

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**MODELO FLUIDODINÁMICO PARA FLUJO BIFÁSICO EN
PATRÓN DE FLUJO ANULAR EN TUBERÍAS**

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Nohra K., Carlos J.
para optar al Título
de Ingeniero Químico

Caracas, 2008

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

MODELO FLUIDODINÁMICO PARA FLUJO BIFÁSICO EN PATRÓN DE FLUJO ANULAR EN TUBERÍAS

TUTORES: Prof. Andrés Rosales
Prof. Julio Segura

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Nohra K., Carlos J.
para optar al Título
de Ingeniero Químico

Caracas, 2008

Caracas, Noviembre de 2008

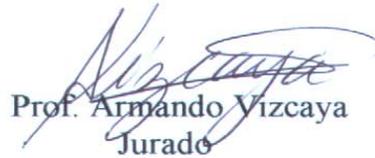
Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Química, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller Carlos J. Nohra K., titulado:

“Modelo fluidodinámico para flujo bifásico en patrón de flujo anular en tuberías”

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Químico, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por los autores, lo declaran APROBADO.



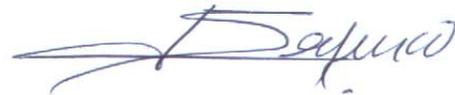
Prof. Mary Luz Alonso
Jurado



Prof. Armando Vizcaya
Jurado



Prof. Andrés Rosales
Tutor Académico



Prof. Julio Segura
Tutor Académico



Facultad de Ingeniería



Universidad Central de Venezuela

ACTA MENCIÓN HONORÍFICA

Los abajo firmantes, miembros del jurado examinador del Trabajo Especial de Grado del Bachiller: **Carlos José Nohra Khouri, C.I. 16.953.749**, cuyo título es **“MODELO FLUIDODINÁMICO PARA FLUJO BIFÁSICO EN PATRÓN DE FLUJO ANULAR EN TUBERÍAS”**, queremos dejar constancia del excelente nivel del trabajo realizado, ya que el mismo en cuanto a su ejecución, presentación y utilidad de los resultados ameritó que se le asignara la nota máxima de veinte puntos (20).

Así mismo hemos decidido concederle **MENCIÓN HONORÍFICA** como un reconocimiento a la excelencia del trabajo realizado, por el aporte significativo a la descripción del flujo bifásico en patrón de flujo anular, al proponer un modelo basado en análisis diferencial con solución analítica que puede utilizarse como punto de partida para estudios posteriores donde se consideren los efectos de la transferencia de calor y de masa.

Dado en Caracas, a los once días del mes de noviembre del año dos mil ocho.

Prof. Mary Luz Alonso
Jurado

Prof. Armando Vizcaya
Jurado

Prof. Andrés Rosales
Tutor Académico

Prof. Julio Segura
Tutor Académico

DEDICATORIA

A los dos seres más importantes en mi vida, mi mamá Rosa Khouri y mi papá Sarkis Daniel Nohra, pilares fundamentales en todo lo que soy, los consejos, la preocupación, el apoyo constante durante cada instante de mi carrera y de mi vida.

A mis hermanos Gabriel, Carolina y Daniel, simplemente por estar allí, cada vez que lo necesito, por compartir conmigo todos estos años.

A todos ellos les dedico este Trabajo Especial de Grado.

AGRADECIMIENTOS

A la ilustre Universidad Central de Venezuela, por brindarme la oportunidad de pertenecer a esta gran casa de estudios y suministrarme esos sólidos conocimientos para convertirme en Ingeniero Químico.

Al Prof. Andrés Rosales de la Escuela de Ingeniería Química por todo el tiempo invertido y la ayuda ofrecida que sin duda fue bastante valiosa.

También le estoy muy agradecido al Prof. Julio Segura de la Escuela de Ingeniería Mecánica por toda la ayuda brindada y por los sabios y oportunos consejos ofrecidos.

A los profesores de la Escuela Básica y de la Escuela de Ingeniería Química que me ofrecieron la sólida base de conocimientos que me permitió recorrer la carrera con éxito.

A todos los amigos y compañeros que estuvieron allí en todos esos momentos difíciles, y que aportaron bastante durante estos años.

Por último, aunque más importantes, agradezco a mis padres Sarkis Daniel y Rosa y a mis hermanos Gabriel, Carolina y Daniel, por todo el apoyo desde el principio, por la comprensión y por estar siempre allí cuando los necesito.

A todos aquellos que no menciono acá porque se me escapan de la memoria pero que contribuyeron conmigo para alcanzar tan apreciada meta.

Nohra K., Carlos J.

**MODELO FLUIDODINÁMICO PARA FLUJO BIFÁSICO EN PATRÓN DE
FLUJO ANULAR EN TUBERIAS**

Tutores Académicos: Prof. Andrés Rosales / Prof. Julio Segura.

Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Química.

Año 2008, 156 p.

Palabras Claves: Mecánica de fluidos, longitud de mezcla, solución analítica.

Resumen: En el presente Trabajo Especial de Grado se desarrolló un modelo con solución analítica, que describe el comportamiento fluidodinámico del flujo bifásico en patrón de flujo anular cuando ambos fluidos se encuentran en régimen turbulento en flujo vertical ascendente. El modelo se obtuvo al aplicar por separado a cada fase las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y la cantidad de movimiento lineal, luego dichas ecuaciones se simplificaron eliminando términos poco importantes y posteriormente se resolvieron utilizando condiciones de frontera adecuadas. Para expresar los esfuerzos de Reynolds se utilizó la teoría de longitud de mezcla de Prandtl. En cuanto a la fase gaseosa sólo se tomó en cuenta la corriente turbulenta principal, pues se despreciaron las subcapas laminar y amortiguadora. En cuanto a la fase líquida se consideraron dos regiones: una subcapa laminar adyacente a la pared y una corriente turbulenta principal. Además, se consideró que la interfase entre ambos fluidos es plana y lisa, y se utilizó un espesor de película promedio. Asimismo el modelo se desarrolló considerando que la curvatura para la película de líquido es despreciable.

Se determinó que los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno en estudio son el número de Reynolds superficial del líquido, el número de Froude superficial del líquido, la relación entre el caudal del gas y del líquido y la relación entre la densidad del líquido y del gas. Asimismo se obtuvieron expresiones para los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad correspondientes a cada una de las fases; además, de relaciones que permiten calcular la caída de presión y el espesor de la película conociendo los caudales, las propiedades físicas de ambos fluidos y la geometría de la tubería.

Al comparar con datos experimentales seleccionados de la literatura especializada se encontró que para el gradiente de presión el error porcentual absoluto promedio fue igual a 11 %, mientras que para el espesor de película el error porcentual absoluto promedio obtenido fue igual a 15 %; por lo tanto, se concluyó que el modelo desarrollado reproduce adecuadamente los datos experimentales disponibles.

ÍNDICE DE CONTENIDO

	Pág.
<i>CAPÍTULO I: FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN</i>	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Planteamiento del problema.....	4
1.3 Objetivos.....	6
1.2.1 Objetivo general.....	6
1.2.2 Objetivos específicos.....	6
1.4 Antecedentes.....	7
 <i>CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO</i>	 9
2.1 Aspectos fundamentales del flujo bifásico.....	9
2.1.1 Flujo bifásico.....	9
2.1.2 Variables importantes del flujo bifásico.....	10
2.1.3 Fenómenos fundamentales en el flujo bifásico.....	12
2.1.3.1 Relación entre deslizamiento y holdup de líquido.....	13
2.1.3.2 Patrones de flujo.....	15
2.1.3.2.1 Patrones en flujo horizontal.....	17
2.1.3.2.2 Patrones en flujo vertical ascendente.....	18
2.1.3.2.3 Patrones en flujo inclinado.....	19
2.1.3.2.4 Determinación de los patrones de flujo.....	20
2.1.4 Características particulares del patrón de flujo anular.....	22
2.2 Métodos de análisis utilizados para abordar los problemas de fluidodinámica.....	 23
2.2.1 Análisis diferencial.....	23
2.2.1.1 Ecuación de continuidad en forma diferencial.....	23
2.2.1.2 Ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma diferencial...	24
2.2.1.3 Flujo turbulento.....	25
2.2.1.3.1 Teoría de longitud de mezcla de Prandtl.....	28

	Pág.
2.2.1.3.2 Regiones de flujo para describir el flujo turbulento cerca de una pared.....	28
2.2.2 Análisis integral.....	30
2.2.2.1 Ecuación de continuidad en forma integral.....	30
2.2.2.2 Ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma integral.....	31
2.2.2.3 Balances macroscópicos.....	32
2.2.2.3.1 Balance macroscópico de materia.....	32
2.2.2.3.2 Balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.....	32
2.2.2.3.3 Las formas d de los balances macroscópicos.....	34
2.2.2.3.3 La forma d del balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.....	35
2.2.3 Análisis basado en estudios experimentales.....	37
2.3 Enfoques utilizados para estudiar los problemas de flujo bifásico.....	39
2.3.1 Modelos homogéneos.....	39
2.3.2 Correlaciones empíricas.....	40
2.3.3 Modelos mecanicistas.....	41
2.3.4 Modelos basados en el análisis diferencial.....	43
<i>CAPÍTULO III: METODOLOGÍA GENERAL</i>	44
3.1 Metodología general.....	44
<i>CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN</i>	47
4.1 Formulación del modelo.....	47
4.1.1 Clasificación genérica del fenómeno a estudiar.....	47
4.1.2 Regímenes de flujo.....	48
4.1.2.1 Criterio de turbulencia para el líquido.....	49
4.1.2.2 Modelo de turbulencia.....	50
4.1.2.3 Regiones de flujo consideradas para cada fase.....	52

	Pág.
4.1.3 Formulación matemática.....	54
4.2 Adimensionalización del modelo.....	60
4.3 Solución analítica del modelo.....	64
4.3.1 Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional.....	64
4.3.2 Perfiles de velocidad en forma adimensional.....	65
4.3.3 Ecuaciones de caudal en forma adimensional.....	66
4.3.4 Representación gráfica de los resultados.....	70
4.3.4.1 Representación gráfica de los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad.....	70
4.3.4.2 Representación de la caída de presión adimensional y de la relación de radios.....	77
4.3.5 Reducción del modelo al caso de un flujo turbulento monofásico.....	83
4.4 Comparación con datos experimentales.....	87
4.4.1 Resumen de los datos experimentales.....	87
4.4.2 Comparación del modelo desarrollado con los datos experimentales disponibles.....	88
4.4.3 Comparación de otros modelos con los datos experimentales disponibles.....	93
<i>CAPÍTULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</i>	96
5.1 Conclusiones.....	96
5.2 Recomendaciones.....	98
<i>CAPÍTULO VI: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i>	99
6.1 Bibliografía.....	99
<i>APÉNDICES</i>	102
A. Modelo homogéneo de Wallis.....	102

	Pág.
B. Correlación de Lockhart y Martinelli.....	106
C. Modelo mecanicista de Alves para el patrón de flujo anular.....	109
D. Desarrollo detallado del modelo matemático.....	114
D.1 Adimensionalización del modelo y solución analítica.....	114
D.2 Reducción del modelo al caso de un flujo turbulento monofásico.....	146
E. Análisis del efecto de las ondulaciones y de la tensión interfacial en la interfase gas-líquido en la dirección del movimiento.....	152

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura N° 2.1. Flujo bifásico gas-líquido a través de una tubería.....	12
Figura N° 2.2. Relación entre deslizamiento y holdup de líquido.....	13
Figura N° 2.3. Patrones de flujo existentes en flujo horizontal.....	16
Figura N° 2.4. Patrones de flujo existentes en flujo vertical ascendente.....	17
Figura N° 2.5. Mapa de patrones de flujo para tuberías horizontales desarrollado por Baker en 1954.....	20
Figura N° 2.6. Mapa de patrones de flujo para tuberías verticales desarrollado por Hewitt y Roberts en 1969.....	21
Figura N° 2.7. Velocidad con ajuste de tiempo para flujo turbulento.....	26
Figura N° 2.8. Regiones de flujo para describir el flujo turbulento cerca de una pared.....	29
Figura N° 2.9. Volumen de control utilizado para deducir la forma d del balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.....	35
Figura N° 3.1. Esquema del patrón de flujo anular en coordenadas cilíndricas.....	44
Figura N° 4.1. Esquema del flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular.....	47
Figura N° 4.2. Regiones consideradas en el modelo desarrollado.....	54
Figura N° 4.3. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	70
Figura N° 4.4. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	72
Figura N° 4.5. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	73
Figura N° 4.6. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	74

	Pág.
Figura N° 4.7. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	75
Figura N° 4.8. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$	76
Figura N° 4.9. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$	77
Figura N° 4.10. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$	78
Figura N° 4.11. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$	79
Figura N° 4.12. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$	80
Figura N° 4.13. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$	81
Figura N° 4.14. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$	82
Figura N° 4.15. Comparación entre la ecuación 4.69 y la correlación de Prandtl para tubos lisos.....	85
Figura N° 4.16. Perfiles de esfuerzo cortante y velocidad para el caso monofásico, obtenidos para $Re_L = 30000$	86
Figura N° 4.17. Representación de los datos experimentales utilizados sobre el mapa de patrones de flujo desarrollado por Hewitt y Roberts.....	88
Figura N° 4.18. Gradiente de presión teórico en función del gradiente de presión experimental para los datos de Zabarás y Dukler (1986) y Calvert y Williams (1955).....	90
Figura N° 4.19. Gradiente de presión teórico en función del gradiente de presión experimental para los datos de Wallis (1969) y Govier (1968).....	91
Figura N° 4.20. Espesor de película teórico en función del espesor de película experimental para los datos de Zabarás y Dukler (1986) y Govier (1958).....	92
Figura N° A.1. Volumen de control utilizado para desarrollar el modelo homogéneo de Wallis.....	103
Figura N° B.1 Parámetros adimensionales de la correlación de Lockhart y Martinelli.....	107

	Pág.
Figura N° C.1. Volumen de control utilizado para desarrollar el modelo mecanicista de Alves.....	109
Figura N° E.1. Interfase entre dos fluidos inmiscibles.....	152
Figura N° E.2. Esquema de la interfase entre dos fluidos inmiscibles I (gas) y II (líquido), similar al observado en el patrón de flujo anular.	154

ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla N° 4.1. Resumen de los datos experimentales.....	87
Tabla N° 4.2. Desempeño de los modelos evaluados.....	94
Tabla N° B.1. Valores de la constante C a utilizar en las ecuaciones de Chisholm.....	107

NOTACIÓN DE VARIABLES

A	Área, L^2
b	Espesor adimensional de la subcapa laminar.
C	Constante a utilizar en las ecuaciones de Chisholm.
c	Espesor de la subcapa laminar de la película de líquido, L
d	Diámetro de la tubería, L
\mathbf{F}	Vector que representa las fuerzas que actúan sobre el volumen de control, ML/t^2
$\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$	Vector que representa la fuerza ejercida por el fluido sobre el sólido, ML/t^2
Fr	Número de Froude.
f	Factor de fricción de Fanning.
f_E	En el patrón de flujo anular es la fracción de líquido arrastrado por el gas en forma de pequeñas gotas.
\mathbf{g}	Vector aceleración de la gravedad, L/t^2
g	Aceleración de la gravedad, L/t^2
H_L	Holdup de líquido.
I	Parámetro adimensional del modelo mecanicista de Alves.
K	Energía cinética por unidad de volumen, M/Lt^2
k	Constante adimensional en la expresión de longitud de mezclado.
L	Longitud de la tubería, L
l	Longitud de mezcla de Prandtl, L
m_{tot}	Masa contenida dentro de un volumen de control macroscópico, M

N	Constante adimensional.
\hat{n}	Vector unitario normal a la superficie de control y que apunta en la dirección del flujo.
$\mathbf{P}_{\text{total}}$	Vector que representa la cantidad de movimiento total en un volumen de control macroscópico, ML/t
p	Presión, M/Lt^2
Q	Caudal, L^3/t
R	Radio de la tubería, L
R_1	Coordenada radial en la interfase fluido-fluido, L
R_2	Coordenada radial en la interfase fluido-sólido, L
Re	Número de Reynolds.
r, θ, z	Coordenadas cilíndricas.
S	Perímetro, L
T	Tiempo, t
\hat{u}	Vector unitario en la dirección del flujo.
V	Volumen, L^3
\mathbf{v}	Vector velocidad, L/t
$v, \langle v \rangle$	Velocidad media, L/t
W	Flujo másico, M/t
X	Parámetro adimensional de la correlación de Lockhart y Martinelli.
x, y, z	Coordenadas cartesianas.
x_M	Calidad de la mezcla.
y	Distancia de la pared en turbulencia, L

α	Fracción vacía de gas.
Δ	Diferencia entre los valores de salida y de entrada.
δ	Espesor de la película en el patrón de flujo anular, L
ε/d	Rugosidad relativa de la tubería.
η	Coordenada radial adimensional.
θ	Ángulo de inclinación de la tubería.
κ	En patrón de flujo anular es la relación entre el radio ocupado por la fase gaseosa y el radio de la tubería
λ	Factor de corrección para el mapa de patrones de flujo desarrollado por Baker.
λ_L	Holdup de líquido sin deslizamiento.
μ	Viscosidad, ML/t
Π	Número Pi.
ρ	Densidad, M/L^3
σ	Tensión interfacial, M/t^2
τ	Tensor de esfuerzos, M/Lt^2
τ_w	Magnitud del esfuerzo de corte en la interfase fluido-sólido o en la pared de la tubería, M/Lt^2
τ_l	Magnitud del esfuerzo de corte en la interfase fluido-fluido, M/Lt^2
v	Volumen específico L^3/M
ϕ	Parámetro adimensional de la correlación de Lockhart y Martinelli.
ψ	Factor de corrección para el mapa de patrones de flujo desarrollado por Baker.

Símbolos sobre las literales

\bar{X} Con ajuste de tiempo.

Corchetes

$(X), [X]$ Se usan en operaciones vectoriales-tensoriales cuando los corchetes encierran operaciones punto o cruz.

Exponentes

X' Cantidad fluctuante.

$X^{(t)}$ Turbulento.

$X^{(v)}$ Viscoso.

X^* Variable adimensionalizada.

Subíndices

A, B Evaluado en los planos A y B .

C Correspondiente al núcleo en el patrón de flujo anular.

F Correspondiente a la película en el patrón de flujo anular.

G Correspondiente al gas.

I Correspondiente a la interfase fluido-fluido.

L Correspondiente al líquido.

M Correspondiente a la mezcla gas-líquido.

S Con deslizamiento.

SG Superficial del gas.

- SL* Superficial del líquido.
- T* Correspondiente a la tubería.
- W* Correspondiente a la interfase fluido-sólido.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

El flujo bifásico se encuentra en múltiples aplicaciones de la ingeniería, las cuales incluyen la industria petrolera, química, nuclear y geotérmica. La necesidad de métodos de diseño para dichas aplicaciones, ha estimulado numerosas investigaciones que se han desarrollado desde la década de los cincuenta en un intento por entender el comportamiento de este fenómeno. Cuando el interés está en la fluidodinámica, se hace énfasis principalmente en la determinación de parámetros tales como el patrón de flujo, la caída de presión en tuberías y el holdup de líquido (Shoham, 2006).

En general, los métodos de análisis que se utilizan para abordar un problema fluidodinámico se pueden clasificar de la siguiente manera: análisis diferencial, análisis integral y análisis basado en estudios experimentales (White, 2004). En el análisis diferencial, se aplican los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a un elemento de fluido infinitesimal, obteniendo como resultado las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía. Por otro lado, en el análisis integral, estos principios de conservación se aplican a un volumen de control arbitrario, para dar lugar a las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía en forma integral. Cuando estas ecuaciones se escriben para un volumen de control macroscópico y se hacen ciertas suposiciones, se obtienen los balances macroscópicos de materia, cantidad de movimiento y energía (Bird *et al.*, 2006). Finalmente, en el análisis basado en estudios experimentales, se propone una serie de ajustes de datos experimentales para correlacionar una variable determinada. Este método está fundamentado en el análisis dimensional (White, 2004).

Los enfoques utilizados para estudiar los problemas de flujo bifásico se basan en los métodos de análisis mencionados anteriormente. En general, estos enfoques se han fundamentado en la utilización de los modelos homogéneos y mecanicistas (basados en el análisis integral), las correlaciones empíricas (basadas en estudios experimentales) y los modelos basados en el análisis diferencial.

Los modelos homogéneos constituyen uno de los primeros intentos para describir el flujo bifásico. En estos modelos, el flujo bifásico es supuesto como un fluido pseudo homogéneo con una velocidad y propiedades físicas promedio de la mezcla. La mayoría de los modelos homogéneos consideran el flujo como una mezcla homogénea en donde las fases se mueven a la misma velocidad a través de tuberías de diámetros específicos, por tanto no consideran la presencia de patrones de flujo. Algunos si toman en cuenta el deslizamiento entre las fases (Shoham, 2006). Estos modelos combinan el análisis integral con el enfoque experimental, ya que se basan en balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento que luego se complementan con correlaciones empíricas.

Luego de la aparición de los modelos homogéneos, el estudio del flujo bifásico evolucionó significativamente. Se desarrollaron correlaciones empíricas que comenzaron a considerar tanto el deslizamiento entre las fases como la existencia de los patrones de flujo (Shoham, 2006).

Otro enfoque utilizado para el modelado del flujo bifásico, es aquel basado en la utilización de los denominados modelos mecanicistas. Estos modelos consideran tanto el deslizamiento entre las fases como la existencia de los patrones de flujo. En general, este enfoque consta de dos etapas: en primer lugar se determina el patrón de flujo existente en el sistema para unas condiciones dadas y luego se estudia dicho patrón de flujo por separado, planteando un modelo que tome en cuenta la geometría que lo caracteriza (Shoham, 2006). Al igual que los modelos homogéneos, los modelos mecanicistas combinan el análisis integral con el enfoque experimental, pues

en primer lugar se realizan balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento que posteriormente se complementan con correlaciones empíricas.

Un enfoque diferente a los descritos anteriormente es desarrollar modelos basados en el análisis diferencial para el modelado del flujo bifásico. Estos modelos se basan en la aplicación de las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y la cantidad de movimiento lineal a cada una de las fases presentes en la tubería, posteriormente estas ecuaciones se simplifican descartando términos poco importantes y finalmente se resuelven utilizando condiciones de frontera adecuadas.

En general, son pocos los casos que se pueden tratar utilizando modelos basados en el análisis diferencial, debido a la complejidad del flujo y de la estructura interfacial. El patrón de flujo anular es uno de los pocos casos que se ha estudiado utilizando este enfoque, así como el patrón de flujo estratificado.

1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la bibliografía existen diversos modelos basados en el análisis diferencial, planteados para el patrón de flujo anular. De manera general, en estos modelos, el flujo bifásico en patrón de flujo anular se divide en dos regiones: una delgada película adyacente a la pared que fluye por la sección anular y un núcleo central que fluye dentro del ánulo, entonces las ecuaciones de conservación se aplican por separado a cada una de las fases. Dependiendo de los regímenes de flujo presentes en el sistema se pueden tener cuatro posibles combinaciones: película laminar con núcleo laminar, película laminar con núcleo turbulento, película turbulenta con núcleo laminar y película turbulenta con núcleo turbulento.

De las cuatro posibles combinaciones, tres han sido ampliamente tratadas en trabajos anteriores. El caso en el que ambos fluidos están en régimen laminar fue resuelto por Rovinsky (1997) suponiendo flujo excéntrico y por Su (2006) para flujo concéntrico. En cuanto a la combinación película turbulenta con núcleo laminar, se puede decir que es muy común en el flujo de agua con crudos altamente viscosos, y ha sido ampliamente estudiada en los trabajos de Oliemans (1987) y Joseph (1993). Asimismo el caso en el que la película está en régimen laminar y el núcleo en régimen turbulento, se estudió en el trabajo de Levy (1966).

En cuanto al caso en el cual ambos fluidos se encuentran en régimen turbulento, se puede decir que ha sido ampliamente estudiado para flujo horizontal en diversos trabajos, entre los cuales destaca el de Hashizume y Ogiwara (1985), donde se obtiene una solución analítica al problema. Para flujo vertical, sucede lo contrario, pues son pocos los autores que tratan este caso, y además ninguno obtiene una solución analítica al problema. Entre estos trabajos se pueden mencionar los de Calvert y Williams (1955), Biasi (1968) y Abolfadl y Wallis (1986).

Debido a lo anteriormente expuesto, se ha planteado como finalidad de este Trabajo Especial de Grado desarrollar un modelo con solución analítica para flujo bifásico en patrón de flujo anular en tuberías verticales, considerando que ambos fluidos se encuentran en régimen turbulento y utilizando la teoría de longitud de mezcla de Prandtl para expresar los esfuerzos de Reynolds.

Para desarrollar este modelo, en primer lugar se aplicarán las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y cantidad de movimiento para cada una de las fases presentes en el sistema, luego se normalizarán y simplificarán dichas ecuaciones y finalmente serán resueltas utilizando condiciones de frontera adecuadas. La idea es obtener los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno de interés, así como los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad correspondientes a cada una de las fases, además de relaciones que permitan calcular la caída de presión y el espesor de la película conociendo los caudales, las propiedades físicas de ambos fluidos y la geometría de la tubería.

Se espera obtener un modelo que reproduzca adecuadamente los datos experimentales mejorando el error en comparación con otros modelos desarrollados para condiciones similares. Además, el modelo obtenido podrá ser utilizado como punto de partida para trabajos posteriores donde se analicen otros patrones de flujo similares o para estudios que incluyan los efectos de la transferencia de calor y la transferencia de masa.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Desarrollar un modelo que describa el comportamiento fluidodinámico del flujo bifásico en patrón de flujo anular, basado en la simplificación y solución de las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y la cantidad de movimiento lineal.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Establecer las ecuaciones fundamentales necesarias para describir el fenómeno y delimitar el modelo a desarrollar, clasificando de forma general el flujo a estudiar (flujo axisimétrico, estacionario).
2. Precisar el régimen de flujo en el que se encuentra cada fase y realizar estudios de orden de magnitud a la formulación matemática del fenómeno de interés, a fin de descartar términos poco importantes o despreciables.
3. Normalizar el modelo y establecer los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno.
4. Especificar las condiciones de frontera del problema y resolver el modelo planteado para geometría cilíndrica, utilizando un programa de cálculo simbólico por computadora.
5. Comparar los resultados arrojados por el modelo desarrollado con datos experimentales y/o numéricos seleccionados de la bibliografía abierta o literatura especializada, y con resultados obtenidos a partir de modelos desarrollados para condiciones similares.

1.4 ANTECEDENTES

El flujo bifásico en patrón de flujo anular ocurre en múltiples aplicaciones industriales, las cuales incluyen el flujo de refrigerantes en sistemas de refrigeración y aire acondicionado, el flujo de gas y crudo en la industria petrolera, el flujo de vapor en plantas termoeléctricas y diversos procesos de separación y de reacción en la industria química. En la actualidad existen diversas correlaciones empíricas que pueden ser utilizadas para describir este patrón de flujo, entre las cuales se puede mencionar la correlación de Lockhart y Martinelli desarrollada en 1949, la correlación de Dukler desarrollada en 1964, la correlación de Hagedorn y Brown desarrollada en 1965, la correlación de Beggs y Brill desarrollada en 1973 y más recientemente las correlaciones desarrolladas por García *et al.* (2003). Estas correlaciones permiten estimar la caída de presión y el holdup de líquido mediante cálculos simples, sin embargo, algunas fueron desarrolladas sin realizar un análisis dimensional riguroso, por lo que sólo pueden aplicarse con confianza en un rango de condiciones similares a aquellas bajo las cuales se recolectaron los datos experimentales (Shoham, 2006).

En cuanto a los modelos homogéneos, en general estos se pueden utilizar para describir cualquier patrón de flujo, siendo el más conocido el modelo homogéneo de Wallis que data de 1969. Sin embargo, para el patrón de flujo anular estos modelos arrojan predicciones inadecuadas (Crowe, 2006). Por otro lado, los modelos mecanicistas desarrollados para el patrón de flujo anular, permiten obtener una mejor descripción del fenómeno, ya que toman en cuenta la geometría característica del patrón de flujo y consideran el deslizamiento entre las fases, entre estos modelos se pueden destacar los desarrollados por Oliemans en 1986 y por Alves en 1991. La desventaja de estos modelos es que se complementan con correlaciones empíricas cuyo margen de aplicabilidad en algunas ocasiones es limitado (Crowe, 2006).

De manera adicional, para el patrón de flujo anular, se han desarrollado modelos basados en el análisis diferencial. Estos modelos se basan en la aplicación de las ecuaciones diferenciales de conservación a cada una de las fases por separado. Dependiendo de los regímenes de flujo presentes en el sistema se pueden tener cuatro posibles combinaciones: laminar-laminar, laminar-turbulento, turbulento-laminar y turbulento-turbulento.

Como se mencionó anteriormente, en el presente trabajo se va a estudiar el caso en el cual ambos fluidos se encuentran en régimen turbulento. De manera general los modelos desarrollados para este caso se pueden clasificar de acuerdo a la orientación de la tubería como modelos desarrollados para flujo horizontal y modelos desarrollados para flujo vertical. Entre los modelos desarrollados flujo horizontal se puede citar el de Hashizume y Ogiwara (1985), mientras que entre los modelos desarrollados para flujo vertical se pueden destacar los de Calvert y Williams (1955), Biasi (1968) y Abolfadl y Wallis (1986).

En general todos los modelos citados utilizan la teoría de la longitud de mezcla de Prandtl para expresar los esfuerzos de Reynolds, la diferencia entre uno y otro se encuentra en la expresión utilizada para la longitud de mezclado. Asimismo, para el caso del gas, estos modelos se basan en el hecho de que las subcapas laminar y amortiguada son despreciables, por lo que sólo toman en cuenta la corriente turbulenta principal; mientras que para el caso de la película de líquido, consideran la subcapa laminar y la corriente turbulenta principal.

El modelo de Hashizume y Ogiwara (1985) desarrollado para flujo horizontal tiene solución analítica, mientras que los modelos desarrollados para flujo vertical requieren de solución numérica, lo cual en algunos casos, ocasiona dificultades adicionales. Además algunos de estos modelos se elaboraron sin realizar la adimensionalización de las ecuaciones correspondientes, por lo que no es posible obtener los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno en estudio.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL FLUJO BIFÁSICO

2.1.1 FLUJO BIFÁSICO

El flujo multifásico es definido como el flujo simultáneo de numerosas fases. El flujo bifásico es el caso más simple del flujo multifásico. En general, el flujo bifásico se refiere al flujo simultáneo a través de una tubería o canal conductor de cualquiera de las siguientes combinaciones: gas-líquido, gas-sólido y líquido-sólido. La combinación gas-líquido es la más compleja, ya que combina las características de una interfase deformable y la compresibilidad de una de las fases. Esta combinación se encuentra en múltiples aplicaciones de la ingeniería, las cuales incluyen la industria petrolera, química, nuclear y geotérmica (Shoham, 2006).

En el caso particular de la industria petrolera, el flujo bifásico gas-líquido se da en el sistema completo de producción de petróleo, desde el reservorio de crudo y gas hasta las instalaciones de procesamiento en la superficie, por lo tanto se requieren métodos de diseño para determinar la caída de presión y el holdup de líquido, con el fin de dimensionar adecuadamente las tuberías y las instalaciones de separación. Por otro lado, en la industria química, el flujo bifásico gas-líquido se encuentra en diversas aplicaciones, tales como: reactores, calderas, condensadores, evaporadores y columnas de destilación. Para el diseño de dichas instalaciones se requieren métodos para predecir no solo la caída de presión y el holdup de líquido en tuberías, sino además los coeficientes de transferencia de calor y masa (Shoham, 2006).

Como se mencionó anteriormente, la necesidad de métodos de diseño para dichas aplicaciones, ha estimulado numerosas investigaciones que se han desarrollando desde la década de los cincuenta en un intento por entender el comportamiento del flujo bifásico. Cuando el interés está en la fluidodinámica, se hace énfasis principalmente en la determinación de parámetros tales como el patrón de flujo, la caída de presión en tuberías y el holdup de líquido (Shoham, 2006).

2.1.2 VARIABLES IMPORTANTES DEL FLUJO BIFÁSICO

Con la finalidad de describir mejor los fenómenos asociados al flujo bifásico a continuación se definen algunas variables importantes.

-Velocidad media: es la relación entre el caudal y el área ocupada por una determinada fase.

$$v_L = \frac{Q_L}{A_L} \quad v_G = \frac{Q_G}{A_G} \quad (2.1)$$

Donde:

v_L : Velocidad media de la fase líquida.

Q_L : Caudal de la fase líquida.

A_L : Área de la sección transversal de tubería ocupada por la fase líquida.

v_G : Velocidad media de la fase gaseosa.

Q_G : Caudal de la fase gaseosa.

A_G : Área de la sección transversal de tubería ocupada por la fase gaseosa.

-Velocidad superficial: es la velocidad media que tendría una fase si fluyera sola por la tubería.

$$v_{SL} = \frac{Q_L}{A_T} \quad v_{SG} = \frac{Q_G}{A_T} \quad (2.2)$$

Donde:

v_{SL} : Velocidad superficial de la fase líquida.

v_{SG} : Velocidad superficial de la fase gaseosa.

A_T : Área total de la sección transversal de tubería.

-Velocidad de deslizamiento: las velocidades medias de la fase líquida y gas generalmente son diferentes, por lo tanto la velocidad de deslizamiento representa la velocidad media relativa entre las dos fases.

$$v_S = v_G - v_L \quad (2.3)$$

Donde:

v_S : Velocidad de deslizamiento.

-Holdup de líquido y fracción vacía de gas: el holdup de líquido es la fracción de un elemento de volumen en un flujo bifásico (gas- líquido) ocupada por la fase líquida. De manera similar la fracción vacía de gas es la fracción de dicho elemento de volumen ocupada por la fase gaseosa. El holdup de líquido y la fracción vacía de gas también se pueden definir como relaciones entre las áreas ocupadas por cada fase y el área de la tubería (Shoham, 2006).

$$H_L = \frac{A_L}{A_T} \quad \alpha = \frac{A_G}{A_T} \quad H_L + \alpha = 1 \quad (2.4)$$

Donde:

H_L : Holdup de líquido.

α : Fracción vacía de gas.

-Velocidad media de la mezcla: es el flujo volumétrico total de ambas fases por unidad de área de tubería.

$$v_M = \frac{Q_L + Q_G}{A_T} \quad (2.5)$$

Donde:

v_M : Velocidad media de la mezcla.

- **Calidad:** es la relación entre el flujo másico de gas y el flujo másico total.

$$x_M = \frac{W_G}{W_L + W_G} \quad (2.6)$$

Donde:

x_M : Calidad de la mezcla.

W_L : Flujo másico de líquido.

W_G : Flujo másico de gas.

2.1.3 FENÓMENOS FUNDAMENTALES EN FLUJO BIFÁSICO

La fluidodinámica del flujo monofásico en tuberías es bien entendida en la actualidad, tanto la caída de presión como el comportamiento del flujo se pueden determinar de manera directa. Para el flujo bifásico en tuberías se presentan varias complicaciones adicionales en comparación con el caso del flujo monofásico (Shoham, 2006). Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo. En la figura N° 2.1 se muestra una tubería que transporta líquido y gas simultáneamente. El conjunto típico de condiciones de flujo conocidas incluye: los flujos másicos o volumétricos de gas y de líquido, las propiedades físicas de las dos fases y el diámetro y la inclinación de la tubería. Estos datos son suficientes para realizar los cálculos correspondientes en el caso del flujo monofásico, sin embargo, para sistemas de dos fases se requiere de información adicional sobre dos aspectos fundamentales: el deslizamiento entre las fases (el cual está relacionado con el holdup de líquido) y los patrones de flujo.

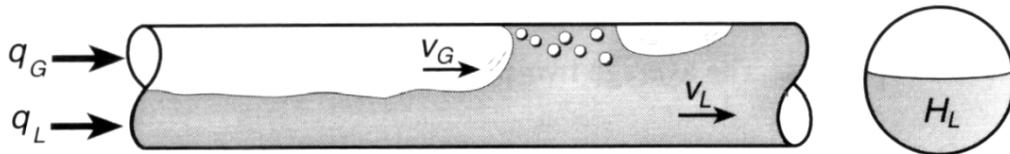


Figura N° 2.1. Flujo bifásico gas-líquido a través de una tubería (adaptado de Shoham, 2006).

2.1.3.1 Relación entre deslizamiento y holdup de líquido.

La relación entre el deslizamiento y el holdup se muestra esquemáticamente en la Figura 2.2. La condición de no deslizamiento se muestra en la figura N° 2.2 parte a, donde ambas fases viajan a la misma velocidad $v_L = v_G$. Bajo esta condición el holdup de líquido con deslizamiento H_L es igual al holdup de líquido sin deslizamiento λ_L .

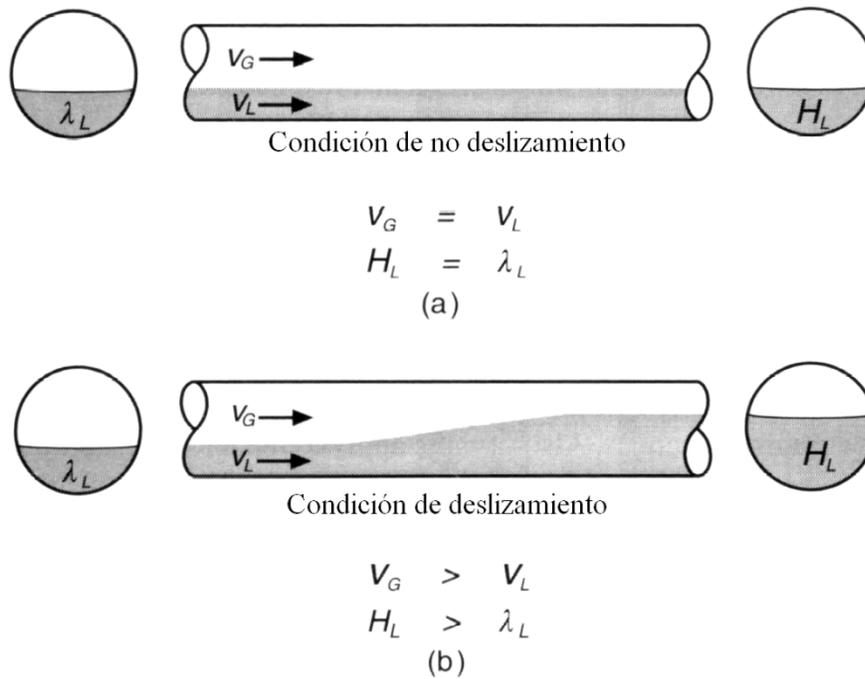


Figura N° 2.2. Relación entre deslizamiento y holdup de líquido (adaptado de Shoham, 2006).

Si no existe deslizamiento entre las fases a partir de la ecuación 2.3 se tiene:

$$v_S = 0 = v_G - v_L \Rightarrow v_L = v_G \quad (2.7)$$

Utilizando la definición dada en la ecuación 2.4 se obtiene:

$$H_L = \frac{A_L}{A} = \frac{\frac{Q_L}{v_L}}{\frac{Q_L}{v_L} + \frac{Q_G}{v_G}} = \frac{Q}{Q_L + Q_G} = \lambda_L \quad (2.8)$$

Donde:

λ_L : Holdup de líquido sin deslizamiento, o fracción volumétrica de líquido.

Físicamente para la condición de no deslizamiento ambas fases viajan a la misma velocidad y el holdup de líquido simplemente es igual a la relación entre el flujo volumétrico de líquido entre el flujo volumétrico total. La condición de no deslizamiento, ocurre por ejemplo, en un flujo homogéneo de burbujas dispersas con altos caudales de líquido y bajos caudales de gas. Bajo esta condición, la fase gaseosa se dispersa en pequeñas burbujas que viajan en una fase líquida continua. Debido al elevado flujo de líquido las burbujas son transportadas junto con el líquido a una misma velocidad, por lo tanto no existe deslizamiento en este caso (Alarcón, 1998).

Sin embargo, de manera general el gas y el líquido no viajan a la misma velocidad, por lo que tiene lugar el deslizamiento entre las fases. En base a consideraciones de continuidad, si la fase gaseosa se mueve más rápido que la fase líquida como se muestra en la figura N° 2.2 parte b, la sección transversal de la fase gaseosa se reduce, mientras que la sección transversal de la fase líquida aumenta. Esto resulta en una acumulación de líquido hacia la salida de la tubería y por lo tanto $H_L > \lambda_L$. En flujo hacia abajo con bajos caudales de gas la fase líquida puede moverse más rápido que la fase gaseosa debido a la gravedad, en este caso $H_L < \lambda_L$ (Alarcón, 1998).

2.1.3.2 Patrones de flujo.

La diferencia fundamental entre el flujo monofásico y el flujo bifásico es la existencia de los patrones de flujo. El patrón de flujo se refiere a la configuración geométrica de las fases dentro de la tubería. Cuando un gas y un líquido fluyen simultáneamente por la tubería las dos fases pueden distribuirse en una gran variedad de configuraciones de flujo. Las configuraciones de flujo difieren una de otra en la distribución espacial de la interfase, dando como resultado diferentes características de flujo (Alarcón, 1998).

El patrón de flujo existente en un sistema determinado depende de las siguientes variables: parámetros operacionales (caudales de gas y de líquido), variables geométricas (diámetro e inclinación de la tubería) y propiedades físicas de las dos fases (densidad, viscosidad, tensión interfacial) (Shoham, 2006).

En general los patrones de flujo se pueden agrupar de acuerdo a la inclinación de la tubería en: patrones en flujo horizontal, patrones en flujo vertical y patrones en flujo inclinado (Shoham, 2006). En la figura N° 2.3 se muestran los patrones de flujo existentes en flujo horizontal.

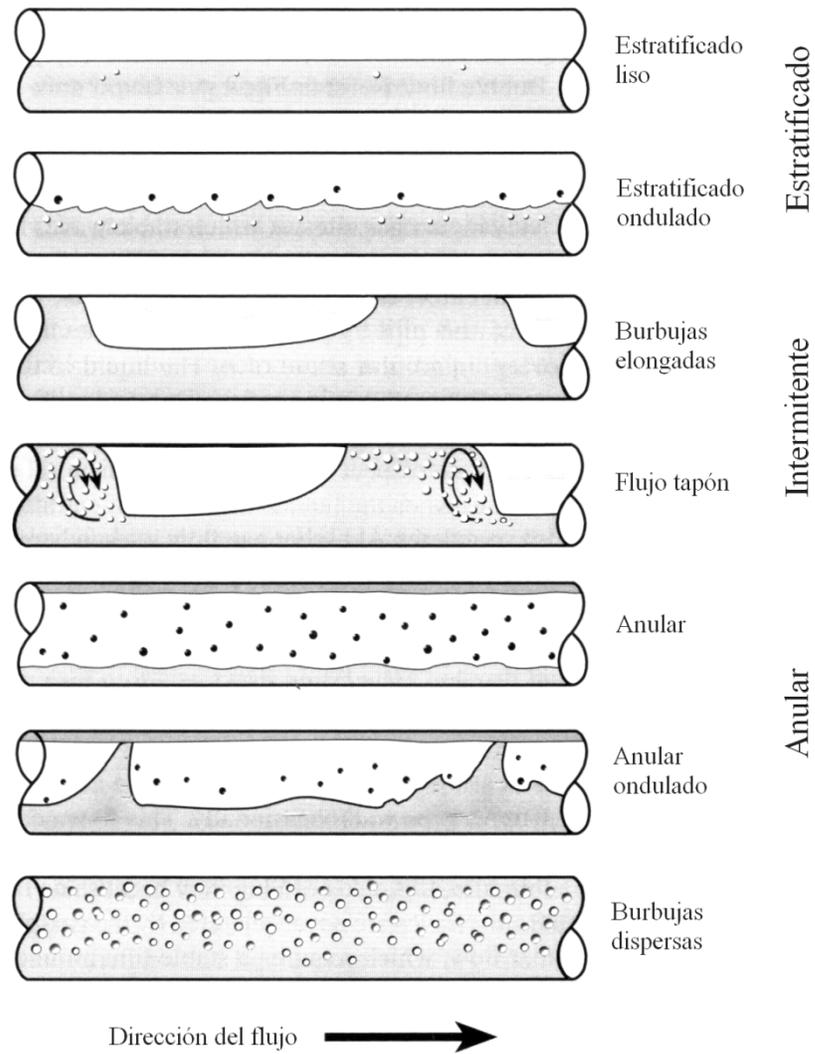


Figura N° 2.3. Patrones de flujo existentes en flujo horizontal (adaptado de Shoham, 2006).

A continuación en la figura N° 2.4 se muestran los patrones de flujo existentes en flujo vertical ascendente.

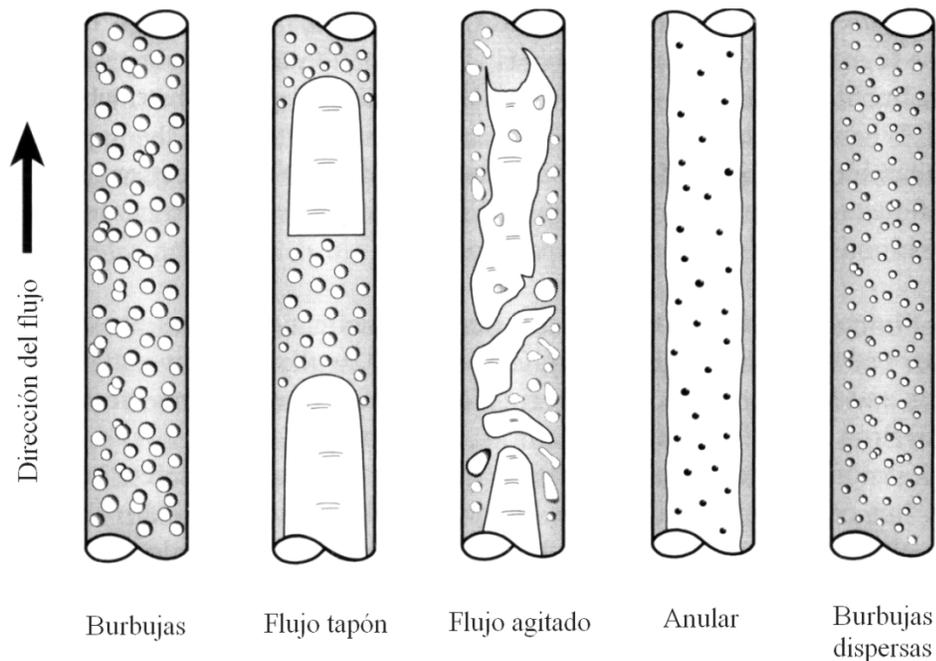


Figura N° 2.4. Patrones de flujo existentes en flujo vertical ascendente (adaptado de Shoham, 2006).

2.1.3.2.1 Patrones en flujo horizontal: los patrones de flujo existentes en esta configuración se pueden clasificar como flujo estratificado, flujo intermitente, flujo anular y flujo de burbujas dispersas (Shoham, 2006).

-Flujo estratificado: este patrón de flujo ocurre a bajos caudales de gas y líquido. Las dos fases están separadas por la gravedad, en este caso la fase líquida fluye en el fondo de la tubería, mientras que la fase gaseosa fluye en el tope. Este patrón de flujo se puede dividir en estratificado liso, donde la interfase gas-líquido es lisa, y en estratificado ondulado, el cual ocurre a caudales de gas mayores, y está caracterizado por la formación de olas estables en la interfase.

-Flujo intermitente: este patrón está caracterizado por un flujo alternado de líquido y gas. Tapones de líquido que llenan completamente el área transversal de la tubería, están separados por bolsas de gas, las cuales contienen una capa de líquido

estratificado fluyendo por el fondo de la tubería. Este patrón de flujo se puede dividir en flujo de burbujas elongadas y en flujo *slug* o tapón.

-Flujo anular: este patrón ocurre a caudales muy elevados de gas. La fase gaseosa fluye en un núcleo que va a alta velocidad, el cual puede contener pequeñas gotas de líquido que han sido arrastradas por el gas. El líquido fluye alrededor de la pared de la tubería en forma de una delgada película. La interfase es ondulada, en consecuencia el esfuerzo de corte interfacial es elevado. Generalmente la película de líquido es más gruesa en la parte inferior del tubo.

-Flujo de burbujas dispersas: a caudales muy elevados de líquido, la fase líquida es una fase continua en la cual la fase gaseosa se encuentra dispersa en forma de burbujas discretas. Debido a los elevados caudales de líquido, en este patrón de flujo ambas fases se mueven a la misma velocidad, por lo tanto no existe deslizamiento.

2.1.3.2.2 Patrones en flujo vertical ascendente: los patrones de flujo existentes para esta configuración son más simétricos respecto al eje de la tubería y están menos influenciados por la gravedad. En general se pueden clasificar como: flujo de burbujas, flujo *slug* o tapón de líquido, flujo agitado, flujo anular y flujo de burbujas dispersas (Shoham, 2006).

-Flujo de burbujas: en este patrón la fase gaseosa está distribuida en forma de pequeñas burbujas que se mueven hacia arriba inmersas en una fase líquida continua. Para flujo vertical la distribución de las burbujas a lo largo de la sección transversal de la tubería es aproximadamente homogénea. Este patrón ocurre a bajos caudales de gas, y está caracterizado por el deslizamiento entre el gas y el líquido.

-Flujo *slug* o tapón: este patrón de flujo es simétrico respecto al eje de la tubería. La mayor parte del gas se encuentra dentro de unas burbujas que tienen forma característica de proyectil o bala, denominadas “Burbujas de Taylor”. Estas burbujas

tienen un diámetro casi igual al diámetro de la tubería y están separadas de la pared de la misma por una delgada película de líquido. El flujo consiste en el paso sucesivo de burbujas de Taylor, seguidas por paquetes de líquido que usualmente contienen pequeñas burbujas de gas.

-Flujo agitado: este patrón de flujo está caracterizado por un movimiento oscilatorio de la fase líquida. Es similar al flujo tapón, pero es más caótico, ocurre a mayores caudales de gas, donde los paquetes de líquido son impactados por el gas y luego se rompen, como consecuencia las burbujas de Taylor se distorsionan y ocurre la agitación.

-Flujo anular: al igual que en el caso horizontal, este patrón de flujo está caracterizado por un núcleo central de gas que se mueve rápidamente arrastrando pequeñas gotas de líquido, y una delgada película de líquido que fluye lentamente alrededor de la pared de la tubería. La estructura interfacial puede ser ondulada, como resultado de esto el esfuerzo de corte interfacial es elevado. Para flujo vertical el espesor de la película de líquido que fluye alrededor de la pared de la tubería es aproximadamente uniforme.

-Flujo de burbujas dispersas: de manera similar al caso horizontal, este patrón ocurre a caudales muy elevados de líquido. Bajo estas condiciones, la fase gaseosa se encuentra dispersa en forma de burbujas discretas dentro de una fase líquida continua. Para este patrón la fase líquida dominante transporta las burbujas y en consecuencia no existe deslizamiento entre las fases.

2.1.3.2.3 Patrones en flujo inclinado: en este caso con una inclinación hacia abajo existe una tendencia hacia el flujo estratificado, mientras que con una inclinación hacia arriba el patrón dominante es el flujo *slug* o tapón (Shoham, 2006).

2.1.3.2.4 Determinación de los patrones de flujo.

La determinación de los patrones de flujo es un problema fundamental en el estudio del flujo bifásico, pues las variables de diseño tales como caída de presión y el holdup de líquido, dependen considerablemente del patrón de flujo existente en el sistema. El enfoque inicial para determinar los patrones de flujo fue empírico. La determinación de los patrones de flujo se llevaba a cabo visualmente y los datos eran representados en gráficas bidimensionales denominadas mapas de patrones de flujo. En muchos casos, las coordenadas eran escogidas arbitrariamente, sin un fundamento teórico. En consecuencia, estos mapas eran precisos sólo en un rango de condiciones similares a aquellas bajo las cuales se recolectaron los datos experimentales (Shoham, 2006). Entre estos mapas se puede citar el desarrollado por Baker en 1954, el cual se muestra en la figura N° 2.5, donde G_L y G_G son las velocidades másicas de líquido y gas respectivamente, y λ y ψ son factores de corrección que dependen de las propiedades de los fluidos. Otro mapa de patrones de flujo importante, es el desarrollado por Hewitt y Roberts en 1969, el cual se muestra en la figura N° 2.6.

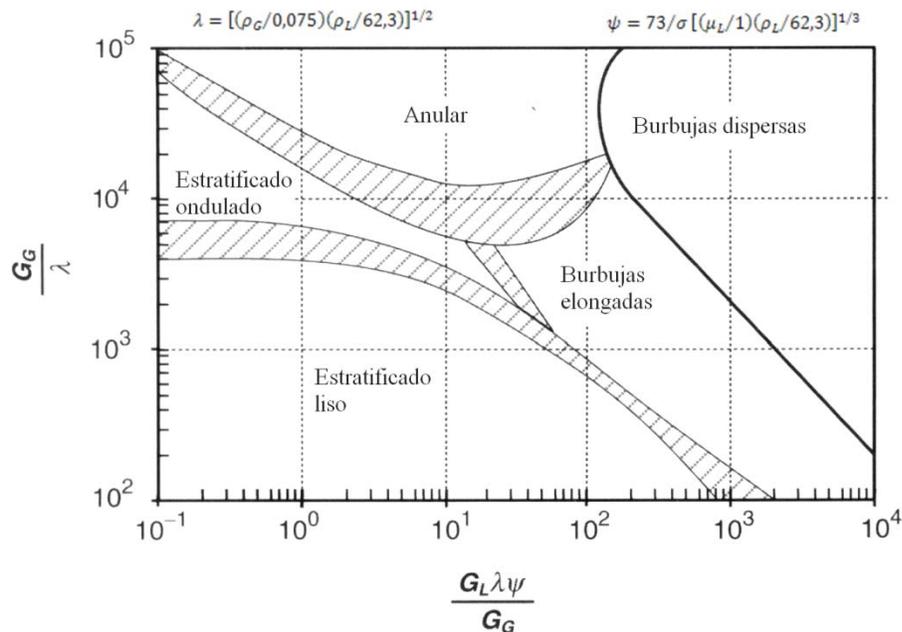


Figura N° 2.5. Mapa de patrones de flujo para tuberías horizontales desarrollado por Baker en 1954 (adaptado de Shoham, 2006).

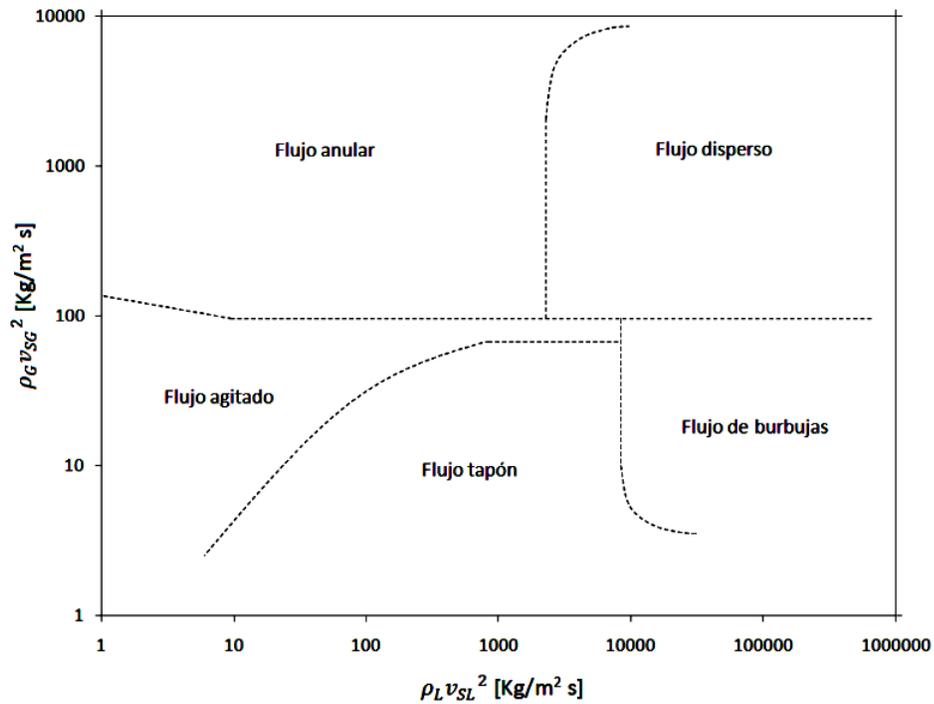


Figura N° 2.6. Mapa de patrones de flujo para tuberías verticales desarrollado por Hewitt y Roberts en 1969 (adaptado de Brennen, 2003).

Otro enfoque para determinar los patrones de flujo es el uso de modelos mecanicistas elaborados para tal fin. Estos modelos están basados en los mecanismos físicos que determinan la transición entre los diferentes patrones de flujo. Una vez que los mecanismos de transición son determinados se desarrollan modelos matemáticos y expresiones analíticas para los límites de la transición (Crowe, 2006). Entre los modelos mecanicistas elaborados con la finalidad de determinar los patrones de flujo, se encuentra el desarrollado por Taitel y Dukler en 1976 para tuberías horizontales y el desarrollado por Taitel en 1980 para tuberías verticales (Shoham, 2006).

2.1.4 CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DEL PATRÓN DE FLUJO ANULAR

Como se mencionó anteriormente, el patrón de flujo anular ocurre a caudales muy elevados de gas. La fase gaseosa se mueve rápidamente en el centro de la tubería (núcleo de gas), mientras que la fase líquida fluye en forma de una película anular alrededor de la pared de la tubería (Shoham, 2006).

Para flujo vertical el espesor de la película es aproximadamente uniforme, mientras que para flujo horizontal, debido al efecto de la gravedad, el espesor de la película en el fondo de la tubería es mayor que en el tope. Varios fenómenos importantes están asociados con el patrón de flujo anular:

-La existencia de un elevado esfuerzo de corte interfacial, causado por las altas velocidades de gas (Shoham, 2006).

-La presencia de un proceso de arrastre de pequeñas gotas de líquido por parte del gas, las cuales contribuyen a reducir la intensidad de la turbulencia en el gas (Wallis, 1969).

-La formación de olas interfaciales, debido a las altas velocidades de gas. En consecuencia la interfase tiende a ser ondulada (Shoham, 2006).

Entonces para desarrollar modelos que puedan predecir el comportamiento de este patrón de flujo, es importante tomar en cuenta dichos aspectos (Shoham, 2006).

2.2 MÉTODOS DE ANÁLISIS UTILIZADOS PARA ABORDAR LOS PROBLEMAS DE FLUIDODINÁMICA

En general para abordar los problemas de fluidodinámica existen tres vías, las cuales se numeran a continuación (White, 2004):

1. Análisis diferencial, aplicado a un elemento de fluido infinitesimal.
2. Análisis integral, aplicado a un volumen de control arbitrario.
3. Análisis basado en estudios experimentales, científicamente este enfoque se fundamenta en el análisis dimensional.

2.2.1 ANÁLISIS DIFERENCIAL

En el análisis diferencial los principios básicos de conservación se aplican a un elemento de fluido infinitesimal o lo que es equivalente a un volumen de control de tamaño diferencial. En el caso de un problema fluidodinámico, el flujo a estudiar debe satisfacer dos leyes de conservación básicas: la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Al aplicar estas leyes de conservación a un elemento de fluido infinitesimal se obtiene la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma diferencial.

2.2.1.1 Ecuación de continuidad en forma diferencial.

La ecuación de continuidad se obtiene al realizar un balance de materia sobre un elemento de volumen diferencial, fijo en el espacio, a través del cual circula un fluido. Esta ecuación puede escribirse convenientemente usando notación vectorial de la siguiente manera (Bird *et al.*, 2006):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad (2.9)$$

Donde:

$\frac{\partial \rho}{\partial t}$: Velocidad de incremento de materia por unidad de volumen.

$(\nabla \cdot \rho \mathbf{v})$: Velocidad neta de adición de materia por unidad de volumen.

Una forma especial muy importante de la ecuación de continuidad es aquella para un fluido de densidad constante (fluido incompresible), para el que la ecuación 2.9 asume la siguiente forma:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (2.10)$$

2.2.1.2 Ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma diferencial.

Esta ecuación se obtiene al realizar un balance de cantidad de movimiento lineal sobre un elemento de fluido de volumen diferencial. Al expresar esta ecuación en forma vectorial se obtiene (Bird *et al.*, 2006):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.11)$$

Donde:

$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$: Derivada sustancial o derivada siguiendo el movimiento del fluido (aceleración).

∇p : Gradiente del escalar p (fuerza de presión por unidad de volumen).

$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$: Velocidad de adición de cantidad de movimiento por transporte molecular (fuerza viscosa por unidad de volumen).

$\rho \mathbf{g}$: Fuerza externa por unidad de volumen (gravedad).

En la ecuación anterior el término $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de esfuerzos, que para coordenadas cartesianas esta dado por:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Para un fluido newtoniano e incompresible los esfuerzos de corte se pueden expresar utilizando una generalización de la ley de Newton para la viscosidad:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} & \tau_{yy} &= -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} & \tau_{zz} &= -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cuando la compresibilidad del fluido es muy significativa las ecuaciones anteriores contienen un término adicional con la finalidad de compensar este efecto (White, 2004).

2.2.1.3 Flujo turbulento.

Mientras que el flujo laminar es ordenado, el flujo turbulento es caótico. Esta naturaleza caótica del flujo turbulento plantea dificultades adicionales. Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo. Considérese un flujo turbulento en un tubo al que se le impone un gradiente de presión constante. Si en un punto del fluido se observa una componente de la velocidad en función del tiempo, se encuentra que está fluctuando de manera caótica como se muestra en la figura N° 2.7. Las fluctuaciones son desviaciones irregulares respecto a un valor medio. La velocidad real puede considerarse como la suma de un valor medio (designado por una sobrebarra) y la fluctuación (designada por una prima). Por ejemplo, para la componente z de la velocidad se escribe:

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad (2.14)$$

Para el sistema en cuestión la cantidad \bar{v}_z se denomina velocidad con ajuste de tiempo. Cuando la velocidad con ajuste de tiempo no depende del tiempo, se habla de un flujo turbulento impulsado de manera estable.

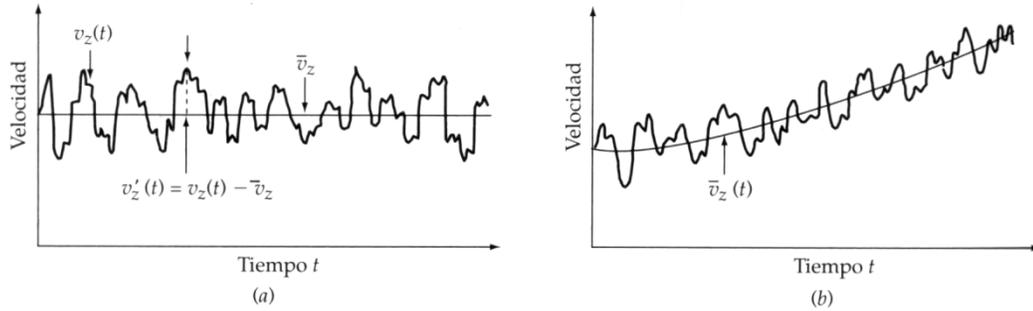


Figura N° 2.7. Velocidad con respecto al tiempo a) para flujo turbulento impulsado de manera estable donde \bar{v}_z no depende del tiempo y b) para una situación en la que \bar{v}_z depende del tiempo (Bird *et al.*, 2006).

En general las ecuaciones 2.10 y 2.11 pueden ser reescritas utilizando la definición de las cantidades con ajuste de tiempo $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ y $p = \bar{p} + p'$. Luego de realizar la sustitución anterior y reordenar las ecuaciones se obtiene (Bird *et al.*, 2006):

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.15)$$

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)})] + \rho \mathbf{g} \quad (2.16)$$

De lo anterior se puede observar que la ecuación de continuidad es la misma que se tenía, excepto que ahora \mathbf{v} ha sido reemplazada por $\bar{\mathbf{v}}$. En cuanto a la ecuación de cantidad de movimiento se tiene a $\bar{\mathbf{v}}$ y \bar{p} donde previamente se tenían \mathbf{v} y p . La diferencia ahora es que el tensor de esfuerzos $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}$ se descompone en dos partes: un primer término $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(v)}$ que representa la densidad de flujo de cantidad de movimiento viscoso con ajuste de tiempo y que se puede definir utilizando las ecuaciones 2.12 y 2.13 reemplazando la velocidad por la velocidad con ajuste de

tiempo; y un segundo término $\bar{\tau}^{(t)}$ que describe el transporte de la cantidad de movimiento asociado con las fluctuaciones turbulentas. Este término se puede expresar como (Bird *et al.*, 2006):

$$\overline{\tau_{xx}}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_x} \quad \overline{\tau_{xy}}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_y} \quad \overline{\tau_{xz}}^{(t)} = \overline{\rho v'_x v'_z}, \text{ y así sucesivamente} \quad (2.17)$$

Las cantidades anteriores suelen denominarse como los *esfuerzos de Reynolds*. Los esfuerzos de Reynolds $\bar{\tau}^{(t)}_{ij}$ no están relacionados con los gradientes de velocidad de una forma simple, como sucede con los esfuerzos viscosos con ajuste de tiempo $\bar{\tau}^{(v)}_{ij}$. En vez de ello, son funciones complejas de la posición y la intensidad de la turbulencia. Para resolver los problemas de flujo turbulento es necesario contar con información experimental sobre los esfuerzos de Reynolds o bien, modelarlos mediante algún tipo de empirismo basado en mediciones experimentales. Uno de estos modelos es el que se deriva de la teoría de longitud de mezcla de Prandtl (Bird *et al.*, 2006).

Siguiendo el procedimiento descrito anteriormente también es posible obtener ecuaciones de variación para los esfuerzos de Reynolds. Sin embargo estas ecuaciones contienen cantidades como $\overline{v'_i v'_j v'_k}$. De manera semejante, las ecuaciones de variación para $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ contienen la siguiente correlación de orden superior $\overline{v'_i v'_j v'_k v'_l}$, y así sucesivamente. Para resolver problemas de flujo debe truncarse esta jerarquía mediante la introducción de empirismos. Si se usan estos para los esfuerzos de Reynolds entonces se tiene una teoría de primer orden, como la teoría de longitud de mezcla de Prandtl. Si se introducen empirismos para $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ entonces se tiene una teoría de segundo orden, y así sucesivamente (Bird *et al.*, 2006). Generalmente los modelos de segundo orden y de orden superior se utilizan en mecánica de fluidos computacional con la finalidad de obtener soluciones numéricas. Un modelo de segundo orden ampliamente utilizado en mecánica de fluidos computacional es el empirismo $k - \varepsilon$ (Versteeg, 1995).

2.2.1.3.1 Teoría de longitud de mezcla de Prandtl.

Suponiendo que en flujo turbulento los remolinos se mueven de manera bastante parecida a como las moléculas se desplazan en un gas de baja densidad, Prandtl desarrolló una expresión para los esfuerzos de Reynolds (Bird *et al.*, 2006):

$$\overline{\tau}_{yx}^{(t)} = -\rho l \left| \frac{d\overline{v}_x}{dy} \right| \frac{d\overline{v}_x}{dy} \quad (2.18)$$

Donde l es la longitud de mezcla que en el caso de la turbulencia en la pared viene dada por la expresión:

$$l = k_1 y \quad (2.19)$$

Donde y es la distancia a la pared y k_1 es una constante adimensional que se determina mediante experimentos. Para flujo turbulento en tubos, un valor típico de k_1 es 0,4 (Bird *et al.*, 2006). Otra expresión común para la longitud de mezclado en el caso de tuberías es la siguiente (Schlichting, 1979):

$$l = R \left[0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right] \quad (2.20)$$

Donde:

R : Radio de la tubería.

2.2.1.3.2 Regiones de flujo para describir el flujo turbulento cerca de una pared.

En el flujo turbulento de un fluido cerca de una pared se pueden distinguir tres regiones distintas: una subcapa laminar cerca de la pared donde la viscosidad juega un papel clave, una subcapa amortiguadora donde la viscosidad juega un papel menor, y una corriente turbulenta principal donde la viscosidad carece de importancia y el esfuerzo de corte depende en mayor medida de la contribución de los esfuerzos de Reynolds (Bird *et al.*, 2006). En la figura N° 2.8 se muestra una representación gráfica de dichas regiones de flujo.

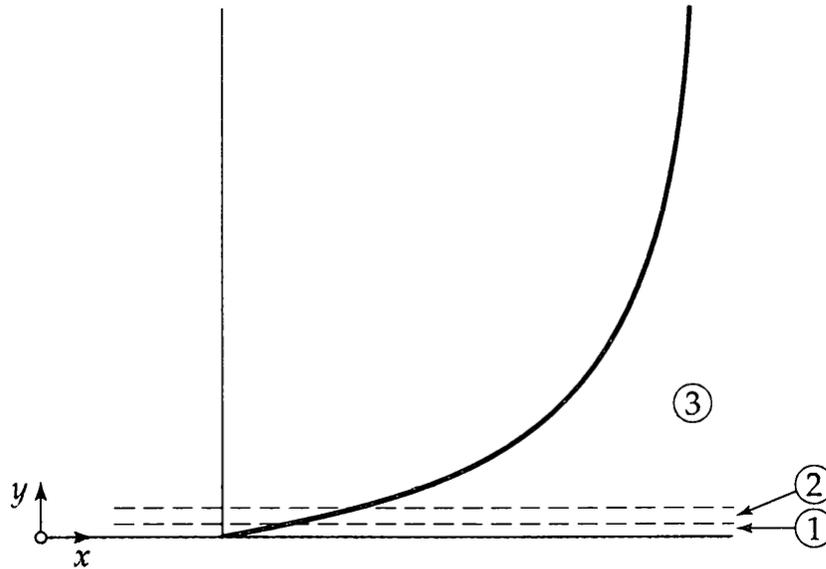


Figura N° 2.8. Regiones de flujo para describir el flujo turbulento cerca de una pared: (1) subcapa laminar, (2) subcapa amortiguadora, (3) corriente turbulenta principal (adaptado de Bird *et al.*, 2006).

En general se ha encontrado que para flujo turbulento en tuberías las regiones de flujo mencionadas anteriormente se pueden delimitar de la siguiente manera (Bird *et al.*, 2006):

Subcapa laminar:	$0 < y^+ < 5$	
Subcapa amortiguadora:	$5 < y^+ < 30$	(2.21)
Corriente turbulenta principal:	$y^+ > 30$	

Donde y^+ viene dada por la siguiente expresión:

$$y^+ = \frac{y\rho\sqrt{\tau_w/\rho}}{\mu} \quad (2.22)$$

Siendo τ_w el esfuerzo de corte en la pared de la tubería.

2.2.2 ANÁLISIS INTEGRAL

En el análisis integral los principios básicos de conservación se aplican a un volumen de control arbitrario. Como se mencionó anteriormente, en el caso de un problema fluidodinámico, el flujo a estudiar debe satisfacer dos leyes de conservación básicas: la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Aplicando estos principios de conservación a un volumen de control de tamaño arbitrario se obtiene la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma integral. Cuando estas ecuaciones se escriben para un volumen de control macroscópico y se hacen ciertas suposiciones, se obtienen los balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento lineal (Bird *et al.*, 2006).

2.2.2.1 Ecuación de continuidad en forma integral.

Al aplicar la ley de la conservación de la masa a un volumen de control de tamaño arbitrario se obtiene la siguiente expresión (Welty, 1999):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV + \int_{S.C} \rho(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA = 0 \quad (2.23)$$

Donde:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C} \rho dV \quad \text{Rapidez de acumulación de masa dentro del volumen de control.}$$

$$\int_{S.C} \rho(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \quad \text{Flujo neto de masa, hacia fuera, a través de la superficie de control.}$$

2.2.2.2 Ecuación de cantidad de movimiento lineal en forma integral.

Esta ecuación se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton del movimiento o lo que es equivalente el principio de la conservación de la cantidad de movimiento a un volumen de control general (Welty, 1999):

$$\Sigma \mathbf{F} = \int_{s.c} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c} \rho \mathbf{v} dV \quad (2.24)$$

Donde:

$\Sigma \mathbf{F}$: Fuerza total que actúa sobre el volumen de control.

$\int_{s.c} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA$ Emisión neta de cantidad de movimiento desde el volumen de control.

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{v.c} \rho \mathbf{v} dV$ Rapidez de acumulación de cantidad de movimiento dentro del volumen de control.

La ecuación 2.24 es una ecuación vectorial y con frecuencia se conoce como el teorema del momentum. La fuerza total que actúa sobre el volumen de control comprende tanto las fuerzas superficiales debidas a las interacciones entre el fluido en el volumen de control y su entorno (fuerzas de presión, esfuerzos de corte), y las fuerzas en el cuerpo que aparecen al ubicar el volumen de control en un campo de fuerzas. El campo gravitacional y su fuerza resultante son el ejemplo más común de este último tipo (Welty, 1999).

Se puede demostrar utilizando procedimientos del cálculo vectorial que las ecuaciones 2.23 y 2.24 son equivalentes a las ecuaciones 2.9 y 2.11. Además, las ecuaciones de conservación en forma integral se pueden deducir a partir de las ecuaciones de conservación en forma diferencial presentadas en la sección anterior, y viceversa (Welty, 1999).

2.2.2.3 Balances macroscópicos.

Cuando las ecuaciones 2.23 y 2.24 se escriben para un volumen de control macroscópico y se hacen ciertas suposiciones, se obtienen los balances macroscópicos de materia y cantidad de movimiento lineal.

2.2.2.3.1 Balance macroscópico de materia.

Considérese un volumen de control macroscópico donde el fluido entra al plano A con sección transversal A_A y sale por el plano B con sección transversal A_B . La velocidad media es $\langle v_A \rangle$ en el plano de entrada y $\langle v_B \rangle$ en el plano de salida. Ahora se van a hacer dos suposiciones poco restrictivas las cuales son: i) en los planos A y B la velocidad es perpendicular a la sección transversal relevante, y ii) en los planos A y B la densidad es uniforme sobre la sección transversal. Entonces, la ecuación 2.23 se puede escribir para este volumen de control de la siguiente forma (Bird *et al.*, 2006):

$$\frac{dm_{\text{tot}}}{dt} = \rho_A \langle v_A \rangle A_A - \rho_B \langle v_B \rangle A_B \quad (2.25)$$

En este caso m_{tot} es la masa total de fluido contenido entre los planos A y B . Introduciendo el símbolo $W = \rho \langle v \rangle A$ para el flujo másico y la notación $\Delta W = W_B - W_A$, la ecuación 2.25 se convierte en:

$$\frac{dm_{\text{tot}}}{dt} = -\Delta W \quad (2.26)$$

2.2.2.3.2 Balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.

Ahora se toma en cuenta el mismo volumen de control macroscópico definido en la sección anterior y se usan dos suposiciones adicionales a las realizadas anteriormente las cuales son: iii) las fuerzas relacionadas con el tensor de esfuerzo se desprecian en los planos A y B , ya que por regla general son pequeñas en

comparación con las fuerzas de presión en los planos de entrada y salida, y iv) la presión no varía sobre la sección transversal en los planos de entrada y salida. Entonces, la ecuación 2.24 se puede escribir para este volumen de control de la siguiente manera (Bird *et al.*, 2006):

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{total}}}{dt} = \rho_A \langle v_A^2 \rangle A_A \hat{\mathbf{u}}_A - \rho_B \langle v_B^2 \rangle A_B \hat{\mathbf{u}}_B + p_A A_A \hat{\mathbf{u}}_A - p_B A_B \hat{\mathbf{u}}_B - \mathbf{F}_{f \rightarrow s} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} \quad (2.27)$$

Donde $\mathbf{P}_{\text{total}}$ es la cantidad de movimiento total en el sistema. Al igual que la ecuación 2.24 la ecuación 2.27 es una ecuación vectorial por lo tanto se usan los vectores unitarios $\hat{\mathbf{u}}_A$ y $\hat{\mathbf{u}}_B$ para representar la dirección del flujo en los planos A y B . Al introducir los símbolos para la velocidad de flujo másico y el símbolo Δ (valor de salida menos valor de entrada) la ecuación 2.27 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{total}}}{dt} = -\Delta \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle} W + pA \right) \hat{\mathbf{u}} + m_{\text{tot}} \mathbf{g} - \mathbf{F}_{f \rightarrow s} \quad (2.28)$$

El término $\mathbf{F}_{f \rightarrow s}$ es la fuerza que aplica el fluido sobre las superficies sólidas. La magnitud de esta fuerza $F_{f \rightarrow s}$ se puede relacionar con el factor de fricción utilizando la siguiente definición (Bird *et al.*, 2006):

$$F_{f \rightarrow s} = A_C K f \quad (2.29)$$

Donde:

A_C : Área característica.

K : Energía cinética por unidad de volumen.

f : Constante de proporcionalidad denominada factor de fricción de Fanning.

Para tuberías circulares de diámetro d y longitud L , el área característica se puede expresar como $A_C = \pi dL$, mientras que la energía cinética por unidad de

volumen viene dada por $\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2$, entonces f se puede definir mediante la siguiente expresión (Bird *et al.*, 2006):

$$f = \frac{F_{f \rightarrow s}}{(\pi dL) \left(\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 \right)} \quad (2.30)$$

De manera adicional, utilizando la definición del esfuerzo de corte en la pared $\tau_w = F_{f \rightarrow s} / \pi dL$, la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2} \quad (2.31)$$

Es importante destacar que las ecuaciones 2.25 y 2.27 también se pueden deducir directamente aplicando las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento lineal a un volumen de control macroscópico, sin necesidad de partir de las ecuaciones 2.23 y 2.24 (Welty, 1999).

2.2.2.3.3 Las formas d de los balances macroscópicos.

Para estado estacionario una forma útil de escribir los balances macroscópicos presentados en la sección anterior es suponer que los planos A y B están separados por una distancia diferencial dL , al hacer esto se obtienen “las formas d ” de los balances macroscópicos. Las formas d a menudo son útiles para problemas que implican flujo en conductos donde la velocidad, la temperatura, la densidad o el área de la sección transversal cambian continuamente en la dirección del flujo (Bird *et al.*, 2006).

2.2.2.3.3.1 La forma d del balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.

En la figura N° 2.9 se muestra un segmento de tubería de longitud ΔL , diámetro d , inclinación θ y área de sección transversal A_T , por donde circula un fluido cuyo flujo másico es W .

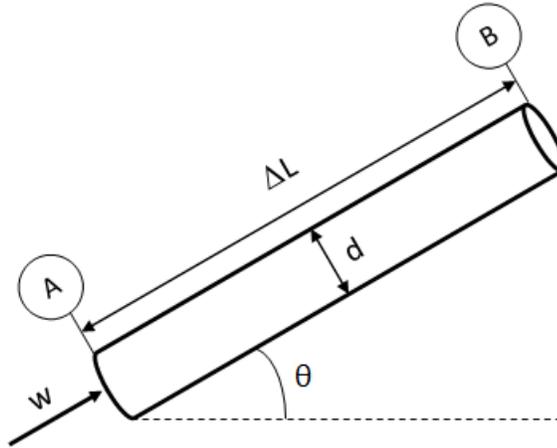


Figura N° 2.9. Volumen de control utilizado para deducir la forma d del balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal.

Aplicando la ecuación 2.28 en estado estacionario a dicho segmento de tubería, utilizando la definición dada en la ecuación 2.30 y suponiendo que $\langle v^2 \rangle / \langle v \rangle = \langle v \rangle = v$ (lo cual es una buena aproximación para régimen turbulento) se tiene (Bird *et al.*, 2006):

$$f(\pi d \Delta L) \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\Delta(vW + pA_T) + m_{\text{tot}} g \sin \theta \quad (2.32)$$

Definiendo $m_{\text{tot}} = \rho A_T \Delta L$ y reordenando la ecuación anterior se tiene:

$$-\frac{\Delta p}{\Delta L} = f \frac{\pi d \rho v^2}{A_T} + \rho g \sin \theta + \frac{W \Delta v}{A_T \Delta L} \quad (2.33)$$

Finalmente tomando el límite cuando $\Delta L \rightarrow dL$ se obtiene la forma d del balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal:

$$-\frac{dp}{dL} = f \frac{\pi d \rho v^2}{A_T 2} + \rho g \sin \theta + \frac{W}{A_T} \frac{dv}{dL} \quad (2.34)$$

2.2.3 ANÁLISIS BASADO EN ESTUDIOS EXPERIMENTALES

Este método de análisis consiste en el desarrollo de correlaciones empíricas a partir de datos experimentales. Científicamente, este enfoque debería estar basado en el análisis dimensional, dando como resultado correlaciones aplicables a una amplia variedad de condiciones. El análisis dimensional se define como un procedimiento que consiste en agrupar las variables en una situación determinada en parámetros adimensionales que son menos numerosos que las variables originales. Entre los métodos en los que se fundamenta el análisis dimensional, se encuentra el conocido teorema Pi de Buckingham (White, 2004).

En general, el análisis dimensional es muy útil en el trabajo experimental, en donde el número mismo de variables significativas presenta un trabajo de correlación considerable. Al combinar las variables en un número más pequeño de parámetros adimensionales disminuye considerablemente el trabajo de reducción de los datos experimentales. Otra ventaja del análisis dimensional, es que se basa en el principio de homogeneidad dimensional, por lo que las ecuaciones obtenidas aplicando este procedimiento son dimensionalmente homogéneas (Welty, 1999).

Entonces, el procedimiento a aplicar para desarrollar una correlación empírica es el siguiente: en primer lugar se realiza un análisis dimensional para el fenómeno en estudio con la finalidad de obtener los parámetros adimensionales que lo caracterizan, luego se obtienen un conjunto de datos a partir de una serie de experimentos y posteriormente estos datos experimentales se correlacionan utilizando los parámetros adimensionales definidos inicialmente (White, 2004). Un ejemplo de una correlación desarrollada utilizando análisis dimensional es la fórmula de Blasius empleada en flujo turbulento para determinar el factor de fricción en función del número de Reynolds ($Re = \rho v d / \mu$) para tuberías lisas (Bird *et al.*, 2006):

$$f = \frac{0,0791}{Re^{1/4}} \quad (2.35)$$

No obstante, en ingeniería, hay ciertas correlaciones empíricas que han sido desarrolladas sin realizar un análisis dimensional. Por lo tanto, estas correlaciones tienen un margen de aplicabilidad muy limitado, pues pueden utilizarse con confianza en un rango de condiciones similares a aquellas bajo las cuales se recolectaron los datos experimentales. Un ejemplo de este tipo de correlaciones es la fórmula de Manning para flujo en canales abiertos (White, 2004).

2.3 ENFOQUES UTILIZADOS PARA ESTUDIAR LOS PROBLEMAS DE FLUJO BIFÁSICO

Como se mencionó anteriormente, la necesidad de métodos de diseño para las aplicaciones industriales es lo que ha estimulado las investigaciones que se han desarrollado en los últimos cincuenta años en un intento por entender el comportamiento del flujo bifásico. Los enfoques utilizados para estudiar los problemas de flujo bifásico se basan en los métodos de análisis mencionados en la sección anterior. En general, estos enfoques se han fundamentado en la utilización de los modelos homogéneos, las correlaciones empíricas, los modelos mecanicistas y los modelos basados en el análisis diferencial.

2.3.1 MODELOS HOMOGÉNEOS

Los modelos homogéneos constituyen uno de los primeros intentos para describir el flujo bifásico. En general, estos modelos se caracterizan por suponer que el flujo es casi homogéneo y, por tanto, se le asignan propiedades promedio a la mezcla. Entonces se realizan balances macroscópicos de materia y de cantidad de movimiento donde se utilizan la velocidad y las propiedades físicas promedio de la mezcla. Luego en el balance macroscópico de cantidad de movimiento el esfuerzo de corte en la pared se relaciona con un factor de fricción de la mezcla, que se determina mediante una correlación empírica utilizando un número de Reynolds de la mezcla.

La mayoría de los modelos homogéneos consideran el flujo como una mezcla homogénea en donde las fases se mueven a la misma velocidad a través de tuberías de diámetros específicos, por tanto no consideran la presencia de patrones de flujo. Algunos si toman en cuenta el deslizamiento entre las fases; por consiguiente, estos modelos proponen una correlación para determinar la fracción de líquido con deslizamiento o holdup de líquido. Sin embargo para estos modelos se requiere

información adicional sobre el movimiento relativo de las dos fases, la cual no siempre está disponible (Shoham, 2006).

En general los modelos homogéneos funcionan adecuadamente en un número limitado de aplicaciones y para ciertos patrones de flujo. Por ejemplo, los modelos homogéneos son aplicables al patrón de burbujas dispersas, donde la fase gaseosa se encuentra dispersa en forma de burbujas discretas dentro de una fase líquida continua y por lo tanto no existe deslizamiento entre las fases. Entre los modelos homogéneos más conocidos se puede citar el desarrollado por Wallis en 1969 (Crowe, 2006). Este modelo se presenta con detalle en el apéndice A.

2.3.2 CORRELACIONES EMPÍRICAS

Luego de la aparición de los modelos homogéneos, el estudio del flujo bifásico evolucionó significativamente. Se comenzó a considerar la mezcla como no homogénea y se reconoció que existe una diferencia apreciable entre las velocidades de las fases. Estas últimas son las características esenciales de las denominadas correlaciones empíricas generalizadas (Crowe, 2006).

Las correlaciones empíricas son aquellas en las que sus autores proponen una serie de ajustes de datos experimentales para correlacionar una variable determinada. Estas correlaciones pueden considerar tanto el deslizamiento entre las fases como la existencia de patrones de flujo; por tanto, requieren de métodos para determinar el patrón de flujo presente. Una vez que se ha determinado el patrón de flujo correspondiente a unas condiciones dadas, se determina la correlación apropiada para el cálculo de la caída de presión como la fracción volumétrica de líquido con deslizamiento o holdup de líquido. Estas correlaciones, generalmente, son distintas dependiendo del patrón de flujo (Shoham, 2006).

Una de las correlaciones empíricas más conocidas es la de Lockhart y Martinelli que data de 1949, la cual fue desarrollada para flujo horizontal. Esta correlación considera el deslizamiento entre las fases, aunque no toma en cuenta la existencia de los patrones de flujo. Incluyendo el efecto de las fuerzas de gravedad se puede utilizar para estimar la caída de presión en flujo vertical. Otra correlación importante es la de Beggs y Brill desarrollada en 1973. Esta correlación toma en cuenta tanto el deslizamiento entre las fases como la existencia de los patrones de flujo. En general, es aplicable para flujo horizontal, vertical e inclinado. Sin embargo, no se recomienda para flujo vertical ascendente, ya que para este caso no predice adecuadamente la caída de presión (Shoham, 2006). La correlación de Lockhart y Martinelli se presenta con detalle en el apéndice B.

Entre las correlaciones que toman en cuenta el deslizamiento entre las fases también se pueden citar la correlación de Dukler desarrollada en 1964 para flujo horizontal y la correlación de Hagedorn y Brown desarrollada en 1965 para flujo vertical ascendente (Crowe, 2006). Más recientemente García F. y sus colaboradores (2003) elaboraron un conjunto de correlaciones para flujo bifásico gas-líquido en tuberías horizontales. Por un lado, desarrollaron una correlación universal para determinar el factor de fricción de manera independiente del patrón de flujo, utilizando un número de Reynolds de mezcla, y por el otro lado, elaboraron correlaciones para el factor de fricción de manera individual para cada uno de los patrones de flujo observados en flujo horizontal (burbujas dispersas, flujo tapón, anular, estratificado).

2.3.3 MODELOS MECANICISTAS

En las últimas dos décadas, para el modelado del flujo bifásico, se desarrollaron los denominados modelos mecanicistas. Un postulado fundamental en el modelado mecanicista del flujo bifásico a través de una tubería, es la existencia de varias configuraciones espaciales de las fases o patrones de flujo. Por lo tanto, el

primer objetivo de este tipo de modelado es determinar el patrón de flujo existente para unas condiciones dadas. Para ello se determinan los mecanismos físicos que describen la transición entre los diferentes patrones de flujo. Una vez que los mecanismos de transición son determinados se desarrollan modelos matemáticos (basados en balances de fuerzas) y expresiones analíticas para los límites de la transición. En base a estas expresiones, se establecen esquemas de cálculo que permiten determinar el patrón de flujo existente como una función del diámetro e inclinación de la tubería, y de los caudales y propiedades físicas de ambas fases (Crowe, 2006).

El segundo objetivo de este tipo de modelado, es formular modelos separados para cada uno de los posibles patrones de flujo. Estos modelos se basan en la realización de balances macroscópicos de materia y de cantidad de movimiento para cada una de las fases presentes en la tubería, tomando en cuenta la geometría característica del patrón de flujo que se está estudiando. Dependiendo del patrón de flujo que se esté analizando, en estos balances existen ciertos parámetros que deben ser determinados utilizando correlaciones empíricas. Por ejemplo, para el patrón de flujo anular el esfuerzo de corte en la pared se relaciona con un factor de fricción de pared, mientras que de manera similar el esfuerzo de corte interfacial se relaciona con un factor de fricción interfacial. Estos factores de fricción deben ser determinados mediante correlaciones empíricas desarrolladas para tal fin.

Diversos modelos mecanicistas han sido elaborados con la finalidad de determinar los patrones de flujo. Entre estos modelos se puede destacar el desarrollado por Taitel y Dukler en 1976 para tuberías horizontales y el elaborado por Taitel en 1980 para tuberías verticales (Shoham, 2006).

Por otro lado, entre los modelos mecanicistas desarrollados por separado para cada uno de los patrones de flujo se pueden destacar los siguientes: el modelo de Taitel y Dukler desarrollado en 1976 para flujo estratificado, el modelo de Dukler y

Hubbard desarrollado en 1975 para flujo tapón y los modelos de Oliemans (1986) y Alves (1991) desarrollados para flujo vertical ascendente en patrón de flujo anular. El modelo de Alves se desarrolla con detalle en el apéndice C.

2.3.4 MODELOS BASADOS EN EL ANÁLISIS DIFERENCIAL

Un enfoque diferente a los descritos anteriormente es desarrollar modelos basados en el análisis diferencial para el modelado del flujo bifásico. Estos modelos se basan en la aplicación de las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa y la cantidad de movimiento lineal a cada una de las fases presentes en la tubería, posteriormente estas ecuaciones se simplifican eliminando términos poco importantes y finalmente se resuelven utilizando condiciones de contorno adecuadas.

En general, son pocos los casos que se pueden tratar utilizando modelos basados en el análisis diferencial, debido a la complejidad del flujo y de la estructura interfacial. El patrón de flujo anular es uno de los pocos casos que se ha estudiado utilizando este enfoque, así como el patrón de flujo estratificado.

La ventaja de los modelos basados en el análisis diferencial es que permiten obtener más información sobre el fenómeno de interés, ya que no sólo se limitan a ofrecer ecuaciones para calcular la caída de presión en tuberías o el holdup de líquido, sino que suministran información sobre los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad de cada una de las fases, la cual es útil a la hora de estudiar los efectos de transferencia de calor y masa. Asimismo al adimensionalizar las ecuaciones obtenidas a partir del análisis diferencial es posible obtener de una forma simple los parámetros adimensionales que describen el fenómeno en estudio.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA GENERAL

3.1 METODOLOGÍA GENERAL

En esta sección se presenta la metodología que se empleó a fin de alcanzar los objetivos planteados en este Trabajo Especial de Grado. A fin de ilustrar de una manera más clara la metodología utilizada en la figura N° 3.1 se muestra un esquema del problema a resolver en coordenadas cilíndricas. En general, para el patrón de flujo anular se pueden considerar dos regiones: una película adyacente a la pared que fluye por la sección anular (fase 2) y un núcleo central que fluye dentro del ánulo (fase 1). La fase 1 se encuentra dentro de la región delimitada entre $r = 0$ y $r = R_1$, mientras que la fase 2 comprende la región delimitada entre $r = R_1$ y $r = R_2$. La película formada por la fase 2 tiene un espesor igual a $\delta = R_2 - R_1$.

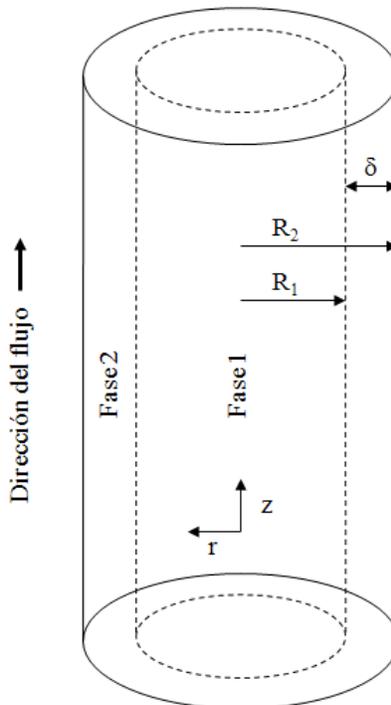


Figura N° 3.1. Esquema del patrón de flujo anular en coordenadas cilíndricas.

A continuación se presenta la metodología empleada con la finalidad de resolver el problema planteado:

1. Se precisaron los principios fundamentales que se deben aplicar para describir el sistema en estudio. En este caso el interés está en la fluidodinámica, por lo que el flujo a estudiar debe satisfacer dos leyes de conservación de los fenómenos de transporte: la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento. Entonces, estos principios de conservación se aplicaron por separado a cada una de las fases.

2. Se clasificó de manera genérica el fenómeno a estudiar, de tal manera de obtener una primera simplificación de la formulación matemática inicial. Para ello se tomaron en cuenta las siguientes suposiciones:

-Flujo axisimétrico.

-Flujo estacionario.

-Flujo completamente desarrollado para cada una de las fases.

-Flujo isotérmico.

-Flujo incompresible.

3. Se establecieron los regímenes de flujo presentes en el sistema, así como las regiones de flujo a considerar para cada fase.

4. Se realizó la formulación matemática utilizando las ecuaciones de conservación en su forma diferencial. Para ello las ecuaciones presentadas en la sección 2.2.1. se aplicaron por separado a cada una de las fases. Se utilizó la teoría de longitud de mezcla de Prandtl para expresar los esfuerzos de Reynolds.

5. Se realizaron estudios de orden de magnitud a la formulación matemática del fenómeno de interés, a fin de descartar términos poco importantes o despreciables.

6. Se normalizó el modelo matemático, de ello se obtuvo un modelo simplificado y ajustado al fenómeno, además de los parámetros físicos y los números adimensionales involucrados.
7. Se especificaron las condiciones de frontera del problema para $r = 0$, $r = R_1$ y $r = R_2$.
8. Se resolvieron las ecuaciones diferenciales correspondientes al modelo planteado utilizando las condiciones de frontera especificadas anteriormente. Se utilizó el programa de cálculo simbólico por computadora Maxima 5.14 (software libre). Una vez resueltas las ecuaciones diferenciales se obtuvieron los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad correspondientes a cada una de las fases, además de relaciones para calcular la caída de presión y el espesor de la película conociendo los caudales, las propiedades físicas de ambos fluidos y la geometría de la tubería.
9. Se compararon los resultados arrojados por el modelo desarrollado con datos experimentales y/o numéricos seleccionados de la bibliografía abierta o literatura especializada.
10. Finalmente se compararon los resultados arrojados por el modelo desarrollado con los resultados obtenidos al utilizar algunos de los modelos homogéneos, correlaciones empíricas y modelos mecanicistas más empleados en flujo bifásico.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 FORMULACIÓN DEL MODELO

4.1.1 CLASIFICACIÓN GENÉRICA DEL FENÓMENO A ESTUDIAR

En la figura N° 4.1 se muestra un esquema del flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular ascendente en una tubería vertical. Este es un patrón de flujo segregado ya que las dos fases fluyen separadas por una superficie de contacto que es la interfase (Crowe, 2006). La delgada película de líquido fluye adyacente a la pared de la tubería, mientras que el gas fluye por el centro. En algunos casos el gas puede arrastrar pequeñas gotas de líquido. Además debido a las altas velocidades de gas la interfase puede ser ondulada (Shoham, 2006).

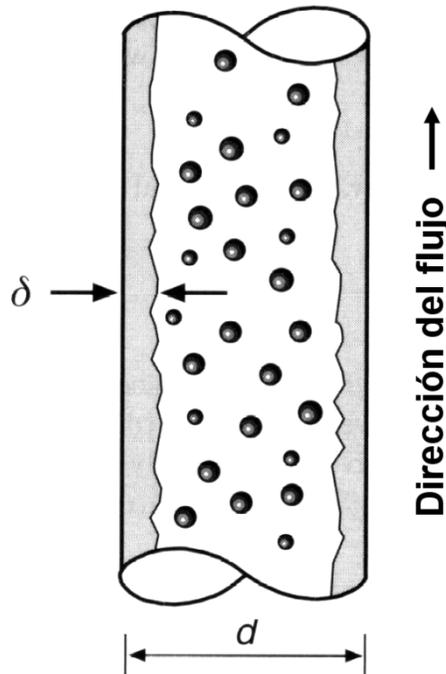


Figura N° 4.1. Esquema del flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular (adaptado de Shoham 2006).

A continuación se presentan las consideraciones que se tomaron en cuenta a fin de elaborar el modelo:

1. El modelo se desarrolló considerando que el flujo es isotérmico.
2. Se consideró que los cambios de densidad tanto para el líquido, como para el gas son despreciables. Para el líquido esto es válido, pues este es incompresible. En cuanto al gas la densidad es función de la presión y como los cambios de presión no son significativos en un segmento corto de tubería, se puede suponer que la densidad del gas varía poco. En el caso de tener un segmento largo de tubería, con cambios significativos de presión, dicho segmento puede dividirse en varios tramos más pequeños y para cada tramo se puede utilizar una densidad promedio para el gas.
3. Se consideró que el flujo es axisimétrico, lo cual es válido en este caso, ya que para flujo vertical, el espesor de la película de líquido es aproximadamente uniforme.
4. Se determinó que en la dirección del flujo el efecto de las ondulaciones y de la tensión interfacial es importante a nivel local, pero no de manera global (Ver apéndice E). Por lo tanto el modelo se desarrolló suponiendo que interfase entre ambos fluidos es plana y lisa y utilizando un espesor de película promedio.
5. El efecto del arrastre de pequeñas gotas de líquido por parte del gas se tomó en cuenta modificando la expresión correspondiente a la longitud de mezclado del gas, tal como se recomienda en el trabajo de Abolfadl y Wallis (1986).
6. El modelo se elaboró para tuberías lisas.

4.1.2 REGÍMENES DE FLUJO

El modelo desarrollado parte de la suposición de que tanto el gas como el líquido se encuentran en régimen turbulento. Por lo tanto, antes de comenzar con la

formulación matemática del modelo, fue necesario especificar los siguientes aspectos: el criterio de turbulencia para el líquido, el modelo de turbulencia a utilizar y las regiones de flujo a considerar para cada fase.

4.1.2.1 Criterio de turbulencia para el líquido.

Como se mencionó anteriormente el modelo desarrollado parte de la suposición de que ambas fases se encuentran en régimen turbulento. Esta suposición generalmente es cierta para la fase gaseosa ya que el flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular se da para velocidades muy elevadas de gas (Shoham, 2006). Sin embargo para la fase líquida esta suposición no siempre se cumple, ya que esta se puede encontrar en régimen laminar o turbulento dependiendo del caudal y de las propiedades físicas del líquido. En consecuencia, fue necesario establecer un criterio para definir la transición entre estos dos regímenes de flujo para el caso de la película de líquido.

En flujo monofásico en tuberías el criterio que permite definir la transición entre el régimen laminar y el régimen turbulento es el valor del número de Reynolds Re , definido de la siguiente manera:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \quad (4.1)$$

Si $Re < 2300$ el flujo es laminar, si $2300 < Re < 4000$ el flujo está en una zona de transición y si $Re > 4000$ el flujo es turbulento (White, 2004). Para el caso de la película de líquido se puede emplear un criterio similar para definir la transición.

En el presente trabajo se utilizó el criterio establecido por Calvert y Williams (1955), quienes utilizando como longitud característica el diámetro hidráulico de la película, definieron un número de Reynolds del líquido Re_L de la siguiente manera:

$$Re_L = \frac{\rho_L v_L^2 (R_2 - R_1)}{\mu_L} \quad (4.2)$$

Donde:

R_1 : Radio correspondiente a la fase gaseosa.

R_2 : Radio de la tubería.

Luego de varios experimentos encontraron que la película de líquido se vuelve turbulenta cuando dicho número de Reynolds se acerca a un valor crítico de 1000. Sin embargo, es importante destacar que a diferencia del caso monofásico, este no es un criterio generalizado, ya que puede variar dependiendo del autor y de la experiencia.

4.1.2.2 Modelo de turbulencia.

Debido a que el modelo desarrollado parte de la suposición de que ambas fases se encuentran en régimen turbulento es necesario contar con una teoría adecuada para expresar los esfuerzos de Reynolds. En el presente trabajo se utilizó la teoría de longitud de mezcla de Prandtl para expresar los esfuerzos de Reynolds. A pesar de que en la actualidad existen modelos de turbulencia más sofisticados, la teoría de Prandtl sigue siendo muy útil en casos donde el interés está en obtener soluciones analíticas, mientras los modelos de turbulencia más sofisticados o de orden superior se utilizan en aquellos casos donde el interés está en obtener soluciones numéricas, específicamente en problemas de mecánica de fluidos computacional.

A fin de resolver el modelo es necesario contar con expresiones para la longitud de mezclado para cada una de las fases. En la sección 2.2.1.3.1 se mencionó que las expresiones de longitud de mezclado más comunes para flujo turbulento monofásico son las siguientes:

$$l = ky \quad (2.19)$$

$$l = R \left[0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^4 \right] \quad (2.20)$$

Donde y es la distancia desde la pared, que en el caso de una tubería se puede expresar como $y = R - r$. Cualquiera de las dos expresiones mostradas anteriormente se puede emplear para este caso. En el presente trabajo se utilizó una expresión similar a la ecuación 2.19, ya que dicha expresión es lineal y permite obtener una forma más simple de los perfiles de velocidad correspondientes a cada fase. Sin embargo, al usar una expresión polinómica, como la 2.20 el modelo sigue teniendo solución analítica, aunque el tamaño de las ecuaciones correspondientes a los perfiles de velocidad aumenta considerablemente. Asimismo los resultados obtenidos al utilizar una ecuación similar a la 2.19 son muy parecidos a los resultados obtenidos al utilizar una expresión polinómica como la 2.20 (Abolfadl y Wallis, 1986).

Como para cada una de las fases se emplea una ecuación similar a la 2.19, entonces se puede escribir:

$$l_G = k_G(R_2 - r) \quad (4.3)$$

$$l_L = k_L(R_2 - r) \quad (4.4)$$

Donde k_L y k_G son las constantes correspondientes a líquido y al gas respectivamente. El valor de la constante k_L para el líquido es el mismo que en el caso del flujo monofásico, es decir, $k_L = 0,4$. En cuanto al gas se presenta una complicación adicional, pues en ocasiones este puede arrastrar pequeñas gotas de líquido, las cuales pueden reducir la intensidad de la turbulencia, en consecuencia el valor de la constante k_G puede ser menor que en el caso monofásico (Abolfadl y Wallis, 1986). De manera general k_G es una función de la fracción de líquido arrastrada por el gas (f_E). Sin embargo, no siempre se dispone de datos correspondientes al arrastre, por lo que es preferible utilizar un valor promedio de la

constante k_G . Biasi (1968) consiguió que un valor promedio de dicha constante que reproduce adecuadamente una gran variedad de datos experimentales es 0,2. En el presente trabajo se utilizó el valor de k_G propuesto por Biasi (1968).

4.1.2.3 Regiones de flujo consideradas para cada fase.

Como se mencionó en la sección 2.2.1.3.2 en el flujo turbulento de un fluido a través de una tubería se pueden distinguir tres regiones distintas: una subcapa laminar cerca de la pared donde la viscosidad juega un papel clave, una subcapa amortiguadora donde la viscosidad juega un papel menor, y una corriente turbulenta principal donde la viscosidad carece de importancia y el esfuerzo de corte depende en mayor medida de la contribución de los esfuerzos de Reynolds. Esta clasificación se puede aplicar por separado a cada fase para el flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular, entonces de manera genérica cada fase estaría dividida en tres regiones. Sin embargo en el presente trabajo se hicieron las siguientes suposiciones:

-En cuanto a la fase gaseosa se consideró que las subcapas laminar y amortiguadora son despreciables y que la corriente turbulenta principal comienza a partir de la interfase. Esto es válido ya que en la interfase el gas tiene una velocidad lo suficientemente elevada para que el flujo sea completamente turbulento, por lo tanto las subcapas laminar y amortiguadora, son despreciables.

-En cuanto a la fase líquida, se despreció la subcapa amortiguadora y sólo se consideraron dos regiones: una subcapa laminar adyacente a la pared y una corriente turbulenta principal que se extiende desde el final de la subcapa laminar hasta la interfase.

Las suposiciones enumeradas anteriormente también fueron utilizadas en los trabajos de Biasi (1968), Hashizume y Ogiwara (1985) y Abolfadl y Wallis (1986) con la finalidad de simplificar la formulación matemática correspondiente.

Al considerar una subcapa laminar en la película de líquido se hace necesario contar con una expresión para definir el espesor de la misma. En la sección 2.2.1.3.2 se mencionó que para flujo monofásico la subcapa laminar comprende la región delimitada entre $0 \leq y^+ \leq 5$, donde y^+ se define de la siguiente manera:

$$y^+ = \frac{\rho \sqrt{\tau_w / \rho} y}{\mu} \quad (2.22)$$

Al hacer $y^+ = 5$ y $y = e$ es posible despejar el espesor de la subcapa laminar:

$$e = \frac{5\mu}{\rho \sqrt{\tau_w / \rho}} \quad (4.5)$$

Donde:

e : Espesor de la subcapa laminar.

Utilizando un procedimiento similar al anterior se obtuvo el espesor de la subcapa laminar de la película de líquido:

$$c = \frac{\mu_L N}{\rho_L \sqrt{\tau_w / \rho_L}} \quad (4.6)$$

Donde:

c : Espesor de la subcapa de la película de líquido.

N : Constante adimensional.

En este caso se despreció la subcapa amortiguadora de la película de líquido, por lo que se hace necesario extender la subcapa laminar con la finalidad de compensar el error que se puede generar a partir de dicha suposición, en consecuencia la constante N debe ser mayor que 5. En este trabajo se utilizó un valor de N igual a 11, ya que es el valor que permitió reproducir de mejor manera los datos experimentales disponibles. Es necesario destacar que en los trabajos de Biasi (1968), Hashizume (1985) y Abolfadl y Wallis (1986) los autores utilizan un procedimiento similar para definir el espesor de la subcapa laminar, empleando un valor de N que varía entre 7 y 12.

4.1.3 FORMULACIÓN MATEMÁTICA

En la figura N° 4.2 se presenta una descripción de las regiones de flujo consideradas en el modelo desarrollado. La región I delimitada entre $r = 0$ y $r = R_1$ corresponde a la corriente turbulenta principal de la fase gaseosa, la región II delimitada entre $r = R_1$ y $r = R_2 - c$ corresponde a la corriente turbulenta principal de la fase líquida y la región III delimitada entre $r = R_2 - c$ y $r = R_2$ corresponde a la subcapa laminar de la fase líquida. La película formada por la fase líquida tiene un espesor igual a $\delta = R_2 - R_1$, mientras que el espesor de la subcapa laminar de la fase líquida es igual a c .

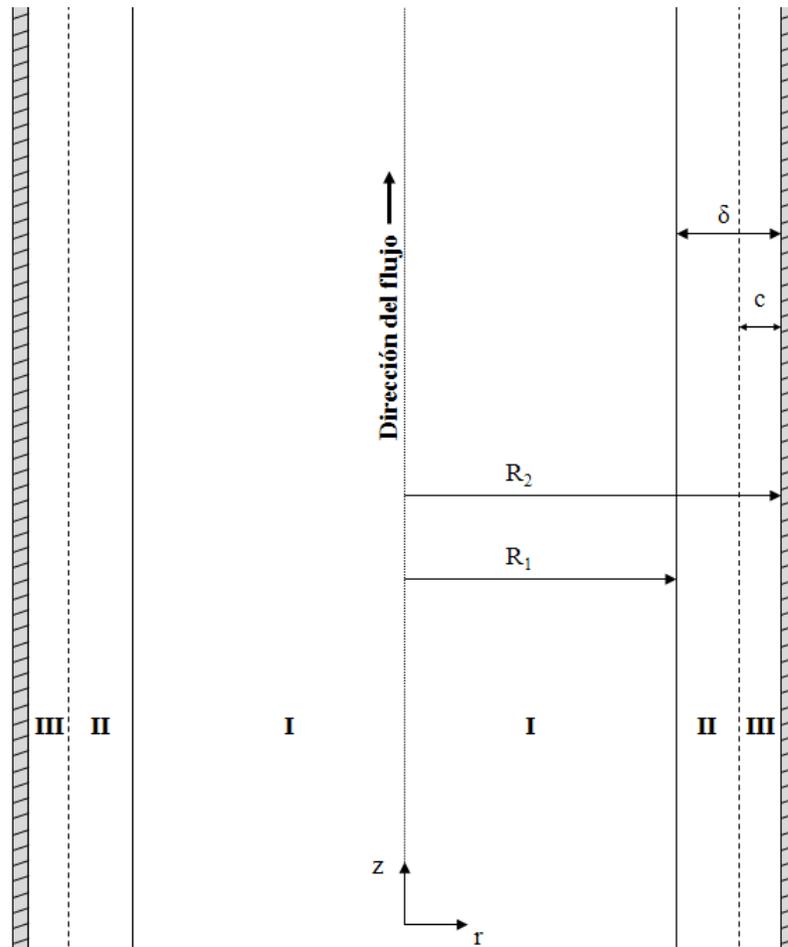


Figura N° 4.2. Regiones consideradas en el modelo desarrollado.

En el presente trabajo el interés está en la fluidodinámica, por lo que el flujo a estudiar debe satisfacer dos leyes de conservación de los fenómenos de transporte: la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento, además de condiciones de frontera apropiadas.

Entonces, aplicando las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento por separado a cada una de las regiones delimitadas en la figura N° 4.2 se obtiene:

-Región I, $0 \leq r \leq R_1$:

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_I) = 0 \quad (4.7)$$

$$\rho_G \frac{D\bar{\mathbf{v}}_I}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_I^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_I^{(t)})] + \rho_G \mathbf{g} \quad (4.8)$$

-Región II, $R_1 \leq r \leq R_2 - c$:

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_{II}) = 0 \quad (4.9)$$

$$\rho_L \frac{D\bar{\mathbf{v}}_{II}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{II}^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{II}^{(t)})] + \rho_L \mathbf{g} \quad (4.10)$$

-Región III, $R_2 - c \leq r \leq R_2$:

$$(\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}_{III}) = 0 \quad (4.11)$$

$$\rho_L \frac{D\bar{\mathbf{v}}_{III}}{Dt} = -\nabla \bar{p} - [\nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}}_{III}^{(v)} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{III}^{(t)})] + \rho_L \mathbf{g} \quad (4.12)$$

Con la finalidad de simplificar la formulación matemática inicial es necesario añadir las siguientes suposiciones:

1. Flujo estacionario, es decir, independiente del tiempo.

2. Flujo completamente desarrollado para cada una de las fases, es decir, los perfiles de esfuerzo cortante y de velocidad depende sólo de r y no varían con θ y z .

3. En las regiones I y II la viscosidad carece de importancia y el esfuerzo de corte depende en mayor medida de la contribución de los esfuerzos de Reynolds, por lo tanto los esfuerzos viscosos son despreciables.

4. En la región III sucede lo contrario, la viscosidad juega un papel clave, mientras que la contribución de los esfuerzos de Reynolds es menor, en consecuencia estos son despreciables en esta región.

Al aplicar las suposiciones mencionadas anteriormente las ecuaciones 4.7 a 4.12 se simplifican de la siguiente manera:

-Región I, $0 \leq r \leq R_1$:

$$\frac{\partial \bar{v}_{zI}}{\partial z} = 0 \quad \text{Continuidad} \quad (4.13)$$

$$\rho_G \bar{v}_{zI} \frac{\partial \bar{v}_{zI}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\tau}_{rzI}^{(t)}) - \rho_G g \quad \text{Movimiento en } z \quad (4.14)$$

-Región II, $R_1 \leq r \leq R_2 - c$:

$$\frac{\partial \bar{v}_{zII}}{\partial z} = 0 \quad \text{Continuidad} \quad (4.15)$$

$$\rho_L \bar{v}_{zII} \frac{\partial \bar{v}_{zII}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\tau}_{rzII}^{(t)}) - \rho_L g \quad \text{Movimiento en } z \quad (4.16)$$

-Región III, $R_2 - c \leq r \leq R_2$:

$$\frac{\partial \bar{v}_{zIII}}{\partial z} = 0 \quad \text{Continuidad} \quad (4.17)$$

$$\rho_L \bar{v}_{zIII} \frac{\partial \bar{v}_{zIII}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\tau}_{rzIII}^{(v)}) - \rho_L g \quad \text{Movimiento en } z \quad (4.18)$$

A partir de este punto con la finalidad de simplificar la notación de variables se introduce el siguiente cambio:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{zI} &= v_{zI} & \bar{v}_{zII} &= v_{zII} & \bar{v}_{zIII} &= v_{zIII} \\
\bar{\tau}_{rzI}^{(t)} &= \tau_{rzI} & \bar{\tau}_{rzII}^{(t)} &= \tau_{rzII} & \bar{\tau}_{rzIII}^{(v)} &= \tau_{rzIII} \\
-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} &= \frac{\Delta P}{L}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Al introducir el cambio de notación mencionado anteriormente, luego combinando la ecuación de continuidad con la ecuación de cantidad de movimiento para cada una de las fases, utilizando la ley de viscosidad de Newton para expresar los esfuerzos viscosos y empleando la teoría de longitud de mezcla de Prandtl para expresar los esfuerzos de Reynolds, se obtienen las ecuaciones diferenciales que conforman el modelo:

-Región I, $0 \leq r \leq R_1$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzI}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_G g \tag{4.20}$$

$$\tau_{rzI} = \rho_G [k_G (R - r)]^2 \left(\frac{dv_{zI}}{dr} \right)^2 \tag{4.21}$$

-Región II, $R_1 \leq r \leq R_2 - c$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \tag{4.22}$$

$$\tau_{rzII} = \rho_L [k_L (R - r)]^2 \left(\frac{dv_{zII}}{dr} \right)^2 \tag{4.23}$$

-Región III, $R_2 - c \leq r \leq R_2$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzIII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \tag{4.24}$$

$$\tau_{rzIII} = -\mu_L \frac{dv_{zIII}}{dr} \tag{4.25}$$

Donde el espesor de la subcapa laminar c , viene dado por la siguiente expresión:

$$c = \frac{\mu_L N}{\sqrt{\rho_L \tau_{rzIII}(r = R_2)}} \quad (4.26)$$

Las ecuaciones 4.20 a 4.25 constituyen un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias con seis constantes de integración, por lo que se requiere especificar seis condiciones de frontera para su solución. Dichas condiciones de frontera o condiciones límite se enumeran a continuación:

C.L. 1	En $r = 0$	$\tau_{rzI} = \text{finito}$
C.L. 2	En $r = R_1$	$\tau_{rzI} = \tau_{rzII}$
C.L. 3	En $r = R_1$	$v_{zI} = v_{zII}$
C.L. 4	En $r = R_2 - c$	$\tau_{rzII} = \tau_{rzIII}$
C.L. 5	En $r = R_2 - c$	$v_{zII} = v_{zIII}$
C.L. 6	En $r = R_2$	$v_{zIII} = 0$

Para el caso de interés los datos conocidos son los caudales de gas y líquido, estos pueden relacionarse con el gradiente de presión ($\Delta P/L$) y el radio correspondiente a la fase gaseosa (R_1) al integrar los perfiles de velocidad. Las expresiones de los caudales para el gas y el líquido se presentan a continuación:

-Para la fase gaseosa, $0 \leq r \leq R_1$:

$$Q_G = 2\pi \int_0^{R_1} v_{zI}(r) r dr \quad (4.27)$$

-Para la película de líquido, $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$Q_L = 2\pi \int_{R_1}^{R_2-c} v_{zII}(r) r dr + 2\pi \int_{R_2-c}^{R_2} v_{zIII}(r) r dr \quad (4.28)$$

Una vez obtenidos los perfiles de velocidad estos se pueden introducir en las ecuaciones 4.27 y 4.28 a fin de obtener expresiones integradas tanto para el caudal del gas como para el caudal del líquido.

Generalmente en flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular la película de líquido adyacente a la pared es muy delgada ($R_1/R_2 \rightarrow 1$) por lo que es posible despreciar la curvatura en la región comprendida entre $r = R_1$ y $r = R_2$. Esta suposición es muy conveniente en este caso ya que permite obtener una solución analítica simple para el modelo planteado. De lo contrario las ecuaciones diferenciales planteadas anteriormente tendrían que ser resueltas numéricamente.

Al despreciar la curvatura en la película de líquido las ecuaciones 4.22 y 4.24 se simplifican de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \approx \frac{d}{dr} (\tau_{rzII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzIII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \approx \frac{d}{dr} (\tau_{rzIII}) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \quad (4.30)$$

Asimismo la ecuación 4.28 se puede simplificar a fin de obtener:

$$Q_L = 2\pi \left(R_2 - \frac{\delta}{2} \right) \left[\int_{R_1}^{R_2-c} v_{zII} (r) dr + \int_{R_2-c}^{R_2} v_{zIII} (r) dr \right] \quad (4.31)$$

4.2 ADIMENSIONALIZACIÓN DEL MODELO

Una técnica muy eficaz para determinar los parámetros adimensionales que rigen un fenómeno de interés, consiste en adimensionalizar las ecuaciones diferenciales y las condiciones de frontera que describen el fenómeno mismo (White, 2004). Para hacer esto, en primer lugar es necesario definir las siguientes variables de referencia:

1. Velocidad de referencia, en este caso se escogió la velocidad superficial del líquido, v_{SL} .
2. Longitud de referencia, en este caso se escogió el radio de la tubería, R_2 .

De acuerdo a lo anterior es posible definir las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned}
 \tau_{rzI}^* &= \frac{\tau_{rzI}}{\rho_L v_{SL}^2} & \tau_{rzII}^* &= \frac{\tau_{rzII}}{\rho_L v_{SL}^2} & \tau_{rzIII}^* &= \frac{\tau_{rzIII}}{\rho_L v_{SL}^2} \\
 v_{zI}^* &= \frac{v_{zI}}{v_{SL}} & v_{zII}^* &= \frac{v_{zII}}{v_{SL}} & v_{zIII}^* &= \frac{v_{zIII}}{v_{SL}} \\
 \Delta p^* &= \frac{\Delta P}{\rho_L v_{SL}^2} & \eta &= \frac{r}{R_2} & \kappa &= \frac{R_1}{R_2} \\
 b &= \frac{c}{R_2}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde:

τ_{rz}^* : Esfuerzo de corte adimensional.

v_z^* : Velocidad adimensional.

Δp^* : Caída de presión adimensional.

η : Coordenada radial adimensional.

κ : Relación de radios.

b : Espesor adimensional de la subcapa laminar.

Sustituyendo estas variables adimensionales en las ecuaciones 4.20, 4.21, 4.29, 4.23, 4.30, 4.25, y 4.26 se obtiene:

-Región I, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \tau_{rzI}^*) = \Delta p^* - \frac{1}{2\rho^* Fr_{SL}} \quad (4.33)$$

$$\tau_{rzI}^* = \frac{[k_G(1-\eta)]^2}{\rho^*} \left(\frac{dv_{zI}^*}{d\eta} \right)^2 \quad (4.34)$$

-Región II, $\kappa \leq \eta \leq 1 - b$:

$$\frac{d}{d\eta} (\tau_{rzII}^*) = \Delta p^* - \frac{1}{2Fr_{SL}} \quad (4.35)$$

$$\tau_{rzII}^* = [k_L(1-\eta)]^2 \left(\frac{dv_{zII}^*}{d\eta} \right)^2 \quad (4.36)$$

-Región III, $1 - b \leq \eta \leq 1$:

$$\frac{d}{d\eta} (\tau_{rzIII}^*) = \Delta p^* - \frac{1}{2Fr_{SL}} \quad (4.37)$$

$$\tau_{rzIII}^* = -\frac{2}{Re_{SL}} \frac{dv_{zIII}^*}{d\eta} \quad (4.38)$$

Donde el espesor adimensional de la subcapa laminar b , viene dado por la siguiente expresión:

$$b = \frac{2N}{Re_{SL} \sqrt{\tau_{rzIII}^*(\eta = 1)}} \quad (4.39)$$

Además las condiciones de frontera en forma adimensional se pueden escribir de la siguiente manera:

C.L. 1	En $\eta = 0$	$\tau_{rzI}^* = \text{finito}$
C.L. 2	En $\eta = \kappa$	$\tau_{rzI}^* = \tau_{rzII}^*$
C.L. 3	En $\eta = \kappa$	$v_{zI}^* = v_{zII}^*$
C.L. 4	En $\eta = 1 - b$	$\tau_{rzII}^* = \tau_{rzIII}^*$
C.L. 5	En $\eta = 1 - b$	$v_{zII}^* = v_{zIII}^*$
C.L. 6	En $\eta = 1$	$v_{zIII}^* = 0$

De manera similar sustituyendo las variables adimensionales definidas en 4.32 en las ecuaciones 4.27 y 4.31 se obtiene:

-Para la fase gaseosa, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$Q^* = \int_0^{\kappa} v_{zI}^*(\eta) \eta d\eta \quad (4.40)$$

-Para la película de líquido, $\kappa \leq \eta \leq 1$:

$$1 = (1 + \kappa) \left[\int_{\kappa}^{1-b} v_{zII}^*(\eta) d\eta + \int_{1-b}^1 v_{zIII}^*(\eta) d\eta \right] \quad (4.41)$$

El procedimiento matemático detallado utilizado para adimensionalizar el modelo se presenta en el apéndice D.

Al observar las ecuaciones 4.33 a 4.41 se deduce que los parámetros adimensionales que caracterizan el sistema en estudio son los siguientes:

$$Re_{SL} = \frac{\rho_L v_{SL} 2R_2}{\mu_L} \quad Fr_{SL} = \frac{v_{SL}^2}{g 2R_2} \quad Q^* = \frac{Q_G}{Q_L} \quad \rho^* = \frac{\rho_L}{\rho_G} \quad (4.42)$$

Donde:

Re_{SL} : Número de Reynolds superficial del líquido.

Fr_{SL} : Número de Froude superficial del líquido.

Q^* : Relación entre el caudal del gas y el caudal del líquido.

ρ^* : Relación entre la densidad del líquido y la densidad del gas.

Estos resultados indican que estos cuatro parámetros adimensionales, Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* , describen el fenómeno de interés y por lo tanto pueden ser correlacionados con la finalidad de obtener expresiones para los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad para cada una de las fases, así como expresiones que permitan calcular Δp^* y κ .

Es importante destacar que para este patrón de flujo la viscosidad del gas no es una variable que juega un papel importante, debido a que en el gas la turbulencia es completa y las subcapas laminar y amortiguadora son despreciables. Por lo tanto el número de Reynolds del gas no es un parámetro adimensional importante.

Asimismo es importante resaltar que existen otras técnicas que permiten obtener los parámetros adimensionales que caracterizan un fenómeno, entre estas técnicas se encuentra el conocido teorema Pi de Buckingham (White, 2004). Sin embargo, la técnica que consiste en adimensionalizar las ecuaciones obtenidas a partir del análisis diferencial permite obtener de una forma más simple los parámetros adimensionales que describen el fenómeno en estudio.

4.3 SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL MODELO

A continuación se presentan los perfiles de esfuerzo cortante y de velocidad obtenidos al resolver las ecuaciones 4.33 a 4.38 utilizando las seis condiciones de frontera especificadas en la sección anterior. Asimismo se presentan los resultados obtenidos al sustituir los perfiles de velocidad en forma adimensional en las ecuaciones 4.40 y 4.41 y realizar la integración correspondiente. El detalle del procedimiento matemático empleado para resolver el modelo planteado se encuentra en el apéndice D.

4.3.1 PERFILES DE ESFUERZO CORTANTE EN FORMA ADIMENSIONAL

Al resolver las ecuaciones 4.33, 4.35 y 4.37 utilizando las condiciones de frontera C.L.1, C.L.2 y C.L.4 se obtiene:

-Región I, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\tau_{rzI}^*(\eta) = K_1\eta \quad (4.43)$$

-Región II, $\kappa \leq \eta \leq 1 - b$:

$$\tau_{rzII}^*(\eta) = K_2\eta + K_3 \quad (4.44)$$

-Región III, $1 - b \leq \eta \leq 1$:

$$\tau_{rzIII}^*(\eta) = K_2\eta + K_3 \quad (4.45)$$

Donde las constantes K_1 , K_2 y K_3 vienen dadas por:

$$K_1 = \frac{\Delta p^*}{2} - \frac{1}{4\rho^*Fr_{SL}} \quad (4.46)$$

$$K_2 = \Delta p^* - \frac{1}{2Fr_{SL}} \quad (4.47)$$

$$K_3 = \kappa(K_1 - K_2) \quad (4.48)$$

4.3.2 PERFILES DE VELOCIDAD EN FORMA ADIMENSIONAL

Al sustituir los perfiles de esfuerzos en forma adimensional en las ecuaciones 4.34, 4.36 y 4.38 y resolver dichas ecuaciones utilizando las condiciones de frontera C.L.3, C.L.5 y C.L.6 se obtiene:

-Región I, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\begin{aligned} v_{zI}^*(\eta) = & \frac{2\sqrt{K_1\eta\rho^*}}{k_G} - \frac{2\rho^*K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1\eta\rho^*}}{\sqrt{K_1\rho^*}}\right)}{k_G\sqrt{K_1\rho^*}} + \frac{2\rho^*K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{\sqrt{K_1\rho^*}}\right)}{k_G\sqrt{K_1\rho^*}} \\ & - \frac{2\sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{k_G} + \frac{2\sqrt{K_6}}{k_L} - \frac{2\sqrt{K_4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_6}}{\sqrt{K_4}}\right)}{k_L} - \frac{2\sqrt{K_5}}{k_L} + \frac{2\sqrt{K_4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}}\right)}{k_L} \\ & + Re_{SL} \left(\frac{1}{2}K_2b - \frac{1}{4}K_2b^2 + \frac{1}{2}K_3b \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

-Región II, $\kappa \leq \eta \leq 1 - b$:

$$\begin{aligned} v_{zII}^*(\eta) = & \frac{2\sqrt{K_2\eta + K_3}}{k_L} - \frac{2\sqrt{K_4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2\eta + K_3}}{\sqrt{K_4}}\right)}{k_L} + \frac{2\sqrt{K_4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}}\right)}{k_L} \\ & - \frac{2\sqrt{K_5}}{k_L} + Re_{SL} \left(\frac{1}{2}K_2b - \frac{1}{4}K_2b^2 + \frac{1}{2}K_3b \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

-Región III, $1 - b \leq \eta \leq 1$:

$$v_{zIII}^*(\eta) = \frac{Re_{SL}K_2}{4}(1 - \eta^2) + \frac{Re_{SL}K_3}{2}(1 - \eta) \quad (4.51)$$

Donde las constantes K_4 , K_5 y K_6 vienen dadas por:

$$K_4 = K_2 + K_3 \quad (4.52)$$

$$K_5 = K_2(1 - b) + K_3 \quad (4.53)$$

$$K_6 = K_2\kappa + K_3 \quad (4.54)$$

4.3.3 ECUACIONES DE CAUDAL EN FORMA ADIMENSIONAL

Al sustituir los perfiles de velocidad en forma adimensional en las ecuaciones 4.40 y 4.41 y realizar la integración correspondiente se obtiene:

-Para la fase gaseosa, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\begin{aligned} \frac{Q^*}{2} = & -\frac{1}{3} \frac{(K_1\kappa\rho^*)^{3/2}}{k_G K_1 \rho^*} - \frac{\sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{k_G} - \frac{1}{2} \frac{\rho^* K_1 \ln\left(\left|\frac{\sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{\sqrt{K_1\rho^*}} - 1\right|\right)}{k_G \sqrt{K_1\rho^*}} + \frac{4}{5} \frac{(K_1\kappa\rho^*)^{5/2}}{k_G K_1^2 \rho^{*2}} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\rho^* K_1 \ln\left(\frac{\sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{\sqrt{K_1\rho^*}} + 1\right)}{k_G \sqrt{K_1\rho^*}} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L} \\ & - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_1\kappa\rho^*}}{k_G} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_5}}{k_L} \\ & + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_6}}{k_L} + Re_{SL} \left(\frac{1}{4} \kappa^2 K_2 b - \frac{1}{8} \kappa^2 K_2 b^2 + \frac{1}{4} \kappa^2 K_3 b \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

-Para la película de líquido, $\kappa \leq \eta \leq 1$:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} Re_{SL} K_3 b + \frac{1}{2} Re_{SL} K_2 b + \frac{1}{4} \kappa^2 Re_{SL} K_2 b^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 Re_{SL} K_3 b - \frac{1}{2} \kappa^2 Re_{SL} K_2 b \\
&- \frac{1}{4} \kappa Re_{SL} K_2 b^2 - \frac{1}{4} \kappa Re_{SL} K_3 b^2 + \frac{1}{6} \kappa Re_{SL} K_2 b^3 + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} - \frac{1}{2} Re_{SL} K_2 b^2 \\
&- \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L} + \frac{2\kappa^2 \sqrt{K_5}}{k_L} + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} + \frac{2\sqrt{K_6} K_3}{k_L K_2} + \frac{2\sqrt{K_6}}{k_L} \\
&- \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} - \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} - \frac{2\kappa \sqrt{K_6} K_3}{k_L K_2} - \frac{\kappa K_4^{3/2} \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} \\
&+ \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} - \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} + \frac{\kappa K_4^{3/2} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} - \frac{4\sqrt{K_5}}{k_L} \\
&+ \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} - \frac{\sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(|1 - K_7|)}{k_L} - \frac{2\kappa \sqrt{K_5} K_3}{k_L K_2} \\
&\frac{K_4^{3/2} \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} - \frac{b \sqrt{K_4} \ln(|1 - K_7|)}{k_L} - \frac{\kappa K_4^{3/2} \ln(|1 - K_7|)}{k_L K_2} - \frac{1}{4} Re_{SL} K_3 b^2 \\
&+ \frac{\kappa \sqrt{K_4} b \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} - \frac{\kappa \sqrt{K_4} b \ln(|1 - K_7|)}{k_L} + \frac{\kappa K_4^{3/2} \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} - \frac{2\kappa \sqrt{K_5}}{k_L} \\
&- \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(|1 - K_7|)}{k_L K_2} - \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} - \frac{4 \kappa K_6^{3/2}}{3 k_L K_2} \\
&- \frac{K_4^{3/2} \ln(|1 - K_7|)}{k_L K_2} + \frac{1}{6} Re_L K_2 b^3 + \frac{2\sqrt{K_5} b}{k_L} + \frac{\sqrt{K_4} \ln(|1 - K_7|)}{k_L} - \frac{4 K_6^{3/2}}{3 k_L K_2} \\
&+ \frac{2\kappa \sqrt{K_6}}{k_L} + \frac{4 K_5^{3/2}}{3 k_L K_2} + \frac{\sqrt{K_4} b \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} - \frac{2\sqrt{K_5} K_3}{k_L K_2} + \frac{2\kappa \sqrt{K_5} b}{k_L} + \frac{4 \kappa K_5^{3/2}}{3 k_L K_2} \\
&- \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} + \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(|1 - K_7|)}{k_L K_2} + \frac{K_4^{3/2} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} \\
&- \frac{K_4^{3/2} \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} - \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Donde las constantes K_7 y K_8 vienen dadas por:

$$K_7 = \frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}} \quad (4.57)$$

$$K_8 = \frac{\sqrt{K_6}}{\sqrt{K_4}} \quad (4.58)$$

Asimismo el espesor adimensional de la subcapa laminar b , se puede reescribir de la siguiente manera:

$$b = \frac{2N}{Re_{SL}\sqrt{K_4}} \quad (4.59)$$

Las ecuaciones 4.55 y 4.56 constituyen la forma final del modelo planteado. Al sustituir las constantes K_1 a K_8 , el espesor adimensional de la subcapa laminar b , y los valores de k_L , k_G y N en 4.55 y 4.56 se obtiene un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$F(\Delta p^*, \kappa, Re_{SL}, Fr_{SL}, Q^*, \rho^*) = 0 \quad (4.60)$$

$$G(\Delta p^*, \kappa, Re_{SL}, Fr_{SL}, Q^*, \rho^*) = 0 \quad (4.61)$$

Al especificar los valores de los cuatro parámetros adimensionales que describen al sistema en estudio (Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^*) se obtiene un sistema de dos ecuaciones trascendentes con dos incógnitas, las cuales son la caída de presión adimensional (Δp^*) y la relación de radios (κ). Dicho sistema de ecuaciones puede ser resuelto numéricamente a fin de obtener los valores correspondientes de Δp^* y κ .

Una vez conocido el valor de κ , es posible obtener el espesor de la película (δ), la fracción vacía de gas (α) y el holdup de líquido (H_L) utilizando las siguientes relaciones:

$$\delta = (1 - \kappa)R_2 \quad \alpha = \kappa^2 \quad H_L = 1 - \kappa^2 \quad (4.62)$$

Finalmente es necesario mencionar que el modelo desarrollado en el presente trabajo, puede ser utilizado para flujo bifásico gas-líquido en tuberías horizontales al desprestigiar el término $1/2Fr_{SL}$, el cual está relacionado con las fuerzas de gravedad. En tal caso el único cambio a realizar sería en las constantes K_1 y K_2 , las cuales quedarían reescritas de la siguiente manera:

$$K_1 = \frac{\Delta p^*}{2} \quad (4.63)$$

$$K_2 = \Delta p^* \quad (4.64)$$

Es importante destacar que en el modelo planteado se supone que el flujo es axisimétrico, esto es cierto para el caso vertical, pues el espesor de la película es aproximadamente uniforme, sin embargo para el caso horizontal el flujo no es completamente simétrico respecto al eje de la tubería, pues debido al efecto de la gravedad, el espesor de la película en el fondo de la tubería es mayor que en el tope (Shoham, 2006). En consecuencia al utilizar el modelo desarrollado para flujo horizontal se obtienen predicciones menos precisas que en flujo vertical.

4.3.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS RESULTADOS

4.3.4.1 Representación gráfica de los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad.

En esta sección se presenta la representación gráfica de los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad para un conjunto de valores típicos de Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* obtenidos a partir de los datos experimentales disponibles. En esta parte sólo se muestran dichos gráficos y su correspondiente discusión, más adelante en la sección 4.4 se presenta la comparación con los datos experimentales.

A continuación en la figura N° 4.3 se muestran los perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

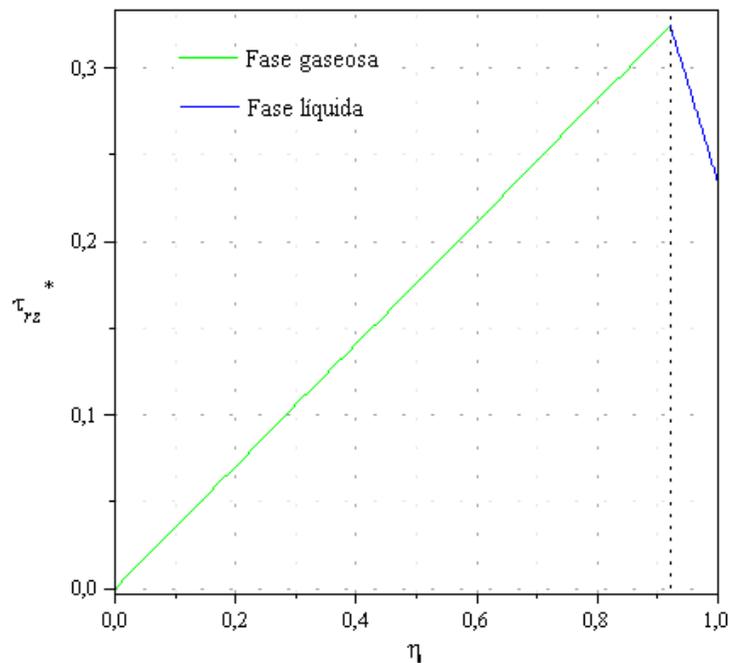


Figura N° 4.3. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

En la figura N° 4.3 se puede observar el perfil de esfuerzos del gas que abarca la región comprendida entre $\eta = 0$ y $\eta = \kappa$, y el perfil de esfuerzos de la fase líquida que corresponde a la región comprendida entre $\eta = \kappa$ y $\eta = 1$. La línea discontinua cuya ecuación es $\eta = \kappa$, corresponde a la interfase gas-líquido. El perfil de esfuerzos del gas se obtiene al graficar la ecuación 4.43, mientras que el perfil de esfuerzos del líquido se obtiene al graficar la ecuación 4.44 o la ecuación 4.45, ya que ambas son equivalentes.

De manera general se puede observar que el perfil de esfuerzos del gas tiene un comportamiento parecido al caso monofásico, pues presenta una pendiente positiva. Asimismo se observa que el esfuerzo de corte es máximo en la interfase, lo cual concuerda con lo establecido por Shoham (2006), quien destaca la existencia de un alto esfuerzo de corte interfacial, causado por las altas velocidades de gas. En cuanto al líquido, se observa que la pendiente del perfil de esfuerzos es negativa.

Para el caso de la fase líquida la pendiente del perfil de esfuerzos viene dada por $K_2 = \Delta p^* - 1/2Fr_{SL}$, donde Fr_{SL} es el número de Froude superficial de la fase líquida. Si dicha pendiente es negativa se tiene que $1/2Fr_{SL} > \Delta p^*$ o lo que es equivalente $\rho_L g > \Delta P/L$. Esto significa que la pendiente del esfuerzo de corte del líquido es negativa cuando las fuerzas de gravedad que actúan sobre la película ($\rho_L g$) son mayores que las fuerzas de presión ($\Delta P/L$). Esto ocurre a bajos caudales de gas, cuando la caída de presión es pequeña. A medida que aumenta la relación de caudales se puede observar que la pendiente del perfil de esfuerzos de la fase líquida se hace menos negativa y para relaciones de caudales muy elevadas dicha pendiente puede tener un valor positivo. Esto se debe a que para altos caudales de gas la caída de presión es mayor y por lo tanto las fuerzas de presión que actúan sobre el líquido se hacen muy grandes, restándole importancia a las fuerzas de gravedad.

A continuación en la figura N° 4.4 se muestran los perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

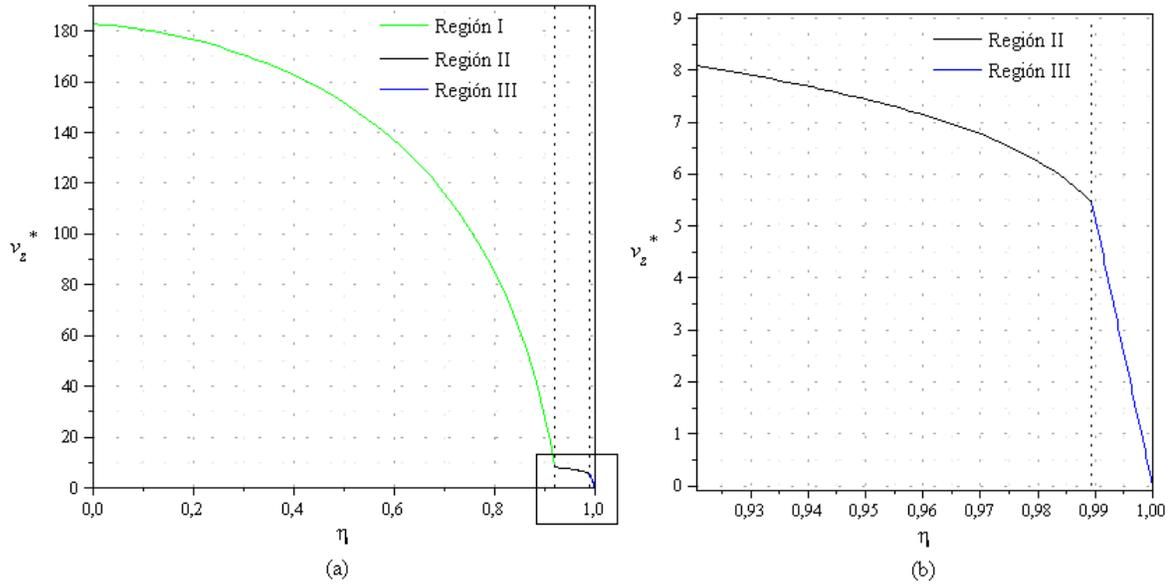


Figura N° 4.4. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 100$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

En la figura 4.4 parte a se presenta el perfil de velocidad de cada una de las tres regiones consideradas en el modelo desarrollado, la región I que corresponde a la corriente turbulenta principal de la fase gaseosa, la región II que corresponde a la corriente turbulenta principal de la fase líquida y la región III que corresponde a la subcapa laminar de la fase líquida. Por otro lado, en la figura 4.4 parte b, se muestra una ampliación de los perfiles de velocidad correspondientes a las regiones II y III. Las líneas discontinuas representan los límites entre cada una de las regiones consideradas.

El perfil de velocidad de la región I se obtiene al graficar la ecuación 4.49, el perfil de velocidad correspondiente a la región II se obtiene al graficar la ecuación

4.50, mientras que el perfil de velocidad correspondiente a la región II se obtiene al graficar la ecuación 4.51.

De manera general se puede observar que los perfiles de velocidad en las regiones I y II son similares al perfil de velocidad que se observa en flujo monofásico turbulento en la corriente turbulenta principal. En cuanto al perfil de velocidad de la región III se puede afirmar que tiene forma aproximadamente lineal. Asimismo se observa que la velocidad máxima alcanzada por el gas es considerablemente mayor que la velocidad máxima alcanzada por el líquido, esto se debe a la alta relación que existe entre el caudal del gas y el caudal del líquido, pues el patrón de flujo anular ocurre para relaciones elevadas de caudales gas-líquido.

A continuación en la figura N° 4.5 se muestran los perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

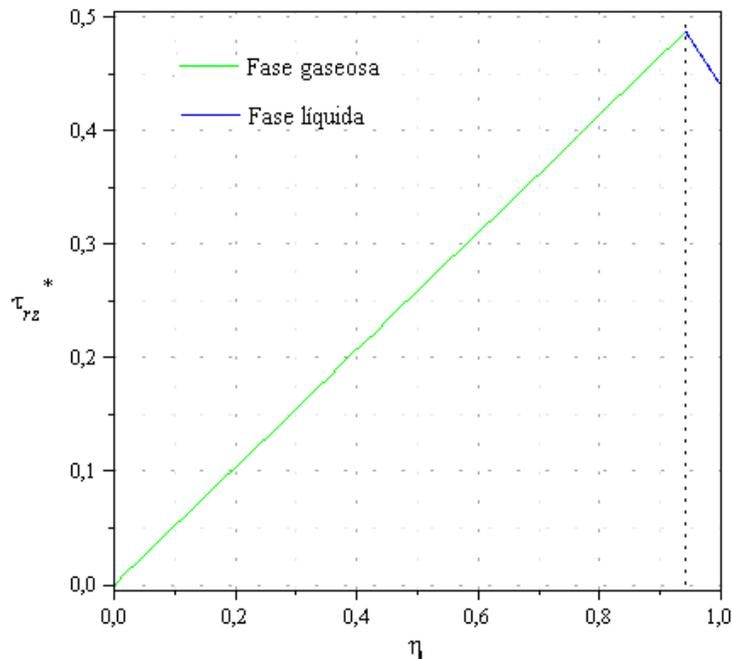


Figura N° 4.5. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

En general la figura N° 4.5 presenta un comportamiento similar al observado en la figura N° 4.3, con la diferencia de que en este caso al aumentar la relación de caudales la caída de presión aumenta y en consecuencia la pendiente del esfuerzo de corte de la fase líquida se hace menos negativa. Asimismo al incrementar la relación de caudales el esfuerzo de corte interfacial aumenta en comparación con lo observado la figura N° 4.3.

A continuación en la figura N° 4.6 se muestran los perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

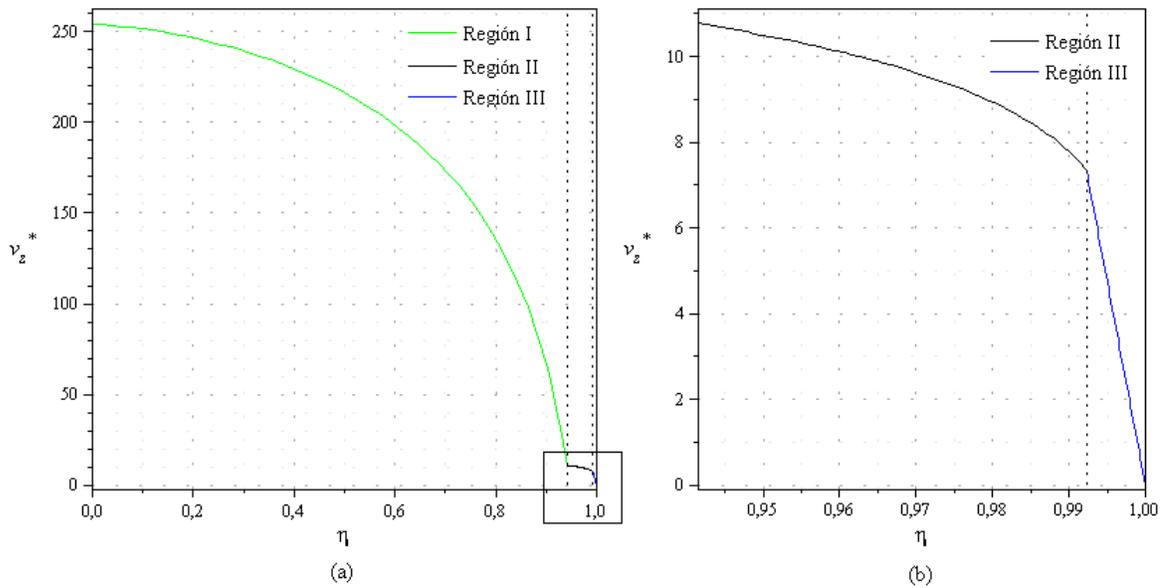


Figura N° 4.6. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 150$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

Al igual que en la figura N° 4.4, en la figura N° 4.6 parte a se presentan los perfiles de velocidad correspondientes a las regiones I, II y III, mientras que en la figura N° 4.6 parte b se muestra una ampliación de los perfiles de velocidad correspondientes a las regiones II y III.

Los perfiles de velocidad de la figura N° 4.6 presentan un comportamiento similar al observado en la figura N° 4.4, con la diferencia de que al incrementar la relación de caudales (Q^*), las velocidades máximas alcanzadas por cada fase aumentan. Asimismo en la figura N° 4.6 se observa que al incrementar la relación de caudales, la relación de radios (κ) aumenta, o lo que es equivalente, el espesor de la película de líquido disminuye.

A continuación en la figura N° 4.7 se muestran los perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

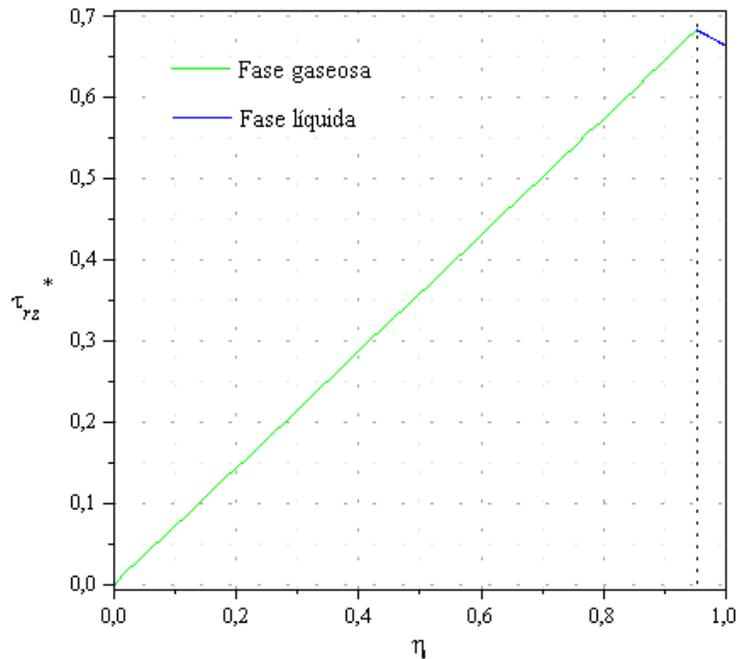


Figura N° 4.7. Perfiles de esfuerzo cortante en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

La figura N° 4.7 presenta un comportamiento similar al observado en las figuras N° 4.3 y N° 4.5. Se puede apreciar que al aumentar la relación de caudales la caída de presión aumenta y en consecuencia la pendiente del esfuerzo de corte de la

fase líquida se hace menos negativa, en comparación con las figuras N° 4.3 y N° 4.5. Asimismo se observa que al incrementar la relación de caudales el esfuerzo de corte interfacial aumenta.

A continuación en la figura N° 4.8 se muestran los perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

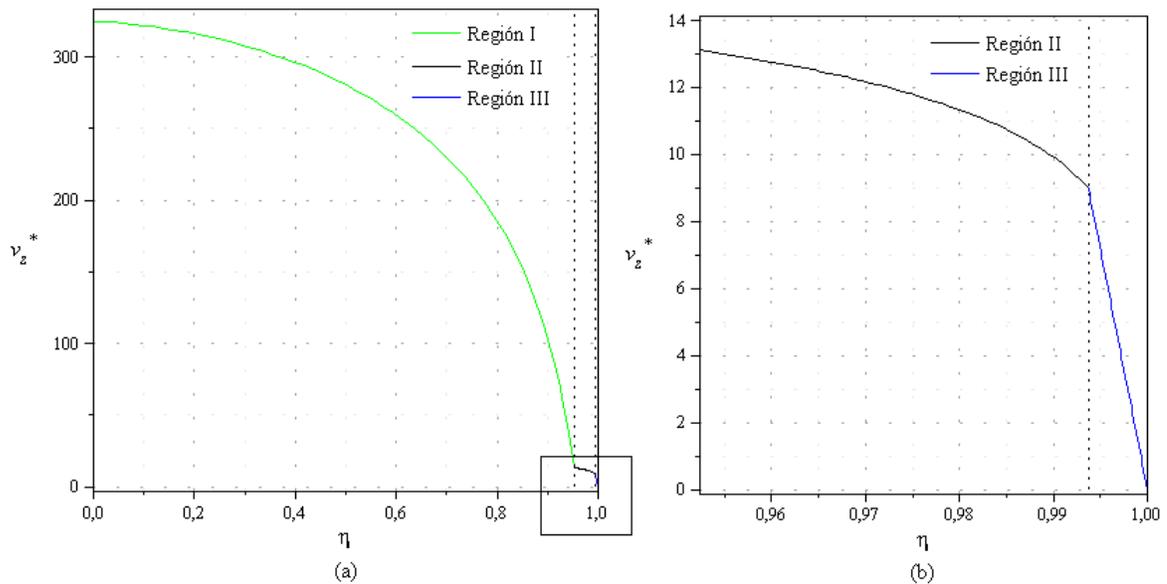


Figura N° 4.8. Perfiles de velocidad en forma adimensional obtenidos para $Re_{SL} = 4300$, $Q^* = 200$, $Fr_{SL} = 0,27$ y $\rho^* = 900$.

Al igual que en las figuras N° 4.4 y N° 4.6, en la figura N° 4.8 parte a se presentan los perfiles de velocidad correspondientes a las regiones I, II y III, mientras que en la figura N° 4.8 parte b se muestra una ampliación de los perfiles de velocidad correspondientes a las regiones II y III. Los perfiles de velocidad de la figura N° 4.8 presentan un comportamiento similar al observado en las figuras N° 4.4 y N° 4.6. Al igual que en la figura N° 4.6 se observar que al incrementar la relación de caudales (Q^*), aumentan tanto las velocidades máximas alcanzadas por cada fase, así como la relación de radios (κ).

4.3.4.2 Representación gráfica de la caída de presión adimensional y la relación de radios.

En esta sección se presentan los gráficos correspondientes a la caída de presión adimensional (Δp^*) y la relación de radios (κ) en función de los parámetros adimensionales Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* . Estos gráficos fueron generados al resolver simultáneamente las ecuaciones 4.55 y 4.56 para un conjunto de valores típicos de Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* obtenidos a partir de los datos experimentales disponibles.

A continuación en la figura N° 4.9 se muestra la caída de presión adimensional en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$.

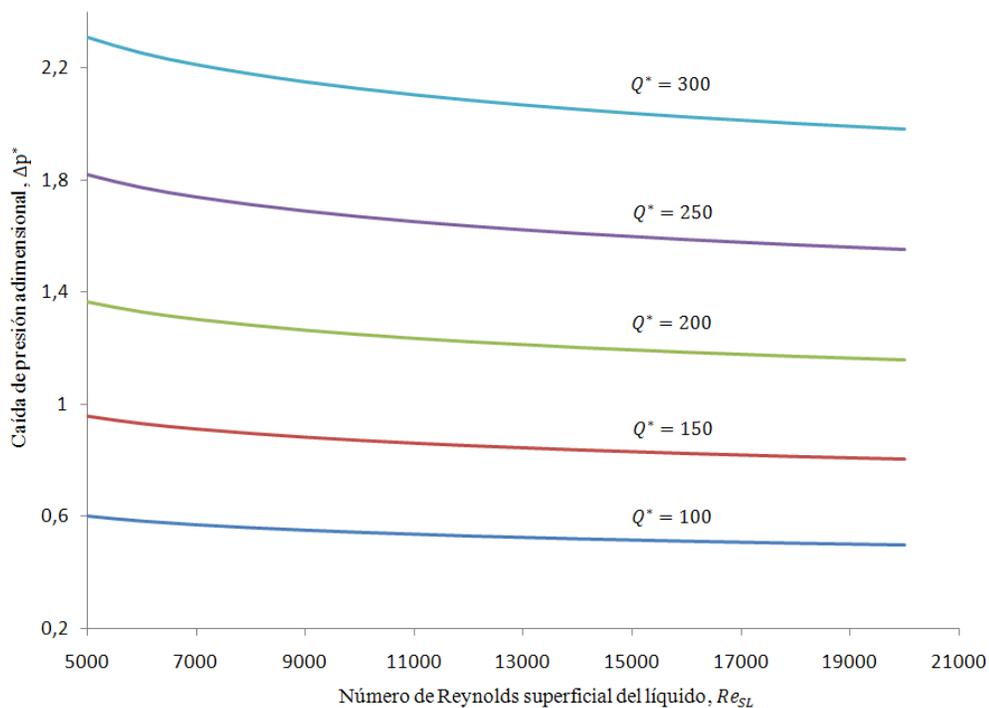


Figura N° 4.9. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$.

En la figura N° 4.9 se puede observar que la caída de presión adimensional (Δp^*) disminuye a medida que se incrementa el número de Reynolds superficial del

líquido (Re_{SL}), esto es algo análogo a lo que ocurre en flujo monofásico cuando el factor de fricción, que es equivalente a una caída de presión adimensional, disminuye a medida que se incrementa el número de Reynolds. Sin embargo, es importante destacar que la caída de presión adimensional utilizada en el presente trabajo se definió utilizando la velocidad superficial del líquido, mientras que el factor de fricción se define utilizando la velocidad media, por lo tanto ambas cantidades tienen órdenes de magnitud diferentes. Otro aspecto importante que se observa en la figura anterior, es que a medida que se incrementa la relación de caudales para un mismo número de Reynolds superficial del líquido, la caída de presión adimensional aumenta. Esto ocurre ya que al incrementar la relación de caudales, la velocidad del gas es mayor y en consecuencia se tiene mayor fricción y una mayor caída de presión.

A continuación en la figura N° 4.10 se muestra la relación de radios en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$.

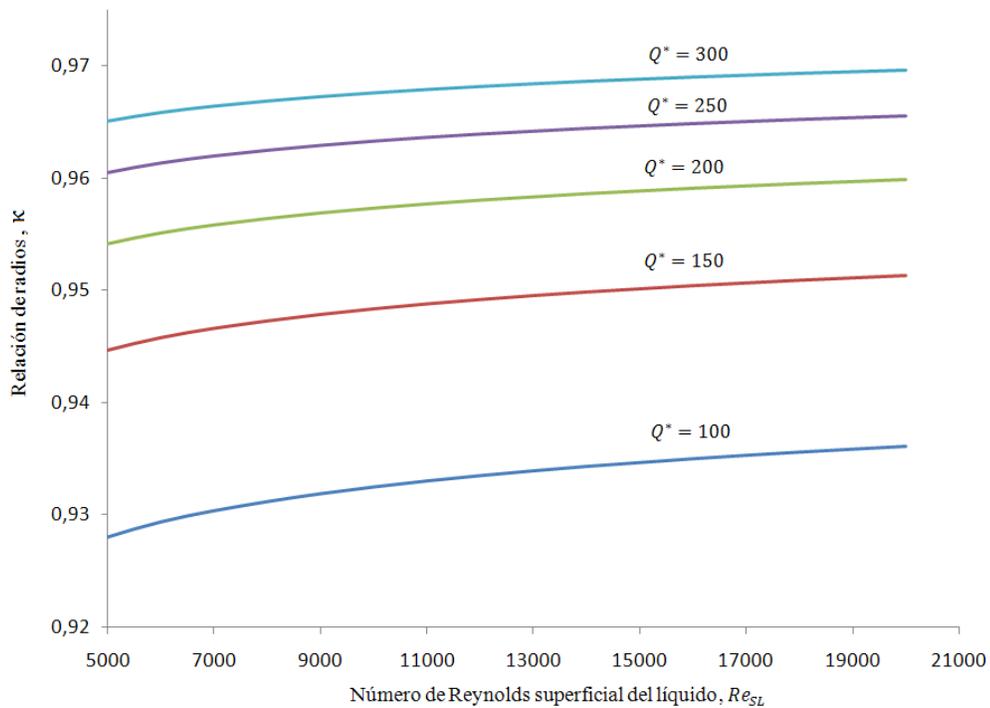


Figura N° 4.10. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 900$.

En la figura N° 4.10 se puede observar que la relación de radios (κ) aumenta a medida que se incrementa el número de Reynolds superficial del líquido (Re_{SL}), o lo que es equivalente, el espesor de la película de líquido disminuye. Asimismo se observa que a medida que se incrementa la relación de caudales para un número de Reynolds superficial de líquido fijo, la relación de radios aumenta, o lo que es equivalente el espesor de la película disminuye. Esto ocurre ya que al incrementar la relación de caudales, se introduce una mayor cantidad de gas a la tubería y en consecuencia el líquido es forzado a ocupar un menor espacio, reduciéndose el espesor de la película.

A continuación en la figura N° 4.11 se muestra la caída de presión adimensional en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$.

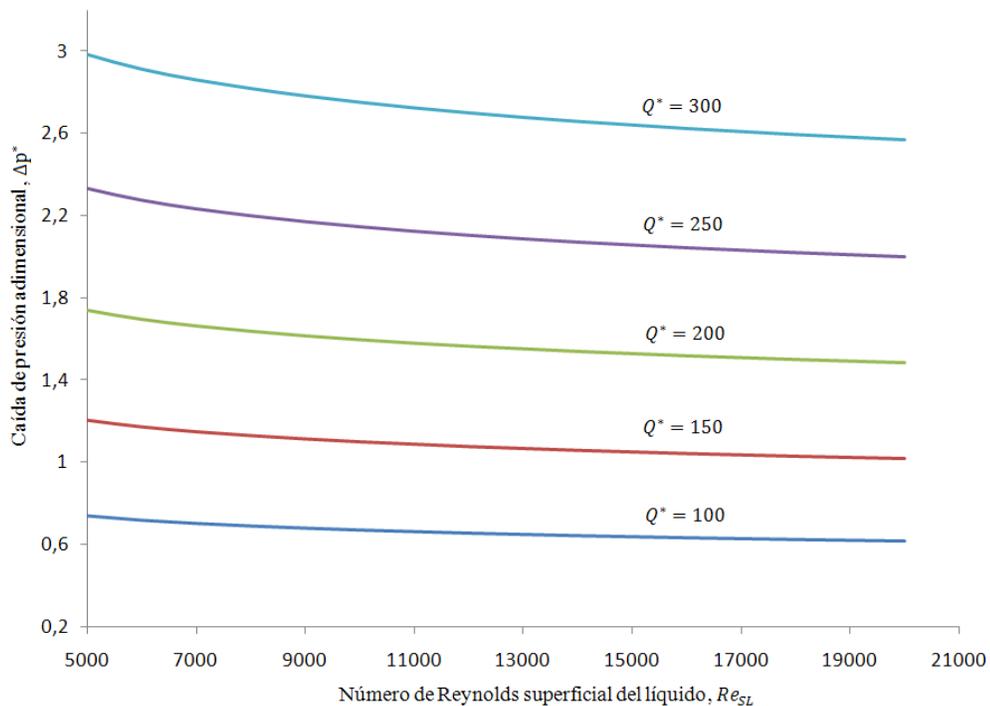


Figura N° 4.11. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$.

En la figura N° 4.11 se observa un comportamiento similar al descrito en la figura N° 4.9, con la diferencia de que al disminuir la relación de densidades la caída de presión adimensional (Δp^*) aumenta de manera general en comparación con lo observado figura N° 4.9.

A continuación en la figura N° 4.12 se muestra la relación de radios en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$.

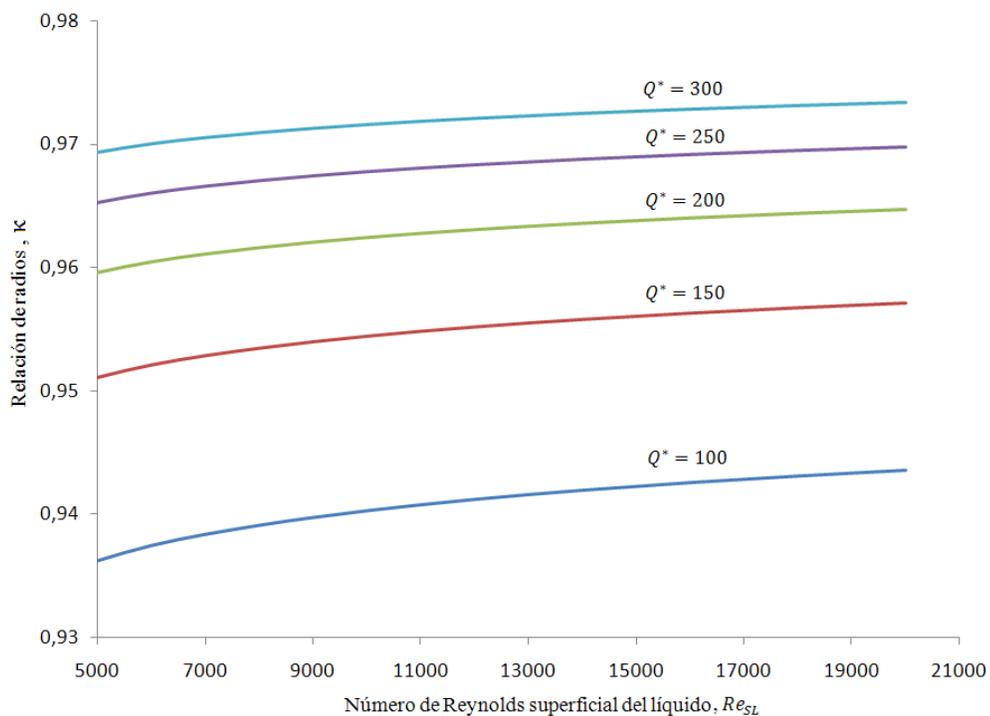


Figura N° 4.12. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 600$.

La figura N° 4.12 presenta un comportamiento similar al descrito en la figura N° 4.10, observando que al disminuir la relación de densidades la relación de radios (κ) aumenta en comparación con lo observado figura N° 4.10.

A continuación en la figura N° 4.13 se muestra la caída de presión adimensional en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$.

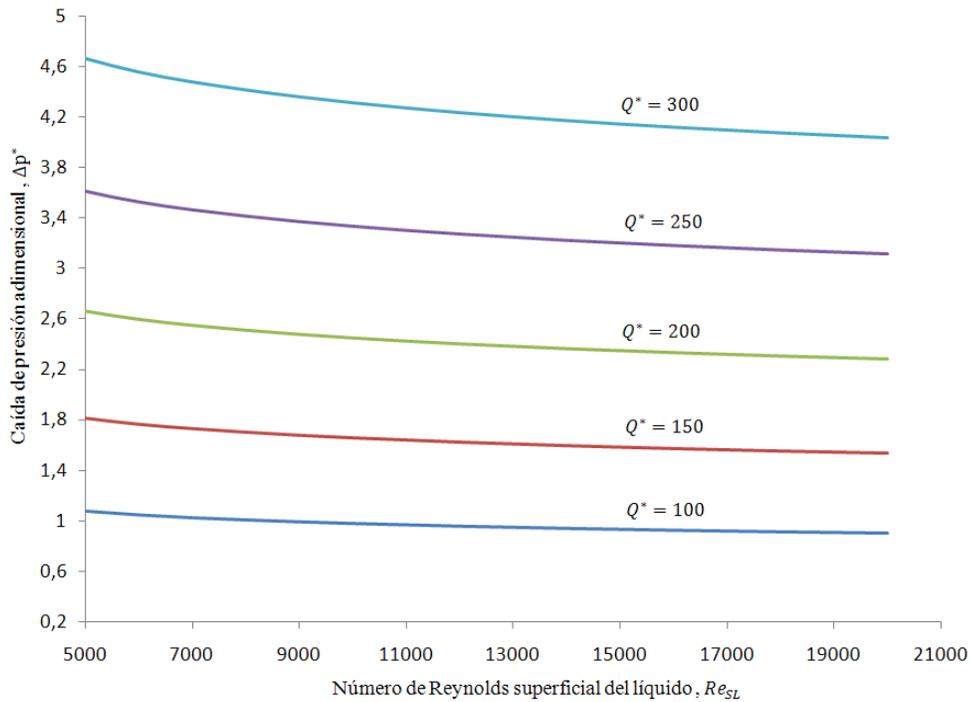


Figura N° 4.13. Caída de presión adimensional para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$.

En la figura N° 4.13 se observa un comportamiento similar al descrito en las figuras N° 4.9 y N° 4.11. Al igual que en la figura N° 4.9, se observa que al disminuir la relación de densidades la caída de presión adimensional (Δp^*) aumenta de manera general en comparación con lo observado en las figuras anteriores.

A continuación en la figura N° 4.14 se muestra la relación de radios en función del número de Reynolds superficial del líquido para varias relaciones de caudales con $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$.

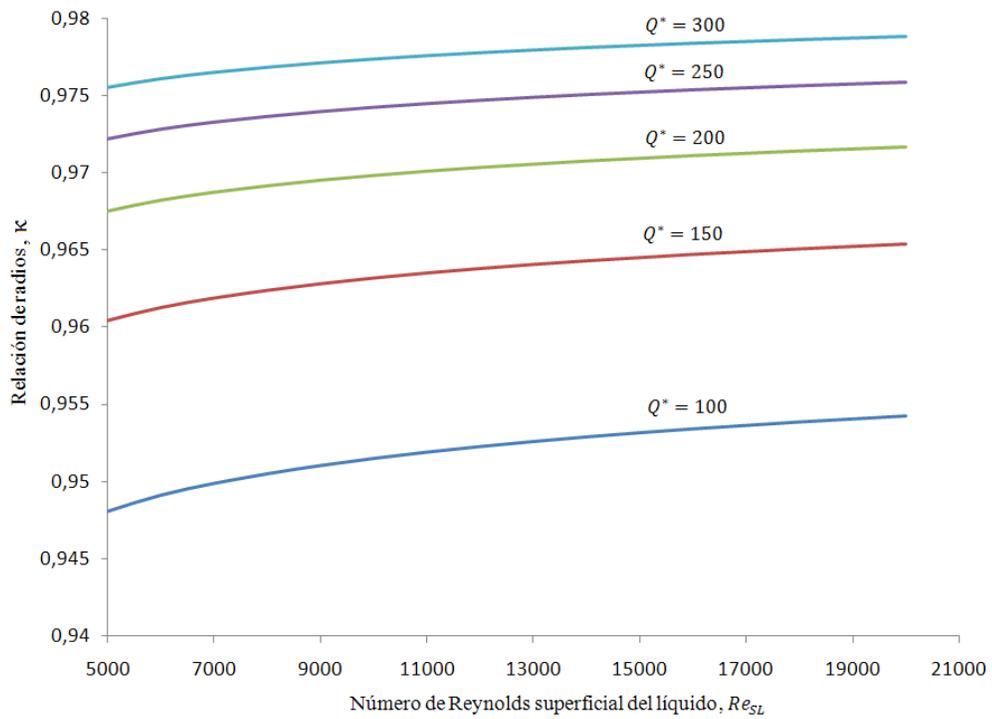


Figura N° 4.14. Relación de radios para $Fr_{SL} = 1$ y $\rho^* = 300$.

En la figura N° 4.14 se observa un comportamiento similar al descrito en las figuras N° 4.10 y N° 4.12. Al igual que en la figura N° 4.12, se observa que al disminuir la relación de densidades la relación de radios (κ) se incrementa en comparación con lo observado en figuras anteriores.

4.3.5 REDUCCIÓN DEL MODELO AL CASO DE UN FLUJO TURBULENTO MONÓFÁSICO

El modelo planteado en el presente trabajo se puede reducir al caso monofásico turbulento en el que sólo circula líquido por la tubería. Para esto es necesario realizar las siguientes sustituciones en las ecuaciones correspondientes a las secciones 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3:

$$\begin{aligned}
 Q^* &= 0 & \kappa &= 0 \\
 \rho^* &= 1 & v_{SL} &= v_L \\
 Re_{SL} &= Re_L = \frac{\rho_L v_L 2R_2}{\mu_L} & k_L &= k_G = k \\
 K_1 &= \frac{f}{2} & K_2 &= \frac{f}{2} \\
 K_3 &= 0 & K_4 &= K_2 + K_3 = \frac{f}{2} \\
 K_5 &= K_2(1 - b) + K_3 = \frac{f}{2}(1 - b) & K_6 &= K_2\kappa + K_3 = 0 \\
 K_7 &= \frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}} = \sqrt{(1 - b)} & K_8 &= \frac{\sqrt{K_6}}{\sqrt{K_4}} = 0 \\
 b &= \frac{2N}{Re_L \sqrt{f/2}}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Donde f es el factor de fricción de Fanning definido en la sección 2.2.2.3.2 y Re_L es el número de Reynolds del líquido.

Al hacer dichas sustituciones en las ecuaciones 4.43, 4.44 y 4.45 se obtiene se obtiene el perfil de esfuerzo cortante para flujo monofásico:

$$\tau_{rzI}^*(\eta) = \tau_{rzII}^*(\eta) = \tau_{rzIII}^*(\eta) = \frac{1}{2} f \eta \tag{4.66}$$

De igual manera al hacer las sustituciones correspondientes en las ecuaciones 4.49, 4.50 y 4.51 se obtienen los perfiles de velocidad para flujo monofásico:

-Corriente turbulenta principal, $0 \leq \eta \leq 1 - b$:

$$v_{zI}^*(\eta) = v_{zII}^*(\eta) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{f}\eta}{k} - \sqrt{2}\sqrt{f} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{f}\eta}{\sqrt{f}}\right) - \frac{2\sqrt{\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\left(\frac{2N}{Re_L\sqrt{f/2}}\right)}}{k} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{f}}{k} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f}}\sqrt{\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\left(\frac{2N}{Re_L\sqrt{f/2}}\right)}\right) - \frac{1}{8}fRe_Lb^2 + \frac{1}{4}fRe_Lb \quad (4.67)$$

-Subcapa laminar, $1 - b \leq \eta \leq 1$:

$$v_{zIII}^*(\eta) = \frac{1}{8}Re_Lf(1 - \eta^2) \quad (4.68)$$

Asimismo al hacer las sustituciones correspondientes en las ecuaciones 4.55 y 4.56, se obtiene que la ecuación 4.55 se anula, mientras que la ecuación 4.56 queda de la siguiente forma:

$$1 = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{f}}{2k_L} \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{f}}\sqrt{2f - \frac{4\sqrt{f}N\sqrt{2}}{Re_L}} - 1\right) - \frac{1\sqrt{2}\sqrt{f} \ln 2}{2k_L} - \frac{2N^2}{Re_L} + \frac{4}{3}\frac{N^3\sqrt{2}}{Re_L^2\sqrt{f}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{f}}{2k_L} \ln\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f}}\sqrt{2f - \frac{4\sqrt{f}N\sqrt{2}}{Re_L}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{f}N\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3k_Lf}\left(f - \frac{2\sqrt{f}N\sqrt{2}}{Re_L}\right)^{3/2} - \frac{2}{k_L}\sqrt{2f - \frac{4\sqrt{f}N\sqrt{2}}{Re_L}} + \frac{2N\sqrt{2}}{k_LRe_L\sqrt{f}}\sqrt{2f - \frac{4\sqrt{f}N\sqrt{2}}{Re_L}} \quad (4.69)$$

La ecuación 4.69 es una ecuación implícita del factor de fricción en función del número de Reynolds del líquido. Al sustituir los valores de N y k es posible obtener el factor de fricción para un número de Reynolds dado. Es importante destacar que la ecuación 4.69 es aplicable sólo en el caso de tuberías lisas.

A fin de comparar con la ecuación 4.69, se utiliza la denominada correlación de Prandtl, la cual se emplea comúnmente para tubos lisos (Bird *et al.*, 2006):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log_{10}(Re_L \sqrt{f}) - 0,4 \quad 2,3 \times 10^3 < Re_L < 4 \times 10^6 \quad (4.70)$$

En la figura N° 4.15 se muestra una comparación entre ambas ecuaciones para un amplio rango de números de Reynolds en el caso en el cual $N = 11$ y $k_L = 0,4$.

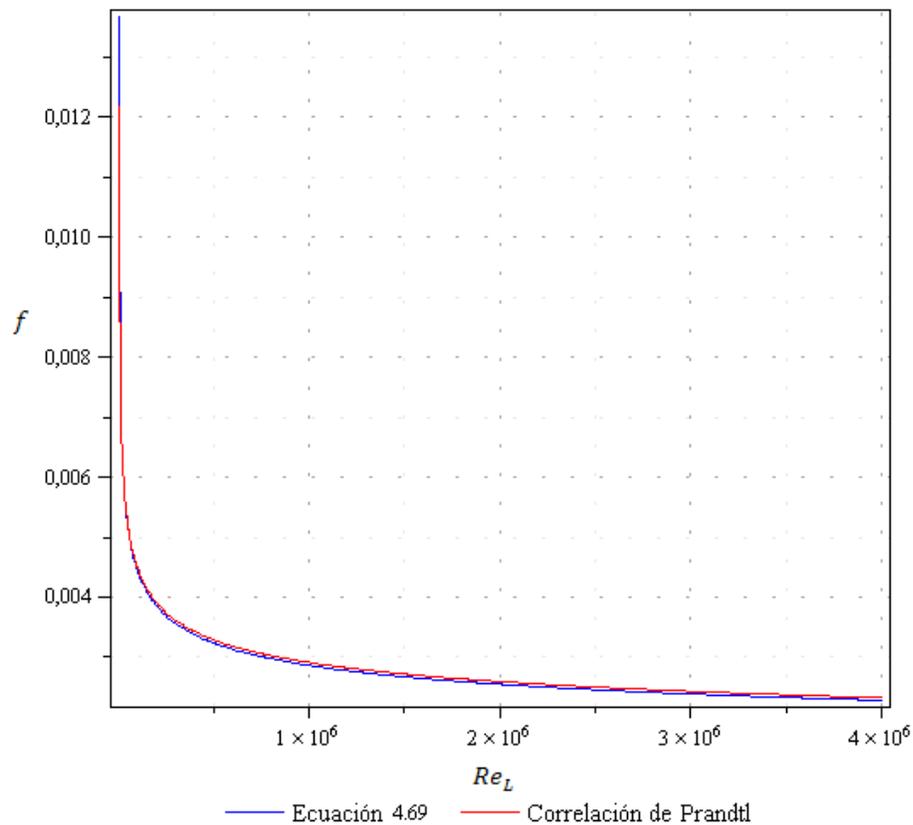


Figura N° 4.15. Comparación entre la ecuación 4.69 y la correlación de Prandtl para tubos lisos.

A partir de la figura N° 4.15 se puede observar que la ecuación 4.69 tiene un comportamiento muy parecido al de la correlación de Prandtl para tuberías lisas en todo el rango de los números de Reynolds para los cuales se hizo la comparación, por lo tanto dicha ecuación puede ser utilizada para obtener el factor de fricción en flujo monofásico turbulento en tuberías lisas.

Para finalizar en la figura N° 4.16 se presentan los perfiles de esfuerzo cortante y velocidad obtenidos al graficar las ecuaciones 4.66, 4.67 y 4.68, para un número de Reynolds de líquido de 30000, utilizando un valor de f calculado con la ecuación 4.47.

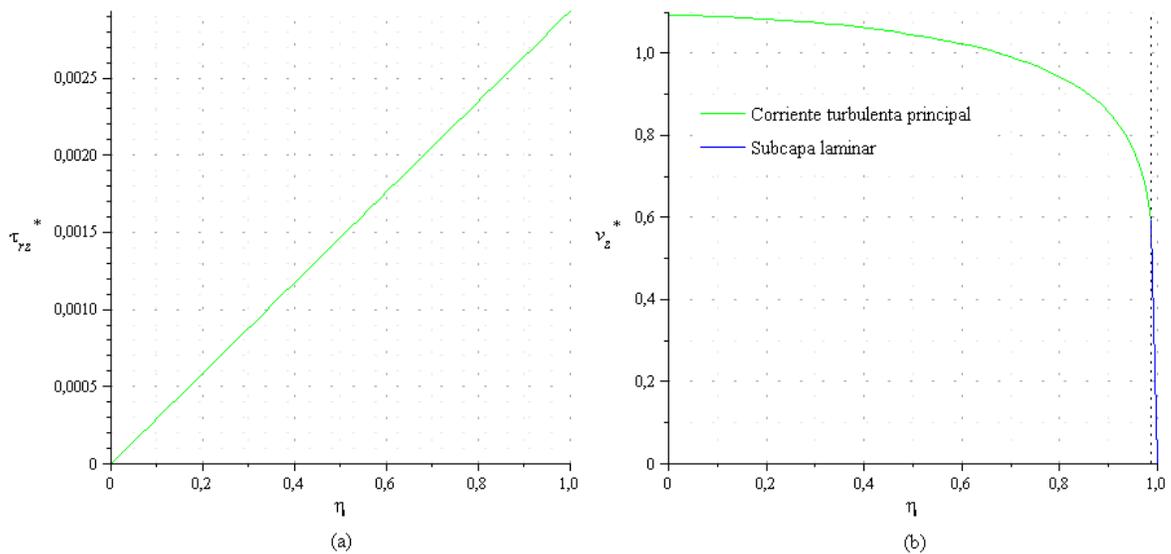


Figura N° 4.16. Perfiles de esfuerzo cortante (a) y velocidad (b) para el caso monofásico, obtenidos para $Re_L = 30000$.

En el apéndice D se encuentra el procedimiento matemático detallado para obtener las ecuaciones 4.66 a 4.69 a partir de las ecuaciones correspondientes a las secciones 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3.

4.4 COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

4.4.1 RESUMEN DE LOS DATOS EXPERIMENTALES

En el presente trabajo se utilizaron los datos experimentales para flujo de aire y agua, en tuberías verticales lisas reportados por Calvert y Williams (1955), Govier (1958), Wallis (1969) y Zabarás y Dukler (1986). En total se utilizaron 85 conjuntos de datos experimentales. En la tabla N° 4.1 se muestra un resumen de los datos experimentales utilizados.

Tabla N° 4.1 Resumen de los datos experimentales.

Fuente	Puntos	Fluidos	Velocidad superficial de gas, v_{SG} [m/s]	Velocidad superficial del líquido, v_{SL} [m/s]	Diámetro de la tubería, d [m]	Datos reportados
Calvert y Williams (1955)	15	Aire-Agua	20,31-25,18	0,025-0,078	0,0502	$\Delta P/L$
Govier (1958)	7	Aire-Agua	6,35-9,83	0,257-0,265	0,0160	$\Delta P/L, \delta$
Wallis (1969)	55	Aire-Agua	6,27-41,39	0,044-1,140	0,0190	$\Delta P/L$
Zabarás y Dukler (1986)	8	Aire-Agua	19,28-27,11	0,031-0,062	0,0508	$\Delta P/L, \delta$

De acuerdo a lo presentado en la tabla N° 4.1 se puede observar que todos los autores citados reportan las mediciones correspondientes al gradiente de presión, mientras que sólo Govier (1958) y Zabarás y Dukler (1986) reportan mediciones correspondientes al espesor de la película de líquido. Asimismo se puede apreciar que los puntos experimentales utilizados cubren un amplio rango de velocidades superficiales tanto de líquido como de gas, dentro del cual existe el patrón de flujo anular. Esto se puede observar claramente en la figura N° 4.17, donde se representan los puntos experimentales utilizados sobre el mapa de patrones de flujo de Hewitt y

Roberts, el cual fue desarrollado para flujo ascendente aire-agua en tuberías verticales.

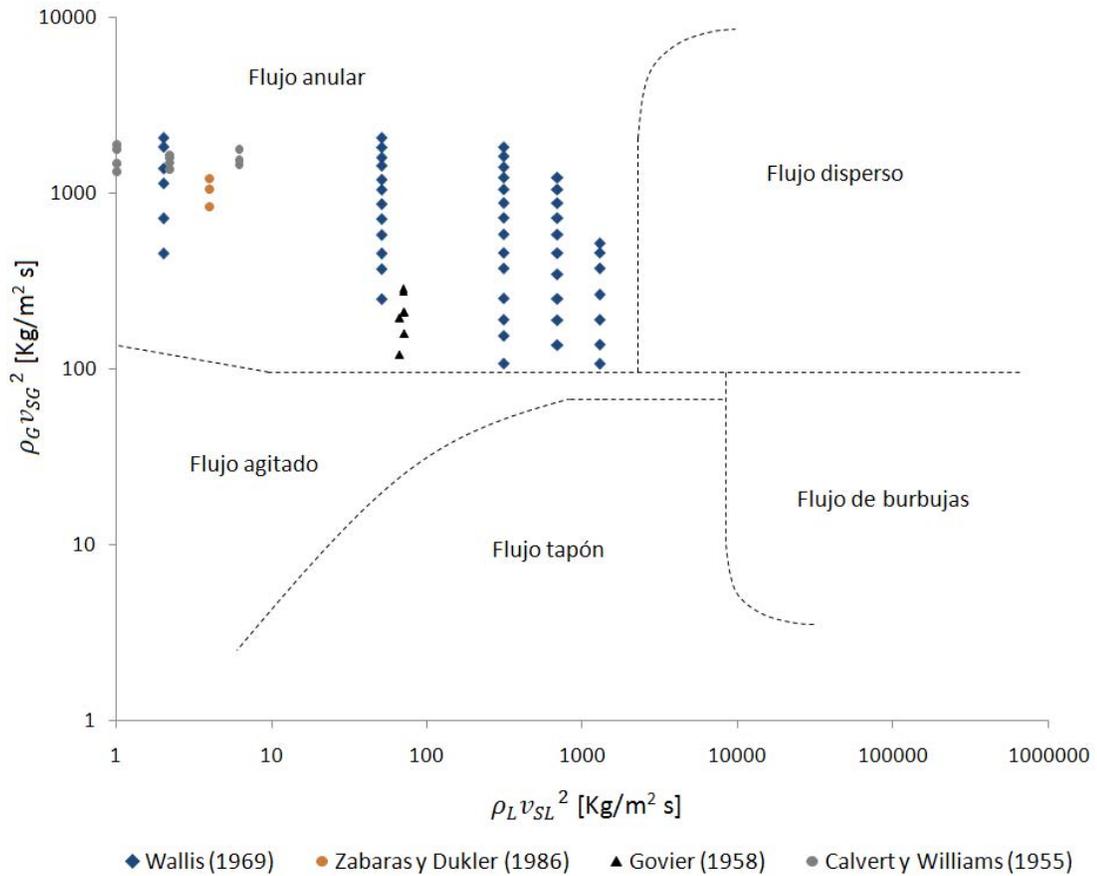


Figura N° 4.17. Representación de los datos experimentales utilizados sobre el mapa de patrones de flujo desarrollado por Hewitt y Roberts para flujo ascendente aire-agua en tuberías verticales (adaptado de Brennen, 2003).

4.4.2 COMPARACIÓN DEL MODELO DESARROLLADO CON LOS DATOS EXPERIMENTALES DISPONIBLES

A continuación se presenta la comparación del modelo desarrollado con los datos experimentales disponibles. Para el gradiente de presión ($\Delta P/L$) la comparación se realizó con 85 puntos experimentales, mientras que para el espesor de

la película (δ) la comparación sólo se pudo llevar a cabo con 15 puntos experimentales.

Para el gradiente de presión el error porcentual absoluto se definió de la siguiente manera:

$$r_i = \left[\frac{|(\Delta P/L)_{exp} - (\Delta P/L)_{pred}|}{(\Delta P/L)_{exp}} \right] 100 \quad (4.69)$$

Donde:

r_i : Error porcentual absoluto.

$(\Delta P/L)_{exp}$: Gradiente de presión experimental.

$(\Delta P/L)_{pred}$: Gradiente de presión predicho por el modelo.

Asimismo para el espesor de la película el error porcentual absoluto se definió de manera similar:

$$r_i = \left[\frac{|(\delta)_{exp} - (\delta)_{pred}|}{(\delta)_{exp}} \right] 100 \quad (4.70)$$

Donde:

$(\delta)_{exp}$: Espesor de película experimental.

$(\delta)_{pred}$: Espesor de película predicho por el modelo.

Además el error porcentual absoluto promedio está definido por:

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (4.71)$$

Donde:

E : Error porcentual absoluto promedio.

n : Número de puntos considerados.

A continuación en la figura N° 4.18 se presenta la comparación entre los datos de caída de presión reportados por Zabarás y Dukler (1986) y Calvert y Williams (1955) y los valores de caída de presión predichos por el modelo desarrollado. En este gráfico la línea negra representa la igualdad entre el gradiente de presión teórico y el gradiente de presión experimental, mientras que las líneas discontinuas corresponden a una variación de $\pm 20\%$.

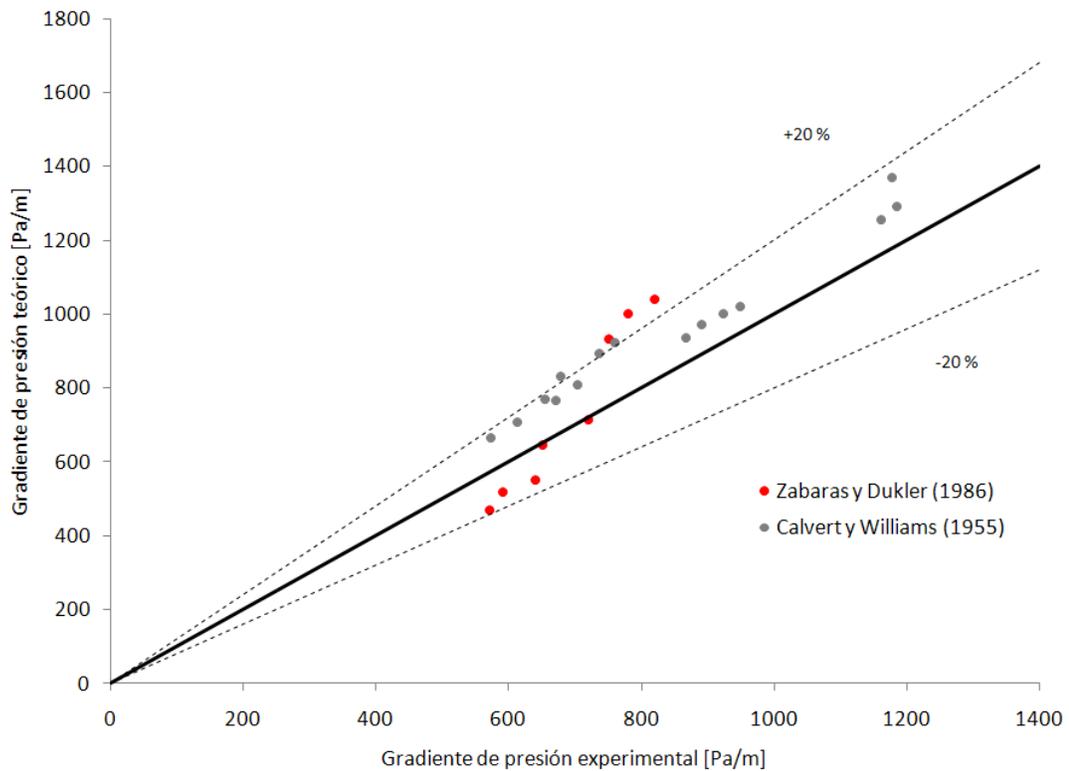


Figura N° 4.18. Gradiente de presión teórico en función del gradiente de presión experimental para los datos de Zabarás y Dukler (1986) y Calvert y Williams (1955).

De manera similar en la figura N° 4.19 se presenta la comparación entre los datos de caída de presión reportados por Wallis (1969) y Govier (1958) y los valores de caída de presión predichos por el modelo desarrollado.

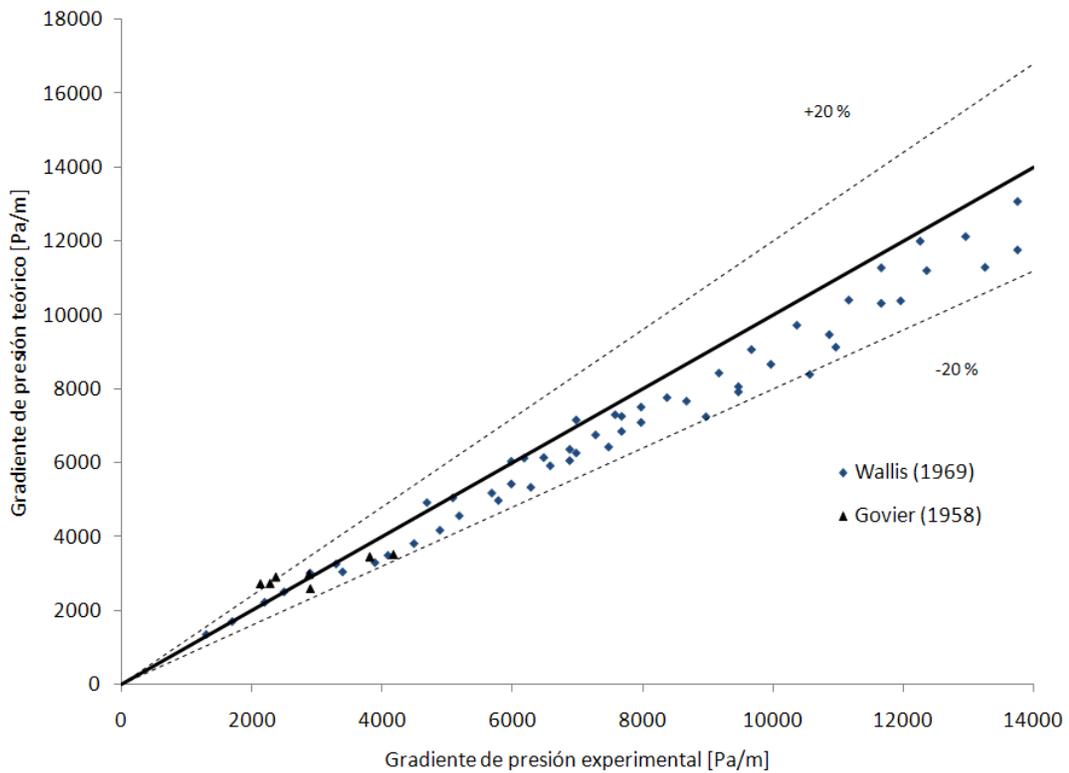


Figura N° 4.19. Gradiente de presión teórico en función del gradiente de presión experimental para los datos de Wallis (1969) y Govier (1968).

De manera general a partir de las figuras N° 4.18 y 4.19 se puede observar que las predicciones de caída de presión arrojadas por el modelo desarrollado están dentro del $\pm 20\%$ respecto a los valores medidos experimentalmente. Esto permite concluir que para los datos experimentales utilizados el modelo predice adecuadamente el gradiente de presión correspondiente.

Asimismo para los 85 puntos experimentales disponibles se obtiene que el error porcentual absoluto promedio es igual a 11 %, lo cual indica que la concordancia entre el modelo desarrollado y los datos experimentales disponibles es buena. Es importante destacar que el error porcentual absoluto promedio de la mayoría de los modelos desarrollados para flujo bifásico (incluyendo el patrón de flujo anular) ronda el 20 o 30 % (García, 2007).

Sin embargo el modelo desarrollado sólo fue comparado con datos de sistemas agua-aire, por lo que se hace necesario compararlo con datos obtenidos para sistemas conformados por otros fluidos para poder sacar más conclusiones al respecto.

A continuación en la figura N° 4.20 se presenta la comparación entre los datos de espesor de película reportados por Zabarás y Dukler (1986) y Govier (1958) y los valores de espesor de película predichos por el modelo desarrollado. Al igual que en las figuras anteriores, en este figura la línea negra representa la igualdad entre el espesor de película teórico y el espesor de película experimental, mientras que las líneas discontinuas corresponden a una variación de $\pm 20\%$.

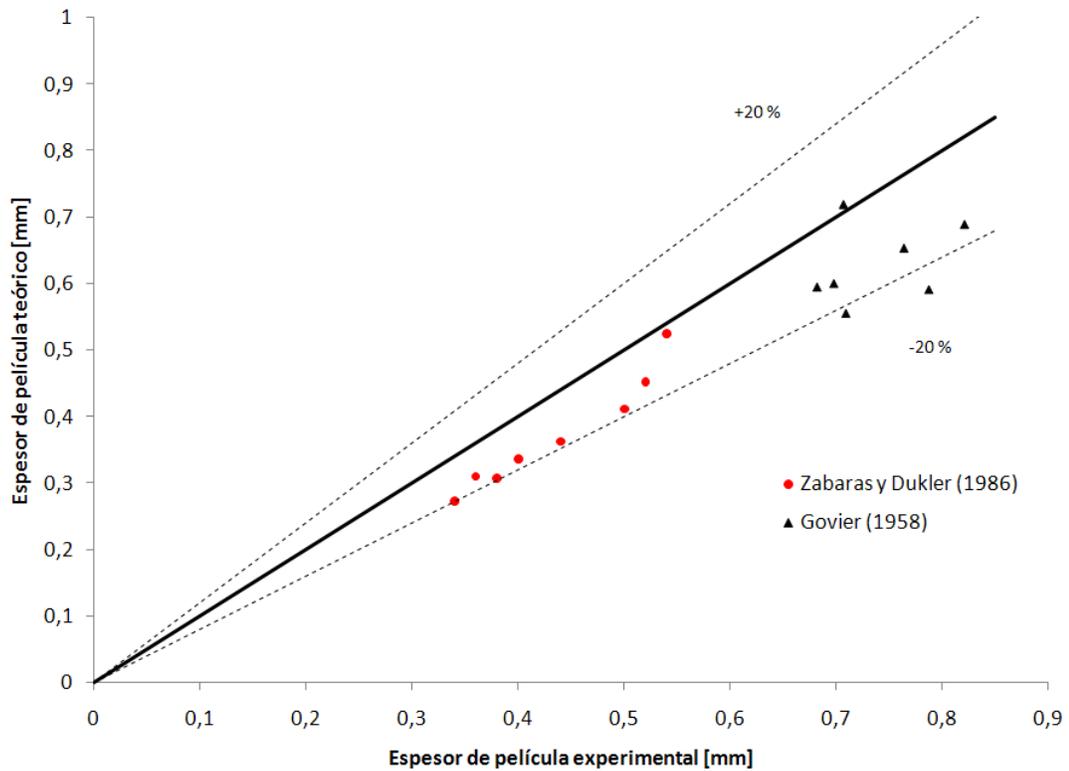


Figura N° 4.20. Espesor de película teórico en función del espesor de película experimental para los datos de Zabarás y Dukler (1986) y Govier (1958).

A partir de la figura N° 4.20 se puede observar que las predicciones del espesor de película arrojadas por el modelo desarrollado están dentro del $\pm 20\%$ respecto a los valores medidos experimentalmente. Por lo tanto es posible afirmar que para los datos experimentales utilizados el modelo predice adecuadamente el espesor de película.

Además para los 15 puntos experimentales disponibles se obtiene que el error porcentual absoluto promedio es igual a 15 %, lo cual indica que la concordancia entre el modelo desarrollado y los datos experimentales disponibles es buena. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, la cantidad de puntos disponibles para comparar con el espesor de la película es notablemente menor por lo que es recomendable realizar una comparación con una mayor cantidad de puntos antes de poder sacar otras conclusiones.

4.4.3 COMPARACIÓN DE OTROS MODELOS CON LOS DATOS EXPERIMENTALES DISPONIBLES

En esta sección se compara el desempeño del modelo desarrollado en el presente trabajo con el desempeño de algunos de los modelos y correlaciones más utilizados en flujo bifásico.

A fin de realizar la comparación correspondiente, de los modelos homogéneos se seleccionó el de Wallis, que data de 1969, ya que es uno de los más conocidos y utilizados (Crowe, 2006). En cuanto a las correlaciones empíricas se utilizó la de Lockhart y Martinelli que data de 1949, pues es una de las correlaciones más utilizadas en la industria y además se encuentra incorporada en diversos paquetes computacionales (García, 2007). Finalmente en cuanto a los modelos mecanicistas, se utilizó el desarrollado por Alves en 1991, ya que es uno de los modelos mecanicistas más precisos que se ha desarrollado para el patrón de flujo anular (Shoham, 2006).

El criterio utilizado para evaluar la capacidad de predicción de los diferentes modelos es el error porcentual absoluto promedio. Para cada uno de los 85 puntos experimentales disponibles se calculó el gradiente de presión utilizando el modelo homogéneo de Wallis, la correlación de Lockhart y Martinelli y el modelo mecanicista de Alves, luego se estimó el error porcentual absoluto para cada punto y finalmente se obtuvo el error porcentual absoluto promedio para cada modelo.

En la tabla N° 4.2 se muestran los resultados obtenidos al evaluar la capacidad de predicción de los diferentes modelos citados anteriormente.

Tabla N° 4.2 Desempeño de los modelos evaluados.

Modelo evaluado	Error absoluto promedio, E [%]
Modelo homogéneo de Wallis	37
Correlación de Lockhart y Martinelli	24
Modelo mecanicista de Alves	18
Modelo desarrollado en el presente trabajo	11

De acuerdo a los resultados reportados en la tabla N° 4.2 se puede afirmar que el modelo desarrollado en el presente trabajo presenta el mejor desempeño en la predicción del gradiente de presión con un error absoluto promedio de 11%. Es seguido del modelo mecanicista de Alves con un error absoluto promedio de 18%. El tercer mejor desempeño lo obtiene la correlación de Lockhart y Martinelli con un error absoluto promedio de 24%, mientras que el peor desempeño lo obtiene el modelo homogéneo de Wallis con un error absoluto promedio de 37%.

Como se mencionó anteriormente el modelo homogéneo de Wallis arroja predicciones inadecuadas para el patrón de flujo anular, por lo tanto es razonable que obtenga el peor desempeño. En cuanto a la correlación de Lockhart y Martinelli esta fue desarrollada para flujo horizontal, aunque incluyendo el efecto de las fuerzas de gravedad es capaz de predecir adecuadamente el gradiente de presión en tuberías

verticales. Sin embargo esta correlación tiene como desventaja el hecho de que no toma en cuenta la existencia de los patrones de flujo.

Por otro lado el modelo mecanicista de Alves es el que obtiene el segundo mejor desempeño, ya que éste fue desarrollado tomando en cuenta la geometría del patrón de flujo anular, sin embargo este modelo se complementa con correlaciones empíricas cuyo margen de aplicabilidad es limitado en algunos casos (Crowe, 2006). Por lo tanto puede generar predicciones inadecuadas para algunos puntos.

En cuanto al modelo desarrollado en el presente trabajo se puede afirmar que para los datos experimentales disponibles obtiene el mejor desempeño, sin embargo, es importante señalar que las comparaciones se hicieron con datos de sistemas agua-aire, por lo que se hace necesario hacer comparaciones con datos obtenidos para sistemas conformados por otros fluidos, para que de esta manera sea posible obtener más conclusiones al respecto.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

1. Se desarrolló un modelo con solución analítica para el flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular en tuberías verticales lisas, para el caso en el que ambos fluidos se encuentran en régimen turbulento.
2. La teoría de longitud de mezcla de Prandtl es una teoría adecuada para expresar los esfuerzos de Reynolds, con la ventaja de que permite obtener soluciones analíticas simples.
3. Se determinó que en la dirección del movimiento del fluido el efecto de las ondulaciones y de la tensión interfacial es importante a nivel local, pero no de manera global. Por lo tanto es válido suponer que la interfase entre ambos fluidos es plana y lisa y utilizar un espesor de película promedio.
4. Luego de adimensionalizar las ecuaciones diferenciales correspondientes al modelo desarrollado se encontró que los parámetros adimensionales que describen el fenómeno de interés son el número de Reynolds superficial del líquido (Re_{SL}), el número de Froude superficial del líquido (Fr_{SL}), la relación entre el caudal del gas y el caudal del líquido (Q^*) y la relación entre la densidad del líquido y la densidad del gas (ρ^*).
5. Se obtuvieron expresiones para los perfiles de esfuerzo cortante y de velocidad en forma adimensional que dependen de los parámetros adimensionales Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* , de la caída de presión adimensional (Δp^*) y la relación de radios (κ).

6. Se desarrollaron expresiones que permiten calcular la caída de presión adimensional (Δp^*) y la relación de radios (κ) (o de manera equivalente, el espesor de la película o el holdup de líquido) dados Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* .
7. Se verificó que el modelo planteado se puede reducir al caso monofásico al hacer algunas sustituciones en las ecuaciones correspondientes, obteniendo una ecuación implícita del factor de fricción en función del número de Reynolds para tuberías lisas. Al comparar dicha ecuación con la correlación de Prandtl para tubos lisos se concluyó que ambas concuerdan para un amplio rango de números de Reynolds.
8. Los valores de caída de presión y del espesor de la película predichos por el modelo están dentro del $\pm 20\%$ respecto a los valores medidos experimentalmente, por lo tanto la concordancia entre el modelo desarrollado y los datos experimentales disponibles es buena en comparación con otros modelos desarrollados para este patrón de flujo.
9. Se determinó que al comparar con el gradiente de presión el error porcentual absoluto promedio es igual a 11 %, mientras que al comparar con el espesor de la película el error porcentual absoluto promedio es igual a 15 %, en ambos casos el error porcentual absoluto promedio se encuentra por debajo del 20 %, por lo que se puede afirmar que el modelo desarrollado reproduce adecuadamente los datos experimentales disponibles.
10. Luego de evaluar la capacidad de predicción de diferentes modelos se concluye que el modelo desarrollado en el presente trabajo obtiene el mejor desempeño para los datos experimentales disponibles, seguido del modelo mecanicista de Alves, de la correlación de Lockhart y Martinelli y del modelo homogéneo de Wallis.

5.2 RECOMENDACIONES

1. Se recomienda comparar el modelo desarrollado con datos experimentales para sistemas conformados por fluidos diferentes al aire y al agua. Asimismo se sugiere buscar una mayor cantidad de datos para el espesor de la película a fin de poder hacer una comparación más extensa.
2. Se propone buscar datos de perfiles de velocidad experimentales para flujo bifásico gas-líquido en patrón de flujo anular a fin de comparar con los perfiles de velocidad teóricos obtenidos en el presente trabajo.
3. Se recomienda desarrollar a partir de datos experimentales correspondientes al arrastre, una expresión para la longitud de mezclado del gas donde la constante k_G sea una función de la fracción de líquido arrastrada por el gas (f_E).
4. Se propone desarrollar correlaciones para la caída de presión adimensional (Δp^*) y la relación de radios (κ) en función de los parámetros adimensionales Re_{SL} , Fr_{SL} , Q^* y ρ^* que incluyan el efecto de la rugosidad de la tubería.
5. Se sugiere extender la metodología de este trabajo para desarrollar un modelo para flujo horizontal que tome en cuenta la excentricidad.
6. Se propone utilizar la metodología empleada en el presente trabajo para desarrollar modelos para otros patrones de flujo similares, como el patrón de flujo estratificado.
7. Se recomienda utilizar el modelo obtenido como punto de partida para trabajos posteriores donde se incluyan los efectos de la transferencia de calor y la transferencia de masa.

CAPÍTULO VI

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

6.1 BIBLIOGRAFÍA

- Abolfadl, M., y Wallis, G. (1986). An Improved Mixing Length Model for Annular Two-Phase Flow with Liquid Entrainment. *Nuclear Engineering and Design* (95): 233-241.
- Alarcón, G. (1998). Flujo de dos fases. Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.
- Biasi, L. (1968). A Theoretical Approach to the Analysis of an Adiabatic Two-Phase Annular Dispersed Flow. *Energia Nucleare* (15): 394-405.
- Bird R., Stewart W., Lightfoot E. (2006). Fenómenos de Transporte. Universidad de Wisconsin, 2^{da} edición, Editorial Limusa.
- Brennen, C. (2003). *Fundamentals of Multiphase Flow*. California Institute of Technology.
- Calvert, S. y Williams, B. (1955). Upward Cocurrent Annular Flow of Air and Water in Smooth Tubes. *A.I.Ch.E Journal* (1): 78-86.
- Crowe, C. (2006). *Multiphase Flow Handbook*. Nueva York: Taylor and Francis Group.
- García, F. (2007, Octubre 23-25). Evaluación de los Modelos Homogéneos, de Correlación y Mecanicistas en la Predicción de la Caída de Presión de Flujo Bifásico de Gas y Líquido en Tuberías Verticales. Paper presentado en 8° Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica. Cusco: Federación Iberoamericana de Ingeniería Mecánica.

- García, F *et. al.* (2003). Power Law and Composite Power Law Friction Factor Correlations for Laminar and Turbulent Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipelines. *International Journal of Multiphase Flow* (29): 1605-1624.
- Govier, G. W. (1958). The Upward Vertical Flow of Air-Water Mixtures: II. Effect of Tubing Diameter on Flow-Pattern Holdup and Pressure Drop. *Canadian Journal of Chemical Engineering* (36): 195-202.
- Hashizume, K. y Ogiwara, H. (1985). Flow Pattern, Void Fraction and Pressure Drop of Refrigerant Two-Phase Flow in a Horizontal Pipe-II: Analysis of Frictional Pressure Drop. *International Journal of Multiphase Flow* (11): 643-658.
- Joseph, D.D. (1993). Friction Factor and Holdup Studies for Lubricated Pipelining-I. *International Journal of Multiphase Flow* (19): 1061-1076.
- Levy, S. (1966). Prediction of Two-Phase Annular Flow with Liquid Entrainment. *International Journal of Heat and Mass Transfer Flow* (9): 171-188.
- Oliemans, R. (1987). Core Annular Oil/Water Flow: The Turbulent-Lubricating Film Model and Measurements in a 5 cm Pipe Loop. *International Journal of Multiphase Flow* (13): 23-31.
- Piskunov, R. (1983). *Cálculo Diferencial e Integral*. Moscú: Editorial Mir.
- Rovinsky, J. (1997). Analytical Solution for Laminar Two-Phase Flow in a Fully Eccentric Core-Annular Configuration. *International Journal of Multiphase Flow* (23): 523-543.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary Layer Theory*. McGraw Hill.
- Shoham, O. (2006). *Mechanistic Modelling of Gas-Liquid Two-Phase flow in Pipes*. Universidad de Tulsa, Sociedad de Ingenieros de Petróleo.
- Su, J. (2006). Exact Solution of Thermal Entry Problem in Laminar Core-Annular Flow of Two Immiscible Liquids. *Chemical Engineering Research and Design* 84 (A11): 1051–1058.

- Versteeg, H.K. (1995). An Introduction to Computational Fluid Dynamics. Longman Scientific and Technical.
- Wallis, G.B. (1969). One-Dimensional Two-Phase Flow. Editorial McGraw-Hill, Nueva York.
- Welty J. (1999). Fundamentos de Transferencia de Cantidad de Movimiento, Calor y Masa, Editorial Limusa, México.
- White F. (2004). Mecánica de Fluidos. Universidad de Rhode Island, 2^{da} edición, Editorial McGraw-Hill.
- Zabaras, G. y Dukler, A.E. (1986). Vertical Upward Cocurrent Gas-Liquid Annular Flow. A.I.Ch.E. Journal (7): 829-843.

APÉNDICES

APÉNDICE A. MODELO HOMOGÉNEO DE WALLIS

Este modelo fue desarrollado por Wallis en 1969 bajo las siguientes suposiciones (Shoham, 2006):

- Flujo unidimensional y en estado estacionario.
- Las dos fases están bien mezcladas y en equilibrio.
- No ocurre deslizamiento entre las fases.
- Ambas fases son compresibles (por ejemplo, $v_G = v_G(p)$ y $v_L = v_L(p)$, donde v es el volumen específico).
- El área de la sección transversal de la tubería no es constante y puede variar en la dirección axial (por ejemplo $A_T = A_T(L)$, donde A_T es el área de la sección transversal de la tubería).
- Puede ocurrir transferencia de masa entre las fases, por lo tanto la calidad de la mezcla x_M varía a lo largo de la tubería.

Una vez realizadas estas suposiciones se plantea un balance macroscópico de cantidad de movimiento lineal a un segmento de tubería de diámetro d y de longitud dL similar al mostrado en la figura N° A.1.

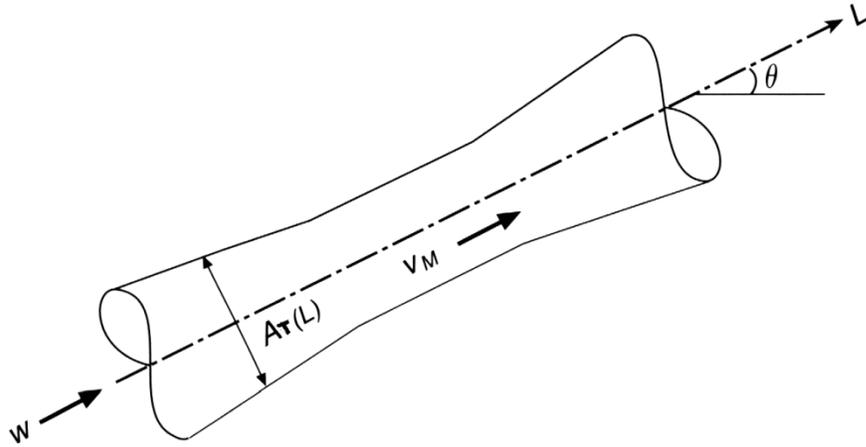


Figura N° A.1. Volumen de control utilizado para desarrollar el modelo homogéneo de Wallis
(adaptado de Shoham, 2006).

Aplicando la ecuación 2.34 al volumen de control descrito anteriormente se tiene:

$$-\frac{dp}{dL} = f \frac{\pi d}{A_T} \frac{\rho_M v_M^2}{2} + \rho_M g \text{sen} \theta + \frac{W}{A_T} \frac{dv_M}{dL} \quad (\text{A.1})$$

Donde:

v_M : Velocidad de la mezcla.

W : Flujo másico de la mezcla.

ρ_M : Densidad de la mezcla.

Utilizando la definición de velocidad de la mezcla $v_M = W/\rho_M A_T$ y reordenando, la ecuación A.1 se reduce a:

$$-\frac{dp}{dL} = f \frac{\pi d}{A_T} \frac{\rho_M v_M^2}{2} + \rho_M g \text{sen} \theta + \frac{W^2}{A_T} \frac{d}{dL} \left(\frac{1}{\rho_M A_T} \right) \quad (\text{A.2})$$

En la ecuación anterior la caída de presión depende de tres términos: un término relacionado con la fricción o esfuerzo de corte en la pared, un término referido a la gravedad y un término asociado al cambio de velocidad debido a la

compresibilidad de las fases. Las propiedades de mezcla (densidad y viscosidad) se definen utilizando la fracción volumétrica de líquido sin deslizamiento λ_L :

$$\begin{aligned}\rho_M &= \rho_L \lambda_L + \rho_G (1 - \lambda_L) \\ \mu_M &= \mu_L \lambda_L + \mu_G (1 - \lambda_L)\end{aligned}\tag{A.3}$$

Donde ρ_L y ρ_G son las densidades del líquido y gas respectivamente, y de manera similar μ_L y μ_G son las viscosidades del líquido y gas. Otra manera de definir la densidad de la mezcla es en función de la calidad de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho_M} = \frac{x_M}{\rho_G} + \frac{1 - x_M}{\rho_L} = x_M v_G + (1 - x_M) v_L\tag{A.4}$$

Por otro lado el factor de fricción definido en la ecuación A.2 es función del número de Reynolds de la mezcla $Re_M = \rho_M v_M d / \mu_M$ y de la rugosidad relativa de la tubería ε/d , y puede ser determinado utilizando la ecuación de Colebrook.

Finalmente es necesario obtener una expresión para el último término de la ecuación A.2, desarrollando se tiene:

$$\frac{W^2}{A_T} \frac{d}{dL} \left(\frac{1}{\rho_M A_T} \right) = \frac{W^2}{A_T^2} \frac{d}{dL} \left(\frac{1}{\rho_M} \right) - \frac{W^2}{\rho_M A_T^3} \frac{dA_T}{dL}\tag{A.5}$$

Donde el término $d/dL (1/\rho_M)$ se puede expresar en función de los volúmenes específicos de cada una de las fases:

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{1}{\rho_M} \right) = \frac{d}{dL} [x_M v_G + (1 - x_M) v_L] = (v_G - v_L) \frac{dx_M}{dL} + x_M \frac{dv_G}{dL} + (1 - x) \frac{dv_L}{dL}\tag{A.6}$$

Reescribiendo la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{1}{\rho_M} \right) = (v_G - v_L) \frac{dx_M}{dL} + \frac{dp}{dL} \left[x_M \frac{dv_G}{dp} + (1 - x_M) \frac{dv_L}{dp} \right]\tag{A.7}$$

Sustituyendo la ecuación A.7 en la ecuación A.5, luego la ecuación A.5 en la ecuación A.2 y reordenando, finalmente se obtiene una expresión para calcular la caída de presión:

$$-\frac{dp}{dL} = \frac{f \frac{\pi d}{A_T} \frac{\rho_M v_M^2}{2} + \rho_M g \sin \theta + \frac{W^2}{A_T^2} (v_G - v_L) \frac{dx_M}{dL} - \frac{W^2}{\rho_M A_T^3} \frac{dA_T}{dL}}{1 + \frac{W^2}{A_T^2} \left[x_M \frac{dv_G}{dp} + (1 - x_M) \frac{dv_L}{dp} \right]} \quad (\text{A.8})$$

Para casos especiales la ecuación A.8 se puede simplificar de la siguiente manera:

-Área de sección transversal constante:

$$\frac{dA_T}{dL} = 0$$

-No existe cambio de fase:

$$\frac{dx_M}{dL} = 0$$

-Líquido incompresible:

$$\frac{dv_L}{dp} = 0$$

APÉNDICE B. CORRELACIÓN DE LOCKHART Y MARTINELLI

La correlación de Lockhart y Martinelli fue desarrollada en 1949 para flujo en tuberías horizontales. No toma en cuenta la existencia de los patrones de flujo, pero si predice el deslizamiento entre las fases (Crowe, 2006).

En esta correlación la caída de presión en la tubería debido a la fricción viene dada por la siguiente expresión:

$$\left(-\frac{dp}{dL}\right)_F = \phi_L^2 \left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SL} = \phi_G^2 \left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SG} \quad (\text{B.1})$$

Donde los gradientes de presión superficiales de líquido y gas vienen dados respectivamente por las siguientes ecuaciones:

$$\left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SL} = \frac{2}{d} f_L \rho_L v_{SL}^2 \quad f_L = f(Re_{SL}, \varepsilon/d) \quad Re_{SL} = \frac{v_{SL} \rho_L d}{\mu_L} \quad (\text{B.2})$$

$$\left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SG} = \frac{2}{d} f_G \rho_G v_{GL}^2 \quad f_G = f(Re_{SG}, \varepsilon/d) \quad Re_{SG} = \frac{v_{SG} \rho_G d}{\mu_G} \quad (\text{B.3})$$

Los parámetros adimensionales ϕ_L y ϕ_G se pueden obtener de la figura N° B.1 a partir del parámetro adimensional X definido como:

$$X = \sqrt{\frac{\left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SL}}{\left(-\frac{dp}{dL}\right)_{SG}}} \quad (\text{B.4})$$

Asimismo el holdup de líquido H_L se puede obtener de la figura N° B.1 conociendo el valor del parámetro adimensional X .

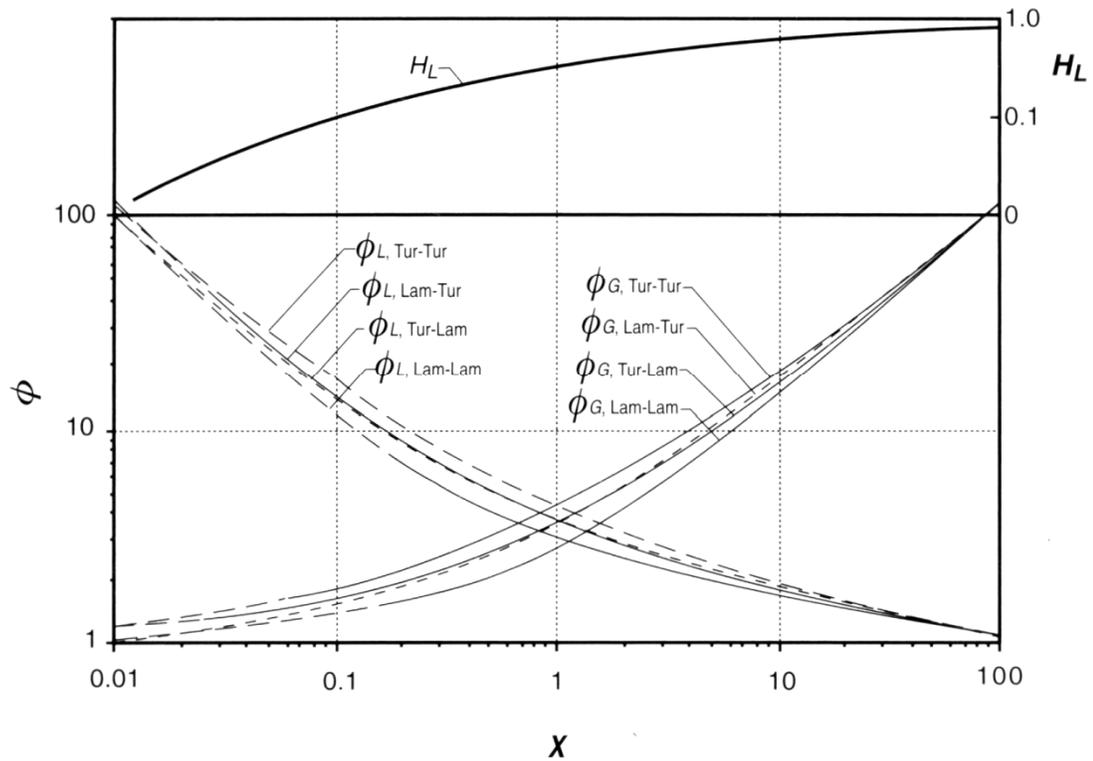


Figura N° B.1 Parámetros adimensionales de la correlación de Lockhart y Martinelli (Crowe, 2006)

En 1967 Chisholm ajustó las curvas suministradas en la figura N° B.1.1 y obtuvo las siguientes ecuaciones para ϕ_L y H_L (Crowe, 2006):

$$\phi_L = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2} \qquad H_L = 1 - (1 + X^{0,8})^{-0,378} \qquad (B.5)$$

Donde los valores de la constante C vienen dados en la tabla N° B.1.

Tabla N° B.1. Valores de la constante C a utilizar en las ecuaciones de Chisholm

Fase líquida	Fase gaseosa	C
Turbulenta	Turbulenta	20
Laminar	Turbulenta	12
Turbulenta	Laminar	10
Laminar	Laminar	5

Finalmente es importante mencionar que para aplicar esta correlación a tuberías verticales es necesario sumar un gradiente de presión debido al efecto de la gravedad el cual viene dado por (Crowe, 2006):

$$\left(-\frac{dp}{dL}\right)_G = \rho_M g \sin\theta \quad (\text{B.6})$$

Donde ρ_M es la densidad de la mezcla que se define utilizando la ecuación A.3.

APÉNDICE C. MODELO MECANICISTA DE ALVES PARA EL PATRÓN DE FLUJO ANULAR

Este modelo fue desarrollado para el patrón de flujo anular en flujo vertical ascendente bajo las siguientes suposiciones (Shoham, 2006):

- Flujo unidimensional y completamente desarrollado.
- Espesor de película uniforme.
- El gas contiene pequeñas gotas de líquido arrastradas. No existe deslizamiento entre estas gotas y la corriente de gas.
- Flujo incompresible e isotérmico.

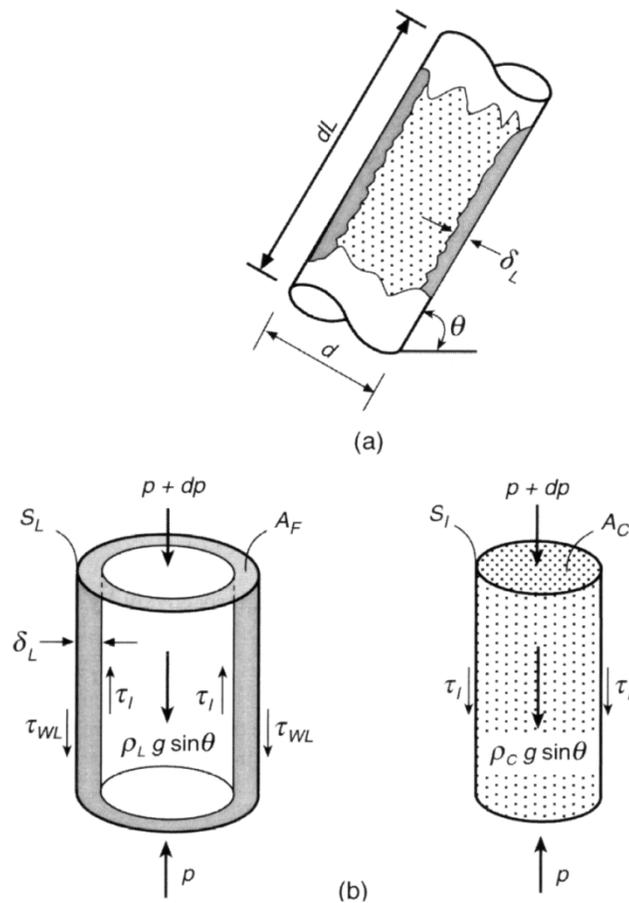


Figura N° C.1. Volumen de control utilizado para desarrollar el modelo mecanicista de Alves (adaptado de Shoham, 2006).

El modelo se deduce aplicando balances macroscópicos de cantidad de movimiento lineal por separado a la película de líquido y al núcleo de gas. En la figura N° C.1 parte a se muestra un esquema general del patrón de flujo anular en flujo vertical ascendente, en la parte b se muestran los volúmenes de control empleados para aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal a cada una de las fases.

Aplicando balances macroscópicos de cantidad de movimiento lineal a cada una de las fases se obtiene:

Para la película de líquido:

$$-\tau_W \frac{S_W}{A_F} + \tau_I \frac{S_I}{A_F} - \frac{dp}{dL} - \rho_L g \sin \theta = 0 \quad (\text{C.1})$$

Para el núcleo de gas:

$$\tau_I \frac{S_I}{A_C} - \frac{dp}{dL} - \rho_C g \sin \theta = 0 \quad (\text{C.2})$$

Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$-\tau_W \frac{S_W}{A_F} + \tau_I S_I \left(\frac{1}{A_F} + \frac{1}{A_C} \right) - (\rho_L - \rho_C) g \sin \theta = 0 \quad (\text{C.3})$$

Donde A_F es el área de sección transversal ocupada por el líquido, A_C es el área de sección transversal ocupada por el gas, S_I es el perímetro de la interfase y S_W es el perímetro de la tubería. Estas variables se pueden expresar en función del diámetro de la tubería d y el espesor de la película δ_L mediante las siguientes ecuaciones:

$$A_C = \frac{\pi(d - 2\delta_L)^2}{4} \quad (\text{C.4})$$

$$A_F = \pi\delta_L(d - \delta_L) \quad (C.5)$$

$$S_I = \pi(d - 2\delta_L) \quad (C.6)$$

$$S_W = \pi d \quad (C.7)$$

Asimismo se pueden definir los diámetros hidráulicos para la película y para el núcleo de gas respectivamente:

$$d_F = \frac{4\delta_L(d - \delta_L)}{d} \quad (C.8)$$

$$d_C = (d - 2\delta_L) \quad (C.9)$$

La velocidad de la película de líquido viene dada por:

$$v_F = v_{SL} \frac{(1 - f_E)d^2}{4\delta_L(d - \delta_L)} \quad (C.10)$$

Donde f_E es la fracción de líquido arrastrado por el gas en forma de pequeñas gotas la cual se estima utilizando una correlación empírica. De manera adicional la velocidad del núcleo de gas viene dada por:

$$v_C = \frac{(v_{SC})d^2}{(d - 2\delta_L)^2} \quad (C.11)$$

Donde:

$$v_{SC} = v_{SG} + v_{SL}f_E \quad (C.12)$$

En la ecuación C.3 τ_{WL} es el esfuerzo de corte en la pared para la fase líquida el cual se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\tau_{WL} = f_F \frac{\rho_L v_F^2}{2} \quad (C.13)$$

Donde f_F es el factor de fricción de la película que viene dado por:

$$f_F = f(Re_F, \varepsilon/d) \quad Re_F = \frac{\rho_L v_F d_F}{\mu_L} \quad (C.14)$$

De manera similar en la ecuación C.3 τ_I es el esfuerzo de interfacial el cual viene dado por la siguiente expresión:

$$\tau_I = f_I \frac{\rho_C (v_C - v_F)^2}{2} \quad (C.15)$$

Donde f_I es el factor de fricción interfacial que viene dado por:

$$f_I = I \cdot f_{SC} \quad (C.16)$$

En la ecuación anterior I es un parámetro adimensional que se obtiene mediante el uso de una correlación empírica y f_{SC} es el factor de fricción superficial del núcleo de gas que viene dado por:

$$f_{SC} = f(Re_{SC}, \varepsilon/d) \quad Re_{SC} = \frac{\rho_C v_{SC} d}{\mu_C} \quad (C.17)$$

Las propiedades físicas del núcleo de gas deben ser promediadas utilizando la fracción vacía del núcleo α_C definida por:

$$\alpha_C = \frac{v_{SG}}{v_{SG} + v_{SL} f_E} \quad (C.18)$$

Entonces la densidad del núcleo ρ_C y la viscosidad del núcleo μ_C vienen dadas por:

$$\rho_C = \rho_G \alpha_C + \rho_L (1 - \alpha_C) \quad (C.19)$$

$$\mu_C = \mu_G \alpha_C + \mu_L (1 - \alpha_C) \quad (C.20)$$

Adicionalmente es necesario disponer de correlaciones para calcular el parámetro adimensional I y la fracción de líquido arrastrado por el gas en forma que pequeñas gotas f_E por lo tanto se tiene:

$$I = 1 + 24 \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} \right)^{1/3} \frac{\delta_L}{d} \quad (\text{C.21})$$

$$f_E = 1 - e \left[-0,125 \left(10^4 \frac{\nu_{SG} \mu_G}{\sigma} \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right)^{0,5} - 1,5 \right) \right] \quad (\text{C.22})$$

Finalmente al sustituir el conjunto de ecuaciones dado anteriormente en la ecuación C.3 se obtiene una ecuación trascendente en función del espesor de película δ_L , la cual se puede resolver de manera iterativa. Una vez obtenido el espesor de la película δ_L , la caída de presión se puede calcular utilizando las ecuaciones C.1 o C.2 (Shoham, 2006).

APÉNDICE D. DESARROLLO DETALLADO DEL MODELO MATEMÁTICO

APÉNDICE D.1. ADIMENSIONALIZACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO Y SOLUCIÓN ANALÍTICA

En esta sección se presenta el detalle del procedimiento matemático utilizado para llevar a cabo la adimensionalización y solución analítica del modelo desarrollado. El desarrollo matemático se llevó a cabo usando el programa de cálculo simbólico Maxima 5.14 (software libre).

Ecuaciones que conforman el modelo:

- Región I, corriente turbulenta principal de la fase gaseosa, $0 \leq r \leq R_1$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rzI}(r)) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_G g$$

$$\tau_{rzI}(r) = \rho_G l_G^2 \left(\frac{d}{dr} (v_{zI}(r)) \right)^2$$

- Región II, corriente turbulenta principal de la fase líquida, $R_1 \leq r \leq R_2 - c$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz2II}(r)) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \approx \frac{d}{dr} (\tau_{rz2II}(r)) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g$$

$$\tau_{rz2II}(r) = \rho_L l_L^2 \left(\frac{d}{dr} (v_{z2II}(r)) \right)^2$$

- Región III, subcapa laminar de la fase líquida, $R_2 - c \leq r \leq R_2$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz2III}(r)) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g \approx \frac{d}{dr} (\tau_{rz2III}(r)) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g$$

$$\tau_{rz2III}(r) = -\mu_L \frac{d}{dr} (v_{z2III}(r))$$

Donde la longitud de mezclado para cada fase viene dada por:

-Fase gaseosa:

$$l_G = k_G(R_2 - r)$$

-Fase líquida:

$$l_L = k_L(R_2 - r)$$

Donde k_L es igual 0.4 y k_G es igual a 0.2.

Y c es el espesor de la subcapa laminar el cual viene dado por:

$$c = \frac{N}{\frac{\rho_L}{\mu_L} \sqrt{\frac{\tau_{rz2III}(r=R_2)}{\rho_L}}}$$

Donde N es una constante. En este caso N es igual a 11.

Condiciones de frontera:

C.L 1	$r = 0$	$\tau_{rzI} = \text{finito}$
-------	---------	------------------------------

C.L 2	$r = R_1$	$\tau_{rzI} = \tau_{rzII}$
-------	-----------	----------------------------

C.L 3	$r = R_1$	$v_{zI} = v_{zII}$
-------	-----------	--------------------

C.L 4	$r = R_2 - c$	$\tau_{rzII} = \tau_{rzIII}$
-------	---------------	------------------------------

C.L 5	$r = R_2 - c$	$v_{z2II} = v_{z2III}$
-------	---------------	------------------------

C.L 6	$r = R_2$	$v_{z2III} = 0$
-------	-----------	-----------------

El caudal de cada una de las fases viene dado por:

- Fase gaseosa, $0 \leq r \leq R_1$:

$$Q_1 = 2 \pi \int_0^{R_1} v_{zI}(r) r \, dr$$

- Fase líquida, $R_1 \leq r \leq R_2$:

$$Q_2 = 2 \pi \int_{R_1}^{R_2-c} v_{z2II}(r) r \, dr + 2 \pi \int_{R_2-c}^{R_2} v_{z2III}(r) r \, dr \approx 2 \pi \left(R_2 - \frac{\delta}{2} \right) \left(\int_{R_1}^{R_2-c} v_{z2II}(r) \, dr + \int_{R_2-c}^{R_2} v_{z2III}(r) \, dr \right)$$

Ahora se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\tau_{rzI}^* = \tau_I = \frac{\tau_{rzI}}{\rho_L v_{SL}^2}$$

$$\tau_{rzII}^* = \tau_{II} = \frac{\tau_{rz2II}}{\rho_L v_{SL}^2}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rzIII}^* &= \tau_{III} = \\ &= \frac{\tau_{rz2III}}{\rho_L v_{SL}^2} \end{aligned}$$

$$v_{zI}^* = v_I = \frac{v_{zI}}{v_{SL}}$$

$$v_{zII}^* = v_{II} = \frac{v_{z2II}}{v_{SL}}$$

$$v_{zIII}^* = v_{III} = \frac{v_{z2III}}{v_{SL}}$$

$$\Delta p^* = \Delta p = \frac{\Delta P}{\rho_L v_{SL}^2} R_2$$

$$\eta = \frac{r}{R_2}$$

$$\kappa = \frac{R_1}{R_2}$$

$$b = \frac{c}{R_2}$$

Asimismo se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned}
 Rel &= 1 & FrI &= \frac{v_{SL}^2}{g \cdot 2 R_2} & Q^* &= Q = \frac{Q_1}{Q_2} & \rho^* &= \rho = \frac{\rho_L}{\rho_G} \\
 &/ & & & & & & \\
 &(\mu_L)(\rho_L v_{SL} & & & & & & \\
 &2 R_2) & & & & & &
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las variables y los parámetros adimensionales definidos anteriormente y reordenando se obtienen las ecuaciones que conforman el modelo en forma adimensional.

> restart;

- Región I, $0 \leq r \leq R_1$:

-Adimensionalización de la ecuación de cantidad de movimiento:

> E1:=expand((diff(r*tau[rzI](r),r))/r
 =`ΔP`/L-rho[G]*g):E1;

$$\frac{\tau_{rzI}(r)}{r} + \frac{d}{dr} \tau_{rzI}(r) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_G g$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rzI}(r) = \tau_I(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \Delta p \cdot \rho_L v_{SL}^2 \frac{1}{R_2}$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

```
> E2:=subs(r=eta*R[2],subs(`&Delta;P`/L
=&Delta;p`*rho[L]*v[SL]^2/R[2],subs(tau[rzI](r)=tau[I](eta)*rho[L]*v[SL]^2,subs(diff(tau[rzI](r),
r)=(diff(tau[I](eta),eta))*rho[L]*v[SL]^2/R[2],E1)))):E2;
```

$$\frac{\tau_I(\eta) \rho_L v_{SL}^2}{\eta R_2} + \frac{\left(\frac{d}{d\eta} \tau_I(\eta)\right) \rho_L v_{SL}^2}{R_2} = \frac{\Delta p \rho_L v_{SL}^2}{R_2} - \rho_G g$$

Ahora dividiendo la ecuación anterior entre $\rho_L v_{SL}^2$, luego multiplicándola por R_2 y posteriormente utilizando las definiciones de ρ y Fr_l , se obtiene la ecuación D.1 en forma adimensional:

```
> E3:=subs(R[2]=v[SL]^2/(2*Fr1*g),subs(rho[L]=rho[G]*rho,expand(E2*R[2]/(rho[L]*v[SL]^2)))):E3;
```

$$\frac{\tau_I(\eta)}{\eta} + \frac{d}{d\eta} \tau_I(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr_l \rho}$$

-Adimensionalización de la ecuación correspondiente a la teoría de longitud de mezcla de Prandtl:

```
> E4:=tau[rzI](r)=rho[G]*(k[G]*(R[2]-r))^2*(diff(v[zI](r),r))^2:E4;
```

$$\tau_{rzI}(r) = \rho_G k_G^2 (R_2 - r)^2 \left(\frac{d}{dr} v_{zI}(r)\right)^2$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rzI}(r) = \tau_I(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$v_{zI}(r) = v_{SL} \cdot v_I(\eta)$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

```
> E5:=subs(r=eta*R[2],subs(tau[rzI](r)=tau[I](eta)*rho[L]*v[SL]^2,subs(diff(v[zI](r),r)=v[SL]*(diff(v[I](eta),eta)))/
```

R[2],E4))):E5;

$$\tau_I(\eta) \rho_L v_{SL}^2 = \frac{\rho_G k_G^2 (R_2 - \eta R_2)^2 v_{SL}^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_I(\eta) \right)^2}{R_2^2}$$

Ahora simplificando la ecuación anterior y utilizando las definiciones de ρ se obtiene la ecuación D.4 en forma adimensional:

> E6:=subs(R[2]=1,subs(rho[L]=rho*rho[G],E5/(rho[G]*v[SL]^2))):E6;

$$\tau_I(\eta) \rho = k_G^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_I(\eta) \right)^2$$

▪ Región II, $R_1 \leq r \leq R_2 - c$:

-Adimensionalización de la ecuación de cantidad de movimiento:

> E7:=diff(tau[rzII](r),r) =`ΔP`/L-rho[L]*g:E7;

$$\frac{d}{dr} \tau_{rzII}(r) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rzII}(r) = \tau_{II}(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \Delta p \cdot \rho_L v_{SL}^2 \frac{1}{R_2}$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

> E8:=subs(r=eta*R[2],subs(`ΔP`/L =`Δp`*rho[L]*v[SL]^2/R[2],subs(tau[rz2II](r)=tau[II](eta)*rho[L]*v[SL]^2,subs(diff(tau[rzII](r),r)=(diff(tau[II](eta),eta))*rho[L]*v[SL]^2/R[2],E7))))):E8;

$$\frac{\left(\frac{d}{d\eta} \tau_{II}(\eta) \right) \rho_L v_{SL}^2}{R_2} = \frac{\Delta p \rho_L v_{SL}^2}{R_2} - \rho_L g$$

Ahora dividiendo la ecuación anterior entre $\rho_L v_{SL}^2$, luego multiplicándola por R_2 y posteriormente utilizando la definición de Fr_l , se obtiene la ecuación D.7 en forma adimensional:

```
>
E9:=subs(R[2]=v[SL]^2/(2*Fr1*g),expand(E8*R[2]/(rho[L]*v[SL]^2))):E9;
```

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{II}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr_l}$$

-Adimensionalización de la ecuación correspondiente a la teoría de longitud de mezcla de Prandtl:

```
>
E10:=tau[rz2II](r)=rho[L]*(k[L]*(R[2]-r))^2*(diff(v[z2II](r),r))^2:E10;
```

$$\tau_{rz2II}(r) = \rho_L k_L^2 (R_2 - r)^2 \left(\frac{d}{dr} v_{z2II}(r) \right)^2$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rz2II}(r) = \tau_{II}(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$v_{z2II}(r) = v_{SL} \cdot v_{II}(\eta)$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

```
> E11:=
subs(r=eta*R[2],subs(tau[rz2II](r)=tau[II](eta)*rho[L]*v[SL]^2,subs(diff(v[z2II](r),r)=v[SL]*(diff(v[II](eta),eta))/R[2],E10))):E11;
```

$$\tau_{II}(\eta) \rho_L v_{SL}^2 = \frac{\rho_L k_L^2 (R_2 - \eta R_2)^2 v_{SL}^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_{II}(\eta) \right)^2}{R_2^2}$$

Ahora simplificando la ecuación anterior se obtiene la ecuación D.10 en forma adimensional:

```
> E12:=subs(R[2]=1,E11/(rho[L]*v[SL]^2)):E12;
```

$$\tau_{III}(\eta) = k_L^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta) \right)^2$$

- Región III, $R_2 - c \leq r \leq R_2$:

-Adimensionalización de la ecuación de cantidad de movimiento:

> **E13:=diff(tau[rzIII](r),r) =`ΔP`/L-rho[L]*g:E13;**

$$\frac{d}{dr} \tau_{rzIII}(r) = \frac{\Delta P}{L} - \rho_L g$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rzIII}(r) = \tau_{III}(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \Delta p \cdot \rho_L v_{SL}^2 \frac{1}{R_2}$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

> **E14 := subs(r = eta*R[2], subs(`ΔP`/L = `Δp`*rho[L]*v[SL]^2/R[2], subs(tau[rzIII](r) = tau[III](eta)*rho[L]*v[SL]^2, subs(diff(tau[rzIII](r), r) = (diff(tau[III](eta), eta))*rho[L]*v[SL]^2/R[2], E13))))):E14;**

$$\frac{\left(\frac{d}{d\eta} \tau_{III}(\eta) \right) \rho_L v_{SL}^2}{R_2} = \frac{\Delta p \rho_L v_{SL}^2}{R_2} - \rho_L g$$

Ahora dividiendo la ecuación anterior entre $\rho_L v_{SL}^2$, luego multiplicandola por R_2 y posteriormente utilizando la definición de Fr_l , se obtiene la ecuación D.13 en forma adimensional:

> **E15:=subs(R[2]=v[SL]^2/(2*Fr_l*g), expand(E14*R[2]/(rho[L]*v[SL]^2))):E15;**

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{III}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr_l}$$

-Adimensionalización de la ley de Newton de la viscosidad:

> E16 := tau[rzIII](r) = -mu[L]*(diff(v[zIII](r), r)): E16;

$$\tau_{rzIII}(r) = -\mu_L \left(\frac{d}{dr} v_{zIII}(r) \right)$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$\tau_{rzIII}(r) = \tau_{III}(\eta) \cdot \rho_L v_{SL}^2$$

$$v_{zIII}(r) = v_{SL} \cdot v_{III}(\eta)$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

Se obtiene:

> E17 := subs(tau[rzIII](r) = tau[III](eta)*rho[L]*v[SL]^2, subs(diff(v[zIII](r), r) = v[SL]*(diff(v[III](eta), eta))/R[2], E16)): E17;

$$\tau_{III}(\eta) \rho_L v_{SL}^2 = - \frac{\mu_L v_{SL} \left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta) \right)}{R_2}$$

Ahora simplificando la ecuación anterior y utilizando la definición de *Rel*, se obtiene la ecuación D.16 en forma adimensional:

> E18 := subs(v[SL] = Rel*mu[L]/(2*rho[L]*R[2]), E17*R[2]/(v[SL]*mu[L])): E18;

$$\frac{1}{2} Rel \tau_{III}(\eta) = - \left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta) \right)$$

- Adimensionalización de la ecuación de caudal correspondiente a la fase gaseosa:

> E19 := Q[1] = 2*Pi*(int(v[zI](r)*r, r = 0 .. R[1])): E19;

$$Q_1 = 2 \pi \left(\int_0^{R_1} v_{zI}(r) r dr \right)$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$Q_1 = Q \cdot Q_2 = Q \cdot v_{SL} \cdot \pi \cdot R_2^2$$

$$v_{zI}(r) = v_{SL} \cdot v_I(\eta)$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

$$R_1 = \kappa \cdot R_2$$

Se obtiene:

```
> E20 := subs(r = eta, subs(R[1] = kappa, subs(v[zI](r) =
v[I](eta)*v[SL]*R[2]^2, subs(Q[1] = v[SL]*Pi*R[2]^2*Q,
E19)))): E20;
```

$$v_{SL} \pi R_2^2 Q = 2 \pi \left(\int_0^\kappa v_I(\eta) v_{SL} R_2^2 \eta d\eta \right)$$

Simplificando se obtiene la ecuación D.19 en forma adimensional:

```
> E21 := simplify(E20/(2*v[SL]*Pi*R[2]^2)): E21;
```

$$\frac{1}{2} Q = \int_0^\kappa v_I(\eta) \eta d\eta$$

- Adimensionalización de la ecuación de caudal correspondiente a la fase líquida:

```
> E22 := Q[2] = 2*Pi*(R[2]-(1/2)*delta)*(int(v[zII](r), r =
R[1] .. R[2]-c))+2*Pi*(R[2]-(1/2)*delta)*(int(v[zIII](r),
r = R[2]-c .. R[2])): E22;
```

$$Q_2 = 2 \pi \left(R_2 - \frac{1}{2} \delta \right) \left(\int_{R_1}^{R_2 - c} v_{zII}(r) dr \right) + 2 \pi \left(R_2 - \frac{1}{2} \delta \right) \left(\int_{R_2 - c}^{R_2} v_{zIII}(r) dr \right)$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$Q_2 = v_{SL} \cdot \pi \cdot R_2^2$$

$$v_{zII}(r) = v_{SL} \cdot v_{II}(\eta)$$

$$r = \eta \cdot R_2$$

$$\delta = R_2 - R_1$$

$$R_1 = \kappa \cdot R_2$$

$$c = b \cdot R_2$$

Se obtiene:

```
> E23 := subs(c=b,subs(R[2]=1,subs(R[1] = kappa*R[2],
subs(delta = R[2]-R[1], subs(r = eta, subs(v[zIII](r) =
v[III](eta)*v[SL]*R[2], subs(v[zII](r) =
v[II](eta)*v[SL]*R[2], subs(Q[2] = v[SL]*Pi*R[2]^2,
E22))))))):E23;
```

$$v_{SL} \pi = 2 \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \kappa \right) \left(\int_{\kappa}^{1-b} v_{II}(\eta) v_{SL} d\eta \right) + 2 \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \kappa \right) \left(\int_{1-b}^1 v_{III}(\eta) v_{SL} d\eta \right)$$

Simplificando se obtiene la ecuación D.22 en forma adimensional:

```
> E24 := simplify(E23/(v[SL]*Pi)): E24;
```

$$1 = (1 + \kappa) \left(\int_{\kappa}^{1-b} v_{II}(\eta) d\eta + \int_{1-b}^1 v_{III}(\eta) d\eta \right)$$

- Adimensionalización de la ecuación correspondiente al espesor de la subcapa laminar:

```
> E25 := b = N*mu[L]/(rho[L]*R[2]*sqrt(tau[rzIII](r =
R[2])/rho[L])): E25;
```

$$b = \frac{N \mu_L}{\rho_L R_2 \sqrt{\frac{\tau_{rzIII}(r=R_2)}{\rho_L}}}$$

Sustituyendo $\tau_{rzIII}(r=R_2) = (\tau_{III}(\eta=1)) \rho_L v_{SL}^2$ en la ecuación anterior y utilizando la definición de Re se obtiene la ecuación D.25 en forma adimensional:

```
> E26 := `assuming`([subs(v[SL] =
```

Rel*mu[L]/(2*rho[L]*R[2]), simplify(subs(tau[rzIII](r = R[2]) = tau[III](eta = 1)*rho[L]*v[SL]^2, E25))), [v[SL] >= 0]): E26;

$$b = \frac{2 N}{Rel \sqrt{\tau_{III}(\eta = 1)}}$$

Resumiendo se obtienen las ecuaciones que conforman el modelo en su forma adimensional:

- Región I, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\frac{\tau_I(\eta)}{\eta} + \frac{d}{d\eta} \tau_I(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr l \rho}$$

$$\tau_I(\eta) \rho = k_G^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_I(\eta) \right)^2$$

- Región II, $\kappa \leq \eta \leq 1 - b$:

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{II}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr l}$$

$$\tau_{II}(\eta) = k_L^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_{II}(\eta) \right)^2$$

- Región III, $1 - b \leq \eta \leq 1$:

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{III}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr l}$$

$$\frac{1}{2} Rel \tau_{III}(\eta) = - \left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta) \right)$$

Condiciones de frontera expresadas en forma adimensional:

C.L 1	$\eta = 0$	$\tau_I = \text{finito}$
-------	------------	--------------------------

C.L 2	$\eta = \kappa$	$\tau_I = \tau_{II}$
-------	-----------------	----------------------

C.L 3	$\eta = \kappa$	$v_I = v_{II}$
-------	-----------------	----------------

C.L 4	$\eta = 1 - b$	$\tau_{II} = \tau_{III}$
C.L 5	$\eta = 1 - b$	$v_{II} = v_{III}$
C.L 6	$\eta = 1$	$v_{III} = 0$

Ecuaciones correspondientes al caudal en forma adimensional:

- Fase gaseosa, $0 \leq \eta \leq \kappa$:

$$\frac{1}{2} Q = \int_0^{\kappa} v_I(\eta) \eta \, d\eta$$

- Fase líquida, $\kappa \leq \eta \leq 1$:

$$1 = (1 + \kappa) \left(\int_{\kappa}^{1-b} v_{II}(\eta) \, d\eta + \int_{1-b}^1 v_{III}(\eta) \, d\eta \right)$$

Espesor adimensional de la subcapa laminar:

$$b = \frac{2N}{Re_l \sqrt{\tau_{III}(\eta=1)}}$$

Ahora se procederá a resolver las ecuaciones planteadas anteriormente utilizando las condiciones de frontera correspondientes.

- Ecuación de cantidad de movimiento, región I:

> **E27 := E3:E27;**

$$\frac{\tau_I(\eta)}{\eta} + \frac{d}{d\eta} \tau_I(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr_l \rho}$$

Resolviendo se tiene:

```
> E28 := subs((1/2)*`&Delta;p`-1/(4*Fr1*rho) = K[1],
subs(_C1 = C1, collect(dsolve(E27), eta)):E28;
```

$$\tau_1(\eta) = K_1 \eta + \frac{C1}{\eta}$$

Donde K_1 es una constante que viene definida por:

$$K_1 = \frac{1}{2} \Delta p - \frac{1}{4 Fr1 \rho}$$

Aplicando la primera condicion de frontera es evidente que para que τ_1 sea finito en $\eta = 0$ el valor de la constante $C1$ debe ser igual a cero, sustituyendo se obtiene el perfil de esfuerzos de la región I:

```
> E29 := subs(C1 = 0, E28):E29;
```

$$\tau_1(\eta) = K_1 \eta$$

▪ Ecuación de cantidad de movimiento, región II:

```
> E30 := E9:E30;
```

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{II}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr1}$$

Resolviendo y simplificando se tiene:

```
> E31 := subs(`&Delta;p`-1/(2*Fr1) = K[2], subs(_C1 = C2,
collect(dsolve(E30), eta)):E31;
```

$$\tau_{II}(\eta) = K_2 \eta + C2$$

Donde K_2 es una constante que viene definida por:

$$K_2 = \Delta p - \frac{1}{2 Fr1}$$

Según la segunda condición de frontera para $\eta = \kappa$ se tiene que $\tau_1 = \tau_{II}$, a partir de lo anterior se obtiene el valor de la constante $C2$:

```
> E32 := C2 = collect(solve(subs(eta = kappa, rhs(E29)) =
subs(eta = kappa, rhs(E31)), C2), kappa):E32;
```

$$C2 = (K_1 - K_2) \kappa$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene el perfil de esfuerzos de la región II:

$$\text{> E33 := subs}((K[1]-K[2])*kappa = K[3], \text{subs}(E32, E31)):E33;$$

$$\tau_{II}(\eta) = K_2 \eta + K_3$$

Donde K_3 es una constante que viene definida por:

$$K_3 = (K_1 - K_2) \kappa$$

▪ Ecuación de cantidad de movimiento, región III:

$$\text{> E34 := E15:E34;}$$

$$\frac{d}{d\eta} \tau_{III}(\eta) = \Delta p - \frac{1}{2 Fr l}$$

Resolviendo y simplificando se tiene:

$$\text{> E35 := subs}(\Delta p = 1/(2*Fr l) = K[2], \text{subs}(_C1 = C3, \text{collect}(\text{dsolve}(E34), eta)):E35;$$

$$\tau_{III}(\eta) = K_2 \eta + C3$$

Según la cuarta condición de frontera para $\eta = 1 - b$ se tiene que $\tau_{II} = \tau_{III}$, a partir de lo anterior se obtiene el valor de la constante $C3$:

$$\text{> E36 := C3 = solve}(\text{subs}(eta = 1-b, \text{rhs}(E33)) = \text{subs}(eta = 1-b, \text{rhs}(E35)), C3):E36;$$

$$C3 = K_3$$

Sustituyendo y simplificando se obtiene el perfil de esfuerzos de la región III:

$$\text{> E37 := subs}(E36, E35):E37;$$

$$\tau_{III}(\eta) = K_2 \eta + K_3$$

El cual es equivalente al perfil de esfuerzos de la región II.

Sustituyendo el perfil de esfuerzos de la región I en la ecuación D.6 se obtiene:

$$\text{> E38 := E6:E38;}$$

$$\tau_I(\eta) \rho = k_G^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_1(\eta) \right)^2$$

> E39 := subs(E29, E38):E39;

$$K_1 \eta \rho = k_G^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_I(\eta) \right)^2$$

Resolviendo y simplificando se tiene:

> E40 := eval(dsolve(E39), _C1 = C4):E40;

$$v_I(\eta) = -\frac{2\sqrt{K_1 \eta \rho} - \frac{2\rho K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right)}{\sqrt{\rho K_1}}}{k_G} + C4,$$

$$v_I(\eta) = \frac{2\sqrt{K_1 \eta \rho} - \frac{2\rho K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right)}{\sqrt{\rho K_1}}}{k_G} + C4$$

Seleccionando la solución positiva se obtiene el perfil de velocidades de la región I:

> E41 := v[I](eta) =
(2*sqrt(K[1]*eta*rho)-2*rho*K[1]*arctanh(sqrt(K[1]*eta*rho)/sqrt(rho*K[1])))/sqrt(rho*K[1])/k[G]+C4:E41;

$$v_I(\eta) = \frac{2\sqrt{K_1 \eta \rho} - \frac{2\rho K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right)}{\sqrt{\rho K_1}}}{k_G} + C4$$

Sustituyendo el perfil de esfuerzos de la región II en la ecuación D.12 se obtiene:

> E42 := E12:E42;

$$\tau_{II}(\eta) = k_L^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_{II}(\eta) \right)^2$$

> E43 := subs(E33, E42):E43;

$$K_2 \eta + K_3 = k_L^2 (1 - \eta)^2 \left(\frac{d}{d\eta} v_{II}(\eta) \right)^2$$

Resolviendo y simplificando se tiene:

> E44 := eval(dsolve(E43), _C1 = C5):E44;

$$v_{II}(\eta) = \frac{2\sqrt{K_2\eta + K_3} - 2\sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2\eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}}\right)}{k_L} + C5, v_{II}(\eta) = -\frac{2\sqrt{K_2\eta + K_3} - 2\sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2\eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}}\right)}{k_L} + C5$$

Seleccionando la solución positiva se obtiene el perfil de velocidades de región II:

> E45 := v[II](eta) = (2*sqrt(K[2]*eta+K[3]) - 2*sqrt(K[2]+K[3])*arctanh(sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]+K[3])))/k[L]+C5:E45;

$$v_{II}(\eta) = \frac{2\sqrt{K_2\eta + K_3} - 2\sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2\eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}}\right)}{k_L} + C5$$

Sustituyendo el perfil de esfuerzos de la región III en la ecuación D.18 se obtiene:

> E46 := E18:E46;

$$\frac{1}{2} \operatorname{Rel} \tau_{III}(\eta) = -\left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta)\right)$$

> E47 := subs(E37, E46):E47;

$$\frac{1}{2} \operatorname{Rel} (K_2\eta + K_3) = -\left(\frac{d}{d\eta} v_{III}(\eta)\right)$$

Resolviendo y simplificando se tiene:

> E48 := eval(dsolve(E47), _C1 = C6):E48;

$$v_{III}(\eta) = -\frac{1}{4} \operatorname{Rel} \eta^2 K_2 - \frac{1}{2} \operatorname{Rel} K_3 \eta + C6$$

De acuerdo a la sexta condición de frontera para $\eta = 1$ se tiene que $v_{III} = 0$, a partir de lo anterior se obtiene el valor de la constante $C6$:

> E49 := C6 = solve(subs(eta = 1, rhs(E48)) = 0, C6):E49;

$$C6 = \frac{1}{4} \text{Rel } K_2 + \frac{1}{2} \text{Rel } K_3$$

Sustituyendo se obtiene el perfil de velocidades final de la región III:

> E50 := subs(E49, E48):E50;

$$v_{III}(\eta) = -\frac{1}{4} \text{Rel } \eta^2 K_2 - \frac{1}{2} \text{Rel } K_3 \eta + \frac{1}{4} \text{Rel } K_2 + \frac{1}{2} \text{Rel } K_3$$

De acuerdo a la quinta condición de frontera para $\eta = 1 - b$ se tiene que $v_{II} = v_{III}$, a partir de lo anterior se obtiene el valor de la constante C5:

> E51 := C5 = solve(subs(eta = 1-b, rhs(E45)) = subs(eta = 1-b, rhs(E50)), C5):E51;

$$C5 = -\frac{1}{4} \frac{1}{k_L} \left(8 \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3} - 8 \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - 2 \text{Rel } K_2 k_L b + \text{Rel } K_2 k_L b^2 - 2 \text{Rel } K_3 k_L b \right)$$

Sustituyendo se obtiene el perfil de velocidades final de la región II:

> E52 := subs(E51, E45):E52;

$$v_{II}(\eta) = \frac{2 \sqrt{K_2 \eta + K_3} - 2 \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right)}{k_L} - \frac{1}{4} \frac{1}{k_L} \left(8 \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3} - 8 \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - 2 \text{Rel } K_2 k_L b + \text{Rel } K_2 k_L b^2 - 2 \text{Rel } K_3 k_L b \right)$$

De acuerdo a la tercera condición de frontera para $\eta = \kappa$ se tiene que $v_I = v_{II}$, a partir de

lo anterior se obtiene el valor de la constante $C4$:

```
> E53 := C4 = solve(subs(eta = kappa, rhs(E41)) = subs(eta
= kappa, rhs(E52)), C4):E53;
```

$$\begin{aligned}
C4 = \frac{1}{4} \frac{1}{k_G \sqrt{\rho K_1} k_L} & \left(-8 k_L \sqrt{K_1 \kappa \rho} \sqrt{\rho K_1} \right. \\
& + 8 k_L \rho K_1 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right) + 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 \kappa + K_3} \\
& - 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \\
& - 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3} \\
& + 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \\
& + 2 k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_2 k_L b - k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_2 k_L b^2 \\
& \left. + 2 k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_3 k_L b \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo se obtiene el perfil de velocidades final de la región I:

```
> E54 := subs(E53, E41):E54;
```

$$\begin{aligned}
v_1(\eta) = & \frac{2\sqrt{K_1 \eta \rho} - \frac{2\rho K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right)}{\sqrt{\rho K_1}}}{k_G} \\
& + \frac{1}{4} \frac{1}{k_G \sqrt{\rho K_1} k_L} \left(-8 k_L \sqrt{K_1 \kappa \rho} \sqrt{\rho K_1} \right. \\
& + 8 k_L \rho K_1 \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right) + 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 \kappa + K_3} \\
& - 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}}\right) \\
& - 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3} \\
& + 8 k_G \sqrt{\rho K_1} \sqrt{K_2 + K_3} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}}\right) \\
& + 2 k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_2 k_L b - k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_2 k_L b^2 \\
& \left. + 2 k_G \sqrt{\rho K_1} \operatorname{Rel} K_3 k_L b \right)
\end{aligned}$$

Integrando el perfil de velocidades de la región I se tiene:

> E55 := convert(int(rhs(E54)*eta, eta), ln):E55;

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho K_1 \eta^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right) \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& - \frac{1}{3} \frac{(K_1 \eta \rho)^{3/2}}{k_G \rho K_1} - \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{k_G} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(\frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} - 1 \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} + \frac{4}{5} \frac{(K_1 \eta \rho)^{5/2}}{k_G \rho^2 K_1^2} \\
& - \frac{\eta^2 \sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} \\
& + \frac{1}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \left(\eta^2 \rho K_1 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} + 1 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right) \right) \right) + \frac{\eta^2 \sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{k_L} \\
& - \frac{1}{k_L} \left(\eta^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right) - \frac{\eta^2 \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(\eta^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right) + \frac{1}{4} \eta^2 \text{Rel } K_2 b \\
& - \frac{1}{8} \eta^2 \text{Rel } K_2 b^2 + \frac{1}{4} \eta^2 \text{Rel } K_3 b
\end{aligned}$$

> E56 :=

```

-rho*K[1]*eta^2*((1/2)*ln(1+sqrt(K[1]*eta*rho)/sqrt(rho*K
[1]))-(1/2)*ln(abs(1-sqrt(K[1]*eta*rho)/sqrt(rho*K[1]))))
/(k[G]*sqrt(rho*K[1]))-(1/3)*(K[1]*eta*rho)^(3/2)/(k[G]*r

```

```

ho*K[1])-sqrt(K[1]*eta*rho)/k[G]-(1/2)*rho*K[1]*ln(abs(sqrt(K[1]*eta*rho)/sqrt(rho*K[1]))-1)/(k[G]*sqrt(rho*K[1]))
+(1/2)*rho*K[1]*ln(1+sqrt(K[1]*eta*rho)/sqrt(rho*K[1]))/(k[G]*sqrt(rho*K[1]))+(4/5)*(K[1]*eta*rho)^(5/2)/(k[G]*rho
^2*K[1]^2)+eta^2*sqrt(K[2]*kappa+K[3])/k[L]-eta^2*sqrt(K[2]+K[3])*((1/2)*ln(sqrt(K[2]*kappa+K[3])/sqrt(K[2]+K[3]))+
1)-(1/2)*ln(abs(1-sqrt(K[2]*kappa+K[3])/sqrt(K[2]+K[3])))
)/k[L]-eta^2*sqrt(K[1]*kappa*rho)/k[G]+eta^2*rho*K[1]*((1/2)*ln(sqrt(K[1]*kappa*rho)/sqrt(rho*K[1]))+1)-(1/2)*ln(ab
s(1-sqrt(K[1]*kappa*rho)/sqrt(rho*K[1])))
)/(k[G]*sqrt(rho*K[1]))-(1/8)*eta^2*Rel*K[2]*b^2+(1/4)*eta^2*Rel*K[2]*b-
eta^2*sqrt(K[2]-K[2]*b+K[3])/k[L]+eta^2*sqrt(K[2]+K[3])*((1/2)*ln(sqrt(K[2]-K[2]*b+K[3])/sqrt(K[2]+K[3]))+1)-(1/2)*l
n(abs(1-sqrt(K[2]-K[2]*b+K[3])/sqrt(K[2]+K[3])))
)/k[L]+(1/4)*eta^2*Rel*K[3]*b:E56;

```

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho K_1 \eta^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right| \right) \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& - \frac{1}{3} \frac{(K_1 \eta \rho)^{3/2}}{k_G \rho K_1} - \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{k_G} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right| \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_1 \eta \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} + \frac{4}{5} \frac{(K_1 \eta \rho)^{5/2}}{k_G \rho^2 K_1^2} \\
& + \frac{\eta^2 \sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{k_L} \\
& - \frac{1}{k_L} \left(\eta^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) - \frac{\eta^2 \sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} \\
& + \frac{1}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \left(\eta^2 \rho K_1 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right| \right) \right) \right) - \frac{1}{8} \eta^2 \text{Rel } K_2 b^2 \\
& + \frac{1}{4} \eta^2 \text{Rel } K_2 b - \frac{\eta^2 \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(\eta^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) + \frac{1}{4} \eta^2 \text{Rel } K_3 b
\end{aligned}$$

Luego sustituyendo en la ecuación D.21 se obtiene:

> E57 := (1/2)*Q = eval(E56, eta = kappa)-(eval(E56, eta = 0)):E57;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} Q = & -\frac{1}{3} \frac{(K_1 \kappa \rho)^{3/2}}{k_G \rho K_1} - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} \right| \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln \left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} + 1 \right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} + \frac{4}{5} \frac{(K_1 \kappa \rho)^{5/2}}{k_G \rho^2 K_1^2} \\
& + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{k_L} \\
& - \frac{1}{k_L} \left(\kappa^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} - \frac{1}{8} \kappa^2 \text{Rel } K_2 b^2 \\
& + \frac{1}{4} \kappa^2 \text{Rel } K_2 b - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(\kappa^2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) + \frac{1}{4} \kappa^2 \text{Rel } K_3 b
\end{aligned}$$

Integrando el perfil de velocidades de la región II se obtiene:

> E58 := convert(int(rhs(E52), eta), ln):E58;

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3} \frac{(K_2 \eta + K_3)^{3/2}}{k_L K_2} - \frac{1}{k_L} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right) \eta \\
& - \frac{1}{k_L K_2} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right) K_3 - \frac{2 \sqrt{K_2 \eta + K_3}}{k_L} \\
& - \frac{2 \sqrt{K_2 \eta + K_3} K_3}{k_L K_2} \\
& - \frac{(K_2 + K_3)^{3/2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} - 1 \right)}{k_L K_2} \\
& + \frac{(K_2 + K_3)^{3/2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right)}{k_L K_2} \\
& - \frac{2 \eta \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(2 \eta \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right) + \frac{1}{2} \eta \operatorname{Rel} K_2 b \\
& - \frac{1}{4} \eta \operatorname{Rel} K_2 b^2 + \frac{1}{2} \eta \operatorname{Rel} K_3 b
\end{aligned}$$

> E59 :=

```

(4/3)*(K[2]*eta+K[3])^(3/2)/(k[L]*K[2])-2*sqrt(K[2]+K[3])
*((1/2)*ln(1+sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]+K[3]))-(1/2)*
ln(abs(1-sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]+K[3]))))*eta/k[L]-2
*sqrt(K[2]+K[3])*((1/2)*ln(1+sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]
+K[3]))-(1/2)*ln(abs(1-sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]+K[3]
))))*K[3]/(k[L]*K[2])-2*sqrt(K[2]*eta+K[3])/k[L]-2*sqrt(
K[2]*eta+K[3])*K[3]/(k[L]*K[2])-(K[2]+K[3])^(3/2)*ln(abs(
sqrt(K[2]*eta+K[3])/sqrt(K[2]+K[3])-1))/(k[L]*K[2])+(K[2]

```

$+K[3])^{(3/2)*\ln(1+\sqrt{K[2]*\eta+K[3]})/\sqrt{K[2]+K[3]})/(k$
 $[L]*K[2])-2*\eta*\sqrt{K[2]-K[2]*b+K[3]}/k[L]+2*\eta*\sqrt{K[$
 $2]+K[3]})*((1/2)*\ln(\sqrt{K[2]-K[2]*b+K[3]})/\sqrt{K[2]+K[3]})$
 $+1)-(1/2)*\ln(\text{abs}(1-\sqrt{K[2]-K[2]*b+K[3]})/\sqrt{K[2]+K[3]})$
 $))/k[L]-(1/4)*\eta*\text{Rel}*K[2]*b^2+(1/2)*\eta*\text{Rel}*K[2]*b+(1/2$
 $)*\eta*\text{Rel}*K[3]*b:\text{E59};$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3} \frac{(K_2 \eta + K_3)^{3/2}}{k_L K_2} - \frac{1}{k_L} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \eta \right) \\
& - \frac{1}{k_L K_2} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) K_3 \right) - \frac{2 \sqrt{K_2 \eta + K_3}}{k_L} \\
& - \frac{2 \sqrt{K_2 \eta + K_3} K_3}{k_L K_2} \\
& - \frac{(K_2 + K_3)^{3/2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right)}{k_L K_2} \\
& + \frac{(K_2 + K_3)^{3/2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 \eta + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right)}{k_L K_2} \\
& - \frac{2 \eta \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(2 \eta \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) - \frac{1}{4} \eta \text{Rel} K_2 b^2 \\
& + \frac{1}{2} \eta \text{Rel} K_2 b + \frac{1}{2} \eta \text{Rel} K_3 b
\end{aligned}$$

Luego sustituyendo en la ecuación D.24 se obtiene:

```
> E60 := 1 = (1+kappa)*(eval(E59, eta = 1-b)-(eval(E59, eta
= kappa))+int(rhs(E50), eta = 1-b .. 1)):E60;
```

$$\begin{aligned}
1 = (1 + \kappa) & \left(-\frac{1}{4} (1 - b) \operatorname{Rel} K_2 b^2 - \frac{1}{2} \kappa \operatorname{Rel} K_2 b \right. \\
& + \frac{1}{4} \operatorname{Rel} K_2 b + \frac{1}{2} \operatorname{Rel} K_3 b + \frac{1}{2} (1 - b) \operatorname{Rel} K_3 b \\
& - \frac{2(1-b) \sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{k_L} - \frac{4}{3} \frac{(K_2 \kappa + K_3)^{3/2}}{k_L K_2} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(2(1-b) \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 - K_2 b + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \right) \\
& + \frac{2 \sqrt{K_2 \kappa + K_3} K_3}{k_L K_2} \\
& + \frac{(K_2 + K_3)^{3/2} \ln \left(\left| 1 - \frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right)}{k_L K_2} + \frac{1}{2} (1 \\
& - b) \operatorname{Rel} K_2 b - \frac{2 \sqrt{K_2 (1-b) + K_3} K_3}{k_L K_2} \\
& + \frac{1}{k_L} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} + 1 \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\left| 1 \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{\sqrt{K_2 \kappa + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right| \right) \right) \kappa \right) - \frac{1}{12} \operatorname{Rel} K_2 (1 - (1 - b)^3) \\
& - \frac{1}{4} \operatorname{Rel} K_3 (1 - (1 - b)^2) - \frac{1}{2} \kappa \operatorname{Rel} K_3 b \\
& - \frac{1}{k_L} \left(2 \sqrt{K_2 + K_3} \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{K_2 (1-b) + K_3}}{\sqrt{K_2 + K_3}} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones D.57 y D.60 constituyen la forma final del modelo y deben ser resueltas simultáneamente para hallar los valores de Δp y κ conociendo los valores de Rel , Frl , ρ y Q .

Dichas ecuaciones se pueden escribir de una manera más compacta al realizar las siguientes sustituciones:

$$K_4 = K_2 + K_3$$

$$K_5 = K_2 - K_2 b + K_3$$

$$K_6 = K_2 \kappa + K_3$$

$$K_7 = \frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}}$$

$$K_8 = \frac{\sqrt{K_6}}{\sqrt{K_4}}$$

Entonces se obtiene:

```
> E61 := expand(subs(sqrt(K[6])/sqrt(K[4]) = K[8],
subs(sqrt(K[5])/sqrt(K[4]) = K[7], subs(K[2]*kappa+K[3] =
K[6], subs(K[2]-K[2]*b+K[3] = K[5], subs(K[2]+K[3] = K[4],
E57)))))):E61;
```

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} Q = & -\frac{1}{3} \frac{(K_1 \kappa \rho)^{3/2}}{k_G \rho K_1} - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln\left(1 - \frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}}\right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\rho K_1 \ln\left(\frac{\sqrt{K_1 \kappa \rho}}{\sqrt{\rho K_1}} + 1\right)}{k_G \sqrt{\rho K_1}} + \frac{4}{5} \frac{(K_1 \kappa \rho)^{5/2}}{k_G \rho^2 K_1^2} \\
& + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_6}}{k_L} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L} - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_1 \kappa \rho}}{k_G} \\
& - \frac{1}{8} \kappa^2 \operatorname{Rel} K_2 b^2 + \frac{1}{4} \kappa^2 \operatorname{Rel} K_2 b - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_5}}{k_L} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} \\
& + \frac{1}{4} \kappa^2 \operatorname{Rel} K_3 b
\end{aligned}$$

```

> E62 := expand(subs(sqrt(K[6])/sqrt(K[4]) = K[8],
subs(sqrt(K[5])/sqrt(K[4]) = K[7], subs(K[2]*kappa+K[3] =
K[6], subs(K[2]-K[2]*b+K[3] = K[5], subs(K[2]*(1-b)+K[3] =
K[5], subs(K[2]+K[3] = K[4], E60)))))):E62;

```

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{2 \kappa^2 \sqrt{K_5}}{k_L} + \frac{1}{6} \text{Rel } K_2 b^3 - \frac{2 \kappa \sqrt{K_5}}{k_L} \\
& + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} - \frac{1}{2} \text{Rel } K_2 b^2 + \frac{1}{2} \text{Rel } K_2 b \\
& - \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} + \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_7 - 1|)}{k_L K_2} \\
& + \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} - \frac{\sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} \\
& - \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L} + \frac{1}{6} \kappa \text{Rel } K_2 b^3 + \frac{2 \kappa \sqrt{K_5} b}{k_L} \\
& + \frac{4}{3} \frac{\kappa K_5^{(3/2)}}{k_L K_2} - \frac{4}{3} \frac{\kappa K_6^{(3/2)}}{k_L K_2} - \frac{1}{4} \kappa \text{Rel } K_3 b^2 \\
& + \frac{1}{2} \text{Rel } K_3 b - \frac{1}{2} \kappa^2 \text{Rel } K_2 b + \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} \\
& + \frac{K_4^{(3/2)} \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} - \frac{1}{2} \kappa^2 \text{Rel } K_3 b \\
& - \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_7 - 1|)}{k_L K_2} \\
& + \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} - \frac{\kappa \sqrt{K_4} K_3 \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} \\
& + \frac{\kappa K_4^{(3/2)} \ln(K_7 + 1)}{k_L K_2} - \frac{\kappa K_4^{(3/2)} \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} \\
& - \frac{\kappa K_4^{(3/2)} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L K_2} + \frac{\kappa K_4^{(3/2)} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} \\
& - \frac{2 \kappa \sqrt{K_5} K_3}{k_L K_2} + \frac{2 \kappa \sqrt{K_6} K_3}{k_L K_2} + \frac{1}{4} \kappa^2 \text{Rel } K_2 b^2 \\
& - \frac{K_4^{(3/2)} \ln(K_8 + 1)}{k_L K_2} - \frac{K_4^{(3/2)} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L K_2} \\
& - \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(|K_7 - 1|)}{k_L} \\
& + \frac{K_4^{(3/2)} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L K_2} + \frac{\kappa \sqrt{K_4} \ln(K_8 + 1)}{k_L} + \frac{2 \sqrt{K_5} b}{k_L} \\
& + \frac{4}{3} \frac{K_5^{(3/2)}}{k_L K_2} - \frac{4}{3} \frac{K_6^{(3/2)}}{k_L K_2} + \frac{2 \kappa \sqrt{K_6}}{k_L} - \frac{1}{4} \text{Rel } K_3 b^2 \\
& - \frac{1}{4} \kappa \text{Rel } K_2 b^2 - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(K_7 + 1)}{k_L} - \frac{2 \sqrt{K_5} K_3}{k_L K_2} \\
& - \frac{4 \sqrt{K_5}}{k_L} + \frac{2 \sqrt{K_6}}{k_L} - \frac{\kappa^2 \sqrt{K_4} \ln(|K_8 - 1|)}{k_L}
\end{aligned}$$

Ahora se procederá a calcular Δp y κ para un punto seleccionado de los datos experimentales disponibles utilizando las ecuaciones D.57 y D.60. Para ello en primer lugar es necesario realizar las siguientes sustituciones:

$$b = \frac{2N}{Rel \sqrt{\tau_{III}(\eta = 1)}} = \frac{2N}{Rel \sqrt{K_2 + K_3}}$$

$$K_1 = \frac{1}{2} \Delta p - \frac{1}{4 Fr_l \rho}$$

$$K_2 = \Delta p - \frac{1}{2 Fr_l}$$

$$K_3 = (K_1 - K_2) \kappa$$

$$k_L = 0.4$$

$$k_G = 0.2$$

$$N = 11$$

Posteriormente es necesario sustituir los valores de Rel , Fr_l , Q y ρ correspondientes al punto seleccionado:

$$Rel = 10629$$

$$Fr_l = 1.6440$$

$$Q = 69.48$$

$$\rho = 826$$

Realizando las sustituciones indicadas y resolviendo numéricamente el sistema de ecuaciones conformado por D.57 y D.60 se obtienen los valores de Δp y κ correspondientes:

```
> E63 := fsolve(subs(N = 11, subs(k[G] = .2, subs(k[L] = .4,
subs(rho = 826, subs(Q = 69.48, subs(Fr_l = 1.6440, subs(Rel
= 10629, subs(K[1] = (1/2)*`&Delta;p`-1/(4*Fr_l*rho),
subs(K[2] = `&Delta;p`-1/(2*Fr_l), subs(K[3] =
(K[1]-K[2])*kappa, subs(b = 2*N/(Rel*sqrt(K[2]+K[3])),
{E60, E57}))))))))), {kappa = 0 .. 1, `&Delta;p` = 0 ..
10}):E63;
```

$$\{\Delta p = 0.3689845216 \kappa = 0.918428164\}$$

APÉNDICE D.2. REDUCCIÓN DEL MODELO AL CASO DE UN FLUJO TURBULENTO MONOFÁSICO

En esta sección se encuentra el procedimiento matemático detallado que permite obtener las ecuaciones 4.66 a 4.69 a partir de las ecuaciones correspondientes a las secciones 4.1, 4.2 y 4.3. Para ello es necesario realizar las siguientes sustituciones:

$$K_1 = \frac{1}{2} f$$

$$K_2 = \frac{1}{2} f$$

$$K_3 = 0$$

$$K_4 = K_2 + K_3 \\ = \frac{1}{2} f$$

$$K_5 = K_2 - K_2 b + K_3 \\ = \frac{1}{2} (1 - b)$$

$$K_6 = K_2 \kappa + K_3 \\ = 0$$

$$K_7 = \frac{\sqrt{K_5}}{\sqrt{K_4}} \\ = \frac{\sqrt{1 - b}}{\sqrt{1 - b}}$$

$$K_8 = \frac{\sqrt{K_6}}{\sqrt{K_4}} \\ = 0$$

$$b = \frac{2 \cdot N}{Re \sqrt{f/2}}$$

$$Q = 0$$

$$\rho = 1$$

$$\kappa = 0$$

- Sustitución para obtener el esfuerzo cortante en flujo monofásico:

Sustituyendo en las ecuaciones D.29, D.33 y D.37 se obtiene:

> **E64 := subs(K[1] = (1/2)*f, E29):E64;**

$$\tau_I(\eta) = \frac{1}{2} f \eta$$

> **E65 := subs(K[3] = 0, subs(K[2] = (1/2)*f, E33)):E65;**

$$\tau_{II}(\eta) = \frac{1}{2} f \eta$$

> **E66 := subs(K[3] = 0, subs(K[2] = (1/2)*f, E37)):E66;**

$$\tau_{III}(\eta) = \frac{1}{2} f \eta$$

Donde $\tau_I(\eta) = \tau_{II}(\eta) = \tau_{III}(\eta)$.

- Sustitución para obtener los perfiles de velocidad en flujo monofásico:

-Corriente turbulenta principal:

Sustituyendo en las ecuaciones D.52 y D.54 se obtiene:

```
> E67 := expand(subs(k[G] = k, subs(k[L] = k, subs(kappa =
0, subs(rho = 1, subs(K[3] = 0, subs(K[2] = (1/2)*f, subs(K[1]
= (1/2)*f, subs(b = 2*N/(Rel*sqrt((1/2)*f)),
E52))))))):E67;
```

$$v_{II}(\eta) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \eta}{k} - \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{f} \eta}{\sqrt{f}}\right)}{k}$$

$$- \frac{2 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}}}{k}$$

$$+ \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}}\right)}{k}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{f} N \sqrt{2} - \frac{N^2}{Rel}$$

```
> E68 := expand(subs(k[G] = k, subs(k[L] = k, subs(kappa =
0, subs(rho = 1, subs(K[3] = 0, subs(K[2] = (1/2)*f, subs(K[1]
= (1/2)*f, subs(b = 2*N/(Rel*sqrt((1/2)*f)),
E54))))))):E68;
```

$$\begin{aligned}
v_I(\eta) = & \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \eta}{k} - \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{f} \eta}{\sqrt{f}}\right)}{k} \\
& - \frac{2 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}}}{k} \\
& + \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}}\right)}{k} \\
& + \frac{1}{2} \sqrt{f} N \sqrt{2} - \frac{N^2}{Rel}
\end{aligned}$$

Donde $v_I(\eta) = v_{II}(\eta)$.

-Subcapa laminar:

Sustituyendo en la ecuación D.50 se obtiene:

> E69 := subs(K[3] = 0, subs(K[2] = (1/2)*f, E50)):E69;

$$v_{III}(\eta) = -\frac{1}{8} Rel \eta^2 f + \frac{1}{8} Rel j$$

- Sustitución en las ecuaciones de caudal:

Al realizar las sustituciones correspondientes en la ecuación D.61 y D.62 se obtiene:

> E70 := evalf(subs(kappa = 0, subs(rho = 1, subs(Q = 0, subs(K[1] = (1/2)*f, subs(K[2] = (1/2)*f, subs(K[3] = 0, subs(K[4] = K[2]+K[3], subs(K[5] = K[2]-K[2]*b+K[3], subs(K[6] = K[2]*kappa+K[3], subs(K[7] = sqrt(K[5])/sqrt(K[4]), subs(K[8] = sqrt(K[6])/sqrt(K[4]), subs(b = 2*N/(Rel*sqrt(K[4])), E61))))))))))): E70;

0. = 0.

```
> E71 := subs(kappa = 0, subs(rho = 1, subs(Q = 0, subs(K[1]
= (1/2)*f, subs(K[2] = (1/2)*f, subs(K[3] = 0, subs(K[4] =
K[2]+K[3], subs(subs(b = 2*N/(Rel*sqrt(K[4]))), subs(K[5] =
K[2]-K[2]*b+K[3], subs(K[6] = K[2]*kappa+K[3], subs(K[7] =
sqrt(K[5])/sqrt(K[4]), subs(K[8] = sqrt(K[6])/sqrt(K[4]),
E62))))))))): E71;
```

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{1}{2} \sqrt{f} N \sqrt{2} + \frac{4 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}} N \sqrt{2}}{k_L Rel \sqrt{f}} \\
& - \frac{4 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}}}{k_L} - \frac{2 N^2}{Rel} \\
& + \frac{8}{3} \frac{\left(\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}\right)^{3/2}}{k_L f} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}} + 1\right)}{k_L} \\
& + \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2} N^3}{Rel^2 \sqrt{f}} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{f} \ln\left(-\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{\sqrt{f} N \sqrt{2}}{Rel}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}} + 1\right)}{k_L}
\end{aligned}$$

Entonces se observa que la ecuación D.61 se anula, mientras que la ecuación D.62 se convierte en una expresión implícita del factor de fricción en función del número de Reynolds.

Ahora se procederá a comparar la ecuación D.71 con la correlación de Prandtl que viene dada por:

```
> E72 := 1/sqrt(f) = 4*log[10](Rel*sqrt(f))-0.4:E72;
```

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4 \ln(Rel \sqrt{f})}{\ln(10)} - 0.4$$

Ahora sustituyendo $N=11$ y $k_L=0.4$ en la ecuación D.71 se obtiene:

> E73 := subs(k[L] = .4, subs(N = 11, E71)):E73;

$$\begin{aligned}
 1 = & \frac{11}{2} \sqrt{2} \sqrt{f} + \frac{110.0000000 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{11 \sqrt{f} \sqrt{2}}{Rel} \sqrt{2}} \sqrt{2}}{Rel \sqrt{f}} \\
 & - 10.00000000 \sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{11 \sqrt{f} \sqrt{2}}{Rel} \sqrt{2}} - \frac{242}{Rel} \\
 & + \frac{6.666666667 \left(\frac{1}{2} f - \frac{11 \sqrt{f} \sqrt{2}}{Rel} \sqrt{2} \right)^{3/2}}{f} \\
 & + 1.250000000 \sqrt{2} \sqrt{f} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{11 \sqrt{f} \sqrt{2}}{Rel} \sqrt{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}} + 1 \right) \\
 & + \frac{5324}{3} \frac{\sqrt{2}}{Rel^2 \sqrt{f}} - 1.250000000 \sqrt{2} \sqrt{f} \ln \left(\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} f - \frac{11 \sqrt{f} \sqrt{2}}{Rel} \sqrt{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{f}} + 1 \right) \right)
 \end{aligned}$$

Ahora se graficarán las ecuaciones D.72 y D.73 a fin de realizar la comparación correspondiente

> with(plots):

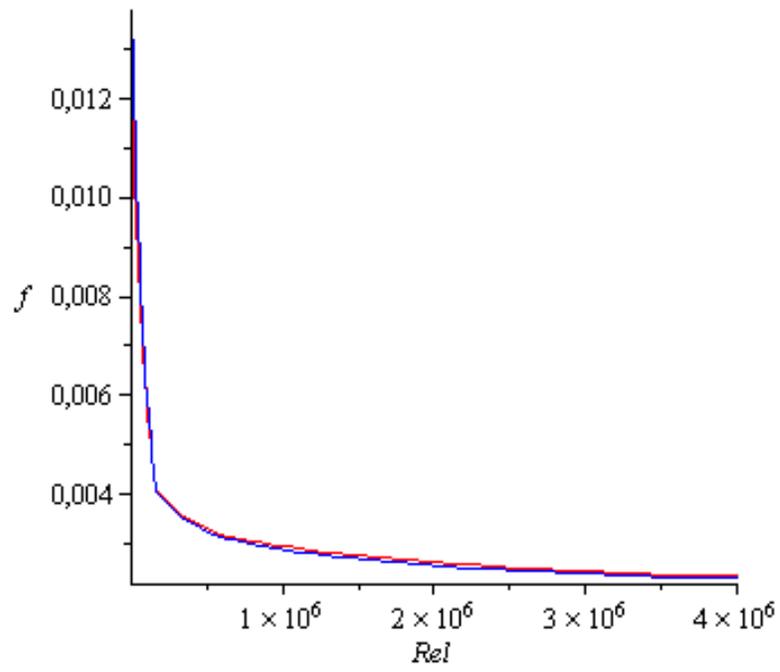
> E74 := implicitplot(E72, Rel = 2100 .. 4000000, f = 0 .. 0.2e-1, color = red);

E74 := PLOT(...)

> E75 := implicitplot(E73, Rel = 2100 .. 4000000, f = 0 .. 0.2e-1, color = blue);

E75 := PLOT(...)

> display(E74, E75);



APÉNDICE E. EFECTO DE LAS ONDULACIONES Y DE LA TENSIÓN INTERFACIAL EN LA INTERFASE GAS-LÍQUIDO EN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO

A continuación en esta sección se realizará un análisis para determinar el efecto de las ondulaciones y de la tensión interfacial en la dirección del movimiento del fluido.

En la figura E.1 se muestra un esquema de la interfase entre dos fluidos inmiscibles, I y II.

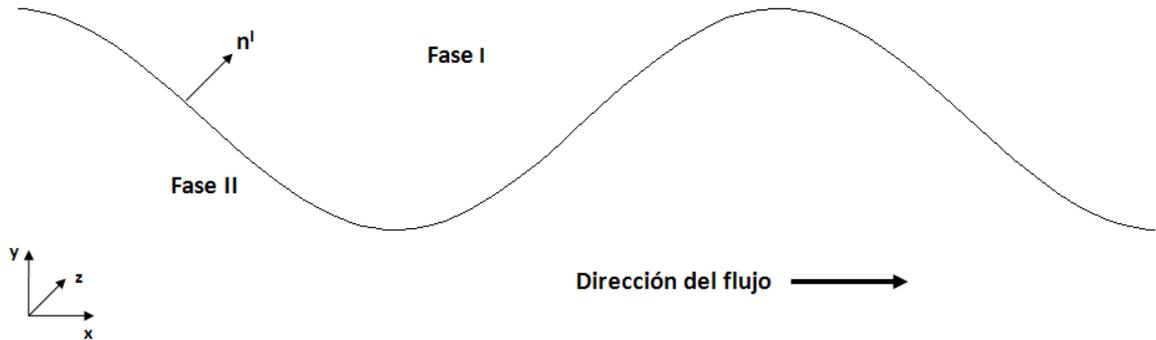


Figura N° E.1. Interfase entre dos fluidos inmiscibles.

En dicha interfase debe usarse la siguiente condición límite (Bird *et al.*, 2006):

$$\mathbf{n}^I(p^I - p^{II}) + [\mathbf{n}^I \cdot (\boldsymbol{\tau}^I - \boldsymbol{\tau}^{II})] = \mathbf{n}^I \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{1}{R_{C2}} \right) \sigma \quad (\text{E.1})$$

Esto es esencialmente un balance de cantidad de movimiento escrito para un elemento interfacial dS por el que no pasa materia y que además carece de masa o viscosidad interfacial. Aquí \mathbf{n}^I es el vector unitario normal a dS que apunta hacia la fase I. Las cantidades R_{C1} y R_{C2} son los radios principales de curvatura en dS y cada uno de estos es positivo si su centro está en la fase I (Bird *et al.*, 2006).

La ecuación E.1 es una expresión vectorial que se puede descomponer en tres ecuaciones. Para ello es necesario definir $\boldsymbol{\tau}^I$, $\boldsymbol{\tau}^{II}$ y \mathbf{n}^I :

$$\boldsymbol{\tau}^I = \begin{bmatrix} \tau_{xx}^I & \tau_{yx}^I & \tau_{zx}^I \\ \tau_{xy}^I & \tau_{yy}^I & \tau_{zy}^I \\ \tau_{xz}^I & \tau_{yz}^I & \tau_{zz}^I \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

$$\boldsymbol{\tau}^{II} = \begin{bmatrix} \tau_{xx}^{II} & \tau_{yx}^{II} & \tau_{zx}^{II} \\ \tau_{xy}^{II} & \tau_{yy}^{II} & \tau_{zy}^{II} \\ \tau_{xz}^{II} & \tau_{yz}^{II} & \tau_{zz}^{II} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

$$\mathbf{n}^I = (n_x, n_y, n_z) \quad (\text{E.4})$$

Luego al sustituir E.2, E.3 y E.4 en la ecuación E.1 y realizar las operaciones correspondientes se obtiene:

-En la dirección x:

$$\begin{aligned} n_x(p^I - p^{II}) + n_x(\tau_{xx}^I - \tau_{xx}^{II}) + n_y(\tau_{yx}^I - \tau_{yx}^{II}) \\ + n_z(\tau_{zx}^I - \tau_{zx}^{II}) = n_x \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{1}{R_{C2}} \right) \sigma \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

-En la dirección y:

$$\begin{aligned} n_y(p^I - p^{II}) + n_x(\tau_{xy}^I - \tau_{xy}^{II}) + n_y(\tau_{yy}^I - \tau_{yy}^{II}) \\ + n_z(\tau_{zy}^I - \tau_{zy}^{II}) = n_y \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{1}{R_{C2}} \right) \sigma \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

-En la dirección z:

$$\begin{aligned} n_z(p^I - p^{II}) + n_x(\tau_{xz}^I - \tau_{xz}^{II}) + n_y(\tau_{yz}^I - \tau_{yz}^{II}) \\ + n_z(\tau_{zz}^I - \tau_{zz}^{II}) = n_z \left(\frac{1}{R_{C1}} + \frac{1}{R_{C2}} \right) \sigma \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Ahora en la figura E.2 se muestra un esquema de la interfase entre dos fluidos inmiscibles I (gas) y II (líquido) similar al que se observa en el patrón de flujo anular. Aquí la interfase está descrita por la ecuación $y = f(x)$. Además se asume que las ondas interfaciales son simétricas, lo cual es una suposición válida para el patrón de flujo anular (Shoham, 2006). Asimismo se supone que sólo se tiene un radio de curvatura en el plano y-x, que en este caso es igual a R_{C1} , mientras que R_{C2} es infinito o lo que es equivalente $1/R_{C2} = 0$. Ambos fluidos se mueven en la dirección x.

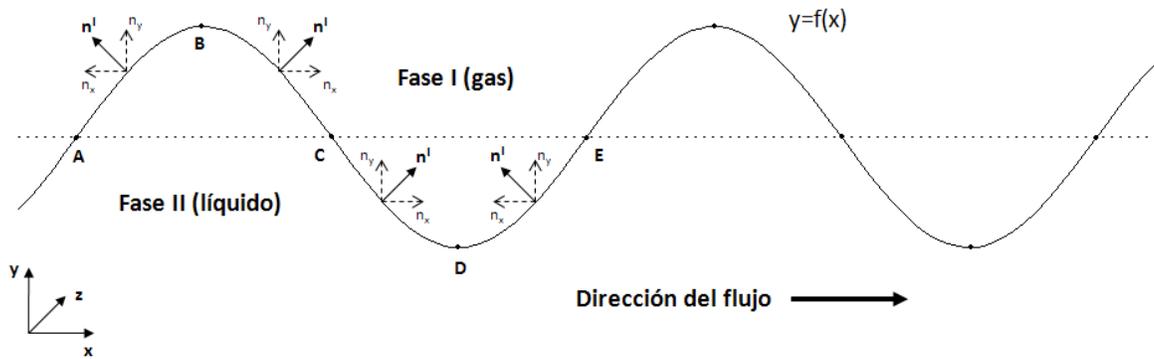


Figura N° E.2. Esquema de la interfase entre dos fluidos inmiscibles I (gas) y II (líquido), similar al observado en el patrón de flujo anular.

Como la interfase esta descrita por la ecuación $y = f(x)$, el vector unitario normal a la misma puede ser calculado mediante la expresión (Piskunov, 1983):

$$F(x, y, z) = y - f(x) = 0 \quad (E.8)$$

$$\mathbf{n}^I = \nabla F(x, y, z) = (-f'(x), 1, 0)$$

$$n_x = -f'(x) \quad n_y = 1 \quad n_z = 0$$

Asimismo el radio de curvatura R_{C1} se puede obtener mediante la expresión (Piskunov, 1983):

$$R_{C1} = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{f''(x)} \quad (E.9)$$

Ahora se utilizará la ecuación E.5 para analizar el efecto que tiene la tensión interfacial en la dirección del movimiento. Suponiendo que $p^I \approx p^{II}$ ya que el fluido está en movimiento y que $\tau_{xx}^I \approx \tau_{xx}^{II}$, la ecuación E.5 se simplifica de la siguiente manera:

$$n_y(\tau_{yx}^I - \tau_{yx}^{II}) + n_z(\tau_{zy}^I - \tau_{zy}^{II}) = n_x \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma \quad (E.10)$$

Luego al sustituir las componentes del vector \mathbf{n}^I se obtiene:

$$\tau_{yx}^I - \tau_{yx}^{II} = -f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma \quad (E.11)$$

En la ecuación anterior el término $-f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma$ representa la fuerza asociada a la tensión interfacial en la dirección del movimiento en un punto dado de la interfase. Ahora utilizando la figura E.2 se realizará un análisis de dicha fuerza en la región comprendida entre los puntos A y E.

Entre los puntos A y C la segunda derivada de la función $f(x)$ es negativa, por lo tanto R_{C1} es negativo, mientras que entre los puntos C y E la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva, por lo tanto R_{C1} es positivo en esta región.

Asimismo para cada tramo se puede observar lo siguiente:

-Tramo A-B:

$$-f'(x) < 0 \quad R_{C1} < 0 \quad -f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma > 0 \quad (E.12)$$

-Tramo B-C:

$$-f'(x) > 0 \quad R_{C1} < 0 \quad -f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma < 0 \quad (\text{E.13})$$

-Tramo C-D:

$$-f'(x) > 0 \quad R_{C1} > 0 \quad -f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma > 0 \quad (\text{E.14})$$

-Tramo D-E:

$$-f'(x) < 0 \quad R_{C1} > 0 \quad -f'(x) \left(\frac{1}{R_{C1}} \right) \sigma < 0 \quad (\text{E.15})$$

De lo anterior se observa que en la región A-B la fuerza asociada con la tensión interfacial es positiva, mientras que en la región B-C la fuerza asociada con la tensión interfacial es negativa, entonces como la onda es simétrica la fuerza neta asociada con la tensión interfacial en el tramo A-C es nula. Algo similar ocurre en el tramo C-E, pues en la región C-D la fuerza asociada con la tensión interfacial es positiva, mientras que en la región D-E la fuerza asociada con la tensión interfacial es negativa, por lo que en el tramo C-E la fuerza neta asociada con la tensión interfacial también es nula.

Entonces al ser la onda simétrica la fuerza asociada con la tensión interfacial ejercida en una mitad de la misma se cancela con la fuerza asociada con la tensión interfacial ejercida en la otra mitad, por lo tanto el efecto global de la tensión interfacial no es importante en la dirección del movimiento.

Como el modelo desarrollado en el presente trabajo es unidireccional, se concluye que en el mismo el efecto global de la tensión interfacial no es importante, por lo tanto es válido considerar que la interfase entre ambos fluidos es lisa y plana y utilizar un espesor de película promedio.