



Formación de Partículas mediante el Método de
Descarga Pulsada en Alambres

Trabajo Especial de Grado presentado por
Antonio Delgado De Pasquale
para optar al Título de
Licenciado en Física

Tutores:
Prof. Carlos Rojas
Prof. Napoleón Malpica

Marzo 2011

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado para evaluar el Trabajo Especial de Grado “Formación de Partículas mediante el Método de Descarga Pulsada en Alambres”, presentado por Antonio Delgado De Pasquale para optar al Título de Licenciado en Física, consideramos que este Trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos aprobado.

Prof. Carlos Rojas
(Tutor)

Prof. Napoleón Malpica
(Tutor)

Prof. Joszaira Lárez

Prof. José Jorge

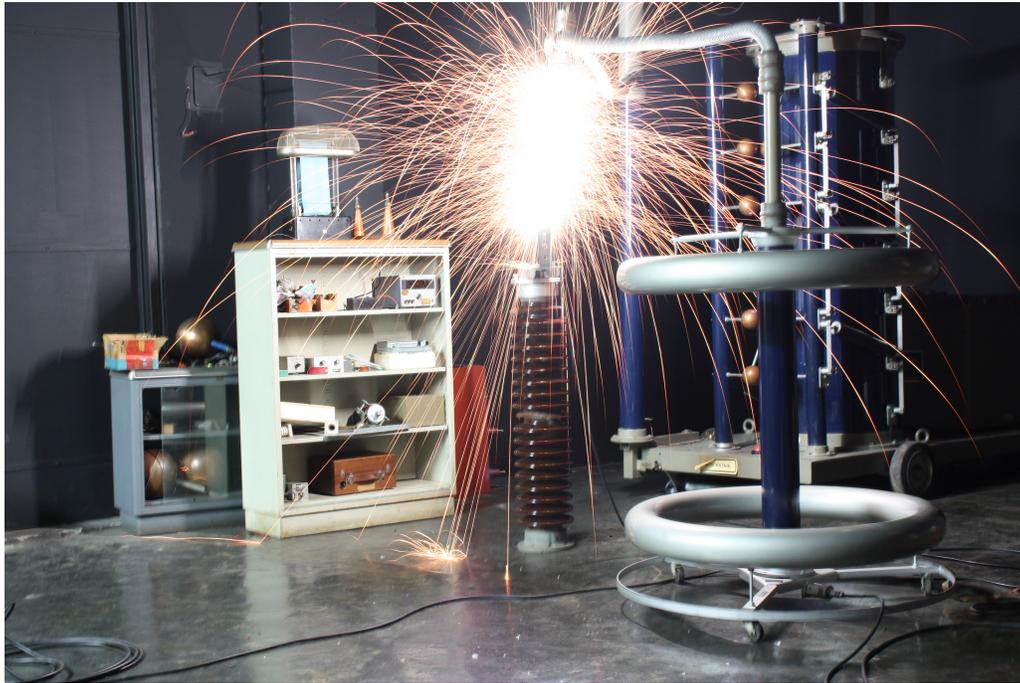
Resumen

Formación de Partículas mediante el Método de Descarga Pulsada en Alambres

Antonio Delgado De Pasquale

Universidad Central de Venezuela

Si por un alambre fino pasa un pulso de alta corriente puede ocasionarse una rápida transición de fase de estado sólido a plasma. Dos efectos principales causan la transición, el calentamiento por efecto Joule y la presión ejercida por el campo magnético originado por el mismo pulso de corriente (efecto Z-pinch). Al enfriarse el plasma, mediante colisiones con un ambiente gaseoso, los átomos se asocian y pueden formarse partículas finas. En este trabajo se realizaron descargas de pulsos de alta corriente a través de alambres de hierro puro. Para generar los pulsos de corriente se utilizó un generador Marx. Básicamente el experimento consiste en realizar una descarga, mediante explosores (interruptores de chispa), de una serie de condensadores conectados en paralelo cargados a una diferencia de potencial inicial V_0 . Se realizó una estimación de la diferencia de potencial V_0 mínima del generador Marx, requerida para separar los átomos del alambre haciendo uso de la energía de cohesión. Fue necesario diseñar una bobina que detectara la corriente en las descargas mediante inducción magnética; tal bobina es conocida como bobina de Rogowski. Para el diseño de esta bobina se establecieron parámetros según una ecuación de propagación para la onda de voltaje y corriente en la bobina, utilizando un modelo de parámetros distribuidos. Como un pulso tiene un amplio espectro de frecuencia debió diseñarse la bobina de forma que su ancho de banda fuese amplio también. Los pulsos detectados se midieron con un osciloscopio digital. Las descargas se realizaron en ambiente de aire, en una cámara a presión atmosférica y también en vacío grueso. Para cada prueba realizada se colocó como sustrato una lámina de silicio en el interior de la cámara, para recoger las partículas formadas. Las partículas recogidas en el sustrato fueron analizadas mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM), Espectroscopía de Electrones Auger (AES) y Microscopía de Fuerza Atómica (AFM). Se obtuvieron micropartículas con forma esférica y nanopartículas con forma elipsoidal, observando una dependencia entre el tamaño y dispersión de las partículas formadas con la presión y energía de la descarga.



“Lo importante en ciencia no es tanto obtener nuevos hechos como descubrir nuevas formas de pensar sobre ellos”

William Lawrence Bragg (1890-1971)

Arriba: Descarga de un pulso de alta corriente a través de un alambre de hierro.

Agradecimientos

Muchas son las personas que me han ayudado en la realización de este trabajo y a lo largo de estos últimos años de estudio. Seguro que no mencionaré a todos los que debo agradecer.

A mi familia, especialmente a mis padres y mis abuelas, quienes siempre han estado pendientes de mi y ayudado en todo lo que han podido.

A mis amigos Daniel, Omar, Ayrton, Alejandro y Jhonny, quienes han colaborado conmigo de distintas maneras y han sido verdaderos compañeros.

A los Profesores de la Facultad de Ciencias que me ayudaron en el estudio y comprensión durante el curso de las materias.

Al Prof. Carlos Rojas, por sus claras explicaciones sobre distintos temas de física y por haberme facilitado la posibilidad de realizar este trabajo, así como por su ayuda y orientación.

Al Prof. Napoleón Malpica, por haberme ayudado a resolver muchos de los problemas que se presentaron, tanto teóricos como prácticos y por estar tan atento.

A los Profesores del Departamento de Potencia de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la UCV, por toda la cooperación y por permitirme el uso de las instalaciones del Laboratorio de Máquinas y el Laboratorio de Alta Tensión.

Al Centro de Microscopía Electrónica de la Facultad de Ciencias de la UCV, por toda la colaboración prestada.

Al Centro de Materiales y Nanotecnología del IVIC, a la Dra. Gema Gonzalez y al MSc. Antonio Monsalve, por toda la cooperación en el análisis realizado con el microscopio de fuerza atómica.

A mis compañeros Rafael y Osiris, por su buen trato y amistad mientras estudiábamos las materias de la orientación de Física Experimental.

Finalmente, estoy especialmente agradecido con la familia Ascanio por toda su ayuda y atenciones mientras escribía el trabajo; sobre todo a mi Estefania, gracias de verdad por todo tu apoyo, cariño y comprensión.

Índice general

Introducción	7
1. Generador Marx	9
1.1. Modelo del generador Marx	10
1.2. Modelo del generador Marx con un objeto de prueba	14
1.3. Generador Marx del Laboratorio de Alta Tensión de la UCV	18
1.3.1. Generador Marx ajustado a una etapa	19
1.3.2. Cálculo del espectro de la corriente $i_3(t)$	22
2. Bobina de Rogowski	24
2.1. Modelo de la bobina de Rogowski	25
2.2. Respuesta en frecuencia de la bobina de Rogowski	31
2.3. Integral de Duhamel y respuesta de la bobina de Rogowski a un escalón de corriente	33
2.4. Parámetros de diseño	38
2.5. Elaboración de la bobina de Rogowski	40
2.6. Medición de la tensión de salida $V_m(t)$ al paso de un escalón de corriente	42
2.7. Medición de un pulso de corriente	46
3. Campo electromagnético en un conductor cilíndrico	48
3.1. Densidad superficial de corriente	49
3.1.1. Densidad de corriente para un conductor ferromagnético	51
3.1.2. Solución de la ecuación de difusión de \vec{J}	51
3.1.3. Efecto piel	52
3.2. Energía y presión	53
3.3. Conducción en un plasma	56

4. Descarga pulsada en alambres	59
4.1. Estimación propuesta de la tensión mínima V_0 que se requiere para separar los átomos de un alambre	61
4.2. Descarga pulsada en alambres de Fe	63
4.2.1. Descarga pulsada en alambres de Fe en ambiente de aire a presión atmosférica	69
4.2.2. Descarga pulsada en alambres de Fe en ambiente de aire a presiones menores a la atmosférica	76
5. Caracterización de las muestras obtenidas	79
5.1. Caracterización mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM) y Espectroscopía de Electrones Auger (AES)	80
5.1.1. Imágenes y espectros	82
5.2. Caracterización mediante Microscopía de Fuerza Atómica (AFM)	88
5.2.1. Imágenes y perfiles	90
Conclusiones	97
Bibliografía	99

Introducción

Al hacer pasar un pulso de alta corriente por un alambre fino puede ocasionarse una rápida transición de fase, de estado sólido a plasma. Inicialmente el alambre, en estado sólido, se calentará hasta llegar en un corto tiempo a su punto de fusión y realizar la transición al estado de plasma. A medida que el pulso de corriente asciende no sólo se calienta el alambre. También hay un efecto de compresión magnética causado por la interacción entre la corriente que pasa a través del alambre con su propio campo magnético. El efecto de la compresión magnética es llamado “Z-pinch”. El efecto Z-pinch, con corrientes en el orden de los millones de amperios, puede utilizarse para generar fusión nuclear [4, 5, 6].

Una de las aplicaciones de la descarga de pulsos de alta corriente en alambres es la formación de partículas finas [7, 8]. Al realizar una rápida transición de estado sólido a plasma, los átomos se encontrarán en un medio de alta temperatura. Al decaer el pulso de alta corriente la compresión magnética decrece y la presión del plasma causa una eyección en los átomos. Al colisionar los átomos entre ellos y con un ambiente gaseoso van “enfriándose” y pasan nuevamente a estado sólido, así en el paso de estado de plasma a estado sólido los átomos se asocian, formándose partículas.

Una corriente alta puede obtenerse mediante una descarga rápida de un condensador cargado inicialmente con una fuente de alta tensión. Es posible mediante un arreglo de condensadores conectados inicialmente en paralelo pasar a una conexión en serie en un tiempo muy breve y realizar una descarga a una tensión inicial que es multiplicada por el número de condensadores utilizados. Este es el mecanismo de funcionamiento de un generador Marx. Un generador Marx se utiliza frecuentemente para simular descargas atmosféricas. Las pruebas que se realizaron para este trabajo fueron hechas en el Laboratorio de Alta Tensión de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la UCV, donde se dispone de un generador Marx.

Para medir la corriente que pasa por el alambre fue necesario diseñar y construir una bobina basada en el principio de inducción magnética; tal bobina es conocida como bobina de Rogowski. Se estudió un modelo de parámetros distribuidos de la bobina donde se consideraron no sólo efectos inductivos sino también capacitivos. Del modelo se obtuvo una ecuación de onda que se utilizó para extraer las condiciones de diseño. De la comparación entre la estimación teórica y la respuesta medida a un escalón de corriente [22], se determinó el ancho de banda donde la tensión inducida en la bobina es proporcional a la derivada de la corriente que se quiere medir. Mediante el resultado conocido como integral de Duhamel, pudo calcularse la respuesta a cualquier forma de la corriente estudiando la respuesta al escalón. Para la calibración de la bobina se realizó una comparación con una sonda calibrada, la cual debido a su nivel máximo de tolerancia a la corriente (500 A) no pudo utilizarse para medir las descargas.

En los experimentos se utilizó alambre de hierro puro. Para realizar una estimación de la tensión inicial mínima que se requiere para separar los átomos del alambre de hierro se utilizó el concepto de energía de cohesión. Se estudió la transición de sólido a líquido, mediante el conocimiento de la dependencia de la resistividad del hierro y su capacidad calorífica con la temperatura. La estimación se hizo comparando la energía entregada al alambre durante el estado sólido con la energía requerida para el paso de estado líquido a la separación total de los átomos.

Las pruebas se realizaron en una cámara, donde se colocó una lámina de silicio como sustrato para recoger las partículas. Los primeros experimentos se hicieron a presión atmosférica en ambiente de aire variando el nivel de corriente máxima en la descarga. Luego se realizaron pruebas manteniendo constante el nivel de corriente máxima y colocando presiones menores a la atmosférica.

Finalmente, se analizaron las muestras recogidas en las láminas de silicio en el Centro de Microscopía Electrónica de la Facultad de Ciencias de la UCV y el Centro de Materiales y Nanotecnología del IVIC. Los instrumentos utilizados para el análisis fueron una microsonda Auger, un microscopio electrónico de barrido y un microscopio de fuerza atómica.

Capítulo 1

Generador Marx

La generación de pulsos de alta tensión se puede lograr descargando un conjunto de condensadores inicialmente colocados a una diferencia de potencial $V_0 = \varepsilon$, donde ε es la diferencia de potencial suministrada por una fuente de alta tensión. Mientras están siendo cargados por la fuente, los condensadores están conectados en paralelo. Después de cargarse completamente, unas esferas metálicas conectadas como se muestra en la figura 1.1, van siendo acercadas mediante un motor accionado a distancia, hasta que el acercamiento es suficiente para producir la ruptura dieléctrica en el aire. En el instante $t = 0$ en que ocurre la ruptura, la diferencia de potencial entre el último condensador y el primero $V_b - V_a$ (figura 1.1) pasa de un valor V_0 a nV_0 , donde n es el número de condensadores. Así, la tensión entre los puntos a y b es multiplicada por n en el instante en que se inicia la ruptura.

En $t = 0$ se inicia la carga del condensador C' (que tiene una

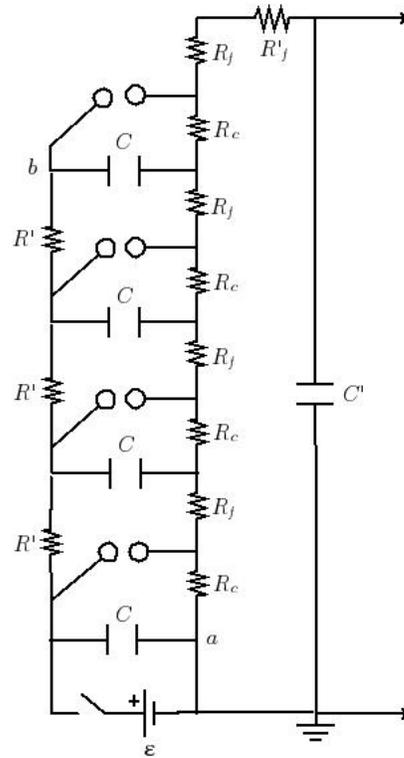


Figura 1.1: Esquema de un generador Marx de 4 etapas.

capacitancia mucho menor que la de los condensadores C) por las resistencias R_f y la R'_f . Para $t > 0$ los condensadores C comienzan a descargarse por las resistencias R_c hasta que el campo eléctrico entre las esferas disminuye al punto de interrumpir la ruptura. Esta forma de conectar y desconectar los condensadores es muy eficiente para generar pulsos de corta duración. Este tipo de interruptor con esferas es conocido como explosor (“spark gap switch” o “interruptor de chispa”) [10].

El condensador C' se carga en el intervalo en que hay ruptura entre las esferas. La salida del generador Marx corresponde a la diferencia de potencial del condensador C' . Las resistencias R_f y R_c pueden ajustarse y son llamadas resistencias de frente y resistencias de cola, por ser las que determinan los tiempos característicos del frente y de la cola del pulso de salida.

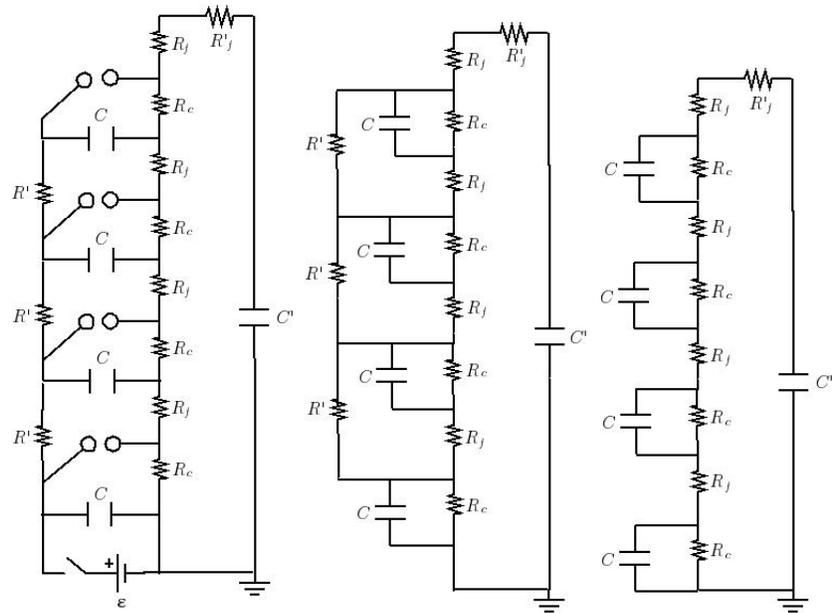
El circuito básico de este tipo de generador de pulsos de alta tensión fue patentado por Erwin Marx en 1923 [10].

1.1. Modelo del generador Marx

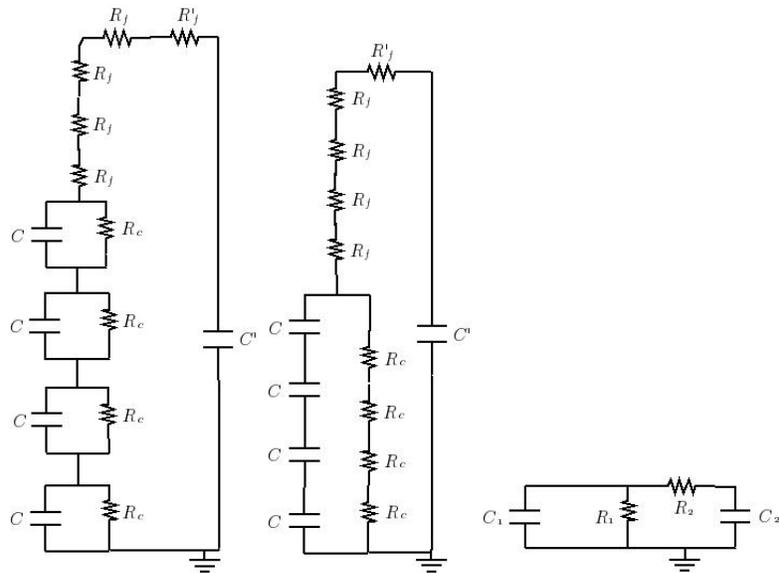
En el intervalo de tiempo Δt en que hay ruptura dieléctrica entre las esferas puede hallarse la tensión de salida del generador, que como se vió anteriormente corresponde a la diferencia de potencial en C' .

Obtener una solución analítica de la tensión de salida del generador Marx formado por n etapas, como el que se muestra en la fig. 1.1, puede resultar una tarea ardua por la cantidad de ecuaciones diferenciales que hay que resolver. Sin embargo, es posible reducir el generador Marx de n etapas a un generador de una etapa disminuyendo así el número de ecuaciones a resolver.

El circuito reducido a una etapa del generador en el intervalo Δt , donde hay ruptura dieléctrica entre las esferas, puede hallarse siguiendo los pasos que se muestran en la figura 1.2, donde $C_1 = \frac{C}{n}$, $R_2 = nR_f + R'_f$, $C_2 = C'$ y $R_1 = nR_c$.



(a) Estado inicial del generador. (b) Se inicia la ruptura entre las esferas. (c) Las corrientes por las resistencias R' se desprecian.



(d) (e) (f) Circuito del generador reducido a una etapa.

Figura 1.2: Pasos para obtener el circuito reducido del generador Marx.

A partir del circuito reducido del generador (fig. 1.3) se tienen las siguientes ecuaciones para las corrientes y tensiones

$$\begin{cases} i_1 = -C_1 \dot{V}_1 \\ i_2 = C_2 \dot{V}_2 \\ V_1 - (i_1 - i_2)R_1 = 0 \\ (i_1 - i_2)R_1 - i_2 R_2 - V_2 = 0 \end{cases}$$

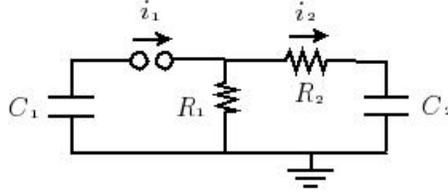


Figura 1.3: Circuito reducido del generador Marx a una etapa.

De las ecuaciones anteriores se obtiene

$$-C_1 \dot{V}_1 = \frac{V_1}{R_1} + C_2 \dot{V}_2 \quad (1.1)$$

$$C_2 \dot{V}_2 = -\frac{R_1 C_1}{R_1 + R_2} \dot{V}_1 - \frac{V_2}{R_1 + R_2} \quad (1.2)$$

$$\dot{V}_1 = -\frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1 C_1} \dot{V}_2 - \frac{V_2}{R_1 C_1}$$

sustituyendo en la ecuación 1.1

$$\frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1} \dot{V}_2 + \frac{V_2}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} + C_2 \dot{V}_2$$

$$V_1 = (R_1 + R_2)C_2 \dot{V}_2 + V_2 - R_1 C_2 \dot{V}_2$$

al sustituir en la ecuación 1.1 se tiene

$$-(R_1 + R_2)C_1 C_2 \ddot{V}_2 - C_1 \dot{V}_2 + R_1 C_1 C_2 \ddot{V}_2 = \frac{(R_1 + R_2)C_2}{R_1} \dot{V}_2 + \frac{V_2}{R_1}$$

$$\ddot{V}_2 + \frac{R_1(C_1 + C_2) + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}\dot{V}_2 + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}V_2 = 0 \quad (1.3)$$

la solución para esta ecuación es

$$V_2(t) = A_1e^{\alpha_+t} + A_2e^{\alpha_-t}$$

con

$$\alpha_{\pm} = \frac{-R_1(C_1 + C_2) - R_2C_2 \pm \sqrt{R_1^2C_1^2 + 2R_1C_1C_2(R_1 - R_2) + (R_1 + R_2)^2C_2^2}}{2R_1R_2C_1C_2}$$

En el instante $t = 0$ en que comienza la ruptura en las esferas $Q_2 = 0 \implies V_2(0) = 0 \implies A_1 = -A_2 \equiv A$, entonces

$$V_2(t) = A(e^{\alpha_+t} - e^{\alpha_-t}) \quad (1.4)$$

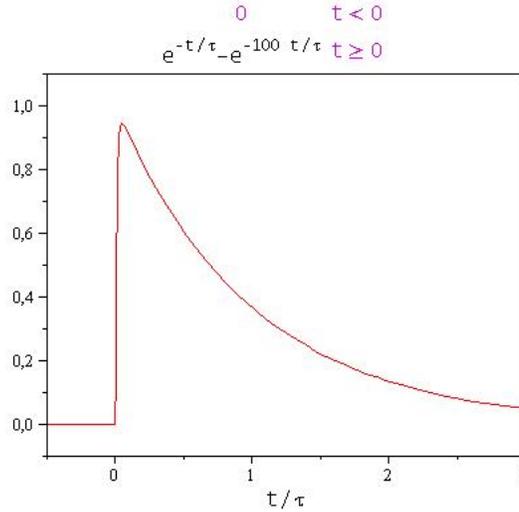


Figura 1.4: Forma de la tensión de salida.

como $\alpha_+ < 0$, $\alpha_- < 0$ y $|\alpha_+| < |\alpha_-|$ puede verse que $V_2(t)$ alcanza un máximo para $t = \ln(\frac{\alpha_-}{\alpha_+})/(\alpha_+ - \alpha_-)$.

La constante A puede hallarse calculando $i_2 = C_2\dot{V}_2$, en $t = 0$ se tiene $i_2(0) = \frac{nV_0(R_1+R_2)}{R_1R_2}$, entonces

$$i_2(t) = AC_2(\alpha_+e^{\alpha_+t} - \alpha_-e^{\alpha_-t}) \implies i_2(0) = AC_2(\alpha_+ - \alpha_-) \implies A = \frac{nV_0(R_1 + R_2)}{R_1R_2C_2(\alpha_+ - \alpha_-)}$$

Esta forma de $V_2(t)$ corresponde a la tensión de salida del generador cuando no se coloca ningún elemento u “objeto de prueba” en paralelo con el condensador $C_2 = C'$.

1.2. Modelo del generador Marx con un objeto de prueba

Si se conecta en la salida del generador un conductor con resistencia R , como se muestra en la figura 1.5, se tienen las siguientes ecuaciones para las corrientes y cargas

$$\begin{cases} Q_1 - R_1C_1(i_1 - i_2) = 0 \\ R_1C_2(i_1 - i_2) - R_2C_2i_2 - Q_2 = 0 \\ Q_2 - RC_2i_3 = 0 \\ i_1 = -\dot{Q}_1 \\ i_2 - i_3 = \dot{Q}_2 \end{cases}$$

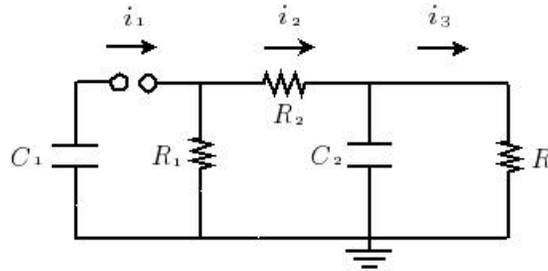


Figura 1.5: Circuito reducido del generador Marx a una etapa con un objeto de prueba.

Del conjunto de ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes:

$$\begin{cases} i_1 + R_1C_1(\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = 0 \\ R_1C_2(\dot{i}_1 - \dot{i}_2) - R_2C_2\dot{i}_2 - (i_2 - i_3) = 0 \\ (i_2 - i_3) - RC_2\dot{i}_3 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$$i_2 = RC_2 \dot{i}_3 + i_3 \quad (1.6)$$

$$\dot{i}_1 = \frac{R}{R_1} \dot{i}_3 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)(RC_2 \ddot{i}_3 + \dot{i}_3) \quad (1.7)$$

$$\dot{i}_1 - \dot{i}_2 = \frac{R}{R_1} \dot{i}_3 + \frac{R_2}{R_1}(RC_2 \ddot{i}_3 + \dot{i}_3) \quad (1.8)$$

Utilizando la primera ecuación del conjunto 1.5, la ecuación 1.7 y la ecuación 1.8 se tiene una ecuación desacoplada para i_3

$$\frac{R}{R_1} \dot{i}_3 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)(RC_2 \ddot{i}_3 + \dot{i}_3) = -RC_1 \ddot{i}_3 - R_2 C_1 (RC_2 \ddot{i}_3 + \dot{i}_3)$$

Reescribiendo, se tiene

$$a \ddot{i}_3 + b \dot{i}_3 + c i_3 = 0 \quad (1.9)$$

$$a = R_2 C_2 R C_1$$

$$b = (R + R_2) C_1 + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) R C_2$$

$$c = \frac{R + R_1 + R_2}{R_1}$$

La solución para $i_3(t)$ es

$$i_3(t) = A_1 e^{\lambda_+ t} + A_2 e^{\lambda_- t} + A_3 \quad (1.10)$$

con

$$\lambda_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $R \ll R_2$ se tiene que

$$\lambda_+ = -\frac{1}{R_2 C_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad (1.11)$$

$$\lambda_- = -\frac{1}{R C_2} \quad (1.12)$$

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{1}{\frac{R}{R_2} \frac{C_2}{C_1} (1 + \frac{R_2}{R_1})} \implies |\lambda_-| \gg |\lambda_+| \quad (1.13)$$

Con la condición $i_3(0) = 0$ se tiene que

$$i_3(t) = A_1(e^{\lambda_+ t} - 1) + A_2(e^{\lambda_- t} - 1) \quad (1.14)$$

Utilizando la ecuación 1.6 y con la condición $i_2(0) = \frac{nV_0}{R_2}$ se tiene que $\dot{i}_3(0) = \frac{nV_0}{R_2 RC_2}$. Derivando y evaluando en $t = 0$ la ecuación 1.14 se tiene

$$\lambda_+ A_1 + \lambda_- A_2 = \frac{nV_0}{R_2 RC_2}$$

$$\boxed{i_3(t) = \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} A - \frac{nV_0}{\lambda_+ R_2 RC_2} \right) (1 - e^{\lambda_+ t}) - A (1 - e^{\lambda_- t})} \quad (1.15)$$

Con la primera ecuación del conjunto 1.5 y la ecuación 1.8 puede conseguirse $\ddot{i}_3(0)$. Colocando la condición $i_1(0) = nV_0(R_1 + R_2)/R_1 R_2$ se tiene

$$\ddot{i}_3(0) = -\frac{nV_0(RC_2(R_1 + R_2) + R_1 C_1(R + R_2))}{R_1 C_1 R_2^2 C_2^2 R^2} \quad (1.16)$$

Derivando dos veces la ecuación 1.15 y colocando la condición anterior para $t = 0$ se tiene

$$A = -\frac{nV_0(\lambda_+ R_1 C_1 R_2 C_2 R + RC_2(R_1 + R_2) + R_1 C_1(R + R_2))}{R_1 C_1 R_2^2 C_2^2 R^2 (\lambda_-^2 - \lambda_+ \lambda_-)} \quad (1.17)$$

Si $R \ll R_2$ se tiene que

$$A \approx -\frac{nV_0}{R_2 - R \frac{C_2}{C_1} (1 + \frac{R_2}{R_1})} \approx -\frac{nV_0}{R_2} \quad (1.18)$$

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} A - \frac{nV_0}{\lambda_+ R_2 RC_2} = \frac{nV_0}{R \frac{C_2}{C_1} (1 + \frac{R_2}{R_1})} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{R}{R_2} \frac{C_2}{C_1} (1 + \frac{R_2}{R_1})} \right) \approx -\frac{nV_0}{R_2} \quad (1.19)$$

$$\boxed{i_3(t) = \frac{nV_0}{R_2} ((1 - e^{\lambda_- t}) - (1 - e^{\lambda_+ t}))} \quad (1.20)$$

Como puede verse en la figura 1.6 (para $R \ll R_2$), al iniciarse el paso

de la corriente $i_3(t)$ por la resistencia R , domina el término que contiene la constante de tiempo $\tau_- = -\frac{1}{\lambda_-}$. La corriente alcanza un valor constante durante un tiempo del orden de τ_- y luego comienza a decaer al pasar un tiempo del orden de $\tau_+ = -\frac{1}{\lambda_+}$.

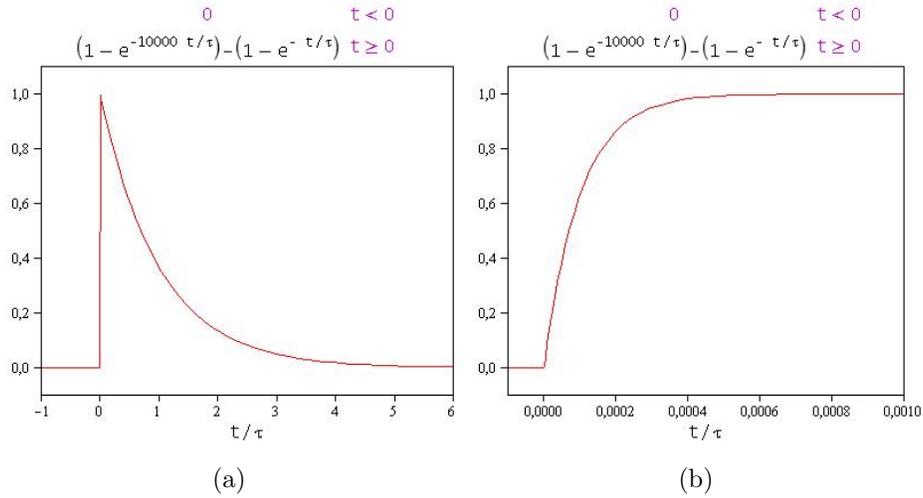


Figura 1.6: Forma de $i_3(t)$ en diferentes escalas de tiempo para $\tau_+ \gg \tau_-$ (con $\tau_+ = \tau$).

1.3. Generador Marx del Laboratorio de Alta Tensión de la UCV

El generador Marx ubicado en el Laboratorio de Alta Tensión de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la UCV tiene seis etapas, es decir, contiene seis condensadores C de los mostrados en la figura 1.1. Así, la tensión inicial entre los puntos b y a puede ser multiplicada por un factor de seis en el instante en que se inicia la conducción entre las esferas.



Figura 1.7: Generador Marx del Laboratorio de Alta Tensión.

Para evitar que el pulso electromagnético generado en la descarga de los condensadores interfiera con el exterior, las paredes, techo y piso del laboratorio son de material conductor. De tal manera que este espacio configura lo que se conoce como una “jaula de Faraday”.

Parámetro	Valor
C	$0,54 \mu F$
C'	$0,002 \mu F$
R_f	10Ω
R'_f	160Ω
R_c	113Ω
R'	$7 k\Omega$

Cuadro 1.1: Parámetros del generador Marx.

La fuente que se utiliza para cargar los condensadores contiene un transformador elevador y tiene una salida máxima de $\varepsilon = 75 kV$. Así, la tensión de salida del generador puede alcanzar el voltaje $V_b - V_a = 450 kV$ y almacenar una energía inicial $E = 6CV_0^2/2 \approx 9kJ$.

1.3.1. Generador Marx ajustado a una etapa

Para que el material que compone un alambre pase de estado sólido a plasma es necesario que la energía sea suministrada en un tiempo muy breve, lo que implica que la corriente alta que pasa por el alambre debe alcanzar su valor máximo en un tiempo también breve. Con el fin de obtener pulsos de alta corriente con un tiempo de ascenso mucho menor al tiempo de descenso, se le hicieron algunos ajustes al generador Marx del Laboratorio de Alta Tensión.

Según la ecuación 1.20 (deducida para $R \ll R_2$) pueden obtenerse corrientes altas en un conductor de resistencia R , conectado a la salida generador, reduciendo la resistencia R_2 . Como $R_2 = 6R_f + R'_f$ se redujo la resistencia R_2 quitando las resistencias R_f y bajando el valor de R'_f . El generador Marx quedó colocado como puede verse en la figura 1.8. Con estas modificaciones al establecerse la ruptura en cualquiera de las esferas comienza la descarga de los condensadores C y la tensión inicial entre los puntos b y a , al comenzar la descarga, permanece igual a la tensión V_0 , no multiplicándose por un factor de seis. Colocado de ésta forma el generador Marx tiene una sólo etapa, es decir, antes y después de cerrarse uno o mas de los interruptores de chispa los condensadores C estan conectados en paralelo y la corriente que pasa por cada uno de los condensadores es un sexto de la corriente que pasa por R'_f ; de esta manera se consigue también proteger los condensadores del generador dividiendo la corriente total entre cada uno ellos.

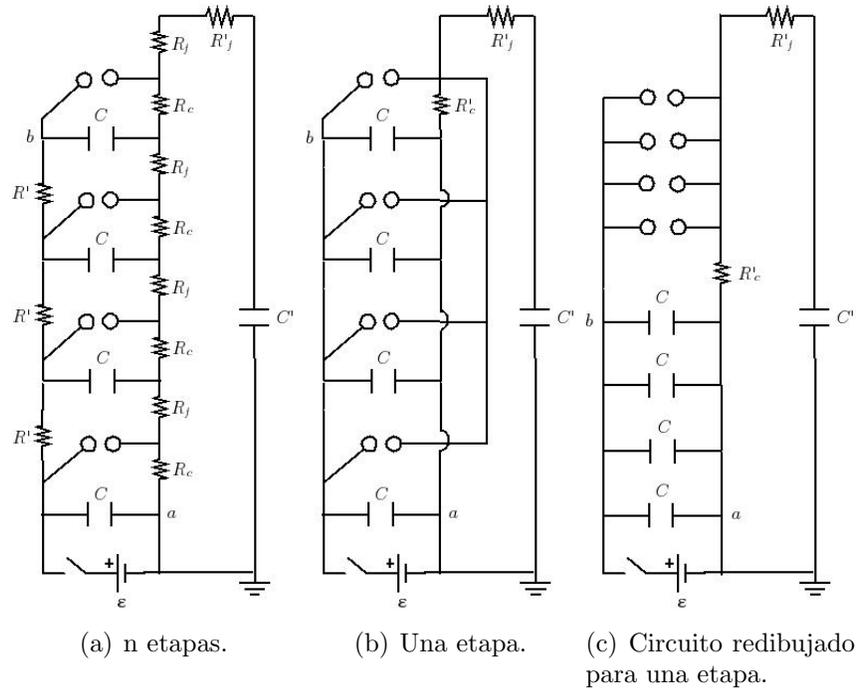
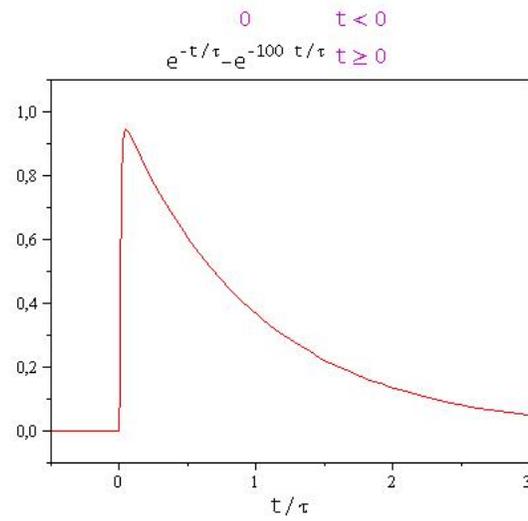


Figura 1.8: Generador Marx en n etapas y en una etapa.

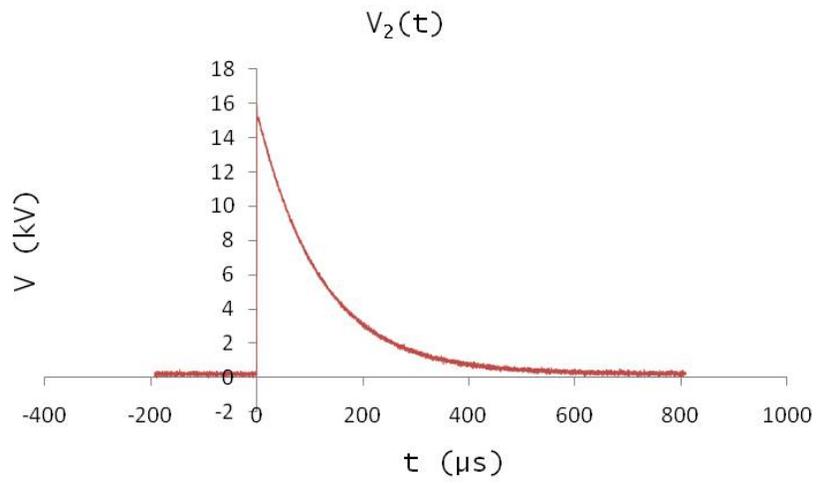
Mientras $R \ll R'_f$, el tiempo de ascenso será mucho menor al tiempo de descenso del pulso, ya que $C_2 = C' \ll C_1 = 6C$. Los valores de las resistencias colocados en el ajuste a una etapa fueron $R'_f \approx 43 \Omega$ y $R'_c \approx 38 \Omega$.

Para medir la tensión de salida del Generador se utiliza un divisor de tensión colocado en una resistencia conectada en paralelo con el condensador C' , como puede verse en la figura 1.7. La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia se transmite mediante un cable coaxial a un osciloscopio. Para no exceder la tensión que puede medir el osciloscopio en el extremo del cable coaxial se coloca un atenuador (el atenuador consiste en un divisor de tensión) que disminuye el valor de la tensión en un factor de 10. Con este atenuador y con el divisor de tensión usado, por cada 12371V de la tensión de salida en C' llega 1V al osciloscopio.

En la figura 1.9 puede observarse la tensión de salida del generador colocado en una etapa. Puede verse como coincide con la forma teórica calculada.



(a) Forma teórica de la tensión de salida.



(b) Tensión medida para $V_0 = 16kV$.

Figura 1.9: Tensión de salida teórica y medida del generador Marx.

1.3.2. Cálculo del espectro de la corriente $i_3(t)$

El pulso de corriente $i_3(t)$ que se obtiene al colocar una resistencia $R \ll R_2$ a la salida del generador Marx tiene un espectro de frecuencia que es función de su tiempo de duración. Como puede verse en la figura 1.6, si $R \ll R_2$ el tiempo de subida del pulso es mucho menor al tiempo de decaimiento y la corriente puede aproximarse a la forma

$$i_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-\frac{t}{\tau_+}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

En la figura 1.10 puede verse la corriente que se establece al colocar un corto a la salida del generador Marx ajustado a una etapa. El tiempo de decaimiento de la corriente $i_3(t)$ está en el orden de los microsegundos y puede determinarse de la medición que $\tau_+ \approx 70 \mu s$. El valor estimado teóricamente (sección 1.2) $\tau_+ = \frac{R_2 C_1}{(1 + \frac{R_2}{R_1})} = \frac{6R_f C}{1 + \frac{R_f}{R_c}} \approx 65 \mu s$.

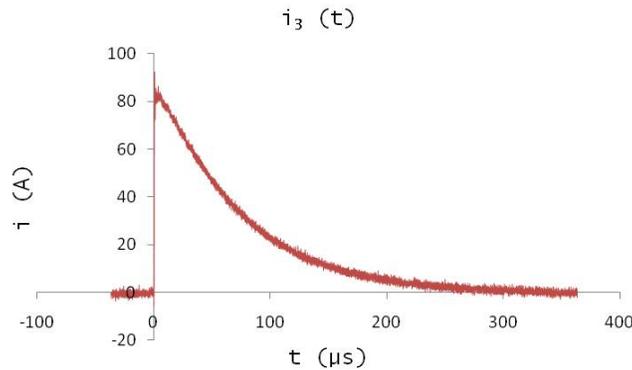


Figura 1.10: Medida de la corriente $i_3(t)$ con una sonda comercial calibrada.

Aplicando una transformada de Fourier $\mathcal{F}[f(t)] \equiv \bar{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ sobre $i_3(t)$ se obtiene el espectro de frecuencia $|\bar{i}_3(w)|$ para el pulso de corriente.

$$\text{como } i_3(t) = 0 \text{ para } t < 0 \implies \bar{i}_3(w) = \int_0^\infty i_3(t)e^{-jwt} dt$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-jwt} dt = \frac{1}{\alpha + jw} \implies \bar{i}_3(w) = \frac{A\tau_+}{1 + jw\tau_+}$$

$$\frac{|\bar{i}_3(w)|}{|\bar{i}_3(0)|} = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f\tau_+)^2}} \quad (1.21)$$

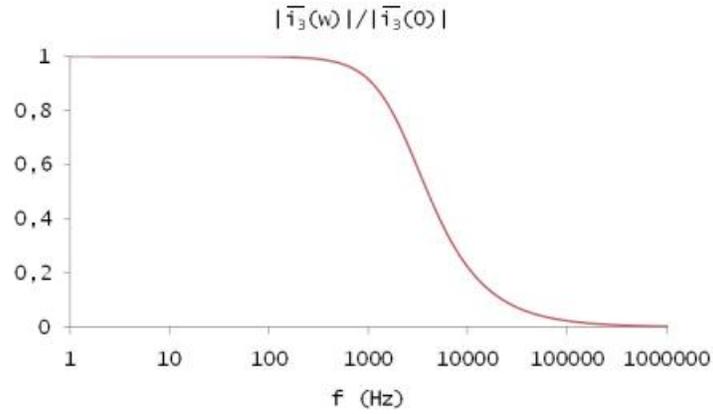


Figura 1.11: Espectro de la corriente $i_3(t)$. Puede verse que para un pulso de duración $\Delta t \approx 200\mu s$ el espectro de frecuencia llega hasta $f \approx 100KHz$.

Capítulo 2

Bobina de Rogowski

Una bobina de Rogowski (llamada así en honor al físico alemán Walter Rogowski) se utiliza para la medición de corrientes variables en el tiempo. Consiste básicamente de un conductor que forma un arrollado toroidal de N espiras, como se muestra en la figura 2.1, con núcleo de aire y un conductor central de retorno. Siguiendo la figura, al paso de una corriente $i_m(t)$ en dirección z , a través del área limitada por el contorno de la bobina, se induce una tensión $V_m(t)$ entre los extremos del conductor que conforma las N espiras.

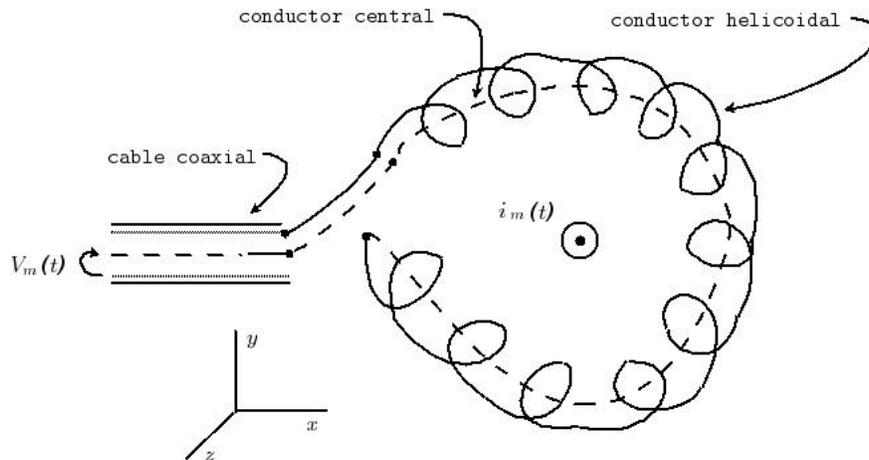


Figura 2.1: Bobina de Rogowski.

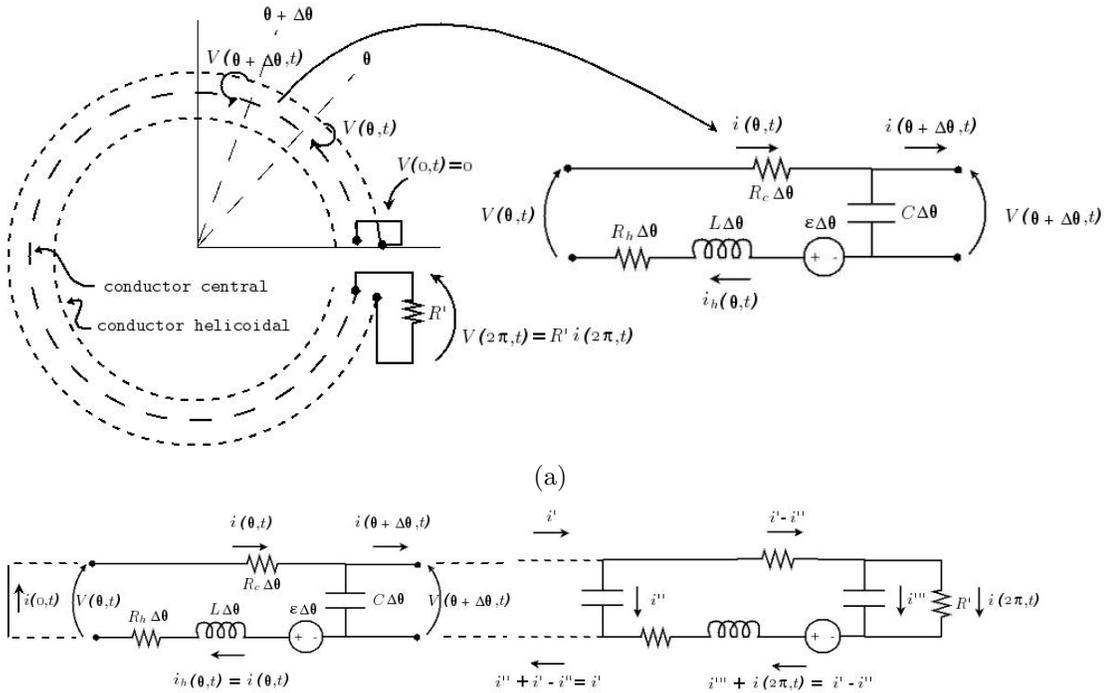
El hecho de que la bobina de Rogowski tenga núcleo de aire tiene la

ventaja de que las ecuaciones que describen su comportamiento son lineales.

Utilizando un modelo con parámetros distribuidos [9], formado por resistencias, inductancias y capacitancias por unidad de ángulo, se pueden obtener expresiones que permiten un adecuado diseño y estudio de la tensión de salida de la bobina de Rogowski.

2.1. Modelo de la bobina de Rogowski

En la figura 2.2 se tiene un modelo para la bobina de Rogowski. Puede verse que las corrientes en el conductor helicoidal y el conductor central en una sección $\Delta\theta$ son iguales.



(b) Puede observarse la distribución de la corriente y verse que $i(\theta, t) = i_h(\theta, t)$.

Figura 2.2: Modelo de Parámetros Distribuidos para la Bobina de Rogowski.

Sumando las diferencias de potencial en un camino cerrado se tiene

$$V(\theta, t) - (R_c + R_h)\Delta\theta i(\theta, t) - L\Delta\theta \frac{\partial i(\theta, t)}{\partial t} - \varepsilon(t)\Delta\theta - V(\theta + \Delta\theta, t) = 0 \quad (2.1)$$

donde R_h , R_c , L y $\varepsilon(t)$ son la resistencia del conductor helicoidal, la resistencia del conductor central, la inductancia y la tensión inducida (por el campo magnético originado por la corriente que se quiere medir) por unidad de ángulo, respectivamente.

Por ser $i(\theta, t) = i_h(\theta, t)$ el campo magnético en la dirección z es cero (ver figura 2.3), lo que implica que el flujo de campo magnético a través del área limitada por el contorno de la bobina es cero.

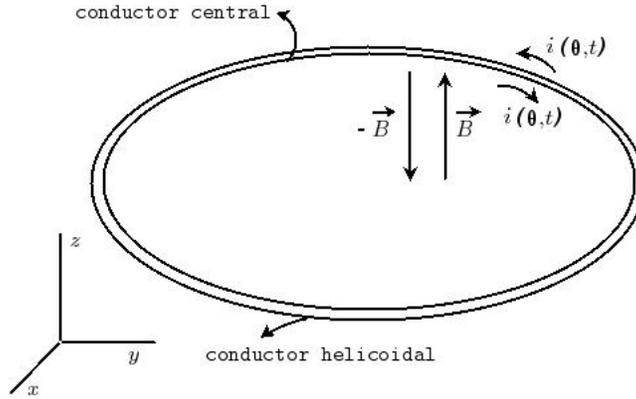


Figura 2.3: Idealmente el campo magnético en la dirección z en el área limitada por el contorno de la bobina es cero.

De la ecuación 2.1

$$V(\theta + \Delta\theta, t) - V(\theta, t) = -((R_c + R_h)i(\theta, t) + L\frac{\partial i(\theta, t)}{\partial t} + \varepsilon(t))\Delta\theta \quad (2.2)$$

Así si $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -((R_c + R_h)i + L\frac{\partial i}{\partial t} + \varepsilon) \quad (2.3)$$

Además sumando las corrientes en el nodo

$$i(\theta, t) - i(\theta + \Delta\theta, t) = C\Delta\theta \frac{\partial V(\theta + \Delta\theta, t)}{\partial t} \implies \frac{\partial i}{\partial \theta} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.4)$$

donde C es la capacitancia entre el conductor central y helicoidal por unidad de ángulo.

Las ecuaciones 2.3 y 2.4 forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas. Es posible desacoplar el sistema para así obtener una ecuación diferencial para la tensión y otra para la corriente.

Si la corriente $i_m(t)$ que causa la tensión inducida por unidad de ángulo pasa perpendicular al plano de la bobina de Rogowski y la atraviesa por su centro, como se ve en la figura 2.1, ε no dependerá del ángulo θ . De 2.3 y 2.4 se tiene

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = (R_h + R_c)C \frac{\partial V}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \quad (2.5)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial \theta^2} = (R_h + R_c)C \frac{\partial i}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + C \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}} \quad (2.6)$$

Para encontrar las funciones $i(\theta, t)$ y $V(\theta, t)$ se puede hacer uso de la transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f(t)] \equiv \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$.

Haciendo una transformada de Laplace sobre la ecuación 2.3, con la condición $i(\theta, 0) = 0$ y la propiedad $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\tilde{f}(s) - f(0+)$, se tiene

$$\frac{d\tilde{V}}{d\theta} = -((R_c + R_h)\tilde{i} + sL\tilde{i} + \tilde{\varepsilon}) \quad (2.7)$$

Igualmente para la ecuación 2.4 y con la condición $V(\theta, 0) = 0$

$$\frac{d\tilde{i}}{d\theta} = -sC\tilde{V} \quad (2.8)$$

Utilizando 2.7 y 2.8

$$\boxed{\frac{d^2 \tilde{i}}{d\theta^2} = s(R_h + R_c)C\tilde{i} + s^2 LC\tilde{i} + sC\tilde{\varepsilon}} \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2\tilde{V}}{d\theta^2} = -(R_h + R_c + sL)\frac{d\tilde{i}}{\partial\theta} \quad (2.10)$$

$$\boxed{\frac{d^2\tilde{V}}{d\theta^2} = sC(R_h + R_c + sL)\tilde{V}} \quad (2.11)$$

Como puede verse las ecuaciones 2.9 y 2.11 corresponden a las ecuaciones 2.6 y 2.5.

$$\text{Si } \gamma^2 = sC(R_h + R_c + sL)$$

$$\boxed{\tilde{V} = Ae^{\gamma\theta} + Be^{-\gamma\theta}} \quad (2.12)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{d\theta} = \gamma(Ae^{\gamma\theta} - Be^{-\gamma\theta}) \quad (2.13)$$

Al sustituir 2.13 en 2.7

$$\gamma(Ae^{\gamma\theta} - Be^{-\gamma\theta}) = -((R_c + R_h)\tilde{i} + sL\tilde{i} + \tilde{\varepsilon}) \quad (2.14)$$

entonces

$$\boxed{\tilde{i} = \frac{-\gamma(Ae^{\gamma\theta} - Be^{-\gamma\theta}) - \tilde{\varepsilon}}{R_h + R_c + sL}} \quad (2.15)$$

Como en $\theta = 0$ se coloca al conductor central y helicoidal de la bobina de Rogowski al mismo potencial $V(0, t) = 0$ y en $\theta = 2\pi$ se coloca una resistencia R' entonces $V(2\pi, t) = R'i(2\pi, t)$.

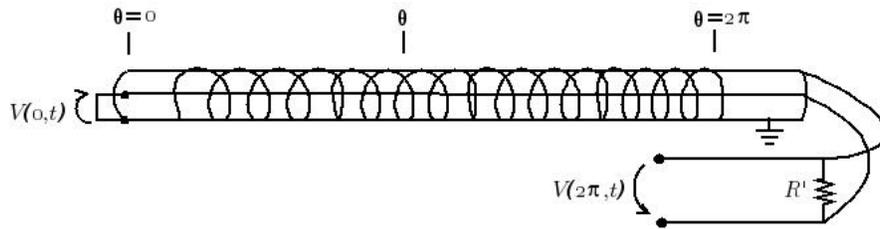


Figura 2.4: Condiciones de frontera para $V(\theta, t)$.

Puede verse que

$$\begin{aligned} V(0, t) = 0 &\implies \tilde{V}(0, s) = 0 \\ V(2\pi, t) = R'i(2\pi, t) &\implies \tilde{V}(2\pi, s) = R'\tilde{i}(2\pi, s) \end{aligned}$$

Con las condiciones anteriores se tiene

$$A = -B \implies A(e^{\gamma 2\pi} - e^{-\gamma 2\pi}) = R' \frac{-\gamma A(e^{\gamma 2\pi} + e^{-\gamma 2\pi}) - \tilde{\varepsilon}}{R_h + R_c + sL}$$

$Z_0 = \frac{R_h + R_c + sL}{\gamma} = \sqrt{\frac{R_h + R_c + sL}{sC}}$ puede ser identificada como la impedancia característica de la bobina de Rogowski. Si $\frac{R_h + R_c}{sC}$ se desprecia entonces $Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$.

$$A = \frac{-R'\tilde{\varepsilon}}{(R_h + R_c + sL)(e^{\gamma 2\pi} - e^{-\gamma 2\pi})\left(1 + \frac{R'}{Z_0} \frac{e^{\gamma 2\pi} + e^{-\gamma 2\pi}}{e^{\gamma 2\pi} - e^{-\gamma 2\pi}}\right)} \quad (2.16)$$

$$\tilde{V} = \frac{-R'\tilde{\varepsilon}(e^{\gamma \theta} - e^{-\gamma \theta})}{(R_h + R_c + sL)(e^{\gamma 2\pi} - e^{-\gamma 2\pi})\left(1 + \frac{R'}{Z_0} \frac{(1 + e^{-\gamma 4\pi})}{(1 - e^{-\gamma 4\pi})}\right)} \quad (2.17)$$

La ecuación 2.17 es la transformada de Laplace de $V(\theta, t)$. Evaluando en $\theta = 2\pi$

$$\tilde{V}(2\pi, s) = \frac{-R'\tilde{\varepsilon}}{(R_h + R_c + sL)\left(1 + \frac{R'}{Z_0} \frac{(1 + e^{-\gamma 4\pi})}{(1 - e^{-\gamma 4\pi})}\right)} \quad (2.18)$$

$$\tilde{V}(2\pi, s) = \frac{-R'Z_0\tilde{\varepsilon}(1 - e^{-\gamma 4\pi})}{(R_h + R_c + sL)(R' + Z_0)\left(1 + e^{-\gamma 4\pi} \frac{R' - Z_0}{R' + Z_0}\right)} \quad (2.19)$$

$$\tilde{V}(2\pi, s) = \frac{-R'Z_0\tilde{\varepsilon}(1 - e^{-\gamma 4\pi})(1 + \Gamma e^{-\gamma 4\pi})^{-1}}{(R_h + R_c + sL)(R' + Z_0)} \quad (2.20)$$

siendo $\Gamma = \frac{R' - Z_0}{R' + Z_0}$ el coeficiente de reflexión de la bobina en $\theta = 2\pi$.

$$\text{Si } |x| < 1 \quad (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

$|\Gamma e^{-\gamma 4\pi}| < 1$, entonces se tiene

$$\tilde{V}(2\pi, s) = -\frac{R'Z_0\tilde{\varepsilon}(1 - e^{-\gamma 4\pi})(1 - \Gamma e^{-\gamma 4\pi} + \Gamma^2 e^{-\gamma 8\pi} + \dots + (-\Gamma)^n e^{-\gamma 4n\pi})}{(R_h + R_c + sL)(R' + Z_0)}. \quad (2.21)$$

La transformada de Laplace de la tensión inducida por unidad de ángulo en la bobina de Rogowski es

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{sM\tilde{i}_m}{2\pi} \quad (2.22)$$

donde M es la inductancia mutua ente el conductor por el cual circula la corriente que se quiere medir i_m y la bobina. Sustituyendo en 2.21 se tiene

$$\tilde{V}(2\pi, s) = \frac{R'Z_0sM\tilde{i}_m(1 - e^{-\gamma 4\pi} - \Gamma e^{-\gamma 4\pi} + \Gamma e^{-\gamma 8\pi} + \Gamma^2 e^{-\gamma 8\pi} + \dots)}{2\pi(R_h + R_c + sL)(R' + Z_0)} \quad (2.23)$$

si $\tilde{V}_m(s) = \frac{R'Z_0sM\tilde{i}_m}{2\pi(R_h + R_c + sL)(R' + Z_0)}$ se tiene que

$$\tilde{V}(2\pi, s) = \tilde{V}_m(s) - \tilde{V}_m(s)e^{-\gamma 4\pi}(1 + \Gamma) + \Gamma\tilde{V}_m(s)e^{-\gamma 8\pi}(1 + \Gamma) + \dots \quad (2.24)$$

Como $\mathcal{L}[f(t - T)\Theta(t - T)] = e^{-sT}\tilde{f}(s)$, con $\gamma \approx s\sqrt{LC}$ puede verse que

$$\boxed{V(2\pi, t) = V_m(t) - (1 + \Gamma)(V_m(t - T)\Theta(t - T) - \Gamma V_m(t - 2T)\Theta(t - 2T) + \dots)} \quad (2.25)$$

donde $T = 4\pi\sqrt{LC}$. Al despreciar las resistencias de los conductores helicoidal y central, puede verse que la velocidad angular de propagación de la onda de tensión es $v = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (ver ecuación 2.5). Por lo tanto, T sería el tiempo aproximado que tarda la onda de tensión en regresar a $\theta = 2\pi$ una vez que se refleja.

Puede verse que la tensión de salida de la bobina de Rogowski contiene infinitos términos, que van decreciendo en magnitud, por la reflexión que se produce en $\theta = 2\pi$.

$$\boxed{\text{Si } \Gamma \rightarrow -1 \implies R' \ll Z_0 \text{ las reflexiones se cancelan entre sí.}}$$

$$\text{si } \Gamma \rightarrow -1 \implies \tilde{V}(2\pi, s) \rightarrow \frac{R'sM\tilde{i}_m}{2\pi(R_h + R_c + sL)} \quad (2.26)$$

2.2. Respuesta en frecuencia de la bobina de Rogowski

Suponiendo $R' \ll Z_0$, la ecuación 2.26 puede emplearse para estudiar teóricamente la respuesta de la bobina en $\theta = 2\pi$ al paso de una corriente $i_m(t)$.

$$\text{Si } i_m(t) = A \text{sen}(wt) \implies \tilde{i}_m(s) = A\mathcal{L}[\text{sen}(wt)] = A \frac{w}{s^2 + w^2}$$

y

$$\text{si } \Gamma \rightarrow -1 \implies \tilde{V}(2\pi, s) \rightarrow \tilde{V}_m(s) = \frac{R' s M A w}{2\pi(R_h + R_c + sL)(s^2 + w^2)} \quad (2.27)$$

donde $V_m(t)$ sería la diferencia de potencial que se mediría en $\theta = 2\pi$ cuando $\Gamma \approx -1$.

Reescribiendo 2.27

$$\tilde{V}_m = \frac{Bs}{(s + w')(s^2 + w^2)} \quad \text{con } B = \frac{R' M A w}{2\pi L} \quad \text{y } w' = \frac{R_h + R_c}{L}$$

$$\tilde{V}_m = \left(\frac{a}{s + w'} + \frac{bs}{s^2 + w^2} + \frac{c}{s^2 + w^2} \right)$$

siendo

$$a = -\frac{Bw'}{w^2 + w'^2} \quad , \quad b = \frac{Bw'}{w^2 + w'^2} \quad \text{y} \quad c = \frac{Bw^2}{w^2 + w'^2}$$

entonces

$$\tilde{V}_m = \frac{B}{w^2 + w'^2} \left(\frac{-w'}{s + w'} + \frac{w's}{s^2 + w^2} + \frac{w^2}{s^2 + w^2} \right)$$

Como

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha} \quad , \quad \mathcal{L}[\text{sen}(\alpha t)] = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}[\text{cos}(\alpha t)] = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

se tiene

$$V_m(t) = \frac{B}{w^2 + w'^2} (-w'e^{-w't} + w' \cos(wt) + w \operatorname{sen}(wt))$$

Entonces

$$V_m(t) = -\frac{R'MAw}{2\pi L(w^2 + w'^2)} (w'e^{-w't} - \sqrt{w^2 + w'^2} \cos(wt - \phi)) \quad (2.28)$$

donde

$$\cos(\phi) = \frac{w'}{\sqrt{w^2 + w'^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\phi) = \frac{w}{\sqrt{w^2 + w'^2}}$$

Para un $t \gg \frac{L}{R_h + R_c}$ se tiene

$$V_m(t) = \frac{R'MA}{2\pi L} \frac{\frac{w}{w'}}{\sqrt{1 + (\frac{w}{w'})^2}} \cos(wt - \arctan(\frac{w}{w'})) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } w \ll w' \implies V_m(t) &= \frac{R'MAw}{2\pi(R_h + R_c)} \cos(wt) \\ \implies i_m(t) &= \frac{2\pi(R_h + R_c)}{MR'} \int_0^t V_m(t') dt' \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } w \gg w' \implies V_m(t) &= \frac{R'MA}{2\pi L} \operatorname{sen}(wt) \\ \implies i_m(t) &= \frac{2\pi L}{MR'} V_m(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

En el caso 2.30 habría que integrar V_m para obtener i_m , mientras que para el caso 2.31 $V_m \propto i_m$ (la bobina es “auto-integradora”). También se observa que la amplitud de $V_m \rightarrow 0$ para $w \ll w'$. La magnitud $w' = \frac{R_h + R_c}{L}$ determina la respuesta en frecuencia de la bobina de Rogowski.

2.3. Integral de Duhamel y respuesta de la bobina de Rogowski a un escalón de corriente

Como se vió anteriormente con la condición $\Gamma \approx -1$

$$\tilde{V}(2\pi, s) \rightarrow \tilde{V}_m = \frac{R'sM\tilde{i}_m}{2\pi(R_h + R_c + sL)}.$$

La respuesta de la bobina de Rogowski a una corriente $i_m(t) = a_1 i_1(t) + a_2 i_2(t)$ es $V_m(t) = a_1 V_1(t) + a_2 V_2(t)$ donde $V_1(t)$ y $V_2(t)$ son las respuestas a $i_1(t)$ e $i_2(t)$ respectivamente, por lo tanto la bobina de Rogowski es un sistema lineal [2, 13].

$$i_m(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow V_m(t)$$

donde \mathcal{R} representa la acción de la bobina de Rogowski. Por ser \mathcal{R} lineal es posible conocer la respuesta $V_m(t)$ para cualquier forma de $i_m(t)$ si tan sólo se conoce la respuesta para un escalón de corriente $i_m(t) = A\Theta(t)$, donde $\Theta(t)$ es la función escalón de Heaviside (figura 2.5). Esto es poible usando un resultado conocido como integral de superposición o integral de Duhamel [2, 13].

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

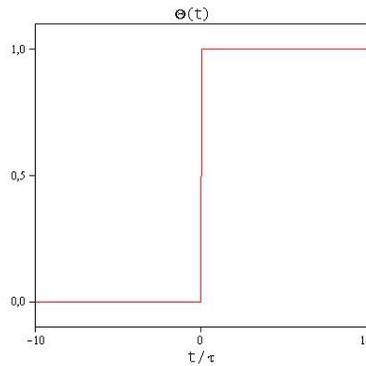


Figura 2.5: Función escalón de Heaviside.

La función δ de Dirac se define como $\delta(t) = \frac{d\Theta}{dt}$. Ahora si $i_m(t) = A\delta(t)$ se tiene $\mathcal{R}[A\delta(t)] = Ah(t)$, donde $h(t)$ sería la respuesta a $\delta(t)$.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow h(t)$$

Teniendo en cuenta la propiedad $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ es posible expresar la respuesta para una forma arbitraria de $i_m(t)$ en términos de $h(t)$.

$$i_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$\text{Por ser } \mathcal{R} \text{ lineal se tiene que } \mathcal{R}[i_m(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(\tau)\mathcal{R}[\delta(t-\tau)]d\tau$$

$$V_m(t) = \mathcal{R}[i_m(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} i_m(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.32)$$

Utilizando el resultado anterior para la función $\Theta(t)$ se tiene

$$k(t) = \mathcal{R}[\Theta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0+}^{\infty} h(t-\tau)d\tau \quad (2.33)$$

$$\Theta(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow k(t).$$

Así cómo es posible conocer la respuesta a cualquier forma de la corriente conociendo la respuesta a una corriente $i_m(t) = A\delta(t)$ también puede conseguirse la respuesta a cualquier forma de la corriente conociendo la respuesta al escalón.

Si se tiene cualquier $i_m(t)$ tal que $i_m(t) = 0$ para $t < 0$

$$i_m(t) = i_m(0+) + \int_{0+}^t \frac{di_m(\tau)}{d\tau}d\tau = i_m(0+)\Theta(t) + \int_{0+}^t \frac{di_m(\tau)}{d\tau}\Theta(t-\tau)d\tau \quad (2.34)$$

Si $i_m(0+) = 0$ se tiene

$$\mathcal{R}[i_m(t)] = V_m(t) = \int_{0+}^t \frac{di_m(\tau)}{d\tau}\mathcal{R}[\Theta(t-\tau)]d\tau = \int_{0+}^t \frac{di_m(\tau)}{d\tau}k(t-\tau)d\tau \quad (2.35)$$

Haciendo $\frac{di_m(\tau)}{d\tau} = i'_m(\tau)$

$$\boxed{V_m(t) = \int_{0+}^t i'_m(\tau)k(t-\tau)d\tau} \quad (2.36)$$

La ecuación anterior es el resultado conocido como “integral de Duhamel” con la condición $i_m(0+) = 0$. Se ve entonces que conociendo $k(t) = \mathcal{R}[\Theta(t)]$ puede calcularse la respuesta a cualquier $i_m(t)$ con las condiciones antes señaladas.

Una forma más general para la integral de Duhamel se presenta cuando $i_m(0+) \neq 0$. Como $i_m(t) = 0$ para $t < 0$, entonces hay una discontinuidad en $t = 0 \implies i_m(t) = i_m(0+)\Theta(t)$, utilizando 2.34 se tiene

$$\boxed{V_m(t) = i_m(0+)k(t) + \int_{0+}^t i'_m(\tau)k(t-\tau)d\tau} \quad (2.37)$$

A partir de la ecuación 2.26 y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\Theta(t)] = \frac{1}{s}$, se tiene para $i_m(t) = A\Theta(t)$

$$\tilde{V}_m = \frac{R'MA}{2\pi(R_h + R_c + sL)} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \text{con } B = \frac{R'MA}{2\pi L} \text{ y } w' = \frac{R_h + R_c}{L} &\implies \tilde{V}_m = \frac{B}{s + w'} \\ &\implies V_m(t) = Be^{-w't} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Entonces con $\tau' = \frac{L}{R_h + R_c}$

$$\mathcal{R}[\Theta(t)] = \frac{V_m(t)}{A} = \frac{R'M}{2\pi L} e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (2.40)$$

Puede verse que $\mathcal{R}[\Theta(t)]$ tiene la forma de un pulso que corresponde a la forma de la derivada de la función escalón. Si $\tau' \rightarrow 0$ el tiempo en que decae el impulso $\mathcal{R}[\Theta(t)]$ también tiende a cero.

Si se integra la salida $V_m(t)$ se obtiene aún una respuesta lineal respecto a la entrada $i_m(t)$, ya que la operación de integración cumple la propiedad de linealidad.

Con $\mathcal{I}[f(t)] = f^I(t) = \int_{0+}^t f(t')dt'$ se tiene

$$i_m(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{R}} \longrightarrow V_m(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{I}} \longrightarrow V_m^I(t)$$

Entonces aplicando \mathcal{I} sobre $\mathcal{R}[\Theta(t)]$ se tiene

$$\mathcal{I}\left[\frac{R'M}{2\pi L}e^{-\frac{t}{\tau'}}\right] = \frac{R'M}{2\pi(R_h + R_c)}(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}) \quad (2.41)$$

Como puede verse en la figura 2.6, esta respuesta se aproxima a la forma de un escalón. Se tiene entonces

$$\mathcal{I}[\mathcal{R}[\Theta(t)]] = \frac{R'M}{2\pi(R_h + R_c)}(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}) \quad (2.42)$$

Utilizando la integral de Duhamel

$$\mathcal{I}[\mathcal{R}[i_m(t)]] = V_m^I(t) = \frac{R'M}{2\pi(R_h + R_c)}(i_m(0+)(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}) + \int_{0+}^t i'_m(\tau)(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\tau'}})d\tau)$$

$$V_m^I(t) = \frac{R'M}{2\pi(R_h + R_c)}(i_m(0+)(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}) + \underbrace{\int_{0+}^t i'_m(\tau)d\tau}_{i_m(t) - i_m(0+)}) - e^{-\frac{t}{\tau'}} \int_{0+}^t i'_m(\tau)e^{\frac{\tau}{\tau'}}d\tau.$$

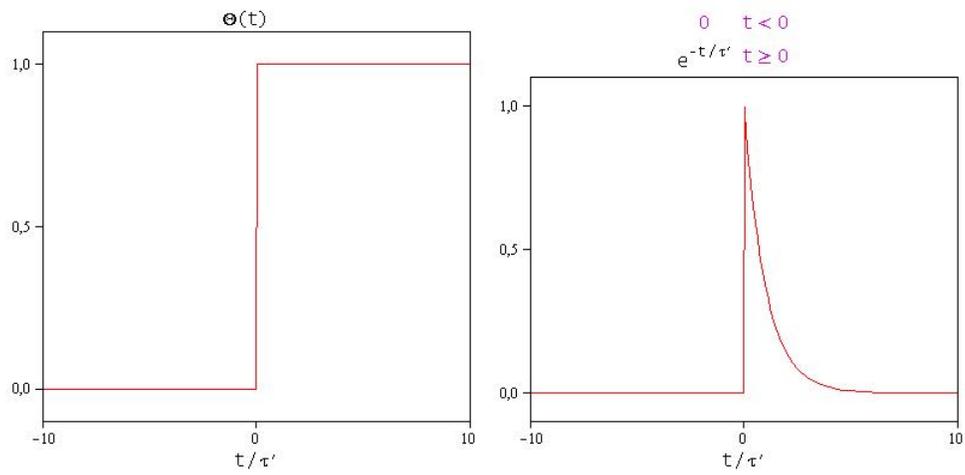
Si $\tau' \rightarrow 0$ el tiempo en que $\mathcal{I}[\mathcal{R}[\Theta(t)]]$ alcanza un valor constante también tiende a cero. Con esta condición se tiene

$$V_m^I(t) = \frac{R'M}{2\pi(R_h + R_c)}i_m(t)$$

$$\boxed{i_m(t) = \frac{2\pi(R_h + R_c)}{R'M} \int_{0+}^t V_m(t')dt'} \quad (2.43)$$

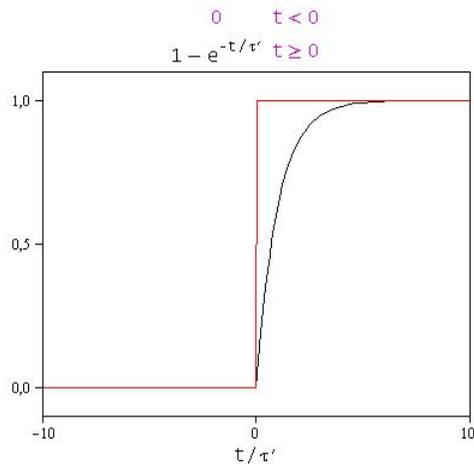
pudiéndose ver que este resultado coincide con 2.30.

En la figura 2.6 puede observarse la respuesta teórica directa e integrada de la bobina de Rogowski al paso de un escalón de corriente.



(a) Función escalón.

(b) Forma de la respuesta directa de la bobina al escalón.



(c) Forma de la respuesta integrada (curva de color negro).

Figura 2.6: Respuesta teórica de la bobina de Rogowski a un escalón de corriente.

2.4. Parámetros de diseño

Si se quiere diseñar una bobina de Rogowski cuya salida se comporte de acuerdo a la ecuación 2.43, deben tomarse en cuenta dos aspectos principales:

- Primero, debe cumplirse la condición de que la resistencia con que termina la bobina sea mucho menor que la impedancia característica de la bobina, $\Gamma \approx -1 \implies R' \ll Z_0$, con el fin de que se cancelen mutuamente las ondas de tensión reflejadas en el extremo de la bobina, que termina en la resistencia R' . Así, si queremos hallar la corriente $i_m(t)$ midiendo la diferencia de potencial en R' ($V_m(t)$), ésta tendrá menos componentes haciéndose más sencillo el cálculo.
- Segundo, el tiempo característico $\tau' = \frac{L}{R_h + R_c}$ debe ser lo más cercano a cero posible. Así, la tensión de salida $V_m(t)$ será proporcional a la derivada de la corriente $i_m(t)$ para un mayor rango de frecuencia y se puede obtener la corriente $i_m(t)$ simplemente integrando la tensión de salida $V_m(t)$.

Tomando la impedancia característica de la bobina de Rogowski como $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, se puede dejar como variables fijas la resistencia de terminación R' , las resistencias por unidad de ángulo R_h , R_c y la capacitancia por unidad de ángulo C . Así, se puede ajustar la inductancia por unidad de ángulo L para satisfacer la primera condición antes señaladas.

$$\text{Si } R' \ll Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \implies L \gg R'^2 C \quad (2.44)$$

Si la bobina de Rogowski tiene sección circular entonces $L = \frac{L_0}{2\pi}$, donde L_0 es la auto-inductancia de un toroide con sección circular (toro) (ver figura 2.7). Al paso de una corriente i por la bobina se calcula entonces el flujo de campo magnético para hallar L_0 .

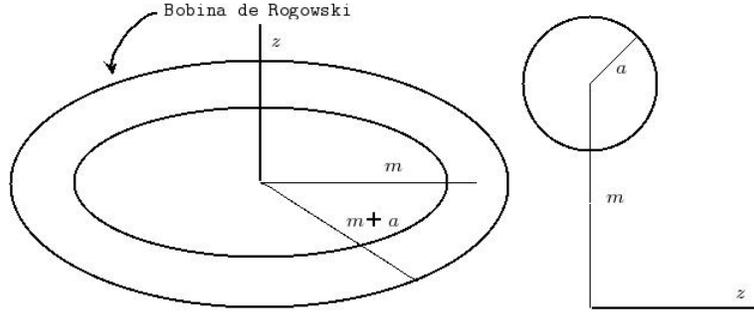


Figura 2.7: Parámetros m y a .

$$\phi_{\vec{B}} = \frac{N^2 \mu_0 i}{2\pi} \int_{-a}^a dz \int_{m-\sqrt{a^2-z^2}}^{m+\sqrt{a^2-z^2}} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\phi_{\vec{B}} = \frac{N^2 \mu_0 i}{2\pi} \int_{-a}^a (\ln(m + \sqrt{a^2 - z^2}) - \ln(m - \sqrt{a^2 - z^2})) dz = N^2 \mu_0 i (m - \sqrt{m^2 - a^2})$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 (m - \sqrt{m^2 - a^2}) \quad (2.45)$$

La inductancia mutua M entre el conductor por el que pasa la corriente $i_m(t)$, que estaría en la dirección z , y la bobina de Rogowski puede calcularse de igual manera que L

$$M = \mu_0 N (m - \sqrt{m^2 - a^2}). \quad (2.46)$$

Si tanto el conductor helicoidal como el central tienen el mismo diámetro d y están hechos del mismo metal de resistividad ρ , entonces

$$R_c = \frac{4\rho 2\pi m}{\pi d^2 2\pi} = \frac{4\rho m}{\pi d^2} \quad (2.47)$$

$$R_h = \frac{4N\rho 2\pi a}{\pi d^2 2\pi} = \frac{4N\rho a}{\pi d^2} \quad (2.48)$$

Como $\tau' = \frac{L}{R_h + R_c} = \frac{L_0}{2\pi(R_h + R_c)}$, se tiene

$$\tau' = \frac{\mu_0 N^2 d^2 (m - \sqrt{m^2 - a^2})}{8\rho(m + Na)} \quad (2.49)$$

Si se fijan los parámetros m y a puede ajustarse el número de vueltas de la bobina (N) para que se cumpla la relación 2.44.

$$L \gg R'^2 C \implies N \gg \sqrt{\frac{2\pi R'^2 C}{\mu_0(m - \sqrt{m^2 - a^2})}} \quad (2.50)$$

Por otro lado, como τ' es siempre creciente con N , para que se cumpla la condición de que $\tau' \rightarrow 0$, N debe ser lo menor posible. Una vez fijado todos los parámetros, a excepción de N , se puede conseguir un valor de N que cumpla la relación 2.50; luego puede evaluarse con la ecuación 2.49 τ' y conseguir $w' = \frac{1}{\tau'}$. De esta forma puede estimarse el límite superior de frecuencia en que la salida $V_m(t)$ será proporcional a la derivada de $i_m(t)$ (ver ecuación 2.30) para los parámetros fijados.

2.5. Elaboración de la bobina de Rogowski

La bobina de Rogowski se elaboró utilizando un alambre de Cu de diámetro $d = 1 \text{ mm}$ y un cable coaxial de impedancia característica $Z = 50 \Omega$, cuyo conductor central es también de Cu de 1 mm de diámetro. En uno de los extremos del cable coaxial se retiró un trozo de la cubierta externa aislante, ésto para colocar el conductor helicoidal que forma la bobina sobre el material dieléctrico que separa los conductores del coaxial. Se conectó cada extremo del conductor que forma la bobina como se muestra en la figura 2.1. El conductor central de la bobina de Rogowski es el mismo conductor central del cable coaxial.

Los parámetros de la bobina se eligieron tomando en cuenta las condiciones de diseño 2.44 y 2.50. El valor de la capacitancia por unidad de ángulo (C) se estimó con la capacitancia por unidad de longitud del cable coaxial $C' = 100 \text{ pF/m}$. Así se tiene que $C = \frac{NdC'}{2\pi}$.

Parámetro	Valor
N (número de vueltas)	26
m (ver figura 2.7)	4,0 cm
a	0,5 cm
C	$4 \cdot 10^{-13}$ F
L	$4 \cdot 10^{-8}$ H
$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$ (impedancia característica)	300 Ω

Cuadro 2.1: Valor aproximado de los parámetros de la bobina de Rogowski elaborada.

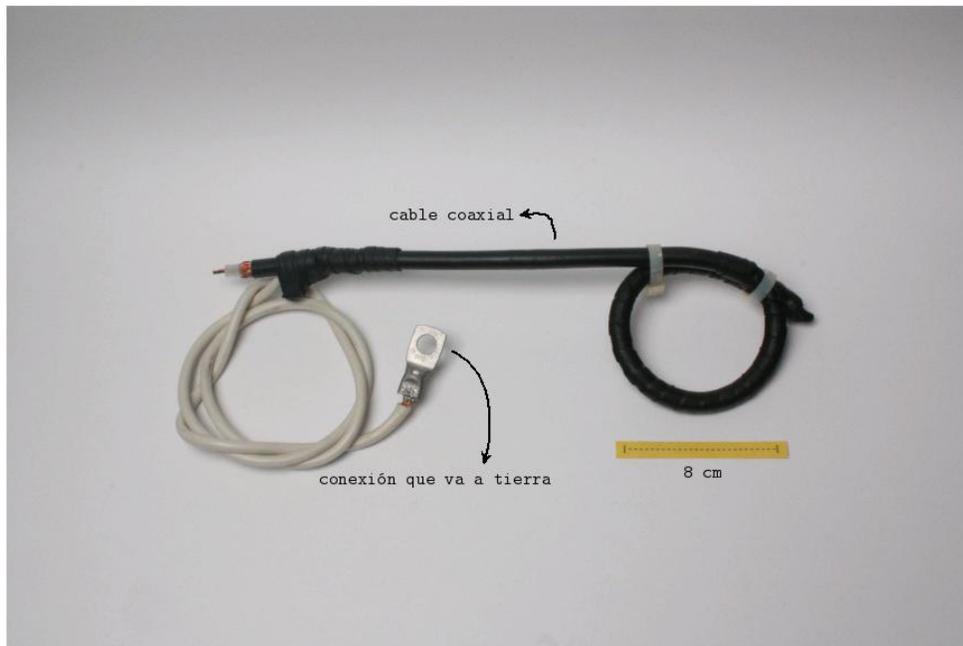


Figura 2.8: Prototipo de la bobina de Rogowski elaborada.

2.6. Medición de la tensión de salida $V_m(t)$ al paso de un escalón de corriente

Como se vió en la sección 2.3 la respuesta de la bobina a cualquier forma de la corriente $i_m(t)$ puede calcularse si se conoce la respuesta a un escalón $i_m(t) = A\Theta(t)$. Además, el tiempo τ' puede estimarse con la respuesta a un escalón de corriente y determinar la frecuencia $w' = \frac{1}{\tau'}$. Como puede deducirse de la ecuación 2.30 para $w \ll w'$ la derivada de $i_m(t)$ será proporcional a la tensión $V_m(t)$.

La tensión $V_m(t)$ fue medida con un osciloscopio digital. Utilizando el registro del osciloscopio se realizó luego una integración numérica. Para evitar la reflexión en el extremo final del cable coaxial que va conectado al osciloscopio, se colocó una terminación con una resistencia igual a la impedancia característica del coaxial $Z = 50 \Omega$. La impedancia R' en el extremo $\theta = 2\pi$ de la bobina de Rogowski es la impedancia del cable coaxial de 50Ω , por ésto la impedancia de la bobina diseñada se ajustó para que fuera superior a 50Ω , tal que el coeficiente $\Gamma \approx -1$.

Con una línea de transmisión (de impedancia característica Z_0), colocada inicialmente a una diferencia de potencial constante, es posible obtener una señal como la que puede verse en la figura 2.10 [2]. Para $t < \frac{2l}{v}$ la forma corresponde a un escalón. El escalón de corriente se generó utilizando un montaje como el de la figura 2.9, donde se cerró un interruptor en $t = 0$ colocando un corto circuito ($R \approx 0$) al final de la línea.

La respuesta de la bobina se comparó con la medición realizada con una sonda comercial calibrada de ancho de banda de 0 a $50MHz$ que puede medir una corriente máxima de $20A$. La tensión que mide la sonda comercial es directamente proporcional a la corriente que se quiere medir.

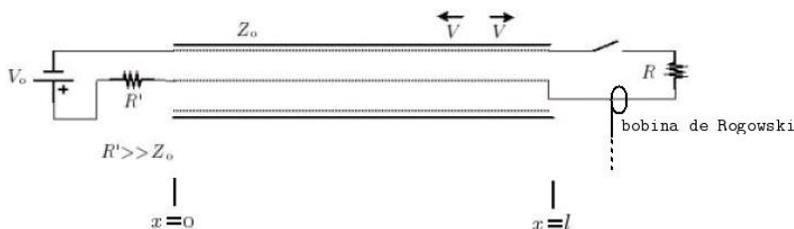


Figura 2.9: Esquema del montaje realizado para generar y medir el escalón de corriente.

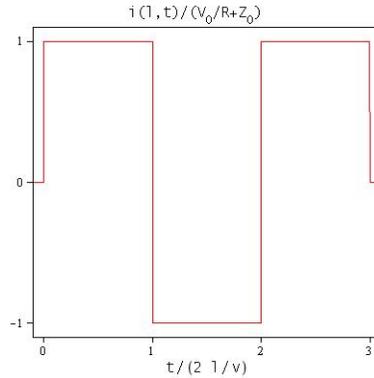


Figura 2.10: Forma de $i(l, t)$ para $R = 0$.

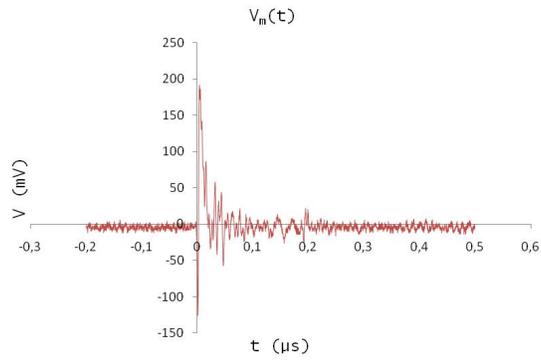
Puede observarse en la figura 2.11 cómo la forma de la tensión $V_m(t)$, después de ser integrada, corresponde a la forma del escalón. Las oscilaciones en la respuesta se deben a las reflexiones, por el hecho de que el coeficiente de reflexión Γ no es exactamente -1 (ver ecuación 2.25).

El tiempo τ' puede obtenerse directamente de la curva $V_m^I(t)$.

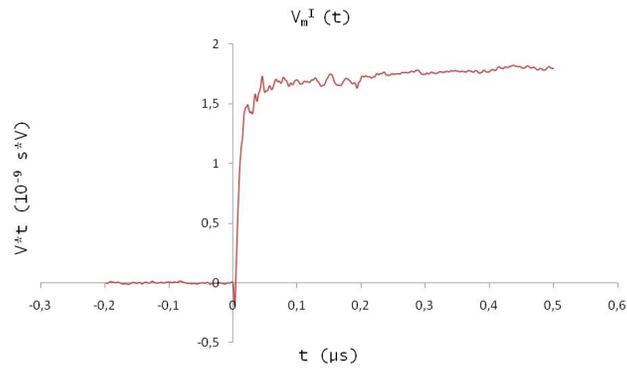
$$\tau' \approx 0,013 \mu s \implies f' = \frac{1}{2\pi\tau'} \approx 12 \text{ MHz} \quad (2.51)$$

Para frecuencias $f \ll 12 \text{ MHz}$ la respuesta $V_m(t)$ para cualquier forma de la corriente $i_m(t)$ será proporcional a la derivada de $i_m(t)$ como puede verse en la ecuación 2.43.

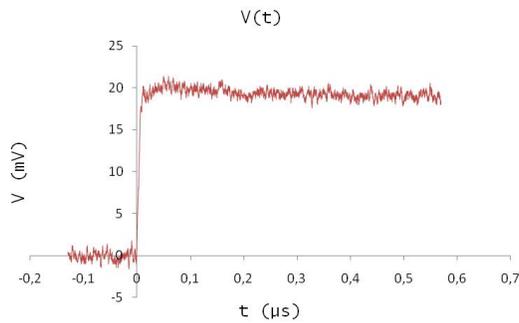
En la figura 2.12 se puede observar la respuesta directa e integrada de la bobina a una corriente sinusoidal de frecuencia $f = 600 \text{ KHz}$.



(a) Respuesta directa de la bobina $V_m(t)$.

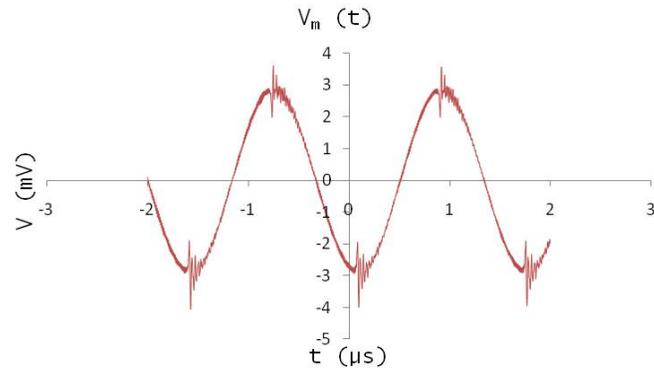


(b) Respuesta integrada $V_m^I(t) = \int_0^t V_m(t') dt'$.

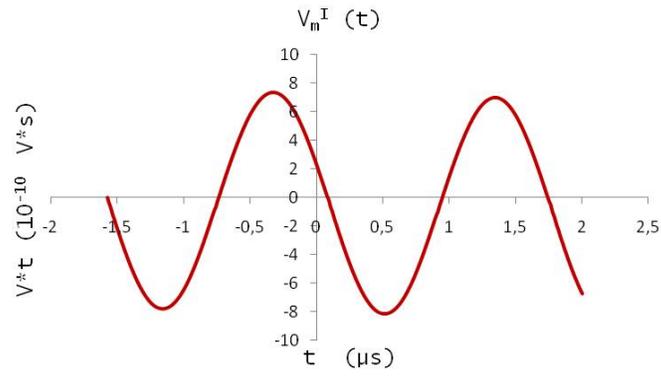


(c) Medición del escalón con una sonda comercial calibrada de ancho de banda de 0 a $50MHz$.

Figura 2.11: Respuesta medida de la bobina de Rogowski a un escalon de corriente. Puede compararse con la medición realizada con una sonda comercial calibrada.



(a) Respuesta directa de la bobina.



(b) Respuesta integrada.

Figura 2.12: Respuesta medida de la bobina de Rogowski ante una corriente sinusoidal de frecuencia $f = 600 \text{ KHz}$.

2.7. Medición de un pulso de corriente

Como se vió en la sección 2.6, la bobina de Rogowski diseñada dará una respuesta $V_m(t)$ proporcional a la derivada de $i_m(t)$ para frecuencias $f \ll 12MHz$. Se midió la respuesta de la bobina ante un pulso de corriente, el cual se obtuvo al colocar un conductor de resistencia $R \ll R_2$ a la salida del generador Marx ajustado a una etapa (sección 1.3.1). La forma de la corriente se aproximará a la mostrada en la figura 1.6.

Se comparó la medida realizada mediante la bobina con la realizada mediante una sonda comercial calibrada para medir corrientes, con el fin de obtener el factor de proporcionalidad α entre $V_m^I(t)$ e $i_m(t)$ (ecuación 2.43).

$$i_m(t) = \alpha V_m^I(t).$$

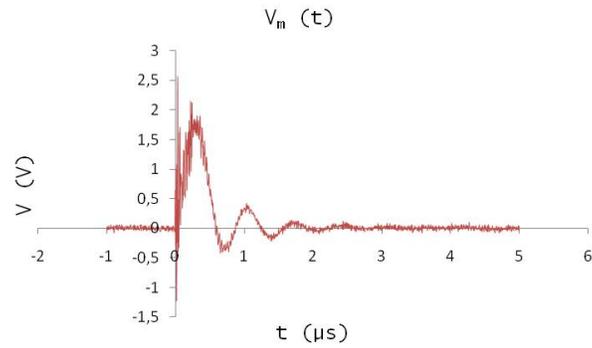
La sonda calibrada que se utilizó tiene un ancho de banda de 0 a $2MHz$ y puede medir corrientes hasta $500 A$. Su funcionamiento es similar a una bobina de Rogowski, con la diferencia de que el núcleo del toroide no es de aire; además puede medir corrientes constantes mediante efecto Hall.

Para no superar la corriente máxima que puede tolerar la sonda calibrada, se colocó una tensión inicial “baja” ($V_0 = 4 kV$) en el generador Marx.

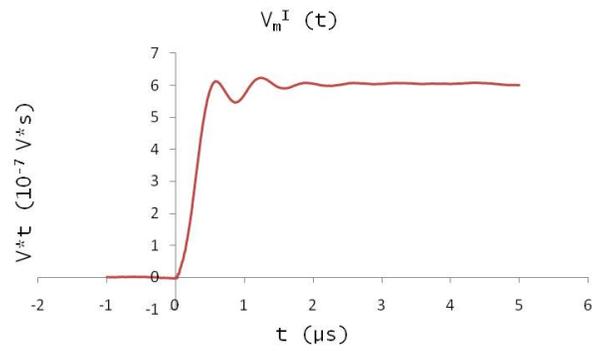
Como puede verse en la figura 2.13, tanto la sonda comercial como la bobina construida detectan la misma forma para el ascenso de la corriente.

Tomando las medidas en el intervalo de tiempo en que la corriente se estabiliza, pudo determinarse experimentalmente el valor de α . Así se tuvo que

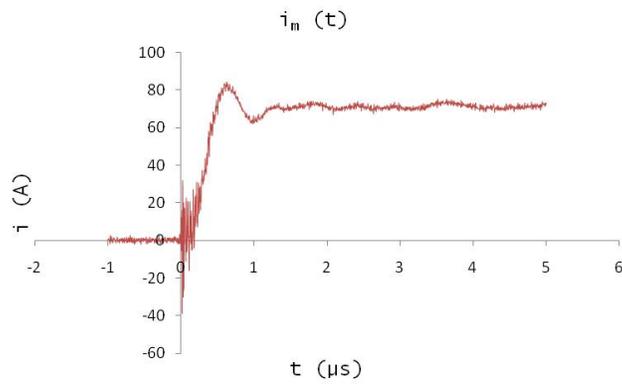
$$\alpha = (1,17 \pm 0,02) \cdot 10^8 A/V * s \quad (2.52)$$



(a) Respuesta directa de la bobina al pulso.



(b) Respuesta integrada.



(c) Medición con la sonda comercial.

Figura 2.13: Respuesta medida con la bobina de Rogowski y con una sonda calibrada a un impulso de corriente.

Capítulo 3

Campo electromagnético en un conductor cilíndrico

Cuando en un conductor hay una corriente o flujo de cargas es porque en su interior hay un campo eléctrico. La corriente al cambiar en el tiempo produce un campo magnético que al variar induce otro campo eléctrico que se suma al campo original que causa la corriente.

Si en la región externa al conductor se establece un campo eléctrico que varíe con el tiempo $\vec{E} = \text{Re}(E_0 e^{j\omega t})\hat{k}$ en un punto \vec{r} dentro del conductor se tiene en general $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}(f(\vec{r})e^{j\omega t})\hat{k}$, donde se supone un régimen estacionario en que la frecuencia de oscilación del campo en el conductor es la misma que la del campo externo y habrá una dependencia espacial de la amplitud del campo eléctrico dentro del conductor.

Los campos en el conductor deben ser solución de las ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Si el conductor constituye un medio homogéneo, isotrópico, lineal y satisface la ley de Ohm, se tienen las siguientes relaciones:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.7)$$

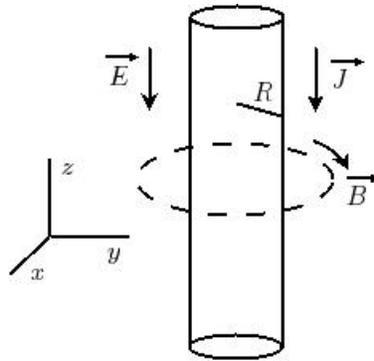


Figura 3.1: Conductor cilíndrico.

3.1. Densidad superficial de corriente

En un conductor se supone que la densidad de carga libre $\rho = 0$, esto puede verse tomando la divergencia de $\nabla \times \vec{H}$. Utilizando la ecuación 3.4 se tiene

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.8)$$

Usando la ecuación 3.1, se tiene la ecuación

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.9)$$

Según las ecuaciones 3.5 y 3.7, la ecuación anterior es equivalente a la siguiente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho \implies \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, 0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{con } \tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (3.10)$$

si $\rho(\vec{r}, 0) \neq 0$ la carga libre $\rho = 0$ al pasar un tiempo $t \gg \tau$. Esto implica que si hay carga libre neta en el conductor, debe ubicarse en su superficie.

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0. \quad (3.11)$$

Para los buenos conductores las corrientes de desplazamiento pueden ser despreciadas y sólo tomar en cuenta las corrientes de conducción, así 3.4 queda como

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (3.12)$$

y se tienen las ecuaciones de Maxwell aproximadas para medios conductores

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Al derivar respecto al tiempo la ecuación 3.12 y utilizando las ecuaciones 3.3, 3.6 y 3.7, se tiene

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \implies \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \implies \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{J} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} \quad (3.15)$$

3.1.1. Densidad de corriente para un conductor ferromagnético

En un medio ferromagnético no se satisface la relación 3.6, habiendo una relación no lineal entre \vec{B} y \vec{H} ; en general

$$\vec{B} = F(\vec{H}(\vec{r}, t)) \quad (3.16)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} &\implies \nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ \nabla^2 \vec{J} = \mu_0 \sigma \left(\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) &\quad (3.18) \end{aligned}$$

Si el campo \vec{H} es tal que el conductor se encuentra totalmente magnetizado $\vec{M} = M_0 \hat{u}$ donde M_0 es constante y \hat{u} un vector unitario, se tiene que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{J} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}} \quad (3.19)$$

Puede verse que cuando el medio ferromagnético está totalmente magnetizado la ecuación de la densidad de corriente es similar a la ecuación que se tiene en un medio donde hay una relación lineal entre \vec{B} y \vec{H} .

3.1.2. Solución de la ecuación de difusión de \vec{J}

Si $\vec{J}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\vec{K}(\vec{r})e^{j\omega t})$ se tiene de la ecuación 3.15 que

$$\nabla^2 \vec{K} = j\omega\mu\sigma\vec{K} \quad (3.20)$$

Si se supone que el campo eléctrico en el interior del conductor no depende de z ni de ϕ , entonces $\vec{K}(\vec{r}) = K(\varrho)\hat{k}$ donde $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ siendo $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ un punto perteneciente a la región que ocupa el conductor. En coordenadas cilíndricas se tiene

$$\nabla^2 K(\varrho) = jw\mu\sigma K(\varrho) \implies \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial K}{\partial \varrho} \right) = jw\mu\sigma K \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial K}{\partial \varrho} - jw\mu\sigma K = 0 \quad (3.22)$$

La ecuación anterior es una ecuación de Bessel. Su solución es una función de Bessel de orden cero que sea finita en $\varrho = 0$ [3].

$$K(\varrho) = C J_0(m\varrho) \text{ con } m^2 = -jw\mu\sigma \implies m = j^{\frac{3}{2}} \sqrt{w\mu\sigma} \quad (3.23)$$

Para bajas frecuencias $m\varrho \rightarrow 0$ se tiene que $J_0(m\varrho) \rightarrow 1 \implies K(\varrho) = C$. A frecuencias bajas la corriente se distribuye uniformemente en el conductor cilíndrico .

3.1.3. Efecto piel

A alta frecuencia se tiene que $m\varrho \gg 1 \implies J_0(m\varrho) = J_0(jz) \rightarrow \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$ con $z = j^{\frac{1}{2}} \sqrt{w\mu\sigma} \varrho$. Aquí se ha usado el desarrollo asintótico de la función modificada de Bessel de primera especie de orden cero $I_0(x) = J_0(jx)$, si $x \gg 1$ $I_0(x) \rightarrow \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ [3]

$$\begin{aligned} \text{si } w \rightarrow \infty \quad K(\varrho) &= C \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \\ \implies K(\varrho) &= C \frac{e^{\sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} \varrho} e^{j(\sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} \varrho - \frac{\pi}{8})}}{\sqrt{2\pi \sqrt{w\mu\sigma} \varrho}} \end{aligned}$$

Si

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{w\mu\sigma}} \quad (3.24)$$

donde δ es llamada profundidad de penetración, se tiene

$$K(\varrho) = \frac{C}{\sqrt[4]{2} \sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{\varrho}{\delta}} e^{j(\frac{\varrho}{\delta} - \frac{\pi}{8})}}{\sqrt{\frac{\varrho}{\delta}}} \quad (3.25)$$

Así, se obtiene que la densidad de corriente \vec{J} para alta frecuencia es

$$\vec{J} = \text{Re}\left(\frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\frac{\rho}{\delta}} e^{j(\frac{\rho}{\delta} + \omega t - \frac{\pi}{8})}}{\sqrt{\frac{\rho}{\delta}}}\right) \hat{k} \quad (3.26)$$

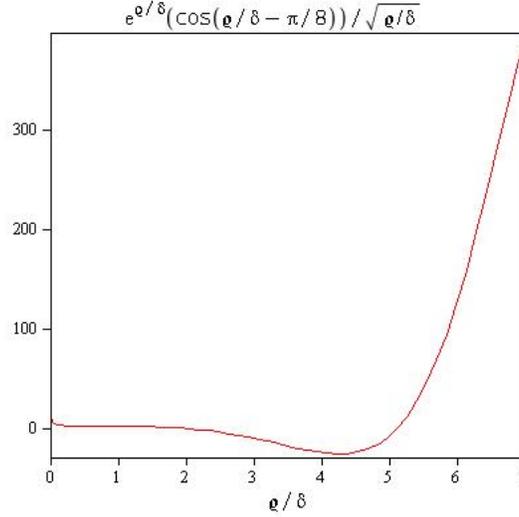


Figura 3.2: Distribución de la densidad de corriente en un conductor cilíndrico a alta frecuencia.

Como puede verse en la figura 3.2, si el radio del conductor $R \leq 2\delta$ la densidad de corriente será aproximadamente constante en toda la sección transversal del conductor, en cambio si R es del orden de 7δ la densidad será creciente a medida que ρ se incrementa, siendo máxima en la superficie del conductor $\rho = R$ [12].

3.2. Energía y presión

Al establecerse una corriente se realiza un trabajo sobre las cargas en movimiento $dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i dt$, donde $\vec{F}_i = q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B})$. El diferencial de trabajo total en un volumen τ es

$$dW = \sum_i dW_i = \sum_i \int_{\tau} (q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\tau) \vec{v}_i \cdot \vec{E} dt$$

Así, se tiene con $\vec{J} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ que

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau \quad (3.27)$$

Si $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, se tiene que

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\sigma} \int_{\tau} J^2 d\tau. \quad (3.28)$$

La fuerza magnética no realiza trabajo pero si ejerce una presión radial entrante sobre el conductor.

La fuerza electromagnética total en un elemento de volumen $d\tau$ es

$$d\vec{F} = \left(\sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\tau \right) \vec{E} + \left(\sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right) \times \vec{B} d\tau$$

como $\rho = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = 0$ y $\vec{J} = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = J(\varrho, t) \hat{k} \implies \vec{B} = B(\varrho, t) \hat{\phi}$ se tiene que

$$d\vec{F} = -J(\varrho, t) B(\varrho, t) d\tau \hat{\phi} \implies \vec{F}_{\tau} = -JB \hat{\phi} \quad (3.29)$$

donde \vec{F}_{τ} es la fuerza electromagnética por unidad de volumen que ejerce el campo magnético originado por la misma densidad de corriente \vec{J} [11].

En coordenadas cilíndricas se tiene que

$$\nabla \times \vec{B} = \hat{\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial B_k}{\partial \phi} - \frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left(\frac{\partial B_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial B_k}{\partial \varrho} \right) + \hat{k} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho B_{\phi}) - \frac{\partial B_{\varrho}}{\partial \phi} \right)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \implies \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho B) = \mu J. \quad (3.30)$$

En el caso de un conductor ferromagnético totalmente magnetizado, se tiene

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \nabla \times (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{J} \quad (3.31)$$

Utilizando la ecuación 3.30, se tiene

$$\vec{F}_{\tau} = - \left(\frac{B^2}{\mu \varrho} + \frac{B}{\mu} \frac{\partial B}{\partial \varrho} \right) \hat{\phi} \quad (3.32)$$

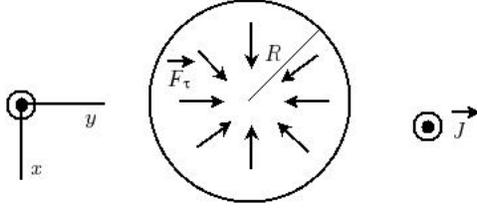


Figura 3.3: Fuerza magnética en un conductor cilíndrico.

El diferencial de fuerza magnética sobre un elemento de volumen es $dF = F_\tau \varrho d\varrho d\phi dz = (P(\varrho, t) - P(\varrho + d\varrho, t)) \varrho d\phi dz$, donde $P(\varrho, t)$ es la presión magnética. Entonces

$$F_\tau = -\frac{\partial P}{\partial \varrho} = -\left(\frac{B^2}{\mu \varrho} + \frac{B}{\mu} \frac{\partial B}{\partial \varrho}\right)$$

Así se obtiene

$$P(\varrho, t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\varrho \frac{B^2}{\varrho'} d\varrho' + \frac{B^2}{2\mu}. \quad (3.33)$$

Para la superficie del conductor cilíndrico $\varrho = R$, se tiene

$$P(R, t) = \frac{1}{\mu} \int_0^R \frac{B^2}{\varrho'} d\varrho' + \frac{B^2(R)}{2\mu} \quad (3.34)$$

Como $B(R) \propto i = \int_s \vec{J} \cdot \vec{ds}$, para corrientes muy altas la presión magnética podría causar una implosión en el conductor. También a corrientes altas la energía por unidad de tiempo suministrada a las cargas por el campo eléctrico calentaría al conductor pudiendo cambiar su estado físico. Si la energía suministrada al conductor es suficiente para evaporarlo e ionizarlo se tendría un plasma.

3.3. Conducción en un plasma

La conducción en un plasma tiene que analizarse de forma diferente a la conducción en un medio sólido. En el caso del plasma se tiene un medio donde los átomos tienen más grados de libertad.

Si un conjunto de puntos \in a una curva γ tienen una velocidad constante \vec{v} , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} \quad (3.35)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{B}(\vec{r}(t), t)) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{B}$$

$$\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + (\nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})) \right) \cdot d\vec{s} \quad (3.36)$$

De la ecuación anterior se obtiene que

$$\oint_{\gamma} (\vec{E}' - (\vec{v} \times \vec{B})) \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [3]$$

El campo \vec{E}' sería el campo eléctrico sobre la curva γ visto en el sistema de referencia donde la curva, que se mueve con el medio, está en reposo y el campo \vec{E} sería el campo visto en el sistema donde se observa que el medio se desplaza con velocidad \vec{v} . Así, se tiene

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.37)$$

Si se supone que en el plasma se cumple la ley de Ohm, se tiene para los puntos $\vec{r} \in \gamma$ que $\vec{J} = \sigma_p \vec{E}'$. Entonces

$$\vec{J} = \sigma_p (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.38)$$

Si $\vec{E} = E(\varrho, t) \hat{k} \implies \vec{B} = B(\varrho, t) \hat{\phi}$, para $\vec{v} = v_\varrho \hat{\varrho} + v_\phi \hat{\phi} + v_k \hat{k}$, se tiene que

$$\vec{J} = \sigma_p ((E + v_\varrho B) \hat{k} - v_k B \hat{\varrho}) \quad (3.39)$$

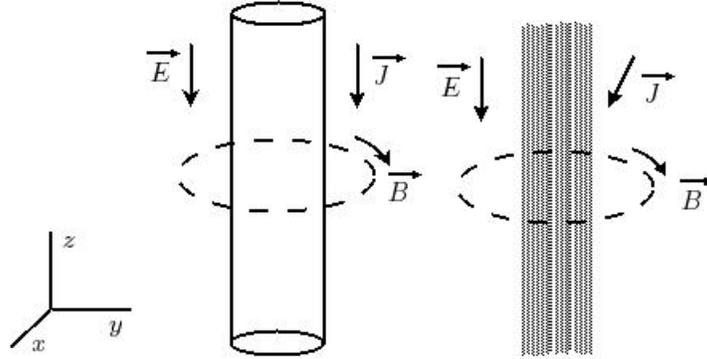


Figura 3.4: Comparación entre la dirección de \vec{J} en un sólido y en un plasma con simetría cilíndrica.

Si en un conductor cilíndrico ocurre un cambio de fase ocasionado por una alta corriente, la dirección y módulo de la densidad \vec{J} cambia.

Sobre un elemento de volumen del plasma $\Delta\tau$ hay una presión ejercida por el resto del plasma que rodea al elemento $\Delta\tau$, igual a lo que ocurre en un fluido. También está presente la fuerza magnética que ejerce el campo sobre la misma densidad de corriente \vec{J} que lo origina. La fuerza neta efectuada por el campo eléctrico es cero si la densidad de carga ρ es igual a cero.

Si el plasma tiene una densidad de masa ρ_m , para el elemento de volumen $\Delta\tau$ se plantea la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación de movimiento. Teniendo en cuenta que la velocidad en el plasma puede depender tanto de la posición como el tiempo se tiene

$$\rho_m \frac{d}{dt} \vec{v}(\vec{r}, t) = \rho_m \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} \quad [3, 12] \quad (3.40)$$

Utilizando la ecuación 3.12 se tiene que:

$$\vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (3.41)$$

donde se ha utilizado la siguiente identidad

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$$

En el caso de que el campo magnético sea de la forma $\vec{B} = B(\varrho, t)\hat{\phi}$ se tiene que $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B} = 0$, ya que en coordenadas cilíndricas $\nabla = \hat{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \hat{\phi}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$. De las ecuaciones 3.40 y 3.41 se tiene

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{B^2}{2\mu}\right) \quad (3.42)$$

La fuerza magnética es $-\nabla\left(\frac{B^2}{2\mu}\right) = -\Lambda(\varrho, t)\hat{\varrho}$. Si $-\nabla p \cdot \hat{\varrho} < \Lambda$ habrá una compresión del plasma que en algún instante será detenida a causa de la fuerza por unidad de volumen $-\nabla p \cdot \hat{\varrho}$ que iría aumentando en la compresión. En el equilibrio $p + \frac{B^2}{2\mu} = p_0$, donde p_0 es constante.

Aquí podemos ver que si la densidad de corriente \vec{J} decrece después de haber tenido un valor alto, la presión p ocasionaría una expansión del plasma. Al estar rodeado el plasma por un ambiente gaseoso, ocurriría un enfriamiento de las partículas que conforman el plasma, lo que causaría un cambio de fase.

Capítulo 4

Descarga pulsada en alambres

Una forma de generar un cambio de fase, en un volumen de un conductor cilíndrico, de sólido a plasma y luego a sólido nuevamente es hacer pasar un pulso de corriente alta por el conductor. Hay un calentamiento debido a la energía suministrada por el campo eléctrico sobre los electrones de conducción (Efecto Joule). Cuando el medio conductor no se encuentre en estado sólido el efecto de la presión magnética entrante sobre el conductor será relevante, ya que causará una disminución de su volumen.

Para separar los átomos de un sólido es necesario aplicar una energía igual o mayor que un valor conocido como *energía de cohesión*. La energía E_0 de un conjunto de átomos situados en una estructura cristalina a $T = 0K$ es menor a la energía E_f de los átomos libres separados una distancia infinita en su estado fundamental. La diferencia de energías $\Delta E = E_f - E_0$ es la energía de cohesión [1]. Conociendo este valor de energía es posible estimar el orden de magnitud para la tensión inicial V_0 a la que se deben colocar los condensadores de un generador Marx con el fin de separar los átomos de un alambre conectado a su salida.

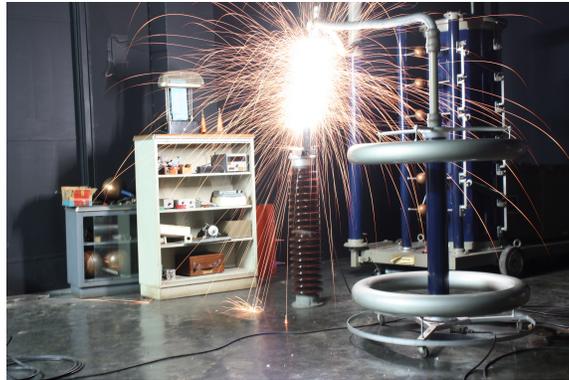
En las pruebas de descarga pulsada en alambres de Cu y Fe mostradas a continuación (figura 4.1) se puede observar la luz generada en la descarga, que debido a la corta duración no puede apreciarse en detalle por el ojo humano. Las imágenes fueron obtenidas mediante tomas con larga exposición. El obturador de la cámara se aperturó un segundo antes de la descarga pulsada y de este modo se pudo registrar el centelleo fugaz de los alambres al pasar de estado sólido a plasma.



(a) Conexión del alambre a la salida del generador Marx ajustado a una etapa.



(b) Descarga pulsada en un alambre de Cu.



(c) Descarga pulsada en un alambre de Fe.

Figura 4.1: Pruebas de descarga pulsada en alambres de Cu y de Fe con un pulso de corriente máxima $i_0 \approx 1 \text{ KA}$ y de duración $\Delta t \approx 100 \mu s$.

4.1. Estimación propuesta de la tensión mínima V_0 que se requiere para separar los átomos de un alambre

En la etapa inicial de la descarga, antes de que la corriente ascienda a su valor máximo, el alambre se encuentra en estado sólido. En el intervalo de tiempo en que el alambre está en estado sólido puede suponerse que el efecto dominante es el calentamiento producido por la interacción electrón-fonón. De esta manera se supone que la energía suministrada a la red de átomos proviene de su interacción con los electrones de conducción. El ritmo de emisión de fonones por los átomos depende de la temperatura del sólido, lo que se evidencia macroscópicamente en la variación de la resistividad con la temperatura [1].

De la ecuación 1.20 puede verse que al conectar una resistencia $R \ll R_2$ a la salida del generador se tiene para $t > 0$, siendo $t = 0$ el instante en que se inicia la descarga, que

$$i_3(t) \equiv i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau_+}} \quad \text{con} \quad \tau_+ = \frac{R_2 C_1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{e} \quad i_0 = \frac{V_0}{R_2} \quad (4.1)$$

donde se ha colocado $n = 1$ por suponer que el generador está ajustado a una etapa y se ha despreciado el término que corresponde al ascenso de la corriente.

Suponiendo entonces que en estado sólido domina la interacción fonón-electrón, lo que macroscópicamente causa el efecto Joule, la energía ΔE transferida al alambre en un intervalo Δt después de iniciarse la descarga y mientras el alambre permanezca en estado sólido viene dada por

$$\Delta E = i^2(t) R(T(t)) \Delta t \quad (4.2)$$

Conociendo como depende la capacidad térmica a volumen constante (C_v) del sólido con la temperatura, se tiene

$$i^2(t) R(T(t)) \Delta t = N C_v(T(t)) \Delta T(t) \quad (4.3)$$

donde N sería el número de moles de átomos en el alambre

$$\int_0^t i^2(t') dt' = N \int_0^t \frac{C_v(T(t'))}{R(T(t'))} \frac{dT(t')}{dt'} dt' \quad (4.4)$$

por lo que es posible encontrar $T(t)$. Una vez que se conoce cómo cambia la temperatura del alambre con el tiempo puede calcularse el tiempo t_l en que el alambre pasa a estado líquido

$$\int_0^{t_l} i^2(t)R(t)dt = N \int_0^{T_f} C_v(T)dT + \Delta Q \quad (4.5)$$

donde T_f sería el punto de fusión del alambre y ΔQ el calor latente de fusión para N moles. Una vez calculado el tiempo t_l puede obtenerse el valor medio \bar{R} de $R(t)$

$$\bar{R} = \frac{\int_0^{t_l} i^2(t)R(t)dt}{\int_0^{t_l} i^2(t)dt}. \quad (4.6)$$

A partir del instante t_l la situación se torna más complicada. En estado líquido los átomos del alambre no se encuentran situados en una red cristalina y la presión que ejerce el campo magnético originado por la misma corriente (sección 3.2) que pasa por el alambre causa una disminución del volumen que ocupan los átomos. Aunque no se conozca en detalle el mecanismo de transferencia de energía en el intervalo de tiempo durante el cual el alambre va del estado líquido al plasma, se sabe que la energía mínima necesaria para separar los átomos que se encuentran en estado líquido debe ser menor que la energía transferida en el intervalo (t_l, ∞) , entonces

$$E_c^N - E' < E_{t_l}^\infty = \int_{t_l}^\infty i^2(t)\gamma(t)dt \quad (4.7)$$

donde E_c^N es el valor de la energía de cohesión para los N moles de átomos que conforman originalmente al alambre, $E' = N \int_0^{T_f} C_v(T)dT + \Delta Q$ y $\gamma(t)$ una función que aquí proponemos. La ecuación 4.7 puede escribirse como

$$E_c^N - E' < \bar{\gamma} \int_{t_l}^\infty i^2(t)dt \quad \text{donde} \quad \bar{\gamma} = \frac{\int_{t_l}^\infty i^2(t)\gamma(t)dt}{\int_{t_l}^\infty i^2(t)dt}. \quad (4.8)$$

Utilizando las ecuaciones 4.6 y 4.8 se tiene que

$$\frac{E'}{E_c^N - E'} > \frac{\bar{R} \int_0^{t_l} i^2(t)dt}{\bar{\gamma} \int_{t_l}^\infty i^2(t)dt}. \quad (4.9)$$

Utilizando la ecuación 4.1, colocando $t_l = \varsigma\tau_+$ y $\eta = \frac{E'}{E_c^N - E'}$ se tiene

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{R}}\eta > \frac{1 - e^{-2\varsigma}}{e^{-2\varsigma}} \quad (4.10)$$

si $\frac{\bar{\gamma}}{\bar{R}} < 1$ la relación 4.10 se satisface si

$$\frac{1 - e^{-2\varsigma}}{e^{-2\varsigma}} < \eta \implies \boxed{\varsigma < \frac{\ln(1 + \eta)}{2}} \quad (4.11)$$

y si $\frac{\bar{\gamma}}{\bar{R}} > 1$ la condición 4.11 es necesaria para satisfacer la relación 4.10.

De la ecuación 4.5 se tiene que

$$\frac{\bar{R}i_0^2\tau_+}{2}(1 - e^{-2\varsigma}) = E' \implies V_0 = R_2\sqrt{\frac{2E'}{\bar{R}\tau_+(1 - e^{-2\varsigma})}} \quad (4.12)$$

y con la condición 4.11 se llega a que

$$\boxed{V_0 > R_2\sqrt{\frac{2E'_c}{\bar{R}\tau_+}}} \quad (4.13)$$

4.2. Descarga pulsada en alambres de Fe

Para estimar la tensión inicial mínima V_0 que se requiere para separar los átomos de un alambre de Fe es necesario, como se vió en la sección anterior, calcular la función $T(t)$ para el alambre y el tiempo transcurrido hasta llegar al estado líquido para evaluar el valor medio de la resistencia del alambre mientras permanezca en estado sólido.

La resistividad del hierro tiene un comportamiento diferente para $T < T_c$ que para $T > T_c$, siendo T_c la temperatura de Curie. Para temperaturas menores a la temperatura de Curie la resistividad es casi proporcional al cuadrado de la temperatura [15], mientras que para temperaturas por encima de la temperatura de Curie la resistividad varía linealmente con la temperatura [16]. Se tiene entonces que

$$\rho(T) = \begin{cases} \rho_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^n & \text{para } T < T_c \\ a + bT & \text{para } T > T_c \end{cases} \quad (4.14)$$

donde $\rho_0 \approx 10^{-7} \Omega \cdot m$ corresponde a la resistividad a la temperatura $T_0 = 295 K$, $n \approx 1,73$, $a \approx 7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ y $b \approx 3,3 \cdot 10^{-10} \frac{\Omega \cdot m}{K}$.

Para los cálculos también es necesario conocer cómo depende la capacidad térmica C_v de la temperatura. Tanto el modelo de Debye como el de Einstein predicen bien la capacidad calorífica a bajas temperaturas [1]. El problema de estos modelos es que no consideran los términos anarmónicos que son relevantes a altas temperaturas, así como las interacciones electrón-electrón. La capacidad térmica del hierro presenta un pico a la temperatura de Curie. A esta temperatura se “rompe” la interacción debida a los spines de los electrones y la cantidad de energía que hay que suministrar para elevar un grado Kelvin la temperatura del sólido es máxima (ver figura 4.2).

Para el cálculo se tomará la capacidad térmica igual al valor medio, hallado mediante integración numérica, en cada uno de los intervalos (T_0, T_c) y (T_c, T_f)

$$C_v(T) = \begin{cases} C_I = \frac{\int_{T_0}^{T_c} C_v(T) dT}{T_c - T_0} & \text{para } T < T_c \\ C_{II} = \frac{\int_{T_c}^{T_f} C_v(T) dT}{T_f - T_c} & \text{para } T > T_c \end{cases} \quad (4.15)$$

se tiene $C_I \approx 36,4 \frac{J}{mol \cdot K}$ y $C_{II} \approx 39,1 \frac{J}{mol \cdot K}$.

Utilizando la ecuación 4.3 se tiene para $t < t_c$ tal que $T(t_c) = T_c$, donde podemos llamar a t_c el tiempo de Curie, que

$$\frac{1}{\alpha T^n} \frac{dT}{dt} = \frac{i^2(t)}{NC_I} \quad \text{con } \alpha = \frac{\rho_0 l}{T_0^n \pi r^2} \quad (4.16)$$

donde l y r son respectivamente la longitud y el radio del alambre.

$$\frac{1}{1-n} \frac{d}{dt} (T^{1-n}) = \frac{\alpha i^2(t)}{NC_I} \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{T^{n-1}(t)} - \frac{1}{T_0^{n-1}} = \frac{(1-n)\alpha}{NC_I} \underbrace{\int_0^t i^2(t') dt'}_{\frac{\tau_+ i_0^2}{2} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_+}})} \quad (4.18)$$

$$T(t) = \sqrt[n-1]{\frac{T_0^{n-1}}{1 + \frac{T_0^{n-1}(1-n)\alpha\tau_+ i_0^2}{2NC_I} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_+}})}} \quad \text{para } t < t_c \quad (4.19)$$

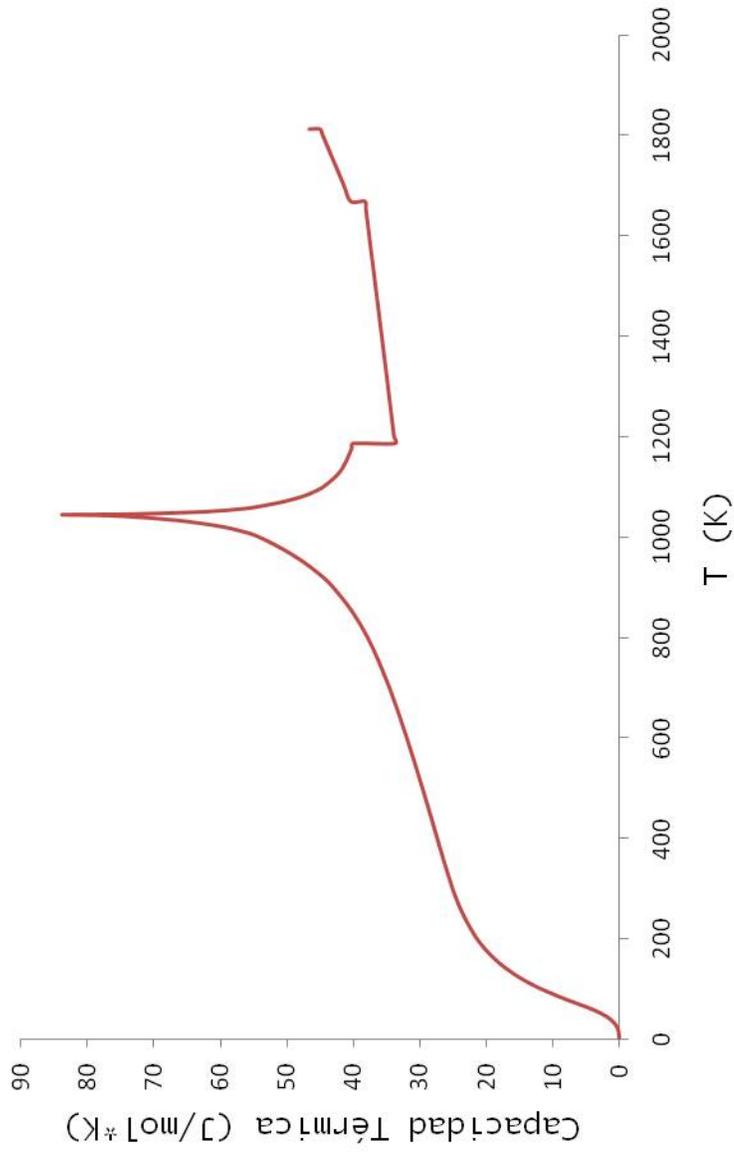


Figura 4.2: Curva experimental de la capacidad térmica del hierro en función de la temperatura [17]. Puede verse cómo se tiene un pico en la temperatura de Curie.

Para $t > t_c$ se tiene

$$\frac{1}{a' + b'T} \frac{dT}{dt} = \frac{i^2(t)}{NC_{II}} \quad \text{con } a' = \frac{al}{\pi r^2} \text{ y } b' = \frac{bl}{\pi r^2} \quad (4.20)$$

$$\frac{1}{b'} \frac{d}{dt} (\ln(a' + b'T)) = \frac{i^2(t)}{NC_{II}} \quad (4.21)$$

$$\ln\left(\frac{a' + b'T}{a' + b'T_c}\right) = \frac{b'}{NC_{II}} \underbrace{\int_{t_c}^t i^2(t') dt'}_{\frac{\tau_+ i_0^2 e^{-\frac{2t_c}{\tau_+}}}{2} (1 - e^{-\frac{2(t-t_c)}{\tau_+}})} \quad (4.22)$$

$$T(t) = \frac{(a' + b'T_c) e^{k(1 - e^{-\frac{2(t-t_c)}{\tau_+}})} - a'}{b'} \quad \text{para } t > t_c \quad (4.23)$$

donde $k = \frac{\tau_+ i_0^2 b' e^{-\frac{2t_c}{\tau_+}}}{2NC_{II}}$. De la ecuación 4.5 y 4.6 se tiene que

$$\bar{R} = \frac{N(C_I(T_c - T_0) + C_{II}(T_f - T_c)) + \Delta Q}{\int_0^{t_l} i^2(t) dt} \quad (4.24)$$

Ahora debe calcularse el tiempo t_l

$$\int_0^{t_l} i^2(t) R(t) dt = \underbrace{\int_0^{t_c} i^2(t) R(t) dt}_{NC_I(T_c - T_0)} + \underbrace{\int_{t_c}^{t_f} i^2(t) R(t) dt}_{NC_{II}(T_f - T_c)} + \underbrace{\int_{t_f}^{t_l} i^2(t) R(t) dt}_{\Delta Q} \quad (4.25)$$

Utilizando las ecuaciones 4.14 y 4.19 se tiene

$$\int_0^{t_c} i^2(t) R(t) dt = \int_0^{t_c} i_0^2 \alpha e^{-\frac{2t}{\tau_+}} \left(\frac{T_0^{n-1}}{1 + \frac{T_0^{n-1}(1-n)\alpha\tau_+ i_0^2}{2NC_I} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_+}})} \right)^{\frac{n}{n-1}} dt \quad (4.26)$$

$$i_0^2 \alpha T_0^n \int_0^{t_c} \frac{e^{-\frac{2t}{\tau_+}}}{\left(1 + \frac{T_0^{n-1}(1-n)\alpha\tau_+ i_0^2}{2NC_I} (1 - e^{-\frac{2t}{\tau_+}})\right)^{\frac{n}{n-1}}} dt = NC_I(T_c - T_0) \quad (4.27)$$

$$NC_I T_0 \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{T_0^{n-1}(1-n)\alpha\tau_+ i_0^2}{2NC_I} \left(1 - e^{-\frac{2t_c}{\tau_+}}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}} - 1 \right) = NC_I(T_c - T_0) \quad (4.28)$$

Entonces

$$t_c = -\frac{\tau_+}{2} \ln \left(1 - \frac{\left(\frac{T_0}{T_c}\right)^{n-1} - 1}{\frac{T_0^{n-1}(1-n)\alpha\tau_+ i_0^2}{2NC_I}} \right) \quad (4.29)$$

Si $t_c \ll \tau_+$

$$\boxed{t_c \approx \frac{NC_I(1 - \left(\frac{T_0}{T_c}\right)^{n-1})}{(n-1)\alpha T_0^{n-1} i_0^2}} \quad (4.30)$$

De igual manera se puede estimar t_f . Utilizando las ecuaciones 4.14 y 4.23 se tiene

$$\int_{t_c}^{t_f} i_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau_+}} (a' + b'T_c) e^{k(1-e^{-\frac{2(t-t_c)}{\tau_+}})} dt = NC_{II}(T_f - T_c) \quad (4.31)$$

$$\frac{\tau_+ i_0^2 e^{-\frac{2t_c}{\tau_+}} (a' + b'T_c)}{2k} \left(e^{k(1-e^{-\frac{2(t_f-t_c)}{\tau_+}})} - 1 \right) = NC_{II}(T_f - T_c) \quad (4.32)$$

$$e^{k(1-e^{-\frac{2(t_f-t_c)}{\tau_+}})} = \frac{NC_{II}(T_f - T_c) 2ke^{\frac{2t_c}{\tau_+}}}{i_0^2 \tau_+ (a' + b'T_c)} + 1 \quad (4.33)$$

si $t_f - t_c \ll \tau_+$

$$\left(\frac{t_f - t_c}{\tau_+} \right) \approx \frac{\left(1 + \frac{2t_c}{\tau_+}\right) NC_{II}(T_f - T_c)}{i_0^2 \tau_+ (a' + b'T_c)} \quad (4.34)$$

Entonces

$$\boxed{t_f \approx t_c + \frac{NC_{II}(T_f - T_c)}{i_0^2 (a' + b'T_c)}} \quad (4.35)$$

En el intervalo (t_f, t_l) la temperatura del alambre no cambia, y así

$$\int_{t_f}^{t_l} i^2(t) dt = \frac{\Delta Q}{a' + b'T_f} \quad (4.36)$$

Aproximando se tiene

$$\boxed{t_l \approx t_f + \frac{\Delta Q}{(a' + b'T_f)i_0^2}} \quad (4.37)$$

por lo que

$$\int_0^{t_l} i^2(t) dt \approx \frac{NC_I(1 - (\frac{T_0}{T_c})^{n-1})}{(n-1)\alpha T_0^{n-1}} + \frac{NC_{II}(T_f - T_c)}{a' + b'T_c} + \frac{\Delta Q}{a' + b'T_f} \quad (4.38)$$

y

$$\boxed{\bar{R} \approx \frac{NC_I(T_c - T_0) + NC_{II}(T_f - T_c) + \Delta Q}{\frac{NC_I(1 - (\frac{T_0}{T_c})^{n-1})}{(n-1)\alpha T_0^{n-1}} + \frac{NC_{II}(T_f - T_c)}{a' + b'T_c} + \frac{\Delta Q}{a' + b'T_f}}} \quad (4.39)$$

4.2.1. Descarga pulsada en alambres de Fe en ambiente de aire a presión atmosférica

Al conectar un alambre a la salida del generador Marx se tiene un circuito como puede verse en la figura 1.5. Al iniciarse la descarga a través de los interruptores de chispa se establece una corriente por el alambre, similar a la que puede observarse en la figura 1.6. Para realizar las descargas se ajustó al generador Marx a una etapa (ver sección 1.3.1). En la figura 4.3 puede verse un esquema del montaje realizado.

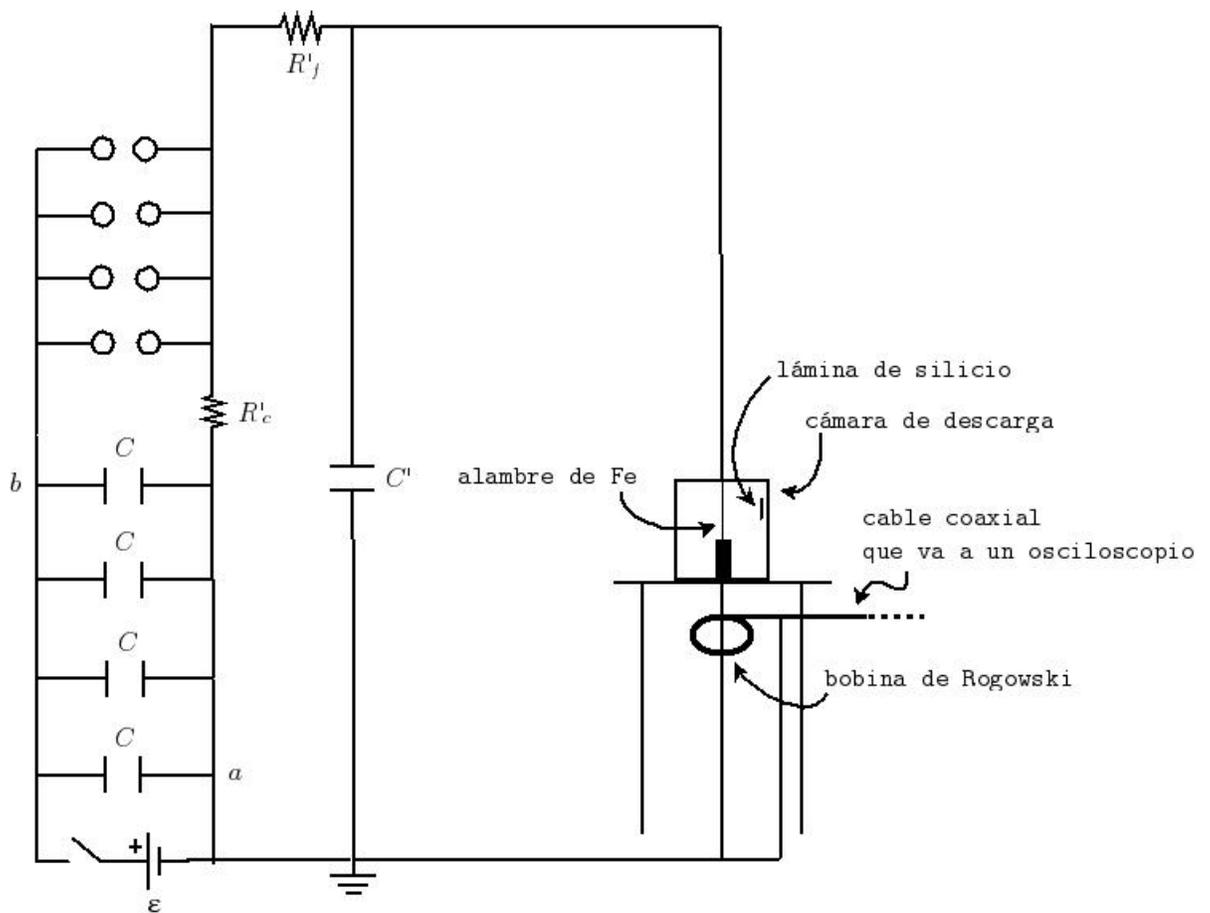


Figura 4.3: Esquema del montaje realizado para la descarga pulsada en alambres de Fe a presión atmosférica en ambiente de aire.

Parámetro	Valor
C	$0,54 \mu F$
C'	$0,002 \mu F$
R'_f	43Ω
R'_c	38Ω

Cuadro 4.1: Parámetros del generador.

En el interior de la cámara se colocó una lámina de silicio (fig. 4.3), con el fin de recoger las posibles partículas formadas como consecuencia de la descarga. La cámara es cilíndrica de radio $a \approx 7 \text{ cm}$ y altura $b \approx 12 \text{ cm}$.

Consideraciones para la descarga

El tiempo de duración del pulso de corriente puede calcularse con los parámetros del cuadro 4.1 y la ecuación 1.11; así, puede estimarse que la descarga tiene un tiempo de duración $\Delta t \approx 100 \mu s$, lo que coincide con la medida realizada con los mismos valores de parámetros (figura 1.10). De la figura 1.11 se tiene que el espectro de la corriente, para esta duración del pulso, llega hasta frecuencias de $f = 100 \text{ KHz}$.

En la sección 3.1.3 puede verse que a alta frecuencia una corriente variable en el tiempo que fluye por un conductor cilíndrico no se distribuye uniformemente a través de su sección transversal. La ecuación 3.26 fue deducida para medios donde se cumple que $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Aunque la distribución de corriente que puede verse en la ecuación 3.26 en principio no puede aplicarse directamente para el hierro, a menos que esté totalmente magnetizado, puede estimarse el orden de magnitud de la corriente que tendría que fluir por el alambre para generar un campo magnético tal que los puntos periféricos del alambre estén totalmente magnetizados (ver sección 3.1.1).

En presencia de un campo magnético externo de magnitud $B_{ext} > 0,05 \text{ T}$ un cristal de hierro está totalmente magnetizado [1, pág. 538]. Suponiendo que en la superficie del alambre hay un campo $B > 0,05 \text{ T}$, para una frecuencia $f = 100 \text{ KHz}$ se tiene que la profundidad de penetración es

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \sigma}} \approx 498 \mu m \quad (4.40)$$

donde se ha utilizado el resultado de la sección 3.1.1 y el valor de la

conductividad del hierro $\sigma = 1,02 \cdot 10^7 (\Omega \cdot m)^{-1}$ a $T = 295 K$ [1, pág. 173].

Si se produce un calentamiento rápido en el alambre por el paso del pulso de alta corriente, al ser la temperatura del alambre mayor a la temperatura de Curie se tendrá un régimen paramagnético. Puede deducirse, de forma simplificada, la ley de Curie-Weiss [1] para un medio ferromagnético con la aproximación de campo medio, donde se supone que en ausencia de un campo magnético externo cada átomo está sometido a un campo

$$\vec{H}_e = \gamma \vec{M} \quad (4.41)$$

Aplicando la ley de Curie $\chi_p = \frac{C}{T}$, donde χ_p (llamada susceptibilidad paramagnética) es tal que

$$\vec{M} = \chi_p (\vec{H} + \vec{H}_e) \quad (4.42)$$

se tiene

$$\vec{M} = \frac{\chi_p}{1 - \gamma \chi_p} \vec{H} \implies \chi = \frac{C}{T - T_c} \quad (4.43)$$

donde χ es tal que $\vec{M} = \chi \vec{H}$ y $T_c = \gamma C$ es la temperatura de Curie. Se tiene para el hierro que $\gamma \approx 10^4$ [21], y así resulta que $C \approx 0,1 K$.

Como para un medio paramagnético $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ se tiene

$$\vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} \quad (4.44)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{C}{T - T_c} \quad (4.45)$$

cuando se está por encima y cerca de la temperatura de Curie, la susceptibilidad tiende a infinito, lo que implica que la permeabilidad también tiende a infinito. Puede entonces estimarse que cerca de la temperatura de Curie la profundidad de penetración δ tiende a cero (ecuación 3.24), por lo que los máximos de la distribución de corriente aumentarán en magnitud al aumentar la distancia ρ medida desde el centro del alambre (ecuación 3.26). La corriente en el centro del alambre será mínima.

Al estar cerca del punto de fusión puede evaluarse μ y σ para estimar la profundidad de penetración justo antes de que el alambre pase a estado líquido. De las ecuaciones 4.43 y 4.45 se tiene que $\frac{\mu(T_f)}{\mu_0} \approx 1$. La conductividad

del hierro en T_f es $\sigma \approx 7,7 \cdot 10^5 (\Omega \cdot m)^{-1}$ (ecuaciones 4.14). Evaluando para $f = 100KHz$, se tiene que $\delta \approx 1,8 mm$.

En el caso del hierro la energía de cohesión es de $E_c = 413 KJ/mol$ [1, pág. 66]. La energía de cohesión para un número N de moles de Fe será

$$E_c^v = \frac{d_{Fe} v E_c}{P_{Fe}} \quad (4.46)$$

donde v sería el volumen dado de Fe, $d_{Fe} = 7874 Kg/m^3$ la densidad y su peso atómico $P_{Fe} = 55,847 g/mol$. El alambre de Fe que se utilizó tenía un diámetro $D = 125 \mu m$ y una longitud medida entre los puntos de conexión $l \approx 6 cm$. Para un alambre de las dimensiones anteriormente señaladas se tiene que $E_c^N \approx 43 J$.

El calor latente de fusión para el hierro es $L_f = 13,79 \frac{KJ}{mol}$, por lo que para un número N de moles se tiene

$$\Delta Q = \frac{d_{Fe} v L_f}{P_{Fe}} \quad (4.47)$$

Para el alambre se tiene $\Delta Q \approx 1,43 J$. Utilizando la ecuación 4.39, se tiene

$$\bar{R} \approx 2,7 \Omega \quad (4.48)$$

donde se han usado los datos presentados en la sección 4.2, $T_f = 1811 K$ y $T_c = 1043 K$. Con este valor aproximado de \bar{R} se puede estimar, mediante la ecuación 4.13, la tensión mínima V_0 para separar los átomos del alambre. Evaluando se tiene

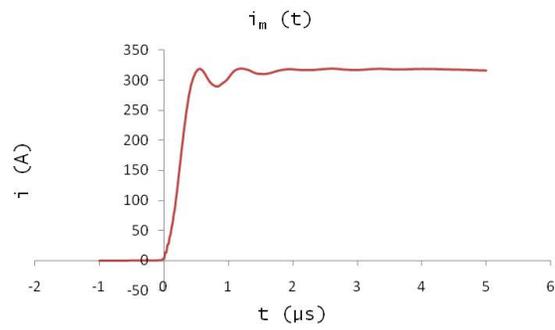
$$V_0 > 30 kV \quad (4.49)$$

donde se han utilizado los parámetros del cuadro 4.1 y $\tau_+ = \frac{R_2 C_1}{1 + \frac{R_2}{R_1}}$.

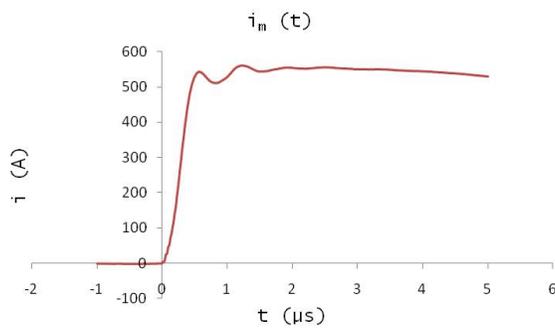
Como el radio del alambre $r = 62,5 \mu m$, el campo para que los puntos periféricos esten totalmente magnetizados se alcanza cuando por el alambre fluye un corriente $i > 16 A$. Los niveles de corriente utilizados fueron muy superiores a este valor, por lo que puede suponerse que en la etapa inicial de la descarga el alambre está totalmente magnetizado. De los cálculos realizados para la profundidad de penetración, se tiene que antes de la temperatura de Curie la distribución de corriente en el alambre es aproximadamente uniforme; al pasar la temperatura de Curie la corriente será mínima en los puntos cercanos al centro ($\varrho \rightarrow 0$). En el punto de fusión la corriente está distribuida de nuevo uniformemente.

Mediciones de corriente realizadas en la descarga

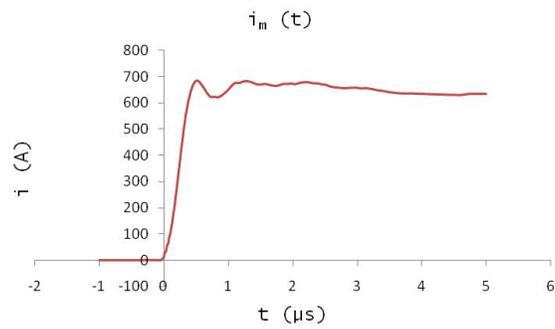
Para cada una de las descargas, a las diferentes tensiones iniciales utilizadas, se registró la curva de corriente correspondiente al ascenso del pulso mediante la bobina de Rogowski elaborada y el osciloscopio digital utilizado. Como la bobina fue diseñada para tener una salida proporcional a la derivada de la corriente (ver sección 2.4) al estabilizarse la corriente por un breve tiempo la tensión de salida de la bobina se hace cero. En estas mediciones sólo se obtuvo el ascenso del pulso de corriente. Con los datos de la tensión de salida registrada se realizó una integración numérica (ver sección 2.7). En la figura 4.4 se presentan los resultados obtenidos luego de realizar la integración y multiplicar por el factor de calibración.



(a) $V_0 = 20 \text{ kV}$



(b) $V_0 = 36 \text{ kV}$



(c) $V_0 = 50 \text{ kV}$

Figura 4.4: Mediciones realizadas para las diferentes tensiones iniciales V_0 utilizadas.

Para los valores máximos de corriente puede estimarse la magnitud del campo magnético causado por la misma corriente en la superficie del conductor.

V_0	$B_0 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}$
20 <i>kV</i>	1 <i>T</i>
36 <i>kV</i>	1,6 <i>T</i>
50 <i>kV</i>	2,1 <i>T</i>

Cuadro 4.2: Magnitud del campo magnético máximo en la superficie del alambre causado por la corriente libre que fluye a través del mismo para distintas tensiones iniciales.

Con los valores de los B_0 del cuadro 4.2 puede estimarse también el valor de la presión magnética máxima en la superficie del alambre (ecuación 3.34). Se supuso, en el cálculo de la presión, que para el máximo nivel de corriente la distribución es uniforme y el alambre se encuentra en estado sólido.

V_0	$P_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0}$
20 <i>kV</i>	8 <i>atm</i>
36 <i>kV</i>	20 <i>atm</i>
50 <i>kV</i>	34 <i>atm</i>

Cuadro 4.3: Magnitud estimada de la presión magnética máxima en la superficie del alambre.

4.2.2. Descarga pulsada en alambres de Fe en ambiente de aire a presiones menores a la atmosférica

La presión en la cámara donde se realizan las descargas, es función de la concentración de las moléculas del gas contenido en esta. A menor presión el camino libre medio entre colisiones aumenta. Al producirse la descarga los átomos de Fe rompen sus enlaces químicos, se excitan y se ionizan formando un plasma. El plasma se “enfía” mediante las colisiones con las moléculas del ambiente de la cámara. Al disminuir la presión en la cámara se espera que el tiempo de “enfriamiento” sea mayor y el diámetro medio de las partículas formadas sea menor. En la figura 4.5 puede verse el montaje realizado para bajar la presión de la cámara de descarga.

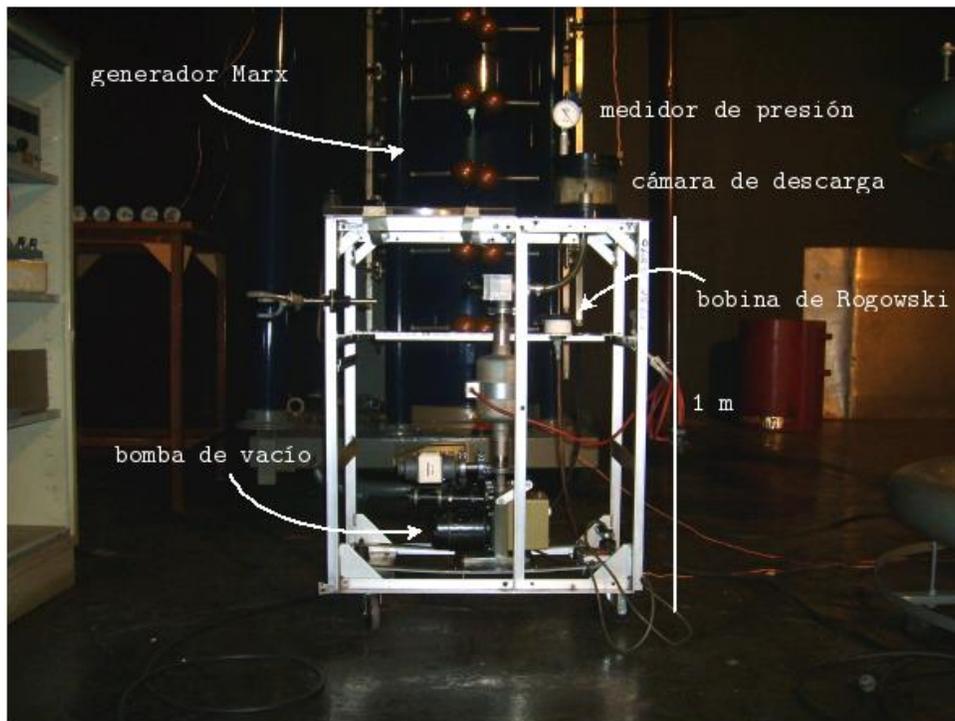


Figura 4.5: Montaje realizado para las descargas pulsadas en vacío.



Figura 4.6: Bobina de Rogowski.

Al igual que en las pruebas a presión atmosférica, en el interior de la cámara se colocaron láminas de silicio para recoger el material formado en la descarga.

Para incrementar el nivel de corriente en la descarga, para los mismos niveles de tensión utilizados con anterioridad, se colocaron distintos valores de las resistencias R'_f y R'_c (figura 4.3).

$$R'_f = 15\Omega \text{ y } R'_c = 100\Omega$$

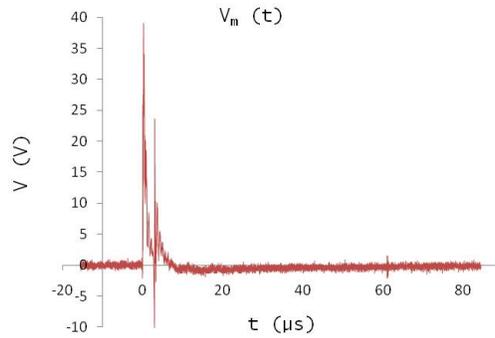
Para estos valores de resistencia se estima que

$$\tau_+ = \frac{R'_f 6C}{1 + \frac{R'_f}{R'_c}} \approx 42 \mu s$$

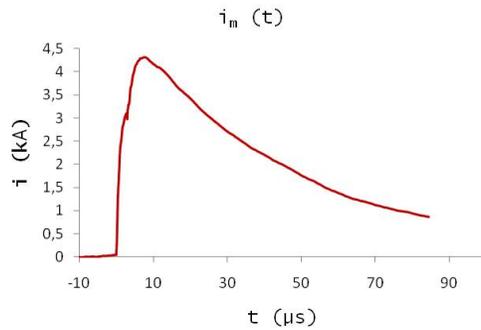
y la tensión inicial para separar los átomos del alambre

$$V_0 > R'_f \sqrt{\frac{2E_c^N}{R\tau_+}} \approx 13 \text{ kV}.$$

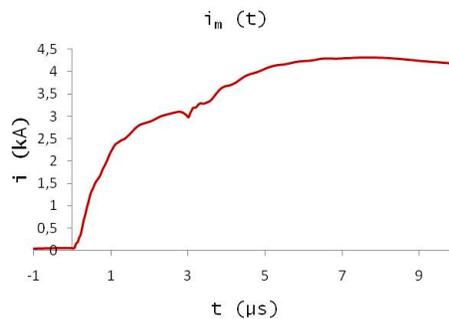
Se realizaron pruebas a presiones de 300 *torr*, 400 *torr* y 500 *torr*. La tensión inicial fue algo superior a 40 *kV*. En la figura 4.7 se tiene la medición realizada con la bobina de Rogowski para la presión $p = 400 \text{ torr}$; esta vez pudo apreciarse el descenso del pulso a diferencia de la medición que puede verse en la fig. 4.4.



(a) Respuesta directa de la bobina.



(b) Respuesta integrada y multiplicada por el factor de calibración.



(c) Ascenso del pulso.

Figura 4.7: Medición realizada con la bobina de Rogowski para la descarga realizada a la presión $p = 400 \text{ torr}$. Para las otras presiones se registraron curvas similares, puesto que no se varió la tensión inicial V_0 . Puede estimarse que el campo magnético evaluado en el radio del alambre ($r = 62,5 \mu\text{m}$) alcanzó el valor $B_0 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} \approx 13 \text{ T}$ y la presión magnética máxima $P_0 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \approx 1,3 \cdot 10^3 \text{ atm}$.

Capítulo 5

Caracterización de las muestras obtenidas

Al ocurrir la descarga en la cámara para las diferentes pruebas realizadas, tanto a presión atmosférica como vacío grueso, se observó cómo el alambre se transformó en un “polvo”. Como se mencionó anteriormente, para cada una de las pruebas se recogieron muestras sobre un sustrato de silicio colocado en el interior de la cámara de descarga. Para facilitar el contraste, al realizar la caracterización, se colocó para algunas pruebas una rejilla de cobre sobre el sustrato. Al retirar la rejilla pudo observarse el contraste de la muestra recogida con el sustrato de silicio.

Las muestras recogidas fueron analizadas mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM), Espectroscopía de Electrones Auger (AES) y Microscopía de Fuerza Atómica (AFM).

5.1. Caracterización mediante Microscopía Electrónica de Barrido (SEM) y Espectroscopía de Electrones Auger (AES)

La obtención de imágenes mediante Microscopía Electrónica de Barrido se logra haciendo incidir sobre el objeto de observación un haz de electrones de energía E_0 (en el orden de los KeV), enfocado mediante campos magnéticos para “barrer” un área de la muestra. Como consecuencia de la interacción entre el haz y la muestra, de ésta se emiten electrones que suelen clasificarse en electrones secundarios (energía entre 0 y $100eV$) y electrones retrodispersados (energía entre $100eV$ y E_0).

Los electrones secundarios son detectados para formar una imagen en un monitor donde se genera un barrido sincronizado y proporcional al que hace el haz de electrones sobre la muestra. La cantidad de electrones secundarios generados depende del ángulo que forma el haz de incidencia con la superficie de la muestra, por lo que la cantidad de electrones emitidos para cada elemento de superficie será función de su morfología y topografía [14].

Las imágenes obtenidas mediante la detección de los electrones retrodispersados dan información sobre la diferencia en número atómico promedio en la zona de la muestra donde se hacen incidir los electrones y también de la topografía [14].

La identificación de los elementos químicos presentes en la superficie de la muestra puede obtenerse mediante el análisis de la energía de los electrones retrodispersados. El bombardeo de electrones sobre la superficie causa la aparición de huecos o ausencia de electrones en un nivel de energía. Los huecos son llenados por otros electrones que descienden de un nivel de energía superior E_2 a una inferior E_1 y en este proceso es probable que se emita un electrón con energía cinética $E = (E_2 - E_1) - E_3$, donde E_3 es la energía de ligadura del electrón emitido. Estos “electrones característicos” son llamados electrones Auger, en honor al físico Pierre Auger. La energía de los electrones retrodispersados es analizada mediante dos hemisferios concéntricos donde se aplica un campo eléctrico (figura 5.1). Para un valor dado del campo eléctrico aplicado entre los hemisferios solo los electrones de cierta energía llegarán al detector de electrones. El número de electrones retrodispersados en función de la energía, obtenido mediante el analizador de hemisferios concéntricos y

el detector de electrones, presenta picos en las energías correspondientes a la energía de los electrones Auger, que son característicos para cada átomo.

Como los electrones Auger provienen de la superficie de la muestra, para obtener un espectro de una capa más profunda es necesario retirar los átomos pertenecientes a la primera capa de la muestra. El decapado en una zona de la superficie se logra mediante un bombardeo de iones de Ar de energía del orden de los *Kev*.

Las Microscopía Electrónica de Barrido y la Espectroscopía de Electrones Auger puede realizarse en un único instrumento conocido como Microsonda Auger de Barrido.

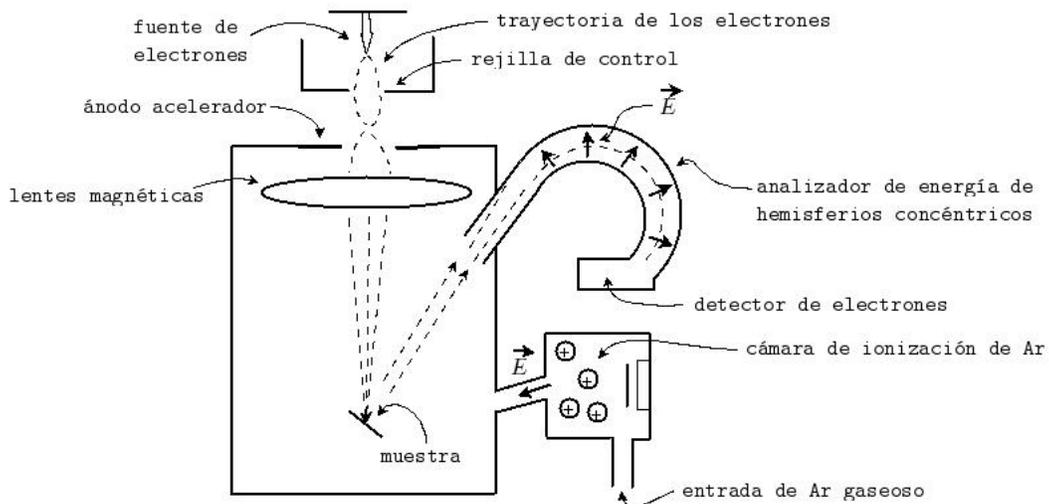
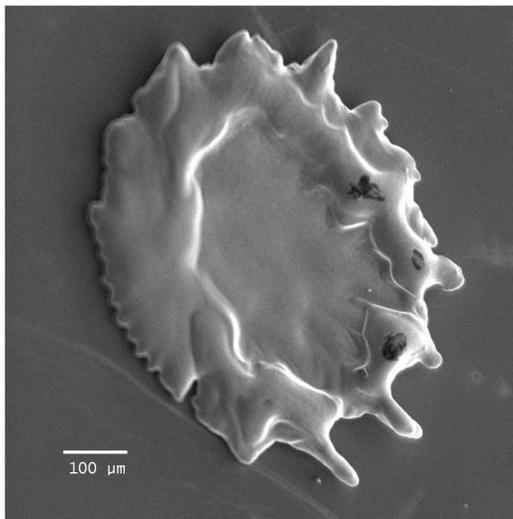


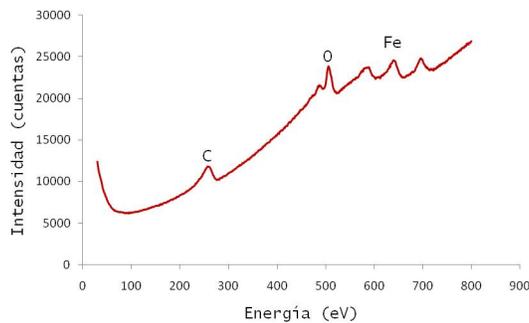
Figura 5.1: Esquema de Microsonda Auger de Barrido.

5.1.1. Imágenes y espectros

Para cada una de las descargas se obtuvieron las siguientes imágenes y espectros de lo que quedó depositado en las láminas de silicio colocadas en el interior de la cámara.

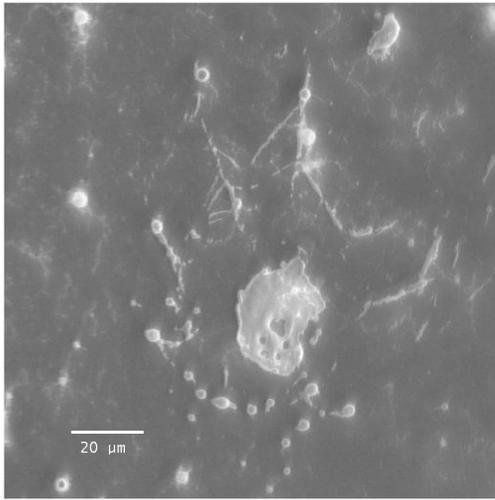


(a) Puede verse como el Fe en estado líquido impactó sobre la lámina de Si. La tensión inicial V_0 no fue lo suficientemente alta para que el Fe pasara a estado gaseoso (relación 4.49).

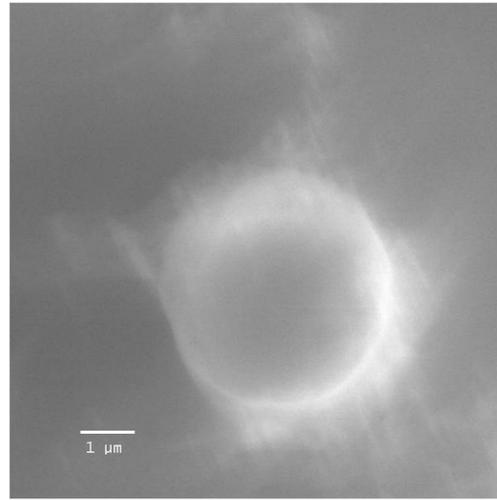


(b) Espectro Auger. Sobre la superficie de la muestra hay átomos de C, O y Fe.

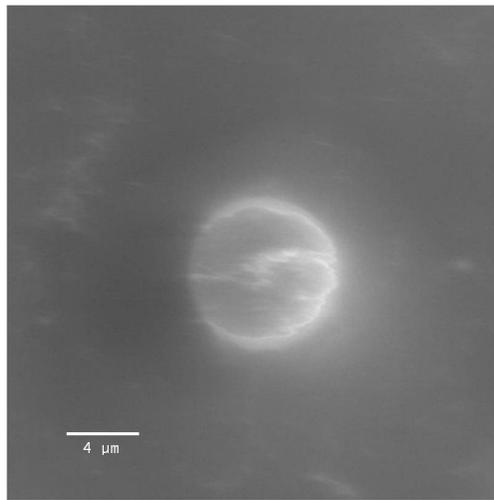
Figura 5.2: Imagen y espectro de muestra obtenida en la prueba realizada a $V_0 = 20 \text{ kV}$ a presión atmosférica en ambiente de aire.



(a) Zona regular. Puede verse la presencia de partículas de diámetro del orden de micrómetros.

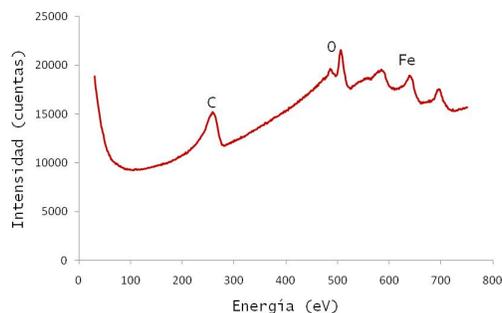


(b) Partícula.

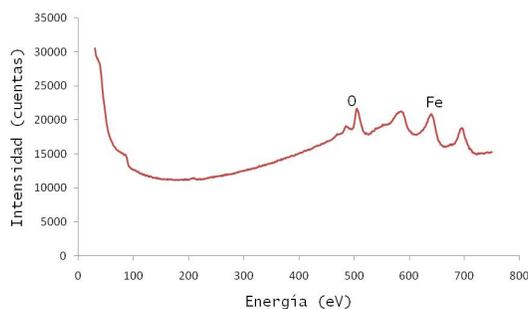


(c) Partícula.

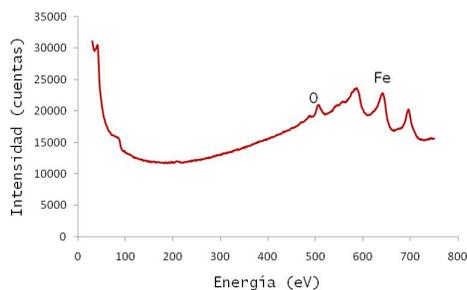
Figura 5.3: Imágenes obtenidas de la muestra recogida en la prueba realizada a $V_0 = 36 \text{ kV}$ a presión atmosférica en ambiente de aire. Para esta prueba la energía suministrada fue suficiente para separar los átomos del alambre y darse la formación de partículas con diámetro de unos pocos micrómetros.



(a) Espectro Auger de un sector mostrado en la “placa formada” que puede verse en la imagen de la zona regular de la figura 5.3.

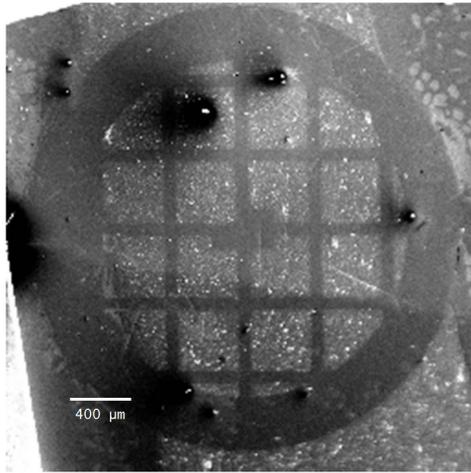


(b) Espectro de la misma zona después de un bombardeo con iones de Ar de una duración de sesenta segundos. Puede verse como se retiró el C luego del bombardeo.

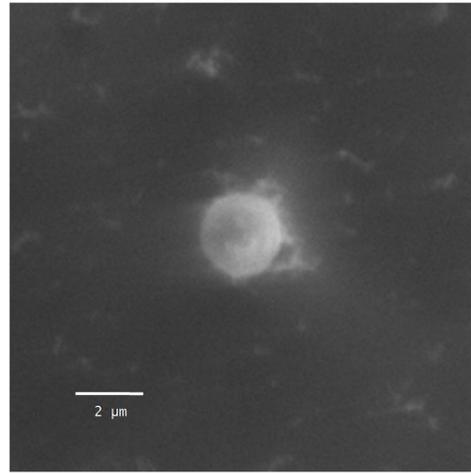


(c) Espectro de la misma zona luego de ser bombardeada con iones de Ar por seis minutos.

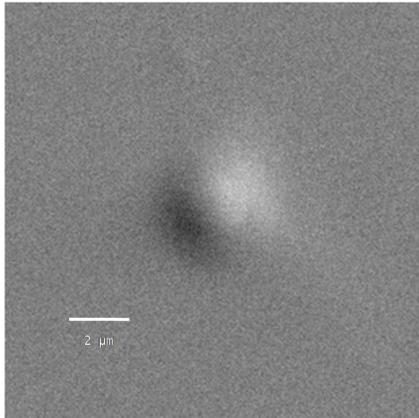
Figura 5.4: Espectros Auger sin decapar y con decapado de una zona regular de muestra obtenida en la prueba de 36 kV a presión atmosférica. Al decapar disminuye considerablemente la cantidad de oxígeno respecto al hierro, lo que indica que la “placa formada” está oxidada solo superficialmente.



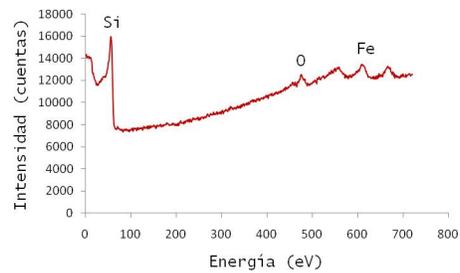
(a) Imagen obtenida luego de haber retirado una rejilla de cobre, utilizada en la prueba, colocada sobre la lámina de Si.



(b) Partícula.

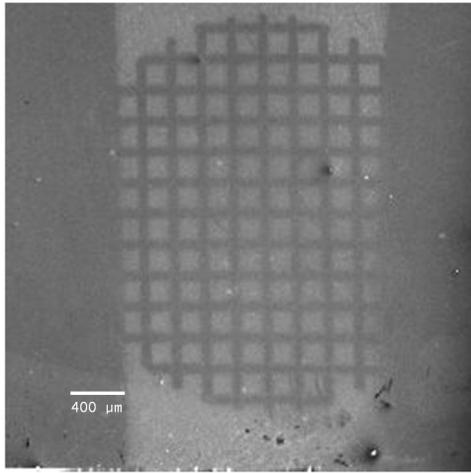


(c) Imagen obtenida con un detector de electrones retrodispersados.

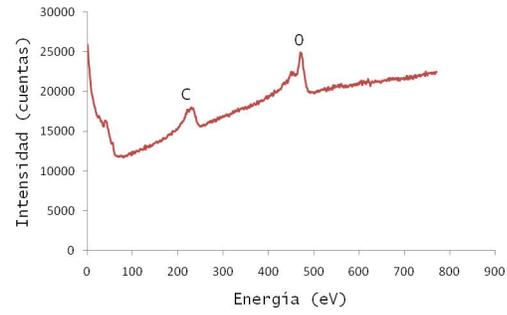


(d) Espectro de la partícula luego de 2 minutos de bombardeo con iones de Ar.

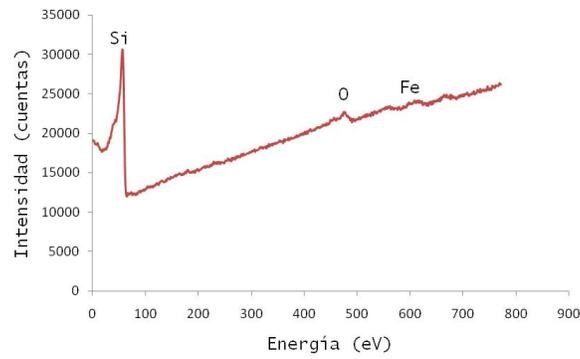
Figura 5.5: Imágenes y un espectro de una muestra obtenida en la prueba realizada con $V_0 = 50 \text{ kV}$ a presión atmosférica en ambiente de aire. Puede notarse la intensidad comparable entre los picos correspondientes al oxígeno y al hierro, por lo que debe tratarse de una partícula de óxido de hierro.



(a) Imagen obtenida luego de retirar una rejilla de cobre utilizada en la prueba.

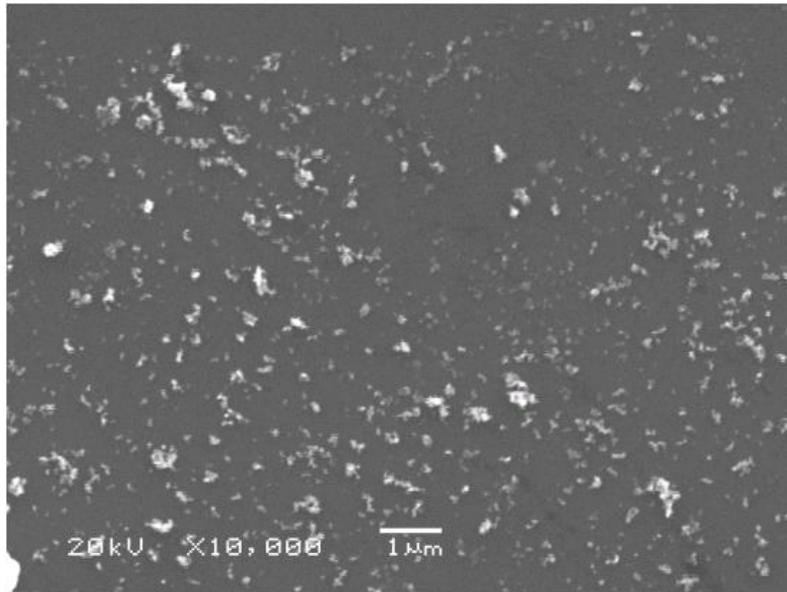


(b) Espectro de zona regular.

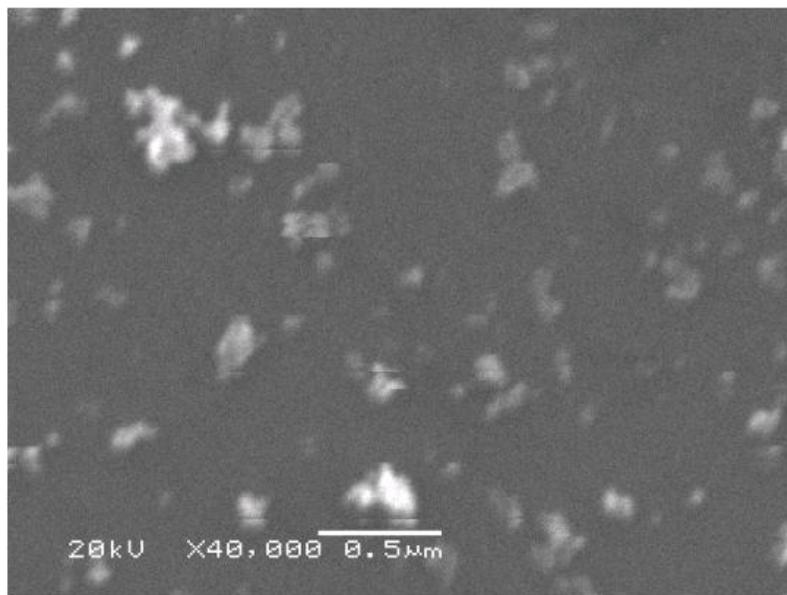


(c) Espectro de la misma zona luego de bombardear con Ar por un minuto. Luego del decapado puede verse en el espectro un pico correspondiente al sustrato de Si y levemente los correspondientes al Fe y O.

Figura 5.6: Imágen y espectros de muestra obtenida en la prueba realizada a $V_0 \approx 40 \text{ kV}$ y a una presión de 400 torr en ambiente de aire.



(a) Zona regular de la muestra.



(b) Misma zona con mayor amplificación. Puede verse como se distinguen partículas de diámetro menor a 100 nm , es decir, "nanopartículas".

Figura 5.7: Imágenes de una zola regular de la muestra obtenida en la prueba realizada a $p = 400\text{ torr}$ y $V_0 \approx 40\text{ kV}$.

5.2. Caracterización mediante Microscopía de Fuerza Atómica (AFM)

La Microscopía de Fuerza Atómica permite obtener imágenes de una muestra mediante el barrido de una sonda afilada o “punta” sobre su superficie. La punta está adherida a una barra flexible o “cantilever” (de 100 a 200 μm de longitud) que se deflece al haber una interacción con la muestra. La punta es sensible a la “interacción de van der Waals”, que puede ser repulsiva (a distancias pequeñas) o atractiva (a mayor separación). Al acercar los átomos de la punta a los átomos de la superficie de la muestra los electrones se solapan, aumentando así la energía del sistema; como dos electrones no pueden ocupar un mismo estado, la distribución electrónica puede solaparse solamente si los electrones pasan a estados de mayor energía; lo que causa una repulsión a distancias cercanas [1].

La deflexión del cantilever, causada por la interacción de la punta con la superficie de la muestra, se registra mediante la reflexión de un laser y unos fotodiodos (ver figura 5.8). La información del movimiento vertical y lateral, detectada con los fotodiodos, es procesada en una computadora para generar una imagen tridimensional del relieve de la muestra.

La deflexión de la punta puede controlarse mediante un transductor piezoeléctrico. Los voltajes aplicados al piezoeléctrico pueden mover la punta con incrementos nanométricos [18].

Hay distintos modos de obtener imágenes con un microscopio de fuerza atómica. El “modo contacto” consiste en aplicar una fuerza, mediante el transductor piezoeléctrico, sobre el cantilever manteniendo la punta en “contacto” con la muestra mientras se realiza el barrido; las pequeñas deflexiones verticales del cantilever, causadas por la interacción entre la punta y la muestra, son detectadas mediante los fotodiodos. Así, se puede obtener una imagen donde se aprecia la topografía (imagen topográfica). Una Imagen más detallada puede obtenerse, en el modo contacto, detectando la deflexión lateral del cantilever (imagen de deflexión). La señal detectada por los desplazamientos laterales está relacionada con la fuerza de fricción entre la punta y la superficie de la muestra. Tanto la “rugosidad” de la muestra como su topografía afectan la señal debido al desplazamiento lateral. Para obtener una imagen donde se aprecie principalmente el efecto de la fricción (imagen de fricción) se opera sobre las imágenes que son obtenidas para el movimiento lateral de la punta en cada sentido (de izquierda a derecha y

viceversa) por separado.

En las imágenes mostradas en la sección 5.2.1 se utilizó el modo contacto. Se tienen imágenes topográficas, de deflexión y de fricción. También se tienen imágenes tridimensionales y perfiles topográficos.

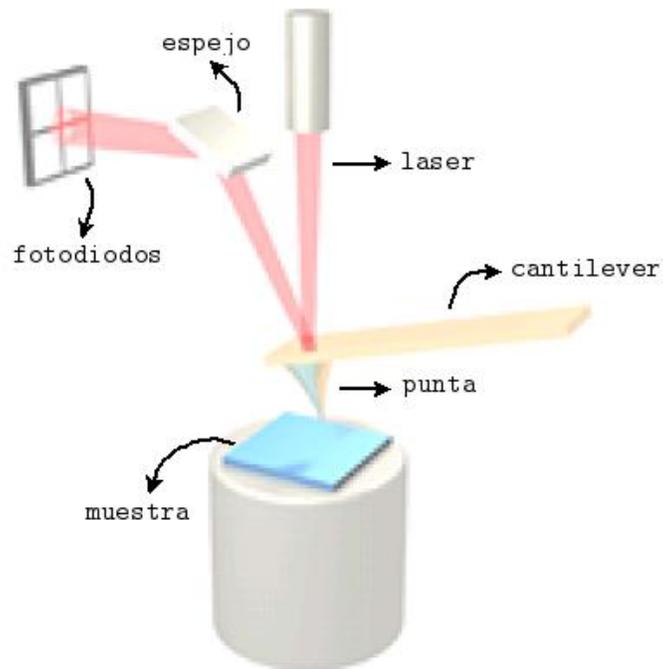


Figura 5.8: Esquema del mecanismo de detección de los movimientos de la punta en un microscopio de fuerza atómica.

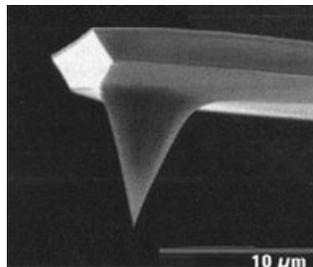
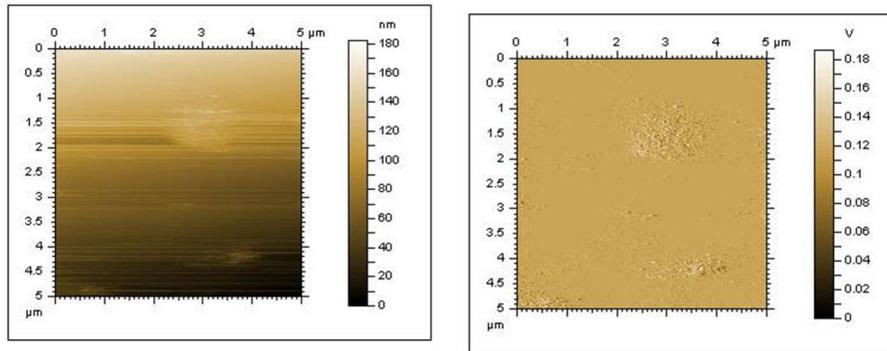
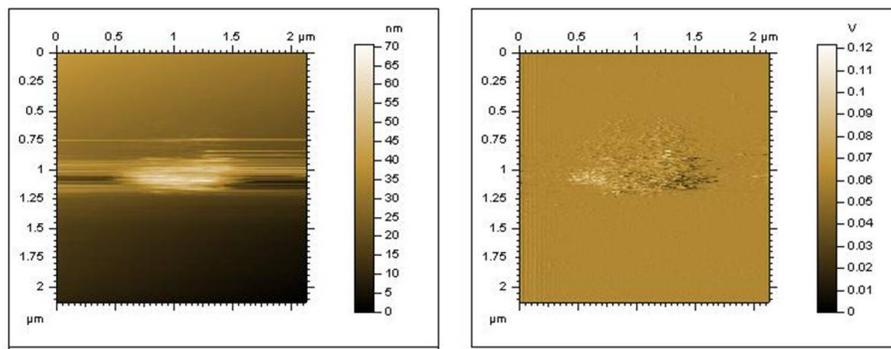


Figura 5.9: Imagen de una punta.

5.2.1. Imágenes y perfiles



(a) Imagen topográfica de una zona regular. (b) Imagen de deflexión de la misma zona.



(c) Imagen topográfica con menor área de barrido. (d) Imagen de deflexión de la misma zona con menor área de barrido.

Figura 5.10: Imágenes de muestra obtenida en la prueba realizada a $V_0 \approx 40 \text{ kV}$ en ambiente de aire y presión $p = 300 \text{ torr}$. Puede observarse un “aglomerado” de partículas.

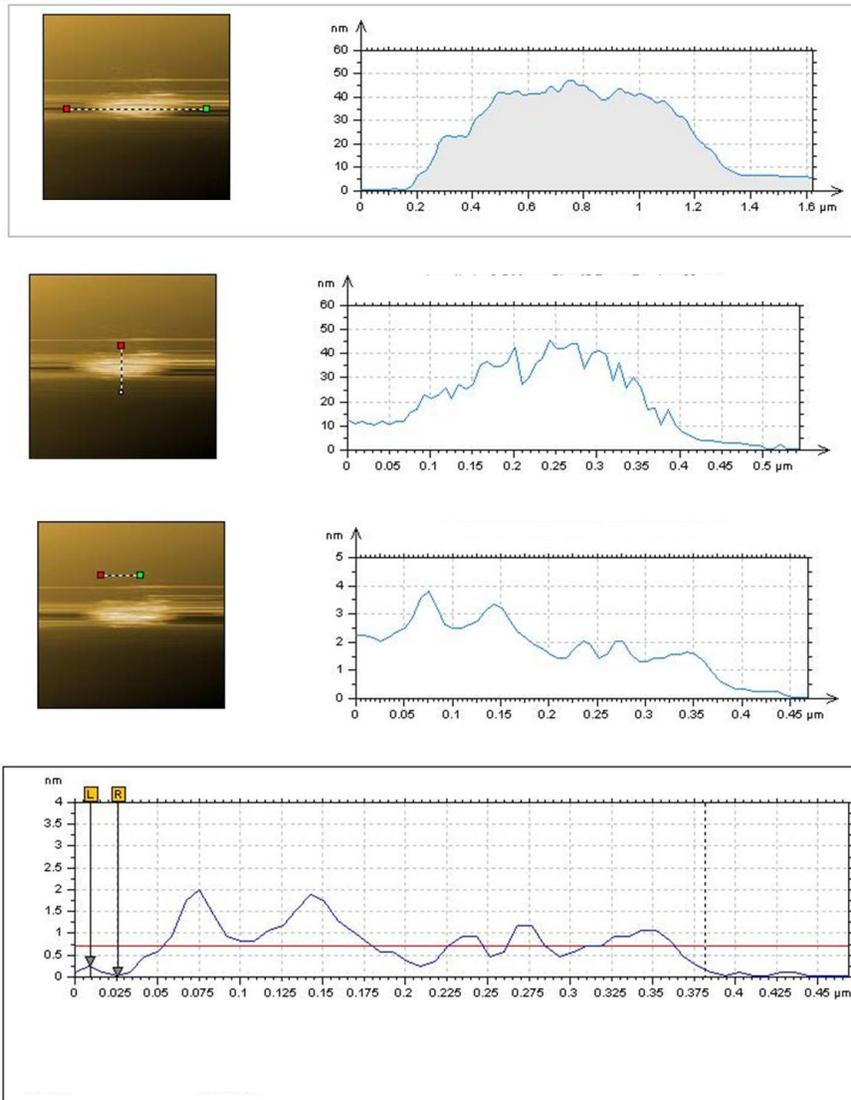
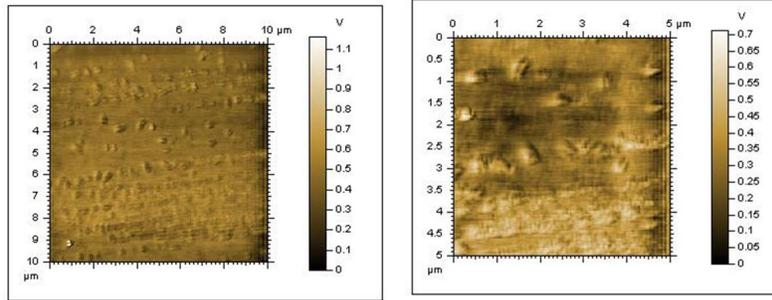
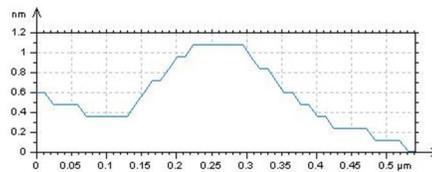
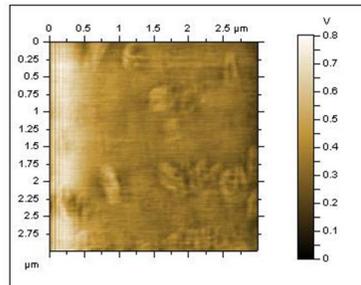


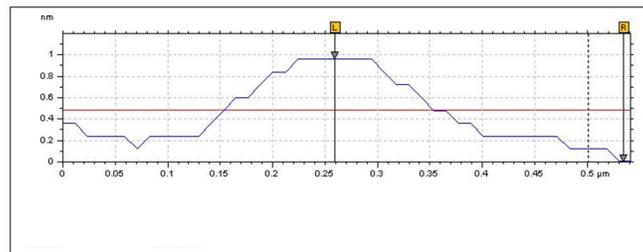
Figura 5.11: Perfiles topográficos del mismo aglomerado de partículas observado en la figura 5.10. En el último perfil se compensó el efecto de inclinación del sustrato de la muestra. Puede observarse en el último perfil que la altura máxima es de $h = 2 \text{ nm}$. En los primeros perfiles la altura máxima fue de $h \approx 45 \text{ nm}$, por lo tanto el aglomerado debe estar formado por nanopartículas.



(a) Imagen de fricción de una zona regular. (b) Imagen de fricción de la misma zona con menor área de barrido.



(c) Imágenes y perfil topográfico.



(d) Perfil topográfico sin el efecto producido por la inclinación del sustrato. Puede observarse que se trata de una “partícula alargada” aprox. de 1 nm de alto y 200 nm de largo en la dirección donde se realizó el perfil.

Figura 5.12: Imágenes y perfiles de muestra obtenida en la prueba realizada con $V_0 \approx 40 \text{ kV}$ y $p = 400 \text{ torr}$.

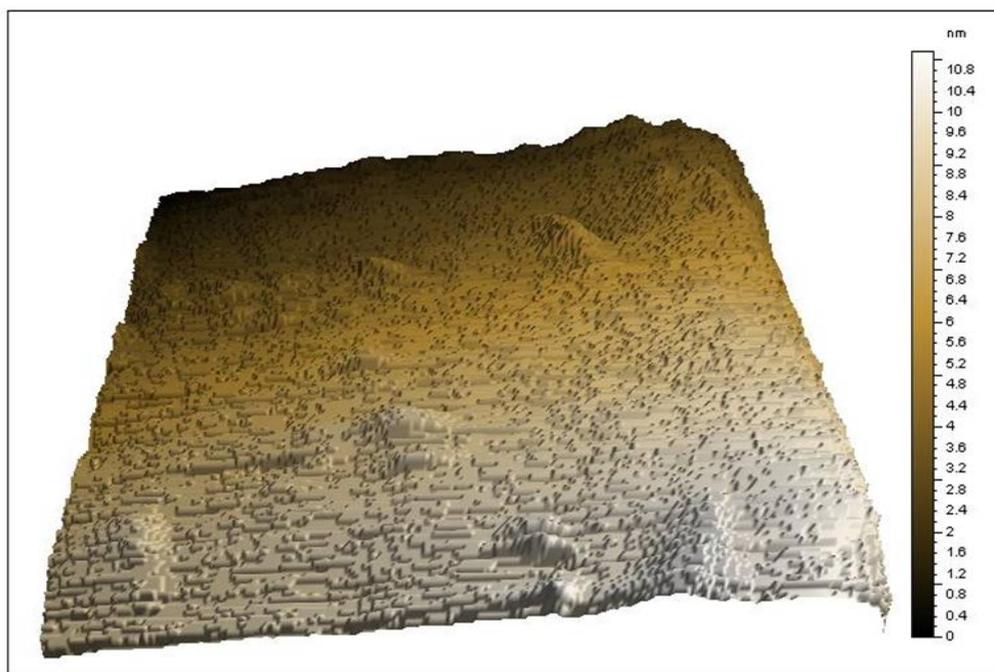
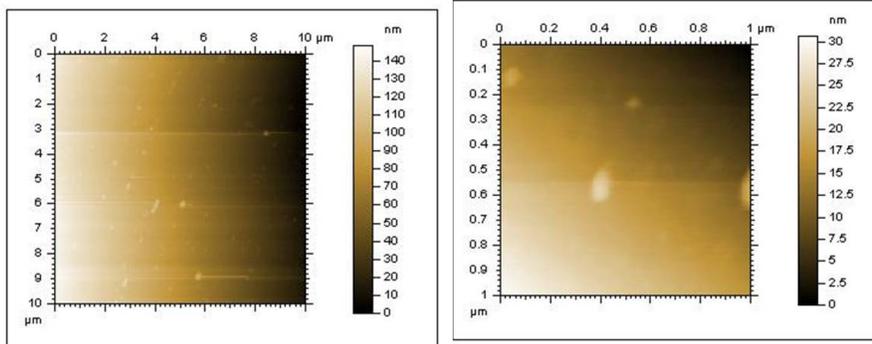
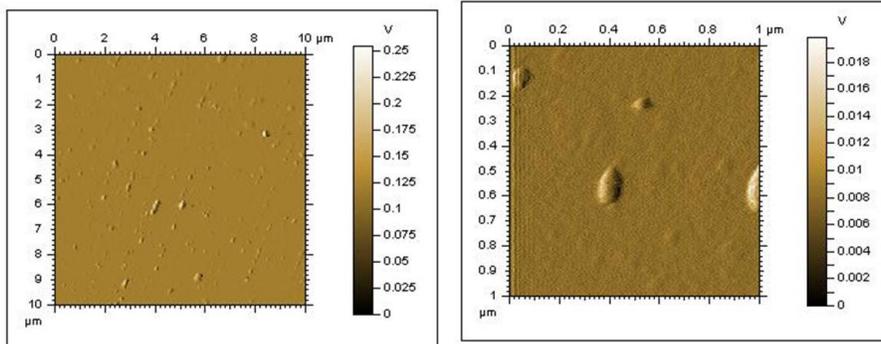


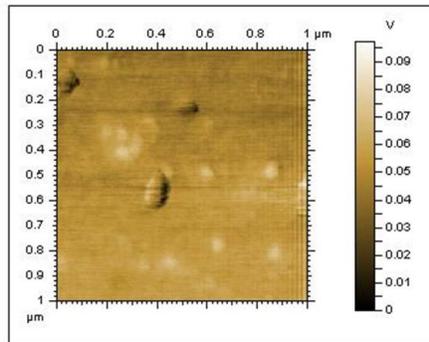
Figura 5.13: Imagen tridimensional de una zona regular de muestra obtenida con $V_0 \approx 40 \text{ kV}$ y $p = 400 \text{ torr}$. Puede observarse la distribución de partículas sobre el sustrato.



(a) Imagen topográfica de zona regular. (b) Imagen topográfica de la misma zona con menor área de barrido.



(c) Imagen de deflexión de la misma zona regular. (d) Imagen de deflexión con menor área de barrido.



(e) Imagen de fricción.

Figura 5.14: Imágenes de una zona regular de muestra obtenida en la prueba realizada con $V_0 \approx 40 \text{ kV}$ y $p = 500 \text{ torr}$.

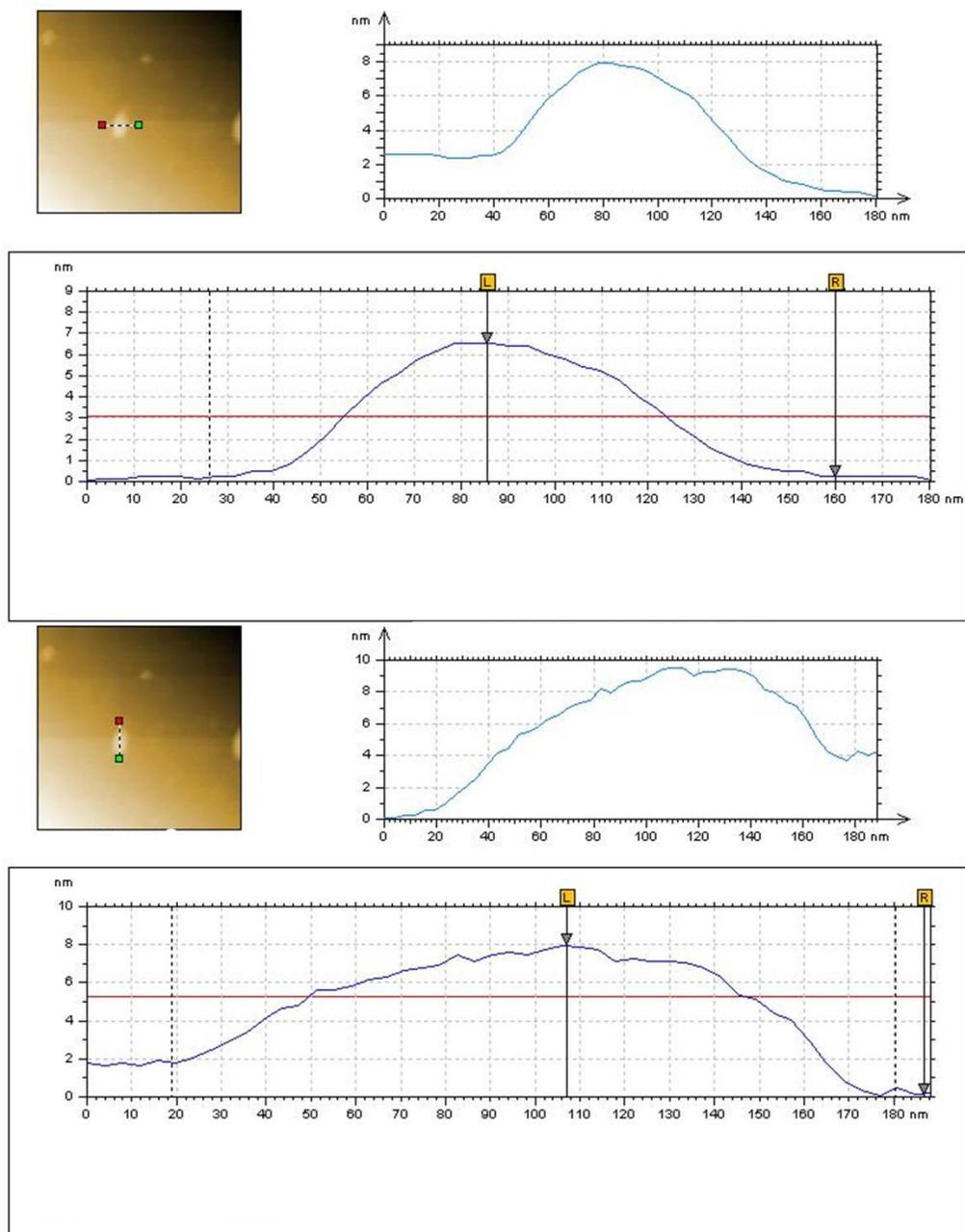


Figura 5.15: Perfil topográfico de una de las partículas observadas en la figura 5.14. Puede observarse una “partícula alargada” con forma elipsoidal de aprox. 8 *nm* de alto, 80 *nm* de ancho y 130 *nm* de largo.

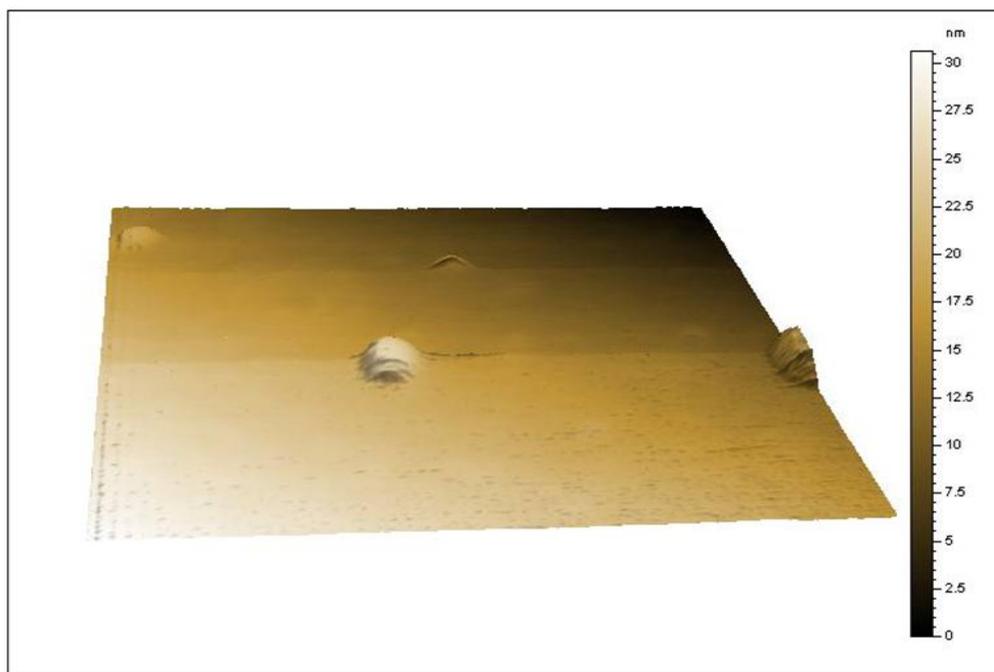


Figura 5.16: Imagen tridimensional de la partícula con forma elipsoidal observada en la figura anterior.

Conclusiones

- La estimación realizada de la tensión inicial mínima a la que deben colocarse los condensadores del generador Marx para realizar la descarga y lograr la separación de los átomos del alambre fue correcta según los resultados de las pruebas realizadas a presión atmosférica.
- De las mediciones realizadas con la bobina de Rogowski puede validarse el modelo de parámetros distribuidos utilizado para su diseño. La bobina diseñada es un instrumento apropiado para la medición de pulsos de corriente de duración del orden de los microsegundos.
- Los espectros obtenidos mediante la microsonda Auger revelan que las partículas con forma esférica, de diámetro en el orden de micrómetros, son de óxido de hierro. Al separar los átomos del alambre hubo reacción química entre el hierro y el oxígeno del ambiente de la cámara.
- De las pruebas realizadas a presión atmosférica puede verse que el tamaño de las partículas formadas depende de la energía que se suministra en la descarga. Se formaron micropartículas, aparentemente esféricas, con diámetro menor para la prueba realizada con mayor energía.
- En las pruebas realizadas a presiones menores a la atmosférica se observó que a menor presión colocada dentro de la cámara mayor era la aglomeración de partículas. Al disminuir la presión el camino libre medio aumenta y las partículas, después de formarse, se dispersan menos.
- El tamaño de las partículas formadas depende de la presión que se coloque en la cámara de descarga. Las imágenes, obtenidas mediante Microscopía de Fuerza Atómica, permitieron observar cómo a menor

presión las partículas formadas son más pequeñas que las formadas a la máxima presión utilizada, donde pudieron observarse más detalles de la forma de las partículas por tener una mayor dimensión.

- Se observó que hubo formación de “nanopartículas elipsoidales” en las imágenes obtenidas mediante AFM. Una partícula de un material ferromagnético, tal como las partículas de óxido de hierro, tendrá una forma que dependerá de su tamaño. Si la partícula es lo suficientemente pequeña (de dominio único) estará uniformemente magnetizada en ausencia de un campo magnético externo [19]. Una magnetización uniforme sólo puede lograrse en un elipsoide [20]. La forma de las nanopartículas observadas “pudiera” ser la consecuencia de haber obtenido partículas de dominio único.

Bibliografía

- [1] Charles Kittel. Introducción a la Física del Estado Sólido. Editorial Reverté, 1997.
- [2] David K. Cheng. Analysis of Linear Systems. Addison-Wesley, 1977.
- [3] Jhon David Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, 1999.
- [4] James A. Phillips. Magnetic Fusion. Winter/Spring 1983 Los Alamos Science.
- [5] C. W. Hartman, G. Carlson, M. Hoffman, R. Werner and D. Y. Cheng. A Conceptual Fusion Reactor Based on the High-Plasma Density Z-pinch. Nuclear Fusion, 17 5 (1977).
- [6] Frank J. Wessel and Norman Rostoker. Controlled Thermonuclear Fusion in a Staged Z-pinch. University of California, 2000.
- [7] Weihua Jiang and Kiyoshi Yatsui. Pulsed Wire Discharge for Nanosize Powder Synthesis. IEEE Transactions on Plasma Science, vol. 26, núm. 5, 1998.
- [8] O. B. Nazarenko and A. P. Ilyin. Nanopowders Production by Electrical Explosion of Wires. Tomsk Polytechnic University, 2008.
- [9] Marta Argüeso Montero. Estudio de una Bobina de Rogowski como Sonda Detectora de Pulsos de Alta Frecuencia. Universidad Carlos III de Madrid, 2005.
- [10] Hansjoachim Bluhm. Pulsed Power Systems. Springer, 2006.

- [11] Jhon Reitz. Foundations of Electromagnetic Theory. Addison-Wesley, 1980.
- [12] K. Simonyi. Foundations of Electrical Engineering. Pergamon Press, 1963.
- [13] Hwei P. Hsu. Analisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [14] Carlos E. Rojas. Elaboración de Multicapas Nanoestructuradas y su Estudio Mediante Técnicas de Dispersión de Electrones. Universidad Central de Venezuela, 2007.
- [15] Safa Kasap and Peter Capper. Springer Handbook of Electronic and Photonic Materials, 2006.
- [16] Werner Pepperhoff and Mehmet Acet. Constitution and Magnetism of Iron and its Alloys. Springer, 2001.
- [17] P. D. Desai. Thermodynamic Properties of Iron and Silicon. Purdue University, 1985.
- [18] Charles P. Poole Jr. y Frank J. Owens. Introducción a la Nanotecnología. Editorial Reverté, 2007.
- [19] Allan H. Morrish. The Physical Principles of Magnetism. John Wiley & Sons, 1966.
- [20] B. D. Cullity. Introduction to Magnetic Materials. Addison-Wesley, 1972.
- [21] J. S. Blakemore. Solid State Physics. Cambridge University Press, 1985.
- [22] IEEE Std 4. Standard Techniques for High-Voltage Testing, 1995.