto último supongamos que $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, entonces $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto al cual pertenece x y que está contenido en A, luego $I_x \cup I_y \in \mathcal{F}_x$ y por lo tanto $I_x \cup I_y \subset I_x$.

De aquí se deduce que $I_y \subset I_x$ y, por simetría, se tiene que $I_x \subset I_y$, es decir

$$I_x = I_y.$$

Por lo tanto

$$A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

y la unión es disjunta.

Para ver que la unión es contable, basta notar que a cada I_x se le puede asociar un número racional r, tal que $r \in I_x$. De esta manera se obtiene una función inyectiva del conjunto de los intervalos I_x, $x \in A$ al conjunto de los racionales y por lo tanto el conjunto formado por los intervalos I_x tiene que ser numerable o finito. $\square$

Observación 1.5. En la demostración anterior el conjunto I_x es la componente conexa de A a la que pertenece el punto x.

2. Convergencia de funciones

Definición 1.6. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. La sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$. Como es usual, esto se denota de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones a valores reales definidas sobre un conjunto A, y sea f una función a valores reales, también definida sobre A.

Entonces a cada $x \in A$ le corresponde una sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$.

Definición 1.7. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* a la función f en A, si para cada $x \in A$ se tiene que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Definición 1.8. Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a la función f en A, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

Se tiene que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, es decir la condición de convergencia uniforme es más fuerte que la de convergencia puntual.

Además el límite uniforme de funciones continuas es una función continua. Para el límite puntual esto no es necesariamente cierto.

Capítulo 2

Desarrollo de la integral de Riemann

1. Definición y resultados básicos

Definición 2.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una *partición* del intervalo $[a, b]$ es una colección finita de puntos de $[a, b]$, de los cuales uno es a y otro es b.

Los puntos de una partición pueden ser numerados como $t_0, t_1, \ldots, t_n$, de forma tal que el conjunto quede ordenado de la siguiente manera

$$a = t_o < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Al hablar de una partición siempre se supondrá que está ordenada de la forma anterior.

La norma de P se define por

$$\|P\| = \text{máx}\{t_i - t_{i-1} : \; i = 1, \ldots, n\}.$$

Sean P y P' particiones del intervalo $[a, b]$, decimos que P' es un *refinamiento* de P si $P \subseteq P'$.

Definición 2.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para $1 \leq i \leq n$ sean,

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

La *suma inferior* de f correspondiente a P, se denotará por $L(f, P)$ y se define por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

La *suma superior* de f correspondiente a P, se denotará por $U(f, P)$ y se define por

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Lema 2.3. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a,b]$. Si P y Q son dos particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P \subset Q$ entonces*

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Demostración.

La desigualdad del medio es consecuencia de la definición de suma superior e inferior.

Probaremos la desigualdad para sumas inferiores.

Consideremos primero el caso especial en que Q contiene exactamente un punto más que P, es decir, existe k tal que

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n\}, \quad Q = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, u, t_k, \dots, t_n\},$$

donde

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < u < t_k < \ldots < t_n = b.$$

Sean

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(x) : \ t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \text{ para } i = 1, \dots, n, \\ m' &= \text{ínf}\{f(x) : \ t_{k-1} \leq x \leq u\}, \\ m'' &= \text{ínf}\{f(x) : \quad u \leq x \leq t_k\}. \end{aligned}$$

Es claro que $m_k \leq m'$ y $m_k \leq m''$. De donde

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1} + t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= L(f,Q) \end{aligned}$$

El caso general se obtiene fácilmente a partir de éste.

La prueba de la desigualdad para sumas superiores es análoga.

□

Teorema 2.4. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$.*

Si P y Q son particiones del intervalo $[a, b]$, entonces

$$L(f, P) \leq U(f, Q).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea P' una partición que contiene a P y a Q. Por el Lema 2.3

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, Q).$$

□

Definición 2.5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se define la *integral superior de f* como el ínfimo de las sumas superiores, y la *integral inferior de f* como el supremo de las sumas inferiores y se denotarán por $\overline{\int_a^b} f$ y $\underline{\int_a^b} f$ respectivamente. En forma más precisa:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

Definición 2.6. Una función acotada f definida sobre $[a, b]$ es *integrable Riemann* sobre $[a, b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

Si f es integrable Riemann, el valor obtenido de la igualdad previa recibe el nombre de *integral de f* sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f \quad \text{ó} \quad \int_a^b f(t)\, dt.$$

Observación 2.7. Salvo que se indique expresamente lo contrario,en este trabajo el símbolo $\int$ se referirá a la integral de Riemann. De igual forma usaremos la expresión *integrable* para referirnos a la *integrabilidad Riemann*. Más adelante, para evitar confusiones, al referirse para la integral de Lebesgue se usará $(L) \int$.

Observación 2.8. La integral que se está desarrollando en estas notas lleva el nombre de integral de Riemann. Es usual hablar de función integrable Riemann y de integral de Riemann al referirse a los conceptos anteriores. La definición anterior no es la que originalmente fue dada por Riemann. Esta definición fue dada posteriormente por G. Darboux y es equivalente a la definición original de Riemann.

La definición que originalmente dio Riemann fue la siguiente:

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *integrable* en $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$, $\{c_1, \ldots, c_n\} \in [a, b]$ son tales que $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\|P\| < \delta$, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \ - A \right| < \varepsilon.$$

Se prueba que el número A que aparece en la definición anterior existe es único. Además la existencia del número A implica que f es acotada. Como es natural, A es lo que Riemann llamó la integral de f sobre $[a, b]$.

Para más detalles, incluyendo la demostración de que las definiciones dadas por B. Riemann y G. Darboux son equivalentes, ver el libro de D. Kurtz y C. Swartz [**5**], páginas 11 a 24.

Teorema 2.9. *Sea f una función acotada definida en el intervalo $[a, b]$. Entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como

$$\operatorname{ínf}\{U(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\} \leq U(f, P_\varepsilon),$$

$$\sup\{L(f, P) : \ P \text{ es una partición de } [a, b]\} \geq L(f, P_\varepsilon)$$

se tiene que

$$0 \leq \operatorname*{ínf}_P\{U(f, P)\} - \sup_P\{L(f, P)\} \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

De donde

$$0 \leq \inf_P \{U(f,P)\} - \sup_P \{L(f,P)\} < \varepsilon.$$

Como esto último es válido para todo $\varepsilon > 0$, tiene que ser

$$\inf_P \{U(f,P)\} = \sup_P \{L(f,P)\}.$$

De donde sigue que f es integrable.

Recíprocamente, supongamos que f es integrable. Entonces

$$\inf_P \{U(f,P)\} = \sup_P \{L(f,P)\} = \int_a^b f.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P' y P'' del intervalo $[a,b]$ tales que

$$U(f,P'') < \int_a^b f + \varepsilon/2,$$

$$\int_a^b f - \varepsilon/2 < L(f,P').$$

Luego

$$U(f,P'') - L(f,P') < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sea P una partición que contiene a P' y a P''. Entonces

$$U(f,P) \leq U(f,P'') \quad \text{y} \quad L(f,P') \leq L(f,P).$$

De donde

$$U(f,P) - L(f,P) \leq U(f,P'') - L(f,P') < \varepsilon.$$

□

Del resultado anterior y usando el hecho de que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua, se prueba que toda función continua a trozos en un intervalo cerrado y acotado es integrable.

Del resultado anterior también se puede deducir que toda función acotada que posee una cantidad finita de discontinuidades es integrable en un intervalo cerrado y acotado, y el valor de la integral no cambia si la función cambia de valores en una cantidad finita de puntos.

Ejemplo 2.10. La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

es acotada. Sin embargo no es integrable, ya que cualquier suma superior tiene valor 1 y cualquier suma inferior tiene valor 0.

El siguiente resultado es válido y su demostración es sencilla.

Proposición 2.11. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables Riemann. Entonces,*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces αf es integrable Riemann y $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.*
2. *$f + g$ es integrable Riemann y $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.*
3. *Si $a \leq c \leq b$ entonces f es integrable Riemann en $[a,c]$ y en $[c,b]$, además $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
4. *Si $f \leq g$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Teorema 2.12. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces, $|f|$ es integrable y además*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que $|f|$ es integrable Riemann.

Sea $\varepsilon > 0$. Por ser f integrable existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Supongamos $P_\varepsilon = \{t_0, \cdots, t_n\}$.

Como es usual, sean M_i y m_i definidos por

$$M_i = \sup\{f(x) \, : \, t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \quad \text{y} \quad m_i = \text{ínf}\{f(x) \, : \, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Adicionalmente, sean M_i' y m_i' definidos por

$$M_i' = \sup\{|f(x)| \, : \, t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \quad \text{y} \quad m_i' = \text{ínf}\{|f(x)| \, : \, t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Usando que $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$ para $x, y \in \mathbb{R}$, se obtiene que

$$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
U(|f|, P_\varepsilon) - L(|f|, P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

Luego $|f|$ es integrable sobre $[a, b]$.

Finalmente, como

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

Por la propiedad (4) de la Proposición 2.11 se tiene que

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Por lo tanto

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

□

Corolario 2.13. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Si $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones integrables tales que $lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f| = 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Demostración. Basta notar que por el Teorema 2.12 se tiene que

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f|.$$

□

2. Funciones escalonadas

Definición 2.14. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se dice que una función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una *función escalonada* si existe una partición del intervalo $[a, b]$ tal que s toma valores constantes en el interior de cada uno de los intervalos que origina la partición.

Recordemos que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ y para $1 \le i \le n$ se consideran

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\},$$

la suma inferior de f correspondiente a P es

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

y la suma superior de f correspondiente a P es

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Si se define $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$s(x) = m_i \quad \text{si } x \in [t_{i-1}, t_i), \quad s(b) = 0,$$

entonces s es una función escalonada y se tiene que

$$\int_a^b s = L(f,P).$$

Por lo tanto se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{\int_a^b s \ : s \text{ es una función escalonada y } s \le f\right\}.$$

De igual manera se obtiene que

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\left\{\int_a^b s \ : s \text{ es una función escalonada y } s \ge f\right\}.$$

De la igualdad obtenida para la integral inferior sigue el siguiente resultado.

Lema 2.15. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b s < r$ para toda función escalonada s tal que $s \le f$ entonces se tiene que*

$$\int_a^b f \le r.$$

3. Algunos resultados sobre cambio de límite con integral

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales que convergen puntualmente a f en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y supongamos que cada función f_n es integrable en $[a,b]$.

Es natural plantearse las siguientes preguntas:

- ¿Es la función límite f integrable en $[a,b]$?
- Si f es integrable en $[a,b]$, ¿es la ecuación
$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$
valida?

El siguiente ejemplo muestra que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables no necesariamente es integrable.

Ejemplo 2.16. Sea $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ una numeración del conjunto de los números racionales del intervalo $[0,1]$ y, para $n \in \mathbb{N}$, sea $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in \{r_1, ..., r_n\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente a la función φ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

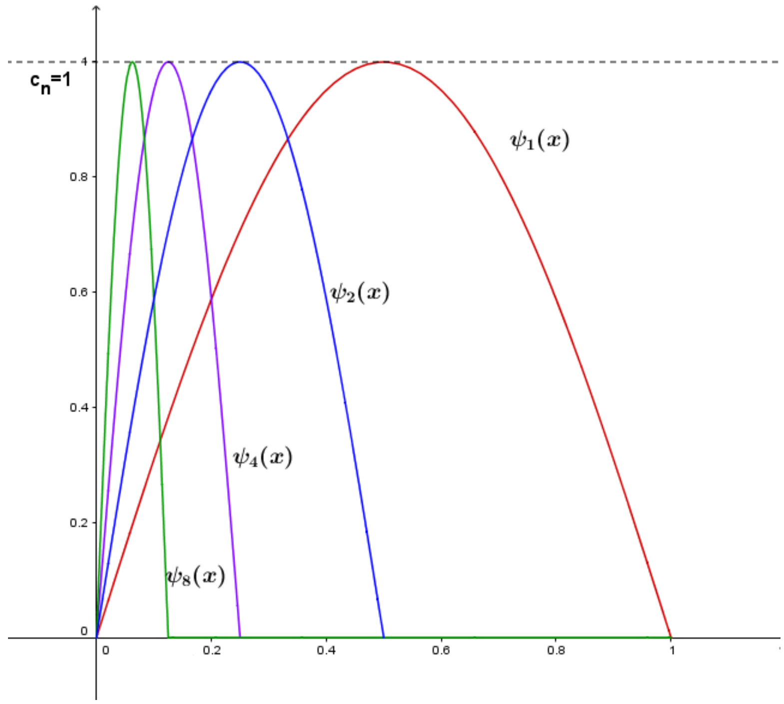
que, tal como se vio en el Ejemplo 2.10 no es integrable.

El siguiente ejemplo muestra que, aunque el límite puntual de una sucesión de funciones integrables $\{f_n\}$ sea una función integrable, no necesariamente se cumple que

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Ejemplo 2.17. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números reales y para cada entero positivo n definamos ψ_n en $[0,1]$ por

$$\psi_n(x) = \begin{cases} c_n \operatorname{sen}(n\pi x), & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{si} \quad x > \frac{1}{n};; \end{cases}$$



Representación de la sucesión $\{\psi_n\}$ asociada a $c_n = 1$.

Esta sucesión converge puntualmente a cero en $[0, 1]$ cualquiera que sea la sucesión $\{c_n\}$ y la convergencia es uniforme si y sólo si $\{c_n\}$ converge a cero

Además se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} c_n \operatorname{sen}(n\pi x)dx \\ &= \frac{c_n}{n\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta \\ &= \frac{2c_n}{n\pi}.\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que la igualdad

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} \psi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$$

es válida si y solo si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n} = 0.$$

En este caso puede ocurrir que la sucesión de integrales no tienda a 0, ó que tienda a 0 aunque la sucesión de funciones no sea uniformemente acotada.

Es importante destacar que la sucesión $\{\psi_n\}$ converge uniformemente a 0 en cualquier intervalo de la forma $[a, 1]$, si $0 < a < 1$.

Una condición más fuerte que la convergencia puntual, que es la convergencia uniforme, resulta más adecuada para obtener resultados de cambio de límite con integral en el contexto de la integral de Riemann, tal como lo ilustra el siguiente teorema.

Teorema 2.18. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables definidas sobre $[a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$ y además*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, por ser la convergencia uniforme, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$ se tiene que

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todo } x \in [a,b]$$

por lo tanto, si $n \geq N_\varepsilon$,

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{para todo } x \in [a,b]$$

Luego se tiene que

$$\underline{\int_a^b}\left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b}\left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx$$

y, como las funciones $f_n \pm \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ son integrables en $[a,b]$, las integrales superior e inferior coinciden en cada caso, obteniéndose que

$$\int_a^b \left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b \left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx$$

de donde,

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq \int_a^b \left(f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx - \int_a^b \left(f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)dx \\ &= \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto f es integrable Riemann en $[a,b]$.

Finalmente, como

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx \right| \leq \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|dx$$

se tiene que si $n \geq N_\varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

□

Observación 2.19. La convergencia uniforme resulta ser una condición suficiente para poder intercambiar límite con integral. El Ejemplo 2.17 muestra que la condición no es necesaria.

A partir del Teorema 2.9 se puede obtener sin mayores dificultades el siguiente resultado.

Proposición 2.20. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es acotada en $[a,b]$ y es integrable en cada subintervalo cerrado de (a,b), entonces f es integrable sobre $[a,b]$.*

Esta proposición permite generalizar el Teorema 2.18 de la siguiente manera.

Teorema 2.21. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que convergen puntualmente a una función f en $[a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada subintervalo cerrado de (a,b), y $\{|f_n|\}$ es uniformemente acotada en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Sea M una cota superior para la sucesión $\{|f_n|\}$ en $[a,b]$, entonces $|f|$ también está acotada por M. Como la convergencia es uniforme en cada subintervalo cerrado de (a,b), por el Teorema 2.18 f es integrable en cada subintervalo cerrado de (a,b), por lo que de la Proposición 2.20 sigue que f es integrable en $[a,b]$.

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos puntos $c, d \in (a, b)$ tales que $c < d$, $c - a < \varepsilon/2M$ y $b - d < \varepsilon/2M$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[c, d]$, por el teorema 3.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_c^d f_n - \int_c^d f \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N$$

entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| &\leq \left| \int_a^c (f_n - f) \right| + \left| \int_c^d f_n - \int_c^d f \right| + \left| \int_d^b (f_n - f) \right| \\ &\leq 2M(c-a) + \varepsilon + 2M(b-d) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq N$, de donde sigue que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

$\square$

Del teorema anterior se deduce fácilmente el siguiente resultado un poco más general.

Teorema 2.22. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Riemann que converge puntualmente a una función f en $[a, b]$ y sea $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{q-1} < c_q = b$ una partición de $[a, b]$. Si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en cada subintervalo cerrado de (c_{i-1}, c_i) para $1 \leq i \leq q$ y $\{|f_n|\}$ esta uniformemente acotada en $[a, b]$ entonces f es integrable Riemann en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Demostración. Las hipótesis del Teorema 2.21 se cumplen en cada uno de los intervalos $[c_{i-1}, c_i]$, entonces f es integrable en $[c_{i-1}, c_i]$ y

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f = \lim_{n\to\infty} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_n \quad , \quad i = 1, \ldots, q$$

Luego, f al ser integrable en cada uno de los intervalos de la partición es integrable en $[a, b]$ y

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \sum_{i=1}^{q} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f \\
&= \sum_{i=1}^{q} \lim_{n\to\infty} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{q} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n
\end{aligned}$$

□

El Teorema 2.22 cubre muchas situaciones que podrían ocurrir en aplicaciones, pero la convergencia de f_n a f puede ser mucho más complicada que los ejemplos presentados hasta ahora. De hecho, es posible para sucesiones de funciones continuas converger puntualmente a una función pero no converger uniformemente a dicha función en cualquier subintervalo. Un ejemplo de esa naturaleza es presentado por W. Osgood [**8**], lo cual esclarece que probar un teorema de convergencia que incluya sucesiones cuya convergencia no es uniforme requiere un enfoque diferente. La primera dificultad reside en el hecho de que en la ausencia de convergencia uniforme la función límite puede no ser integrable. Consecuentemente, la integrabilidad Riemann de la función límite debe volverse parte de la hipótesis.

Capítulo 3

Demostración del teorema de Arzelà

En este capítulo se desarrolla en detalle la demostración del teorema de convergencia acotada de C. Arzelà que fue dada por J. Lewin en su trabajo [**6**]. Además se da un bosquejo de la demostración dada por E. Scheinerman and N. de Silva en su trabajo [**12**] y de la demostración, para el caso particular de funciones continuas, dada por W. Eberlein en su trabajo [**2**].

Tal como se dijo en el capítulo anterior, salvo que se indique expresamente lo contrario, el símbolo $\int$ se referirá a la integral de Riemann. De igual forma usaremos la expresión *integrable* para referirnos a la *integrabilidad Riemann*.

El enunciado usual del teorema de convergencia acotada de C. Arzelà es el siguiente.

Teorema 3.1 (Teorema de convergencia acotada de Arzelà, 1885, [**1**]).

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$, que converge puntualmente a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, que también es integrable.

Si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| < C$ para todo $x \in [a, b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

En lo que se refiere a la demostración del teorema de Arzelà, es usual considerar una versión simplificada, que es equivalente y se enuncia a continuación.

Teorema 3.2 (Teorema de convergencia acotada de Arzelà simplificado).

Sea $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a 0. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 0.$$

La demostración de que los Teoremas 3.1 y 3.2 son equivalentes es como sigue:

Es claro que el Teorema 3.1 implica el Teorema 3.2.

Para demostrar que el Teorema 3.2 implica el Teorema 3.1 se procede de la siguiente manera.

Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que también es integrable y tal que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| < C$ para todo $x \in [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces se tiene que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in [a,b]$ y por lo tanto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2C \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

La aplicación $t \mapsto (b-a)t + a$ manda el intervalo $[0,1]$ al intervalo $[a,b]$, por lo tanto si, para $t \in [0,1]$, se define $g_n(t)$ por

$$g_n(t) = \frac{1}{2C} \,|\, f_n((b-a)t+a) - f((b-a)t+a) \,|$$

y se tiene que $g_n : [0,1] \to [0,1]$ y $\lim_{n\to\infty} g_n(t) = 0$ para $t \in [0,1]$.

Como las funciones f_n y f se suponen integrables, por el Teorema 2.12 se tiene que cada g_n es integrable, luego por el Teorema 3.2 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)\, dt = 0,$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\, f_n((b-a)t+a) - f((b-a)t+a) \,|\, dt = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $x = (b-a)t + a$ se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

Por el Teorema 2.12 se tiene que

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

1. Demostración de J. Lewin

A continuación se desarrolla en detalle la demostración del teorema de convergencia acotada de Arzelà dada por J. Lewin en su trabajo [**6**].

Definición 3.3. Un conjunto acotado $E \subset \mathbb{R}$ es llamado *elemental* si E es la unión finita de intervalos acotados, o equivalentemente, si χ_E es una función escalonada.

Observación 3.4. La clase de los conjuntos elementales es cerrada bajo uniones finitas, intersecciones y bajo diferencia de conjuntos.

Definición 3.5. La longitud $\ell(E)$ de un conjunto elemental E se define como $\int_a^b \chi_E$, donde $[a,b]$ es un intervalo que contiene a E.

Observación 3.6. Nótese que en la familia de los conjuntos elementales la longitud coincide con la medida de Lebesgue.

Si E y F son conjuntos elementales y $E \subset F$, entonces $\ell(E) \leq \ell(F)$.

Además la longitud ℓ es finitamente aditiva y finitamente subaditiva, es decir:

Si $E_1, \ldots, E_n$ son conjuntos elementales disjuntos, entonces

$$\ell\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \ell(E_j)$$

y si $E_1, \ldots, E_n$ son conjuntos elementales, entonces

$$\ell\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \ell(E_j).$$

Como es usual, dada una función integrable f en el intervalo $[a,b]$ y un subconjunto elemental E de $[a,b]$, se tendrá que $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$. En consecuencia si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto elemental y $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in E$, entonces $|\int_E f| \leq K\ell(E)$.

Proposición 3.7. *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y sea*

$$\gamma = \sup\{\ell(E) \;:\; E \subset A,\; E \textit{ es elemental}\}.$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto elemental cerrado $E_\varepsilon \subset A$ tal que

$$\ell(E_\varepsilon) > \gamma - \varepsilon.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, de la definición de γ, sigue que existe un conjunto elemental $F \subset A$ tal que

$$\ell(F) > \gamma - \frac{\varepsilon}{2}.$$

El conjunto F es una unión finita de intervalos acotados disjuntos, sean $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p$ los extremos de estos intervalos. Sea $\rho = \text{mín}\{\varepsilon, b_1 - a_1, \ldots, b_p - a_p\}$ y sea

$$E_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{p} \left[a_j + \frac{\rho}{4p}, b_j - \frac{\rho}{4p} \right].$$

Entonces E_ε es elemental y cerrado. Además $E_\varepsilon \subset F \subset A$ y

$$\ell(F) = \ell(E_\varepsilon) + \frac{\rho}{2} \leq \ell(E_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\ell(F) > \gamma - \frac{\varepsilon}{2}$, se tiene que

$$\ell(E_\varepsilon) > \gamma - \varepsilon.$$

□

Lema 3.8. *Sea $\{A_n\}$ una sucesión decreciente de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, con intersección vacía. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos*

$$\alpha_n = \sup\{\ell(E) \ : \ E \text{ es subconjunto elemental de } A_n\}$$

Entonces, $\text{lím}_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Demostración. Como la sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente, se tiene que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ también es decreciente. Como además $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no negativa, es convergente y

$$\alpha_n \geq \lim_{k\to\infty} \alpha_k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La demostración se realizará por contradicción. Supongamos para este fin que la sucesión $\{\alpha_n\}$ no converge a 0, y fijemos $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \text{lím}_{k\to\infty} \alpha_k$, entonces

$$\alpha_n > \delta \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De la definición de α_n y la Proposición 3.7 se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto elemental cerrado E_n tal que

$$E_n \subset A_n \quad \text{y} \quad \ell(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}.$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$H_n = \bigcap_{j=1}^{n} E_j.$$

Entonces se tiene que H_1 es acotado, ya que $H_1 = E_1 \subset A_1$ y A_1 es acotado por hipótesis.

Cada conjunto H_n es cerrado, ya que los conjuntos E_j, $j = 1, 2, \dots$ son cerrados y la intersección arbitraria de cerrados es un conjunto cerrado.

La sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente porque $H_{n+1} = H_n \cap E_{n+1}$. Además como $H_n \subset E_n \subset A_n$ se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Si se demuestra que cada conjunto H_n es no vacío, por el Teorema 1.2 se tendría

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset,$$

lo cual es una contradicción, ya que se supone

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Demostremos, bajo la suposición $\alpha_n > \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que cada H_n es diferente del conjunto vacío:

Si $j \in \mathbb{N}$ y F_j es un subconjunto elemental de $A_j \setminus E_j$ entonces

$$F_j \cap E_j = \emptyset \quad \text{y} \quad F_j \cup E_j \subset A_j,$$

por lo tanto

$$\ell(F_j) + \ell(E_j) = \ell(F_j \cup E_j) \leq \alpha_j.$$

Como $\ell(E_j) > \alpha_j - \frac{\delta}{2^j}$ se tiene que cumplir

$$\ell(F_j) < \frac{\delta}{2^j}. \tag{3.1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} A_n \setminus H_n &= A_n \setminus \bigcap_{j=1}^{n} E_j \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} (A_n \setminus E_j). \end{aligned}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathscr{G}_n$ la familia de los subconjuntos elementales de $A_n \setminus H_n$.

Si $G \in \mathscr{G}_n$, entonces

$$\begin{aligned} G &= G \cap (A_n \setminus H_n) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} G \cap (A_n \setminus E_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} (G \setminus E_j). \end{aligned}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $G \setminus E_j$ es un subconjunto elemental de $A_j \setminus E_j$. Por la desigualdad (3.1) se tiene

$$\ell(G \setminus E_j) < \frac{\delta}{2^j}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \ell(G) &\leq \sum_{j=1}^{n} \ell(G \setminus E_j) \\ &< \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{2^j} \qquad (3.2) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Ahora, como hemos supuesto $\alpha_n = \sup\{\ell(E) \,:\, E \subset A_n,\ E \text{ es elemental}\} > \delta$ tiene que existir un conjunto elemental $\Omega_n \subset A_n$ tal que $\ell(\Omega_n) > \delta$.

Si se cumpliera que $H_n = \emptyset$, entonces se tendría que $\Omega_n \subset A_n \setminus H_n$, es decir $\Omega_n \in \mathscr{G}_n$, lo que contradice la desigualdad (3.2). Por lo tanto $H_n \neq \emptyset$ para todo n, por lo que queda demostrado el lema. $\square$

Demostración del Teorema 3.2.

Dado $\varepsilon > 0$, se define la sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ por

$$A_n = \left\{ x \in [0,1] \,:\, f_i(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para algún } i \geq n \right\}$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$ por definición existe $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N(\varepsilon, x)$ entonces

$$f_m(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir, si $m \geq N(\varepsilon, x)$ se sigue que $x \notin A_m$ y por lo tanto $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Esto se cumple para cada $x \in [0,1]$, por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Por otra parte, por la forma como están definidos los A_n, si $x \in A_{n+1}$ entonces $x \in A_n$, es decir, $A_{n+1} \subseteq A_n$ y $A_n \subseteq A_1$ para todo n.

Como se cumplen todas estas condiciones, por el Lema 3.8 se sigue que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, donde

$$\alpha_n = \sup\{\ell(E) \,:\, E \text{ es subconjunto elemental de } A_n\}.$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y E es un subconjunto elemental de A_n, entonces

$$\ell(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para terminar la demostración bastaría probar que si $n \geq N$ entonces $\int_0^1 f_n \leq \varepsilon$.

Sea $n \geq N$ y sea s una función escalonada tal que $0 \leq s \leq f_n$.

Se definen los conjuntos E y F por

$$E = \left\{x \in [0,1] \,:\, s(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad y \quad F = [0,1]\backslash E$$

Los conjuntos E y F son subconjuntos elementales de $[0,1]$ además $E \subseteq A_n$, por lo que $\ell(E) < \varepsilon/2$. También se tiene que $s(x) < \varepsilon/2$ si $x \in F$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^1 s &= \int_E s + \int_F s \\
&\leq \int_E 1 + \int_F \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \int_E 1 + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \ell(E) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Del Lema 2.15 sigue que

$$\int_0^1 f_n \leq \varepsilon.$$

$\square$

2. Bosquejo de la demostración dada por E. Scheinerman and N. de Silva

A continuación se esbozan las ideas principales de la demostración del teorema de convergencia acotada de Arzelà dada por E. Scheinerman and N. de Silva en su trabajo [**12**].

El siguiente resultado, muy conocido, será necesario.

Proposición 3.9. *Sea $\{A_n\}$ una sucesión decreciente de intervalos abiertos y sea $\ell(A_n)$ la longitud de A_n. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\ell(A_n) > \varepsilon$ para todo n, entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

DEMOSTRACIÓN. Sean a_n y b_n los extremos del intervalo A_n, es decir

$$A_n = (a_n, b_n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}$$

Como la sucesión A_n es decreciente se tiene que

$$a_n \leq a_{n+1}, \qquad b_n \geq b_{n+1} \quad \text{si } n \in \mathbb{N}$$

es decir, $\{a_n\}$ es monótona creciente, $\{b_n\}$ es monótona decreciente y es claro que ambas sucesiones son acotadas. Luego ambas sucesiones son convergentes. Sean,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{y} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Por la monotonía de las sucesiones se tiene

$$a_n \leq a \quad \text{y} \quad b \leq b_n$$

Además, por hipótesis $\ell(A_n) = b_n - a_n > \varepsilon$. Luego, $b - a \geq \varepsilon$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_n \leq a < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b \leq b_n,$$

por lo tanto

$$\frac{a+b}{2} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

. □

Al igual que en el trabajo de J. Lewin, E. Scheinerman and N. de Silva demuestran la versión simplificada del teorema de Arzelà, siguiendo las ideas que se detallan a continuación.

Idea de la demostración del Teorema 3.2

Consideran el contrarrecíproco. Usando una subsucesión de ser necesario se puede asumir, sin pérdida de generalidad, que las integrales $\int_a^b f_n$ están todas por encima de una cota positiva fija. Encontrando un punto $x \in [0,1]$ tal que infinitas funciones $f_n(x)$ estén también por encima una cota positiva fija, concluyen que la sucesión no converge puntualmente a cero.

Supóngase que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\int f_n > 2\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces se pueden inscribir un número finito de rectángulos por debajo del gráfico de f_n cuya área total es mayor que 2ε. Estos rectángulos pueden ser de dos tipos, los que tiene altura menor que ε y que se llamarán pequeños, y los que tiene altura mayor o igual que ε y que se llamarán grandes.

Como la suma de las áreas de los rectángulos pequeños y altos es mayor que 2ε y todos tienen base contenida en $[0,1]$, el área total de los rectángulos altos debe ser mayor que ε. Como el rango de la función está contenido en $[0,1]$, la altura máxima de los rectángulos altos es 1, de donde se puede concluir que la suma de las longitudes de las bases de los rectángulos altos es mayor que ε. Por lo tanto a cada f_n se le puede asociar una unión finita de intervalos abiertos, que se denotará por U_n, cuya longitud total es mayor que ε y tal que f_n solo toma valores por encima de ε en U_n.

Para demostrar el resultado bastaría encontrar un punto $x \in [0,1]$, que pertenezca a infinitos conjuntos U_n. Por lo tanto, si se define la sucesión $\{V_n\}$ por

$$V_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k$$

bastaría probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset.$$

Se tiene que cada conjunto V_n es un conjunto abierto contenido en $[0,1]$, ya que es unión de intervalos abiertos contenidos en $[0,1]$. Además $V_{n+1} \subseteq V_n$, es decir, $\{V_n\}$ es una sucesión decreciente y $\ell(V_n) > \varepsilon$ para todo n.

Por el Teorema 1.4 cada V_n puede expresarse de forma única como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos. Enumerando los intervalos disjuntos que forman cada V_n se construye una sucesión de conjuntos abiertos W_n que satisface:

(1) $W_{n+1} \subseteq W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(2) $W_n \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(3) Cada W_n contiene una unión finita de intervalos abiertos y la longitud de la unión de estos intervalos es mayor que $\varepsilon/2$,

Para concluir la demostración demuestran el siguiente resultado (cabe destacar que en esta demostración la Proposición 3.9 juega un papel importante).

Teorema 3.10. *Sea* $\{\Gamma_n\}$ *una sucesión decreciente de abiertos contenidos en* $[0,1]$*, cada uno de los cuales contiene una unión finita de intervalos abiertos cuya longitud total esta por encima de una cota fija positiva* r*, entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \neq \emptyset.$$

De este teorema se concluye que $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n \neq \emptyset$. Como para cada n se tiene que $W_n \subset V_n$ se concluye que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset.$$

3. Bosquejo de la demostración dada por W. Eberlein

A continuación se esbozan, de manera muy breve, las ideas principales de la demostración, para el caso particular de funciones continuas, del teorema de convergencia acotada de Arzelà dada por W. Eberlein en su trabajo [**2**].

W. Eberlein desarrolla lo que denomina un planteamiento "neogeométrico" acerca de integración sobre espacios de funciones: Trabaja con un concepto abstracto de integral sobre espacio de funciones, pero se limita a trabajar solamente con funciones continuas.

Sea $\mathcal{C}$ el álgebra de funciones reales continuas sobre un espacio Hausdorff compacto S.

Introduce el siguiente concepto de integral:

Definición 3.11. Una *integral* sobre S es un funcional lineal positivo definido en $\mathcal{C}$, es decir, una aplicación I de $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}$ que satisface:

(1) $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$, para $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}$,

(2) $I(f) \geq 0$ siempre que $f \geq 0$.

Establece el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Sean $\{f_n\} \subset \mathcal{C}$ una sucesión de funciones y $f \in \mathcal{C}$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f y existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in S$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f).$$

Para demostrar el Teorema 3.12 procede de la siguiente manera.

Usando la compacidad de S y las relaciones que existen entre las normas de los espacios $\mathcal{L}^p$ para los casos $p = 1$, $p = 2$ y $p = \infty$, da una demostración del siguiente resultado que se debe a M. Stone.

Lema 3.13 (M. Stone [**13**])**.** *Sea I una integral sobre S. Sean $\{f_n\} \subset \mathcal{C}$ una sucesión de funciones y $f \in \mathcal{C}$ tales que*

$$|f| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|,$$

entonces

$$I(|f|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(|f_n|).$$

A partir del Lema 3.13 y usando argumentos geométricos relacionados con convexidad y la ley del paralelogramo obtiene el Teorema 3.12.

Capítulo 4

La teoría de la medida y el teorema de Arzelà

En el presente capítulo se asumirá que el lector está familiarizado con la teoría de la medida de Lebesgue en la recta real. Las definiciones y los detalles de los resultados aquí mencionados se puede encontrar en las referencias [**4**] y [**11**].

1. Definición abstracta de medida

Definición 4.1. Sea X un conjunto cualquiera y $\wp(X)$ la clase de conjuntos *partes de* X. Una clase de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ se llama σ*-álgebra* si

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A}$ si y solo si $A^C \in \mathcal{A}$.
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

En un espacio topológico X, la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos $\mathcal{O}$ tiene un interés especial y es llamada σ*-álgebra de Borel*, la cual es denotada por $\mathcal{B}(X)$.

Definición 4.2. Llamamos *espacio medible* a la pareja $(X, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Los elementos de la clase $\mathcal{A}$ son denominados *conjuntos medibles*.

Definición 4.3. Una *medida* μ sobre un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ es una función

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ es σ-aditiva, es decir, si $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observación 4.4. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es llamado *espacio de medida* y $\mu(A)$ la *medida de* A.

El colocar $\overline{\mathbb{R}}_+$ se refiere a que se acepta que la medida de un conjunto puede ser $+\infty$.

2. Medida de Lebesgue en la recta y algunos resultados previos

Es posible demostrar que existe una única medida μ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que para todo intervalo (a, b) con a y b finitos, se tiene que

$$\mu((a, b)) = b - a.$$

La medida de Lebesgue, m, en $\mathbb{R}$ es la completación de μ. Es decir, se considera la σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y el conjunto

$$\mathcal{N} = \{A \subset \mathbb{R} \,:\, \text{existe } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \mu(B) = 0 \text{ y } A \subset B\},$$

se define $m(A) = 0$ si $A \in \mathcal{N}$ y m se extiende de manera natural a $\mathcal{M}$.

A la σ-álgebra $\mathcal{M}$ se le llama σ-álgebra *de Lebesgue* y se dice que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es *medible Lebesgue* o simplemente *medible* si pertenece a $\mathcal{M}$.

Se tiene que la medida de Lebesgue m extiende a la función longitud ℓ, dada en la Definición 3.5.

El siguiente resultado es válido.

Teorema 4.5. *Sea* $\{A_n\}$ *una sucesión decreciente de subconjuntos medibles de* $\mathbb{R}$. *Si* $m(A_1) < \infty$ *entonces*

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

Corolario 4.6. *Sea* $\{A_n\}$ *una sucesión decreciente de subconjuntos medibles de* $\mathbb{R}$ *tales que* $m(A_1) < \infty$ *y* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = 0.$$

A continuación se explica como algunos de los resultados que se usaron para demostrar el teorema de Arzelà se pueden obtener fácilmente a partir del corolario anterior.

2.1. Relación entre el Corolario 4.6 y Lema 3.8.

Sean A_n y α_n tal como en el Lema 3.8.

Si se supone que los conjuntos A_n son medibles, entonces se tiene que

$$\alpha_n \leq m(A_n)$$

(en realidad se puede probar que hay igualdad).

Por lo tanto, en el caso en que se supone que los conjuntos A_n son medibles, el Lema 3.8 es consecuencia inmediata del Corolario 4.6.

Observación 4.7. Tomando en cuenta que vale el siguiente resultado:

"Una función acotada en un intervalo cerrado y acotado es integrable Riemann si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero".

Se tiene que los conjuntos A_n que aparecen en la demostración de J. Lewin son medibles.

2.2. Relación entre el Corolario 4.6 y el Teorema 3.10.

Sean Γ_n y r como en el Teorema 3.10, entonces se tendría que

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\Gamma_n) \geq r.$$

Por el Corolario 4.6 se tiene que

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n\right) \geq r$$

y por lo tanto la intersección no puede ser vacía.

Luego el Teorema 3.10 es consecuencia inmediata del Corolario 4.6.

3. La integral de Lebesgue y el teorema de convergencia acotada de Arzelà

No se entrará en detalle acerca de la construcción y la definición de la integral de Lebesgue, nos limitaremos a mencionar los hechos más relevantes para este trabajo.

La integral de Lebesgue se define para funciones medibles $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se denotará por

$$(L)\int_{\mathbb{R}} f \quad \text{ó} \quad (L)\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dm(x)$$

y se tienen los siguientes resultados

La integral de Lebesgue extiende a la de Riemann, más precisamente:

Teorema 4.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Riemann. Entonces f es integrable Lebesgue y las dos integrales tienen el mismo valor, es decir*

$$\int_a^b f = (L)\int_a^b f.$$

También vale el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, que se enuncia a continuación.

Teorema 4.9 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). *Sean A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Lebesgue sobre A que converge puntualmente a una función f en A. Si existe una función $h : A \to \mathbb{R}$ integrable Lebesgue sobre A tal que $|f_n(x)| \leq h(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in A$, entonces f es integrable Lebesgue sobre A y se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} (L) \int_A f_n \, d\mu = (L) \int_A f \, d\mu.$$

Considerando $A = [a, b]$, h constante y tomando en cuenta que la integral de Lebesgue extiende a la de Riemann, resulta inmediato que el de teorema de convergencia dominada de Lebesgue implica el teorema de convergencia acotada de Arzelà.

Conclusiones

El *Teorema de Convergencia Acotada de Arzelà* favorece una comprensión más profunda de las propiedades de continuidad de la integral como función de su integrando. En este sentido el Teorema de Arzelà marcó un evento importante en el desarrollo de la teoría de integración.

La integral de Riemann es, sin dudarlo, una herramienta de gran versatilidad, cuyas propiedades permitieron el desarrollo del cálculo infinitesimal a lo largo del siglo XIX, no obstante al referirnos al Teorema de Arzelà queda en evidencia que dicha teoría de integración tiene sus limitaciones cuando se compara con la integral de Lebesgue en un contexto de la teoría de la medida.

Por útimo, el estudio de las demostraciones elementales del Teorema de Arzelà nos ofrece una forma muy pedagógica de lograr una mayor comprensión de gran parte de los conceptos básicos del análisis matemático.

Bibliografía

[1] Cesare Arzelà. Sulla integrazione per serie, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. (4) 1 (1885), páginas 532-537, 596-599. Citado en la(s) página(s): 1, 22

[2] William F. Eberlein. Notes on Integration I: The underlying convergence theorem, *Comm. Pure. Appl. Math* **10** (1957), páginas 357-360. Citado en la(s) página(s): 1, 22, 31

[3] Russell A. Gordon. A convergence theorem for the Riemann integral, *Math. Mag* **73** (2000), páginas 141-147. Citado en la(s) página(s): 1, 2

[4] Ileana Iribarren. *Introducción a la teoría de la medida*, Caracas: Colección Monografías, 2006. Citado en la(s) página(s): 33

[5] Douglas S. Kurtz, Charles W. Swartz. Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane. Second edition. Series in Real Analysis, 13. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012. Citado en la(s) página(s): 11

[6] Jonathan W. Lewin. A truly elementary approach to the bounded convergence theorem. American Mathematical Monthly 93 (1986), no. 5, páginas 395–397. Citado en la(s) página(s): 1, 2, 22, 23

[7] Wilhelmus A. J. Luxemburg. Arzelà's dominated convergence theorem for the Riemann integral, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), páginas 970-979. Citado en la(s) página(s): 1

[8] William F. Osgood. A geometrical method for the treatment of uniform convergence and certain double limits, *Bull. Amer. Math* **Soc. 3** (1896), páginas 59-86. Citado en la(s) página(s): 3, 21

[9] Bernhard Riemann. Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe", Habilitationsschrift (Sobre la posibilidad de representación de una función por una serie trigonométrica,1854 disertación de habilitación). Universidad de Gotinga 1854. Citado en las páginas: 2
Disponible en línea en:
`https://books.google.co.ve/books?id=PDVFAAAAcAAJ&pg=RA1-PA87&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false`

[10] Frigyes Riesz, Über Integrationen unendliche Folgen (Acerca de la integración de secuencias infinitas), J ber.D . Math. Verein., **26** (1917) páginas 274-278. Citado en la(s) página(s): 1

[11] Halsey Royden. Real Analysis, third edition. Prentice Hall 1988. Citado en la(s) página(s): 33

[12] Ed Scheinerman and Nadish de Silva. A Concise, Elementary Proof of Arzelà's Bounded Convergence Theorem *Amer. Math. Monthly* **117** (2010), páginas 918-920. Citado en la(s) página(s): 1, 22, 29

[13] Marshall Stone. Notes on integration, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., I. Vol. **34**, 1948, páginas 336-342. Citado en la(s) página(s): 32