

**Aplicación de la transformada de ondícula  
a problemas de escalamiento y  
flujo bifásico en medios porosos**

**Lic. Richard B., Marquez A.**

Trabajo de Grado Presentado ante la ilustre

Universidad Central de Venezuela

para optar por el título de Magister Scientiarum

en Geofísica, Mención Prospección

Caracas-Venezuela

Junio 2003

Dedicado a  
La memoria de mi madre  
Aida Albornoz de Marquez

# Resumen

El petróleo es un aceite mineral natural de gran importancia para la economía mundial, razón por la cual una gran cantidad de empresas dedicadas a su producción han empleado parte de su tiempo y dinero al estudio de las rocas de yacimiento. Las rocas de yacimiento están constituidas por una gran cantidad de espacios vacíos denominados poros que pueden o no estar conectados entre sí, lo cual controla el desplazamiento de los fluidos presentes, y se caracterizan por el hecho de que sus propiedades pueden cambiar fuertemente en una variedad de escalas de tamaño. En este trabajo se investigó la factibilidad del uso de la teoría de ondículas como una alternativa para la resolución de la ecuación diferencial no lineal asociada al flujo de fluidos en medios porosos en condiciones bifásicas y la aplicación directa a problemas de escalamiento de una de las propiedades estáticas más importantes de la roca, la permeabilidad absoluta. La ecuación diferencial estudiada es conocida como ecuación de *Buckley-Leverett* y ha sido resuelta por el método de Galerkin-ondícula y B-spline de orden 1 lineal y orden 4 cúbico, para condiciones de flujo fraccional lineal y cuadrático respectivamente, en un sistema ideal donde la presión capilar y las fuerzas gravitacionales son despreciables. Este estudio permite analizar la evolución de estos los fluidos (aquí considerados como agua y crudo) con respecto al tiempo ( $t$ ), posición ( $x$ ) y escala ( $n$ ). De los resultados obtenidos se pudo evidenciar que, a pesar de la no inclusión de las fuerzas capilares y gravitacionales, los perfiles de saturación de agua generados se aproximan de muy buena

forma a los resultados esperados a partir del uso de métodos convencionales. Se determinó además los rangos de aplicación de la técnica para asegurar la obtención de resultados físicos. Por otra parte, el análisis de mutiresolución (*AMR*) generado a partir de la teoría de ondícula nos permitió escalar campos de permeabilidad absoluta de sistemas porosos bidimensionales altamente heterogéneos, respetando la presencia de las heterogeneidades a diversas escalas. Al comparar los resultados del escalamiento de esta propiedad estática con los obtenidos con métodos de promediación convencionales tales como promedio armónico, aritmético y geométrico, se aprecia que el *AMR* es más eficiente, permitiendo reconstruir la muestra a partir de la información generada a una escala dada, por lo que se recomienda como método más robusto para aplicaciones de escalamiento de propiedades de roca. Estos resultados ponen de manifiesto el alto potencial de la técnica para la descripción y el escalamiento del flujo y transporte en medios porosos.

# Agradecimientos

A la Dra. Mariela Araujo por haberme aceptado como su tesista, los conocimientos impartidos y alcanzados con la ejecución de este proyecto que se vieron gratificados con su culminación.

A PDVSA-Intevep por el apoyo brindado para la ejecución de esta investigación con el uso de equipos, instalaciones y material necesario para la realización de esta.

Al Postgrado de Geofísica y el Postgrado de Física de la UCV por la labor de su personal docente, y a todos los que a él conciernen.

A FONACIT, por el financiamiento de mis estudios de postgrado, apoyo que se hizo fundamental para su culminación. Les estaré siempre agradecido.

A todos mis amigos, y todas las personas que de una u otra manera me brindaron apoyo en el postgrado.

A Jhonny Valbuena y Jesús Carrero por toda la ayuda prestada en la ejecución de la investigación y por brindarme su amistad.

A mi padre, y mis hermanos: Carmen, Luis, José Gregorio, Soriel y Jenny; mi novia Nayaly, mis sobrinos Luis y Reinaldo, y al Padre León , por su paciencia, sacrificios, consejos y amor.

# Indice

<b>Introducción</b> .....	<b>1</b>
Objetivo General .....	4
<b>1 Medio Poroso</b> .....	<b>5</b>
1.1 Descripción y Caracterización del Medio Poroso .....	5
<b>2 Ondículas</b> .....	<b>10</b>
2.1 Reseña Histórica .....	10
2.1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier .....	10
2.1.2 Alfred Haar .....	11
2.1.3 Paul Levy .....	11
2.1.4 Jean Morlet y Alex Grossman .....	12
2.1.5 Yves Meyer .....	13
2.1.6 Stéphane Mallat .....	14
2.1.7 Ingrid Daubechies .....	15
2.2 Generalidades Sobre Ondículas .....	16
2.3 Bases .....	21
2.4 Coeficientes de los Filtros .....	21
2.5 Ecuación de Dilatación o Función de Escalamiento .....	23
2.6 La Función Ondícula .....	26
2.7 La Derivada de la Función de Escalamiento .....	26

2.8	Ortogonalidad de Ondículas .....	26
2.9	Resumen de las Propiedades de Ortogonalidad .....	31
2.10	Análisis de Multiresolución .....	32
<b>3</b>	<b>B-Spline .....</b>	<b>35</b>
3.1	Spline .....	35
3.2	Truncamiento de Monomios .....	36
3.3	Función de Escalamiento .....	38
3.3.1	Propiedades de la Función de Escalamiento .....	38
3.4	Ondículas B-Spline .....	39
3.4.1	Propiedades de las Ondículas .....	40
3.5	Relaciones de Descomposición .....	41
3.5.1	Ejemplo de Ondícula Lineal B-spline .....	42
3.5.2	Ondícula .....	44
<b>4</b>	<b>Desarrollo Buckley Leverett en Bases de Ondículas .....</b>	<b>47</b>
4.1	Caso relación de permeabilidad relativa-saturación lineal .....	47
4.2	Caso relación de permeabilidad relativa-saturación cuadrática .....	54
<b>5</b>	<b>Comparación de Métodos de Escalamiento .....</b>	<b>60</b>
5.1	Análisis de Ondículas para Flujo Bifásico .....	62
5.2	Escalamiento Bidimensional de la Permeabilidad Absoluta .....	64
5.3	Distribución de Permeabilidad .....	67
<b>6</b>	<b>Metodología y Resultados como Método de Escalamiento .....</b>	<b>69</b>

<b>7 Metodología y Resultados en la Solución de la Ecuación de Flujo ...</b>	<b>75</b>
7.1 Solución con flujo fraccional lineal y B-spline lineal .....	79
7.2 Solución con flujo fraccional lineal y B-spline cúbico .....	82
7.3 Solución con flujo fraccional cuadrático y B-spline lineal .....	85
7.4 Solución con flujo fraccional cuadrático y B-spline cúbico .....	90
<b>Conclusiones .....</b>	<b>93</b>
<b>Recomendaciones .....</b>	<b>97</b>
<b>Referencias Bibliográficas .....</b>	<b>98</b>



# Introducción

En la naturaleza se observan fenómenos físicos complejos que han atraído la atención del hombre. Uno de ellos concierne al entendimiento del comportamiento de fluidos en geometrías restringidas, tales como las rocas de yacimiento. Las rocas de yacimiento son medios porosos de estructura compleja constituida por una morfología "cuasi-heterogénea" de un conjunto de espacios vacíos (denominados poros) que se comunican unos a otros permitiendo el paso de fluidos. A la facilidad con la que un fluido puede moverse dentro de un medio poroso se le conoce como permeabilidad, cantidad que describe la resistencia al flujo en esta estructura.

En la mayoría de los casos la roca de yacimiento posee más de un fluido presente. Estos fluidos son agua e hidrocarburos, que se diferencian fuertemente por sus propiedades físicas tales como la densidad y viscosidad. La composición de la superficie mineral en conjunto con la morfología del medio poroso, el tipo de fluidos, su cantidad y composición conlleva a que se establezca la competencia por la ocupación del espacio poroso. Así por ejemplo, en una roca compuesta mayoritariamente por cuarzo, el agua suele encontrarse en los poros pequeños, en tanto que los hidrocarburos ocupan los poros más grandes.

Al existir fluidos inmiscibles en el seno de la roca, se crea una interfaz entre estos cuya forma geométrica depende de la morfología del medio poroso y del tipo de fluidos. En general la curvatura de la interfaz está asociada a la diferencia de presión que existe entre los fluidos, propiedad que se conoce como presión capilar. En un yacimiento, la presión capilar está definida como la diferencia de presión existente entre el fluido no mojante y el

mojante (en contacto con la superficie de la roca) contenido o que avanzan a través de la roca.

Otra de las propiedades fundamentales para describir el comportamiento de los fluidos en la roca de yacimiento es la permeabilidad relativa. Esta es una medida de la habilidad que tiene un fluido para moverse a través de la roca en presencia de otros fluidos inmiscibles.

El comportamiento de una roca de yacimiento se estudia mediante la simulación del flujo y transporte de los fluidos presentes, a través de la solución de las ecuaciones de flujo correspondientes. Para esto se requiere conocer las propiedades antes mencionadas de la roca y de los fluidos respectivamente. En la actualidad existen métodos bastante precisos para evaluar en el laboratorio propiedades tales como la porosidad, morfología del espacio poroso, permeabilidad, presión capilar y permeabilidad relativa, usando muestras de roca con dimensiones en el orden de los centímetros (escala micro). Sin embargo, la simulación del yacimiento requiere datos que describan escalas más grandes, con dimensiones de decenas de metros a kilómetros (escala macro). La heterogeneidad del medio hace complicado el proceso de relacionar estas dos escalas, por lo que el proceso en sí es un área activa de investigación y aplicación, conocida como escalamiento.

El proceso de escalamiento se ha venido haciendo a través del uso de un conjunto de métodos numéricos, entre los cuales los comunes son: promedios aritméticos y geométricos, método del tensor, grupo de renormalización, método de los momentos, volúmenes promedio, y método paramétrico [1]. La literatura reporta que estos métodos suelen ser

precisos, sin embargo son costosos computacionalmente ya que requieren de la solución de las ecuaciones de flujo de fluidos a varias escalas.

Recientemente, un conjunto de investigadores, entre los cuales podemos mencionar a Lu Pengbo, Moridis, Panda, y Mosher, entre otros [4, 10], han propuesto un nuevo método de escalamiento basado en el uso de transformada de ondícula. El nuevo método es independiente de las condiciones de frontera utilizadas y permite preservar el máximo número de variables locales, por lo que se asocia a la mínima pérdida de información acerca de las heterogeneidades del medio poroso. Este método solo se ha aplicado al escalamiento de propiedades estáticas de la roca, tales como la porosidad y la permeabilidad, y esta última al ser una cantidad anisotrópica se ha estudiado en una y dos dimensiones [15, 18].

Hasta ahora no se ha explorado la aplicabilidad del método de ondícula para el estudio de propiedades de flujo de fluidos inmiscibles en medios porosos, que es el propósito de la investigación propuesta en este trabajo de tesis. De ser factible la extensión del método se podrá capturar la distribución de propiedades a una escala característica a partir de un modelo a escala fina.

La transformada de ondícula está relacionada con la transformada de Fourier en su forma base, pero la transformada ondícula tiene una gran ventaja sobre la transformada de Fourier en el sentido de ser localizada en el dominio frecuencia y espacio, a diferencia de la de Fourier que es localizada solo en frecuencia. Esta serie de bondades de la transformada de ondícula, permiten investigar la factibilidad de su aplicación a problemas de escalamiento de flujo bifásico, con especial atención al estudio de propiedades como la

presión capilar y la permeabilidad relativa, y la comparación de los resultados con otros métodos existentes.

## **Objetivo General**

Investigar la factibilidad de la aplicación de transformada de ondícula (*wavelet*) para problemas de escalamiento y flujo bifásico en medios porosos heterogéneos.

## **Objetivos Específicos**

- Evaluación de la factibilidad del uso de la transformada de ondícula para el escalamiento de propiedades de flujo bifásico en medios porosos.
- Propuesta y desarrollo de un algoritmo de ondícula para la resolución de la ecuación que describe el flujo bifásico en medios porosos.
- Comparación de resultados de escalamiento con ondícula y otros métodos (promedios aritméticos, geométricos y grupo de renormalización).

# Capítulo 1

## Medio Poroso

### 1.1 Descripción y Caracterización del Medio Poroso

Un medio poroso es un sistema constituido por una matriz sólida y espacios vacíos denominados poros. Tal vez la propiedad más simple de un sistema poroso es su porosidad  $\phi$ , definida como la relación de volumen de sus espacios vacíos al volumen total del medio poroso ó simplemente la fracción de volumen ocupada por sus poros. El espacio poroso posee en general una morfología bastante irregular complicada donde pueden ser almacenados fluidos, siendo esta una característica intrínseca de las rocas de yacimiento. Las propiedades de las *rocas* se clasifican en dos categorías: (a) aquellas que describen a la roca propiamente dicha, como porosidad, permeabilidad, distribución del tamaño de poros y área de su superficie entre otras, y (b) propiedades derivadas de las interacciones entre la roca y los fluidos que contiene tales como la mojabilidad, la presión capilar y la permeabilidad efectiva y relativa [21]. La propiedad de mayor importancia para la industria petrolera es la permeabilidad, la cual es definida como la capacidad que tiene un fluido a moverse a través de sus poros interconectados; por lo que indica si es posible acceder a los fluidos almacenados en el medio poroso. Según la cantidad de fluidos presentes se distinguen tres tipos de permeabilidad: *absoluta*, *efectiva* y *relativa* [22]. La *permeabilidad absoluta* describe la condición donde la roca está completamente saturada por un fluido, en tanto que nos referimos a la *permeabilidad efectiva* cuando la roca está saturada

sólo parcialmente con ese fluido y la *permeabilidad relativa* se refiere a la relación entre la permeabilidad efectiva y la permeabilidad absoluta.

La descripción del flujo en medios porosos requiere el relacionar cantidades medibles y macroscópicas, tal como la velocidad promedio del fluido, con propiedades propias del medio. Así por ejemplo, la ley de Darcy comunmente usada, relaciona la velocidad de flujo con la permeabilidad absoluta  $k$  de un medio poroso a través de la ecuacion [1, 8].

$$v = -\frac{k}{\mu} (\nabla P - \rho g) = \frac{\vec{q}}{A} \quad (1.1)$$

donde,  $k$  es la permeabilidad absoluta de la roca,  $P$  la presión en el fluido,  $\rho$  su densidad,  $\mu$  su viscosidad,  $g$  la aceleración de gravedad,  $\vec{q}$  la tasa volumétrica de flujo y  $A$  el área de la sección transversal. En general, es conocido que la permeabilidad  $k$  depende de la porosidad  $\phi$  del medio, es decir, de la fracción de volumen de su espacio poroso, el tamaño característico de los poros y de la conectividad entre los poros, aunque la dependencia no es líneal en general [3].

Cuando existe mas de un fluido presente en la roca, las ecuaciones de flujo más utilizadas resultan de una generalización de las ecuaciones de *Darcy*. Hay una ecuación para cada fluido de la forma

$$\phi \frac{\partial S_n}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}_n \quad (1.2)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}_w \quad (1.3)$$

donde los subíndices  $n$  y  $w$  se refieren al fluido no mojante y mojante respectivamente,  $S_i$ , la saturación del fluido y  $q_i$  la tasa de flujo (que se debe relacionar con la velocidad de la ecuación (1.1)). Estos fluidos satisfacen la condición de saturación  $S_n + S_w = 1$ , siendo la

saturación  $S_i$  la fracción del espacio poroso ocupada por un fluido. En estas expresiones  $q_i$  es la tasa volumétrica de flujo del fluido  $i$  definida por

$$\vec{q}_i = -\frac{Ak \cdot k_{r_i}}{\mu_i} \cdot (\nabla P_i - \rho_i \cdot \vec{g}) \quad (1.4)$$

con  $k_{r_i}$  como la permeabilidad relativa al fluido  $i$ ,  $P_i$  la presión en el fluido,  $\rho_i$  la densidad de fluido y  $\mu_i$  su viscosidad.

Otra ecuación fundamental para la descripción del flujo de fluidos en medios porosos es la de *Buckley-Leverett* la cual es válida cuando el gradiente de la presión de capilar y la diferencia de densidad o el efecto gravitacional entre los fluidos son insignificantes en un medio poroso homogéneo. Esta ecuación es dada por:

$$R(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

donde  $S$  es la saturación del fluido *mojante*,  $x$  es la distancia a lo largo de la línea de flujo,  $u$  se define como  $= q/(\phi A)$ ,  $\phi$  es la porosidad,  $A$  es el área de la sección transversal de flujo, y  $q$  es la tasa volumétrica de flujo. La *mojabilidad* se define como la tendencia de un fluido a adherirse a una superficie sólida en presencia de otros fluidos inmiscibles. En un yacimiento de petróleo, la mojabilidad es una medida de la afinidad de la superficie de la roca por la fase petróleo o por la fase acuosa, por lo que afecta fuertemente la distribución relativa de cada una de estas fases dentro del medio poroso [3, 25]. Por otro lado vale la pena resaltar que la distribución de la fase que moja o de la que no moja dentro del espacio poroso no depende exclusivamente de la saturación de esa fase sino también del sentido en que varíe la historia de saturación. Para determinar el sentido en que varía la saturación es necesario definir dos términos *drenaje* e *imbibición*. *Drenaje* se refiere al flujo que resulta

de una reducción de la saturación de la fase que moja la roca ó muestra que se encuentra inicialmente saturada con un fluido mojante, en tanto que *imbibición* es el proceso por el cual un fluido mojante desplaza a un fluido no mojante.

Estas propiedades se determinan en el laboratorio mediante experimentos de desplazamiento tanto espontáneos como forzados, conocidos como pruebas de *Bobek* y la *de Amott*, siendo esta última la empleada frecuentemente en la industria, pero es muy costosa en tiempo, pudiendo durar varias semanas o meses. Otra forma de estimar la mojabilidad es a través del estudio de los componentes químicos presentes en las capas mas externas de la superficie de la roca por técnicas analíticas de superficie [25].

Otra propiedad importante en la descripción del flujo en medios porosos es la *presión capilar* que se define como la diferencia de presión que existe a través de la interfaz que separa a dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja preferencialmente la superficie de la roca; en otras palabras, la presión capilar se puede definir como la presión en la fase que no moja menos la en presión la fase que moja a la roca de yacimiento [22]. La presión de capilaridad no solo depende de la saturación, sino también de la historia de saturación que ha seguido la muestra particular en consideración.

Otras propiedades relevantes en el proceso de flujo y transporte en medios porosos incluyen la viscosidad del fluido, ya que estos se caracterizan por sufrir una continua deformación mientras la tensión sobre ellos esté presente, llamándosele a esta deformación continua de los fluidos, flujo y a la renuencia del fluido a ser deformado viscosidad dinámica.

Las propiedades antes definidas normalmente son medidas en el laboratorio, por lo que nos encontramos ante una serie de dificultades cuando queremos llevar estos resul-



tados desde una malla fina a una malla gruesa que representa el yacimiento a escala de yacimiento, donde los bloques de simulación tienen dimensiones de cientos de metros a kilómetros. Hoy en día se han venido identificando una serie de métodos que permiten solventar estos problemás de escalamiento y entre ellos, pudiera estar la transformada de ondícula que es nuestro punto de interés en este trabajo.

# Capítulo 2

## Ondículas

### 2.1 Reseña Histórica

Antes de presentar los conceptos y propiedades de las ondículas es conveniente hacer una revisión histórica de estas para apreciar su evolución en el área de la ciencia, generada a partir de la interacción entre varias disciplinas.

#### 2.1.1 Jean Baptiste Joseph Fourier

La primera referencia conocida hasta la fecha con el uso de ondículas modernas está asociada a Jean Baptiste Joseph Fourier. En 1807, los esfuerzos de Fourier se vieron recompensados con la primacía del análisis de frecuencia, conocido hoy día como Análisis de Fourier. Su trabajo es basado en el hecho de que se pueden representar las funciones como la suma de senos y cosenos. Otra contribución de Fourier fue la *Transformada Fourier* operación matemática que transforma una función  $f$  que depende del tiempo en una nueva función  $f'$ , que depende de la frecuencia. La notación para la Transformada Fourier se indica abajo.

$$f(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{(-iwt)} dt$$

### 2.1.2 Alfred Haar

El próximo eslabón conocido en el tratamiento de ondículas es atribuido a *Alfred Haar* en el año 1909, quien las usó y las reportó en el apéndice de su tesis para obtener su grado doctoral relacionado con el estudio de sistemas de funciones ortogonales.

La contribución de Haar a la teoría de ondículas es muy evidente. Hay una familia entera de ondículas que llevan su nombre en su honor. Los ondículas Haar son las más simples de las familias de ondícula. El concepto de esta familia del ondícula es fácil de entender. La ondícula padre (*función escalar*) es el punto de partida. Descomponiendo e interpretando la ondícula padre, obtenemos la madre, las hijas, los hijos, las nietas, los nietos, etc, concepto que será ilustrado mas adelante en la tesis.

### 2.1.3 Paul Levy

Después de la contribución de *Haar* en ondículas hubo un vacío en la investigación sobre estas funciones, hasta que surge *Paul Levy* en el año 1930.

Los trabajos de *Levy* en el campo de ondículas fueron empleados en su investigación del *movimiento Browniano*. Descubrió la función de la base escala-variable (scale-varying) que se origina de la ondícula Haar, que era una mejor base que la base de las funciones de Fourier. A diferencia de la función base Haar que puede cortarse a intervalos diferentes, tales como el intervalo de 0 a 1, o el intervalo de 0 a  $\frac{1}{2}$  y de  $\frac{1}{2}$  a 1, las funciones Fourier tienen sólo intervalos de frecuencia bajos. Por consiguiente, las ondículas de *Haar*, pueden ser mucho más precisas para modelar una función.

### 2.1.4 Jean Morlet y Alex Grossman

A finales de 1970 J. *Morlet*, un ingeniero geofísico de la French Oil Company (Elf Aquitaine), llega con una alternativa de transformada de Fourier para tiempos pequeños. El procedimiento consistía en tomar una primera ventana de una señal a la cual se le determina los coeficientes de Fourier mediante el producto interno de la señal con la ventana. Las funciones de la ventana de Fourier dependían de dos parámetros: la ubicación de la ventana y los niveles de frecuencia de los diferentes coeficientes.

Las señales que *Morlet* quería analizar contenían diferentes características en tiempo y frecuencia, las cuales deseaba descomponer, pero sus componentes de alta frecuencia tenían una expansión en tiempo más corta que sus componentes de baja frecuencia. Entonces para resolver el problema del tiempo de resolución para altas frecuencias, se tomó la transformada de Fourier para tiempos cortos dentro de un ancho de banda. Por otro lado, se necesitaba una buena resolución en frecuencia para las componentes de baja frecuencia las cuales fueron llamadas transformadas de Fourier para un corto ancho de banda. *Morlet* presentó una idea para generar la transformada de funciones de distintas formas. Para esto consideró una ventana de ondas cosenoidales que le permitía comprimir ésta en el tiempo para obtener una función de más alta frecuencia, o expandirla para obtener funciones de más baja frecuencia. Para investigar el comportamiento a diferentes tiempos, estas funciones fueron aisladas en el tiempo.

Esta transformada de funciones depende así (como las anteriores) de dos parámetros: su ubicación en tiempo y su grado de compresión o escala. Así que se tomó el producto interno de las señales que se quería analizar (Data Sísmica) con la teoría de transformada

de funciones, observando una diferencia crucial al aplicar la transformada de funciones con respecto a la transformada de Fourier clásica. En otras palabras se puede decir que *Morlet* observó que según su aproximación las funciones de alta frecuencia son más anchas que las de baja frecuencia. Debido a esto *Morlet* decide llamar su transformada de funciones "wavelet" (ondículas) de forma constante.

Debido a la poca credibilidad y aceptación que presentaba su teoría, *Morlet* decide consultar a su excompañero de estudio, *Grossmann*, un físico teórico, que trabajaba en temas aplicados en mecánica cuántica, donde existen problemás similares cuando se intenta fijar el rasgo local en una función así como en su transformada Fourier. *Grossmann* reconoció que la transformada de *Morlet* es algo similar al método de los estados coherentes, un formalismo técnico usado en la mecánica cuántica [10].

### 2.1.5 Yves Meyer

En 1985 *Y. Mayer*, realizó su análisis y propuso una fórmula para la reconstrucción de funciones que resultó en un redescubrimiento de la fórmula de *A. Calderón*, introducida en el análisis armónico en 1960. El análisis armónico es una disciplina en matemáticas puras que surgió del análisis de Fourier, entre sus muchas direcciones, la cual está orientada al estudio de singularidades, operadores integrales con Kernels singulares (*transformada de Hilbert*), integrales singulares oscilantes, etc.,

La fórmula de *Calderón* fué diseñada para ser una herramienta en el análisis de ciertos operadores integrales con ciertos kernels o núcleos integrales singulares usados a diferentes escalas, de una manera similar a la transformada de ondícula de *Morlet* y *Grossmann*.

*Meyer* estaba focalizado especialmente en la serie de ondículas: sistemáticamente usaba familias redundantes de ondículas por su creencia de que la redundancia era adecuada para obtener buena relación frecuencia-tiempo. Entonces *Meyer* trata de demostrar esta creencia, consiguiendo por ensayo y error una bella construcción de una base de ondículas ortogonal con excelentes propiedades de ubicación en frecuencia y tiempo.

Más tarde *Lamarié* y *G. Battle* llegaron de manera independiente, usando técnicas diferentes, a la construcción de una base de ondículas consistentes de funciones spline, con mejor decrecimiento que la ondícula *Meyer* [6, 10].

### **2.1.6 Stéphane Mallat**

En 1986 *Mallat* se sintió interesado en el tema de ondículas, principalmente porque reconoció un concepto muy familiar, organizado de una manera diferente. El campo de especialización de *Mallat* era el análisis de imágenes y visión computacional, siendo de su conocimiento que el rasgo tosco en una imagen está en los objetos de gran escala y que el rasgo a escala fina debe estudiarse mas localmente. Este principio fue la representación escala-espacio de *Witkin*, y la inspiración de la construcción de la pirámide de Laplace de *Burt* y *Ardenson*. *Mallat* concibe la idea de una estructura similar capaz de usarse para la expansión de ondículas, en la cual todos los términos corresponden a una escala en la descomposición de ondículas de una función indizada, dada la diferencia entre dos escalas sucesivas.

En 1992 *Lemarie* y *Auscher* demostrarían que si la base de ondículas tiene cualquier relación tiempo-frecuencia razonable, las propiedades de la localización necesariamente se obtienen de un análisis de multiresolución.

### 2.1.7 Ingrid Daubechies

*Ingrid Daubechies* es actualmente profesor en Princeton University en la cátedra de Matemáticas. En 1988, *Daubechies* usó la idea de análisis de multiresolución para crear su propia familia de ondículas. Estas son llamadas ondículas *Daubechies*. La familia de ondículas *Daubechies* satisface varias propiedades: tienen soporte compacto, ortogonalidad, regularidad y continuidad. La propiedad de ortogonalidad es satisfecha porque los productos internos de todas las ondículas de *Daubechies* son cero. La propiedad de regularidad está satisfecha ya que las ondículas de *Daubechies* pueden reproducir funciones lineales. Finalmente, la propiedad de continuidad se satisface debido al hecho de que las ondículas *Daubechies* son funciones continuas aunque no son muy suaves y no son diferenciables en ningún lugar [14].

Esta breve reseña nos muestra el creciente interés por la conceptualización del uso de transformada ondícula. En la actualidad se han popularizado las aplicaciones de funciones ondículas como filtro de señales y en el procesamiento digital de imágenes, encontrándose algoritmos en paquetes conocidos tales como el Matlab. A continuación estudiaremos los fundamentos y propiedades de las ondículas.

## 2.2 Generalidades Sobre Ondículas

Broadly [28] definió, una ondícula (*wavelet*) como una función de onda cuidadosamente construida que cumple con ciertas propiedades matemáticas [14, 6]. Una ondícula (*wavelet*) usualmente tiene propiedades tales como una buena localización en frecuencia-tiempo, puede calcularse de forma simple usando algoritmos rápidos y permite realizar análisis de multiresolución, que son de gran relevancia para aplicación en la industria. Así las ondículas se consideran como métodos útiles en la regresión no-paramétrica para una amplia clase de funciones.

En líneas generales, el concepto de ondícula (*wavelet*) se puede ver como resultado de una síntesis de ideas, las cuales se originaron durante los últimos veinte o treinta años en ingeniería, física y matemáticas. Por otro lado, las ondículas (*wavelets*) constituyen una herramienta matemática simple de extenso uso en una gran variedad de aplicaciones, tales como análisis de señales, análisis numérico, y muchos otros [14].

Las ondículas se puede considerar como una base bondadosa de funciones para una gran variedad de funciones espaciales en diferentes espacios tales como  $L^2(\mathbb{R})$ , el espacio Besov y el espacio Slove [4, 5]. Estas pueden proveer aproximaciones exactas de las funciones en tales espacios. Con la propiedad de análisis de mutiresolución (*MRA*), soporte compacto y (semi)ortogonalidad, la ondícula se convierte en una alternativa atractiva como base de funciones para la solución de ecuaciones diferenciales. En contraste con las funciones trigonométricas clásicas de senos y cosenos como funciones base, las cuales tienen soporte infinito por no estar contenidas en  $L^2(\mathbb{R})$ , la base de ondícula está constituida por funciones de  $L^2(\mathbb{R})$ , y pueden tener un soporte compacto ante un cambio abrupto



tal como el que ocurre durante el choque de ondas o durante la aparición de un pico, que ocurre en una función, casos en los que solo los coeficientes locales en una aproximación son afectados.

Las funciones de ondículas (*wavelets*) son dependientes de la escala que tienen como soporte compacto. Ellas forman una base incondicional para un número de funciones espaciales diferentes siendo adecuadas para representar diferentes tipos de datos. Lo que hace útil a una ondícula (*o wavelet*) es la preservación de la información de la posición para cada escala.

De modo similar a la transformada de Fourier, la transformada de ondícula (*wavelet*) ofrece una representación de una señal usando coeficientes de su construcción espacial.

La transformada de ondícula (*wavelet*) mapea una función en tiempo a una serie de funciones biparamétricas de escala  $a$  y tiempo  $t$ . Esta transformada de ondícula (*wavelet*) de una función  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  es definida por

$$WF(a, t) = \sqrt{a} \int f(t) \psi(t - \tau) dt \quad (2.1)$$

donde  $\psi(t)$  es llamada una ondícula básica (*ondícula madre*) y  $\tau$  un instante de tiempo. La traslación y dilatación de la base de ondícula (*wavelet*) forma una familia que constituye una base ortogonal.

La transformada de ondícula (*wavelet*) puede ser interpretada como una transformación que lleva a la descomposición de una función en una familia de funciones que tienen diferentes tiempos y frecuencias de resolución. Ya que normalmente se trabaja con datos discretos, se hace uso de la transformada de ondícula (*T.O o W.T*) discreta, la cual consiste de una convolución de la función base con el conjunto de datos. Cada base tiene

componentes de ubicación y frecuencia, las cuales controlan la relación escala -escala y la relación escala-posición.

Entre los ejemplos de ondícula más empleados están la de Haar, que es la más simple forma de ondícula con un comportamiento tipo función de Heaviside. La ondícula Daubechies es generalmente usada en un número de aplicaciones, tales como el análisis de señales, el procesamiento de imágenes sísmicas, entre otras [11]. La transformada de ondícula discreta extrae información que permite describir detalles a escala fina o variabilidad a escala gruesa.

La transformada de ondícula (*wavelet*) provee una red de multiresolución para la representación de datos. Ellas son una familia de funciones ortogonales que separan una función de una señal en dos paquetes de frecuencias distintas que son ubicadas en el dominio tiempo; de esta manera las ondículas son adecuadas para analizar data no estacionaria, en otras palabras, ondícula es una proyección de una función o un conjunto de funciones de data discreta en el dominio espacio-tiempo. Usando ondícula se hace un muestreo del comportamiento de la función a diferentes escalas de medida.

La transformada de ondícula (*T.O*) se puede emplear para determinar propiedades de las rocas de yacimiento, tales como la permeabilidad uni-dimensional y bi-dimensional, para determinar límites entre capas, discontinuidades y heterogeneidades del medio poroso. También se ha aplicado ondículas ortogonales para escalamiento de la correlación de campos de permeabilidad heterogénea [21, 15].

Cuando ocurre un cambio abrupto en un proceso físico, tal como el asociado a un choque de ondas o una discontinuidad en una función matemática cualquiera, solo el coefi-

ciente de discretización local en una aproximación de ondícula será afectado, por lo que el uso de ondículas presenta ventajas importantes. Una de las características más relevantes de las ondículas es su propiedad de análisis de mutiresolución (*MRA*), la cual nos permite obtener una mejor resolución espacial a más bajo costo.

Para el problema de interés en este trabajo, una función de escalamiento se puede definir como aquella que nos permite establecer una relación entre una escala fina y una gruesa, por ejemplo relacionar las propiedades medidas en una roca en el laboratorio y las requeridas para describir una celda a escala de yacimiento.

La función de escalamiento se denota  $\phi_{n,k}(x)$  y tiene asociado un conjunto de coeficientes  $\{c_k\}$   $k \in \mathbb{Z}$  que son constantes, tal que ellas satisfacen las relaciones bi-escalares o ecuaciones de refinamiento y alguna condición adicional [4, 11].

$$\phi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \sum_k c_k \phi(2^n x - k) \quad (2.2)$$

donde  $n$  representa la escala y  $k$  la translación. Esta función de escalamiento tiene un soporte compacto si y solo si muchos de los coeficientes finitos  $c_k$  son diferentes de cero.

Del análisis previo, se puede observar que a diferencia de la transformada de Fourier, la representación de ondícula de una función no es única. Una aproximación de la señal original a cierta escala de resolución puede ser de nuevo descompuesta en una aproximación a escala gruesa y fina. El paquete de la transformada de ondícula es una clase de representación, la cual tiene una estructura piramidal completa. Ciertas características de la señal pueden ser localizadas solo en una parte específica de los coeficientes.

Las aplicación de ondícula para describir flujo multifásico es mucho más complicada que para flujo monofásico (según reportes anteriores [15, 17]). A diferencia del caso de

flujo monofásico, donde solo la permeabilidad absoluta afecta el comportamiento del flujo en el estado regular, en el caso multifásico las propiedades del flujo para cada fase y las diferentes presiones a las que están sometidas las facies geológicas juegan un papel vital para múltiples litologías y situaciones de fluidos complejos. Por lo tanto, además, de la permeabilidad absoluta en el caso del flujo monofásico se necesita determinar dos propiedades adicionales: la permeabilidad relativa y la presión capilar para la escala gruesa de la red modelo. Tales propiedades son sensibles al régimen de flujo y a la condición de saturación haciendo el problema más complicado.

Es bien conocido que el régimen de flujo multifásico está determinado por la relación o balance relativo de las fuerzas que la conducen: fuerzas viscosas, gravitacionales y capilares. Esta proporción relativa conduce a una dependencia con la velocidad del flujo, escala de observación, heterogeneidades, tamaño adecuado de la red y propiedades del fluido. Suponiendo que la velocidad de flujo y las heterogeneidades en un reservorio o yacimiento pueden variar espacialmente o temporalmente, y que tienen una dependencia fuerte con la permeabilidad relativa y la presión de capilar, las cantidades a determinar para describir el flujo resultan dependientes tanto del espacio como del tiempo, pudiendo constituirse en un problema de difícil manejo sin referirse a estructuras geológicas y llevar a un régimen de flujo dominante.

Por esta razón es necesario investigar sobre otros posibles nuevos métodos de escalamiento con aplicación a flujo bifásico, basados en la técnica de análisis de ondícula, la cual contrasta con otros métodos de escalamiento convencional, ya que no requiere de la

simulación a escala fina puesto que las ondículas permiten pasar de escala fina a gruesa por su estructura como transformada.

## 2.3 Bases

Definimos una base como sigue,  $\phi_{n,k}(x) = 2^{n/2}\phi_n(2^n x - k)$  donde  $\phi$  es la función de escalamiento fundamental. En principio cualquier función se puede desarrollar en términos de los elementos de la base que es lo que se quiere como fin último.

Entre las propiedades importantes de las bases se tiene el hecho de que cada uno de los elementos que la constituyen tiene soporte compacto, y son conjuntos ortonormales del subespacio  $L^2(\mathbb{R})$  donde esta propiedad se define usando el producto interno de funciones usual. La expansión de ondículas para una función  $f$  toma la forma

$$f(x) = \sum_k c_{n,k} \phi_{n,k}(x) \quad (2.3)$$

donde los coeficientes están definidos usualmente por

$$c_{n,k} = \int f(x) \phi_{n,k}(x) dx. \quad (2.4)$$

## 2.4 Coeficientes de los Filtros

Los coeficientes de la ecuación de dilatación  $c_{n,k}$ , definidos en la ecuación de escalamiento son derivados de las siguientes condiciones:

1. La suma de los coeficientes debe ser igual a dos.

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2 \quad (2.5)$$

Esta condición se obtiene de la condición de normalización de la función de escalamiento:  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ .

2. Se cumple la relación

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k c_{k+2l} = 2\delta_{0,l}, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

Esta condición se hace necesaria a partir de los requerimientos de que la función de escalamiento sea ortogonal en sus translaciones enteras:  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)\phi(x-l) dx = \delta_{k,l}$ .

3. La última condición asegura que los coeficientes sean únicos para cada  $k$  y suministren una normalización adecuada para  $\phi$  y su derivada. Esta derivada satisface los requerimientos de los momentos  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) x^l dx = 0$  para  $l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$ .

$$\sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_k k^l = 0; \quad l = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.7)$$

La condición de la suma de los coeficientes de dilatación se puede probar de la siguiente manera.

Integrando ambos lados de la ecuación (2.2) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) dx. \quad (2.8)$$

Haciendo el cambio de variable  $y = 2x - k$ , en el lado derecho de la ecuación (2.8), y diferenciando se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \phi(y) dy = \frac{1}{2} \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy. \quad (2.9)$$

Partiendo del hecho de que una caja de área unitaria es empleada para iniciar la interacción, esto indica que el área bajo la función de escalamiento es igual a la unidad, es

decir (condición de normalización):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1.$$

simplificándose (2.9) a:

$$\frac{1}{2} \sum_k c_k = 1 \Rightarrow \sum_k c_k = 2.$$

## 2.5 Ecuación de Dilatación o Función de Escalamiento

Ahora examinamos la generación de ondículas ortogonales requeridas en las ecuaciones de dilatación. Estas ecuaciones han sido estudiadas recientemente [11, 7]. Dilatar es antónimo de contraer. La función es una versión de dilatación (horizontal) que tiene la misma altura, pero es estirada hacia afuera en un factor de dos sobre la escala horizontal  $x$ , donde  $x$  es una variable dependiente no dimensional que puede representar tiempo o longitud, según la aplicación considerada. En una ecuación de dilatación esta se expresa como un conjunto finito de términos  $\{c_k\}$ , que representa los coeficientes asociados a la ondícula. Estos términos están posicionados en diferentes lugares sobre el eje horizontal, aspecto descrito por el cambio del argumento a  $(2x - k)$  en lugar de usar solo  $2x$ , donde  $k$  es un entero (*positivo o negativo*). De esta manera la ecuación de dilatación básica tiene la forma:

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x - k), \quad (2.10)$$

donde  $\{c_k\}$  son constantes numéricas necesarias para la construcción básica de las ondículas y  $N$  es número de coeficientes. En pocas palabras, una función de escalamiento  $f$  es esencialmente una función  $\phi(x)$  la cual puede ser escrita como una combinación lineal de

términos de la función  $\phi(2x - k)$ , las cuales son versiones de  $\phi(x)$  escaladas por un factor  $\frac{1}{2}$  y trasladadas en  $k/2$  como se indica en (2.10).

La ecuación (2.10) es conocida en la literatura como la relación bi-escalar para la función de escalamiento, y la secuencia  $\{c_k\}$  es llamada la secuencia bi-escalar de  $\phi(x)$ . En nuestro caso restringiremos la atención para aquellos casos donde el conjunto de coeficientes  $\{c_k\}$  son finitos y distintos de cero. Estas funciones de escalamiento tienen soporte compacto.

Supongamos que consideramos un espacio cerrado  $V_0$ , que es el espacio lineal de la traslación entera de  $\phi$ , es decir;

$$V_0 := \text{clos}_{L^2} \langle \phi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle \quad (2.11)$$

y considerando que

$$\phi_{n,k}(x) := \phi(2^n x - k), \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad (2.12)$$

las cuales son las versiones escalada y trasladada de  $\phi(x)$ , definimos

$$V_j := \text{clos}_{L^2} \langle \phi_{n,k} : n, k \in \mathbb{Z} \rangle \quad (2.13)$$

al observar la relación bi-escalar (2.10), tenemos que  $V_0 \subset V_1$ . De hecho, la relación bi-escalar genera una secuencia anidada de sub-espacios

$$\dots \underset{\text{gruesa}}{V_{-1}} \subset V_0 \subset \underset{\text{fina}}{V_1} \subset V_2 \dots \quad (2.14)$$

Por lo tanto, cada función “bien comportada” sobre el eje real debe poder ser representable en términos de  $\phi_{n,k}$ , para cualquier  $j$ . En otras palabras,

$$\text{clos}_{L^2} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.15)$$



Esta condición es en general suficiente para generar lo que se conoce como análisis de multiresolución *AMR* (*MRA*) que será discutido mas adelante [7, 14]. Un ejemplo clásico de ondícula es la ondícula Haar, la cual se ilustra en la figura 2.1 y se define como :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

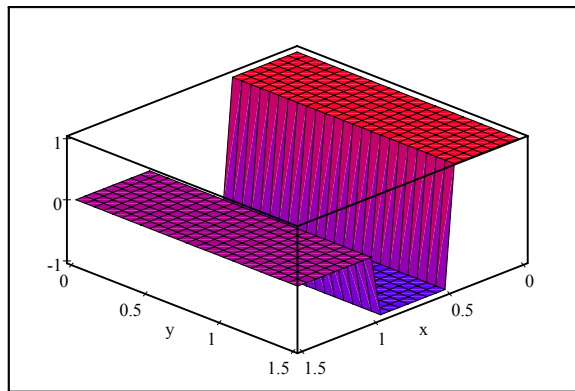


Figura 2.1. Ondícula Haar

La función de escalamiento es la función característica en el intervalo  $[0, 1)$ ;

$$\phi(x) = X_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

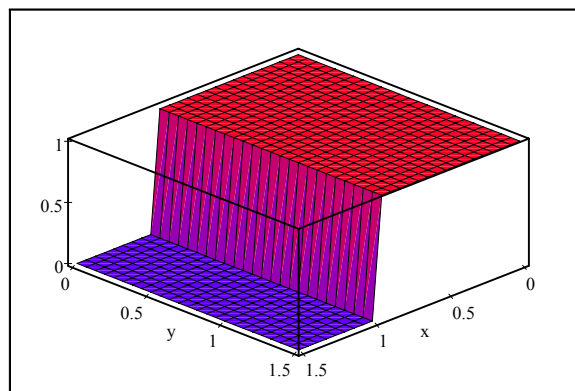


Figura 2.2. Función de Escalamiento para la Ondícula Haar.

## 2.6 La Función Ondícula.

La función de escalamiento es empleada para definir la función ondícula. La única diferencia que existe entre la ecuación de dilatación y la ecuación para la ondícula es el orden de los coeficientes y la señal:

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k a_{N-1-k} \phi(2x - k) \quad (2.16)$$

donde  $N$  es el número de coeficientes y  $a_{N-1-k}$  son los coeficientes filtros que definen la función de escalamiento.

## 2.7 La Derivada de la Función de Escalamiento.

La derivada de la función de escalamiento también puede ser calculada. Tomando la derivada de la ecuación de dilatación original se tiene

$$\phi'_{n,k}(x) = 2^{\frac{3n}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi'_{n,k}(2^n x - k). \quad (2.17)$$

El valor original de cada entero debe corresponder al autovector del autovalor  $\lambda = 1/2$ . Usando (2.17), la construcción de la derivada de la función de escalamiento es similar a la construcción de la función de escalamiento. No todos los coeficientes de la matriz tienen autovalores de  $\frac{1}{2}$ . Esta función de escalamiento no tiene derivadas.

## 2.8 Ortogonalidad de Ondículas

En un espacio euclídeo  $V$ , dos elementos  $x$  e  $y$  se denominan ortogonales si su producto interior es cero. Un subconjunto  $S$  de  $V$  es un conjunto ortogonal si  $(x, y) = 0$  para

todo par de elementos distintos  $x$  e  $y$  de  $S$ . Un conjunto se llama ortonormal si cada uno de sus elementos tiene norma 1 y satisface la relación de ortogonalidad. El elemento cero es ortogonal a todo elemento de  $V$ ; es el único elemento ortogonal a sí mismo, pero al hablar de complementos ortogonales "proyecciones" podríamos cambiar la visión al decir que  $V$  es un espacio euclídeo y  $S$  un subespacio de dimensión finita. Se podría definir en este caso que  $S$  sea un subconjunto de un espacio euclídeo  $V$ . Se dice que un elemento de  $V$  es ortogonal a  $S$  si es ortogonal a todo elemento de  $S$ . El conjunto de todos los elementos ortogonales a  $S$  se designa con  $S^\perp$ , y es el "perpendicular a  $S$ " [2, 7, 14].

Una clase particular de ondículas son las ondículas ortogonales. Para iniciar su proyección debemos ubicarnos en los conceptos básicos de ortonormalidad y los principios básicos del análisis de multiresolución ortogonal. Este es un análisis de multiresolución donde el espacio de la ondícula  $W_j$ , está definido como el complemento ortogonal de  $W_j$  en  $V_j$ . Por consiguiente, los espacios  $W_j$  con  $j \in \mathbb{Z}$  son todos mutuamente ortogonales, y las proyecciones de  $P_j$  y  $Q_j$  son ortogonales de manera que la expansión es ortogonal.

$$f(x) = \sum_k Q_k f(x). \quad (2.18)$$

Una condición suficiente para que el análisis de multiresolución en general sea un análisis de multiresolución ortogonal es

$$W \perp V$$

$$\langle \psi, \phi(x - l) \rangle = 0$$

ya que la otras condiciones vienen simplemente del escalamiento. Se tiene así que las funciones de escalamiento deben ser ortogonales ante translación, además de ortonormales,

tal que

$$\langle \phi(x), \phi(x-l) \rangle = \delta_l \quad \therefore \delta_l = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq 0 \\ 1 & \text{si } l = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

o dicho de otra forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (2.20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = 1 \quad (2.21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx = 0 \quad \text{para } m \neq 0 \quad (2.22)$$

Para la prueba de esto consideremos la relación biescalar de la forma

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k), \quad (2.23)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k c_k \phi(2x-k) \sum_j c_j \phi(2x-2m-j) dx = \\ &= \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) \phi(2x-2m-j) dx \end{aligned} \quad (2.24)$$

Puesto que  $\phi_0(x)$  es ortogonal ante una translación unitaria, la integral en (2.24) es cero a menos que  $k = 2m + j$ , lo cual exige que  $j = k - 2m$  y así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx = \sum_k c_k c_{k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x-k) dx$$

la cual es cero para todo  $m$  excepto  $m = 0$ , ya que  $\sum_k c_k c_{k-2m} = 0$  para todo  $m \neq 0$ . Por lo tanto, la función genera como resultado de la iteración una función ortogonal, estos resultados pueden ser repetidos para la segunda y última iteración, y conduce a la conclusión de que la función de escalamiento es ortogonal ante translaciones.

Una consecuencia de (2.22) cuando  $m = 0$  es que los coeficientes de escalamiento  $n$  deben valer  $1/2$ . Esto se puede apreciar por sustitución de  $\phi(x)$  de (2.23) para obtener

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \\ &= \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) \phi(2x-j) dx, \end{aligned}$$

la cual es cero a menos que  $j = k$ , obteniéndose

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x-k) dx \quad (2.25)$$

haciendo el cambio de variable,  $y = 2x - k \implies dy = 2dx \implies dx = \frac{1}{2}dy$ , y sustituyendo en (2.25)

$$\sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x-k) dx = \sum_k \frac{c_k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) dy$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k \frac{c_k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) dy$$

y aplicando la condición (2.21) se obtiene

$$1 = \sum_k \frac{c_k^2}{2} \implies \sum_k c_k^2 = 2.$$

*Ejemplo*

Consideremos el B-Spline lineal, para el cual su relación de escalamiento está dada

por:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.26)$$

entonces, la función  $\phi(2x-k)$  en el subespacio  $V_1$  está expresada explícitamente como

$$\phi(2x-k) = \begin{cases} 2x-k & \text{para } \frac{k}{2} \leq x < \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \\ 2+2x-k & \text{para } \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \leq x < \frac{k}{2} + 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.27)$$

ya que el soporte de  $\phi(x)$  es  $[0, 2]$  su relación bi-escalar toma la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^2 p_k \phi(2x - k) \quad \therefore p_k = 2^{-m+1} \binom{m}{k} \quad (2.28)$$

así al sustituir las expresiones (2.26) y (2.27) para cada  $1/2$  intervalo entre 0 y 2 en (2.28)

se obtienen los coeficientes  $\{p_k\}$  y la relación bi-scalar está dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) + \phi(2x - 1) + \frac{1}{2}\phi(2x - 2)$$

Donde se puede observar que la suma de los coeficientes es dos, cumpliéndose la condición (2.5), es decir

$$\sum_k c_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

Supongamos que definimos una segunda relación biescalar igual a (2.27), la cual se expresa como  $\phi(x) = \sum_{j=0}^2 p_j \phi(2x - j)$ , aplicando la relación de ortogonalidad se puede escribir:

$$\sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) \phi(2x - j) dx = 0$$

tomando en consideración la ecuación (2.26) se puede reescribir como:

$$\sum_k \sum_j c_k c_j \left( \int_0^1 (2x - k)(2x - j) dx + \int_1^2 (2 - 2x + k)(2 - 2x + j) dx \right) = \delta_{kj} \quad (2.29)$$

de la cual se obtiene que  $\delta_{kj} = 1$  si  $k = j$  y  $\delta_{kj} = 0$  si  $k \neq j$ . Supongamos además que  $k = 0$  y  $j = 1$ , se tiene así sustituyendo en (2.29):

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_j c_k c_j \left( \int_0^1 (2x - 0)(2x - 1) dx + \int_1^2 (2 - 2x + 0)(2 - 2x + 1) dx \right) &= 0 \\ \int_0^1 (2x)(2x - 1) dx + \int_1^2 (2 - 2x)(3 - 2x) dx &= \\ \left( \frac{4x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^1 + \left( 6x + \frac{4x^3}{3} - \frac{10x^2}{2} \right) \Big|_1^2 &= \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

lo cual indica que los B-spline realmente son ortogonales ante translación. Para la condición de la ortonormalidad debe cumplirse que:

$$\sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) \phi(2x - j) dx = 1$$

lo cual se observa si el sistema está normalizado a uno, y si  $j = k$  resultando

$$\sum_k \sum_k c_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - k) \phi(2x - k) dx = \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x - k) dx$$

sustituyendo en la ecuación (2.26) y suponiendo que  $k = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x) dx &= \sum_k c_k^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (2x)^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} (2 - 2x)^2 dx \right] = \\ &= \sum_k c_k^2 \left[ \int_0^{1/4} (4x)^2 dx + \int_{1/4}^{1/2} (2 - 4x)^2 dx \right] \\ &= \sum_k c_k^2 \left[ \frac{4^2 (x)^3}{3} \Big|_{1/4}^0 + \frac{(2 - 4x)^3}{12} \Big|_{1/4}^{1/2} \right] = -\frac{32}{3} + \frac{38}{3} = 2 \\ &\sum_k c_k^2 * 2 = 2 \implies \sum_k c_k^2 = 1. \end{aligned}$$

## 2.9 Resumen de las Propiedades de Ortogonalidad

Probaremos que hay un número regular de coeficientes de ondículas y que esto satisface las condiciones requeridas, esto es

$$\sum_k c_k c_{k+2k} = 0 \quad k \neq 0 \quad (2.30)$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x - k) = 0 \quad k \neq 0 \quad (2.31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(x-k) = 0 \quad (2.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2x)\phi(x-k) = 0 \quad (2.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(2x-k) = 0 \quad (2.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(x-k) = 0 \quad (2.35)$$

las ecuaciones (2.31) y (2.35) dependen de las relaciones (2.30) (2.32) (2.33) y (2.34) por lo que también dependen del número de coeficientes de la ondícula  $N$  considerada. Donde hay términos del tipo  $\psi(2x)$  en la ecuación (2.33) y  $\psi(2x-k)$  en (2.34) estos pueden ser remplazados por  $\psi(2^n x)$  y  $\psi(2^n x - k)$ ,  $n \geq 0$  respectivamente, para obtener [7].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^n x)\phi(x-k) = 0 \quad n \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(2^n x - k) = 0 \quad n \geq 0, \text{ sujeta a } m \neq 0 \text{ si } m = 0. \quad (2.36)$$

## 2.10 Análisis de Multiresolución

El concepto de análisis de multiresolución fue introducido por *Mallat* y *Meyer* en 1986. En 1989 *Mallat* publica el trabajo titulado "Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases  $L^2$ " en *Transactions of the AMS* donde aparece por primera vez formulada la noción de análisis de multiresolución [18, 20].

Cualquier ondícula, semiortogonal o no, genera una descomposición de sumas directas de  $L^2(\mathbb{R})$  para cada  $j$ . Considérese el siguiente subespacio cerrado de  $L^2$ .

$$V_j = \dots \oplus W_{j+2} \oplus W_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.37)$$

Este subespacio tiene la siguientes propiedades:



1.  $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots$
2.  $\text{clos}_{L^2} \left( \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \right) = L^2(\mathbb{R})$
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
4.  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j \in \mathbb{Z}$
5.  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$

Además, el subespacio satisface

$$W_j \cap W_l = \{0\}, \quad j \neq l$$

la sucesión de los subespacios se anida, como se describe en la condición (1), y tiene la propiedad de que cada función  $f$  en  $L^2(\mathbb{R})$  puede ser aproximada tan estrechamente como se desee por su proyección  $P_j f$  en  $V_j$ , como es descrito por la condición (2). Por otro lado, por disminución de la proyección  $P_j f$ , se podría tener pequeñas energías arbitrarias, garantizada por la condición (3). Lo que no es descrito por las condiciones (1)-(3) es la propiedad intrínseca mas importante de estos espacios, de que cada vez más las "variaciones" de  $P_j f$  son eliminadas cuando  $j \rightarrow \infty$ . De hecho, estas variaciones se anulan, nivel a nivel en orden decreciente de la tasa de variación (mejor conocida como "frecuencia de banda") y es guardada en el espacio complementario  $W_j$  como se establece en la condición (4). Este proceso puede ser muy diferente al obtenido al aplicar la condición (5) [7].

De hecho, si el espacio de referencia  $V_0$ , es generado por una sola función  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  en el sentido de que

$$V_0 = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} (\phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z})$$

donde

$$\phi_{n,k}(x) := 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k)$$

entonces, todos los subespacios  $V_j$  son también generados por la misma  $\phi$ , así como los subespacios  $W_j$  son generados  $\psi$ , como es sabido:

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R})} (\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}), \quad j \in \mathbb{Z}$$

es decir que dicha condición se cumple tanto para la función de escalamiento como para la ondícula.

# Capítulo 3

## B-Spline

### 3.1 Spline

Los polinomios de interpolación han sido utilizados desde el siglo *XVII*, principalmente para interpolar pequeños datos astronómicos. Los Splines son un método más robusto de interpolación. Ellos fueron desarrollados a principios de 1960 como apoyo a las actividades de manufactura de carrocerías. También son importantes en cálculos gráficos, por ser más robustos que los polinomios, y producen mejores resultados si la data contiene cambios repentinos o experimenta errores.

Una función  $S$  definida en un intervalo  $[a, b]$  es un spline suave de grado  $r$  con nodos  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  si y solo si para todo  $r$  se cumple que

$$S_i \in P_r(1) \tag{3.1}$$

y para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} S_i(t_i) &= S_{i+1}(t_i) \\ S_i^{(1)}(t_i) &= S_{i+1}^{(1)}(t_i) \\ &\vdots \\ S_i^{(r-1)}(t_i) &= S_{i+1}^{(r-1)}(t_i). \end{aligned} \tag{3.2}$$

La condición (3.1) indica que  $S$  debe ser un polinomio de grado  $r$  sobre cada subintervalo, aunque este puede ser un polinomio diferente sobre diferentes subintervalos. La

condición (3.2) asegura que esta diferencia de polinomios se alinea suavemente en el interior de los puntos nodales. Así, cuando dibujamos un gráfico de un spline buscamos suavidad en la tendencia y que las uniones sean imperceptibles. Un caso importante es el spline cúbico para el cual  $r = 3$ , el spline cúbico tiene dos derivadas continuas [2].

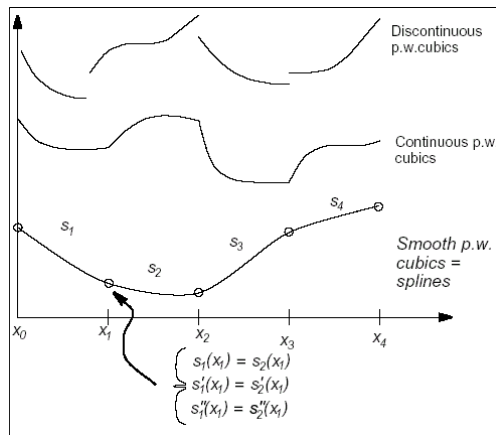


Figura 3.1. Polinomios continuos a trozos y spline.

La figura 3.1 muestra esquemáticamente el concepto de spline y su diferencia con los polinomios continuos a trozos.

## 3.2 Truncamiento de Monomios

A continuación se introduce el concepto de interpolación con spline, el cual permite obtener de una forma más compacta los splines y agilizar los cálculos computacionales. Considere como  $x$  cruza los nodos artificiales  $t_i$  en  $S(x)$ . Cambiando  $S_i$  de la ecuación (3.2) a la forma  $S_{i+1}$  tal que  $S^{(r-1)}$  debe ser continua

$$S_{i+1}(x) = S_i(x) + d_{i+1}(x - t_i)^r \quad \text{para } x \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.3)$$

Definiendo los monomios truncados como:

$$\begin{aligned} (x-t)_+^r &= (x-t)^r & x \geq t \\ (x-t)_+^r &= 0 & x < t \end{aligned}$$

$$S_2(x) = S_1(x) + d_2(x-t_i)_+^r$$

$$S_3(x) = S_2(x) + d_3(x-t_i)_+^r = S_1(x) + d_2(x-t_i)_+^r + d_3(x-t_i)_+^r$$

$$S_4(x) = S_3(x) + d_4(x-t_i)_+^r = S_1(x) + d_2(x-t_i)_+^r + d_3(x-t_i)_+^r + d_4(x-t_i)_+^r$$

⋮

$$S(x) = S_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} d_{i+1}(x-t_i)_+^r \quad (3.4)$$

done  $S_1(x)$  es un polinomio cúbico. Para simplificar esta expresión introducimos nodos artificiales  $t_{-r} \leq t_{-r+1} \leq \dots \leq t_{-1}$ , con  $t_{-1} \leq t$ . Entonces para  $x \geq t_0$

$$S_1(x) = d_{-r+1}(x-t_{-r})_+^r + d_{-r+2}(x-t_{-r+1})_+^r + \dots + d_0(x-t_{-1})_+^r + d_1(x-t_0)_+^r$$

para  $x \geq t_0$ , y así

$$S(x) = \sum_{i=-r}^{n-1} d_{i+1}(x-t_i)_+^r \quad \text{para } x \geq t_0. \quad (3.5)$$

Esto muestra que el conjunto de splines de orden  $r$  sobre la secuencia de nodos  $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  es un espacio lineal de funciones con dimensión  $n+r$ . Aunque teóricamente es útil, ésta expresión no es una buena forma de trabajar con splines, ya que los  $d_i$  frecuentemente tiene magnitudes grandes y diferentes signos. Debido a estas limitaciones se introduce el B-Spline para simplificar códigos e introducir la teoría de nodos artificiales  $t_{n+1}, t_{n+2}, \dots, t_{n+r}$  con  $t_n \leq t_{n+1} \leq t_{n+2} \leq \dots \leq t_{n+r}$ . Para cualquier  $i$ ,  $-r \leq i \leq n-1$  se define el B-spline mediante

$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro forma} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$N_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(x-t) N_1(x) dt = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt \quad m \geq 2 \quad (3.7)$$

Nótese que el B-spline de primer orden ( $N_1$ ), es la función característica en el intervalo  $[0, 1)$ , asociada a la función de escalamiento de Haar, y para  $m \geq 2$   $N_m$  está definida recursivamente mediante la convolución de una integral. Lo cual permite de manera casi instantánea establecer la relación biescalar para el B-spline [7, 21].

### 3.3 Función de Escalamiento

Haciendo una analogía con los principios de la teoría de ondículas, básicamente sobre la ecuación (2.10) se puede establecer la relación biescalar para funciones de escalamiento de orden  $m$  para el B-spline como:

$$N_m(x) = \sum_{k=0}^m p_k N_m(2x - k), \quad (3.8)$$

donde la secuencia biescalar  $\{p_k\}$  para las funciones de escalamiento B-spline están dadas por:

$$p_k = 2^{-m+1} \binom{m}{k}, \quad \text{para } 0 \leq k < m. \quad (3.9)$$

#### 3.3.1 Propiedades de la Función de Escalamiento

Los B-splines tienen muchas propiedades interesantes, algunas de las cuales se resumen en la siguiente lista.

##### 1. Soporte Compacto

$$\text{sup p}N_m = [0, m]$$

##### 2. $N_m(x) > 0$ para $0 < x < m$

## 3.Particiones de la unidad

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x-k) = 1 \quad (3.10)$$

## 4.Simetría

$$N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right) \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

## 5.Propiedad de recursividad

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1). \quad (3.12)$$

### 3.4 Ondículas B-Spline

Los B-spline  $N_m$  son funciones de escalamiento que cumplen con lo establecido por la teoría de ondículas en el capítulo anterior, por lo tanto el subespacio  $V_j$  para el B-spline forman un nido de secuencias (secuencia anidada). Sin embargo, el subespacio complementario  $W_j$  en (2.16) es mutuamente ortogonal a  $V_j$ , y cualquier función en  $L^2(\mathbb{R})$  puede ser representada como una suma lineal de funciones en  $W_j$  como se describe mediante la condición 4 de AMR.

En general, las ondículas  $\psi_m$  en el subespacio  $W_j$  no son únicas. Por el momento, nos enfocaremos en la ondícula única  $\psi_m \in W_0$  que tiene soportes pequeños [7].

La relación biescalar para ondículas B-spline de orden general  $m$  está dada por:

$$\psi_m(x) = \sum_{k=0}^{3m-2} q_k N_m(2x-k) \quad (3.13)$$

$$q_k = (-1)^k 2^{1-m} \binom{m}{l} N_{2m}(k+1-l) \quad (3.14)$$

### 3.4.1 Propiedades de las Ondículas

Las ondículas B-spline tienen ciertas propiedades que las hacen más ventajosas en una variedad de aplicaciones [7], algunas de las cuales mencionaremos a continuación:

1. Existen expresiones analíticas para las ondículas B-spline como las mostradas en las relaciones anteriores.

2. Tienen soporte compacto

$$\text{sup } p \text{ de } \psi_m = [0, 2m - 1] \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

el cual se indica en (3.13).

3. Son simétricas para cualquier  $m$  par y antisimétricas para  $m$  impar alrededor del centro,

$$\begin{cases} \psi_m(x) = \psi_m(2m - 1 - x) & \text{para } m \text{ par} \\ \psi_m(x) = -\psi_m(2m - 1 - x) & \text{para } m \text{ impar} \end{cases}$$

4. Las  $q_k$  son series finitas. Solo  $3m - 1$  de  $q_k$  son no nulos, lo que es evidente de la relación (3.13).

5. Muestran completa propiedad de oscilación.

6. Tienen momentos nulos, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x) x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (3.15)$$

7. Las ondículas B-spline de  $\psi_m$  son ortogonales a diferentes escalas, es decir

$$\langle \psi_m(2^{n_1}x - k_1), \psi_m(2^{n_2}x - k_2) \rangle = 0 \quad \text{si } n_1 \neq n_2$$

Sin embargo, para diferentes translaciones de  $\psi_m$  no son ortogonales a la misma escala, es decir,



$$\langle \psi_m(2^n x - k_1), \psi_m(2^n x - k_2) \rangle \neq 0 \quad \text{para } m \neq 1$$

Esta última propiedad es referida como semi-ortogonalidad.

### 3.5 Relaciones de Descomposición

Las relaciones de descomposición para el B-spline de orden m-ésimo permite escribir

$$\phi(2x - l) = \sum_k [a_{l-2k} \phi(x - l) + b_{l-2k} \psi(x - l)], \quad l \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

donde las secuencias de descomposición  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  en (2.53) están dadas por las siguientes relaciones:

$$a_k = \frac{1}{2} (-1)^{k+1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} q_{-k+2m-1-2l} c_{l,2m} \quad (3.17)$$

$$b_k = \frac{1}{2} (-1)^{k+1} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{-k+2m-1-2l} c_{l,2m} \quad (3.18)$$

donde  $\{q_k\}$  y  $\{p_k\}$  son las secuencias biescalares dadas por (b) y (a), y  $\{c_{k,m}\}$  son coeficientes que representan la función Cardinal B-spline  $L_m(x)$ , en términos del Spline de m-ésimo orden,  $N_m(x)$ , que es,

$$L_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,m} N_m\left(x + \frac{m}{2} - k\right) \quad (3.19)$$

Los coeficientes  $\{c_{k,m}\}$  pueden ser determinados con la ayuda de la siguiente relación

$$\sum_k c_{k,m} Z^k = \frac{1}{\sum_k N_m\left(k + \frac{m}{2}\right) Z^k}. \quad (3.20)$$

Típicamente  $N_m\left(k + \frac{m}{2}\right)$  en (3.20) son fáciles de calcular empleando las propiedades de los B-splines (5) ya que muchos de estos son no nulos. Entonces la inversión de las series pueden ser empleadas para calcular los coeficientes  $\{c_{k,m}\}$ .

Note que las secuencias de descomposición  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$  en (2.53) para el B-spline son infinitas. Sin embargo, el decaimiento de las secuencias son del tipo exponencial, lo que hace que muchos de ellos puedan ser truncados con errores muy pequeños [7].

### 3.5.1 Ejemplo de Ondícula Lineal B-spline

A continuación indicamos la función de escalamiento y la ondícula B-spline para el caso más simple cuando  $m = 2$  y que es conocido como B-spline lineal.

#### Función de escalamiento

El B-spline de  $N_2(x)$  es derivado de las ecuaciones de recurrencia (3.6) y (3.7) de modo tal que para el caso de  $m = 2$  la forma general del B-spline está dada por:

$$N_2(x) = \phi_2(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.21)$$

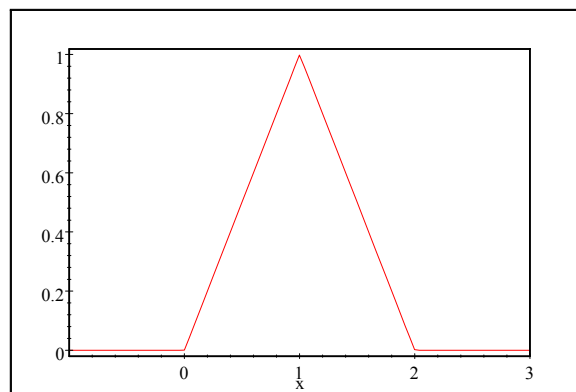


Figura 3.2. B-spline Líneal  $N_2(x)$ .

La figura 3.2 ilustra la forma de la base para el B-spline lineal, donde se aprecia que tiene soporte compacto entre cero y dos, y la amplitud de  $\phi_2(x)$  de uno. La función

$\phi(2x - k)$  en el subespacio  $V_1$  está expresada explícitamente como:

$$N_2(2x - k) = \phi_2(2x - k) = \begin{cases} 2x - k & \text{para } \frac{k}{2} \leq x < \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \\ 2 + k - 2x & \text{para } \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \leq x < \frac{k}{2} + 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.22)$$

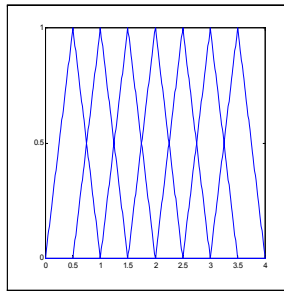


Figura 3.3. B-spline Lineal  $N_2(2x - k)$ .

La figura 3.3 muestra el B-spline lineal  $N_2(2x - k)$  en el subespacio  $V_1$  para  $k \in \mathbb{Z}$ , es decir indica la evolución de  $\phi_2(x)$  con respecto a  $k$ .

Ya que el soporte de  $\phi(x)$  es  $[0, 2]$  su relación biescalar tiene la forma:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^2 p_k \phi(2x - k) \quad (3.23)$$

cuya representación gráfica se representa en la figura 3.4.

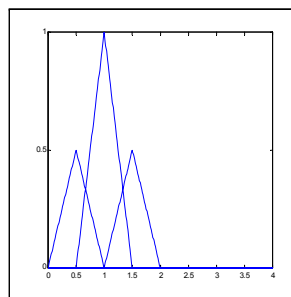


Figura 3.4. Relación biescalar para el B-spline lineal.

Por sustitución de las expresiones (3.21) y (3.22) para cada medio intervalo entre  $[0, 2]$  en (3.23), los coeficientes  $p_k$  se pueden determinar, y la relación biescalar para el B-Spline lineal está dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) + \phi(2x-1) + \frac{1}{2}\phi(2x-2) \quad (3.24)$$

La figura 3.4 es muy útil para entender la geometría de la relación biescalar (3.24), donde para la función de escalamiento  $\phi(x)$  del lado izquierdo de (3.24) cada uno de los picos corresponde a cada valor de  $k$ , es decir, de izquierda a derecha de la gráfica (3.24) tenemos  $k = 0, 1$  y  $2$ , y se aprecia que para  $k = 0$  y  $2$  los  $p_k$  tienen valores de  $\frac{1}{2}$  y para  $k = 1$  tiene el valor de  $1$ .

### 3.5.2 Ondícula

Ahora vamos a estudiar la ondícula del B-spline lineal denotada por  $\psi_2(x)$ . Haciendo  $m = 2$  en la relación biescalar para ondícula B-spline de las ecuaciones (3.13) y (3.14) tenemos

$$\psi_2(x) = \sum_{k=0}^4 q_k N_2(2x-k) \quad (3.25)$$

donde

$$\begin{aligned} q_k &= (-1)^k 2^{-1} \sum_{l=0}^2 \binom{2}{l} N_4(k+1-l) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \{N_4(k+1) + 2N_4(k) + N_4(k-1)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Los términos de  $N_4(k)$  en (3.26) representan el B-spline cúbico, el cual no hemos explorado aún, pero la relación de recurrencia (3.12) indicada anteriormente con los casos bases pauta que:

$$N_2(k) = \delta_{k,1} \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \quad (3.27)$$

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1) \quad (3.28)$$

al desarrollar la expresión anterior se obtiene la siguiente tabla:

$N_m(k)$		$k$					
		0	1	2	3	4	5
$m$	2	0	1	0	...		
	3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	...	
	4	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	...
	5	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
	6	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{66}{120}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{1}{120}$

Tabla 3.1. Valores de  $N_m(k)$  diferentes de cero para  $m = 2$  a  $m = 6$ .

En la tabla 3.1 están resumidos los valores distintos de cero de  $N_m(k)$  para algunos  $m$  pequeños. Con los valores de la tabla y los de la secuencia  $\{q_k\}$  calculamos  $\psi_2(x)$  como sigue:

$$q_0 = \left(\frac{1}{2}\right) \{N_4(0) + 2N_4(1) + N_4(-1)\} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

$$q_1 = \left(-\frac{1}{2}\right) \{N_4(2) + 2N_4(1) + N_4(0)\} = \left(-\frac{1}{2}\right) (1) = -\frac{1}{2}$$

$$q_2 = \left(\frac{1}{2}\right) \{N_4(3) + 2N_4(2) + N_4(1)\} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}$$

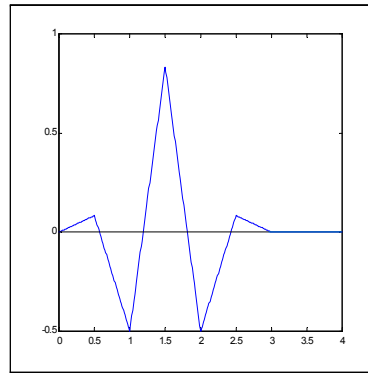
$$q_3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \{N_4(4) + 2N_4(3) + N_4(2)\} = \left(-\frac{1}{2}\right) (1) = -\frac{1}{2}$$

$$q_4 = \left(\frac{1}{2}\right) \{N_4(5) + 2N_4(4) + N_4(3)\} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}$$

Así que la relación biescalar para la ondícula lineal B-spline es:

$$\psi_2(x) = \frac{1}{12}N_2(2x) - \frac{1}{2}N_2(2x-1) + \frac{5}{6}N_2(2x-2) - \frac{1}{2}N_2(2x-3) + \frac{1}{12}N_2(2x-4) \quad (3.29)$$

donde  $N_2(2x-k)$  está dado por (3.22). La ondícula B-spline lineal es ilustrada en la figura 3.5 y su expresión explícita es:

Figura 3.5. B-spline lineal  $\psi_2(x)$ .

$$\psi_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}(-7x + 4) & \text{para } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}(16x - 19) & \text{para } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6}(-16x + 29) & \text{para } \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ \frac{1}{6}(7x + 17) & \text{para } 2 \leq x < \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6}(-x + 3) & \text{para } \frac{5}{2} \leq x < 3 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.40)$$

En la figura 3.5 se ilustra la ondícula que se genera del B-spline lineal para  $m = 2$ , se observa que su soporte compacto es de 3, que es diferente del obtenido para la relación biescalar que es de 2, como se ilustra en la figura 3.4. Además se puede apreciar el valor de los coeficientes  $\{q_k\}$  para la ondícula, dados en la ecuación (3.29) y que son  $\{\frac{1}{12}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\}$  respectivamente.

# Capítulo 4

## Desarrollo Buckley Leverett en Bases de Ondículas

### 4.1 Caso relación de permeabilidad relativa-saturación lineal

La ecuación diferencial uni-dimensional de Buckley Levetett para flujo bifásico en medios porosos homogéneos está dada por

$$R(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

donde  $S$  es la saturación de la fase de referencia, normalmente la fase mojante,  $x$  es la distancia a lo largo de la dirección del flujo,  $u = q/(\phi A)$  la velocidad del flujo,  $\phi$  es la porosidad,  $A$  es el área aparente de la sección transversal del flujo, y  $q$  es la tasa volumétrica de inyección/producción.

$$f(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < S \leq S_{wr} \\ \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} & \text{si } S_{wr} < S \leq 1 - S_{or} \\ 1 & \text{si } 1 - S_{or} < S \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

La función  $f$  es la función de flujo fraccional de la fase de referencia definida como el cociente del flujo de la fase de referencia al total de las dos fases. Los términos  $\lambda_w$  y  $\lambda_o$  denotan la movilidad del agua y petróleo respectivamente, y  $S_{wr}$  y  $S_{or}$  son respectivamente la saturación irreducible del agua y la de petróleo residual [3, 13, 25]. La movilidad de un fluido se calcula a partir del cociente entre la permeabilidad relativa de dicho fluido y su viscosidad.

Como punto de partida para resolver el problema de Buckley-Leverett usamos

$$\lambda_w = S - S_{wr}, \text{ y } \lambda_o = 1 - S - S_{or} \quad (4.3)$$

con la siguientes condiciones de frontera e iniciales

$$S(0, t) = 1 - S_{or}, \text{ y } S(x, 0) = S_{wr} \quad (4.4)$$

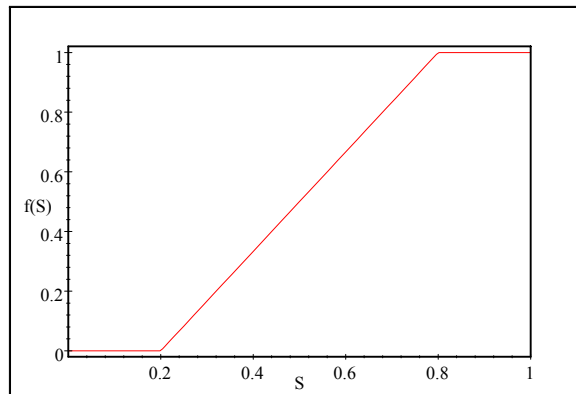


Figura 4.1. Función de flujo fraccional  $f(S)$  ( caso lineal).

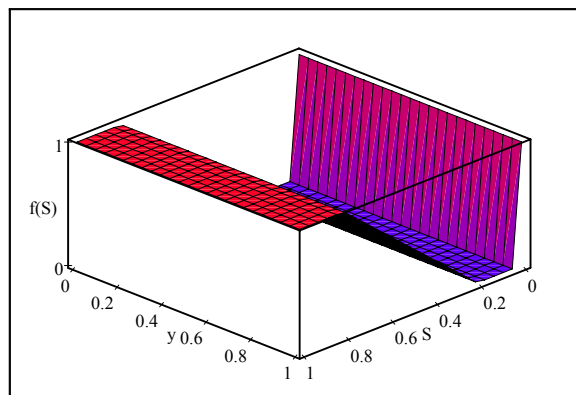


Figura 4.2. Vista 3D de la función de flujo fraccional  $f(S)$ .

En las figuras 4.1 y 4.2 se ilustran en 2D y 3D respectivamente la relación de permeabilidad relativa-saturación para el caso lineal, donde se aprecia que la función de flujo fraccional y la permeabilidad relativa son idénticas (*solo para este caso*).



Empleando el método de peso residual (*MPR*) para resolver este problema, en el que la solución de la ecuación diferencial,  $S(x, t)$ , es aproximada por una serie de funciones finitas,  $\phi_{n,k}(x)$ , como sigue:

$$S(x, t) \approx \sum_{k=1}^m a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x) \quad (4.5)$$

donde  $\phi_{n,k}(x)$  es llamada función base o ensayo,  $a_{n,k}(t)$  son coeficientes que serán determinados para satisfacer la ecuación diferencial (4.1), y  $m$  es el número de funciones base. En general, la solución aproximada no puede satisfacer la ecuación original exacta, y la sustitución de la solución aproximada en la *PDE* original, resulta en un residuo. Así, los coeficientes  $a_{n,k}(t)$  en la ecuación anterior debe minimizar el residuo.

El método de peso residual minimiza  $r(x)$  por forzamiento de esta a cero en el dominio  $\Omega$ , usando funciones peso,  $\omega_j(x)$ , tal que, para cada función peso debe cumplirse

$$\int_{\Omega} r(x) \omega_j(x) dx = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, v \quad (4.6)$$

donde  $v$  es el número de funciones peso que serán determinadas por el tipo de condiciones de frontera y el número de funciones base,  $m$ .

En este trabajo usamos las funciones de escalamiento generadas de las funciones ondículas como las bases *Galerkin*, ya que sus propiedades de ortogonalidad y semiortogonalidad, soporte compacto, multiniveles estructurados, comportamiento como base incondicional, pueden proveer soluciones aproximadas a la ecuación diferencial bajo estudio [13, 14].

### Método de Galerkin-Ondículas

En el método de *Galerkin-Ondículas*, las funciones pesos son elegidas de la función base, i.e.  $w_j(x) = \phi_{n,j}(x)$ . Así tenemos:

$$\int_{\Omega} R(x,t) \phi_{n,j}(x) dx = 0 \text{ para } j = 1, \dots, v \quad (4.7)$$

las condiciones de frontera pueden imponer algunas restricciones sobre la solución y conducir a resultados particulares en ecuaciones adicionales para los coeficientes desconocidos  $\{a_{n,k}\}$  [13, 21].

Al sustituir la ecuación (4.5) en (4.1) se obtiene

$$R(x,t) = \sum_k \frac{d(a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x))}{dt} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

Sustituyendo (4.8) en (4.7) se obtiene

$$\int_0^1 \left( \sum_k \frac{d(a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x))}{dt} + u \frac{\partial f(S)}{\partial x} \right) \phi_{m,j}(x) dx = 0 \quad (4.9)$$

desarrollando

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_k \frac{d(a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x))}{dt} \phi_{m,j}(x) dx + \int_0^1 u \frac{\partial f(S)}{\partial x} \phi_{m,j}(x) dx = \\ & = \sum_{k=1}^m \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \int_0^1 \phi_{n,k}(x) \phi_{m,j}(x) dx + \int_0^1 u \frac{\partial f(S)}{\partial x} \phi_{m,j}(x) dx \\ & \Rightarrow \sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \int_0^1 \phi_{n,k}(x) \phi_{m,j}(x) dx = - \int_0^1 u \frac{\partial f(S)}{\partial x} \phi_{m,j}(x) dx \end{aligned}$$

Resolviendo la integral de la derecha por partes se tiene:

$$\sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \int_0^1 \phi_{n,k}(x) \phi_{m,j}(x) dx = -u \phi_{m,j}(x) f(S) \Big|_0^1 + u \int_0^1 \phi'_{m,j}(x) f(S) dx \quad (4.10)$$

y usando las condiciones de bi-ortogonalidad en la base de ondículas se llega

$$\sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \delta_{n,m} \delta_{k,j} = -u \phi_{m,j}(x) f(S) \Big|_0^1 + u \int_0^1 \phi'_{m,j}(x) f(S) dx \quad (4.11)$$

Generalizando la ecuación para el flujo fraccional de la forma

$$f(S) = \frac{S - S_{wr}}{1 - S_{wr} - S_{or}} \quad (4.12)$$

y sustituyendo la ecuación (4.12) en (4.11)

$$\sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \delta_{m,n} \delta_{k,j} = -u \phi_{m,j}(x) \left( \frac{S - S_{wr}}{C} \right) \Big|_0^1 + u \int_0^1 \phi'_{m,j}(x) \left( \frac{S - S_{wr}}{C} \right) dx$$

$\therefore C = 1 - S_{wr} - S_{or}$  al evaluar se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \delta_{m,n} \delta_{k,j} = & + \frac{u}{C} \left\{ \int_0^1 S(x,t) \phi'_{m,j}(x) dx - S_{wr} \int_0^1 \phi'_{m,j}(x) dx + \right. \\ & \left. + (S(0,t) - S_{wr}) \phi_{m,j}(0) - (S(1,t) - S_{wr}) \phi_{m,j}(1) \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

sustituyendo (4.5) en (4.13)

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \delta_{m,n} \delta_{k,j} = & + \frac{u}{C} \left\{ \sum_{k=1}^m a_{n,k}(t) \int_0^1 \phi_{n,k}(x) \phi'_{m,j}(x) dx - S_{wr} \int_0^1 \phi'_{m,j}(x) dx + \right. \\ & \left. + (S(0,t) - S_{wr}) \phi_{m,j}(0) - (S(1,t) - S_{wr}) \phi_{m,j}(1) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Al desarrollar la integral  $\int_0^1 \phi'_{m,j}(x) dx = \int_0^1 \frac{d\phi_{m,j}(x)}{dx} dx = \phi_{m,j}(x) \Big|_0^1$  y sustituyendo (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{da_{n,k}(t)}{dt} \delta_{m,n} \delta_{k,j} = & + \frac{u}{C} \left\{ \sum_{k=1}^m a_{n,k}(t) \int_0^1 \phi_{n,k}(x) \phi'_{m,j}(x) dx - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(1) \phi_{m,j}(1) + (1 - S_{or}) \phi_{m,j}(0) \right\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por las propiedades de la función  $\delta$  de Kronecker se tiene

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad \text{y } \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Entonces bajo los criterios de la  $\delta$ , supongamos que se considera el caso  $m = n$  tal que (4.15) se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k} \dot{(t)} \delta_{k,j}^n = & + \frac{u}{C} \left\{ \sum_{k=1}^m a_{n,k} (t) \int_0^1 \phi_{n,k} (x) \phi'_{n,j} (x) dx - \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^m a_{n,k} (t) \phi_{n,k} (1) \phi_{n,j} (1) + (1 - S_{or}) \phi_{n,j} (0) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $a_{n,k} \dot{(t)}$  es la derivada de  $a_{n,k} (t)$  con respecto a  $t$ .

Rescribiendo (4.16) se obtiene

$$\Lambda_{j,k}^n = \frac{u}{C} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j} (x) \phi_{n,k} (x) dx \right] \quad (4.17)$$

$$\lambda_{j,k}^n = \frac{u}{C} [-\phi_{n,k} (1) \phi_{n,j} (1)] \text{ y } \lambda_j^n = \frac{u}{C} [(1 - S_{or}) \phi_{n,j} (0)] \quad (4.18)$$

al sustituir (4.17) y (4.18) en (4.16) se obtiene:

$$\sum_k a_{n,k} \dot{(t)} \Gamma_{k,j}^n = \sum_{k=1}^m [\Lambda_{j,k}^n + \lambda_{j,k}^n] a_{n,k} (t) + \lambda_j^n \quad (4.19)$$

donde  $\Gamma_{k,j}^n$ ,  $\Lambda_{j,k}^n$  y  $\lambda_{j,k}^n$  son arreglos matriciales que se construyen gracias a las propiedades de biortogonalidad de las ondículas b-spline. Despejando  $a_{n,k} \dot{(t)}$  de la ecuación (4.19) se obtiene

$$a_{n,k} \dot{(t)} = (\Gamma_{k,j}^n)^{-1} \{ [\Lambda_{j,k}^n + \lambda_{j,k}^n] a_{n,k} (t) + \lambda_j^n \} \quad (4.20)$$

Tomando en (4.20)  $\Upsilon_{k,j}^n$  como  $(\Gamma_{k,j}^n)^{-1} \Lambda_{j,k}^n$ ,  $\gamma_{k,j}^n$  como  $(\Gamma_{k,j}^n)^{-1} \lambda_{j,k}^n$  y  $\gamma_j^n = (\Gamma_{k,j}^n)^{-1} \lambda_j^n$

se obtiene

$$a_{n,k} \dot{(t)} = \sum_{k=1}^m [\Upsilon_{k,j}^n + \gamma_{k,j}^n] a_{n,k} (t) + \gamma_j^n \quad (4.21)$$

Supongamos que evaluamos  $m$  a 4 y expandimos la ecuación (4.21);

$$\begin{bmatrix} a_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) \\ a_{n,4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,1}^n & \Upsilon_{1,2}^n & \Upsilon_{1,3}^n & \Upsilon_{1,4}^n \\ \Upsilon_{2,1}^n & \Upsilon_{2,2}^n & \Upsilon_{2,3}^n & \Upsilon_{2,4}^n \\ \Upsilon_{3,1}^n & \Upsilon_{3,2}^n & \Upsilon_{3,3}^n & \Upsilon_{3,4}^n \\ \Upsilon_{4,1}^n & \Upsilon_{4,2}^n & \Upsilon_{4,3}^n & \Upsilon_{4,4}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{1,1}^n & \gamma_{1,2}^n & \gamma_{1,3}^n & \gamma_{1,4}^n \\ \gamma_{2,1}^n & \gamma_{2,2}^n & \gamma_{2,3}^n & \gamma_{2,4}^n \\ \gamma_{3,1}^n & \gamma_{3,2}^n & \gamma_{3,3}^n & \gamma_{3,4}^n \\ \gamma_{4,1}^n & \gamma_{4,2}^n & \gamma_{4,3}^n & \gamma_{4,4}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) \\ a_{n,4}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \\ \gamma_4^n \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

que se lleva a forma discreta usando la definición

$$a_{n,k}(t) \equiv \frac{a_{n,k}^{t+1} - a_{n,k}^t}{\Delta t} \quad \text{y} \quad a_{n,k}(t) = a_{n,k}^t \quad (4.23)$$

haciendo  $\eta_{k,j}^n$  como la suma de las matrices  $[\Upsilon_{k,j}^n + \gamma_{k,j}^n]$  y sustituyendo (4.23) en (4.22)

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{n,1}^{t+1} - a_{n,1}^t}{\Delta t} \\ \frac{a_{n,2}^{t+1} - a_{n,2}^t}{\Delta t} \\ \frac{a_{n,3}^{t+1} - a_{n,3}^t}{\Delta t} \\ \frac{a_{n,4}^{t+1} - a_{n,4}^t}{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{1,1}^n & \eta_{1,2}^n & \eta_{1,3}^n & \eta_{1,4}^n \\ \eta_{2,1}^n & \eta_{2,2}^n & \eta_{2,3}^n & \eta_{2,4}^n \\ \eta_{3,1}^n & \eta_{3,2}^n & \eta_{3,3}^n & \eta_{3,4}^n \\ \eta_{4,1}^n & \eta_{4,2}^n & \eta_{4,3}^n & \eta_{4,4}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}^t \\ a_{n,2}^t \\ a_{n,3}^t \\ a_{n,4}^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \\ \gamma_4^n \end{bmatrix}$$

despejando  $a_{n,k}^{t+1}$  y agrupando los términos comunes se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_{n,1}^{t+1} \\ a_{n,2}^{t+1} \\ a_{n,3}^{t+1} \\ a_{n,4}^{t+1} \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} \eta_{1,1}^n + \frac{1}{\Delta t} & \eta_{1,2}^n & \eta_{1,3}^n & \eta_{1,4}^n \\ \eta_{2,1}^n & \eta_{2,2}^n + \frac{1}{\Delta t} & \eta_{2,3}^n & \eta_{2,4}^n \\ \eta_{3,1}^n & \eta_{3,2}^n & \eta_{3,3}^n + \frac{1}{\Delta t} & \eta_{3,4}^n \\ \eta_{4,1}^n & \eta_{4,2}^n & \eta_{4,3}^n & \eta_{4,4}^n + \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}^t \\ a_{n,2}^t \\ a_{n,3}^t \\ a_{n,4}^t \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \\ \gamma_4^n \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Resultando (4.24) en un sistema de ecuaciones con evolución en el tiempo que puede ser resuelto numéricamente por métodos tales como *Rugge Kutta*, *Euler*, *Diferencias Finitas* entre otros, para obtener los valores de los coeficientes  $a_{n,k}(t)$ , necesarios en la solución aproximada de la función de saturación mediante la ecuación (4.5), ya que para ésta se ha fijado la base  $\phi_{n,k}(x)$  desde el inicio del desarrollo del problema. Por lo tanto con  $a_{n,k}(t)$

y  $\phi_{n,k}(x)$  conocidos para  $m = 4$  la saturación puede ser representada como:

$$S(x, t) \approx a_{n,1}(t) \phi_{n,1}(x) + a_{n,2}(t) \phi_{n,2}(x) + a_{n,3}(t) \phi_{n,3}(x) + a_{n,4}(t) \phi_{n,4}(x) \quad (4.25)$$

la cual nos da información de como evoluciona la saturación para un instante de tiempo ( $t$ ) dada una posición ( $x$ ) determinada, teniéndose en consideración los factores de translación  $k$  y escalamiento  $n$ . La evaluación de ésta expresión para un tiempo determinado genera el perfil de saturación del sistema.

## 4.2 Caso relación de permeabilidad relativa-saturación cuadrática

Tomando como punto de partida las ecuaciones (4.1) a (4.4) de las cuales, la única que presenta un cambio relevante es la ecuación (4.2), que ahora se expresa como

$$f(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < S \leq S_{wr} \\ \frac{(S-S_{wr})^2}{C^2} & \text{si } S_{wr} < S \leq 1 - S_{or} \\ 1 & \text{si } 1 - S_{or} < S \leq 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

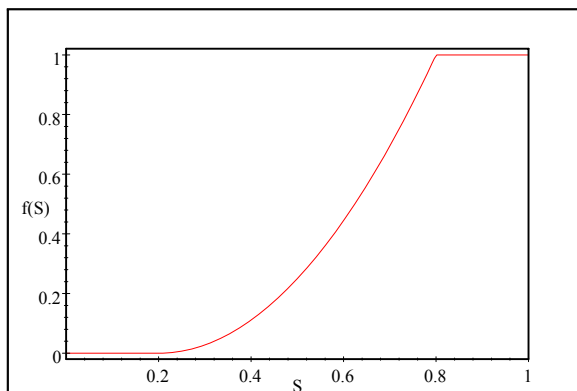


Figura 4.3. Función de flujo fraccional  $f(S)$  ( caso cuadrático).

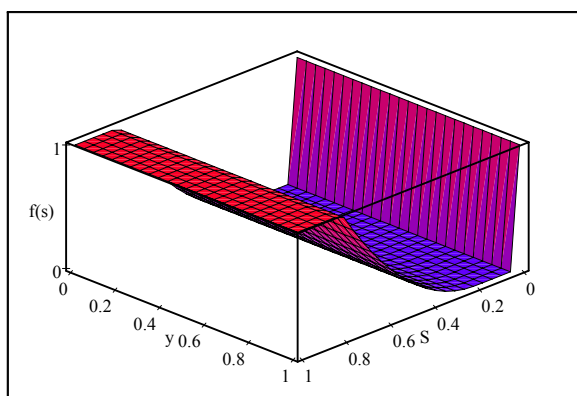


Figura 4.4. Vista 3D de la función de flujo fraccional  $f(S)$  ( caso cuadrático).

En las figuras 4.3 y 4.4 se ilustra en 2D y 3D respectivamente la relación de permeabilidad relativa-saturación cuadrática, donde se aprecia que la función del flujo fraccional y la permeabilidad relativa para un caso ideal.

Se desarrolla el problema de manera análoga al caso anterior tomándose en cuenta las condiciones, criterios y relaciones anteriores a manera de simplificar los cálculos.

Generalizando la ecuación(4.26) para el flujo fraccional a la forma

$$f(S) = \frac{(S - S_{wr})^2}{C^2} = \frac{S^2 - 2SS_{wr} + S_{wr}^2}{C^2} \text{ si } S_{wr} < S \leq 1 - S_{or} \quad (4.27)$$

Sustituyendo la ecuación (4.27) en la ecuación (4.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k}(t) \delta_{k,j} &= u \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \left( \frac{S^2 - 2SS_{wr} + S_{wr}^2}{C^2} \right) dx - \\ &\quad - u \phi_{n,j}(x) \left( \frac{S^2 - 2SS_{wr} + S_{wr}^2}{C^2} \right) \Big|_0^1 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Desarrollando y simplificando (4.28)

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k}(t) \delta_{k,j} &= \frac{u}{C^2} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) S(x,t)^2 dx - 2S_{wr} \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) S(x,t) dx + \right. \\ &\quad \left. + S_{wr}^2 \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) dx - \phi_{n,j}(x) S(x,t)^2 \Big|_0^1 + 2S_{wr} S(x,t) \phi_{n,j}(x) \Big|_0^1 - S_{wr}^2 \phi_{n,j}(x) \Big|_0^1 \right] \end{aligned}$$

al desarrollar la integral  $\int_0^1 \phi'_{n,j}(x)$  y factorizar se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k}(t) \delta_{k,j} &= \frac{u}{C^2} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) S(x,t)^2 dx - 2S_{wr} \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) S(x,t) dx - \right. \\ &\quad \left. - \phi_{n,j}(x) S(x,t)^2 \Big|_0^1 + 2S_{wr} S(x,t) \phi_{n,j}(x) \Big|_0^1 \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Tomando en consideración la solución aproximada para la saturación dada por la ecuación (4.5) y la condición inicial dada por  $S(0,t) = 1 - S_{or}$  se tiene

$$S = \sum_{k=1}^v a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_k \sum_{k'} a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x) a_{n,k'}(t) \phi_{n,k'}(x) = \\ &= \sum_k \sum_{k'} a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) \phi_{n,k}(x) \phi_{n,k'}(x) \end{aligned} \quad (4.31)$$

luego

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k}(t) \delta_{k,j} &= \frac{u}{C^2} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \sum_{kk'} a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) \phi_{n,k}(x) \phi_{n,k'}(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \phi_{n,j}(1) S(1,t)^2 - 2S_{wr} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \sum_k a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x) dx - \phi_{n,j}(1) S(1,t) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \phi_{n,j}(0) S(0,t)^2 - 2S_{wr} \phi_{n,j}(0) S(0,t) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$



sutituyendo la condicion inicial se tiene

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k} \dot{\delta}_{k,j} &= \frac{u}{C^2} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \sum_{kk'} a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) \phi_{n,k}(x) \phi_{n,k'}(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \phi_{n,j}(1) \sum_{kk'} a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) \phi_{n,k}(1) \phi_{n,k'}(1) - \right. \\ &\quad \left. - 2S_{wr} \left[ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \sum_k a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(x) dx - \phi_{n,j}(1) \sum_k a_{n,k}(t) \phi_{n,k}(1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \phi_{n,j}(0) \{(1 - S_{or})^2 - 2S_{wr}(1 - S_{or})\} \right] \end{aligned}$$

reordenando

$$\begin{aligned} \sum_k a_{n,k} \dot{\delta}_{k,j} &= \frac{u}{C^2} \left[ \sum_{kk'} a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) \left\{ \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \phi_{n,k}(x) \phi_{n,k'}(x) dx - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \phi_{n,j}(1) \phi_{n,k}(1) \phi_{n,k'}(1) \right\} + \sum_k 2S_{wr} a_{n,k}(t) \left\{ - \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \phi_{n,k}(x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi_{n,j}(1) \phi_{n,k}(1) \right\} + \phi_{n,j}(0) \{(1 - S_{or})^2 - 2S_{wr}(1 - S_{or})\} \right]. \quad (4.33) \end{aligned}$$

Rescribiendo (4.33) se obtiene

$$\Theta_{j,k}^n = \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \phi_{n,k}(x) \phi_{n,k'}(x) dx - \phi_{n,j}(1) \phi_{n,k}(1) \phi_{n,k'}(1) \quad (4.34)$$

$$\Lambda_{j,k}^n = - \int_0^1 \phi'_{n,j}(x) \phi_{n,k}(x) dx + \phi_{n,j}(1) \phi_{n,k}(1) \quad (4.35)$$

$$\lambda_j^n = \phi_{n,j}(0) \{(1 - S_{or})^2 - 2S_{wr}(1 - S_{or})\} \quad (4.36)$$

al sustituir de (4.34) a (4.36) en la ecuación (4.33) y despejando  $a_{n,k}(t)$  teniendo en cuenta la propiedades de biortogonalidad de los B-spline-ondículas, se obtiene

$$a_{n,k}(t) = \frac{u}{C^2} (\delta_{k,j})^{-1} \left[ \sum_{kk'} \Theta_{j,k,k'}^n(x) a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) + 2S_{wr} \sum_k \Lambda_{j,k}^n(x) a_{n,k}(t) + \lambda_j^n \right]$$

donde  $\Xi_{j,k,k'}^n(x) = (\delta_{k,j})^{-1} \Theta_{j,k,k'}^n(x)$ ,  $\Upsilon_{j,k}^n = (\delta_{k,j})^{-1} \Lambda_{j,k}^n(x)$  y  $\gamma_j^n = (\delta_{k,j})^{-1} \lambda_j^n$ , por lo tanto el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver queda expresado como

$$a_{n,k} \dot{(t)} = \frac{u}{C^2} \left[ \sum_{kk'} \Xi_{j,k,k'}^n(x) a_{n,k}(t) a_{n,k'}(t) + 2S_{wr} \sum_k \Upsilon_{j,k}^n(x) a_{n,k}(t) + \gamma_j^n \right] \quad (4.39)$$

Ha de hacerse notar que el sistema obtenido con la implementación del flujo fraccional cuadrático difiere del obtenido para el flujo fraccional lineal. Esta diferencia, es que para este caso de flujo fraccional aparece una segunda matriz que llamamos  $\Xi_{j,k,k'}^n$  y que además de ser tridimensional tiene asociado el producto de los coeficientes  $a_{n,k}a_{n,k'}$ . Esta nueva matriz tiende a complicar el calculo debido a que estamos trabajando con un sistema que esta conformado por la suma de una matriz tridimensional más una bidimensional mas un vector como se aprecia de la ecuación (4.39). Así que para igualar la dimensionalidad de sistema se decidió fijar un plano de trabajo aqui llamado  $k'$  sobre la matriz  $\Xi_{j,k,k'}^n$ . Ahora bajo este criterio, supongamos que  $k' = 1$ , y que  $k$  toma valores de 0 a 4 , entonces la ecuación (4.39) en forma matricial sería de la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{n,1} \dot{(t)} \\ a_{n,2} \dot{(t)} \\ a_{n,3} \dot{(t)} \\ a_{n,4} \dot{(t)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Xi_{1,1,1}^n(x) & \Xi_{1,2,1}^n(x) & \Xi_{1,3,1}^n(x) & \Xi_{1,4,1}^n(x) \\ \Xi_{2,1,1}^n(x) & \Xi_{2,2,1}^n(x) & \Xi_{2,3,1}^n(x) & \Xi_{2,4,1}^n(x) \\ \Xi_{3,1,1}^n(x) & \Xi_{3,2,1}^n(x) & \Xi_{3,3,1}^n(x) & \Xi_{3,4,1}^n(x) \\ \Xi_{4,1,1}^n(x) & \Xi_{4,2,1}^n(x) & \Xi_{4,3,1}^n(x) & \Xi_{4,4,1}^n(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}(t) a_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) a_{n,1}(t) \\ a_{n,3}(t) a_{n,1}(t) \\ a_{n,4}(t) a_{n,1}(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,1}^n & \Upsilon_{1,2}^n & \Upsilon_{1,3}^n & \Upsilon_{1,4}^n \\ \Upsilon_{2,1}^n & \Upsilon_{2,2}^n & \Upsilon_{2,3}^n & \Upsilon_{2,4}^n \\ \Upsilon_{3,1}^n & \Upsilon_{3,2}^n & \Upsilon_{3,3}^n & \Upsilon_{3,4}^n \\ \Upsilon_{4,1}^n & \Upsilon_{4,2}^n & \Upsilon_{4,3}^n & \Upsilon_{4,4}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}(t) \\ a_{n,2}(t) \\ a_{n,3}(t) \\ a_{n,4}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \\ \gamma_4^n \end{bmatrix} \quad (4.40) \end{aligned}$$

que se lleva a forma discreta usando la definición (4.23) en (4.40). Agrupando términos y despejando  $a_{n,1}^{t+1}$  se llega a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{n,1}^{t+1} \\ a_{n,2}^{t+1} \\ a_{n,3}^{t+1} \\ a_{n,4}^{t+1} \end{bmatrix} &= \Delta t \begin{bmatrix} \Xi_{1,1,1}^n(x) & \Xi_{1,2,1}^n(x) & \Xi_{1,3,1}^n(x) & \Xi_{1,4,1}^n(x) \\ \Xi_{2,1,1}^n(x) & \Xi_{2,2,1}^n(x) & \Xi_{2,3,1}^n(x) & \Xi_{2,4,1}^n(x) \\ \Xi_{3,1,1}^n(x) & \Xi_{3,2,1}^n(x) & \Xi_{3,3,1}^n(x) & \Xi_{3,4,1}^n(x) \\ \Xi_{4,1,1}^n(x) & \Xi_{4,2,1}^n(x) & \Xi_{4,3,1}^n(x) & \Xi_{4,4,1}^n(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}^t a_{n,1}^t \\ a_{n,2}^t a_{n,1}^t \\ a_{n,3}^t a_{n,1}^t \\ a_{n,4}^t a_{n,1}^t \end{bmatrix} + \\
+ \Delta t \begin{bmatrix} \Upsilon_{1,1}^n + \frac{1}{\Delta t} & \Upsilon_{1,2}^n & \Upsilon_{1,3}^n & \Upsilon_{1,4}^n \\ \Upsilon_{2,1}^n & \Upsilon_{2,2}^n + \frac{1}{\Delta t} & \Upsilon_{2,3}^n & \Upsilon_{2,4}^n \\ \Upsilon_{3,1}^n & \Upsilon_{3,2}^n & \Upsilon_{3,3}^n + \frac{1}{\Delta t} & \Upsilon_{3,4}^n \\ \Upsilon_{4,1}^n & \Upsilon_{4,2}^n & \Upsilon_{4,3}^n & \Upsilon_{4,4}^n + \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n,1}^t \\ a_{n,2}^t \\ a_{n,3}^t \\ a_{n,4}^t \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \gamma_1^n \\ \gamma_2^n \\ \gamma_3^n \\ \gamma_4^n \end{bmatrix} \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Una vez resuelto el sistema numéricamente por algunos de los métodos mencionados en la sección anterior para determinar los coeficientes  $a_{n,k}(t)$ , estos son sustituidos en la ecuación (4.5), la cual da una aproximación de la función de saturación similar a la obtenida en la ecuación (4.25).

# Capítulo 5

## Comparación de Métodos de Escalamiento

En el caso particular del modelaje del flujo y transporte en medios porosos se requiere de una descripción detallada de la distribución espacial de las propiedades de almacenamiento y transporte para capturar la presencia de canales preferenciales de flujo y otras heterogeneidades que pueden presentarse a diversas escalas tales como fracturas y fallas, para así poder realizar una predicción realista de la producción de fluidos del yacimiento.

Para el modelaje del comportamiento del flujo de fluidos en medios porosos se requiere en general trabajar a una escala más gruesa que la usada para la descripción de los detalles del modelo geoestadístico, ya que en el proceso es necesario resolver ecuaciones de flujo que son bastante complejas con un alto costo computacional. Como se dijo en la introducción, este proceso de relacionar las escalas desde el nivel de detalle fino a uno más grueso se denomina escalamiento, y envuelve el cálculo de promedios espaciales sobre bloques del modelo geoestadístico que pueden ser usados directamente en el modelo de flujo.

La esencia del procedimiento de escalamiento consiste en aplicar reglas de composición a grupos de celdas a una escala local para producir celdas compuestas y luego aplicar sucesivamente las mismas reglas a las celdas compuestas hasta alcanzar el detalle de la escala deseada. La suposición básica es que las reglas de escalamiento son invariantes y no cambian la física del proceso modelado.

Existen tres tipos generales de promedios espaciales que son comúnmente usados en la industria petrolera, estos son: promedio aritmético, geométrico y armónico.

El promedio aritmético es el mas sencillo de los tres y corresponde a un promedio algebraico de los valores de las permeabilidades locales a una escala dada, esto es:

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \quad (5.1)$$

donde  $n$  es el número de celdas a escala fina que se agrupan para generar la celda compuesta.

El promedio geométrico se obtiene a partir de la  $1/n$  raíz del producto de las permeabilidades locales

$$\bar{k} = (k_1 k_2 \dots k_n)^{1/n} \quad (5.2)$$

y el promedio armónico a partir del promedio de los inversos de las permeabilidades locales, esto es

$$(\bar{k})^{-1} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \right) \quad (5.3)$$

En general el nivel requerido de discretización es difícil de predecir ya que depende del grado de heterogeneidad, de las correlaciones existentes en el medio poroso y el esquema numérico a utilizar para resolver las ecuaciones de flujo.

*Renard y De Marsily* hicieron una revisión del área de escalamiento en 1997. Estos autores encontraron que los promedios aritméticos y armónicos dan cotas superiores e inferiores respectivamente a la permeabilidad escalada, y que corresponden a los valores exactos en el caso de un medio estratificado con flujo paralelo o perpendicular a los estratos. La media geométrica es el valor escalado exacto en el caso de un medio bidi-

mensional, siempre que la permeabilidad local normalizada y su inversa (la conductancia) tengan la misma función distribución bajo condiciones de flujo uniforme, como ocurre en un medio isotrópico lognormal[23].

Otros autores han utilizado combinaciones de estos promedios para determinar los valores de las permeabilidades escaladas de las celdas compuestas, así por ejemplo, *Duquerroix* y colaboradores 1993, y *Romeu* 1994 usaron, para el caso de flujo uniforme, la media armónica de las medias aritméticas de las permeabilidades locales calculadas sobre celdas perpendiculares a una dirección dada, y la media aritmética de los promedios armónicos de las permeabilidades locales para las celdas paralelas a dicha dirección[12, 24]. Además en la actualidad existe un método alternativo conocido como análisis de multirresolución (MRA) con base en la teoría de ondícula introducido por *Mallat* en 1989, como se indica en el capítulo de ondículas, que pudiera ser utilizado para este tipo de aplicaciones [18, 19].

## **5.1 Análisis de Ondículas para Flujo Bifásico.**

Las propiedades de escalamiento para flujo bifásico son mucho más complicadas que para el caso de flujo monofásico. Esta diferencia es debida a que en el caso de flujo multifásico los efectos relevantes están relacionados al efecto de la permeabilidad absoluta en el comportamiento del flujo. Las diferencias de presión presentes dentro de las facies geológicas y el contraste de las propiedades roca-fluido también juega un papel vital para las litologías múltiples y complejas ya que afectan el movimiento relativo de estas en el medio poroso. Por lo tanto, además de la permeabilidad absoluta, como en el caso de

flujo monofásico, es necesario determinar dos propiedades equivalentes necesarias ya presentadas en los capítulos anteriores: la permeabilidad relativa y la presión capilar para el modelo a considerar en la escala gruesa. Se ve entonces como las propiedades son sensibles al régimen de flujo, haciendo el problema mucho más complicado.

Es bien conocido que bajo condiciones de flujo multifásico, el comportamiento de los fluidos está determinado por las proporciones relativas de tres fuerzas: viscosas, gravitacionales y capilares. A groso modo, las proporciones relativas de varias cantidades que conducen o determinan estas fuerzas dependen de la velocidad de flujo, heterogeneidad de la escala, tamaño de la red y propiedades de los fluidos. Considerando que la velocidad del flujo y las heterogeneidades en el reservorio son diversas en su naturaleza espacial o temporal, y que en consecuencia la permeabilidad relativa equivalente y la presión capilar tendrán dependencia espacial y temporal, el modelo a construir a una escala dada debe estar referido a las estructuras geológicas y el régimen de flujo dominante.

En esta sección comparamos el nuevo método de escalamiento basado en el análisis de multirresolución (*AMR*), con base en la teoría de ondícula, con otros métodos convencionales de escalamiento por promediación. Con el *AMR* no se requiere simulación a escala fina debido a que los efectos de escala-fina se "mueven" dentro de los efectos de escala-gruesa por multiescalas de la transformada de ondícula. El procedimiento utilizado empieza con la definición de un sistema a escala-fina, en el cual se establecen los valores de las propiedades de almacenamiento y flujo de fluidos tales como porosidad, permeabilidad absoluta y propiedades roca-fluido, así como aquellas que tienen que ver con el movimiento relativo de los fluidos, descritas a través de la permeabilidad relativa y la presión capilar.

Las propiedades de la roca y del sistema roca-fluido pueden variar en cantidades significativas para diferentes litologías. El primer paso del procedimiento consiste en escalar la permeabilidad absoluta, para luego entonces escalar las propiedades que dependen del movimiento relativo de las fases descritas a través de la permeabilidad relativa y la presión capilar, propiedades que están afectadas por efectos de histéresis y régimen de flujo dominante. El tercer paso consiste en promediar los dos grupos de permeabilidades relativas de las fases presente y la presión capilar correspondiente a cada caso. El paso final consiste en determinar todas las propiedades (roca y roca-fluido) a la nueva escala asegurándose de que estén apropiadamente normalizadas (esto principalmente para la permeabilidad relativa que se obtiene al dividir la permeabilidad efectiva por la permeabilidad absoluta). Con el propósito de mostrar el uso de la técnica de ondícula, en este trabajo solo nos concentramos en el primer paso, que consiste en escalar la permeabilidad absoluta y a comparar los resultados obtenidos con los métodos de promediación convencional.

## 5.2 Escalamiento Bidimensional de la Permeabilidad Absoluta.

A una escala-fina se puede utilizar una distribución de permeabilidad absoluta dada que modele las propiedades del sistema de interés, en este caso la roca de yacimiento. Los valores de ésta pueden ser representados en forma matricial para la aplicación del método de promediación.

$$k^0 = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \cdots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdots & \cdots & k_{1,n} \\ k_{3,1} & \cdots & k_{1,j} & \cdots & k_{1,n} \\ k_{4,1} & \cdots & \cdots & \cdots & k_{1,n} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$



donde  $k_{i,j}$  representan la permeabilidad absoluta para cada celda, y  $i, j$  son los índices de las filas y las columnas, respectivamente. El superíndice  $(o)$  en la matriz  $k$  indica que se asume la distribución de permeabilidad original como una aproximación discreta a la escala  $(o)$ .

La implementación para nuestro caso solo concierne a las propiedades equivalentes a escalas-gruesas y no se emplea información que conlleve a detalles de las señales. Por lo tanto se puede simplificar el procedimiento propuesto por Mallat para el uso de ondículas[18, 19]. En líneas generales, solo necesitamos realizar la convolución de la permeabilidad a lo largo de una dirección dada con un filtro paso bajo, seguida por la aplicación de la convolución usando el mismo filtro a la matriz que representa la permeabilidad en la otra dirección. Para elegir la función ondícula, el filtro matriz puede ser construido de los coeficientes de una función base. En nuestro caso trabajaremos con filtros del tipo B-spline. El siguiente paso consiste en construir la matriz que represente el filtro paso-bajo para cuatro coeficientes de la función base que tiene una relación escala a escala de 2. Esta matriz tiene la forma:

$$H_{L/2,L} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_3 & h_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_1 & h_2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Obsérvese que la dimensión de la columna en la matriz  $H$  es siempre dos veces más grande que la de la filas. A manera aclaratoria en el análisis de multirresolución, se denotará una matriz  $X$  de dimensiones  $L \times n$  en el nivel de escala  $m$  como  $X_{L,n}^m$ . Empleando esta notación, una descomposición de la distribución de permeabilidad en el nivel de escala  $(o)$

a lo largo de la dirección  $j$  puede ser escrita como:

$$(k_{L/2,n}^l)^j = H_{L/2,L} k_{L,n}^0 \quad (5.6)$$

nótese que el número de valores de la permeabilidad a lo largo de la dirección  $j$  es reducido por un factor de dos después de la descomposición anterior. La matriz de permeabilidad final en el nivel de escala  $l$  puede ser determinada por descomposición de la matriz de permeabilidad resultante intermedia  $(k_{L/2,n}^l)^j$  a lo largo de la dirección  $i$  de manera similar.

$$k_{L/2,n/2}^l = \left\{ H_{n/2,n} \left[ (k_{L/2,n}^l)_j \right]^T \right\}^T \quad (5.7)$$

Combinando las ecuaciones (5.6) y (5.7), se puede generar un procedimiento recursivo para calcular los valores permeabilidad absoluta equivalente en una escala gruesa arbitraria  $m$  y de información de la escala fina  $m - 1$  como sigue:

$$k_{L/2,n/2}^m = H_{L/2,L} k_{L/2,n}^{m-1} (H_{n/2,n})^T \quad (5.8)$$

Obsérvese que después de un nivel de descomposición, la dimensión del sistema y la conformidad del número de los valores de permeabilidad son reducidos por un factor de cuatro. El procedimiento anterior puede ser generalizado para la descomposición de cualquier conjunto de data en dos dimensiones ( $2D$ ), al denotar la matriz,  $k$ , como la representación de la data dada.

También debe mencionarse que existen otros métodos rápidos para el escalamiento de propiedades estáticas y dinámicas que dan propiedades aproximadas bastante buenas tales como el método de Grupo de Renormalización en espacio real aplicado en el área de petróleo por *Peter King* hace ya más de una década, que no serán incluidos en los análisis comparativos de este trabajo[16].

### 5.3 Distribución de Permeabilidad

La función de densidad de probabilidad que se usará para modelar las permeabilidades absolutas es una función potencial conocida como ley de potencias (*power – law*), la cual está definida como:

$$Z(\mu, k) = |\mu| k^{\mu-1}, \quad 0 \leq k \leq 1, \forall 0 < \mu \leq 1 \quad (5.9)$$

esta función de densidad de probabilidad tiene la particularidad de que en el límite en el que  $\mu \rightarrow 1$  se está en presencia de una distribución uniforme, es decir cualquier valor de  $k$  en el rango  $0 \leq k \leq 1$  es igualmente probable. Pero cuando  $\mu \rightarrow 0$  nos encontramos en presencia de una distribución hacia valores pequeños de  $k$ . Para ilustrar las conductas mencionadas observemos la figura 5.1 en la cual se ilustra el comportamiento de la distribución  $Z(\mu, k)$ , para varios valores de  $\mu$  y  $k$ . Se escogió este tipo de distribución para poder apreciar los efectos de heterogeneidad del medio en los resultados a través de la variación de un solo parámetro, el exponente  $\mu$ . Otras distribuciones que podrían utilizarse serían la log-normal, la de Weibull, o una Gaussiana, sin embargo estas requieren más de un parámetro para su descripción. De dicha gráfica se puede observar que a medida que  $\mu$  es más pequeña se manejan valores de permeabilidad muy pequeños con un constante de valores de  $Z$  en más de 30 ordenes de magnitud, lo cual genera problemas de estabilidad en las simulaciones computacionales y requiere mayores tiempos de cómputo que valores de  $\mu \rightarrow 1$ .

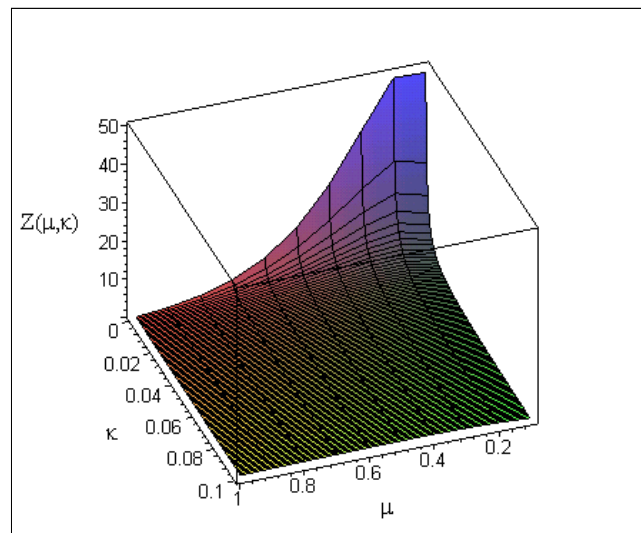


Figura 5.1. Densidad de probabilidad de permeabilidad absoluta para diferentes valores de  $\mu$  en la muestra, con  $0 \leq \kappa \leq 1$ , la distribución genera un sistema uniformemente heterogéneo cuando  $\mu > 1$  y uno altamente heterogéneo para  $\mu > 0$ .

# Capítulo 6

## Metodología y Resultados como Método de Escalamiento

En esta sección se ilustran los resultados obtenidos en el escalamiento de una función de permeabilidad por los métodos mencionados anteriormente, los cuales son: promedio aritmético, promedio geométrico, promedio armónico y escalamiento con teoría de ondículas (AMR). Para la implantación de estos métodos se procedió a generar un matriz de permeabilidad  $Z(k)$  a partir de una función de distribución ley de potencias para el valor fijo del parámetro  $\mu$  en  $0.5(\mu = 0.5)$ . Para nuestro caso esta matriz es de dimensión  $n \times n$  donde  $n = 2^{n_1}$ . Una vez establecida la matriz inicial  $k^\circ$ , la cual se generó para  $n_1 = 7$ , se procedió a emplear los diferentes métodos de escalamiento indicados anteriormente, los cuales fueron empleados de forma tal que se mantuviera la matriz cuadrada, es decir que nuestro factor de escalamiento fuera de  $n = 2^{n_1}/2$ , con la finalidad de poder realizar una mejor comparación de los resultados al implementar la teoría de ondícula. En forma esquemática esto sería:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} \ominus & \ominus & \cdot & \cdot \\ \ominus & \ominus & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc} \otimes & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} \right]$$

$$\therefore \begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array} = \ominus \quad \text{y} \quad \begin{array}{cc} \ominus & \ominus \\ \ominus & \ominus \end{array} = \otimes$$

es decir aplicamos los diferentes promedios a cada cuatro celdas barriendo toda la matriz para generar un nuevo valor promedio ( $\ominus$ ) que nos permite generar una nueva matriz, a la cual se le aplica el mismo procedimiento para reducir la escala hasta donde se quiera. En el caso de ondículas se aplicó el algoritmo Mallat (AMR) para resolver nuestros diferentes niveles de escalamiento ó resolución.

Para demostrar la aplicabilidad del nuevo método de escalamiento por teoría de ondículas para un sistema de facies múltiples bajo condiciones de flujo multifásico, a partir del sistema de distribución, construimos artificialmente dos facies para generar un modelo más acorde a nuestros requerimientos. Una vez establecidos estos parámetros se procedió al calculo de las matrices subsiguientes a la original para diferentes escalas con los diferentes métodos de escalamiento indicados anteriormente, obteniéndose el grupo de mapeo ilustrado en las figuras 6.1 a 6.4. De este conjunto de gráficas es fácil observar varias características que resaltan entre los diferentes métodos.

Una de las características más relevantes es la que concierne a la preservación de los canales introducidos inicialmente en nuestro sistema de permeabilidad artificial. Se aprecia que para el primer nivel de escalamiento realizado por los métodos de promedio armónico, aritmético y geométrico a partir de una matriz cuadrada de  $n = 64$ , de la cual se generó el mapeo  $b$  de las figuras 6.1 a 6.3, se puede apreciar como estos métodos tienden a cambiar distribución geométrica del problema, hecho que no ocurre cuando el sistema es escalado con teoría de ondículas, como se aprecia en la figura 6.4b, donde su distribución geométrica se conserva en buenas condiciones con respecto a los otros métodos.

Los valores de permeabilidad en el primer nivel de escalamiento, según se indica en la barra de colores de las figuras figura 6.1b a 6.4b, se encuentran aproximadamente en  $0.35 mD$  que corresponden a la brecha diagonal de cada una de estas gráficas, para todos los métodos de escalamiento empleados. Sin embargo, al ubicarnos en un segundo y tercer nivel de escalamiento, las predicciones obtenidas para los métodos armónicos, aritméticos y geométricos se hacen muy engorrosas (esto es, la reproducibilidad es muy pobre), caso que no ocurre para el método de ondícula. Como ejemplo podemos observar de las figuras 6.1c a 6.3c, que si para el caso de las figura 6.1c a 6.3b se demarca una tendencia en lo que la geometría original respecta, para este nivel de escalamiento, ésta desaparece en su totalidad, a tal punto de que no se puede discernir ninguna facie a ese nivel, hecho que se va acentuando cada vez más con el nivel de escalamiento como se puede apreciar en las figuras 6.1d a 6.3d. Sin embargo, esta conducta no es la misma que se obtiene para el nuevo método de escalamiento con ondículas ya que la distribución geométrica de las facies se preserva de muy buena manera para el segundo nivel de escalamiento y a la resolución mostrada en la figura 6.4c aún se puede discernir la tendencia original en el nivel 3 de la figura 6.4d, hecho no apreciado con los métodos de promediación tradicionales.

Los valores asignados con los métodos tradicionales a la función de distribución de permeabilidad en los dos últimos niveles de escalamiento son realmente poco predecibles a partir de una inferencia visual de la distribución original. Sin embargo, por ondículas se podría decir con certeza que según la barra de colores, el valor de permeabilidad en la brecha es de aproximadamente  $0.36 mD$  para los niveles 2 y 3 de escalamiento, el cual está muy próximo al valor original de  $0.39 mD$ . También vale destacar que los valores de

permeabilidad disminuyen con el nivel escalamiento para todos los métodos, hecho que se puede apreciar al comparar las barras de colores de los diferentes mapeos de cada uno de los métodos.

En cuanto los resultados obtenidos para el proceso recursivo por la teoría de ondícula, se puede observar que una vez desarrollados los diferentes niveles escalamiento es fácil devolverse a la matriz original por medio de algoritmo Mallat [18] aplicando la transformada inversa de ondícula, sin que la matriz inicial sea perturbada, como se ilustra en la figura 6.5.

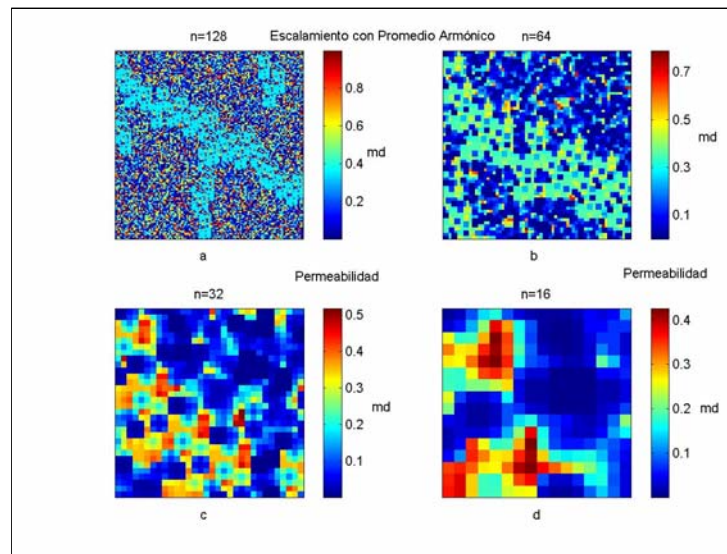


Figura 6.1. Mapeo de la distribución de permeabilidad para diferentes escalas con promedios armónicos, para dos litologías artificiales. (a) señal original, b, c y d son la primera, segunda y tercera escalada con respecto a la matriz inicial.



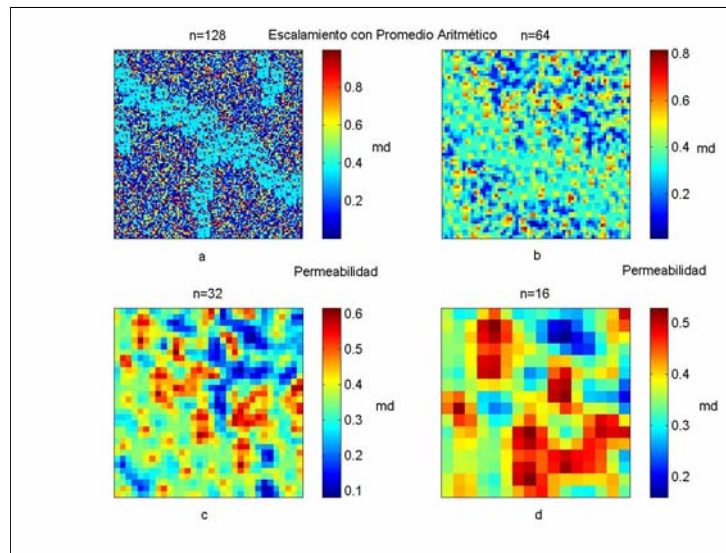


Figura 6.2. Mapeo de la distribución de permeabilidad para diferentes escalas con promedios aritméticos, para dos litologías artificiales. (a) señal original, b, c y d son la primera, segunda y tercera escalada con respecto a la matriz inicial.

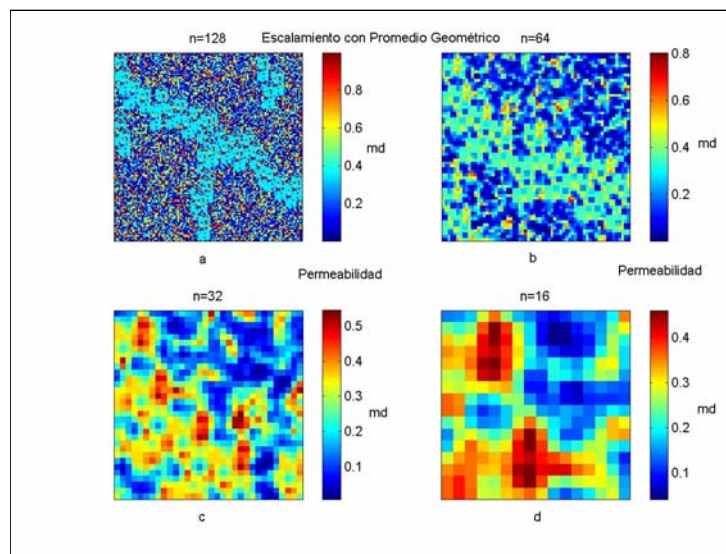


Figura 6.3. Mapeo de la distribución de permeabilidad para diferentes escalas con promedios geométricos, para dos litologías artificiales. (a) señal original, b, c y d son la primera, segunda y tercera escalada con respecto a la matriz inicial.

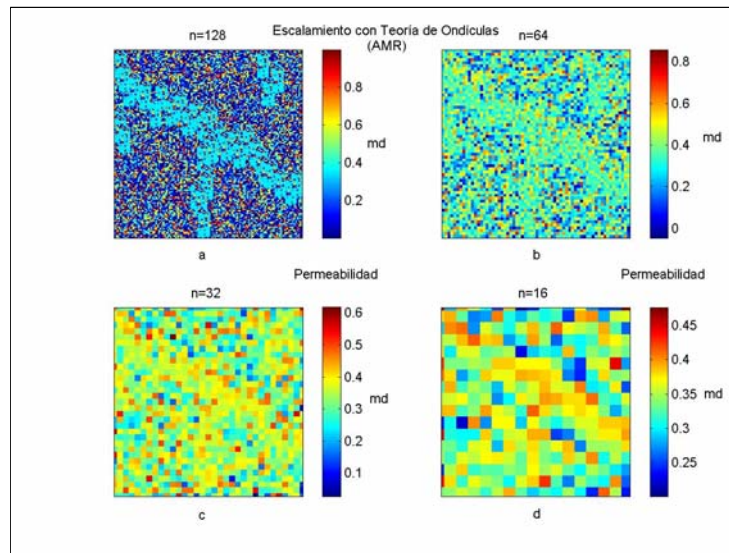


Figura 6.4. Mapeo de la distribución de permeabilidad para diferentes escalas con teoría de ondículas (AMR), para dos litologías artificiales. (a) señal original, b, c y d son la primera, segunda y tercera escalada con respecto a la matriz inicial ó b, c y d son primer, segundo y tercer nivel resolución.

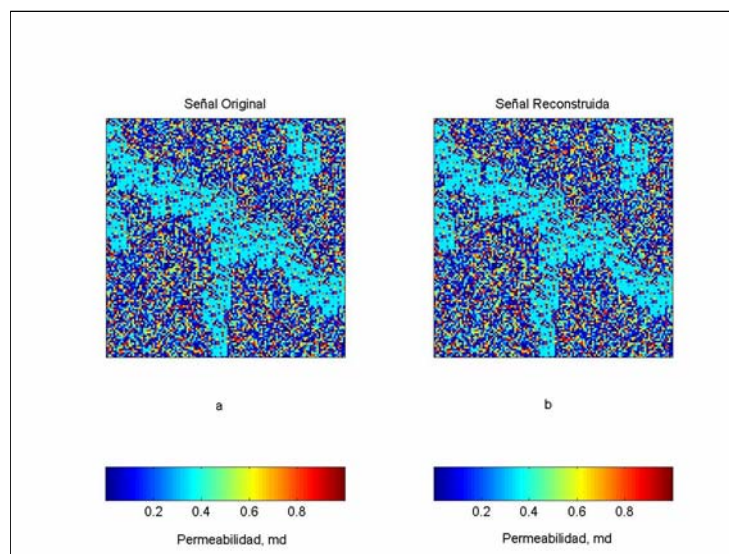


Figura 6.5. Mapeo de la distribución de permeabilidad antes y después de ser escaladas. (a) señal original y (b) señal reconstruida por algoritmo Mallat (AMR).

# Capítulo 7

## Metodología y Resultados en la Solución de la Ecuación de Flujo

Para el desarrollo numérico de la ecuación de Buckley-Leverett en los casos estudiados de flujo fraccional lineal y cuadrático, por el método Galerkin-Ondículas se debe establecer como punto de partida una ondícula base. En nuestro caso estas funciones fueron tomadas de la teoría de B-spline, para el orden  $m = 2$  correspondiente al B-spline lineal y  $m = 4$  correspondiente al B-spline cúbico. Sus expresiones analíticas están dadas por:

Función B-spline lineal

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La relación biescalar se genera cuando se introduce el cambio de variable  $x = 2^n x - k$  para obtener  $\phi(2^n x - k)$ .

Función B-spline cúbico

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & \text{para } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{6}(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4) & \text{para } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{6}(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44) & \text{para } 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{6}(4 - x)^3 & \text{para } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

De igual manera que en el caso anterior, la relación biescalar se genera cuando se introduce el cambio de variables. Para un mejor seguimiento del problema estas funciones fueron normalizadas y centradas en el origen. Debido al hecho de que las funciones fueron normalizadas en  $x$  a 1, el soporte compacto de B-spline lineal pasa de  $[0, 2]$  a  $[0, 1]$  y el del B-spline cúbico de  $[0, 4]$  a  $[0, 1]$ . El comportamiento de estos B-spline con respecto al

factor de escalamiento (dilatación), translación y forma geométrica se pueden apreciar en forma normalizada en las figuras 7.1 a 7.4. En las figuras 7.1 y 7.3 se observa como se comportan estas funciones con la variación del factor de translación  $k$ , y en las figuras 7.2 y 7.4 se aprecia el efecto que produce el factor de escalamiento  $n$ . Se puede apreciar que las funciones son comprimidas a medida que  $n$  crece, lo cual produce que el número de ondículas dentro del soporte compacto inicial sea mayor.

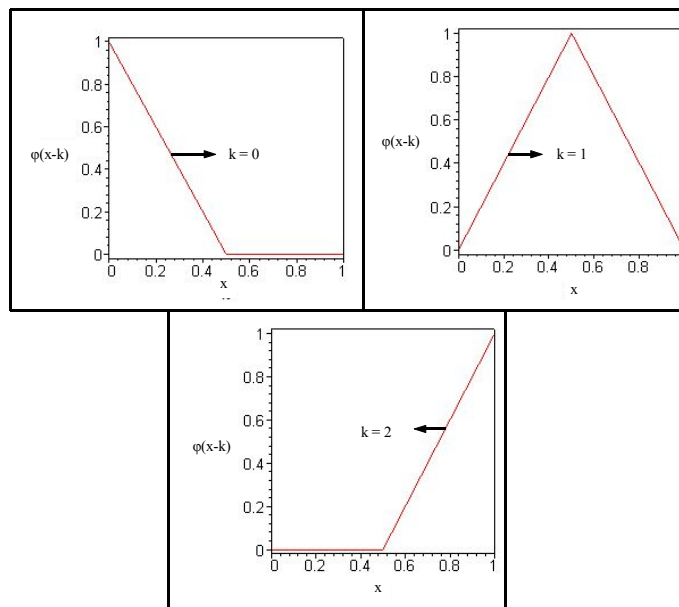


Figura 7.1. B-spline lineal. Efectos del factor de translación  $k = 0, 1$  y  $2$ , dentro de su rango de trabajo. La translación hace que la función sea truncada a medida que esta sale de su rango de trabajo.

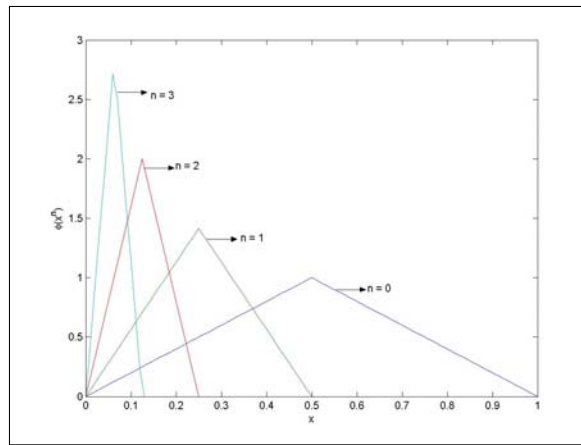


Figura 7.2. B-spline lineal. Efectos del factor de dilatación  $n = 0, 1, 2$  y  $3$  dentro de su rango de trabajo. La dilatación se hace más grande con el incremento de  $n$ .

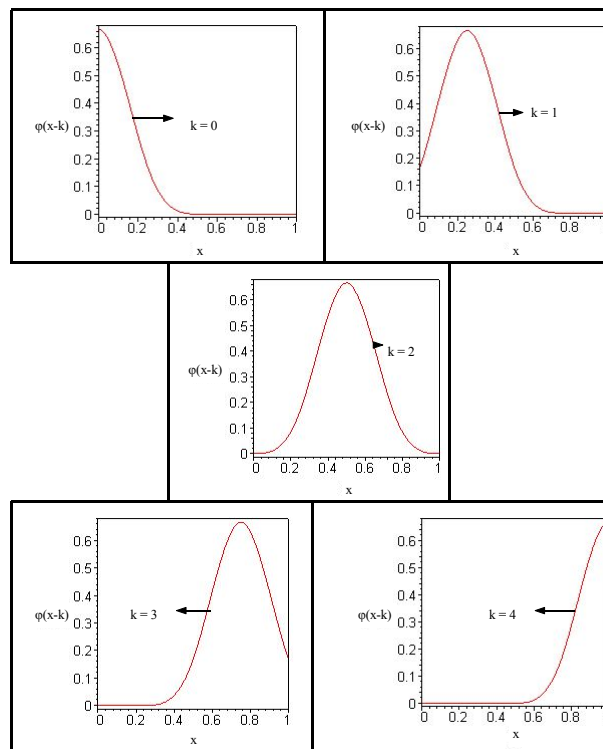


Figura 7.3. B-spline cúbico. Efectos del factor de translación  $k = 0, 1, 2, 3$  y  $4$  dentro de su rango de trabajo. La translación hace que la función sea truncada a medida que ésta sale de su rango de trabajo.

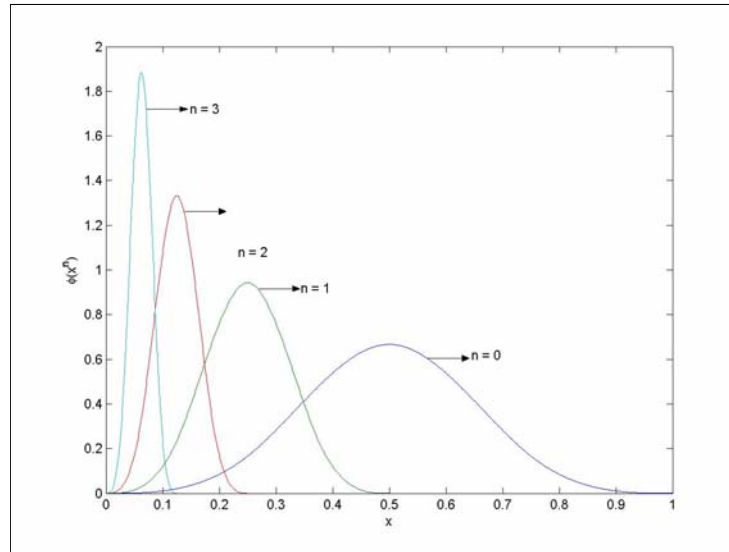


Figura 7.4. B-spline cúbico. Efectos del factor de dilatación  $n = 0, 1, 2$  y  $3$  dentro de su rango de trabajo para  $k = 0$ . La dilatación se hace más grande con el incremento de  $n$ .

Una vez establecida la función base se procedió a determinar los coeficientes correspondientes al caso de flujo fraccional lineal y cúbico, dados por  $\Gamma_{j,k}^n$ ,  $\gamma_{j,k}^n$  y  $\eta_{j,k}^n$  y respectivamente para el caso lineal (ver ecuaciones 4.22 y 4.23) y  $\Theta_{j,k,k'}^n$  y  $\Upsilon_{j,k}^n$  para el caso cuadrático (ver ecuaciones 4.39 y 4.40). Estos coeficientes fueron calculados usando fórmulas de cuadratura tanto para el B-spline lineal como el cúbico.

Calculado este conjunto de matrices se procedió a la discretización de las ecuaciones la cual se realizó por el método de *Runge-Kutta*, teniéndose en consideración las condiciones de frontera e iniciales dadas por  $S(0,t) = 1 - S_{or}$ ,  $S(0,t) = S_{wr}$  donde  $S_{or} = 0.2$  y  $S_{rw} = 0.2$  respectivamente, la tasa volumétrica de flujo del fluido  $i$  está dada por  $q_i = -1.5 \cdot 10^{-4} [kg/(m^2s)]$ , y la velocidad por  $u = 2.134 \cdot 10^{-4} m/s$ . Estos valores fueron tomados de la referencia [13].

Una vez acoplado todo el sistema de ecuaciones se procedió a obtener los valores de saturación de agua  $S_{wr}$ , a diferentes valores de tiempo, para un  $x$  entre  $[0, 1]$ , de lo cual obtuvimos las siguientes soluciones.

## 7.1 Solución con flujo fraccional lineal y B-spline lineal

Al correr el sistema para este caso se pudo observar que los arreglos matriciales  $\Gamma_{j,k}^n$  y  $\Lambda_{j,k}^n$  obtenidos de la integración, tienen la particularidad de ser simétricos para el caso de  $\Gamma_{j,k}^n$  y antisimétrico para el caso de  $\Lambda_{j,k}^n$ , hecho que se puede apreciar en las figuras 7.5a y b respectivamente. Estos gráficos fueron elaborados sin tener en consideración el valor obtenido de la relación  $q_i/C$  (recuérdese que  $C = 1 - S_{or} - S_{wr}$ ), el cual afecta los valores de cualquiera de las matrices.

El factor de escalamiento  $n$  es un parámetro de entrada fijo una vez establecido, el cual tiene el valor de  $n = 2$  para este caso; para más detalle remítase al Capítulo 4. En cuanto a la matriz  $\lambda_{j,k}^n$  representada en la figura 7.5c, observamos que es diferente a las anteriores debido a que esta se obtiene del producto de dos funciones biescalares evaluadas en  $x = 1$  como se indica en la ecuación (4.18). En este caso sí se tuvo en consideración el efecto que produce la relación  $q_i/C$ , de forma de poder ilustrar el cambio que produce esta relación sobre los valores de la matriz, hecho no apreciable en las anteriores.

En la figura 7.6 se ilustra la matriz resultante  $\eta_{j,k}^n$  para  $n = 2$ , la cual se genera de la ecuación (4.24), tomándose en consideración todos los elementos que conciernen a nuestro problema en estudio, de manera de poder apreciar su verdadero comportamiento. Obsérvese como los valores de la diagonal disminuyen, y a pesar de que esta es el resultado

del producto de las matrices  $(\Gamma_{j,k}^n)^1 \Lambda_{j,k}^n$  y  $(\Gamma_{j,k}^n)^1 \lambda_{j,k}^n$  y la suma  $(\Gamma_{j,k}^n)^1 (\Lambda_{j,k}^n + \lambda_{j,k}^n)$  la forma geométrica que predomina es la de la matriz  $\Lambda_{j,k}^n$ . Vale destacar que para este caso las matrices son cuadradas de dimensión  $m \times m$ , donde  $m$  viene dada por  $m = 2^{(n+1)} + 1$ .

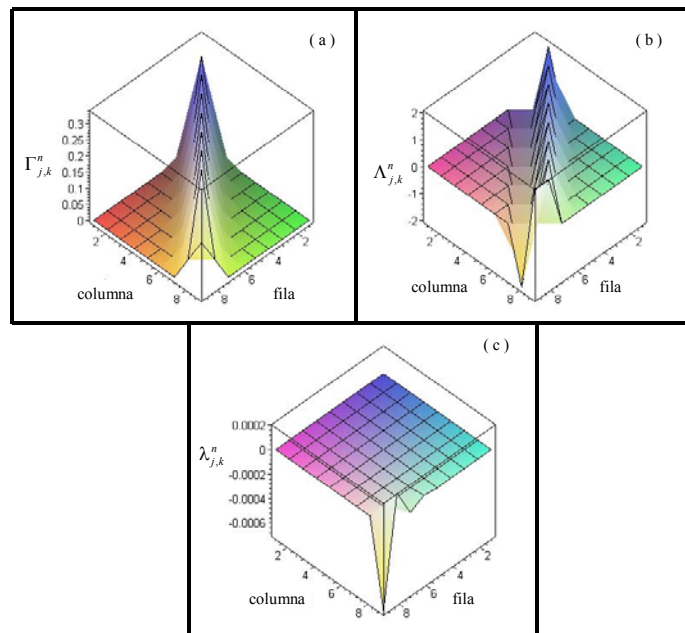


Figura 7.5. Representación grafica de las matrices  $\Gamma_{j,k}^n$ ,  $\Lambda_{j,k}^n$  y  $\lambda_{j,k}^n$  para  $n = 2$ .

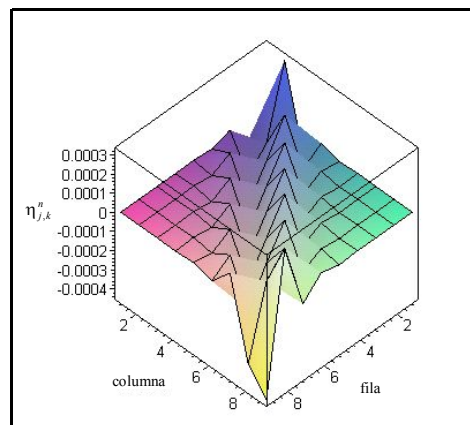


Figura 7.6. Matriz resultante  $\eta_{j,k}^n$  con  $n = 2$ .

De los valores de saturación obtenidos, se puede observar que estos tienden a estar influenciados por el factor de escalamiento  $n$ , ya que no se obtienen resultados adecuados



para todos los niveles generados de  $n$ . En este caso resultados satisfactorios se generan solo para  $n = 2$ . Por otro lado, se pudo apreciar que para valores  $n > 2$ , el frente comienza a retroceder, dando así un resultado no físico. Esto se debe probablemente a que en la ecuación de *Buckley-Leverett* se está considerando un sistema ideal donde la presión capilar, la fuerza gravedad y las fuerzas de viscosidad son despreciables. En un caso real estas fuerzas producen un efecto estabilizador sobre el avance del frente. También se observa de los perfiles de saturación, que estos se encuentran restringidos en sus valores de  $t$ , ya que para valores de  $t > 300s$ , el frente comienza a retroceder. Sin embargo, de la figura 7.7 se observa que los perfiles obtenidos se acoplan de buena forma a los resultados deseados a pesar de que el número de puntos graficados es muy pequeño.

De esta figura 7.7 se puede apreciar el carácter oscilatorio de la solución de la ecuación de *Buckley-Leverret* en función de la posición a lo largo de la dirección de flujo. Este efecto es consecuencia del orden de la ondícula considerada aquí ( $n = 2$ ). Sin embargo, este efecto se puede reducir significativamente usando una función de suavizado.

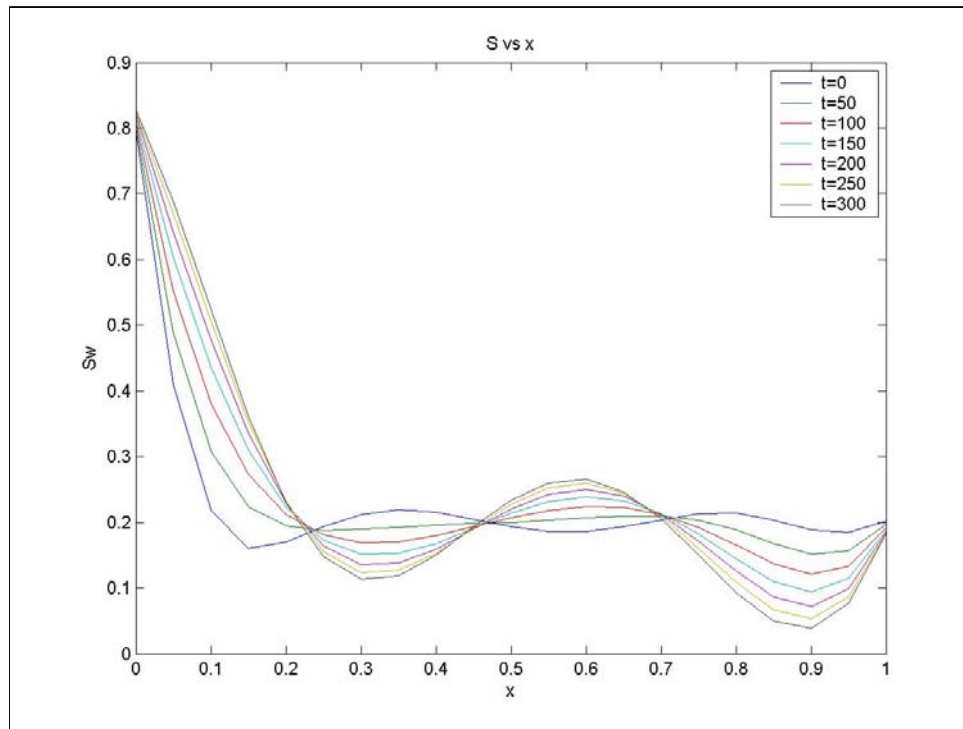


Figura 7.7. Perfiles de saturación obtenidos para un flujo fraccional lineal con Bspline lineal con  $n = 2$ .

## 7.2 Solución con flujo fraccional lineal y B-spline cúbico

Al implementar el B-spline cúbico para la solución de la ecuación de *Buckley-Leverett* se observa que existen algunas diferencias con respecto al caso lineal. En este caso se ilustran las matrices  $\Gamma_{j,k}^n$  y  $\gamma_{j,k}^n$  dadas por la ecuación 4.22. Al observar la figura 7.8a se puede apreciar que los valores de los elementos de las matrices son pequeños, lo cual es debido a que para este caso están corresponden a una matriz subtotal que se encuentra influenciada por todos los parámetros del sistema, las condiciones iniciales y la relación  $q_i/C$  entre otros. Por otra parte, se pudo observar que la matrices son cuadradas de dimensión  $m \times m$  donde  $m = 2^{(n+2)} + 1$ , hecho que produce que el tamaño de las matrices generadas sean

más grandes que para el caso anterior. Sin embargo, a pesar de este hecho, el factor de escalamiento  $n$  solo se pudo trabajar para el caso de  $n = 1$ , debido a que para valores mayores no se obtienen resultados satisfactorios desde el punto de vista físico, a pesar de que el B-spline cúbico es una función mejor comportada que el lineal. Esto pudiera estar asociado a la conducta de la matriz  $\gamma_{j,k}^n$ , la cual toma diferentes valores a lo largo de su propagación, lo cual no ocurre para el caso lineal, en donde el valor para la matriz  $\gamma_{j,k}^n$  es casi puntual, características que se pueden apreciar al comparar las figuras 7.5c y 7.8b respectivamente. A pesar de esto, la geometría de la matriz  $\eta_{j,k}^n$  es algo similar a la obtenida para el caso lineal, como se observa de las figuras 7.6 y 7.9, con la salvedad de que para el caso del B-spline cúbico tenemos una matriz más perturbada que tiende a producir un plano horizontal más irregular debido a la predominancia de valores pequeños.

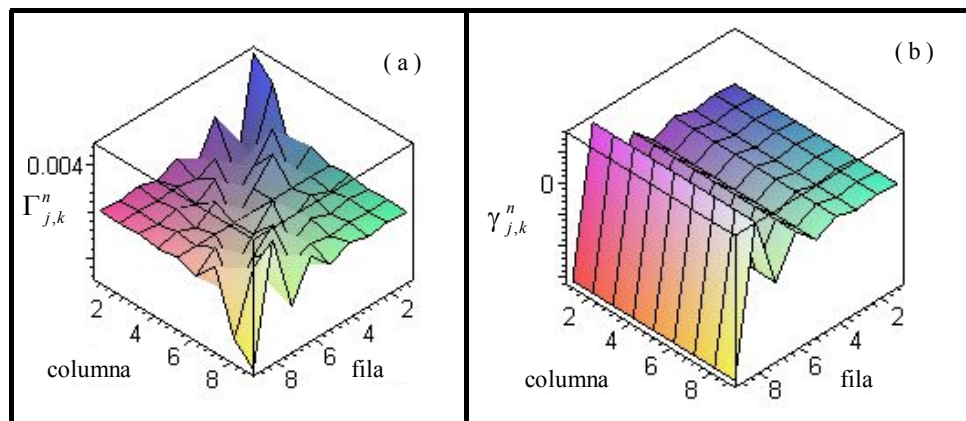


Figura 7.8. Representación gráfica de las matrices  $\Gamma_{j,k}^n$  y  $\gamma_{j,k}^n$  para  $n = 1$ .

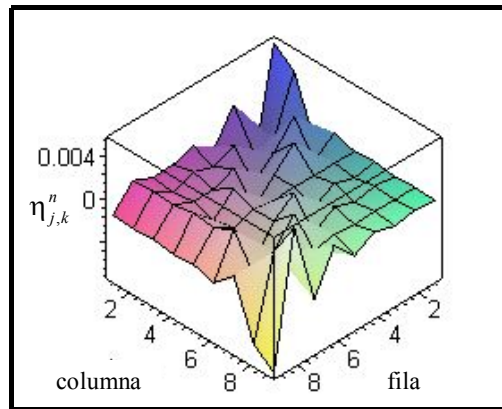


Figura 7.9. Representación gráfica de la matriz  $\eta_{j,k}^n$ ,  $n = 1$ .

Debido al hecho de que el valor del factor de escalamiento  $n$  es más pequeño que para el caso lineal, se obtuvo que el número de curvas de saturación obtenidas en función del tiempo disminuyera, lográndose llegar solo hasta  $t = 150s$ . De igual manera que en el caso anterior, si trata de obtener curvas de saturación para valores de  $t > 150s$  y  $n > 1$  estos perfiles comienzan a retroceder, dando así soluciones no físicas. Sin embargo, a pesar de estas dificultades los pocos perfiles obtenidos permiten ilustrar la buena tendencia encontrada para la propagación del frente, como se indica en la figura 7.10. Al igual que para el caso lineal, es probable que la poca propagación del frente sea debido a que estamos trabajando en un sistema ideal. En las figuras mostradas se observa el comportamiento oscilatorio mencionado antes, que también está asociado a la acción estabilizadora de las fuerzas capilares y gravitacionales, despreciadas en este tratamiento.

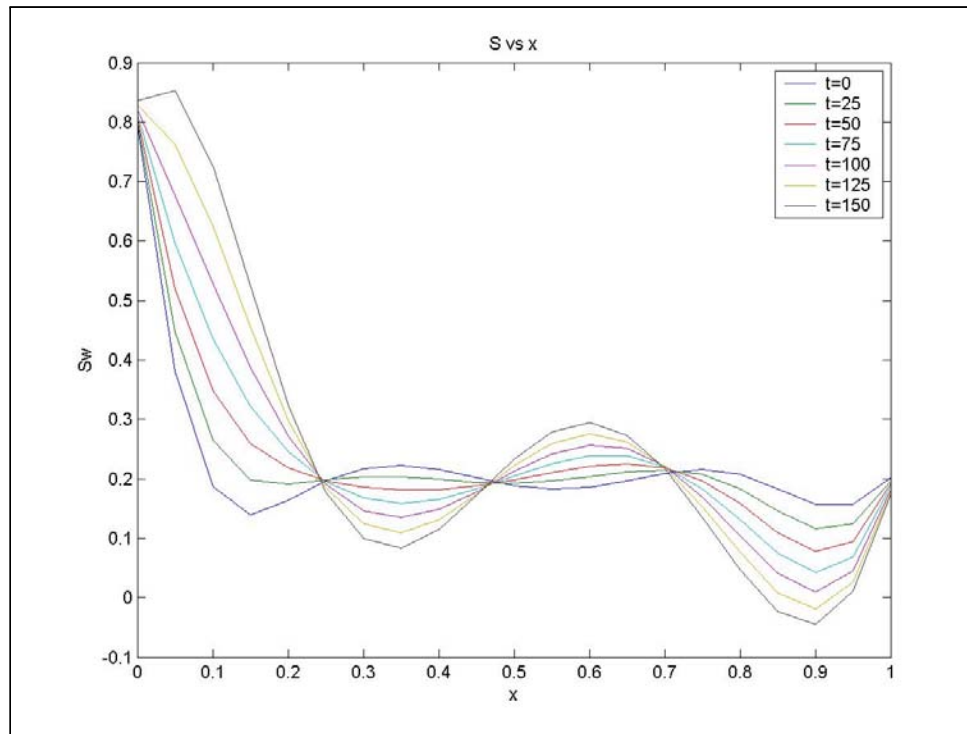


Figura 7.10. Perfiles de saturación obtenidos para un flujo fraccional lineal con B-spline cúbico con  $n = 1$ .

### 7.3 Solución con flujo fraccional cuadrático y B-spline lineal

Al introducirse el flujo fraccional cuadrático se observa, del desarrollo analítico, la aparición de una segunda matriz que llamamos  $\Theta_{j,k,k'}^n$ , que está asociada al producto de los coeficientes  $a_k(t) a_{k'}(t)$ . Este término surge al introducir la expresión para el flujo fraccional cuadrático (ver capítulo 4 sección 1.2) en la ecuación de Buckley - Leverret. La aparición de esta matriz tiende a complicar el grado de dificultad del sistema de ecuaciones a resolver, debido a que esta es una matriz tridimensional, comparada con la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$  asociada a los coeficientes  $a_k(t)$  que es bidimensional. Por esta razón y para ilustrar el método de solución de manera más simple se decidió fijar un plano particular de trabajo

sobre la matriz  $\Theta_{j,k,k'}^n$ , de forma de lograr trabajar con el mismo número de dimensiones para ambas matrices. La conducta que puede generar la variación del plano asociado a la componente  $k'$  puede ser apreciada en la figura 7.11, en la cual podemos estimar como la ondícula va siendo desplazada a través de la diagonal a medida que vamos barriendo sobre el índice  $k'$ . Este valor de  $k'$  está asociado a  $m$ , que a su vez está dado por la relación  $m = 2^{(n+1)} + 1$ , el cual nos permite determinar el número de planos que contiene la matriz.

De igual manera que para los casos anteriores el factor de escalamiento tiene un límite de trabajo y para este caso es  $n = 2$ , el cual es igual al factor de escalamiento empleado para el flujo fraccional lineal con B-spline lineal. Se encuentra, de igual manera que si  $n > 2$  el frente comienza a retroceder, dando así un resultado no físico.

En cuanto a la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$  representada en la figura 7.11 podemos observar que ésta es similar a la matriz  $\eta_{j,k}^n$  obtenida en la figura 7.6. Obsérvese que a pesar de que son obtenidas para casos de flujo fraccional diferentes (cuadrático y lineal respectivamente), ambas están asociadas a los coeficientes  $a_k(t)$ , por lo que se espera que los valores de ambas matrices sean muy similares. También podemos apreciar de la figura 7.12 que los términos de la diagonal son distintos de cero.

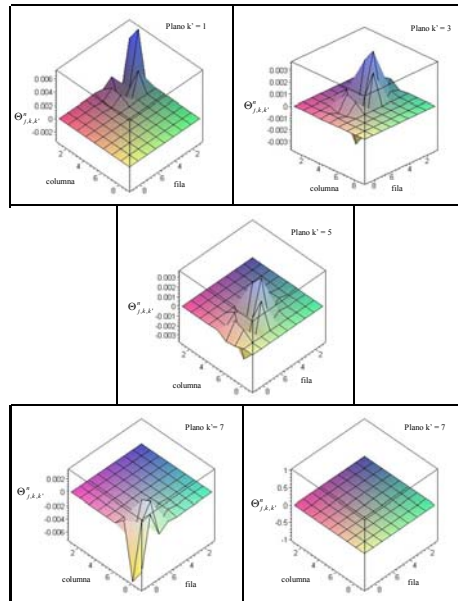


Figura 7.11. Representación grafica de la matriz  $\Theta_{j,k,k'}^n$  para diferentes planos de  $k$ , para el caso de un B-spline lineal.

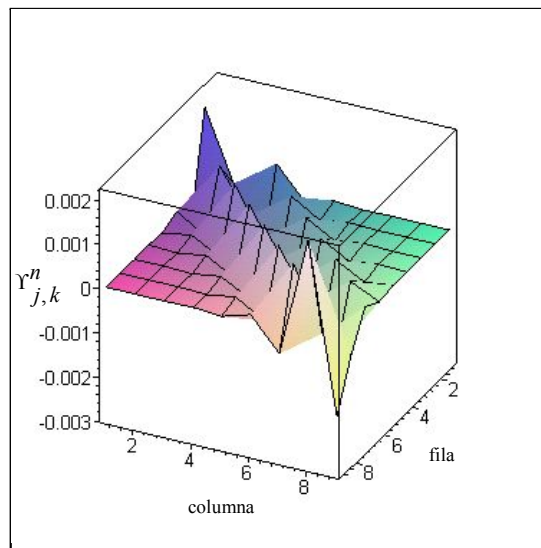


Figura 7.12. Representación grafica de la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$  para B-spline cúbico.

De los valores de saturación obtenidos, se pudieron representar los perfiles de saturación mostrados en la figura 7.13. En esta podemos apreciar que al trabajar con un flujo fraccional cuadrático podemos avanzar un poco mas en el tiempo, ya que se logra llegar

hasta un  $t = 550s$  sin problemás, comparado con el caso de flujo fraccional lineal con B-spline lineal, en el cual solo se logró llegar hasta  $t = 350s$ . También se puede observar la evolución de los perfiles obtenidos para diversos planos de trabajo aquí seleccionados, y apreciar que el plano que mas se asemeja a los resultados deseados es el correspondiente a  $k' = 1$ , representado en la figura 7.13a, el cual se puede apreciar con mayor detalle en la figura 7.14. Por otro lado se observa de la figura 7.13 que a medida que avanzamos en los planos  $k'$ , los perfiles tienden a solaparse resultando en una sola curva .

Vale destacar, que para  $n > 2$ , la solución deja de converger debido a las singularidades presentes en la matriz al igual que ocurre para  $t > 550s$ , donde se tiene que para ambos casos el frente comienza a retroceder.

Al comparar las figuras 7.13 y 7.7, se ve claramente que se obtiene una mejor solución cuando se trabaja con un flujo fraccional cuadrático que el lineal, ya que el acoplamiento en torno al valor de saturación inicial de 0.2 es más pronunciado acercándose mejor a las exigencias de las condiciones de frontera e iniciales (límites 0.8 y 0.2 respectivamente).

Otro hecho que vale destacar es que a medida que la tasa volumétrica de flujo del fluido  $q_i$  se hace más pequeña se obtienen mejores resultados, esto en cuanto a lograrse una mejor estabilidad del frente de desplazamiento. Sin embargo, a medida que el valor de la tasa de flujo disminuye considerablemente, se debería incorporar el efecto de las fuerzas capilares en el tratamiento de las ecuaciones de flujo por lo que debe existir un rango de valores de  $t$  en los que la solución tendría sentido físico, tal como los resultados aquí encontrados.



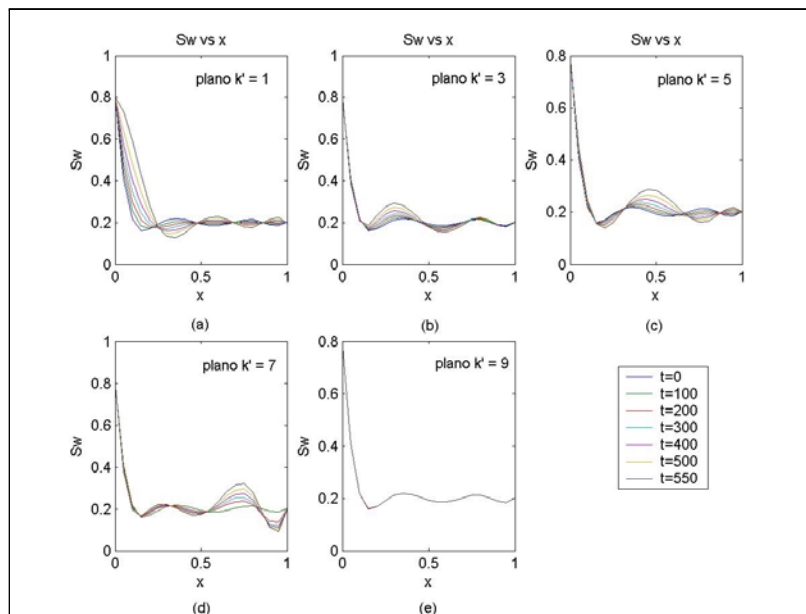


Figura 7.13. Perfiles de saturación para diferentes planos en  $k'$ , para  $n = 2$ .

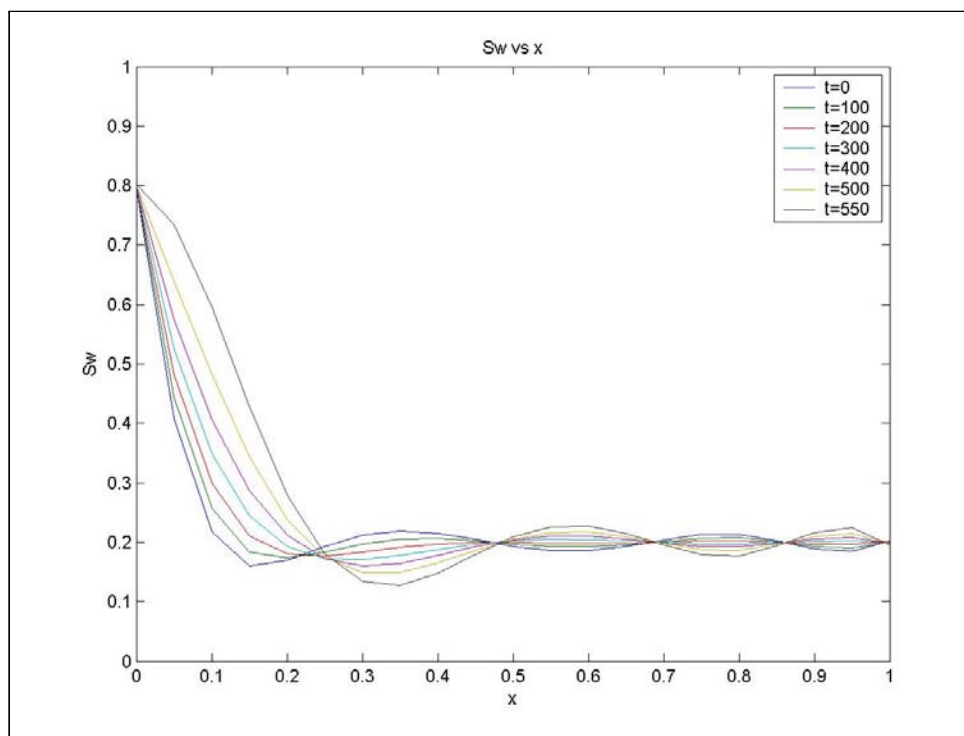


Figura 7.14. Perfiles de saturación obtenidos para un flujo fraccional lineal con spline lineal,  $n = 2$ , y  $k' = 1$ .

## 7.4 Solución con flujo fraccional cuadrático y B-spline cúbico

Cuando se emplea un B-spline cúbico en presencia de un flujo fraccional cuadrático se observó en la resolución de la ecuación diferencial, que el número del factor de escalamiento  $n$  creció en uno, es decir que para este caso se obtuvieron resultados representativos para  $n = 2$ , el cual es diferente al empleado para el flujo fraccional lineal con B-spline cúbico que es de  $n = 1$ . Esto hizo que el tamaño de la matriz fuese más grande; recuérdese que la matriz es cuadrada de tamaño  $m \times m$  donde  $m = 2^{(n+2)} + 1$ , siempre y cuando sea bidimensional, caso concerniente a la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$  asociada a los coeficientes  $a_k(t)$ . Pero en el caso de la matriz  $\Theta_{j,k,k'}^n$ , asociada al producto de los coeficientes  $a_k(t) a_{k'}(t)$ , es un sistema matricial tridimensional y sus dimensiones son  $m \times m \times m$ .

El comportamiento de la matriz  $\Theta_{j,k,k'}^n$  para varios planos  $k'$  se ilustra en la figura 7.15, donde observamos como la ondícula se va desplazando a medida que vamos barriendo sobre cada uno de los planos  $k'$ , pudiéndose apreciar que el valor máximo que logra alcanzar la ondícula es muy similar al de la tasa de flujo fraccional  $q_i$ .

En la figura 7.16 se ilustra el comportamiento de la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$ . De la figura se puede observar que los valores de la matriz disminuyen en su valor absoluto con respecto a los obtenidos para el caso anterior con B-spline lineal, representado en la figura 7.11 y aparece un valor negativo muy bien definido que no se aprecia en la figura 7.11.

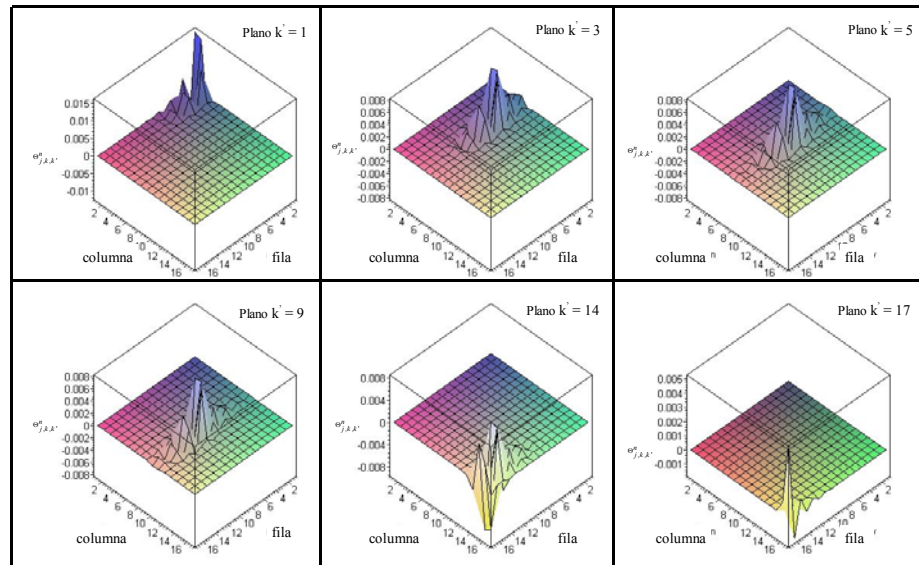


Figura 7.15. Representación grafica de la matriz  $\Theta_{j,k,k'}^n$  para diferentes planos de  $k'$ , para el caso de un B-spline cúbico.

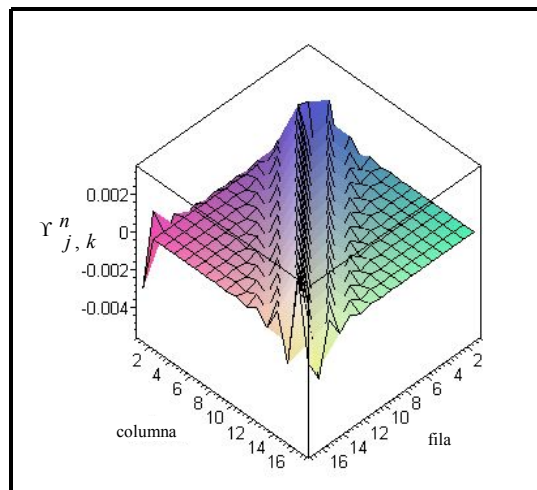


Figura 7.16. Representación grafica de la matriz  $\Upsilon_{j,k}^n$  para B-spline cúbico.

De los perfiles de saturación obtenidos para diferentes planos  $k'$  como se ilustra en la figura 7.17 podemos observar que, al igual que para el B-spline lineal, el que más se

asemeja a los resultados deseados es el asociado al plano  $k' = 1$  representado en la figura 7.17a.

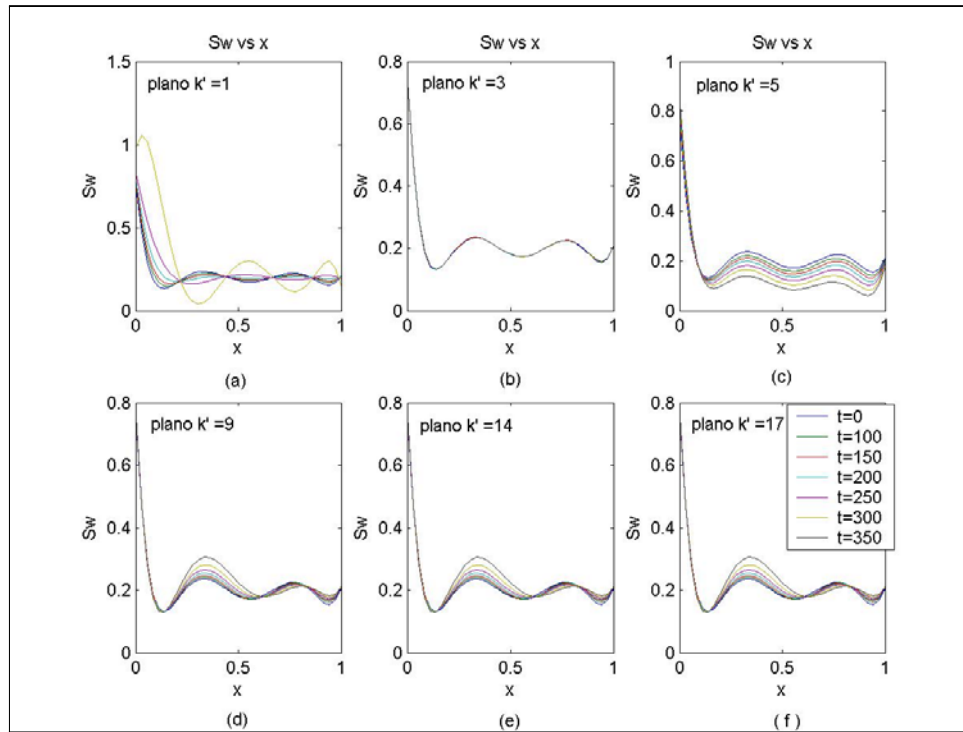


Figura 7.17. Perfiles de saturación para diferentes planos en  $k'$ .

También se puede observar en la figura 7.17b, que para el plano  $k' = 3$  las curvas generadas para diferentes tiempos se superponen, pero que a medida que barremos sobre los diferentes planos  $k'$  se desacoplan nuevamente como se ilustra en las figuras 7.17c – e, para después tratar de acoplarse de nuevo como se ilustra en la figura 7.17d – f. En cuanto a los tiempos, podemos observar al comparar estos con respecto al caso de flujo fraccional lineal con B-spline cúbico de la figura 7.9, que estos se incrementan hasta en un factor de dos; es decir se logra evolucionar bien obteniendo resultados físicamente consistentes hasta  $t = 300s$ .

# Conclusiones

El presente trabajo nos permitió hacer una revisión y análisis de las posibles aplicaciones que se le pueden dar a la teoría de ondículas, bien sea en la resolución de ecuaciones diferenciales o en la aplicación a problemas de escalamiento asociados a las propiedades de la roca de yacimiento y su interacción con los fluidos que contiene, que es el principal elemento de estudio en el área de yacimiento en la industria petrolera, a fin de poder predecir su comportamiento tanto en el tiempo como en la escala, para así poder establecer planes de explotación óptimos, maximizando el retorno económico.

En la evaluación del método de escalamiento para un campo bidimensional heterogéneo de permeabilidad absoluta usando la teoría de ondículas (AMR) así como métodos de escalamiento convencionales basados en promedios tales como: promedio aritmético, armónico y geométrico, se hizo evidente que:

- ✓ El método de escalamiento con análisis de multirresolución es mucho más eficiente ya que es capaz de preservar la presencia de heterogeneidades a todos los niveles de escalamiento, además de presentar excelentes resultados de reconstrucción y descomposición de los campos de permeabilidad, y de ser de fácil de implementar desde el punto de vista computacional.
- ✓ El escalamiento con análisis de multiresolución permite un mejor discernimiento de las facies presentes en una matriz de permeabilidad, permitiendo predecir mejor la distribución geométrica entre las litologías existentes a pesar de los niveles de escalamiento.

- ✓ Los valores de permeabilidad se establecen con mejor precisión para cada nivel escalado con ondículas (AMR) que con los métodos de promedios.

En cuanto a los resultados del estudio de la ecuación de de *Buckley -Leverett* para flujo fraccional lineal y cuadrático con teoría de ondículas podemos concluir lo siguiente:

- ✓ A pesar de que no existe una técnica única para resolver problemas asociados a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, tal como es el caso de la ecuación de *Buckley -Leverett* y los problemas de escalamiento asociados a la roca de yacimiento, la teoría de ondícula se muestra como una buena alternativa para resolver este tipo de problemas ya que su implementación es muy sencilla, permitiéndonos obtener resultados muy satisfactorios de forma clara y simplificada sin afectar los parámetros del sistema en estudio.
- ✓ En el desarrollo de la ecuación diferencial de Buckley-Leverett para un flujo bifásico en condiciones de flujo fraccional lineal con B-spline lineal y cúbico se pudo apreciar que la solución está íntimamente relacionada al factor de escalamiento  $n$  y el tiempo  $t$ , ya que tanto  $n$  y  $t$  tienen un rango de trabajo para el cual se obtienen resultados físicamente satisfactorios. Sin embargo, a pesar de estas restricciones los perfiles de saturación del agua que se lograron obtener presentan una muy buena similitud con los reportados en la literatura, obtenidos a partir de la aplicación de otros métodos tales como diferencias finitas y elementos finitos.

- ✓ Al desarrollar la ecuación de *Buckley-Leverett* para el caso de flujo fraccional cuadrático con B-spline lineal y cúbico se hizo resaltar que al igual que para el caso del flujo fraccional lineal, la solución depende tanto del factor de escalamiento  $n$  como del tiempo  $t$ . Pero en este caso se añade un tercer elemento que tiene influencia sobre la solución del problema y que es el plano  $k'$  sobre el cual se esté trabajando. Este nuevo elemento surge del término cuadrático que contiene la dependencia con la saturación al implementar el flujo fraccional cuadrático en la resolución de la *EDP*, y que da origen a una matriz tridimensional para la solución total. A pesar de la presencia de este tercer elemento  $k'$  en la resolución del problema, se pudo evidenciar que se obtienen mejores perfiles de saturación trabajando bajo este régimen principalmente cuando se implementa un B-spline lineal ya que para este caso se logra un mejor acople a las condiciones de frontera e iniciales asociadas al problema en estudio y se logra evolucionar más en el tiempo.
- ✓ De la resolución de la ecuación de *Buckley-Leverett* tanto para los casos de flujo fraccional lineal como cuadrático con B-spline lineal y cúbico se puede decir de forma muy general que los mejores perfiles de saturación que se generaron acoplándose de buena forma a las condiciones iniciales y de frontera son los asociados al caso cuadrático con B-spline lineal, a pesar de las restricciones introducidas en la solución misma por el factor de escalamiento  $n$ , el tiempo  $t$  y el plano  $k'$  sobre el cual se está trabajando. Por otro lado, el hecho de obtener solo pocos perfiles de saturación antes de que la solución se hiciera inestable pudiera estar asociado al hecho de que se trabajó con un sistema ideal donde los efectos de las fuerzas capilares y gravitacionales se consideraron como despreciables.

En este trabajo el objetivo era mostrar que se puede usar ondículas para la solución de la ecuación de flujo bifásico incompresible en condiciones de flujo fraccional lineal y cuadrático, y su aplicación a la solución de problemas de escalamiento de propiedades de rocas, tales como la permeabilidad absoluta. Los resultados mostrados evidencian que el método de ondícula es efectivamente apropiado para la solución de problemas de flujo y transporte en medios porosos.



# Recomendaciones

- ✓ Extender el estudio para el caso en el que se consideren todas las fuerzas que actúan en el sistema, esto es, fuerzas capilares, viscosas y gravitacionales, y el uso de ondículas para la solución de la ecuación de Buckley-Leverett extendida.
- ✓ Profundizar en el método de escalamiento empleando muestras de distribuciones de propiedades generadas a partir de datos reales de yacimiento.
- ✓ Extender el estudio para evaluar el uso de la transformada de ondícula para el escalamiento de propiedades asociadas al sistema roca-fluido tales como la presión capilar y la permeabilidad relativa.

# Referencias Bibliográficas

1. Araujo, Yani Carolina y Araujo Mariela.: Taller de Interacción Roca-Fluido, Curso Básico, PDVSA Intevep (1998).
2. Apostol Tom M, Cálculus, Ediciones Reverte S.A, España 1979, Vol. 1 y 2, 813p.
3. Bear Jacob, Dynamics of Fluids in Porous Media, Dover, New York 1972, 757p.
4. Chu, Lifu.: "Application of wavelet analysis to upscaling of rock properties", SPE 36517, p. 267-282 (1996).
5. Chu, L., Reynolds, A.C., and Oliver, D.S.: "Reservoir description from static and well-test data using efficient gradient methods, SPE 29999, 467p (1995).
6. Charles K. Chui and J.Z. Wang, " An analysis of cardinal spline-wavelets", J. Approx. Theory, to appear.
7. Charles K. Chui, An Introduction to Wavelets, Academic Press, Texas 1992, Vol. 1267p
8. Craig, Jr. Forrest, F.: Aspectos de Ingeniería de la Inyección de Agua, Sociedad de Ingenieros, Petroleros de AIME, Monografía Vol. 3, Dallas 1982, 132 p.
9. Dahmen W.,Kurdila A.y Oswald P., Multiscale Wavelet Methods, Academic Press, Texas 1997, Vol. 6, 570p
10. Daubechies, Ingrid.: "Where do wavelets come from? - A Personal Point of View. IEEE Trans. On Pattern Anal. and Mach Intel. (1996) 84, 4, p. 510-513.
11. Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, N° 61, (1992).
12. J.-P. Duqueroix, P. Lemouzy, B. Noetinger y R. K. Romeu, Influence of the permeability anisotropy ratio on the large scale properties of heterogeneous reservoirs. SPE 26648 (1993).
13. Helmig Rainer, Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface, Springer, 1997,367p.
14. Howard L., Resnikoff R. and Wells Jr., Wavelets Analysis, Springer, New York, 1998, 435p.

15. Jansen, F.E, Saga Petroleum ASA, and M.G. Kelkar, The University of Tulsa.: Upscaling of reservoir properties using wavelets. SPE 39495, p.23-37 (1998).
16. P.R. King, The use of renormalization for calculating effective permeability. Transport in Porous Media, 4, p. 37-58 (1989).
17. Lu, Pengbo, and Horne, Roland N.: "A Multiresolution approach to reservoir parameter estimation using wavelet analysis," SPE 62985, p.1-17, (2000).
18. S. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L_2(\mathbb{R})$ ", Trans. Amer. Math. Soc., 315 (1989), p. 69-87.
19. Mallat, S.: "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation," IEEE Trans. On Pattern Anal. and Mach Intel. (1989) 11(7), 674.
20. Y. Meyer, "Ondelettes et operateurs", Hermann, 1990.
21. Moridis, G.J.: "The use of wavelet transforms in the solution of two-phase flow problems,"(1996), SPE 29144, p. 169-177.
22. Panda, M. N., Mosher, C, and Chopra, A. K.: "Application of wavelet transforms data analysis and scaling," (1996), SPE 36516, p. 251-266.
23. P. Renard y G. De Marsily, Calculation equivalent permeability: A review. Adv. Water Resources, 20 (5-6), p. 253-278 (1997).
24. R. K. Romeu, Tesis doctoral, Universidad de Paris (1994)
25. Sahimi, Muhammad.: Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock, VCH 1995, 482 p.
26. G. Strang, "Wavelet and dilation equations", A brief introduction. SIAM Rev., 31: 614-627,1989
27. Stromberg J."A modified Franklin system and higher-order systems of  $R_n$  as unconditional bases for Hardy spaces ", Conference in Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund, vol. 2, pp. 475-493, edit. W. Beckner et. Al., Wadsworth Math. Series.
28. Ueda, másami, and Lodha Suresh.: wavelet: An Elementary Introduction and Examples" UCSC-CRL 94-47, January 17, 1995, 56 p.