



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Distribución de las crestas de las olas en un Modelo de mar No-Gaussiano

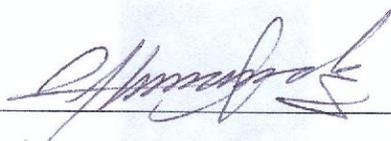
Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Katherine Gil** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. José Benito Hernández.

Caracas, Venezuela

Mayo 2017

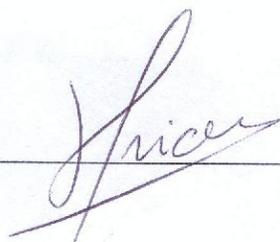
Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “ **Distribución de las crestas de las olas en un Modelo de mar No-Gaussiano.** ”, presentado por la **Br. Katherine Gil**, titular de la Cédula de Identidad **23.949.189**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática.**



Dr. José Benito Hernández
Tutor



Dr(a). Mairene Colina
Jurado



Dr. Ricardo Ríos
Jurado

Resumen

Resumen:

La descripción y evaluación de las olas del mar generadas por el viento proporcionan información vital para el diseño y operación de los sistemas marinos tales como barcos y estructuras costeras y del océano. La elevación del mar en un punto fijo es modelada como una forma cuadrática de un vector valorado en un proceso Gaussiano con media arbitraria. El método del punto de silla es usado para aproximar la intensidad promedio de las elevaciones del mar $\mu^+(u)$, con la cual el nivel del mar atraviesa hacia arriba una altura u . Esta intensidad estimada es además usada para determinar la densidad del alto de la cresta. En este trabajo nosotros presentaremos un nuevo método para aproximar la distribución de las alturas de las crestas de las olas para el modelo No-Gaussiano de la elevación del mar.

Palabras claves:

Mar gaussiano, método de punto de silla, altura de crestas, cruces, fórmula de Rice.

Dedicatoria

Quiero dedicar este proyecto a mi madre, mi hermano y aquellos amigos que son como hermanos, que siempre me han apoyado y han sido un impulso para mí cuando más lo he necesitado.

Contar por personas como ellos ha sido una bendición en mi vida

Agradecimiento

Quiero agradecerle primeramente a Dios, ya que todo se lo debo a Él. También quiero agradecer a mi mamá que siempre me ha ayudado a crecer en distintas áreas de mi vida, a mi hermano que en el transcurso de mi carrera me apoyó incondicionalmente tanto en las buenas como en las malas y aparecía con un chocolate o gelatina para alegrarme el día.

Le agradezco a mi tutor, José B. Hernández por su paciencia la cual ponía en práctica al ayudarme a conseguir soluciones cada vez que yo conseguía un problema, de corazón gracias.

A mis amigos de la universidad (Erlin, Manuel y Jesús Ferrin) por ayudarme en diferentes momentos los cuales fueron muy oportunos. A grandes amigos en general (Marian, Jesús Sojo y Onelis) por distintos motivos.

Por último quisiera mencionar a mis hermanas del alma (Ana, Lalis y Gio), que en diferentes circunstancias estuvieron presentes para que yo pudiera avanzar, una de ellas me prestó su computadora cuando no tenía y siempre se interesó para que pudiera culminar mi carrera con éxito, en todo momento había un tu puedes de su parte, y las otras me escuchaban y me impulsaron cuando lo necesité, cuando pensé en abandonar.

Índice general

| | |
|--|----|
| Introducción | 1 |
| Capítulo 1. Propiedades del mar | 3 |
| 1. La representación espectral | 6 |
| 2. Características de las olas | 12 |
| 3. Cruces y fórmula de Rice | 15 |
| 4. Formulaciones Espectrales | 18 |
| Capítulo 2. Distribución de las alturas de las crestas de las olas | 23 |
| 1. Modelado de la superficie del mar | 24 |
| 2. Promedio de la Intensidad de Cruce hacia Arriba | 26 |
| 3. Método del punto de silla | 28 |
| Capítulo 3. Modelo y Análisis de Resultados | 32 |
| 1. Ejemplos numéricos | 32 |

Introducción

La descripción y evaluación de las olas del mar generadas por el viento proporcionan información vital para el diseño y operación de los sistemas marinos tales como barcos y estructuras costeras y del océano. Mares generados por el viento varían de forma continua en un amplio rango de severidad dependiendo de la ubicación geográfica, la estación, la presencia de los ciclones tropicales, etc. Además, el perfil de onda en un estado del mar determinado es extremadamente irregular en el tiempo y en el espacio, cualquier sentido de regularidad es totalmente ausente, y por lo tanto las propiedades de las olas no pueden ser fácilmente definidas en la ola.

La elevación del mar en un punto fijo es modelada como una forma cuadrática de un vector valorado en un proceso Gaussiano con media arbitraria. El método del punto de silla es usado para aproximar la intensidad promedio de las elevaciones del mar $\mu^+(u)$, con la cual el nivel del mar cruza hacia arriba una altura u . Esta intensidad estimada es además usada para determinar la densidad del alto de la cresta.

Usualmente la elevación de la superficie del mar en un punto fijo es modelado a través de un proceso Gaussiano. Durante un periodo de tiempo limitado de 1 a 3 horas, los registros de las olas pueden ser considerados como estacionarios. A este modelo se le llama Modelo de Mar Gaussiano y los parámetros que definen o determinan el espectro de potencia se le llama el estado del mar. En el análisis de confiabilidad de estructuras oceánicas, la distribución de la altura de las crestas de las olas denominada A_c , es casi siempre un requisito. La forma exacta de la distribución no es conocida. En un mar Gaussiano es práctica común aproximar la distribución A_c por medio de la distribución de Rayleigh. La aproximación es bien exacta para crestas elevadas o mares con espectro de banda estrecha. Sin embargo, es conocido que

para olas empinadas en aguas profundas, o cuando la profundidad de las aguas disminuye, el perfil de la superficie del mar se aparta de la hipótesis Gaussiana. Bajo estas condiciones el perfil de la ola llega a ser asimétrico, con crestas más altas y empinadas, y el valle poco profundo y plano. El modelo de mar Gaussiano puede generar una baja estimación de casi un 20% en referencia con las crestas de las olas. En estos casos la aplicación de la distribución de Rayleigh llega a ser no conservadora y por lo tanto, la asimetría de las olas del mar no debería ser rechazada en el análisis de confiabilidad de estructuras oceánicas

En este trabajo nosotros presentaremos un nuevo método para aproximar la distribución de las alturas de las crestas de las olas para el modelo No-Gaussiano de la elevación del mar.

La estructura de este trabajo es la siguiente, en el capítulo 1 comenzaremos enunciando algunas definiciones correspondientes a las propiedades del mar, dentro de ello mencionaremos la representación espectral, daremos algunas características de las olas, enunciaremos también las definiciones relacionadas con los cruces y la fórmula de Rice, y describiremos los espectros que vamos a utilizar para realizar los calculos necesarios.

En el capítulo 2 daremos definiciones relacionados al modelado de la superficie del mar, recordaremos la definición de la intensidad del cruce hacia arriba de una ola, enunciaremos la definición de la función generadora de acumulación que nos servirá más adelante, y también mencionaremos el método del punto de silla el cual utilizaremos para hallar la aproximación del cruce hacia arriba.

Por último, en el capítulo 3 analizaremos los resultados de tres ejemplos donde usaremos los espectros JONSWAP, Pierson-Moskowitz y TMA con el fin de hallar la aproximación para la distribución de la altura de las crestas de las olas calculadas usando el método del punto de silla.

Propiedades del mar

Lo que se entiende por una ola es una parte de los registro del mar observada entre dos sucesivas elevaciones por encima del nivel de las aguas tranquilas. Ahora bien, presentaremos técnicas clásicas que nos permitirán estudiar el estado del mar haciendo uso de parámetros que es posible obtenerlos a partir del espectro de energía de la ola.

Modelaremos la superficie del mar como una superficie aleatoria M que cambia en el tiempo, en otras palabras, será modelada como un proceso aleatorio M que depende de la posición en el espacio x , del tiempo t y claro está de un parámetro aleatorio ω el cual pertenece a un espacio de probabilidad (Ω, F, P) : $M(t, x, \omega)$. Omitiremos el parámetro ω por simplicidad.

Las boyas, barcos o plataformas estacionarias o bien observaciones satelitales son utilizados para obtener datos estadísticos sobre la altura del mar. En el caso de las boyas la información que se adquiere es el cambio a lo largo del tiempo de la ola en un punto fijo x del espacio. Denotaremos $M(t)$ como la altura del nivel del mar en un punto fijo como función del tiempo.

Para este trabajo nos concentraremos en la información sobre la altura del mar obtenida de las boyas. Ahora bien, con el fin de tener un modelo manejable para estudiar esta situación es indispensable hacer algunas conjeturas. La primera de ellas está relacionada con la estacionaridad. Sabemos que las condiciones de las olas pueden cambiar con el tiempo, y asimismo los parámetros de las distribuciones estadísticas de la altura de las olas, su

longitud, período, entre otros. De esta forma la estacionaridad solo se cumple de manera parcial. Aunque es posible suponer que la distribución de las olas en un punto fijo no cambia con el tiempo si durante un intervalo de tiempo suficientemente prolongado las condiciones meteorológicas son estables.

Supondremos, entonces, que el proceso que sirve de modelo es estacionario. Lo cual quiere decir que la distribución de $M(t+h)$ no varía para cualquier valor de h , y en particular es siempre idéntica a la de $M(0)$.

La siguiente conjetura es que el nivel medio del mar es 0 y mediremos las variaciones respecto a él, lo cual quiere decir que el proceso que consideramos es centrado: $\mathbb{E}[M(t)] = 0$.

Supondremos también que las trayectorias del proceso M sean continuas. Realmente M es una función sobre el espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$ con la propiedad de que para cada $t \in [0, \infty)$ fijo, $M(t, \cdot)$ es medible. Si fijamos $\omega \in \Omega$ se tiene una función

$$M(\cdot, \omega) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

la cual se conoce como la trayectoria del proceso. Pedimos que para casi todo $\omega \in \Omega$ dicha función sea continua.

La siguiente hipótesis es que el proceso sea ergódico lo cual definiremos a más adelante, antes daremos unas definiciones previas.

Definición 1.1. Se dice que un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias indexadas $X(\omega, t)$ ó $X_t(\omega)$ donde t pertenece a un conjunto de índices T y ω pertenece a un espacio Ω . En nuestro caso, T representa el intervalo $[0, \infty)$. Lo cual implica que tenemos un proceso de tiempo continuo.

Tomemos en cuenta que:

- Si $t = t^*$ fijo, $X(t^*, \omega)$ es una variable aleatoria.
- Si $\omega = \omega^*$ fijo, $X(t, \omega^*)$ es una función de t , y se llama una realización del proceso.

Definición 1.2. Dada una realización $M(u, \omega)$ de un proceso estocástico se define el **promedio temporal** como

$$\langle M(u, \omega) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) du.$$

Definición 1.3. Un **proceso es ergódico** si los promedios estadísticos conjuntos coinciden con los temporales. Es decir

$$\mathbb{E}(M(t)) \equiv \int_{\Omega} M(t, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) du.$$

Ahora calcularemos la covarianza entre $M(t)$ y $M(t+h)$

$$\begin{aligned} Cov(M(t), M(t+h)) &= \mathbb{E}[(M(t) - \mathbb{E}(M(t)))(M(t+h) - \mathbb{E}(M(t+h)))] \\ &= \mathbb{E}[M(t)M(t+h)] - \mathbb{E}[M(t)]\mathbb{E}[M(t+h)] \\ &= \int_{\Omega} M(t, \omega)M(t+h, \omega) dP(\omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u)M(u+h) du. \end{aligned}$$

Esto tomando en cuenta la hipótesis de ergodicidad y que $\mathbb{E}[M(t)] = 0$.

Por último llegamos a la hipótesis de Gaussianidad. En estados completamente desarrollados del mar en aguas profundas, con frecuencia se aprueba el hecho que puedan ser modelados por procesos Gaussianos. Lo cual quiere decir que la distribución de la altura de la ola en un punto dado y en un instante de tiempo t tiene la siguiente función de distribución:

$$P(M(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

donde σ^2 es la varianza de la distribución.

Además, para cualquier valor de n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(M(t_1+h), M(t_2+h), \dots, M(t_n+h))$ tiene densidad Gaussiana:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-1}{2} u' \Sigma^{-1} u},$$

donde $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\Sigma = (Cov(M(t_i), M(t_j)))$.

Debido a la suposición de que el proceso es estacionario y centrado, la función de covarianza satisface lo siguiente

$$r(s, t) = \text{Cov}(M(s), M(t)) = \mathbb{E}(M(s)M(t)) = r(|s - t|).$$

En particular, si $s = t$

$$r(s, s) = \text{Var}(M(s)) = \mathbb{E}(M(s)^2) = r(0).$$

La función de covarianza r es par y por lo tanto, si es diferenciable en 0, la derivada debe ser nula, más aún si r tiene dos derivadas en el origen la segunda derivada debe ser negativa, es decir, $r''(0) < 0$.

1. La representación espectral

A continuación enunciaremos un teorema que nos será de utilidad más adelante.

Teorema 1.1. (Teorema de Bochner). Una función continua $r(t)$ es definida positiva, y por consiguiente una función de covarianza si y solo si, existe una función real no-decreciente, continua a la derecha y acotada $F(\omega)$ tal que

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega).$$

Observación 1.1. El presente teorema caracteriza la clase de todas las funciones de covarianza continuas como las transformadas de Fourier de todas las medidas positivas y finitas en \mathbb{R} .

Demostración:

Primero realizaremos la segunda implicación.

(<=) Supongamos que $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^n z_j \overline{z_k} r(t_j - t_k) &= \sum_{j,k=1}^n z_j \overline{z_k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_j - i\omega t_k} dF(\omega) \\
&= \sum_{j,k=1}^n z_j \overline{z_k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_j} e^{-i\omega t_k} dF(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n z_j e^{i\omega t_j} \right) \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k e^{i\omega t_k} \right)} dF(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n z_j e^{i\omega t_j} \right|^2 dF(\omega) \geq 0,
\end{aligned}$$

es decir, r es definida positiva, para $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

(\Rightarrow) Para la primera implicación utilizaremos propiedades de funciones características. Veamos que dado $r(t)$ existe una función de distribución $F_\infty(\omega) = F(\omega)/F(\infty)$ tal que

$$(1.1) \quad F_\infty(\infty) - F_\infty(-\infty) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF_\infty(\omega) = \frac{r(t)}{r(0)}.$$

Para esto, tomaremos un número real $A > 0$, y definimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
q(\omega, A) &= \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A r(t-u) e^{-i\omega(t-u)} dt du \\
&= \frac{1}{2\pi A} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) e^{-i\omega t_j} \overline{e^{-i\omega t_k}} \Delta t_j \Delta t_k \\
&= \frac{1}{2\pi A} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) \Delta t_j e^{-i\omega t_j} \overline{\Delta t_k e^{-i\omega t_k}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Debido a que $r(t)$ es definida positiva (los t_j definen una partición de $[0, A]$). Pasando al límite, q dará la densidad de la distribución espectral deseada. Expresamos $q(\omega, A)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
q(\omega, A) &= \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A r(t-u) e^{-i\omega(t-u)} dt du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) r(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \mu(t/A) r(t) e^{-i\omega t} dt,
\end{aligned}$$

donde

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{para } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Una vez definido $q(\omega, A)$ la demostración de que existe una función de distribución $F_\infty(\omega) = F(\omega)/F(\infty)$ tal que se cumple la ecuación (1.1), se realiza en 3 pasos que están dados como sigue:

Paso 1:

Mostrar que $q(\omega, A) \geq 0$ es integrable, y

$$\int_{\omega} q(\omega, A) d\omega = r(0),$$

de manera que $q(\cdot, A)/r(0)$ es una función de densidad estadística regular.

Paso 2:

Probar que

$$\left(1 - \frac{|t|}{A}\right) \frac{r(t)}{r(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\omega, A)}{r(0)} e^{i\omega t} d\omega,$$

de manera que la función $\left(1 - \frac{|t|}{A}\right) \frac{r(t)}{r(0)}$ para $|t| \leq A$ es la función característica para la densidad $q(\omega, A)/r(0)$.

Paso 3:

Tomar límite cuando $A \rightarrow \infty$ y observar que

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) r(t) = r(t).$$

Puesto que el límite de una sucesión convergente de funciones características es también una función característica, en el caso de que la función característica sea continua, debemos demostrar que existe una distribución estadística tal que $r(t)/r(0)$ es su función característica.

Ahora demostraremos los pasos 1 y 2, para ello multiplicaremos $q(\omega, A)$ por $\mu(\omega/2M)$ integraremos, y por el Teorema de Fubini cambiaremos el orden de integración debido a que $\mu(\omega/2M)\mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t}$ es acotada y tiene soporte en $[-2M, 2M] \times [-A, A]$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)q(\omega, A) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)e^{-i\omega t} d\omega dt. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|\omega|}{2M}\right) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \int_{-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|\omega|}{2M}\right) \cos(\omega t) d\omega \\
&= \int_{-2M}^0 \left(1 + \frac{\omega}{2M}\right) \cos(\omega t) d\omega + \int_0^{2M} \left(1 - \frac{\omega}{2M}\right) \cos(\omega t) d\omega \\
&= \int_{-2M}^0 \cos(\omega t) d\omega + \int_{-2M}^0 \frac{\omega}{2M} \cos(\omega t) d\omega + \int_0^{2M} \cos(\omega t) d\omega \\
&\quad - \int_0^{2M} \frac{\omega}{2M} \cos(\omega t) d\omega \\
&= \frac{\text{sen}(\omega t)}{t} \Big|_{-2M}^0 + \left(\frac{\omega}{2M} \frac{\text{sen}(\omega t)}{t} + \frac{\cos(\omega t)}{2Mt^2} \right) \Big|_{-2M}^0 + \frac{\text{sen}(\omega t)}{t} \Big|_0^{2M} \\
&\quad - \left(\frac{\omega}{2M} \frac{\text{sen}(\omega t)}{t} + \frac{\cos(\omega t)}{2Mt^2} \right) \Big|_0^{2M} \\
&= \frac{2\text{sen}(2Mt)}{t} - \frac{\text{sen}(2Mt)}{t} + \frac{1}{2Mt^2} - \frac{\cos(-2Mt)}{2Mt^2} - \frac{\text{sen}(2Mt)}{t} \\
&\quad - \frac{\cos(2Mt)}{t} + \frac{1}{2Mt^2}
\end{aligned}$$

Simplificando se tiene

$$= 2M \left(\frac{\text{sen}(Mt)}{Mt} \right)^2,$$

de manera que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)e^{-i\omega t} dt d\omega = \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t) \left(\frac{\text{sen}(Mt)}{Mt} \right)^2 dt,$$

hacemos el cambio $s = Mt$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t) \left(\frac{\text{sen}(Mt)}{Mt} \right)^2 dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\left(\frac{s}{MA}\right)r\left(\frac{s}{M}\right) \left(\frac{\text{sen}(s)}{s} \right)^2 ds \\
&\leq \frac{1}{\pi} r(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(s)}{s} \right)^2 ds = r(0).
\end{aligned}$$

Ahora bien, $\mu(\omega/2M)q(\omega, A) \nearrow q(\omega, A)$ cuando $M \rightarrow \infty$, de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\omega, A) d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)q(\omega, A) d\omega \leq r(0).$$

Hemos demostrado que $q(\omega, A)$ y $\mu(t/A)r(t)$ son absolutamente integrables sobre toda la recta real.

Dado que ellas forman una transformada de Fourier, es decir,

$$q(\omega, A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t} dt,$$

usando el Teorema de Inversión de Fourier, obtenemos

$$\mu(t/A)r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\omega, A)e^{i\omega t} d\omega,$$

al multiplicar la expresión anterior por $1/r(0)$ se obtiene

$$\mu(t/A)\frac{r(t)}{r(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\omega, A)}{r(0)}e^{i\omega t} d\omega,$$

lo cual demuestra el paso 2.

Si tomamos $t = 0$, obtenemos el paso 1) y $f_A(\omega) = q(\omega, A)/r(0)$ es una función de densidad de probabilidad para alguna distribución con función característica

$$\phi_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\omega, A)}{r(0)}e^{i\omega t} d\omega = \frac{\mu(t/A)}{r(0)}r(t).$$

Para el paso 3 necesitamos uno de los lemas básicos de la teoría de probabilidades, la propiedad de convergencia de funciones características: si $F_A(x)$ es una familia de funciones de distribución con funciones características $\phi_A(t)$, y $\phi_A(t)$ converge a una función continua $\phi(t)$, cuando $A \rightarrow \infty$, entonces existe una función de distribución $F(x)$ con función característica $\phi(t)$ y $F_A(x) \rightarrow F(x)$, para todo x donde $F(x)$ es continua.

Aquí las funciones características $\phi_A(t) = \frac{\mu(t/A)}{r(0)}r(t)$ convergen a $\phi(t) = r(t)/r(0)$, y ya que suponemos $r(t)$ continua, sabemos de lo anterior que

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x f_A(\omega) d\omega,$$

converge a una función de distribución $F_\infty(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, con función característica $\phi(t)$:

$$\frac{r(t)}{r(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF_\infty(\omega).$$

Así, hemos obtenido la representación espectral deseada con $F(\omega) = r(0)F_\infty(\omega)$. □

Ahora bien, la función de covarianza de cualquier proceso estacionario es definida positiva:

$$\sum_{i,j=1}^n r(t_i - t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(M(t_i)M(t_j)) z_i z_j = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n M(t_i) z_i \right)^2 \geq 0.$$

Para cualquier n y cualesquiera z_1, \dots, z_n y t_1, \dots, t_n .

Y por el Teorema de Bochner r es la Transformada de Fourier de una función de distribución la cual llamaremos S , esto quiere decir que r tiene una representación espectral:

$$r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} dS(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) dS(\tau).$$

Donde S es conocida como la función de distribución espectral. En el caso de que su derivada exista, es la densidad espectral y se conoce también como el espectro.

Si la función de covarianza es integrable entonces la fórmula anterior es invertible

$$S(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh.$$

Usando la representación espectral se tiene

$$r'(h) = \int_{-\infty}^{\infty} -\tau \operatorname{sen}(\tau h) dS(\tau)$$

$$r''(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \cos(\tau h) dS(\tau),$$

y en particular,

$$r''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau).$$

La integral anterior se le conoce como el segundo momento espectral

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = -r''(0).$$

Si r no es dos veces diferenciable en 0 entonces $m_2 = \infty$.

La presencia del segundo momento espectral está asociada a la regularidad de trayectorias del proceso. Cuando $m_2 < \infty$ la función de covarianza posee el siguiente desarrollo alrededor del origen:

$$\begin{aligned} r(h) &= r(0) + \frac{r'(0)(h-0)}{1!} + \frac{r''(0)(h-0)^2}{2!} + O(h^2) \\ &= \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2} + O(h^2), \end{aligned}$$

donde $O(h^2)$ es el resto, término que depende de h y es pequeño si h está próximo al punto a , que en este caso es 0. Este desarrollo fue obtenido haciendo uso de la fórmula de Taylor de $r(h)$ alrededor del origen. Más aún, es posible mostrar que m_2 es finito si y sólo si M es diferenciable en media cuadrática, es decir, si y sólo si hay un proceso $M'(t)$ tal que

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \rightarrow M'(t) \text{ en } L^2.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(M'(t)) = 0, \text{ Var}(M'(t)) = -r''(0) = m_2.$$

El proceso $M'(t)$ es Gaussiano, independiente de $M(t)$ y su función de covarianza es

$$\text{Cov}(M'(t), M(t+h)) = -r''(h)$$

2. Características de las olas

A continuación daremos a conocer conceptos esenciales que caracterizan a las olas del mar.

Altura significativa

En el caso de la **altura significativa** podemos afirmar que es la medida más importante de la dureza o severidad del mar. Dicha medida lo que trata de mostrar es la altura de las olas más altas que uno puede hallar durante un periodo considerable de tiempo. Una de las definiciones generalmente aceptadas de la altura significativa es la siguiente

Definición 1.4. La **altura significativa** de un estado del mar se define como

$$H_s = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))}.$$

Características basadas en cruces del nivel medio

Sea $M(t)$ el proceso que modela las olas en un punto del espacio; $M(t)$ simboliza la altura sobre el nivel medio del mar. Ahora bien, supongamos que $M(t)$ cruza hacia abajo este nivel medio en los instantes t_1, t_2, \dots, t_n . El periodo de descenso de la ola es definido como el tiempo, contado en segundos, entre el paso de dos cruces sucesivos del nivel medio hacia abajo por un mismo punto. Lo denotaremos como $T_{d,k}$:

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k$$

Definición 1.5. La **altura de la ola** es la distancia vertical entre el máximo y mínimo valor de M en este intervalo y la denotamos como $H_{d,k}$.

Definición 1.6. Una **cresta** a_c es el máximo valor de M para t en un intervalo entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio: $t_k < t < t_{k+1}$.

Definición 1.7. Un **seno o valle** a_s es el (valor absoluto del) valor mínimo de M en el mismo intervalo de tiempo de la cresta.

Observación 1.2. Para distinguir diferentes crestas y senos en los intervalos sucesivos colocamos un índice k en cada valor $(a_{c,k}, a_{s,k})$.

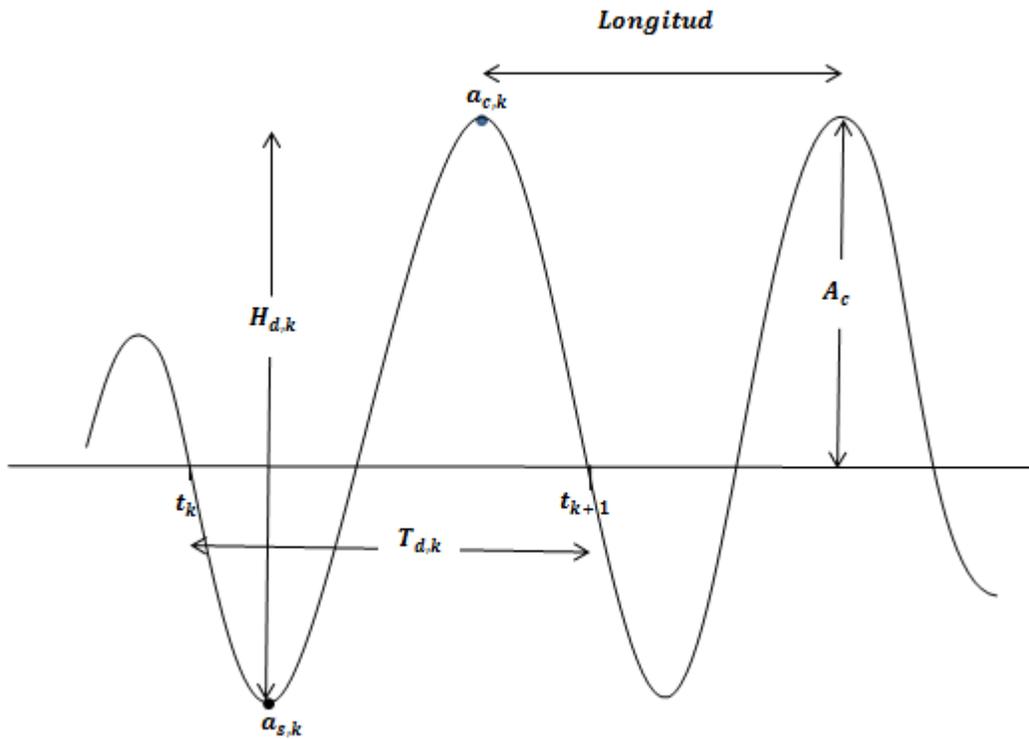
Definición 1.8. La **longitud de la ola** es la distancia horizontal entre dos senos o dos crestas sucesivas.

Definición 1.9. La **altura de la cresta** A_c es la distancia vertical entre el nivel medio del mar y el punto más alto de la cresta.

Definición 1.10. La **pendiente** es la relación entre la altura y la longitud de la ola (H/L) .

Definición 1.11. La **velocidad de propagación** es el avance de la ola (puede expresarse como el cociente entre la longitud de la ola y el período).

Otras características



Definición 1.12. El **momento espectral de orden n** es definido como sigue

$$(1.2) \quad m_n = \int_0^{\infty} \tau^n S(\tau) d\tau$$

Observación 1.3. Previamente, definimos el segundo momento espectral y pudimos notar que para un proceso Gaussiano, su existencia tiene relación con la regularidad de las trayectorias. De manera general, la existencia de momentos de orden superior está asociada a una mayor regularidad de las trayectorias. Ahora bien, además de los momentos espectrales un parámetro asociado a la densidad espectral de interés en el estudio del mar es la altura significativa la cual definimos anteriormente, ahora la presentamos en términos de los momentos espectrales

$$H_s = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))} = 4\sqrt{m_0}$$

A partir del espectro la frecuencia media está dada por

$$\frac{m_1}{m_0}$$

Observación 1.4. En el caso de que el espectro esté concentrado alrededor de una frecuencia dominante, la frecuencia media da el período medio.

3. Cruces y fórmula de Rice

Para un determinado nivel u , llamamos G_u al conjunto de las funciones continuas en $0 \leq t \leq 1$ tal que dichas funciones nos son idénticamente iguales a u en algún intervalo y $f(0) \neq u$, $f(1) \neq u$.

Se dice que $x \in G_u$ tiene un cruce hacia arriba del nivel u en $t_0 > 0$ si existe $\varepsilon > 0$, tal que $x(t) \neq u$ en $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ y $x(t) \geq u$ en $(t_0, t_0 + \varepsilon)$. Ya que $x(t) \in G_u$, debe haber puntos en $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ donde $x(t) < u$, y puntos en $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ donde $x(t) > u$. Para el intervalo $I=[0,1]$, escribimos $N_I^+(x, u)$ para el número de cruces por $x(t)$ en I , ($N_I^+ = N_I^+(x, u)$) = el número de u -cruces por $x(t)$, $t \in I$).

De manera similar que en el caso anterior pero invirtiendo las desigualdades, se dice que $x \in G_u$ tiene un cruce hacia abajo del nivel u en t_0 si existe $\varepsilon > 0$ tal que $x(t) \geq u$ en $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ y $x(t) \neq u$. Denotamos $N_I^-(x, u)$ para el número de cruces por $x(t)$ en I .

Se dice que x tiene un cruce de nivel u a t_0 si en cada vecindad de t_0 , existen puntos t_1 y t_2 tal que $[x(t_1) - u][x(t_2) - u] < 0$. Denotamos $N_I(x, u)$ para el número de cruces por $x(t)$ en I .

Definición 1.13. La **intensidad de los cruces hacia arriba** es cualquier función $\mu_t^+(u)$ tal que

$$\int_{t \in I} \mu_t^+(u) dt = \mathbb{E}(N_I^+(x, u)).$$

Definición 1.14. Del mismo modo se define la **intensidad de los cruces**, como $\mu_t(u)$ si

$$\int_{t \in I} \mu_t(u) dt = \mathbb{E}(N_I(x, u)).$$

En el caso de un proceso estacionario, $\mu_t^+(u) = \mu^+(u)$ y $\mu_t(u) = \mu(u)$ son independientes de t . En general, la intensidad es la media del número de eventos por unidad de tiempo, calculadas en el instante t .

La fórmula de Rice para los procesos absolutamente continuos

La fórmula de Rice permite calcular el valor esperado para el número de cruces en un intervalo.

A continuación mostramos la versión más simple de la fórmula de Rice, válida para los procesos $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con trayectorias de la muestra absolutamente continua y distribución absolutamente continua con la densidad de $f_{x(t)}(u) = f_{x(0)}(u)$, independiente de t . Para un proceso de este tipo, el derivado $x'(t)$ existe casi en todas partes, y las esperanzas condicionales que están dadas por

$$\mathbb{E}(x'(0)^+ \mid x(0) = u), \quad \mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u),$$

existen, (con $x^+ = \max(0, x)$).

Teorema 1.2. (Fórmula de Rice). Para cualquier proceso estacionario $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con densidad $f_{x(0)}(u)$, las intensidades de los cruces y cruces hacia arriba son como sigue

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mu(u) &= \mathbb{E}(N_{[0,1]}(x, u)) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{x(0), x'(0)}(u, z) dz \\ &= f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u). \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \mu^+(u) &= E(N_{[0,1]}^+(x, u)) = \int_0^{\infty} z f_{x(0), x'(0)}(u, z) dz \\ &= f_{x(0)}(u) E(x'(0)^+ \mid x(0) = u). \end{aligned}$$

Dichas expresiones son válidas para casi cualquier u , siempre que existan las densidades involucradas.

Antes de realizar la prueba corta de la ecuación (1.2) vamos a considerar algunos hechos acerca de las funciones de variación acotada, probados por Banach.

Para formular la prueba, escribimos para cualquier función continua $f(t)$, $t \in [0, 1]$, y el intervalo $I = [a, b] \subset [0, 1]$, $N_I(f, u) =$ el número de $t \in I$ tal que $f(t) = u$.

Además, definimos la variación total de $f(t)$, $t \in I$ como $\sup \sum |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$, donde se toma el supremo sobre todas las subdivisiones $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$.

Lema 1.1. (Banach) Para cualquier función continua $f(t)$, $t \in I$, la variación total es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du.$$

Además, si $f(t)$ es absolutamente continua con derivada $f'(t)$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du = \int_I |f'(t)| dt.$$

De manera similar, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es cualquier conjunto medible Borel, y 1_A es su función de indicatriz, entonces

$$(1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(f, u) du = \int_I 1_A(f(t)) |f'(t)| dt.$$

Demostración (formula de Rice):

Probaremos (1.3) usando el lema de Banach en el proceso estacionario $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con trayectorias muestrales absolutamente continuas, y por lo tanto c.s diferenciable. Si $x(t)$ tiene funciones muestrales absolutamente continuas c. s, entonces (1.5) se cumple para casi toda realización, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(x, u) du = \int_I 1_A(x(t)) |x'(t)| dt.$$

Tomando esperanza y aplicando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, se tiene

$$\begin{aligned} |I| \int_{u \in A} \mu(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) \mathbb{E}(N_I(x, u)) du \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(x, u) du \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\int_I 1_A(x(t)) |x'(t)| dt \right) \\ &= |I| \mathbb{E} (1_A(x(0)) |x'(0)|) \\ &= |I| \int_{u \in A} f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u) du; \end{aligned}$$

aquí también utilizamos el hecho que $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ es estacionario.

Debido que A es un conjunto medible arbitrario, obtenemos el resultado deseado,

$$\mu(u) = f_{x(0)}(u)\mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u)$$

para casi todos los u . De manera similar se realiza la prueba de (1.4). \square

Observación. La fórmula de Rice es posible extenderla a procesos no estacionarios, en dicho caso la intensidad de cruces depende del tiempo.

Definición 1.15. La **función generadora de acumulación**, $K(x, y)$, de $f(0)$, $\dot{f}(0)$ es definida como

$$K(x, y) = \ln(\mathbb{E}[e^{xf(0) + y\dot{f}(0)}]), \quad (x, y) \in \mathcal{X},$$

donde f, \dot{f} son funciones de densidad y \mathcal{X} es el argumento establecido para que la última integral converja.

4. Formulaciones Espectrales

A continuación presentaremos tres espectros que nos servirán de ejemplo más adelante

Espectro de Pierson-Moskowitz

La formulación espectral de Pierson-Moskowitz fue desarrollada del análisis de datos obtenidos en el Atlántico Norte. El análisis fue llevado a cabo solo sobre registros de olas seleccionados de manera que hayan provenido de un mar completamente desarrollado. Los espectros no-dimensionales, $S(f)g^3/U^5$, son clasificados en 5 grupos diferentes para rangos de velocidad del viento entre 20 y 40 nudos. La magnitud de los espectros alrededor de la frecuencia modal muestra algunas dispersiones. Pierson-Moskowitz atribuyen la discrepancia a la dificultad para determinar la velocidad precisa del viento medida en la cubierta de un barco (donde se tomaron los datos) a 19.5 m.s.n.m.

Para resolver esta dificultad, la velocidad del viento en cada grupo fue modificada tomando la raíz quinta del radio de Sq^3/U^5 (donde S es la densidad espectral en la frecuencia modal) para promediar el valor. Esto es, evaluando el siguiente factor k_j

$$k_j = \left(S_j \frac{g^3}{U_j^5} / \frac{1}{n} \sum_j S_j \frac{g^3}{U_j^5} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Y modificando la velocidad del viento como $k_j U$ para cada grupo trazando una línea promedio se obtendría la siguiente formulación espectral en términos de la frecuencia ω :

$$(1.6) \quad S(\omega) = \frac{Aq^2}{\omega^5} e^{-B\left(\frac{g/U}{\omega}\right)^4},$$

donde $A = 8,10 \times 10^{-3}$, $B = 0,74$, g es la gravedad y U es la velocidad del viento a 19.5 m.s.n.m. Como muestra (1.5) la formulación espectral de Pierson-Moskowitz depende de un sólo parámetro, la velocidad del viento U . La frecuencia modal, ω_m , es un valor fijo y también es dado como función de la velocidad del viento. Esto es,

$$(1.7) \quad \omega_m = 0,87 \frac{g}{U}$$

Es muy conveniente, en la práctica, que el espectro de las olas sea dado como una función de la altura significativa, H_s , en vez de la velocidad del viento. Para esto, la función de densidad espectral dada en (1.5) es integrada para obtener

$$(1.8) \quad \int_0^\infty S(\omega) d\omega = \frac{A}{4B} \frac{U^4}{g^2}.$$

Por otra parte, suponiendo que el espectro es de banda estrecha, el área bajo la función de densidad espectral es igual a $\left(\frac{H_s}{4}\right)^2$

$$(1.9) \quad \int_0^\infty S(\omega) d\omega = \left(\frac{H_s}{4}\right)^2.$$

Por lo tanto, de (1.7) y (1.8) podemos derivar la siguiente relación entre la velocidad del viento y la altura significativa para un mar completamente desarrollado:

$$(1.10) \quad H_s = 2\sqrt{\frac{A}{B}} \left(\frac{U^2}{g}\right) = 0,21 \left(\frac{U^2}{g}\right),$$

donde $A = 8,10 \times 10^{-3}$, $B = 0,74$.

Entonces, de (1.5) y (1.9), el espectro de Pierson-Moskowitz en términos de la altura significativa, es el siguiente

$$(1.11) \quad S(\omega) = \frac{8,10}{10^3} \frac{g^2}{\omega^5} e^{-0,032 \left(\frac{(g/H_s)^2}{\omega^4}\right)^4}.$$

Más aun, derivando (1.10) con respecto a ω , e igualándola a cero, obtenemos la relación entre la frecuencia modal, ω_m , y la altura significativa como sigue:

$$(1.12) \quad \omega_m = 0,4 \sqrt{\frac{g}{H_s}}.$$

Usando la relación dada en (1.11), podemos escribir el espectro como

$$(1.13) \quad S(\omega) = \frac{8,10}{10^3} \frac{g^2}{\omega^5} e^{-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^4}.$$

Espectro JOSNWAP

La formulación JONSWAP está basada en un extenso programa de medición conocido como Joint North Sea Wave Project llevado a cabo en 1968 y 1969 a lo largo de una línea que se extiende 160km en el Mar del Norte desde la Isla Sylt.

El espectro representa mares generados por el viento con limitaciones de alcance, y las entradas de la formulación son la velocidad del viento y la longitud del alcance, la formulación original es dada como sigue:

$$(1.14) \quad S(f) = \alpha \frac{g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f^5} e^{-1,25 \left(\frac{f_m}{f} \right)^4} \gamma e^{-\left(\frac{(f - f_m)^2}{2\sigma f_m} \right)^4},$$

donde,

γ = parámetro, 3.30 como promedio,

$\alpha = 0,076\bar{x}$,

$\sigma = 0,07$ para $f \leq f_m$, y $0,09$ para $f > f_m$,

$f_m = 3,5(g/\bar{U})\bar{x}^{-0,33}$,

\bar{x} = alcance no-dimensional = gx/\bar{U}^2 ,

x = longitud de alcance del viento,

\bar{U} = velocidad media del viento,

g = constante de gravedad.

La fórmula se puede expresar en términos de la frecuencia ω en rps como

$$(1.15) \quad S(\omega) = \alpha \frac{g^2}{(\omega)^5} e^{-1,25 \left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^4} \gamma e^{-\left(\frac{(\omega - \omega_m)^2}{2\sigma\omega_m} \right)^4},$$

donde $\omega_m = 2\pi f_m$.

El parámetro γ se llama parámetro de forma de pico y representa el radio del máximo de energía de densidad espectral para el máximo correspondiente al espectro de Pierson-Moskowitz. El término asociado con la potencia exponencial de γ se llama factor de mejoramiento de pico y así el espectro JONSWAP es el producto del espectro de Pierson-Moskowitz y el factor de mejoramiento de pico.

El valor del parámetro de forma de pico γ es usualmente elegido como 3.30 y el espectro se llama formulación espectral JONSWAP. Los valores de γ obtenidos del análisis de los datos originales, varían aproximadamente de 1 a 6 aun para la velocidad del viento constante, γ es de hecho una variable aleatoria con distribución aproximadamente normal de media de 3.30 y varianza 0.62.

Espectro TMA

La formulación espectral TMA es desarrollada como una extensión del espectro JONSWAP de modo que este se pueda aplicar a olas generadas por el viento en aguas de profundidad finita. El concepto está basado en la ley de similitud de Kitaigorodskii et al. (1975) y su validez se verifica a través del análisis de tres conjuntos de datos, obtenidos cerca de TEXEL en el Mar del Norte, durante el proyecto MARSEN conducido en el Mar del Norte y en el proyecto ARSLOE llevado a cabo en Duck, Carolina del Norte. EEUU.

De manera de extender la formulación espectral de Phillips dada por

$$S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5}$$

para que incluya olas en mares de profundidad finita, Kitaigorodski et. al. (1975) desarrollaron el siguiente espectro:

$$(1.16) \quad S(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \phi(\omega_h),$$

donde $\phi(\omega_h)$ es un factor de transformación dado por

$$(1.17) \quad \phi(\omega_h) = \left[\frac{(k(\omega, h))^{-3} \frac{\partial}{\partial \omega} k(\omega, h)}{(k(\omega, \infty))^{-3} \frac{\partial}{\partial \omega} k(\omega, \infty)} \right].$$

En la fórmula anterior ω_h es una frecuencia no-dimensional definida por $\omega\sqrt{\frac{h}{g}}$ (h = profundidad de agua) y $k(\omega, h)$ es el número de olas asociado con la relación de dispersión de las olas en aguas de profundidad finita.

Brows et. al.(1985) aplicaron el factor de transformación al espectro JONSWAP y presentaron el espectro TMA como sigue

$$S(\omega) = [\text{Espectro JONSWAP } (\omega)]\phi(\omega_h)$$

$$S(f) = [\text{Espectro JONSWAP } (f)]\phi(\omega_h),$$

donde los espectros JONSWAP $S(\omega)$ y $S(f)$ están dados en (1.14) y (1.13).

Capítulo 2

Distribución de las alturas de las crestas de las olas

La aproximación de la distribución de las alturas de las crestas de las olas que se usará será la siguiente

$$(2.1) \quad P(A_c > h) \leq \frac{\mu^+(h)}{\mu^+(m)},$$

donde $\mu^+(h)$ es la intensidad con la cual la elevación del mar cruza el nivel h en una dirección hacia arriba y m es el llamado nivel de aguas tranquilas, a menudo tomado como el valor promedio de la elevación del mar o el nivel que el mar cruza frecuentemente, el cual coincide con el mar Gaussiano.

Para un mar Gaussiano, con niveles de aguas tranquilas $m = 0$, la intensidad de cruzar hacia arriba $\mu^+(h)$, esta dada por la fórmula de Rice,

$$(2.2) \quad \mu^+(h) = \frac{1}{T_z} e^{-8 \left(\frac{h}{H_s} \right)^2},$$

donde T_z es el promedio de periodo de la ola y H_s es el valor significativo de la altura de la ola. Es sabido que para el mar Gaussiano la aproximación de Rayleigh funciona muy bien para olas altas, y en realidad es una aproximación conservadora ya que tenemos

$$(2.3) \quad P(A_c > h) \leq e^{-8 \left(\frac{h}{H_s} \right)^2}.$$

La aproximación de Rayleigh es un método comunmente usado para hallar la distribución de la altura de la cresta para modelo de mar Gaussiano. Extenderemos la aproximación a mares no-Gaussianos con el uso de la ecuación (2.1).

1. Modelado de la superficie del mar

Comenzamos con el modelo lineal de mar, que postula que la superficie del mar es la suma de las ondas de coseno simples, en nuestro caso consideramos sólo el mar con cresta grande, es decir, la superficie no depende de la coordenada y . Además consideramos un mar unidireccional, donde todas las olas viajan a lo largo del eje x con la velocidad positiva.

Definición 2.1. El **mar lineal** η_l que consiste en N olas coseno, está dada por

$$(2.4) \quad \eta_l(x, t) = \sum_{n=-N}^N \frac{A_n}{2} e^{i\omega_n t - k_n x},$$

donde por cada ola elemental: A_n denota su amplitud en valor complejo, ω_n frecuencia angular y k_n el número de olas. Asumimos que $A_{-n} = A_n^*$, donde z^* denota el conjugado complejo de z . Ya que η_l debe ser un campo de valor real, tenemos que asumir que $\omega_{-j} = -\omega_j$ y $k_{-j} = -k_j$. Finalmente por la denominada relación de dispersión.

$$\omega^2 = gk \tanh(hk), \quad \omega > 0, k > 0,$$

donde g y h son la aceleración de la gravedad y la profundidad del agua respectivamente.

Las mediciones del valor real del mar muestran que el modelo lineal es a menudo demasiado simplista y lleva a errores en la predicción de la altura de las crestas (en aguas profundas) de alrededor del 10 al 20%. El modelo puede ser corregido usando términos de segundo orden que permiten la interacción entre los elementos de olas de coseno, lo cual definiremos a continuación.

Definición 2.2. La **corrección cuadrática** η_q está dada por

$$(2.5) \quad \eta_q(x, t) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \frac{A_n A_m}{2} E(\omega_n, \omega_m) e^{i\omega_n t - k_n x} e^{i\omega_m t - k_m x},$$

donde las amplitudes A , las frecuencias angulares ω y el número de olas k satisface la misma relación como en el modelo lineal. La **función de transformación cuadrática**, $E(\omega, \tilde{\omega})$ está dada por la siguiente definición

Definición 2.3. La **función de transformación cuadrática**, $E(\omega, \tilde{\omega})$ está dada por,

$$(2.6) \quad E(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{\frac{gk\tilde{k}}{\omega\tilde{\omega}} - \frac{1}{2g}(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + \omega\tilde{\omega}) + \frac{g}{2} \frac{\omega\tilde{k}^2 + \tilde{\omega}}{\omega\tilde{\omega}(\omega + \tilde{\omega})}}{1 - g \frac{k+\tilde{k}}{(\omega+\tilde{\omega})^2} \tanh(k + \tilde{k})h} - \frac{gk\tilde{k}}{2\omega\tilde{\omega}} + \frac{1}{2g}(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + \omega\tilde{\omega}),$$

donde k, \tilde{k} son el número de olas que es calculada usando la relación de dispersión de las frecuencias angulares $\omega, \tilde{\omega}$, respectivamente. Asumimos que $E(\omega, -\omega) = 0$.

Observación 2.1. Es importante notar que para cualquier valor positivo ω y $\tilde{\omega}$ las siguientes relaciones simétricas se mantienen $E(\omega, \tilde{\omega}) = E(\tilde{\omega}, \omega)$, $E(\omega, \tilde{\omega}) = E(-\omega, -\tilde{\omega})$ y $E(\omega, -\tilde{\omega}) = E(-\omega, \tilde{\omega})$. Estas propiedades implican que η_q es un campo de valor real.

El modelo determinista de olas de Stoke de segundo orden es definido como:

$$(2.7) \quad \eta^N(x, t) = \eta_l(x, t) + \eta_q(x, t),$$

donde η_l y η_q son procesos lineales y cuadráticos dados por las ecuaciones (2.4) y (2.5), respectivamente. El modelo de mar Gaussiano de segundo orden es obtenido asumiendo que las amplitudes complejas $A_n, n > 0$, son variables independientes y normalmente distribuidas, es decir, $A_n = \sigma_n(U_n - iV_n)$, donde U_n, V_n son variables Gaussianas independientes de media 0 y varianza 1, y σ_n^2 es la energía de las olas con frecuencia angular ω_n y $-\omega_n$.

A menudo se asume que el proceso Gaussiano lineal η_l tiene una densidad espectral. Para un modelo de mar con un espectro lineal en un lado $S(\omega)$, $0 \leq \omega \leq \omega_c$, donde ω_c es la frecuencia de corte, definimos $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta^N(x, t) = \eta(x, t)$, donde $\eta^N(x, t)$ está dada por la ecuación (2.7). Las olas individuales tienen una frecuencia angular $\omega_j = j\omega_c/N$ y energía $\sigma_j^2 = S(\omega_j)\Delta\omega$, $j = 1, \dots, N$, donde $\Delta\omega = \omega_c/N$.

En lo siguiente usaremos $\eta^N(0, t)$, pero en principio para simplificar la notación debemos escribir $\eta(t)$ por $\eta^N(0, t)$. Usando representación matricial definimos

$$Z(t) = [(U_1 - iV_1)e^{i\omega_1 t} \dots (U_N - iV_N)e^{i\omega_N t}]^T = X(t) + iY(t),$$

y

$$(2.8) \quad \begin{aligned} Q &= [q_{mn}], & q_{mn} &= (E(\omega_m, -\omega_n) + E(\omega_m, \omega_n))\sigma_m\sigma_n, \\ R &= [r_{mn}], & r_{mn} &= (E(\omega_m, -\omega_n) - E(\omega_m, \omega_n))\sigma_m\sigma_n, \\ \sigma &= [\sigma_n], & \sigma_n &= \sqrt{S(\omega_n)\Delta\omega}, \end{aligned}$$

donde $m, n = 1, \dots, N$, entonces

$$(2.9) \quad \eta(x, t) = \sigma^T X(t) + \frac{1}{2} X(t)^T Q X(t) + \frac{1}{2} Y(t)^T R Y(t).$$

2. Promedio de la Intensidad de Cruce hacia Arriba

Asumimos que $\eta(t)$ es un proceso Guassiano estacionario de media cero. Si la derivada $\dot{\eta}(t)$ existe entonces, para un nivel fijo u , el número de veces que el proceso $\eta(t)$ cruza u en la dirección hacia arriba $\mu^+(u)$, está dada como sigue:

$$(2.10) \quad \mu^+(u) = \int_0^\infty z f_{\eta(0), \dot{\eta}(0)}(u, z) dz,$$

donde $f_{\eta(0), \dot{\eta}(0)}(u, z)$ es la densidad conjunta de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$. En el caso de insertar la densidad Gaussiana de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$ en la ecuación (2.10) nos dara la ecuación (2.2), con $T_z = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_2}}$ y $H_s = 4\sqrt{\lambda_0}$, donde λ_0, λ_2 son los momentos espectrales iguales a la varianza de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$ respectivamente.

Observaciones:

- (1) A menudo se utiliza la ecuación (2.10) para calcular la intensidad del cruce hacia arriba $\mu^+(u)$ incluso para procesos no gaussianos, siempre que la densidad de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$, esté disponible.
- (2) Puesto que la densidad no está definida de forma única, la ecuación (2.10) no puede ser cierta sin algunas condiciones adicionales. Sin embargo, si decimos que la igualdad es válida para casi todo u la ecuacion (2.10) sigue siendo cierta.

Por la ecuación (2.10), para el cálculo de $\mu^+(u)$ se necesita el conocimiento de la densidad conjunta de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$. No se conoce una fórmula explícita para la densidad conjunta $\eta(0), \dot{\eta}(0)$, para el proceso $\eta(t)$ definido por la ecuación (2.9) (excepto cuando $N = 1$).

Aquí nos proponemos utilizar el método del punto de silla para aproximar $\mu^+(u)$. Con el fin de emplear el método, necesitamos la fórmula explícita para la función generadora de acumulación de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$.

Tomando en cuenta la definición 1.14 se tiene que la función generadora de acumulación, $K(x, y)$, de $\eta(0), \dot{\eta}(0)$ está dada por

$$(2.11) \quad K(x, y) = \ln(\mathbb{E}[e^{x\eta(0) + y\dot{\eta}(0)}]), \quad (x, y) \in \mathcal{X},$$

donde \mathcal{X} es el argumento establecido para que la última integral converja. Para el proceso representado por la ecuación (2.9) tenemos que (leer Machado and Rychlik (2002) para detalles)

$$(2.12) \quad K(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(\det(I - A)) + \frac{1}{2} t^T (I - A)^{-1} t, \quad (x, y) \in \mathcal{X},$$

donde I es una matriz identidad de dimensión $(2N, 2N)$. La matriz $A = A(x, y)$ y el vector $t = t(x, y)$ están definidos como sigue:

$$(2.13) \quad A(x, y) = \begin{bmatrix} xQ & yS \\ yS^T & xR \end{bmatrix}, \quad t(x, y) = \begin{bmatrix} x\sigma \\ yW\sigma \end{bmatrix}$$

además, la inversa de $(I - A)$ y el determinante de $(I - A)$ están dados por

$$(2.14) \quad (I - A)^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} [(I - xQ) - (yS)(I - xR)^{-1}(yS^T)]^{-1} & (I - xQ)^{-1}(yS)[(I - xR) - (yS^T)(I - xQ)^{-1}(yS)]^{-1} \\ [(I - xR)^{-1}(yS^T)][(I - xQ) - (yS)(I - xR)^{-1}(yS^T)]^{-1} & [(I - xR) - (yS^T)(I - xQ)^{-1}(yS)]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$(2.15) \quad \det(I - A)(x, y) = \begin{vmatrix} (I - xR) & -yS \\ -yS^T & (I - xQ) \end{vmatrix} = |I - xQ| \cdot |(I - xR) - (-yS)(I - xQ)^{-1}(yS)|$$

En las matrices anteriores se tiene,

$$(2.16) \quad W = [\omega_{mn}], \quad \omega_{mm} = -\omega_m, \quad \text{y} \quad \omega_{mn} = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n,$$

$$S = QW - WR,$$

donde $m, n = 1, \dots, N$, Y Q, R, σ son dados por la ecuación (2.8).

Tomando en cuenta la ecuaciones (2.13) y (2.14) reescribimos la ecuación (2.12) de la siguiente manera

$$(2.17) \quad K(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(\det(I - A)) + \frac{1}{2} [(x\sigma^T A'_{11} + yW\sigma^T A'_{21})x\sigma + (x\sigma^T A'_{12} + yW\sigma^T A'_{22})yW\sigma],$$

donde $A'_{11} = A'_{11}(x, y)$, $A'_{12} = A'_{12}(x, y)$, $A'_{21} = A'_{21}(x, y)$ y $A'_{22} = A'_{22}(x, y)$ son las entradas de la matriz $(I - A)^{-1}$.

3. Método del punto de silla

La aproximación del punto de silla fue introducida por primera vez por Daniels (1954,1987) como una fórmula de aproximación de la función de densidad de probabilidad de la función generadora de acumulación. Aplicaremos aquí una variante del método que nos permitirá obtener directamente una aproximación de $\mu^+(u)$. Comenzamos escribiendo la ecuación (2.10) como una función de $K(x, y)$ y eliminamos la integración en z .

$$(2.18) \quad \mu^+(u) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\hat{y}-i\infty}^{\hat{y}+i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{y^2} e^{K(x,y)-xu-yw} dx dy,$$

(el límite cuando $w \rightarrow 0$ se introduce por razones técnicas). Además, el camino de la integración en dy se ha deformado a la línea vertical con $Re(y) = \hat{y} > 0$ para evitar la singularidad en $y = 0$. Entonces, la integral interior en dx se aproxima por medio del punto de aproximación unidimensional de la silla de montar, también llamado a veces método de Laplace,

$$(2.19) \quad \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{y^2} e^{K(x,y)-xu-yw} dx \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h(y) e^{g(y)},$$

donde, si denotamos $L(x, y) = K(x, y) - xu - yw$, $g(y) = L(x_y, y)$, $h(y) = (L''(x_y, y))^{-\frac{1}{2}}$ y x_y es el mínimo local de $L(x, y)$, para valores de y fijos.

Ahora, usando la ecuación (2.19) la intensidad del cruce hacia arriba se puede aproximar como

$$(2.20) \quad \mu^+(u) \approx \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\hat{y}-i\infty}^{\hat{y}+i\infty} \frac{h(y)}{y^2} e^{g(y)} dy.$$

El doble polo de integración en la ecuación (2.20) en $y = 0$ hace que el cálculo de cualquier aproximación para la integral sea algo difícil. Sin embargo, hay casos especiales en que la integral se puede calcular casi de forma explícita. Podemos ver esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Supongamos que la función $g(y)$ y $h(y)$, en la ecuación (2.20) son polinomios de segundo grado, por ejemplo

$$g(y) = \frac{ay^2}{2} + by + c, \quad h(y) = \frac{Ay^2}{2} + By + C,$$

donde $a > 0$. Asumimos que la podemos elegir para ser la posición del mínimo local de $\frac{ay^2}{2} + by + c$. Entonces la integral de la ecuación (2.20) puede ser evaluada como sigue

$$(2.21) \quad \frac{1}{(2\pi i)} \int_{\hat{y}-i\infty}^{\hat{y}+i\infty} \frac{h(y)}{y^2} e^{g(y)} dy = e^c \left(\frac{A}{2\sqrt{a}} \phi(\sqrt{a}\hat{y}) + B\bar{\Phi}(\sqrt{a}\hat{y} + \sqrt{a}C\Psi(\sqrt{a}\hat{y})) \right),$$

donde $\phi(x)$ es la densidad estándar gaussiana, $\bar{\Phi}(x) = \int_x^\infty \phi(y) dy$ y $\Psi(x) = \int_x^\infty \bar{\Phi}(y) dy$. Tome en cuenta que las funciones $\bar{\Phi}$ y Ψ no se pueden calcular analíticamente, sin embargo existen aproximaciones muy precisas. Estas funciones se incluyen en la mayoría de las herramientas numéricas. Para el modelo de mar sólo necesitaremos los valores de las funciones para $x = 0$. Para este caso especial tenemos que $\bar{\Psi}(0) = \frac{1}{2}$ mientras $\phi(0) = \Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. \square

Procediendo de manera similar que en el ejemplo anterior podemos aproximar $g(y)$ y $h(y)$ por polinomios adecuados (la simetría $K(x, y) = K(x, -y)$ también se emplea). Luego al dejar y tendiendo a cero obtenemos la siguiente aproximación para la intensidad del cruce hacia arriba.

$$(2.22) \quad \mu^+(u) \approx \hat{f}(u) \frac{\sqrt{g''(0)}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{h''(0)}{2h(0)g''(0)} - \frac{1}{24} \frac{g^{iv}(0)}{g''(0)^2} \right),$$

donde $g(y) = K(x_y, y) - x_y u$, $h(y) = \frac{1}{\sqrt{K_{11}(x_y, y)}}$ y x_y satisface $K_1(x_y, y) = u$. Aquí

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\det(I - A)_1}{\det(I - A)} + \frac{1}{2} \left[\left(\sigma^T A'_{11} + x\sigma^T \frac{\partial A'_{11}}{\partial x} + yW\sigma^T \frac{\partial A'_{21}}{\partial x} \right) x\sigma \right. \\ &\quad \left. + \left(x\sigma^T A'_{11} + yW\sigma^T A'_{21} \right) \sigma + \left(\sigma^T A'_{12} + x\sigma^T \frac{\partial A'_{12}}{\partial x} + yW\sigma^T \frac{\partial A'_{22}}{\partial x} \right) yW\sigma \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}(x, y) &= \frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial x^2} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\det(I - A)_{11} \det(I - A) - (\det(I - A)_1)^2}{(\det(I - A))^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(2\sigma^T \frac{\partial A'_{11}}{\partial x} + x\sigma^T \frac{\partial^2 A'_{11}}{\partial^2 x} + yW\sigma^T \frac{\partial^2 A'_{21}}{\partial^2 x} \right) x\sigma \right. \\
&\quad + 2 \left(\sigma^T A'_{11} + x\sigma^T \frac{\partial A'_{11}}{\partial x} + yW\sigma^T A'_{21} \right) \sigma \\
&\quad \left. + \left(2\sigma^T \frac{\partial A'_{12}}{\partial x} + x\sigma^T \frac{\partial^2 A'_{12}}{\partial^2 x} + yW\sigma^T \frac{\partial^2 A'_{22}}{\partial^2 x} \right) yW\sigma \right],
\end{aligned}$$

donde $\det(I - A)_1 = \frac{\partial \det(I - A)}{\partial x}$, $\det(I - A)_{11} = \frac{\partial^2 \det(I - A)}{\partial^2 x}$. Además \hat{f} es la aproximación del punto de silla para la densidad de $\eta(0)$ dada por

$$(2.23) \quad \hat{f}(u) = \frac{h(0)}{\sqrt{2\pi}} e^{g(0)}.$$

Es bien sabido que la la densidad de punto de silla a menudo no integra uno, es decir, no es necesariamente una función de densidad de probabilidad. La precisión a menudo puede mejorarse mediante la extensión de $\hat{f}(u)$ para que integre 1. Denotamos esta aproximación extendida de punto de silla como $\bar{f}(u)$ y la utilizaremos en nuestros ejemplos, es decir, que la aproximación del punto de silla $\bar{\mu}^+(u)$ será de la siguiente manera:

$$(2.24) \quad \bar{\mu}^+(u) = \bar{f}(u) \frac{\sqrt{g''(0)}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{h''(0)}{2h(0)g''(0)} - \frac{1}{24} \frac{g^{iv}(0)}{g''(0)^2} \right) \approx \mu^+(u).$$

Observaciones numéricas: Para evaluar la ecuación (24) tenemos que encontrar primero el valor x_0 , que es una función definida implícitamente de nivel u , es decir, $K_1(x_0, 0) = u$. Al conocer el valor $x = x_0(u)$, la función generadora de acumulación $K(x_0, 0)$ y sus derivadas $K_1(x, 0)$, $K_{11}(x, 0)$, la función $\hat{f}(x)$ puede ser calculada puesto que

$$(2.25) \quad g(0) = K(x, 0) - xK_1(x, 0), \quad h(0) = \frac{1}{\sqrt{K_{11}(x, 0)}}, \quad g''(0) = K_{22}(x, 0),$$

donde $K_{22}(x, y) = \frac{\partial^2 K(x, y)}{\partial y^2}$. Luego calculamos la integral $I = \int \hat{f}(u) du$ y definimos la densidad normalizada del punto de silla $\bar{f}(u) = \hat{f}(u)/I$.

Se necesitan derivaciones más largas pero todavía elementales para poder calcular la ecuación (24) como

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \frac{h''(0)}{2h(0)g''(0)} &= -\frac{1}{4} \frac{K_{1122}(x,0)K_{11}(x,0) - K_{111}(x,0)K_{122}(x,0)}{K_{11}(x,0)^2 K_{22}(x,0)}, \\ \frac{g^{iv}(0)}{g''(0)^2} &= \frac{K_{2222}(x,0)K_{11}(x,0) - 3K_{122}(x,0)^2}{K_{11}(x,0)K_{22}(x,0)^2}. \end{aligned}$$

Aquí $K_{1122}(x, y)$ significa que la función generadora de acumulación $K(x, y)$ se diferencia dos veces en x y dos veces en y , mientras que $K_{122}(x, y)$ indica la diferenciación una vez en x y dos veces en y . Las otras derivadas se definen de una manera similar. Ya que para el mar aleatorio de segundo orden la función generadora de acumulación, dada por la ecuación (2.12), es una expresión complicada, las derivadas parciales de $K(x, y)$ tienen que ser calculadas numéricamente.

A continuación comentamos sobre el tema de la búsqueda de $x = x_0$, es decir, la resolución de $K_1(x_0, 0) = u$. Con el fin de evitar la solución de esta ecuación no lineal que proponemos aquí para utilizar la función inversa $x \rightarrow u = K_1(x, 0)$, la cual es más fácil de evaluar. Más precisamente elegimos un vector de valores x , y calculamos los correspondientes $u(x)$ de los niveles y las constantes definidas por las ecuaciones (2.25) y (2.26), además sabemos que la aproximación de la intensidad de cruce hacia arriba $\bar{\mu}^+(u(x))$ se puede evaluar mediante la ecuación (2.24).

Finalmente, puesto que las ecuaciones (2.26) implican derivadas parciales de orden superior de $K(x, y)$, también se puede realizar un enfoque alternativo, el cual sería calcular numéricamente $g''(0)$, $(g^{iv}(0))$ y $h''(0)$ para $g(y)$, $h(y)$, respectivamente. Este enfoque es más lento y también es más inestable para valores bajos u .

Capítulo 3

Modelo y Análisis de Resultados

En esta sección analizaremos los resultados de aproximación de la intensidad del cruce hacia arriba utilizando el método del punto de silla, para esto realizaremos tres ejemplos, con los siguientes espectros: JONSWAP, Pierson-Moskowitz y TMA.

1. Ejemplos numéricos

Para los tres espectros los parámetros elegidos aquí son la altura significativa $H_s = 7$ [m], el período de pico $T_p = 11$ [seg] y el parámetro de forma pico $\gamma = 2.385$. La frecuencia de corte elegido es $\omega_c = 3$ [rad/s], es decir, $S(\omega) = 0$ para $\omega > \omega_c$. La frecuencia de pico es $\omega_p = 0.574$ [rad/s] y $N = 257$. Con la acotación de que el espectro Pierson-Moskowitz no necesita parámetro de pico y el espectro TMA es de aguas finitas.

Debido a que tanto el espectro JONSWAP como el Pierson-Moskowitz son para aguas profundas la función de transferencia cuadrática dada en la ecuación (2.6) se simplifica como sigue

$$(3.1) \quad E(\omega, \tilde{\omega}) = \begin{cases} -\frac{1}{2g} |\omega^2 - \tilde{\omega}^2| & \text{si } \omega\tilde{\omega} < 0, \\ \frac{1}{2g} (\omega^2 + \tilde{\omega}^2) & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Ya que $\lim_{h \rightarrow \infty} \tanh(kh) = 1$ y la relación de dispersión se simplifica a $\omega^2 = g\kappa$.

En el caso del espectro TMA al ser de aguas finitas se utiliza $E(\omega, \tilde{\omega})$, dada en la ecuación (2.6).

No existe algún método sencillo para evaluar $\mu^+(u)$ (para el caso de mar de segundo orden) y poder compararlo con nuestra aproximación $\bar{\mu}^+(u)$, lo que hicimos entonces fue calcular $\bar{\mu}^+(u)$ para modelo de mar de segundo orden y mediante WAFO de MATLAB hallamos $\mu^+(u)$ para el caso del mar lineal y así poder observar las diferencias.

Para calcular $\bar{\mu}^+(u)$ dada en la ecuación (2.24) se utiliza una rutina incluida en WAFO de MATLAB, que dentro de ella es llamada la función generadora de acumulación $K(x, y)$ y también la función de transferencia cuadrática $E(\omega, \tilde{\omega})$. Dicha función $\bar{\mu}^+(u)$ se utilizará para calcular la ecuación (2.1) y así obtener la aproximación de la distribución de la altura de las crestas de la olas. Ya que la aproximación de la distribución de la cresta basada en $\bar{\mu}^+(u)$ es más preciso para las olas altas, excluimos las olas pequeñas y comparamos la aproximación de distribución de la altura de la cresta dado que $h_0 = 1$ metro, a saber

$$(3.2) \quad P(A_c > h | A_c > h_0) \approx \frac{\bar{\mu}^+(h)}{\bar{\mu}^+(h_0)}.$$

Más precisamente, puesto que la distribución exacta de la altura de la cresta no se conoce en realidad, vamos a comparar la aproximación propuesta con la distribución empírica condicional de A_c obtenida a partir del proceso simulado $\eta(t)$, $0 \leq t \leq T$, con una frecuencia de muestreo de 5 [H_z] y $T = 24$ horas.

Sabemos que la función de distribución empírica \hat{F}_n , es una función de distribución acumulada que asigna probabilidad igual a $1/n$ a cada uno de los x_i , la definimos como sigue:

$$\hat{F}_n(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)$$

donde I es la función indicatriz.

Ahora bien, nosotros queremos hallar la función de distribución empírica de A_c , es decir, $P(A_c > h)$, la cual obtendremos de la siguiente manera

$$P(A_c > h) = 1 - P(A_c \leq h).$$

Numéricamente se realizó lo siguiente, por medio de cada espectro se crean los datos con los que se trabajará para hallar los valores de las alturas A_c , dichos datos fueron creados con la frecuencia de muestreo y período T mencionados anteriormente (5 [Hz] y 24 horas respectivamente) y luego se calcula la distribución empírica de A_c , después se obtiene el excedente de probabilidad de la distribución empírica es decir $1 - P(A_c \leq h)$ y por último se toman en consideración la condición $A_c > h_0$.

Los tamaños de las muestras de A_c para el cálculo de la función de distribución empírica son los siguientes: $n = 5113$ (JONSWAP), $n = 5342$ (Pierson-Moskowitz) y $n = 5939$ (TMA).

Ejemplo 1: Espectro JONSWAP (aguas profundas)

A continuación presentamos la gráfica de la aproximación de $\bar{\mu}^+(h)$ usando el método del punto de silla y de la distribución condicional de las alturas las crestas A_c .

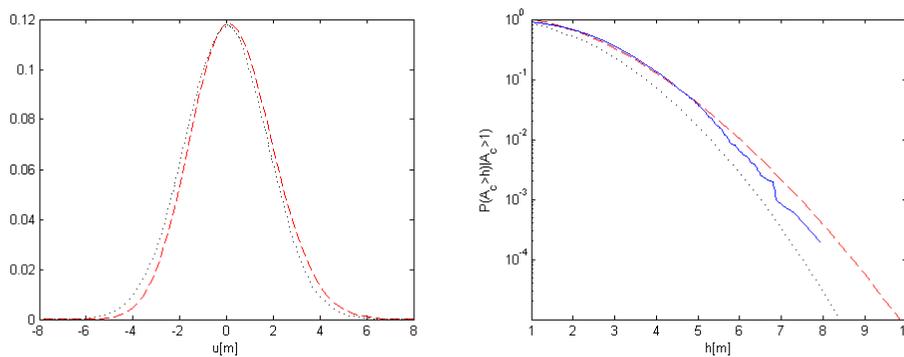


FIGURA 3.1. Aproximación de la intensidad del cruce hacia arriba y espectro JONSWAP (Izquierda). Comparación de $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua) y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO (línea punteada). Distribución condicional de las alturas de crestas A_c , es decir, $P(A_c > h|A_c > 1)$ (Derecha). Excedente de probabilidad de la distribución empírica (línea irregular). La aproximación de Rayleigh para la distribución de A_c (línea punteada). La aproximación basada en $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua).

Podemos notar en la figura (3.1) en su parte derecha que no hay mucha diferencia entre la aproximación $\bar{\mu}^+(h)$ calculada por el método del punto de silla y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO a pesar que no es el mismo orden del mar.

En el caso de la parte izquierda de la figura (3.1), hacemos la acotación que la gráfica se presenta en escala logarítmica. Respecto a dicha gráfica se puede ver que el excedente de la distribución empírica estimada a partir de la elevación del mar simulado, se ajusta mejor para el caso de la aproximación de la distribución condicional de A_c basada en $\bar{\mu}^+(h)$ calculada usando la ecuación (2.24), que para la aproximación de Rayleigh calculada por la ecuación (2.3).

Ejemplo 2: Espectro Pierson-Moskowitz (aguas profundas)

Como en el ejemplo anterior se trabajará en condiciones de profundidad infinita. Podemos ver las gráficas de la aproximación de la intensidad del cruce hacia arriba para modelo de mar cuadrático y de la distribución condicional de las alturas las crestas a continuación.

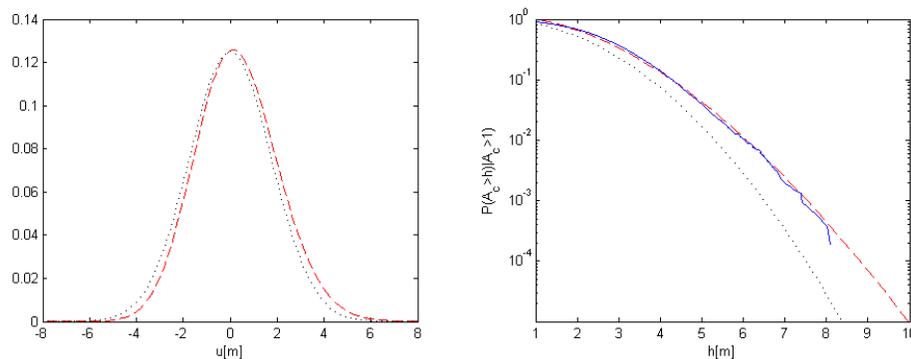


FIGURA 3.2. Aproximación de la intensidad del cruce hacia arriba y espectro Pierson-Moskowitz (Izquierda). Comparación de $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua) y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO (línea punteada). Distribución condicional de las alturas de crestas A_c , es decir, $P(A_c > h | A_c > 1)$ (Derecha). Excedente de probabilidad de la distribución empírica (línea irregular). La aproximación de Rayleigh para la distribución de A_c (línea punteada). La aproximación basada en $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua).

Se puede apreciar en la parte derecha de la figura (3.2) que no hay mucha diferencia entre la aproximación $\bar{\mu}^+(h)$ calculada por el método del punto de silla y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO.

En el caso de la parte izquierda de la figura (3.2), presentada en escala logarítmica, podemos notar la exactitud de la propuesta de la aproximación condicional de A_c basada en

$\bar{\mu}^+(h)$ calculada usando la ecuación (2.24) y el excedente de la distribución empírica estimada a partir de la elevación del mar simulado, no sucede así con la aproximación de Rayleigh calculada por la ecuación (2.3).

Ejemplo 3: Espectro TMA (aguas finitas)

En este último ejemplo se considera la elevación de la superficie del mar en condiciones de profundidad de agua finita. El mar es modelado por la ecuación (2.9) con una función de transferencia $E(\omega, \tilde{\omega})$ dada por la ecuación (2.6) con una profundidad de agua de $h = 20$ [m]. Vamos a utilizar el espectro TMA que es la transformada de los ejemplos JONSWAP y Pierson Moskowitz a la ubicación de profundidad finita. Aquí las olas serán más pequeñas, pero la asimetría entre las crestas y valles es más clara. Seguidamente observaremos las gráficas relacionadas con la aproximación de la intensidad del cruce y la distribución de las alturas de las crestas A_c .

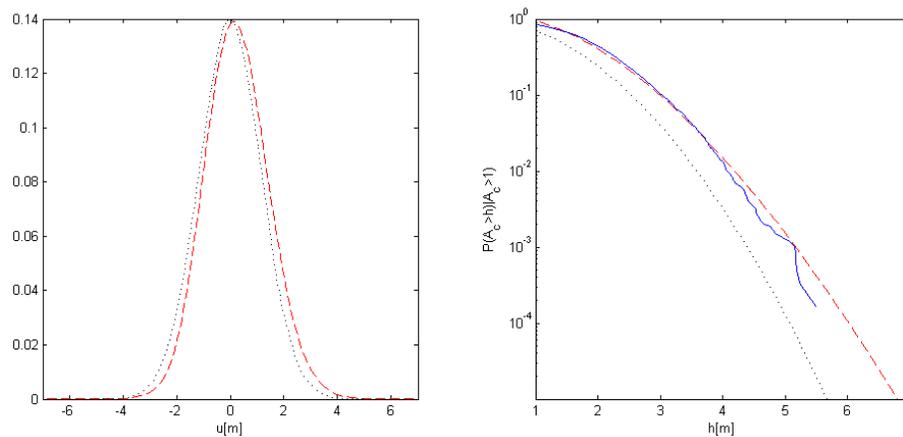


FIGURA 3.3. Aproximación de la intensidad del cruce hacia arriba y espectro TMA (Izquierda). Comparación de $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua) y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO (línea punteada). Distribución condicional de las alturas de crestas A_c , es decir, $P(A_c > h | A_c > 1)$ (Derecha). Excedente de probabilidad de la distribución empírica (línea irregular). La aproximación de Rayleigh para la distribución de A_c (línea punteada). La aproximación basada en $\bar{\mu}^+(h)$ (línea discontinua).

En la parte derecha de la figura (3.3) se puede observar que en este caso la intensidad del cruce es un poco más empinada que en los casos anteriores donde el mar es muy profundo,

además notamos que la aproximación $\bar{\mu}^+(h)$ calculada por el método del punto de silla y $\mu^+(h)$ calculada mediante WAFO son cercanas pero no precisas .

En la figura (3.3) parte izquierda, presentada en escala logarítmica, se puede apreciar con claridad la coincidencia entre la distribución empírica estimada a partir de la elevación del mar simulado, y la aproximación de la distribución condicional de A_c basada en $\bar{\mu}^+(h)$ calculada usando la ecuacion (2.24), para la aproximación de Rayleigh calculada por la ecuación (2.3).

Conclusiones

En este trabajo hemos visto que la distribución de la crestas de las olas en el modelo de mar aleatorio de segundo orden, definido por la ecuación (2.9), se puede aproximar efectivamente por la ecuación (2.24). Las fórmulas para la intensidad de cruce son explícitas, pero contienen derivados de orden superior de la función generadora de acumulación, que por lo general tienen que ser calculados numéricamente. Aunque la ecuación a simple vista no es fácil de hallar, se tiene la ventaja que la rutina para hallarla está incluida en la herramienta WAFO de MATLAB, lo cual es un factor importante tomando en cuenta que no existe un método sencillo y fácil de calcular para el caso de $\mu^+(h)$.

El método propuesto es rápido ya que es calculado en pocos segundos y efectivo al momento de hallar la distribución de las alturas de las crestas A_c . Más aún tomando en cuenta que la aproximación de Rayleigh no es del todo buena como pudimos observar en las gráficas presentadas en el capítulo 3.

En cuanto a los ejemplos pudimos notar que además del hecho de que la aproximación de la distribución condicional de A_c basada en $\bar{\mu}^+(h)$ calculada usando la ecuación (2.24), se adaptaban muy bien al excedente de la distribución empírica, para los tres espectros hacemos énfasis que el espectro de Pierson-Moskowitz fue el que se ajustó de una manera más precisa.

Bibliografía

- [1] Butler, R. W., Machado U. B. y Richlik, I. (2003). Distribution of Wave Crests in Non-Gaussian Sea. *The Proceedings of The thirteenth (2003) International Offshore and Polar Engineering Conference*, III, 71-79.
- [2] Bouws, E., Gunther, H., Rosenthal, W. and Vicent, C.L. (1985). Similarity of the Wind Wave Spectrum in Finite Depth Water: 1. Spectral form. *F. Geophys. Res.*, 90, C1, 975-986.
- [3] Cramér, H., Leadbetter, M. R. (1967). *Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and Their Applications*. New York, EE.UU.: John Wiley, Sons, Inc.
- [4] Daniels, H. E. (1954). Saddlepoint Approximations in Statistics, *Ann Math Statist*, 25, 631-650.
- [5] Daniels, H. E. (1987). Tail Probability Approximations, *Int. Statist. Rev.*, 25, 37-48.
- [6] Kitaigorodskii, S.A., Krasitskii, V.P. and Zaslavskii, M.M. (1975). On Phillips theory of equilibrium range in the spectra of wind-generated gravity waves. *F. Phys. Oceanogr*, 5, 3, 410-420.
- [7] Machado, U.B. and Rychlik, I. (2002). Wave in nonlinear random sea. *Extremes*, 6(2), 125-140.
- [8] Ochi, M. K. (1998). *Ocean Waves. The Stochastic Approach*. Cambridge University Press.
- [9] Ortega, J. (2001) Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, VIII(2), 111-130.
- [10] The WAFO group. WAFO: A Matlab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads [en línea]. Disponible en: <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo/documentation/wafotutor25.pdf>.