

SISTEMA ELECTRO-ÓPTICO PARA GENERAR DINÁMICA ESTOCÁSTICA

Trabajo Especial de Grado presentado ante
la ilustre Universidad Central de Venezuela
para optar al título de
LICENCIADA EN FÍSICA

por

Bicky Andreína Márquez Alfonzo

Dr. John C. Mantilla

Tutor de Tesis

Dr. José Juan Suárez

Co-Tutor de Tesis

Caracas, Venezuela

Enero 2012

Agradecimientos

Ante todo agradezco a Dios y a mis padres, Belkis y Oscar, por haberme concedido la vida, así como apoyarme en absolutamente todas las etapas de mi vida. La etapa en la que estuve cursando la Licenciatura en Física, hicieron su mejor y más grande esfuerzo para otorgarme la mayor de las comodidades y tranquilidad.

A mi tutor del IVIC, el Dr. José Juan Suárez, por brindarme toda la confianza a lo largo de los años en que trabajé con él, bajo la pasantía en el Laboratorio de Dinámica No-lineal y Sistemas Complejos. Además de ser fuente constante de inspiración en los estudios que hemos emprendido. A mi co-tutor de la UCV, el Dr. John Mantilla por su constante asesoría y apoyo en este trabajo.

A la Universidad Central de Venezuela por ser mi casa de estudios y al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas por ser la casa donde realicé este trabajo.

Contenido

| | |
|---|-----|
| Contenido | III |
| Lista de Figuras | V |
| Lista de Tablas | IX |
| 1. Introducción | 2 |
| 2. Sistemas Dinámicos | 7 |
| 2.1. Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos | 9 |
| 2.2. Soluciones de los Sistemas Dinámicos | 12 |
| 2.3. Atractores Caóticos | 13 |
| 3. Dinámica Estocástica | 19 |
| 3.1. Mapas Caóticos Exactamente Solubles | 19 |
| 3.2. Generalización de las Soluciones Exactas | 22 |
| 3.3. Un Mecanismo para Producir Aleatoriedad | 25 |
| 4. Análisis en Series de Tiempo | 27 |
| 4.1. Espectro de Potencias | 27 |
| 4.2. Función de Autocorrelación | 28 |
| 4.3. Información Mutua | 28 |
| 4.4. Falsos Vecinos Cercanos | 29 |
| 4.5. Reconstrucción de Atractores por el Método de Retardo Temporal | 30 |
| 4.6. Sección de Poincaré | 30 |
| 4.7. Exponente Máximo de Lyapunov | 31 |
| 4.8. Dimensión de Correlación | 32 |
| 4.9. Entropía | 32 |
| 5. Circuitos Electrónicos para la Generación de Caos de Baja Dimensión | 35 |
| 5.1. Computación Analógica | 35 |
| 5.2. Caos con Computación Analógica | 38 |
| 5.3. Caos con Funciones Definidas a Trozos | 40 |
| 6. Circuito Electro-óptico para la Generación de Caos de Alta Dimensión | 46 |
| 6.1. Elementos del Circuito Electro-óptico | 46 |
| 6.2. Caos con Circuito Electro-óptico | 53 |

| | |
|---|----|
| 7. Circuito Electro-óptico para la Generación de Dinámica Estocástica | 56 |
| 7.1. Transformación del Caos de Baja y Alta dimensión con un Sistema Electro-óptico | 56 |
| 7.2. Transformación del caos de baja dimensión con el sistema electro-óptico | 57 |
| 7.3. Transformación del caos de alta dimensión con el sistema electro-óptico | 60 |
| 8. Resultados: Caos de Baja Dimensión | 64 |
| 8.1. Transformación del Caos de Baja Dimensión con un Sistema Electro-óptico | 64 |
| 8.2. Transformación del Caos de Alta Dimensión con un Sistema Electro-óptico | 77 |
| 9. Conclusiones | 85 |
| 9.1. Conclusiones Generales | 85 |
| Referencias | 88 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|---|----|
| 2.1. | Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Lorenz. (a)Soluciones $z(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$ | 14 |
| 2.2. | Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Rössler, usando los valores $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.2$ y $\delta = 6.3$. (a)Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $z(t)$ vs $y(t)$ vs $x(t)$ | 15 |
| 2.3. | Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Duffing, para los valores $\kappa = 0.3$, $\omega = 1.25$ y $\Gamma = 0.7$. Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$ | 16 |
| 2.4. | Simulación de un atractor extraño para el sistema de Chua, para los valores $a = 15$, $b = 25.58$, $m_1 = -0.71428$ y $m_2 = -1.14285$. (a)Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $z(t)$ vs $y(t)$ vs $x(t)$ | 17 |
| 3.1. | El mapa logístico, como función no-lineal y no-invertible. | 20 |
| 3.2. | Simulación computacional de Mapas de Chebyshev: T_1 (color azul), T_2 (color verde) y T_3 (color rojo). | 22 |
| 3.3. | Simulación computacional de un Mapa de Chebyshev para $z = 3/2$ | 24 |
| 5.1. | (a) Circuito del amplificador operacional en lazo abierto. (b) Función de transferencia del amplificador operacional. | 36 |
| 5.2. | Circuito para el atractor de Lorenz. (a)Esquema usando amplificadores TL082, multiplicadores AD734, resistencias: $R_1 = 100K\Omega$, $R_2 = 100K\Omega$, $R_3 = 37.7K\Omega$, $R_4 = 10K\Omega$, $R_5 = 1M\Omega$, $R_6 = 10K\Omega$, $R_7 = 374\Omega$, condensadores $C = 1000pF$, [34]. | 38 |
| 5.3. | Circuito para el atractor de Chua. (a)Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 2.2K\Omega$, $R_2 = 22K\Omega$, $R_3 = 3.3K\Omega$, $R_4 = 220\Omega$, $R_5 = 220\Omega$, $R_6 = 22K\Omega$, un potenciómetro $R_7 = 2K\Omega$, condensadores $C_1 = 10nF$, $C_2 = 100nF$ y una inductancia de $L = 18mH$ [37]. | 41 |
| 5.4. | (a)Circuito electrónico para generar una función definida a trozos, (b) Función característica. | 42 |
| 5.5. | Proceso estiramiento-plegamiento. Una configuración inicial al intervalo $[0, i]$ | 42 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.6. | Circuito para el atractor de Rössler. (a)Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 2M\Omega$, $R_2 = 5M\Omega$, $R_3 = 100K\Omega$, $R_4 = 100K\Omega$, $R_5 = 100K\Omega$, $R_6 = 100K\Omega$, $R_7 = 10K\Omega$, $R_8 = 150K\Omega$, $R_9 = 10K\Omega$, $R_{10} = 200K\Omega$, $R_{11} = 47K\Omega$, $R_{14} = 10K\Omega$, $R_{15} = 63K\Omega$, un potenciómetro $R_{13} = (1 - 200)K\Omega$, condensadores $C = 0.001\mu F$, y un diodo 1N4148 | 44 |
| 5.7. | Circuito para el atractor de Duffing. (a)Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 30K\Omega$, $R_4 = 10K\Omega$, $R_5 = 75K\Omega$, $R_6 = 820\Omega$, $R_7 = 10K\Omega$, $R_8 = 20K\Omega$, $R_9 = 10K\Omega$, condensadores $C_1 = 20nF$, $C_2 = 470nF$, $L = 19mH$ variable y un diodo 1N4148 | 45 |
| 6.1. | Modulador Mach Zehnder. (Un haz entrante es dividido por un divisor de haz y su fase es modificada en una de las ramas del interferómetro por un voltaje $v(t)$. La salida en potencia del modulador es proporcional a un $\cos^2(\bullet)$ | 50 |
| 6.2. | Filtro tipo Butter de orden 2 pasabanda, diseñado para la tarjeta DSK6713 | 53 |
| 6.3. | Circuito amplificador de voltaje, con un op-amp TL082, resistencias: $R_1 = 5.6K\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $R_3 = 27K\Omega$, $R_4 = 27K\Omega$, $R_6 = 69K\Omega$ y un potenciómetro $R_5 = (0 - 1)K\Omega$ | 54 |
| 6.4. | Esquema del circuito realimentado con retardo temporal, que produce caos de alta dimensión. Constituido por un láser, el modulador Mach Zehnder, un fotoreceptor, la tarjeta DSK6713 y un amplificador de voltaje. La salida de la serie de tiempo está entre el amplificador y el MZM. | 55 |
| 6.5. | Diagrama matemático para el sistema realimentado con retardo temporal. | 55 |
| 7.1. | Diagrama del circuito conversor exponencial. Usando los elementos: op-amp: LF412 dual, D1=LM329, Q1=Q2=2N222, $R_1 = 70K\Omega$, $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 2.2K\Omega$, $R_4 = 2K\Omega$, $R_5 = 1K\Omega$, $R_6 = 15.7K\Omega$ y $C = 33pF$ | 58 |
| 7.2. | Curva característica del conversor exponencial de la figura 7.1. | 58 |
| 7.3. | Esquema del montaje experimental para la generación de dinámica estocástica mediante la transformación de la exponencial del caos de baja dimensión con el modulador Mach-Zehnder. El amplificador entre la exponencial y el MZM es colocado para generar una función cosenoidal con un mayor número de picos y valles, mientras mayor sea la ganancia en voltaje, mayor número de máximos y mínimos, necesarios para aumentar la impredecibilidad. | 61 |

| | | |
|------|--|----|
| 7.4. | Esquema del montaje experimental para la generación de dinámica estocástica mediante la transformación del caos de alta dimensión con el modulador Mach-Zehnder. El amplificador entre sistema realimentado y el primer MZM es colocado para generar una función cosenoidal con un mayor número de picos y valles, mientras mayor sea la ganancia en voltaje, mayor número de máximos y mínimos, necesarios para aumentar la impredecibilidad. | 62 |
| 8.1. | Series temporales de los atractores caóticos generados con sistemas electrónicos (a,b) experimental y simulado. Donde: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 65 |
| 8.2. | Series temporales de los atractores caóticos transformados con el sistema electro-óptico (a,b) experimental y simulado. Donde: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 66 |
| 8.3. | Espectro de potencia de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 70 |
| 8.4. | (a) Información mutua y (b) Falsos vecinos cercanos de los atractores caóticos y su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 71 |
| 8.5. | Mapas de retorno de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 72 |
| 8.6. | Sección de Poincaré de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 73 |
| 8.7. | Exponente máximo de Lyapunov de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: ((a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 74 |
| 8.8. | Dimensión de Correlación de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 75 |
| 8.9. | Entropía de Correlación de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua. | 76 |

| | |
|--|----|
| 8.10. Serie de tiempo del sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal, (a) experimental y (b) simulado. Donde se modificó la potencia: (a,b.1)P=122mW , (a,b.2)P=177mW, (a,b.3)P=266mW y (a,b.4)P=503mW. | 78 |
| 8.11. Espectro de potencias del sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal, (a) experimental y (b) simulado. Donde se modificó la potencia: (a,b.1)P=122mW , (a,b.2)P=177mW, (a,b.3)P=266mW y (a,b.4)P=503mW. | 79 |
| 8.12. Filtro pasabanda de orden 2 para P=503mW, con ruido. | 80 |
| 8.13. Espectro de potencia de (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para P=503mW. | 80 |
| 8.14. (a) Información mutua y (b) Falsos vecinos cercanos del hiper-caos y su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para P=503mW. Curva roja: hiper-caos y curva verde: la serie transformada. | 81 |
| 8.15. Mapa de retorno del (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico y Sección de Poincaré del (c) Hiper-caos y (d) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para P=503mW. | 82 |
| 8.16. Exponente máximo de Lyapunov de (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para P=503mW. | 83 |
| 8.17. Dimensión de Correlación del (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico y Entropía del (c) Hiper-caos y (d) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para P=503mW. | 84 |
| 9.1. Esquema de circuitos realimentados con retardo temporal en sincronización | 87 |

Lista de Tablas

| | |
|--|----|
| 2.1. Estabilidad de los sistemas dinámicos | 11 |
| 4.1. Máximo exponente de Lyapunov | 31 |
| 5.1. Operaciones matemáticas con realimentación negativa. | 37 |
| 8.1. Exponente Máximo de Lyapunov | 68 |
| 8.2. Dimensión y Entropía de Correlación para Atractores (At) y Atractores Transformados (At-Trans) | 69 |
| 8.3. Máximo exponente de Lyapunov del sistema electro-óptico | 82 |
| 8.4. Dimensión y Entropía de Correlación del sistema electro-óptico | 83 |

Resumen

En principio se plantea una descripción compacta de la teoría básica de sistemas dinámicos, como la base constituyente de todo el trabajo, colocando especial énfasis en los atractores caóticos de baja dimensión más conocidos en la literatura científica, Lorenz, Chua, Rössler y Duffing, contruidos con el método de computación analógica; así como un sistema electro-óptico basado en el modulador Mach-Zehnder, la realimentación y el retardo temporal, que es generador de caos de alta dimensión. Para luego explorar los fundamentos de la generación de dinámica impredecible en forma determinista; mediante la función de transferencia del modulador Mazh-Zehnder, que presenta una transformación no-lineal y no-invertible. Los resultados serán caracterizados con los análisis en series de tiempo, con los que se especifica la naturaleza dinámica de nuestro sistema.

Capítulo 1

Introducción

En la literatura científica sobre sistemas dinámicos, se nos ha mostrado una amplia variedad de interpretaciones útiles para definirles completamente. Uno de sus conceptos más englobadores es el de ser sistemas capaces de evolucionar en el tiempo; sin embargo, esta interpretación ha sido reducida a sistemas que, además de evolucionar en el tiempo, son deterministas. El determinismo le asigna el carácter causal al estudio de los mismos, desde un punto de vista físico, necesario para distribuirlos en sus términos causa-efecto y, así, modelarles matemáticamente. En el afán de satisfacer este tanto, Isaac Newton [1] desarrolló una mecánica racional con el fin de explicar el comportamiento de las órbitas planetarias, en principio estudiadas por Kepler. De esta manera, comenzó la historia de la física clásica, con ánimos de entenderse como una ciencia exacta, desde la cual todo movimiento pudiese ser expresado matemáticamente. Estas matemáticas se formulaban con ecuaciones diferenciales, cuya solución comprendía la trayectoria que dicho sistema realizaba en todo tiempo.

Asimismo, un conjunto de físicos matemáticos extendieron la teoría de ecuaciones diferenciales y, con ésta, la teoría de sistemas dinámicos. Euler encontró una aplicación en hidrodinámica y aerodinámica ideal [2]; Fourier las adaptó al flujo del calor [3], entre otras aplicaciones relativas. Su potencial alcanzó la teoría electromagnética de la mano de Maxwell [4]; y, a partir de aquí, ya se puede mencionar un vasto modelado de la naturaleza usando una teoría general de Ecuaciones Diferenciales. Empero, si bien se consiguió explicar muchos fenómenos con estas expresiones, la

teoría presentaba fuertes limitaciones para encontrar las soluciones exactas a ecuaciones diferenciales no-lineales; problema que surgió de ese lugar del cual todo partió, i.e., del sistema planetario. Resultaba imposible estructurar una teoría que explicase exactamente qué ocurría cuando tres cuerpos celestes interactuaban con sus respectivos campos gravitacionales, que es conocido como el problema de los tres cuerpos. Lagrange ofreció una demostración parcial [5], que posteriormente fue abordada por Poincaré, quien profundizó en el problema [6] hasta el punto de dilatar nuevamente la teoría, de tal forma que incluyese un examen cualitativo de los mismos.

La teoría cualitativa incluía un estudio más específico de la estabilidad de los sistemas dinámicos, cuyas bases yacían en la topología, que estaba en sus primeras etapas de construcción. Hubo pasado cierto tiempo con estas ideas en reposo, hasta que llegó una época de oro en la que dos grupos de matemáticos, geográficamente separados, perfeccionaron la teoría de Poincaré, concretando una Teoría de Sistemas Dinámicos bastante más formal. El primer grupo se establecía en Estados Unidos de Norteamérica, con George Birkhoff y su libro "Dynamical Systems (1927)" [7], donde mostraba el cuerpo de esa teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. Hasta que, unos años después, Stephen Smale descubriese los atractores extraños en sus estudios topológicos [8], como estructuras estables que mostraban un comportamiento extraño. Lo que, de forma independiente, Norman Levinson encontró en el oscilador no-lineal de Van der Pol, que es un sistema capaz de exhibir una trayectoria caótica. El otro grupo estaba encabezado por Lyapunov, cuya investigación se sumó a la que posteriormente desarrollarían Andrei Kolmogorov y Vladimir Ilich Arnold, ya no en sistemas disipativos, sino en los conservativos, i.e., teoría de perturbación en sistemas hamiltonianos [9], [10].

La teoría de sistemas dinámicos tomó popularidad con el hallazgo que haría Edward Lorenz, en 1963, de un atractor extraño en un modelo climático que estaba estudiando [11]. Encontrando, mediante experimentos computacionales, lo que Hadamard había calificado como sensibilidad a condiciones iniciales en sistemas que presentaban una dinámica compleja. Esta propiedad le concedía una total impredecibilidad al sistema, puesto que no se podía predecir exactamente qué camino tomarían las

condiciones iniciales a largo plazo. Con este descubrimiento se impulsó la teoría del caos, que conforma una rama de los sistemas dinámicos. Nótese que el caos forma parte de los sistemas deterministas, debido a que puede modelarse con ecuaciones diferenciales no-lineales, como en principio Lorenz demostró con su aplicación meteorológica. Este tanto no es aplicable al ruido, que si bien es bastante parecido a una trayectoria caótica, tiene la particularidad de no poder describirse matemáticamente, es esencialmente no-determinista.

La generación determinista de dinámica verdaderamente estocástica resulta un tópico polémico en el mundo científico. Siempre es posible describir este tipo de sistemas bajo la tutela de la probabilidad, sin embargo, se persigue la necesidad de hallar un mecanismo que nos lleve hasta el umbral determinista de la aleatoriedad. En la capacidad de describir tales sistemas, se llega a la aspiración filosófica de poder desentrañar el esqueleto latente de estas incomprendidas estructuras. Así, el anhelo de todo individuo que modela este mundo parte de un apetito por encontrar una respuesta analítica, no sólo numérica, a la totalidad de lo real.

En medio de este requerimiento, el hallazgo de soluciones analíticas fue iniciado por S. M. Ulam [12], quién encontró una solución exacta a un conocido mapa caótico llamado mapa logístico. A partir de este estudio, J.A. González encontró una solución exacta a un mapa estocástico [13]-[16], para ciertos valores con los que se compone la ecuación logística.

Si partimos de una sucesión de valores x_1, x_2, \dots, x_n , llegamos a los términos aleatorios cuando a partir de una secuencia inicial bastante larga, $n \rightarrow \infty$, no puede determinarse el valor siguiente, x_{n+1} . Esto indica que no puede hallarse el valor futuro de una secuencia estocástica a partir del conocimiento de sus valores previos; expectativas que si se ven satisfechas por las estructuras caóticas, periódicas o cuasiperiódicas. Como vemos, el determinismo no es un producto adquirido en lo que se conoce como ruido blanco. La independencia entre valores hace imposible la predicción exacta.

Existe una somera posibilidad de que los mapas estocásticos no generen valores completamente independientes entre sí, que en el determinismo se corrompa la esencia de estos sistemas. Una de estas discusiones estuvo encabezada por F. James, afirman-

do que no es posible que un sistema determinista genere dinámica estocástica, debido a que viola directamente la definición de ruido blanco, producido por sistemas de los que nada se sabe. En la misma línea de pensamientos, al ruido determinista se le conoce como caos de alta dimensión, que dificulta la predicción como si de una serie temporal aleatoria se tratase.

En esta tesis partiremos de los resultados teóricos demostrados y corroboraremos su potencial experimentalmente, apoyándonos en sistemas electrónicos y ópticos, además de análisis cualitativos en series de tiempo para estudiar su estocasticidad.

El objetivo se centra en diseñar un circuito electro-óptico con no-linealidad y no-invertibilidad que puede producir secuencias de valores independientes (ruido blanco). Usando un sistema electro-óptico Mach-Zehnder, transformamos señales caóticas para estudiar la complejidad de la señal transformada, así como el grado de aleatoriedad generado. Estos análisis se realizarán con generadores de oscilaciones caóticas tales como: Chua, Lorenz, Rössler y Duffing. Repitiendo este procedimiento con un circuito realimentado que presenta retardo temporal con el que se genera caos de alta dimensión. Luego, recurriremos a los análisis cuantitativos en series de tiempo para estudiar su estocasticidad. Los pasos a seguir son: (1) Diseño y construcción de sistemas electrónicos generadores de oscilaciones caóticas. Específicamente, se implementarán los sistemas de Chua, Lorenz, Rössler y Duffing, en circuitos electrónicos. (2) Transformación de una señal óptica proveniente de un diodo láser, usando un modulador electro-óptico Mach Zehnder para realizar transformaciones no-lineales y no-invertibles del forzamiento caótico. (3) Generar caos de alta dimensión en un sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal para ser transformado por el modulador anterior. (4) Realizar análisis en serie de tiempo para estudiar el grado de estocasticidad generado luego de la transformación.

Marco Teórico

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos

Todo sistema determinista que presenta una evolución en el tiempo conforma un sistema dinámico. Las magnitudes físicas que los constituyen varían en el tiempo de forma continua o discreta; este conjunto de magnitudes a estudiar estructuran el estado de nuestro sistema, que puede desarrollarse de una manera predecible y determinista, así como impredecible e indeterminista. En términos más generales, nos resultará útil forjar la diferencia entre sistemas que son lineales y no-lineales, autónomos y no-autónomos, conservativos y disipativos, con el fin de mostrar las rutas analíticas empleadas en este trabajo, [17].

2.1.1 Tiempo-continuo y tiempo-discreto

Un sistema dinámico tiempo-discreto se define matemáticamente con ecuaciones en diferencias o mapas iterados, en las que se representa a la variable temporal como si tomara valores del conjunto de los números naturales, $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = M(x_n) \tag{2.1}$$

donde x_n es N-dimensional,

$$x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$$

Los sistemas tiempo-continuo se representan mediante ecuaciones diferenciales. Debido a que todos los estados son tomados con una asignación temporal infinitesimal, que adquiere los valores del conjunto de los números reales,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = F_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{cases} \quad (2.2)$$

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) nos permiten determinar el estado futuro de un sistema partiendo de un estado pasado.

2.1.2 Lineales y no-lineales

Sistemas lineales pueden ser descritos con ecuaciones cuya variable dinámica siempre está elevada a la primera potencia, para el caso unidimensional. En sistemas de dimensiones superiores, representados por un número mayor de ecuaciones, ninguna de estas variables deben poseer un coeficiente igual a otra coordenada independiente que determine al mismo. A los sistemas no-lineales se les puede expresar con ecuaciones que contengan elementos elevados a potencias superiores a uno, o compuesta por alguna función cuya descripción geométrica no es una línea recta. En el caso ($N > 1$)-dimensional, es posible describirles con un número de ecuaciones acopladas y con las variables espaciales multiplicadas. La especificación completa no admite que estos términos de orden superior sean desestimados para el análisis.

Los sistemas de ecuaciones lineales tiempo-continuo útiles para hallar una solución analítica pueden escribirse en forma vectorial,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \cdots & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Con solución general,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (2.4)$$

Los autovalores, λ , se determinan con el polinomio característico, $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$,

y los autovectores, \mathbf{v} , se determinan mediante la ecuación característica, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$; para cada autovalor hallado.

2.1.3. Autónomos y no-autónomos

Nos referimos brevemente a los sistemas autónomos como aquellos en los que no aparece explícitamente la variable temporal, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, manteniéndose invariantes en el espacio de fase. En los sistemas no-autónomos contemplamos la variable temporal explícitamente. Generalmente se usa para modelar sistemas forzados, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$; de los cuales hay una variación importante de su dinámica intrínseca debido a la acción de la forzadora.

2.1. Teoría Cualitativa de Sistemas Dinámicos

En este trabajo analizaremos los aspectos no-lineales de los sistemas dinámicos, que no siempre podrán estudiarse con soluciones analíticas de la manera presentada en la sección precedente, por lo que es necesario apoyarnos en construcciones geométricas.

2.2.1. Espacio de Fase

Debido a que describimos sistemas que evolucionan en el tiempo, estas estructuras geométricas podrán examinarse mediante la cadena de estados que se va originando en el tiempo. Esta sucesión de estados (x_1, x_2, \dots, x_n) se personifica en un espacio de fase, que es el espacio de los estados del sistema. El espacio de fase tendrá las dimensiones del sistema, o el número de grados de libertad del mismo, y a la trayectoria en la que se disponen los estados se le denomina *órbita*.

2.2.2. Sistemas Conservativos y Disipativos

Definimos efímeramente un sistema conservativo como aquél que preserva su volumen en un espacio de fase. Esta preservación se verifica si el determinante de la matriz de Jacobi es igual a 1, $\Pi(x) \equiv \det(\partial\mathbf{F}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}) = 1$. En los sistemas disipativos no se preserva el volumen, $\Pi(x) < 1$, en los que podríamos encontrar trayectorias que

se comportan como atraídas hacia un sumidero, un conjunto de estados que atraen al resto de los estados hacia sí, confinándolos en una región acotada del espacio de fase, a éstas órbitas se les conoce como *atractores*; o trayectorias que hacen las veces de fuente, que escapan de un punto examinado, que se definen como *repulsores*.

2.2.3. Puntos fijos y Estabilidad

Los *puntos fijos* (x^*) se precisan para todo estado que exhiba variación nula en el espacio de fase, o derivada nula,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (2.5)$$

En ausencia de perturbaciones, el sistema permanecerá en un estado estacionario, de lo contrario, aparecería un elemento externo que cambiaría la dinámica descrita en este punto.

Calificamos la estabilidad de los sistemas dinámicos mediante el método de linealización de Jacobi: expandimos la ecuación (2.2) con la serie de Taylor evaluada en el punto fijo, hasta la primera derivada, de tal forma que

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \Big|_{x^*} (x_k - x_k^*) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_k} \Big|_{x^*} (x_k - x_k^*) \quad (2.6)$$

Tantos k como coordenadas se disponga. Como vimos en la ecuación (2.5), entonces $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \dot{x} = 0$. Volviendo a la ecuación (2.3), observamos que también es cierto que $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = \dot{x} = 0$, de donde podemos escribir la siguiente expresión en términos de componentes matriciales

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \Big|_{x^*}$$

Siendo A_{ij} es la matriz jacobiana. Puede demostrarse que la estabilidad de los puntos fijos se determina estudiando los autovalores provenientes del polinomio característico,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_j} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \lambda & \cdots & \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Existen dos criterios de estabilidad dependientes del signo del autovalor resultante de la matriz de Jacobi:

- Estabilidad en el *sentido de Lyapunov*: Un punto fijo es estable si existe un autovalor negativo, tal que cualquier condición inicial originará una trayectoria acotada.
- Estabilidad *asintótica*: Un punto fijo es asintóticamente estable si cumple con la estabilidad en el sentido de Lyapunov y, además, cualquier condición inicial impuesta origina una trayectoria acotada para $t \rightarrow \infty$, es decir, la trayectoria recorre la asíntota al alcanzar un tiempo infinito.

La clasificación de los puntos fijos para sistemas bidimensionales es bastante conocida y empleada en la construcción geométrica de los sistemas, en 2 dimensiones obtenemos un número máximo de 2 autovalores:

Tabla 2.1: Estabilidad de los sistemas dinámicos

| Autovalor λ | Representación |
|---|----------------------|
| $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ | Nodo estable |
| $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ | Nodo inestable |
| $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ | Punto silla |
| $\lambda_1 = \omega i, \lambda_2 = -\omega i$ | Centro (degenerados) |
| $\lambda_1 = a \pm bi$ | Foco inestable |
| $\lambda_2 = -a \pm bi$ | Foco estable |

2.2. Soluciones de los Sistemas Dinámicos

2.3.1. Soluciones Estacionarias

Son trayectorias constantes, es decir, que convergen hacia un punto fijo de forma asintótica, este tipo de soluciones se mantienen eternamente fijas una vez que se establecen en dicho punto, salvo cuando son perturbadas. Ejemplos de éstas son un foco o un nodo estable.

2.3.2. Soluciones Periódicas

Corresponden a órbitas que generan una dinámica recurrente, es decir, que se repite exactamente la misma dinámica hacia el estado del que partió para todo tiempo. Están caracterizadas por centros y *ciclos límites*. Los ciclos límites constituyen atractores, por lo que son sistemas disipativos, contrario a los centros, que no disipan energía. La particularidad de los ciclos límites recae en su no-linealidad, puesto a que un sistema disipativo lineal puede comportarse como un foco, que admiten soluciones infinitamente crecientes o decrecientes. La no-linealidad en el coeficiente de disipación de energía obliga al sistema a quedarse con una amplitud estacionaria infinitamente.

2.3.2. Soluciones Cuasiperiódicas

Estas soluciones están conformadas por un conjunto de funciones periódicas $f(t) = f(t + T_i)$ de distinto periodo, a modo de composición de funciones, por lo que presentan varias frecuencias características f_i . En el espacio de fase observaremos un atractor en forma *toroidal*, cuya dimensión estará especificada por el número de frecuencias características que exhiba el sistema. Sin embargo, no cualquier composición de funciones nos será útil para alcanzar la cuasiperiodicidad, para ello es necesario que se cumpla lo siguiente

$$\frac{f_i}{f_j} = r, \forall r \in \mathbb{I}^* \quad (2.8)$$

donde \mathbb{I}^* es el conjunto de los números irracionales. Esto es, la relación entre las frecuencias debe concedernos un número irracional, lo que hace a las frecuencias

inconmensurables una con respecto a la otra, completamente independientes entre sí, ninguna de ellas puede ser expresada como combinación lineal de las demás.

2.3.3. Soluciones Caóticas

Son soluciones a sistemas dinámicos que se comportan de forma aperiódica, pero sin perder el calificativo determinístico, en una región finita del espacio de fase. Lo singular de estas soluciones, es que dejan de ser deterministas solamente cuando se intenta hallar su estado futuro a partir de uno previo bastante lejano del mismo; por lo tanto, tan sólo en este instante el sistema parece comportarse de forma aleatoria, o totalmente indeterminista e impredecible. El sello identificatorio se revela cuando estudiamos la evolución de trayectorias inicialmente cercanas, de forma tal que la distancia entre una y otra en principio prácticamente tiende a cero y en un tiempo posterior muestran un alejamiento considerable, el intervalo espacial infinitesimal que las separaba, ahora exhibe divergencia exponencial; a este fenómeno se le conoce como *sensibilidad a las condiciones iniciales*.

2.3. Atractores Caóticos

Existen atractores cuya dimensión no es un número entero, a estos sistemas se les conoce como atractores extraños, puesto que, desde la terminología de Mandelbrot, conforman objetos fractales [17]. Cuando las órbitas que constituyen dichas estructuras poseen sensibilidad a condiciones iniciales, les definimos como atractores extraños que son caóticos. Presentaremos atractores caóticos de dimensión baja ($N = 3$) y alta ($N \gg 3$).

2.4.1. Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz fue el primer atractor extraño tiempo-continuo que se observó [11], surgiendo en el campo de las ciencias atmosféricas, como un modelo tridimensional para el comportamiento del fluido presente en las fluctuaciones del clima. Sólo hasta esta época fue posible hacer la observación, cuando el modelado compu-

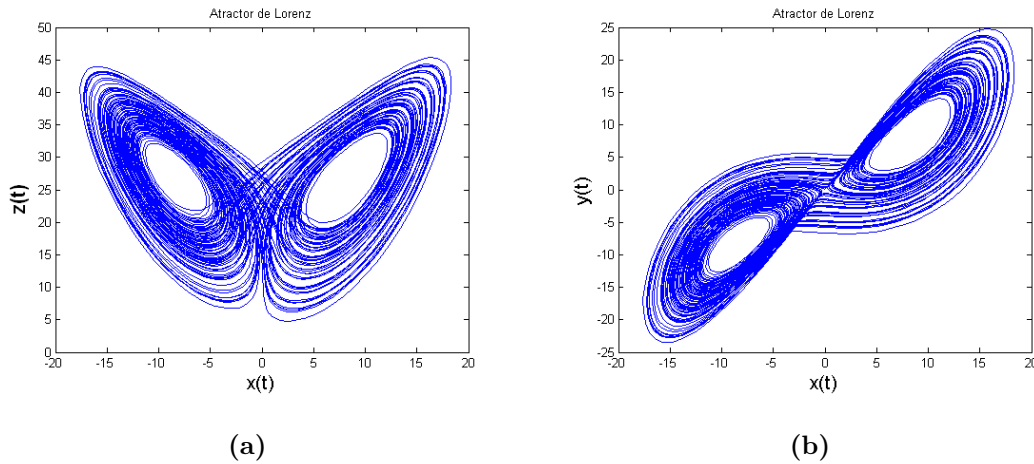


Figura 2.1: Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Lorenz. (a) Soluciones $z(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$.

tacional se manifestó como una herramienta poderosa para resolver numéricamente ciertos sistemas. Recordando que el caos en sistemas tiempo-continuos sólo es posible a partir de dimensiones iguales o mayores que tres (teorema de Poincaré - Bendixson). Las ecuaciones consideradas por Edward Lorenz son

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \zeta(y - x) \\
 \dot{y} &= \rho x - y - xz \\
 \dot{z} &= xy - \beta z
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

que en el espacio de fase conforma el atractor visto en la figura (2.1), generados con los valores $\zeta = 10$, que es el número de Prandtl, relacionado con la viscosidad del fluido; $\rho = 28$ es el número de Rayleigh, relacionado con la diferencia de temperatura entre la parte superior e inferior de la columna y $\beta = 8/3$ es un factor de escalamiento.

2.4.2. Atractor de Rössler

Dentro de la misma línea constructivista del atractor de Lorenz, 13 años más tarde, Otto Rössler mostró un conjunto de relaciones simples que generan un flujo similar al atractor anterior, generando tan sólo uno de los espirales del atractor de Lorenz, a éste se le conoce como atractor de Rössler [18]. Se diseñó con el fin de modelar un proceso químico que estaba estudiando, consistiendo en combinar un oscilador

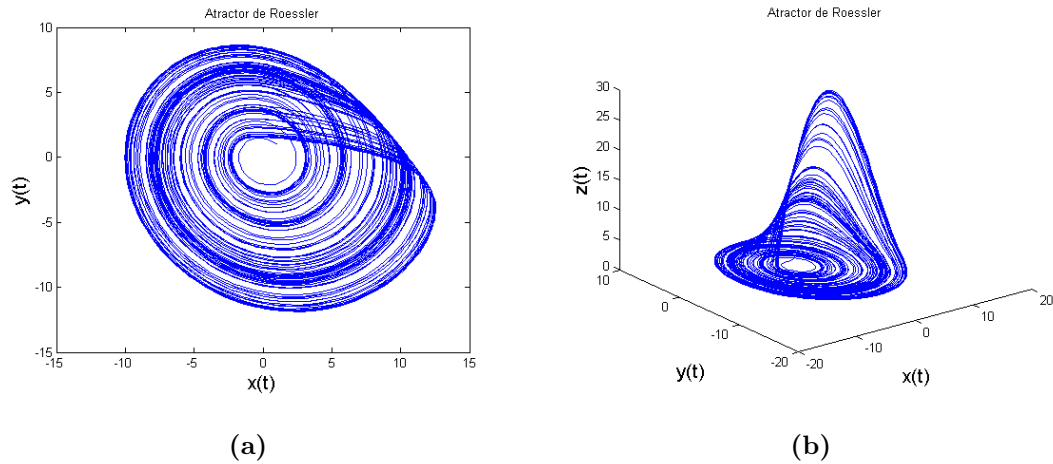


Figura 2.2: Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Rössler, usando los valores $\alpha = 0.2$, $\sigma = 0.2$ y $\delta = 6.3$. (a) Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $z(t)$ vs $y(t)$ vs $x(t)$.

químico 2-variable con un sistema que presenta histéresis química, ocasionando un sistema de reacción que generaba caos. Las variables x y y denotan el sistema oscilador y z el que produce histéresis, las constantes α , σ y δ son las tasas de reacción efectiva para esta combinación de reacción bioquímica [19]. Observando su espacio de fase en la figura (2.2).

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -(y + z) \\
 \dot{y} &= x + \alpha y \\
 \dot{z} &= \sigma + xz - \delta z
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

2.4.3. Atractor de Duffing

Ya hemos visto que las ecuaciones diferenciales no-lineales pueden llevarnos a fenómenos tales como los atractores extraños. Ahora ampliaremos un poco más estos resultados agregándole un término que las hará inhomogéneas, i.e., una fuerza externa; quitándole con ésta autonomía al sistema dinámico [20], $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, lo que nos lleva a la ecuación de Duffing, $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + (x^3 - x) = \Gamma \cos(\omega t)$. Realizando una serie de cambios en esta ecuación, podemos transformar este sistema en uno que posea tres dimensiones, además de concederle autonomía, obteniendo el siguiente conjunto de ecuaciones de primer orden y observando sus soluciones en el espacio de fase, para la

figura (2.3).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x - \kappa y - x^3 + \Gamma \cos(z) \\ \dot{z} &= \omega\end{aligned}\tag{2.11}$$

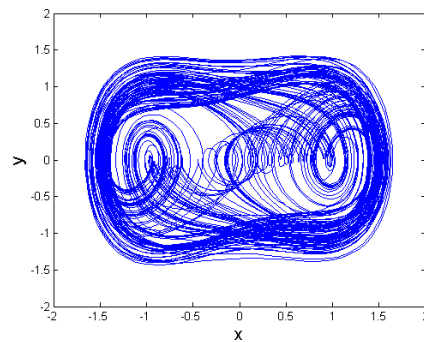


Figura 2.3: Simulación computacional de un atractor extraño para el sistema de Duffing, para los valores $\kappa = 0.3$, $\omega = 1.25$ y $\Gamma = 0.7$. Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$.

2.4.4. Atractor de Chua

El diseño de circuitos autónomos no-lineales comenzó a tomar fuerza a partir de la aparición del atractor de Chua. León O. Chua [21] estudió la posibilidad de generar dinámica no-lineal mediante ciertas propiedades extraídas de los sistemas de Rössler y Lorenz, como el número de puntos fijos y su inestabilidad, encontrando comportamiento caótico [22]. Las ecuaciones que describen el atractor,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x - f(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -by\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde $f(x) = m_1x + 0.5(m_2 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)$. En el espacio de fase tendremos, figura (2.4).

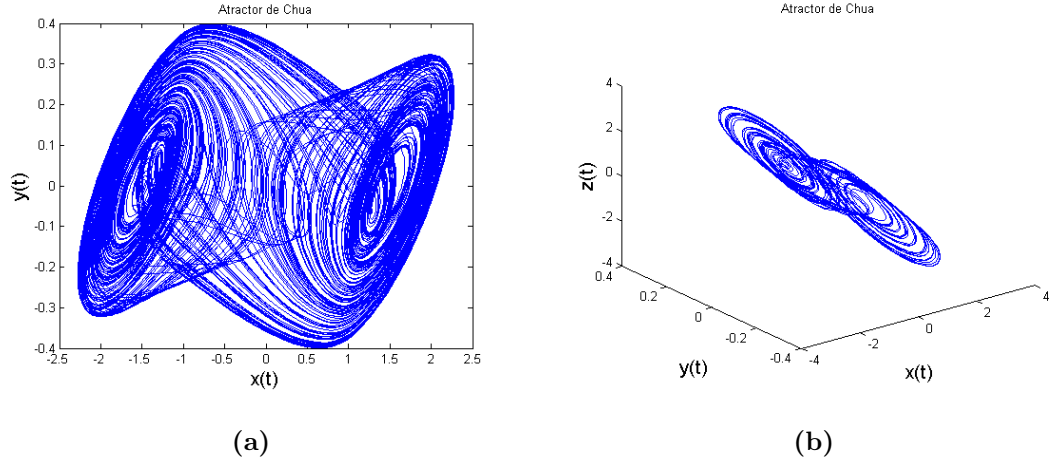


Figura 2.4: Simulación de un atractor extraño para el sistema de Chua, para los valores $a = 15$, $b = 25.58$, $m_1 = -0.71428$ y $m_2 = -1.14285$. (a) Soluciones $y(t)$ vs $x(t)$, (b) Soluciones $z(t)$ vs $y(t)$ vs $x(t)$.

2.4.1. Atractor generado por oscilador autónomo con retardo temporal

Hasta ahora hemos definido la dimensión mínima exigida para la generación de caos en sistemas tiempo-continuos, debido al teorema de Poincaré - Bendixon. Hasta este punto nos habíamos mantenido fieles a la definición en el momento de construir nuestros atractores caóticos. Sin embargo, extenderemos la discusión hasta sistemas unidimensionales tiempo-continuos capaces de producir bifurcaciones y caos, más estrictamente caos de alta dimensión. En 1975, Mackey y Glass modelaron sistemas fisiológicos caóticos usando ecuaciones diferenciales de primer orden con *retardo temporal* [23].

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau)) \quad (2.13)$$

El retardo aumenta la complejidad del sistema hasta el punto de introducir infinitas dimensiones. Definiendo τ como un intervalo de retardo, las soluciones a la ecuación diferencial serán tantas como valores conforman el intervalo, $\mathbf{F}_1(t')$, $\mathbf{F}_2(t')$, \dots . Luego, a cada solución se le asigna una ecuación de primer orden, con el retardo incorporado, y se determina así el número de grados de libertad del sistema. Como se mostró, podemos partir de una ecuación diferencial ordinaria, que es indicativo de un solo grado de libertad, y mediante la introducción de un intervalo de retardo, pre-

senciamos la aparición de muchos más grados de libertad. El sistema que nos queda es de alta dimensión y, si su naturaleza es caótica, generará caos de alta dimensión. Este procedimiento no implica la violación del teorema anteriormente comentado, simplemente muestra cómo obtener complejidad a partir de una ecuación de primer orden.

Capítulo 3

Dinámica Estocástica

Resulta importante extender el tema de los sistemas dinámicos discretos, definidos como mapas, mostrando la solución exacta del mapa logístico, con el fin de construir el mapa estocástico determinista, que está fundado en esta solución. El mapa logístico es uno de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales capaces de manifestar comportamiento caótico. En el Capítulo 2 fue introducida un preliminar de estos sistemas; dilatamos dicho esquema para mostrar cómo se genera la complejidad.

3.1. Mapas Caóticos Exactamente Solubles

Una condición indispensable para que un mapa unidimensional exhiba caos, es que éste debe conformar una función no-invertible, es decir, dado un valor futuro, x_{n+1} , existen dos o más posibles valores pasados, x_n , a escoger. A consecuencia de la no-invertibilidad, obtenemos carencia de predicción en funciones que se convierten en multivaluadas al hallar su inversa, consiguiendo diferentes soluciones x_n para un x_{n+1} , o muchos posibles pasados para un futuro. El caos es determinista porque podemos determinar lo que sucederá un valor tras otro, a la vez es impredecible debido a que no sabemos cuál será su evolución a largo plazo.

El mapa logístico cumple con los requisitos de caoticidad, se muestra gráficamente en la figura (3.1). Y su ecuación en diferencias está dada por,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (3.1)$$

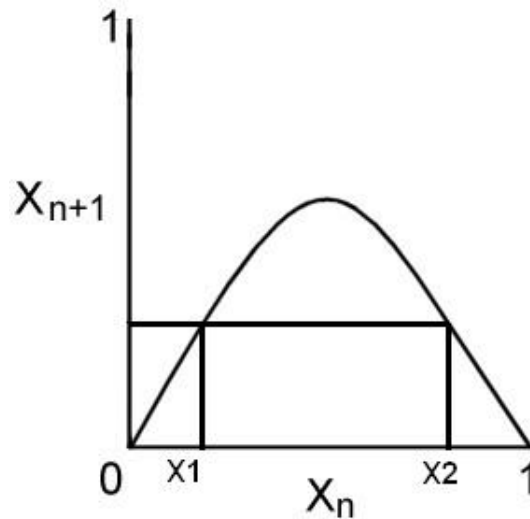


Figura 3.1: El mapa logístico, como función no-lineal y no-invertible.

En un parámetro fijo $\mu = 4$, con condiciones iniciales para el mapa $0 < x < 1$, el sistema exhibe comportamiento caótico. En este punto, el mapa sufre del proceso de Estiramiento y Plegado. En el estiramiento de una configuración inicial de condiciones iniciales, su evolución es ensanchada por el factor μx , ocasionando divergencia exponencial en trayectorias inicialmente cercanas; y luego las órbitas quedan acotadas en una región del espacio de fase por el factor $(1 - x)$, donde observamos el proceso de plegado.

Proposición 1:[12],[24],[25] La función $x_n = \text{sen}^2(2^n \theta)$ es solución del mapa logístico (3.1).

Dem:

Sea $x_n = (1/2)(1 - y_n)$ una transformación $\forall x_n, y_n \in [0, 1]$, tal que al sustituir en (3.1), se obtiene,

$$y_{n+1} = \left(\frac{\mu}{2}\right) y_n^2 + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

De la figura (3.1) observamos que el mapa logístico alcanza su cota superior, $x_{n+1} = 1$ en $x_n = 1/2$, entonces

$$x_{n+1} = 1 = \mu \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 1 = \frac{\mu}{4}$$

$$\therefore \mu = 4$$

Recordando que μx concede la amplificación de la configuración inicial, para $\mu = 4$, la amplificación alcanza su punto máximo, con estricta precisión, para $\mu < 4$, ya que en $x_n = 1/2$ se culmina la amplificación y comienza el plegado. Sustituimos este parámetro en nuestro desarrollo, obteniendo

$$y_{n+1} = 2y_n^2 - 1$$

Solución que es nuevamente transformada por $y_n = \cos(\pi z_n)$,

$$\begin{aligned} \cos(\pi z_{n+1}) &= 2[\cos^2(\pi z_n) - 1] \\ \Rightarrow \cos(\pi z_{n+1}) &= \cos(2\pi z_n) \\ \Rightarrow z_{n+1} &= 2z_n \end{aligned}$$

Iteramos el mapa para determinar su solución, tomando valores en n y sustituyendo progresivamente,

$$z_1 = 2z_0; z_2 = 2z_1 = 2^2 z_0; z_3 = 2z_2 = 2^3 z_0; \dots; z_n = 2^n z_0$$

$$\therefore z_{n+1} = 2z_n \Rightarrow z_n = 2^n z_0$$

Sustituyendo esta expresión en la transformación $y_n = \cos(\pi z_n)$, obtenemos $y_n = \cos(\pi 2^n z_0)$. Devolvemos el cambio hasta la variable inicial, x_n , mediante $x_n = (1/2)(1 - y_n)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi 2^n z_0)] \\ \Rightarrow x_n &= \text{sen}^2\left(\frac{\pi 2^n z_0}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cuando $n = 0$, entonces $x_0 = \text{sen}^2(\pi z_0/2) \Rightarrow z_0 = (2/\pi) \text{arc sen}(\sqrt{x_0})$. Sustituyendo z_0 en la ecuación (3.2), obtenemos la solución exacta al mapa logístico, como sigue

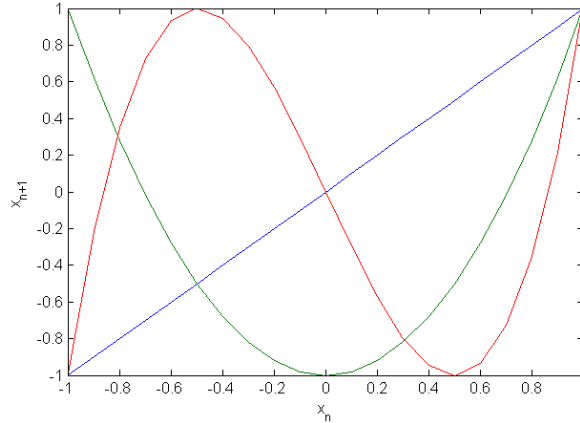


Figura 3.2: Simulación computacional de Mapas de Chebyshev: T_1 (color azul), T_2 (color verde) y T_3 (color rojo).

$$x_n = \text{sen}^2(2^n \text{arc sen}(\sqrt{x_0}))$$

$$\therefore x_n = \text{sen}^2(2^n \theta) \quad \blacksquare \quad (3.3)$$

donde $\theta = \text{arc sen}(\sqrt{x_0})$.

Esta solución [26] nos muestra todo tipo de dinámicas para varios valores de θ . Si $\theta = c\pi$, obtenemos un movimiento periódico cuando $c = p/q$, donde $c \in \mathbb{Z}$, con p y q como números primos. Si c es irracional, $c \in \mathbb{I}^*$, la solución es caótica.

3.2. Generalización de las Soluciones Exactas

La ecuación (3.3) puede generalizarse a la siguiente expresión [13],

$$x_n = \text{sen}^2(\mathcal{Z}^n \theta) \quad \forall \mathcal{Z} \in \mathbb{R} \quad (3.4)$$

El mapa logístico puede escribirse en la forma de polinomios de Chebyshev, $x_{n+1} = T_k(x_n)$, para $x_n, x_{n+1} \in [0, 1]$, iterado k veces sobre sí mismo. Algunos polinomios de Chebyshev son: $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$. Que gráficamente se observan en la figura 3.2, con especial énfasis en la curva T_2 .

El mapa de la ecuación (3.4) se puede parametrizar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \text{sen}^2(zt), \\x_n &= \text{sen}^2(t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

para $t = z^n\theta$. Cuando $z = k \quad \forall z \in \mathbb{Z}$, las funciones paramétricas (3.5) se pueden relacionar con los polinomios de Chebyshev de orden 2, T_2 ,

$$\begin{aligned}T_2(\text{sen } u) &= 2 \text{sen}^2 u - 1 \\ \Rightarrow \text{sen}^2 u &= \frac{T_2(\text{sen } u) + 1}{2}\end{aligned}$$

Generalizándolo a los polinomios de Chebyshev de orden k , T_k ,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{(-1)^{k+1}T_k(x) + 1}{2} \quad \forall k \geq 2, \\x_n &= \frac{(-1)^{1+1}T_1(x) + 1}{2} = \frac{x + 1}{2}\end{aligned}\tag{3.6}$$

Las ecuaciones (3.6) nos conducen a mapas no-invertibles que nos conceden la impredecibilidad propia de los mapas caóticos. Una vez que se generaliza \mathcal{Z} hasta valores fraccionarios, tal que $z \in \mathbb{Q}$, la función genera mapas multivaluados tanto hacia el pasado como hacia el futuro, que introduce bastante impredecibilidad en el sistema. Escribamos la ecuación (3.5) de forma paramétrica, para un valor de $z = p/q$ fraccionario, donde p y q son números primos,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \text{sen}^2(pt) \\x_n &= \text{sen}^2(qt)\end{aligned}\tag{3.7}$$

siendo $t = p^n q^{-(n+1)}$. Ecuaciones que son representadas por los polinomios de Chebyshev de orden p y q ,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{(-1)^{p+1}T_q(x) + 1}{2} \\x_n &= \frac{(-1)^{q+1}T_p(x) + 1}{2}\end{aligned}\tag{3.8}$$

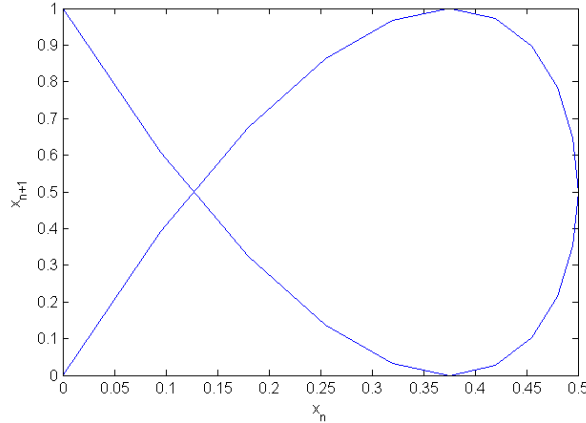


Figura 3.3: Simulación computacional de un Mapa de Chebyshev para $z = 3/2$.

Para mostrar el potencial de esta generalización, probemos con dos números primos $p = 3$ y $q = 2$, tal que $z = 3/2$, los polinomios de Chebyshev tendrán orden 3 y 2 como sigue,

$$x_{n+1} = \frac{4x^3 - 3x + 1}{2}$$

$$x_n = \frac{1 - x^2}{2}$$

Cuando despejamos x en la función x_n , obteniendo $x = \pm(1 - 2x_n)^{\frac{1}{2}}$, sustituyéndola en x_{n+1} , encontramos un mapa multivaluado,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[1 \pm (1 - 2x_n)(1 - 2x_n)^{\frac{1}{2}}]$$

Con solución exacta,

$$x_n = \text{sen}^2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^n \theta \right] \quad (3.9)$$

Como podemos observar, el mapa producido por un z fraccionario nos conduce a una mayor impredecibilidad, debido a que existen varias soluciones de x_n para un x_{n+1} dado, y viceversa. El mapa para $z = 3/2$ lo observamos en la gráfica 3.3.

3.3. Un Mecanismo para Producir Aleatoriedad

Teorema 1: [15],[16] La función $x_n = \text{sen}^2(\theta \mathcal{Z}^n)$, donde $\mathcal{Z} = p/q$, y $p > q > 2$ son números primos, genera una dinámica impredecible $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ tanto hacia el futuro como hacia el pasado de dicha secuencia.

Dem :

Si $\theta \equiv \pi(\theta_0 + q^m k)$ y $\mathcal{Z} = p/q$, donde k es un intervalo de números enteros que parametrizan a las distintas secuencias, y $m \in \mathbb{Z}$ que define la longitud de las secuencias, entonces la función se puede escribir como una sucesión de valores parametrizados por k ,

$$x_n^{(k,m)} = \text{sen}^2 \left[\pi(\theta_0 + q^m k) \left(\frac{p}{q} \right)^n \right] \quad (3.10)$$

donde,

$$\begin{aligned} x_n^{(k,m,s)} &= \text{sen}^2 \left[\pi \theta_0 \left(\frac{p}{q} \right)^n + \pi k p^n q^{m-n} \right] \\ \Rightarrow x_n^{(m,s)} &= \text{sen}^2 \left[\pi \theta_0 \left(\frac{p}{q} \right)^n \right] \quad \forall m \geq n \end{aligned} \quad (3.11)$$

para $m \geq n$, nos queda $\pi k p^n q^{m-n} \in \mathbb{Z}$. Debido a que esta secuencia es independiente de k , los valores siguientes $m + 1$ son idénticos. Con cualquier θ siempre tendremos la misma serie en el $m + 1$ valor, sin ramas, sin posibles alternativas. Luego, para un $n = m + 1$, ya hay dependencia de k ,

$$\begin{aligned} x_{m+1}^{(k,m)} &= \text{sen}^2 \left[\pi(\theta_0 + q^m k) \left(\frac{p}{q} \right)^{m+1} \right] \\ \Rightarrow x_{m+1}^{(k,m)} &= \text{sen}^2 \left[\pi \theta_0 \left(\frac{p}{q} \right)^{m+1} + \frac{\pi k p^{m+1}}{q} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) ya es incierta porque es dependiente de k . Sólo podremos determinar el siguiente valor de la secuencia si conocemos θ . Con el intervalo k hemos añadido más grados de libertad, por lo que nuestro sistema genera una secuencia impredecible hacia el pasado y hacia el futuro. ■

Corolario 1: [27] Para la secuencia de $n = m + 1$ valores generada por la función $x_n = \text{sen}^2(\theta \mathcal{Z}^n)$, si $\mathcal{Z} = e$ (el número irracional de Euler), el siguiente valor puede tomar infinitos posibles valores.

Dem :

Todo número irracional puede expresarse como cociente de dos números, tal que su proporción sea infinita no-periódica. Sabemos que,

$$e = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

Luego, definimos

$$\begin{aligned} e_l &= \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l \\ \Rightarrow e_l &= \frac{(1+l)^l}{l^l} \\ \Rightarrow e_l &= \frac{p_l}{q_l} \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $p_l = (1+l)^l$ y $q_l = l^l$. El número e_l se aproxima al número de Euler cuando $l \rightarrow \infty$, i.e., cuando $q_l \rightarrow \infty$. Por tanto, el valor siguiente tendrá $q_l = l^l$ posibles valores. ■

Este último resultado nos muestra un mapa de retorno bastante distinto de los hasta ahora estudiados, donde el número de soluciones x_n para un x_{n+1} dado, tiende a infinito y viceversa. Los valores generados son aleatorios, independientes, aunque no distribuidos uniformemente en el espacio de fases. Si deseamos obtener un mapa que acceda a todos los estados posibles con igual probabilidad, definido como ergodicidad, entonces tendremos que realizar una transformación adicional, $y_n = \text{arc sen}[\sqrt{x_n}]$, con el fin de que la densidad de probabilidad resulte constante, $\rho(y_n) = \text{constante}$.

Capítulo 4

Análisis en Series de Tiempo

Diferentes métodos para caracterizar un conjunto de datos [8], provenientes de señales continuas, serán descritos en esta sección. La importancia de realizar dichos estudios resulta vital para formalizar el grado de aleatoriedad presente en sistemas que estudiamos en el capítulo 3. Por esta razón extenderemos las definiciones para comprender las bases para analizar las gráficas obtenidas. Todas las técnicas son empleadas con el software TISEAN [28]-[30].

4.1. Espectro de Potencias

La serie de Fourier nos permite expresar cualquier función continua en términos de funciones armónicas. La transformada de Fourier nos muestra el número de frecuencias características del sistema, que dependerá del número de armónicos necesarios para estructurarla, i.e., una función senoidal tendrá por lo más una sola frecuencia característica, una 2-cuasiperiódica tendrá dos frecuencias características; ya las funciones caóticas conceden un espectro amplio de frecuencias. La ecuación descriptiva,

$$Potencia = |x_k|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N X_n e^{2\pi i k n / N} \right|^2 \quad (4.1)$$

donde x_k es la transformada rápida de Fourier, X_n es la función compuesta a la que le hacemos el análisis, N es el número total de medidas en la serie de tiempo

y k_n es un valor representativo de la frecuencia, tal que $k_n = f_k \Delta t N$, siendo Δt el intervalo de muestreo.

Una diferencia importante entre el movimiento periódico y el caótico, en el espectro de potencias, es la manera en que se forma la curva, observamos que para los sistemas periódicos el espectro se muestra discreto en el sistema caótico aparece una curva continua.

4.2. Función de Autocorrelación

También llamada correlación lineal. Permite estimar la correlación, o el nivel de dependencia, que hay entre los valores pasados y futuros de una serie temporal, que posean una relación lineal entre sí, es decir, la serie temporal está ordenada. Si el valor promedio de autocorrelación es cero, indica que las variables son independientes, si es distinto de cero, tenemos correlación entre las variables estudiadas. Esta función sólo toma en cuenta las correlaciones lineales, las correlaciones entre variables no-linealmente relacionadas son desestimadas. Presentamos una introducción al análisis, mas no será útil en este trabajo, porque su alcance es ineficiente en sistemas no-lineales.

4.3. Información Mutua

Comprende, a diferencia de la autocorrelación, las correlaciones no-lineales (Fraser y Swinney (1986)). En los sistemas complejos podemos observar variables fuertemente relacionadas entre sí. Cuando obtenemos información mutua igual a cero, estamos en presencia de variables independientes unas de otras; en el dominio de la dinámica estocástica. El resto de los resultados muestran niveles de correlación dependientes de la complejidad. Su cálculo tiene,

$$I_\epsilon(\tau) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \ln p_{ij}(\tau) - 2 \sum_i p_i \ln p_i \quad (4.2)$$

Para emplear esta técnica se implementa un histograma de resolución ϵ que haga

un análisis de distribución de probabilidad de los datos. Con esta información se estiman las probabilidades que aparecen en la ecuación. p_i es la probabilidad en que la señal asume un valor dentro de la i -ésima columna del histograma. p_{ij} es la probabilidad de que la serie de tiempo $x(t)$ esté en la columna i , y $x(t + \tau)$ en la columna j , con τ como el tiempo de retardo, del que más tarde comentaremos extensamente.

4.4. Falsos Vecinos Cercanos

Este método permite estimar la dimensión mínima presente en un sistema dinámico del cual sólo poseemos una serie de tiempo, no el objeto en el espacio de fase. La naturaleza del nombre proviene de que si la dimensión incrustada es menor que la mínima del sistema, las vecindades de los puntos, pertenecientes a la primera serie temporal, no se proyectarán de forma semejante en la segunda serie temporal, construida con el retardo, que pasan a ser *falsos vecinos*. Por esto, cuando no existen falsos vecinos, $R_i = 0$, observamos la verdadera dimensión de nuestro sistema.

Estas vecindades son esbozadas en el espacio de fase como una aproximación geométrica a un estado. Mientras más pequeña sea la vecindad, más precisión sobre el conocimiento óptimo de dicho estado. Para adquirir los datos del sistema, se reconstruye el espacio de fase y se hace un corte en forma de malla cuadrículada en el objeto, con el fin de tomar las cuadrículas de lados $\epsilon \times \epsilon$, definida como ϵ -vecindad, formando así un dominio de datos (que son los estados) para el conjunto de los ϵ . Hallado con,

$$R_i = \frac{|x_{i+1} - x_{j+1}|}{\|x_i - x_j\|} \quad (4.3)$$

donde x_i es la serie de tiempo dada y x_j es el vecino cercano en un espacio m -dimensional, con $\|x_i - x_j\|$ que es la distancia entre ambos y x_{i+1} los siguientes valores de la sucesión.

4.5. Reconstrucción de Atractores por el Método de Retardo Temporal

Las observaciones experimentales frecuentemente nos conducen a series de tiempo que por si solas no podemos representar en el espacio de fase, es decir, no nos es permitido contemplar el objeto que constituyen su conjunto intrínseco de estados. Con el fin de realizar este estudio, usaremos la reconstrucción del espacio de fase introduciendo retardos temporales en la serie de tiempo. La técnica (teorema de Takens) consiste en definir un vector $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$, el retardo es aplicado en cada una de sus componentes

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = x_1(t) \\ x_2(t) = x_1(t - \tau) \\ x_3(t) = x_1(t - 2\tau) \\ \vdots \\ x_m(t) = x_1(t - m\tau) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

El valor de τ se escoge en conjunto con m , que se define como la dimensión mínima del sistema. Los métodos frecuentemente usados para hallar la dimensión y el retardo son: la información mutua y los falsos vecinos cercanos. La información mutua ayuda a encontrar un τ , suponiendo que a medida que $I_\epsilon(\tau)$ tienda a cero, nuestro τ debe ser cada vez mayor, con el fin de que sea necesario expandir los grados de libertad del objeto en el espacio de fase, teniendo una dimensión fija. Los falsos vecinos cercanos son útiles para determinar esta dimensión que debemos incrustar a la serie temporal.

4.6. Sección de Poincaré

Con este mapa se pueden analizar los sistemas tiempo-continuos, o los flujos de datos. Se trata de un hiperplano $(M-1)$ -dimensional intersectado de forma conveniente entre las órbitas de un espacio de fase M -dimensional. Una buena escogencia nos lleva a un mayor número de cortes que éste hace sobre las órbitas, minimizando el intervalo

de tiempo entre punto y punto observados en el hiperplano. El mapa se utiliza para conocer la dinámica escondida que hay en los espacios de fase congestionados, muy complejos.

4.7. Exponente Máximo de Lyapunov

La sensibilidad a las condiciones iniciales puede medirse a través del exponente de Lyapunov. Si tenemos dos condiciones iniciales separadas por una distancia $X_{n_1} - X_{n_2} = \delta_0 \ll 1$ y ahora estudiamos esta pequeña separación pasado algún tiempo Δn , obtendremos una nueva separación $X_{n_1+\Delta n} - X_{n_2+\Delta n} = \delta_{\Delta n}$, un tiempo después. La divergencia o convergencia exponencial entre trayectorias cercanas se expresa como $\delta_{\Delta n} = \delta_0 e^{\lambda \Delta n}$. Los resultados están estandarizados de la siguiente manera,

Tabla 4.1: Máximo exponente de Lyapunov

| Tipo de movimiento | Máximo exponente de Lyapunov |
|----------------------|------------------------------|
| Punto fijo estable | $\lambda < 0$ |
| Ciclo límite estable | $\lambda = 0$ |
| Caos | $0 < \lambda < \infty$ |
| Ruido | $\lambda \rightarrow \infty$ |

Valores obtenidos de calcular,

$$X(\Delta n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln \left(\frac{1}{|\Lambda(X_{n_0})|} \sum_{X_n \in \Lambda(X_{n_0})} |X_{n_0+\Delta n} - X_{n+\Delta n}| \right) \quad (4.5)$$

para N como el número total de medidas de la serie de tiempo, Λ es la vecindad de X_{n_0} , que es un punto arbitrario en el espacio de fase reconstruido, con diámetro ϵ y X_n es otro punto arbitrario.

4.8. Dimensión de Correlación

Permite cuantificar la similitud que tiene el nuevo objeto geométrico en el espacio de fase (reconstruido) formado por el conjunto de estados del sistema, respecto de objetos con dimensión entera conocida: una colección finita de puntos es cero dimensional, una línea tiene dimensión uno, una superficie dos, etc. De esta manera se estima la dimensión que ellos ocupan en el espacio de fase Obteniéndose de la ecuación,

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \ln \epsilon} \ln \left[\frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \right] \quad (4.6)$$

si el número de muestras N tiende a infinito, es porque el tamaño de las ϵ -vecindades tiende a cero, $\epsilon \rightarrow 0$, garantizando que estamos tomando aproximadamente un solo estado, que viene a ser un punto matemático cualquiera. Luego de este muestreo preciso del objeto geométrico, se realizará la comparación antes expuesta. Tenemos Θ como la función escalón de Heaviside, $\Theta(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $\Theta(x) = 1$ si $x > 0$. Las sumatorias cuentan un par de puntos (x_i, x_j) que es menor que ϵ .

4.9. Entropía

La entropía describe la cantidad de desorden en un sistema. En este punto, generalizamos la definición hasta una caracterización de la cantidad de información almacenada en distribuciones de probabilidad. Con esta distribución de probabilidad determinamos qué tanto sabemos de un sistema. Siendo ésta una generalización importante, ya que lo que no sabemos es especificado como desorden. A medida que tenemos más información del sistema, es posible hacer predicciones del futuro, en tanto se sepa más de su pasado. Resultados provenientes de la teoría de la información de Shannon, Renyi y Kolmogorov, desde 1940 hasta 1950. La entropía que calcularemos es la de correlación, que está relacionada con el conjunto de probabilidades el número de ϵ -vecindades del objeto reconstuido.

El estudio se realiza con la siguiente ecuación,

$$h_2 = \ln C(2, \epsilon, \tau) - 2 \ln C(1, \epsilon) \quad (4.7)$$

donde

$$\ln C(2, \epsilon, \tau) = \ln \left[\frac{2}{(N - \tau)(N - \tau - 1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1+\tau}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \right]$$

y

$$\ln C(1, \epsilon) = \ln \left[\frac{2}{N(N - 1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|) \right]$$

La relación emplea los mismos elementos de cálculo para determinar la dimensión de correlación, y le agrega un elemento de tiempo, τ que expresa el espacio de tiempo cubierto por el conjunto de probabilidades cuando la dimensión del objeto reconstruido aumenta.

Marco Metodológico

Capítulo 5

Circuitos Electrónicos para la Generación de Caos de Baja Dimensión

La computación analógica es una poderosa herramienta para modelado de sistemas mediante la electrónica [31]. Permittiéndonos realizar complicados cálculos matemáticos partiendo de una serie de técnicas que describiremos en este capítulo. De esta forma, es posible encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales de forma experimental.

5.1. Computación Analógica

5.1.1. Amplificador Operacional

El diseño de los circuitos empleados en esta tesis, para generar caos, están basados en un dispositivo llamado amplificador operacional. Su nombre se deriva del hecho de que tiene la capacidad de hacer amplificación de alta ganancia, además de poder realizar operaciones matemáticas de todo tipo. Está alimentado por tensión directa positiva y negativa, lo que le concede la posibilidad de tener salidas de tensión DC positivas o negativas.

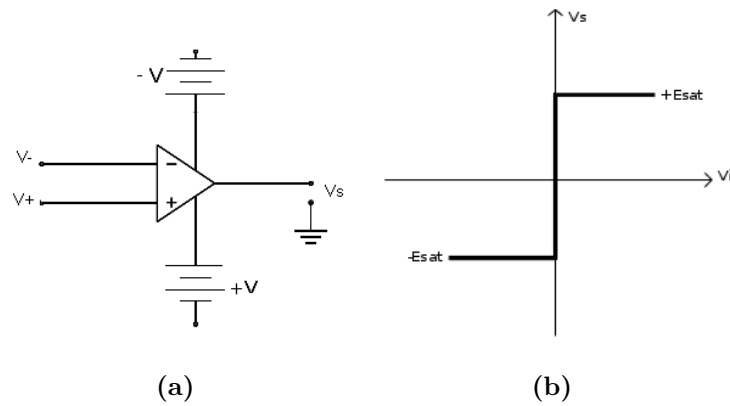


Figura 5.1: (a) Circuito del amplificador operacional en lazo abierto. (b) Función de transferencia del amplificador operacional.

Su función de transferencia está construida por tres regiones: (1) La región negativa de saturación, que aparece cuando el voltaje aplicado es alto y negativo, obteniendo una salida aproximadamente constante en $-E_{SAT}$; (2) una región lineal que implica que la salida varía linealmente con la entrada y (3) una región positiva de saturación, para un voltaje aplicado positivo y muy alto, con salida constante en E_{SAT} .

El dispositivo es considerado como un amplificador de voltaje, señales invertidas son incluidas. Su ancho de banda es lo suficientemente grande como para evitar la atenuación de aquellos componentes de alta frecuencia que tiene cualquier onda entrante. La corriente de entrada es despreciable en la primera etapa del amplificador, debido a que la impedancia de entrada es muy alta. Baja impedancia en la salida permite que el voltaje resultante no se vea afectado por resistencia alguna. La diferencia de potencial entre los terminales de entrada es cero, de forma tal que $v_+ = v_-$, proporcionándole al dispositivo un cortocircuito virtual, [32], [33].

El amplificador operacional puede operar en lazo abierto, donde no existe realimentación, la salida será la resta de sus entradas multiplicada por un factor, $v_{s\pm} = \pm G(v_+ - v_-)$. Si a la entrada positiva se le aplica una tensión muy alta, tendremos v_{s+} , por lo contrario, V_{s-} . En lazo cerrado tenemos realimentación en el circuito, que generalmente está enfocada en la realimentación negativa, teniendo un efecto estabilizador sobre cualesquiera perturbaciones que puedan darse en su entrada, respondiendo en forma contraria al mismo. Contrario al propósito de la realimenta-

ción positiva, cuyo efecto consiste en amplificar la perturbación de entrada de forma exponencial, impidiendo que la salida se mantenga constante en todo momento.

5.1.2. Operaciones matemáticas

La ley de Kirchhoff es aplicada en un punto en el que la suma algebraica de corrientes es igual a cero. La información nos la proporciona el punto donde está el cortocircuito virtual y la corriente entrante al dispositivo es cero, desde el que determinaremos la función de transferencia para cada configuración, ver tabla 5.1.

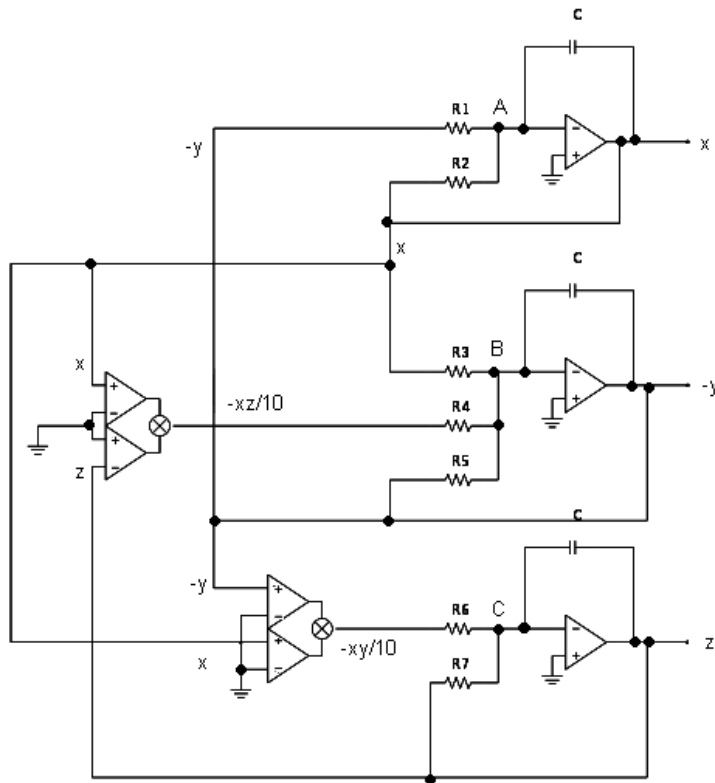
Tabla 5.1: Operaciones matemáticas con realimentación negativa.

| Operación | Función de transferencia | Circuito |
|----------------------|--|----------|
| Sumador | $v_s = - \left(\frac{R_F}{R_1} v_1 + \frac{R_F}{R_2} v_2 \right)$ | |
| Restador | $v_s = - \left(\frac{R_2}{R_1} \right) (v_1 - v_2)$ | |
| Multiplicador (C.I.) | $v_s = \frac{1}{\Phi} (v_{x1} - v_{x2})(v_{y1} - v_{y2})$ | |
| Integrador | $v_s = - \frac{1}{RC} \int_0^t v_{in}$ | |

5.2. Caos con Computación Analógica

5.2.1. Circuito para el atractor de Lorenz

El circuito empleado para el atractor de Lorenz se muestra en la figura (5.2).



(a)

Figura 5.2: Circuito para el atractor de Lorenz. (a)Esquema usando amplificadores TL082, multiplicadores AD734, resistencias: $R_1 = 100K\Omega$, $R_2 = 100K\Omega$, $R_3 = 37.7K\Omega$, $R_4 = 10K\Omega$, $R_5 = 1M\Omega$, $R_6 = 10K\Omega$, $R_7 = 374\Omega$, condensadores $C = 1000pF$, [34].

Con el fin de entender exactamente cómo se usa este poderoso método de computación analógica, extenderemos el análisis a una parte de este circuito. Encontrándonos en el nodo-A del circuito, justo en la figura (5.2.a).

Debido a que la resistencia de entrada al amplificador es muy grande, las corrientes por las entradas son nulas; propiedad que resulta útil en el instante de aplicar la ley de Kirchhoff. Entonces, la suma algebraica de corrientes en ese nodo es cero. Si tenemos dos ramas: $i_1 - i_2 = i_f$. Por ley de Ohm:

$$\frac{v_{s_1} - v_a}{R_1} + \frac{-v_{s_2} - v_a}{R_2} = C \frac{d}{dt}(v_a - v_{s_1})$$

Haciendo el cambio $v_a = -v_{s_1}/G$, nos queda

$$\frac{1}{R_1 C} \left(v_{s_1} + \frac{v_{s_1}}{G} \right) + \frac{1}{R_2 C} \left(-v_{s_2} + \frac{v_{s_1}}{G} \right) = \frac{1}{G} \frac{dv_{s_1}}{dt} - \frac{dv_{s_1}}{dt}$$

Para un valor de la ganancia alto, $G \rightarrow \infty$, por lo tanto, $v_{s_1}/G \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{1}{R_1 C} v_{s_1} - \frac{1}{R_2 C} v_{s_2} = -\frac{dv_{s_1}}{dt}$$

Con la finalidad de obtener las ecuaciones adimensionales que Lorenz nos presenta, realizamos los siguientes cambios, partiendo de un R_n teórico y $R_1 = R_2$,

$$\Rightarrow \frac{R_n}{R_1} v_{s_1} - \frac{R_n}{R_1} v_{s_2} = -R_n C \frac{dv_{s_1}}{dt}$$

$$\Rightarrow \varsigma v_{s_1} - \varsigma v_{s_2} = -\frac{dv_{s_1}}{d(t/R_n C)} = -\frac{dv_{s_1}}{d\tau} = -\dot{v}_{s_1}$$

Definiendo $v_{s_1} = x$ y $v_{s_2} = y$,

$$\Rightarrow \varsigma y - \varsigma x = \dot{x} \quad \blacksquare$$

La segunda ecuación de Lorenz se halla con el mismo análisis, salvo que existe un elemento multiplicativo entre dos voltajes, a los que hemos definido como x y z , estos son multiplicados por el circuito integrado, y divididos por un factor de depende del mismo, pero que es tomado en cuenta al momento de diseñar el atractor. Esta multiplicación resultante es sumada por ley de Ohm junto al resto de los voltajes. De igual manera para llegar a la tercera ecuación. Como vemos, este mecanismo es totalmente conveniente para resolver ecuaciones diferenciales lineales y no-lineales, permitiendo llevar las operaciones matemáticas hasta un conjunto de componentes electrónicos que se combinan para llevar a cabo una tarea específica.

5.3. Caos con Funciones Definidas a Trozos

Sistemas autónomos son frecuentemente diseñados empleando dos bloques energéticos con los que se generará su dinámica característica [35],[36], por ende, resulta fundamental describir explícitamente los procesos que nos llevan a tales construcciones. El bloque pasivo está presente tanto en sistemas autónomos, como en forzados. Sin embargo, el bloque activo constituye un sello para sistemas autónomos. Esto se debe a que un elemento activo cumple con el trabajo de suministrar energía al sistema sin necesidad de establecerse como una perturbación que lo obligue a comportarse al ritmo de una fuerza externa, es un elemento intrínseco y forma parte de la dinámica producida.

En los términos de diseño de circuitos, este elemento yace en los resistores negativos, $R < 0$, donde la pendiente de su curva característica $i - v$ es negativa. Esto significa que el circuito tiene su propia fuente de energía interna, que supera a todos los elementos de disipación y, entonces, entrega el exceso de energía al resto del sistema. Los elementos pasivos son todos aquellos cuya resistencia interna sea positiva $R > 0$, donde el funcionamiento se basa en consumir una parte de la energía, proveniente de otro elemento, y la otra parte se disipa en forma de calor.

5.3.1. Circuito para el atractor de Chua

Este circuito fue diseñado en la forma anteriormente descrita. La curva característica del resistor no-lineal puede generarse con un circuito que emplee un amplificador operacional realimentado por sus terminales positivos y negativos [37], como se muestra en la figura 5.4.a.

Como puede verse, el conversor de resistencia negativa tiene dos etapas que, al juntarse, se transforman en la curva no-lineal esperada (ver la figura 4.5.6). Esta resistencia negativa es el bloque activo de nuestro sistema. La particularidad de esta curva está en la presencia de estadios donde la pendiente es positiva y otro donde es negativa, formándola como una función definida a trozos; lo que permite la aparición de regímenes de resistencia positiva alternados con resistencia negativa, alternando

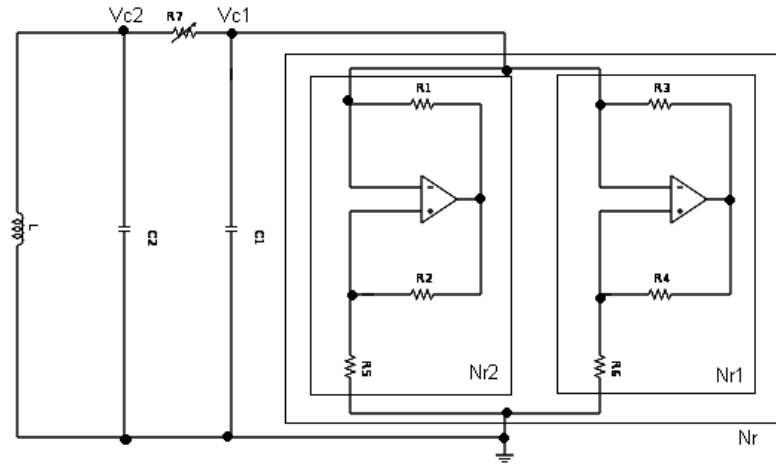


Figura 5.3: Circuito para el atractor de Chua. (a) Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 2.2K\Omega$, $R_2 = 22K\Omega$, $R_3 = 3.3K\Omega$, $R_4 = 220\Omega$, $R_5 = 220\Omega$, $R_6 = 22K\Omega$, un potenciómetro $R_7 = 2K\Omega$, condensadores $C_1 = 10nF$, $C_2 = 100nF$ y una inductancia de $L = 18mH$ [37].

la dinámica de este elemento entre activo y pasivo. A lo que se le conoce como el procedo de Estiramiento y Plegado.

Este proceso fue introducido en el capítulo 3 para mapas, ahora extenderemos más su funcionamiento para circuitos no-lineales. El estiramiento y plegado [17] se exhibe en términos de los procesos de la curva. En el estiramiento modelamos a una resistencia negativa, como elemento que estira la configuración inicial, interpretándose como la divergencia exponencial que presentan condiciones iniciales cuya separación era en principio infinitesimal. Ya en el plegamiento, contemplamos a la resistencia positiva, es la presencia de la disipación de energía; mostrándose como aquéllo que mantiene a las trayectorias confinadas. El diagrama ilustrativo se muestra en la figura 5.5.

5.3.2. Circuito para el atractor de Rössler

El circuito implementado para observar el atractor de Rössler en este trabajo puede verse en la figura (5.6). Los principios que nos llevan a colocarlo en esta sección parten de que el diseño está constituido por una función definida a trozos, que es aportada por la función característica del diodo presente en el montaje. El análisis se hace partiendo de las técnicas en computación analógica, agregándole tan sólo al

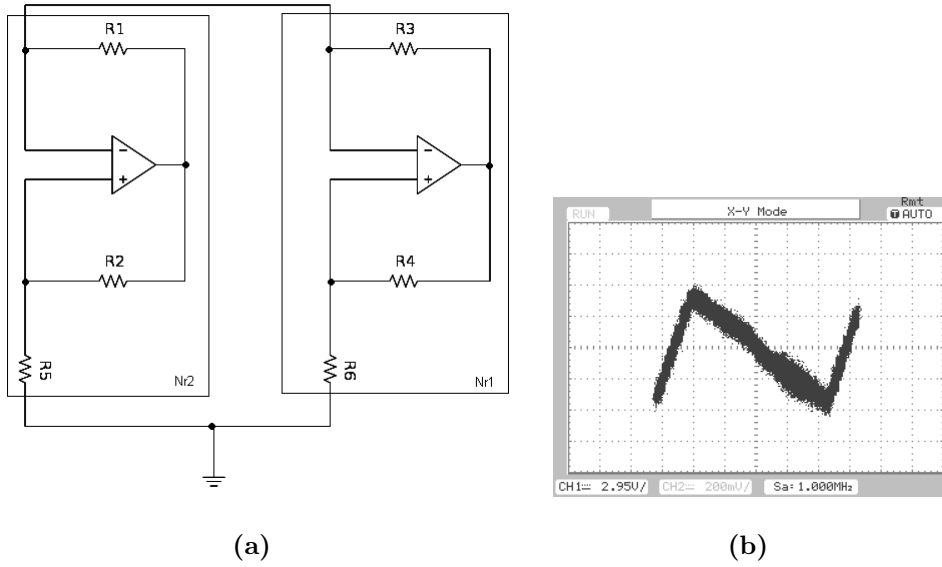


Figura 5.4: (a)Circuito electrónico para generar una función definida a trozos, (b) Función característica.

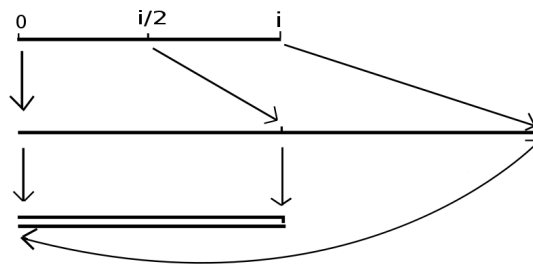


Figura 5.5: Proceso estiramiento-plegamiento. Una configuración inicial al intervalo $[0, i]$.

final un elemento no-lineal en la última ecuación diferencial. Este circuito nos lleva a un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales, distintas de las propuestas por Otto Rössler [ref]. Para $g(x) = 0$ si $x \leq 3$ y $\mu(x - 3)$ si $x > 3$ [38].

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\alpha(\delta x + \beta y + z) \\
 \dot{y} &= \alpha(x + \gamma y - \varepsilon y) \\
 \dot{z} &= \alpha[g(x) - z]
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

5.3.3. Circuito para el atractor de Duffing

Un sistema de ecuaciones que nos muestra al atractor de Duffing sin necesidad de una fuerza externa es usado para generar el caos de Duffing. El esquema para la fuente de energía es exhibido en la figura (5.7). La realimentación positiva da paso para la divergencia exponencial a condiciones iniciales; lo que nos lleva a concluir que éste hace las veces de elemento activo. Luego, al sustituir la fuerza externa por elementos con realimentación negativa, se está cambiando una fuerza periódica, no divergente, por un sistema desde que obliga a las órbitas a mantenerse acotadas, obteniendo un sistema autónomo. Este circuito nos lleva a otro de ecuaciones diferenciales que se expresan de la siguiente forma [39],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + by - kz \\ \dot{z} &= \omega_f(y - z)\end{aligned}\tag{5.2}$$

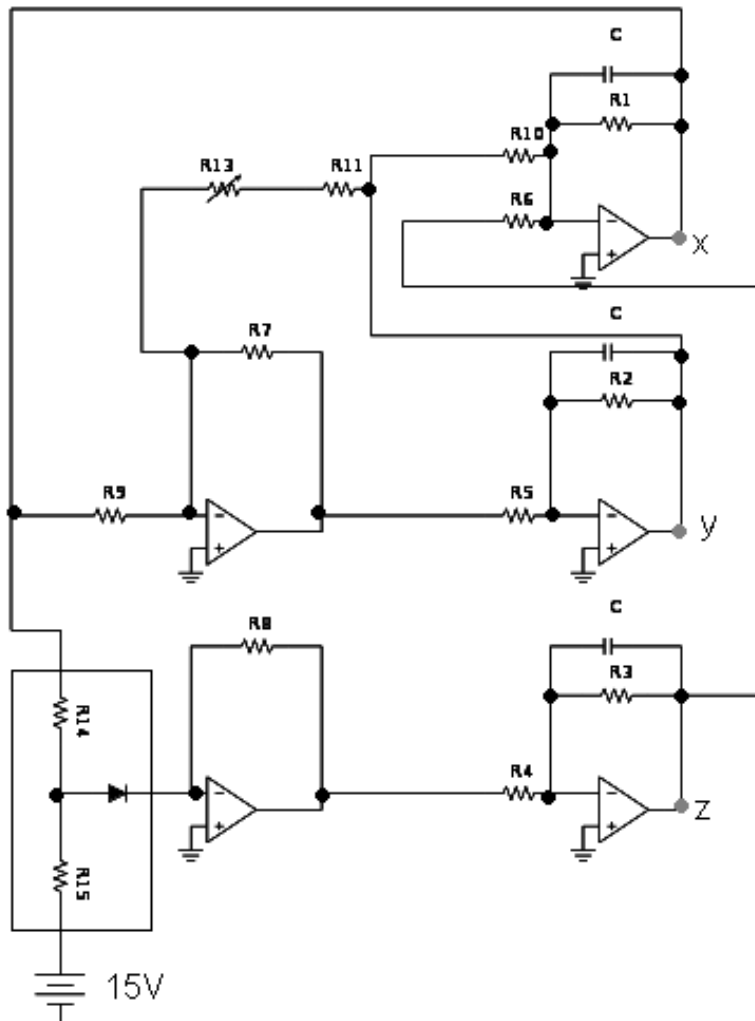


Figura 5.6: Circuito para el atractor de Rössler. (a)Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 2M\Omega$, $R_2 = 5M\Omega$, $R_3 = 100K\Omega$, $R_4 = 100K\Omega$, $R_5 = 100K\Omega$, $R_6 = 100K\Omega$, $R_7 = 10K\Omega$, $R_8 = 150K\Omega$, $R_9 = 10K\Omega$, $R_{10} = 200K\Omega$, $R_{11} = 47K\Omega$, $R_{14} = 10K\Omega$, $R_{15} = 63K\Omega$, un potenciómetro $R_{13} = (1 - 200)K\Omega$, condensadores $C = 0.001\mu F$, y un diodo 1N4148 .

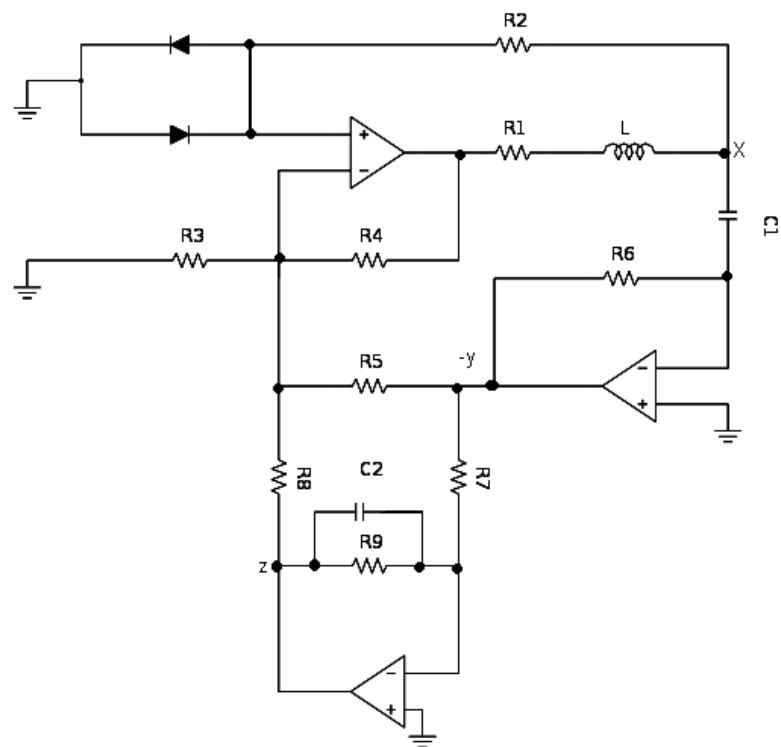


Figura 5.7: Circuito para el atractor de Duffing. (a) Esquema usando amplificadores TL082, resistencias: $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 30K\Omega$, $R_4 = 10K\Omega$, $R_5 = 75K\Omega$, $R_6 = 820\Omega$, $R_7 = 10K\Omega$, $R_8 = 20K\Omega$, $R_9 = 10K\Omega$, condensadores $C_1 = 20nF$, $C_2 = 470nF$, $L = 19mH$ variable y un diodo 1N4148 .

Capítulo 6

Circuito Electro-óptico para la Generación de Caos de Alta Dimensión

6.1. Elementos del Circuito Electro-óptico

6.1.1. Diodo Láser

Consiste en un láser de estado sólido, láser semiconductor, que produce un haz de luz infrarroja por medio de la amplificación de fotones en la unión $p-n$, generada por una corriente eléctrica. Posee una estructura heterogénea donde los electrones y los huecos pueden recombinarse, liberando fotones en el acto. Estos láseres requieren de una corriente umbral I_0 necesaria para que la emisión de fotones ocurra. Contienen un láser resonador para que la radiación generada pueda circular y pasar por el medio de ganancia, en donde las pérdidas ópticas son compensadas. Al dispositivo empleado para este experimento se le conoce como Láser Realimentado Distribuido (DFB), donde el resonador consiste en una estructura periódica que permite el cumplimiento de la ley de Bragg.

La estructura periódica es una rejilla óptica de Bragg, que es un dispositivo transparente con una variación periódica de su índice de refracción, presentando una gran

reflectividad cuando la longitud de onda del haz está cercana a la longitud de onda que cumple la condición de Bragg. Se le conoce como Láser de realimentación-distribuida porque contiene un reflector de forma distribuida en el rango de longitud de onda de acción del láser, además de contener un medio de ganancia, para compensar las pérdidas. La reflexión ocurre en muchos puntos a lo largo de la rejilla, lo que genera bastantes haces reflejados en un espacio compacto, donde el ancho del espectro de potencias es tan estrecho que la salida de la luz es prácticamente monocromática [40].

La longitud de onda emitida es determinada por el ancho de banda de la energía necesaria para enviar a los electrones a la banda de conducción desde la banda de valencia. En la banda de conducción decaerán rápidamente a un nivel menor de energía, liberando fotones en el proceso. Por lo que la longitud de onda depende del material semiconductor y de la cantidad de energía requerida para pasar de una banda a la siguiente. La longitud de onda del láser empleado es aproximadamente 1555nm [41].

6.1.2. Modulador de intensidad electro-óptico Mach-Zehnder

Los dispositivos electro-ópticos alternan las propiedades ópticas del material mediante un voltaje aplicado de una forma controlada. La permitividad se modifica cuando se cambian las propiedades ópticas, modificando así algún parámetro de la luz que pasa, tal como su fase, amplitud, frecuencia, polarización o posición. Para diseñar estos dispositivos es necesario entender cómo la luz se propaga en el cristal elegido [42].

Los cristales empleados para generar este efecto son anisotrópicos, cuyas propiedades varían con la dirección; de tal manera que la luz se ve afectada por el material cuando le atraviesa en distintas direcciones, puesto a que su índice de refracción cambia. En este sentido, la velocidad de fase disminuye respecto a la velocidad de la luz a medida que ésta pasa por diferentes lugares en el cristal, $v_f = c/\sqrt{\epsilon\mu}$. En este caso, un voltaje aplicado genera un campo eléctrico que ocasiona una redistribución de las cargas ligadas, creando una leve deformación en la estructura cristalina, por la que pasará el haz de luz, sintiéndose afectado por dicha deformación.

El hecho de que el material sea anisotrópico indica que éste ocasionará una doble refracción cuando un haz de luz incide sobre él, definido como birrefringencia. En este caso, el haz está polarizado (láser), obteniendo dos componentes de polarización con diferentes números de onda, es decir, el campo de desplazamiento eléctrico no está en paralelo con el campo eléctrico aplicado, debido a que el desplazamiento es afectado por el medio, $\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E}$, por el tensor de permitividad. Asimismo, ocurre un desprendimiento o cambio de la birrefringencia natural, debido a que la dirección del vector de Poynting y la dirección de propagación de la onda, difieren.

El efecto electro-óptico lineal (efecto de Pockels)

El efecto electro-óptico lineal es la modificación del índice de refracción en un medio, a causa de un campo eléctrico aplicado, afectando su permitividad. En estos casos, la permitividad se representa con un tensor que describe cómo un campo eléctrico afecta y es afectado por un medio. La permitividad está determinada por la tendencia de un material a polarizarse ante la aplicación de un campo eléctrico [40].

Moduladores electro-ópticos

Dispositivo con operación basada en un cambio eléctricamente inducido en el índice de refracción, o el cambio de birrefringencia natural. Dependiendo del dispositivo, se pueden variar ciertas propiedades de la luz: fase, polarización, amplitud, frecuencia o dirección de propagación. El dispositivo está constituido por celdas de pockels, que son cristales electro-ópticos con electrodos adheridos a él, desde los que se pueden aplicar voltajes variables que modulan las propiedades de los haces. Las celdas de pockels empleadas son transversales, donde el campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación del haz de luz.

En esta tesis se moduló la amplitud de un haz mediante el interferómetro Mach-Zehnder. La luz polarizada, proveniente de un láser, viaja a través de una fibra óptica hasta el punto de ser dividida por un divisor de haz, construido con un acoplador de fibra que redistribuye al haz entrante en dos direcciones, dividiéndolo en 50% de su intensidad inicial, luego cada haz dividido es enviado por dos guías de onda separadas, que conforman las dos ramas del interferómetro Mach-Zehnder. En una

de las ramas existe una configuración moduladora de fase dependiente del campo eléctrico. La modulación de fase se basa en un modulador de fase transversal, el cual solamente va a producir un cambio de fase con el campo eléctrico aplicado, campo del que depende el índice de refracción de las guías de ondas fabricadas con el cristal anisotrópico, que está basado en $LiNbO_3$ (Niobatio de Litio) [43].

Para obtener la salida en potencia del modulador, modelaremos el funcionamiento del mismo. La intensidad del campo eléctrico del haz entrante está dado por

$$E_0 = \sqrt{P_0} e^{i\phi_0} \quad (6.1)$$

con P_0 es la potencia óptica entrante al modulador. Luego del divisor de haz, por cada rama pasa un campo eléctrico de $E_0/2$. Cuando el campo eléctrico externo aún no ha sido aplicado, cada rama acumula una fase debida a la longitud de las partes,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\eta_e L}{\lambda}$$

donde η_e es el índice de refracción no modificado del $LiNbO_3$, L es la longitud de cada rama y λ es la longitud de onda de la luz entrante. Las dos ondas se combinan constructivamente en la Y-rama, obteniendo una relación donde el factor de fase no hace contribución, $P_s = P_0$. Ahora, si aplicamos un campo eléctrico externo, el $LiNbO_3$ experimenta un cambio en el índice de refracción, $\eta_e \rightarrow \eta_e + \Delta\eta_e$, donde,

$$\Delta\eta_e = \frac{1}{2}\eta_e^3 r_{33} E_z$$

siendo r_{33} el coeficiente electro-óptico del $LiNbO_3$, que es un valor empírico, $E_z = V(t)/d$, que es un campo eléctrico propio de los dispositivos transversales, para un valor $V(t)$ entrante y d es la distancia entre los electrodos que administran el campo. En la rama donde están los electrodos, aparecerá una fase de,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta\eta_e L}{\lambda}$$

y en la otra rama tendremos un retardo de fase por $-\Delta\phi$. La combinación óptica es,

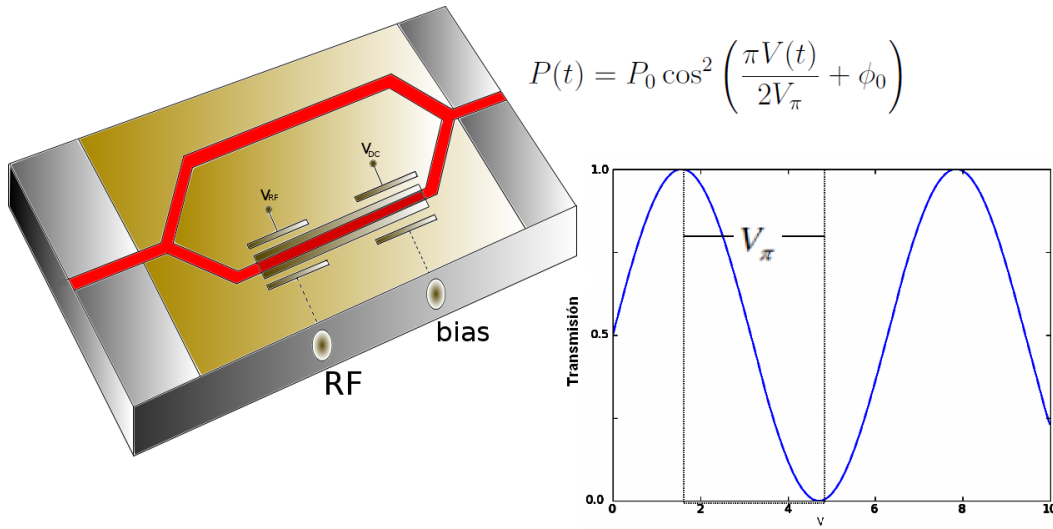


Figura 6.1: Modulador Mach Zehnder. (Un haz entrante es dividido por un divisor de haz y su fase es modificada en una de las ramas del interferómetro por un voltaje $v(t)$. La salida en potencia del modulador es proporcional a un $\cos^2(\bullet)$).

$$P_s = \left\langle \left| \frac{\sqrt{P_0}}{2} e^{i\Delta\phi} + \frac{\sqrt{P_0}}{2} e^{-i\Delta\phi} \right|^2 \right\rangle$$

$$\Rightarrow P_s = P_0 \cos^2(\Delta\phi) = P_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi\eta_e^3 r_{33} V(t) L}{2d\lambda} \right)$$

$$\Rightarrow P_s(t) = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi V(t)}{2V_\pi} \right)$$

La salida del modulador Mach-Zehnder está determinada por la ecuación,

$$P_s(t) = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi V(t)}{2 V_\pi} + \phi_0 \right) \quad (6.2)$$

con $V_\pi = 2\eta_e^3 r_{33} L / \lambda d$ es el voltaje de onda-media, que caracteriza a cada modulador, y ϕ_0 es un ángulo que describe el punto bias (voltaje DC) del modulador. Observando la salida en potencia en la figura 6.1 [44].

6.1.3. Fotoreceptor o fotodiodo

Son dispositivos semiconductores con unión $p - n$, que detectan y absorben la luz en esa región de unión $p - n$, región de depleción, generando pares electrón-hueco y,

con esto, una fotocorriente, que puede ser casi proporcional a la intensidad de la luz incidente absorbida. Este fotodiodo es usado en modo de operación fotovoltaico, de modo que el fotodiodo iluminado genere un voltaje, $V(s)$ [40].

$$V_s(t) = RGP(t) \quad (6.3)$$

donde el factor de proporcionalidad es una constante RG , con R como la responsividad, que es la capacidad del fotodiodo de generar electrones conforme vaya detectando fotones, y G que es la ganancia propia de los amplificadores operacionales que encontramos dentro del dispositivo.

6.1.4. Filtro y retardo temporal

El pulso eléctrico que obtenemos del foto-receptor es filtrado y posteriormente retardado. Un *filtro* pasa-banda (bandpass) se construye a partir de un filtro pasa-bajos (lowpass) y uno pasa-altos (highpass), con frecuencias de corte $f_l = 100Hz$ y $f_h = 10KHz$, respectivamente. Resulta de gran utilidad la colocación de un filtrado, debido a que hace más sencilla la tarea de definir un rango de frecuencias dentro del modelo matemático [45].

A este tipo de filtros se les conoce como dos-polo pasa-banda, cuya característica de transferencia lineal tiempo-continua es,

$$H(s) = \frac{s\tau_h}{(1 + s\tau_l)(1 + s\tau_h)} \quad (6.4)$$

siendo $\tau_l = 1/2\pi f_l$ y $\tau_h = 1/2\pi f_h$ dos constantes de tiempo para los filtros pasa-bajo y pasa-alto. En el dominio temporal, el filtrado lineal puede expresarse en términos de una ecuación diferencial de primer orden y una ecuación algebraica,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}x(t) \quad (6.5)$$

$$x(t) = \mathbf{C}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}x(t) \quad (6.6)$$

con \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} como matrices que describen el filtro pasa-banda, $\mathbf{u}(t)$ es un vector bidimensional que modela el estado del filtro, $r(t)$ conforma la entrada del filtro y

$x(t)$ es la salida del filtro. Estas matrices se expresan como,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\tau_l} + \frac{1}{\tau_h}\right) & -\frac{1}{\tau_l} \\ \frac{1}{\tau_h} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_l} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{D} = 0 \quad (6.7)$$

El filtrado se realiza con una tarjeta de procesamiento digital, DSP (DSK6713 board), la cual adquiere la señal haciendo uso de un conversor analógico digital (CAD), procesa los datos y el resultado es exteriorizado con un conversor digital-analógico (CDA). Estas tarjetas trabajan con muestras en tiempo discreto, no continuo, por ende, para realizar el filtro en la realidad, debemos discretizar nuestros valores; aplicando z-transformaciones, obtenemos

$$H(z) = \frac{1}{4}(1 - z_l)(1 + z_h) \frac{(z^2 - 1)}{(z - z_l)(z - z_h)} \quad (6.8)$$

ahora z_l y z_h son los polos tiempo discretos. Las ecuaciones descriptivas se expresan,

$$\mathbf{u}(n + 1) = \mathbb{A}\mathbf{u}(n) + \mathbb{B}r(n) \quad (6.9)$$

$$x(n) = \mathbb{C}\mathbf{u}(n) + \mathbb{D}r(n) \quad (6.10)$$

y las matrices cambian,

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -(z_l + z_h) & -z_l \\ z_h & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} z_l \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-z_l)(1+z_h)(1+z_l z_h)}{4z_l z_h} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{D} = \frac{1}{4}(1 - z_l)(1 + z_h) \quad (6.11)$$

donde la relación entre la entrada y la salida esta dada por,

$$x(n) = b_0 r(n) + b_2 r(n - 2) - a_1 x(n - 1) - a_2 x(n - 2) \quad (6.12)$$

los coeficientes están dados por,

$$b_0 = \frac{(1 - z_l)(1 + z_h)}{4}; \quad b_2 = -\frac{(1 - z_l)(1 + z_h)}{4}$$

$$a_1 = -(z_l + z_h); \quad a_2 = z_l z_h \quad (6.13)$$

Con estas ecuaciones es suficiente para construir el filtro que se necesita, el resultado gráfico es se observa en la figura 6.2 [46].

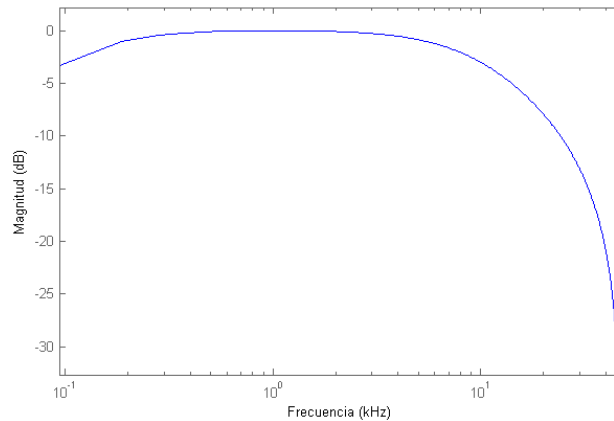


Figura 6.2: Filtro tipo Butter de orden 2 pasabanda, diseñado para la tarjeta DSK6713

El retardo temporal se realiza con la tarjeta DSP, donde el retardo es una constante de proporcionalidad entre los intervalos de muestreo característicos de la tarjeta, que son los buffer (almacén temporal de datos) de memoria de longitud k , y la razón de muestreo escogida para el filtro, $\tau = k/F_s$. Para una frecuencia de muestreo, F_s , de 96KHz .

6.1.5. Circuito amplificador

Construimos un amplificador con ganancia de voltaje $G = 20$, empleando un Buffer en la entrada del amplificador para que no se exija corriente de más a la tarjeta DSP. El esquema se presenta en la figura 6.3.

6.2. Caos con Circuito Electro-óptico

Circuito electro-óptico realimentado con retardo temporal

El medio de conexión de todos estos dispositivos ópticos es la fibra óptica en modo simple, que es una varilla de vidrio recubierta con un protector plástico, que

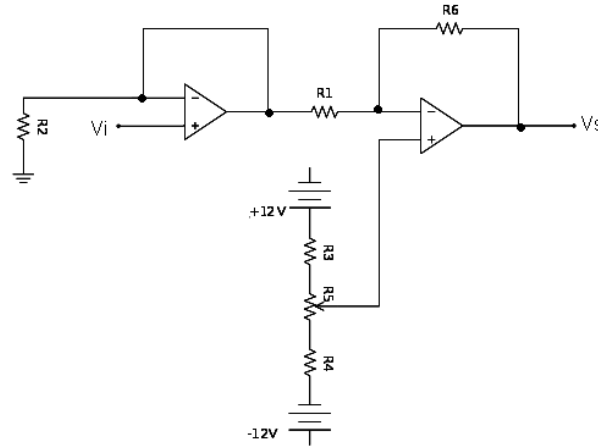


Figura 6.3: Circuito amplificador de voltaje, con un op-amp TL082, resistencias: $R_1 = 5.6K\Omega$, $R_2 = 10k\Omega$, $R_3 = 27K\Omega$, $R_4 = 27K\Omega$, $R_6 = 69K\Omega$ y un potenciómetro $R_5 = (0 - 1)K\Omega$.

transmite el haz a través de la reflexión total interna ocasionada por dos porciones constituyentes (núcleo y revestimiento) con diferentes índices de refracción. Haciendo uso de ella, se conectó el siguiente circuito [47],[48], de la figura 6.4.

De vuelta al tiempo continuo, una vez aplicado el filtro y el retardo, procedemos la relación entre la entrada $r(t)$ y la salida del filtro con el retardo $x(t)$,

$$r(t) = \beta \cos^2 \left[\frac{\pi v(t - \tau)}{2 V_\pi} + \phi_0 \right] \quad (6.14)$$

donde $\beta \equiv \pi RGP_0/2V_\pi$, renombrando $x(t) = \pi v(t - \tau)/2V_\pi$, con $x(t) = \mathbf{C}\mathbf{u}(t - \tau) + \mathbb{D}r(t - \tau)$, sustituimos esta relación en la ecuación (4.15), obteniendo $r(t) = \beta \cos^2[\mathbf{C}\mathbf{u}(t - \tau) + \phi_0]$, para $\mathbb{D} = 0$. Luego, sustituimos $r(t)$ en la ecuación (4.5), obteniendo la ecuación diferencial retardada espacio-estado, cuyo diagrama matemático en bloques puede verse en la figura 6.5,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\beta \cos^2[\mathbf{C}\mathbf{u}(t - \tau) + \phi_0] \quad (6.15)$$

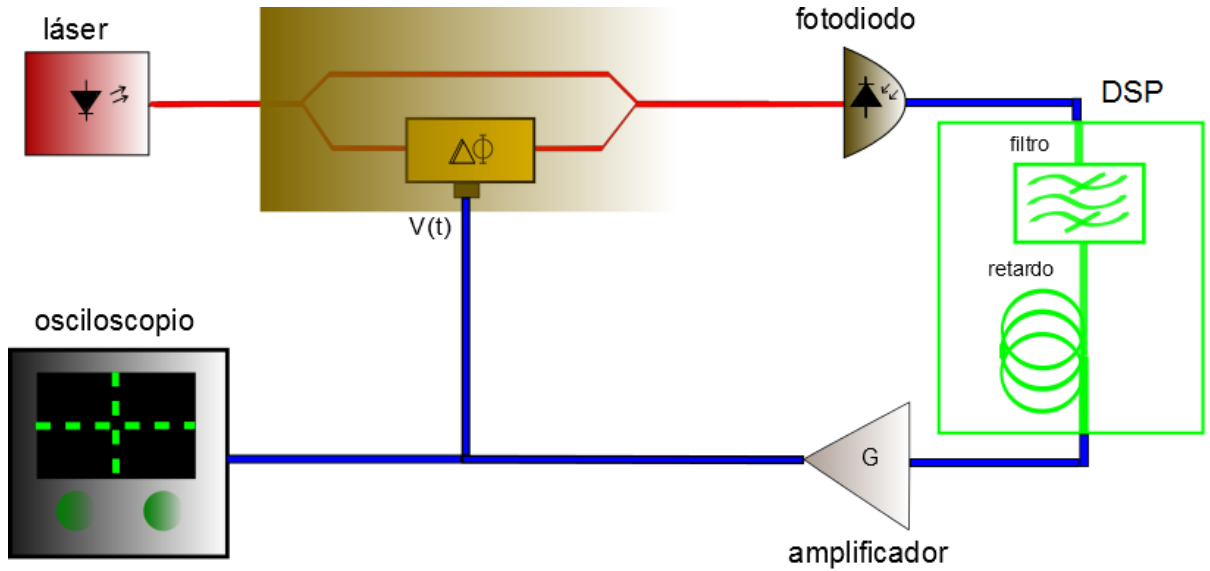


Figura 6.4: Esquema del circuito realimentado con retardo temporal, que produce caos de alta dimensión. Constituido por un láser, el modulador Mach Zehnder, un fotoreceptor, la tarjeta DSK6713 y un amplificador de voltaje. La salida de la serie de tiempo está entre el amplificador y el MZM.

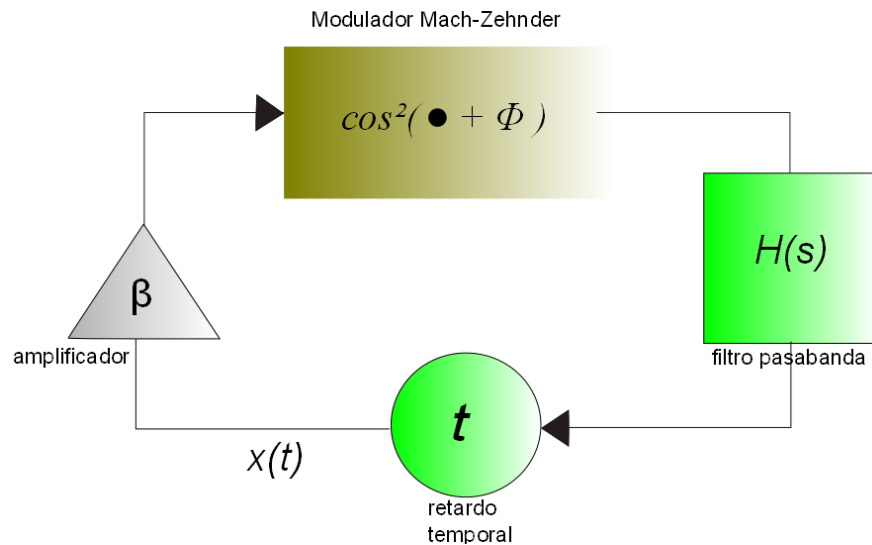


Figura 6.5: Diagrama matemático para el sistema realimentado con retardo temporal.

Capítulo 7

Circuito Electro-óptico para la Generación de Dinámica Estocástica

7.1. Transformación del Caos de Baja y Alta dimensión con un Sistema Electro-óptico

Desde la función que nos permite observar dinámica impredecible, como fue demostrado en el capítulo 3,

$$x_n = \text{sen}^2[\theta z^n] \quad (7.1)$$

Esquematizaremos una receta para generar dicha dinámica a partir de transformaciones: reescribimos x_n como una composición de funciones,

$$x_n = h(f(n)) \quad (7.2)$$

Con la función $f(n)$ que debe ser oscilante no-periódica, formada por intervalos con un comportamiento exponencial finito. Y $h(y)$ puede ser periódica, o no. Lo importante es que $h(y)$ sea una función no-invertible, además de poseer una cantidad considerable de máximos y mínimos, $h(y_1) < h(y) < h(y_2)$, para que la función y

tenga una amplia variedad de soluciones con la misma probabilidad de ser tomadas. Aplicando este esquema a nuestros elementos, tenemos a nuestra disposición funciones $f(n)$ que son oscilantes no-periódicas, tales como los sistemas de Lorenz, Rössler, Chua, Duffing y el sistema electro-óptico de caos de alta dimensión. Con el fin de que éstas satisfagan el comportamiento exponencial finito a trozos, aplicamos una transformación exponencial previa, con un circuito electrónico, tal que $g(n) = \exp(f(n))$. También tenemos una transformación que cumple los requerimientos de $h(y)$, que es la función de transmisión ideal del modulador Mach-Zehnder, $h(y) = \cos^2(y)$, cuyo rango está definido en $0 < h(y) < 1$.

La representación del sistema dinámico con la transformación para generar dinámica impredecible lo escribimos, entonces, de la siguiente forma,

$$x_{n+1} = F_1(x_n, y_n), \quad (7.3)$$

$$y_{n+1} = F_2(x_n, y_n), \quad (7.4)$$

$$z_{n+1} = G(x_n). \quad (7.5)$$

Las ecuaciones (7.3) y (7.4) muestran un sistema caótico cualquiera y la ecuación (7.5) representa la transformación del modulador Mach-Zehnder.

7.2. Transformación del caos de baja dimensión con el sistema electro-óptico

De los sistemas de Lorenz, Rössler, Chua y Duffing extraeremos una solución que nos servirá de función oscilante no-periódica. La salida en voltaje, extraída de cada circuito, se utilizó como voltaje de radio-frecuencia para forzar al modulador Mach-Zehnder. Previa a la transformación con el modulador, diseñaremos un circuito exponencial, con el fin de aumentar aún más la complejidad de nuestra serie de tiempo, otorgando un crecimiento exponencial de la función que yace en el argumento de la

transformación no-invertible. La transformación exponencial se realiza con el circuito mostrado en la figura 7.1 [49]. La función de transferencia del mismo es $V_s = ae^{1-V_0}$, donde $a \in \mathbf{R}$ posee unidades de voltaje. Observamos la curva característica en la figura 7.2.

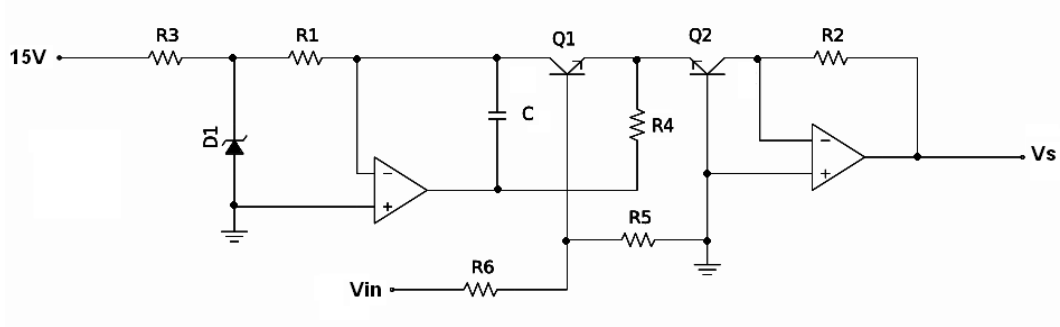


Figura 7.1: Diagrama del circuito conversor exponencial. Usando los elementos: op-amp: LF412 dual, D1=LM329, Q1=Q2=2N222, $R_1 = 70K\Omega$, $R_2 = 10K\Omega$, $R_3 = 2.2K\Omega$, $R_4 = 2K\Omega$, $R_5 = 1K\Omega$, $R_6 = 15.7K\Omega$ y $C = 33pF$.

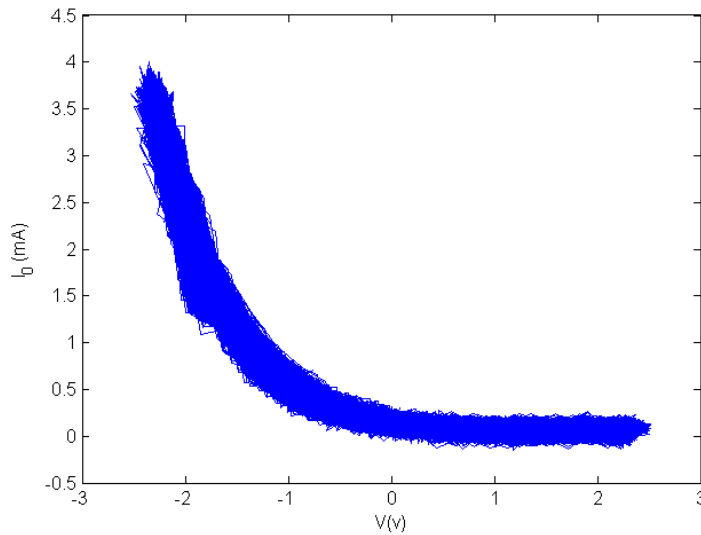


Figura 7.2: Curva característica del conversor exponencial de la figura 7.1.

Si bien la señal obtenida de la transformación exponencial no es exactamente $\exp(V_0)$ como indica la teoría, notamos que $e^{1-v_0} = e^1 e^{-v_0} = (\text{constante})e^{-V_0}$, lo que indica que la función de transferencia puede escribirse como $V(s) = ce^y$, donde $y = -V_0$, lo que indica que la señal estará desfasada, pero como este resultado no

afecta el estudio, ya que esta serie y su serie temporal desfasada, son topológicamente equivalentes. Los resultados serán adquiridos con una tarjeta de adquisición de datos, PCI. Representaremos el conjunto de ecuaciones, derivadas de cada circuito, que modelan una serie de tiempo para los atractores,

7.2.1 Atractor de Lorenz transformado

$$\begin{aligned}\frac{dv_{s1}}{dt} &= 10(v_{s2} - v_{s1}) \\ \frac{dv_{s2}}{dt} &= 28v_{s1} - v_{s2} - v_{s1}v_{s3} \\ \frac{dv_{s3}}{dt} &= v_{s1}v_{s2} - (8/3)v_{s3}\end{aligned}\tag{7.6}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G \exp(v_{s1}),\tag{7.7}$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{V(t)}{V_\pi} + \phi_0\right)\tag{7.8}$$

7.2.2 Atractor de Rössler transformado

$$\begin{aligned}\frac{dv_{s1}}{dt} &= -(10^4)(0.05v_{s1} + 0.5v_{s2} + v_{s3}) \\ \frac{dv_{s2}}{dt} &= (10^4)(v_{s1} + 0.133v_{s2} - 0.02v_{s2}) \\ \frac{dv_{s3}}{dt} &= (10^4)[g(v_{s1}) - v_{s3}]\end{aligned}\tag{7.9}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G \exp(v_{s1}),\tag{7.10}$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{V(t)}{V_\pi} + \phi_0\right)\tag{7.11}$$

7.2.3 Atractor de Duffing transformado

$$\begin{aligned}\frac{dv_{s1}}{dt} &= v_{s2} \\ \frac{dv_{s2}}{dt} &= v_{s1} - v_{s1}^3 + 0.3v_{s2} - 0.5v_{s3} \\ \frac{dv_{s3}}{dt} &= 1.25(v_{s2} - v_{s3})\end{aligned}\tag{7.12}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G \exp(v_{s_1}), \quad (7.13)$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{V(t)}{V_\pi} + \phi_0 \right) \quad (7.14)$$

7.2.4 Atractor de Chua transformado

$$\begin{aligned} \frac{dv_{s_1}}{dt} &= 15.6(v_{s_2} - v_{s_1} - f(v_{s_1})) \\ \frac{dv_{s_2}}{dt} &= v_{s_1} - v_{s_2} + v_{s_3} \\ \frac{dv_{s_3}}{dt} &= -25.58v_{s_2} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = G \exp(v_{s_1}), \quad (7.16)$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{V(t)}{V_\pi} + \phi_0 \right) \quad (7.17)$$

Un diagrama esquemático para realizar la transformación con el circuito electro-óptico se muestra en la figura 7.3.

7.3. Transformación del caos de alta dimensión con el sistema electro-óptico

Del circuito electro-óptico realimentado con retardo temporal extraeremos una señal que nos servirá de función oscilante no-periódica. La salida en voltaje, extraída de cada circuito, se utilizó como voltaje de radio-frecuencia para forzar al modulador Mach-Zehnder. Este resultado se adquirió con una tarjeta de adquisición de datos, PCI. Representaremos su serie de tiempo,

$$x(n) = b_0 r(n) + b_2 r(n-2) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2), \quad (7.18)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = Gx(n), \quad (7.19)$$

$$\frac{dQ}{dt} = P_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{V(t)}{V_\pi} + \phi_0 \right) \quad (7.20)$$

La ganancia G resulta de un amplificador de voltaje sencillo basado en un amplificador operacional, que aporta una ganancia variable, está comprendida entre 2 y 10, números que se multiplican con el voltaje de entrada, que es el de algún atractor, amplificando el voltaje hasta aproximadamente 40V; este valor está dispuesto con el fin de obtener la suficiente cantidad de picos y valles del modulador Mach-Zehnder. Un diagrama esquemático para realizar la transformación con el circuito electro-óptico se muestra en la figura 7.4.

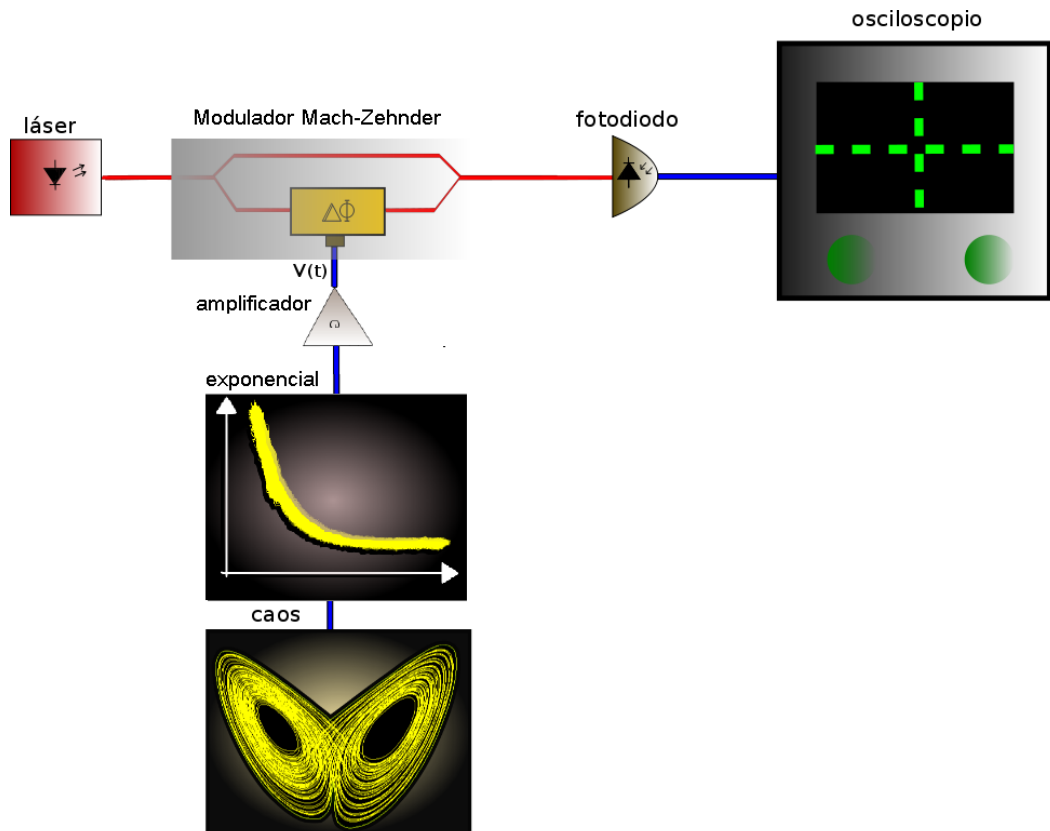


Figura 7.3: Esquema del montaje experimental para la generación de dinámica estocástica mediante la transformación de la exponencial del caos de baja dimensión con el modulador Mach-Zehnder. El amplificador entre la exponencial y el MZM es colocado para generar una función cosenoidal con un mayor número de picos y valles, mientras mayor sea la ganancia en voltaje, mayor número de máximos y mínimos, necesarios para aumentar la impredecibilidad.

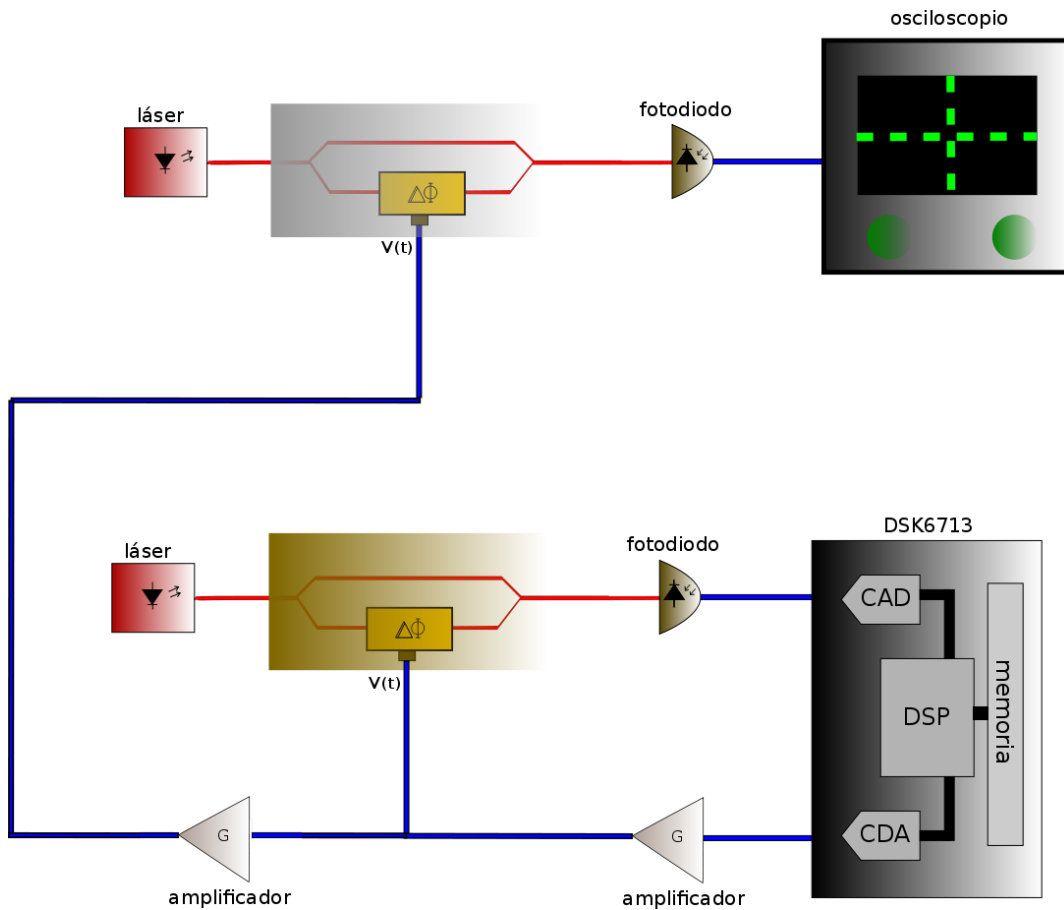


Figura 7.4: Esquema del montaje experimental para la generación de dinámica estocástica mediante la transformación del caos de alta dimensión con el modulador Mach-Zehnder. El amplificador entre sistema realimentado y el primer MZM es colocado para generar una función cosenoidal con un mayor número de picos y valles, mientras mayor sea la ganancia en voltaje, mayor número de máximos y mínimos, necesarios para aumentar la impredecibilidad.

Resultados

Capítulo 8

Resultados: Caos de Baja Dimensión

8.1. Transformación del Caos de Baja Dimensión con un Sistema Electro-óptico

Esta sección está dedicada a revisar los resultados obtenidos. En principio, se realizó una simulación computacional de cada sistema estudiado experimentalmente, con el fin de corroborar los resultados mediante un método alternativo y, así, verificar que nuestras series de tiempo son legítimas. En la figura 8.1 exhibimos las series temporales de los atractores caóticos de Lorenz, Rössler, Duffing y Chua, experimental y simulado, cuya semejanza está evidenciada, salvo por un conjunto de factores como el ruido de medición, ruido electromagnético de los componentes, variación de parámetros, temperatura, entre otras, que se presentan en el experimento real que es complejo de simular en computadora, limitándonos la perfección de la simulación.

En la figura 8.2 tenemos las series temporales pertenecientes a las señales caóticas transformadas con el modulador Mach - Zehnder, mediante el $\cos^2(\bullet + \pi/2)$. Las gráficas nos muestran que si bien no son exactamente iguales, guardan una relación topológica entre sí, es decir, son topológicamente equivalentes; concepto que es empleado para designar a dos conjuntos relacionados por una transformación bi-unívoca

y bi-continua entre sí. Más intuitivamente, si podemos transformar un objeto en otro sin desgarramientos o adherencias, cuya transformación resulta en estos casos bastante pequeña, concediendo la certeza de que es el mismo objeto.

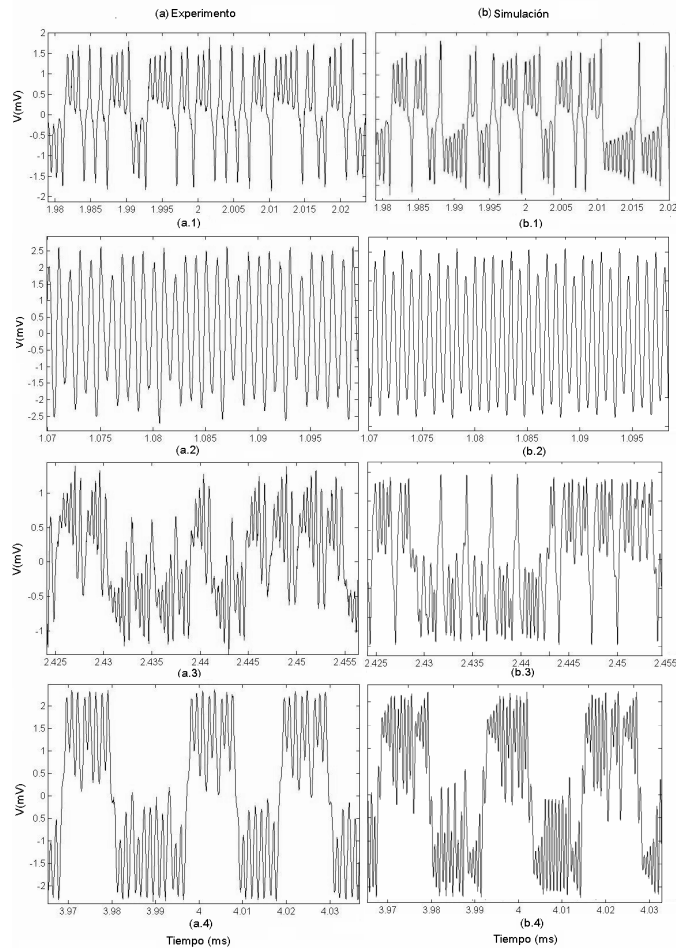


Figura 8.1: Series temporales de los atractores caóticos generados con sistemas electrónicos (a,b) experimental y simulado. Donde: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

Partiendo de que nuestras series temporales son auténticas, procedemos a realizar los análisis de las series de tiempo experimentales con el programa TISEAN (Time Series Analysis). Este paquete es implementado, como se comentó en el capítulo 4, para estudiar el grado de aleatoriedad generado mediante métodos numéricos, corroborando con ello la teoría expuesta en el capítulo 3. Siguiendo el mismo orden en cuanto a los análisis en el capítulo 4, mostramos el producto final de estos estudios computacionales.

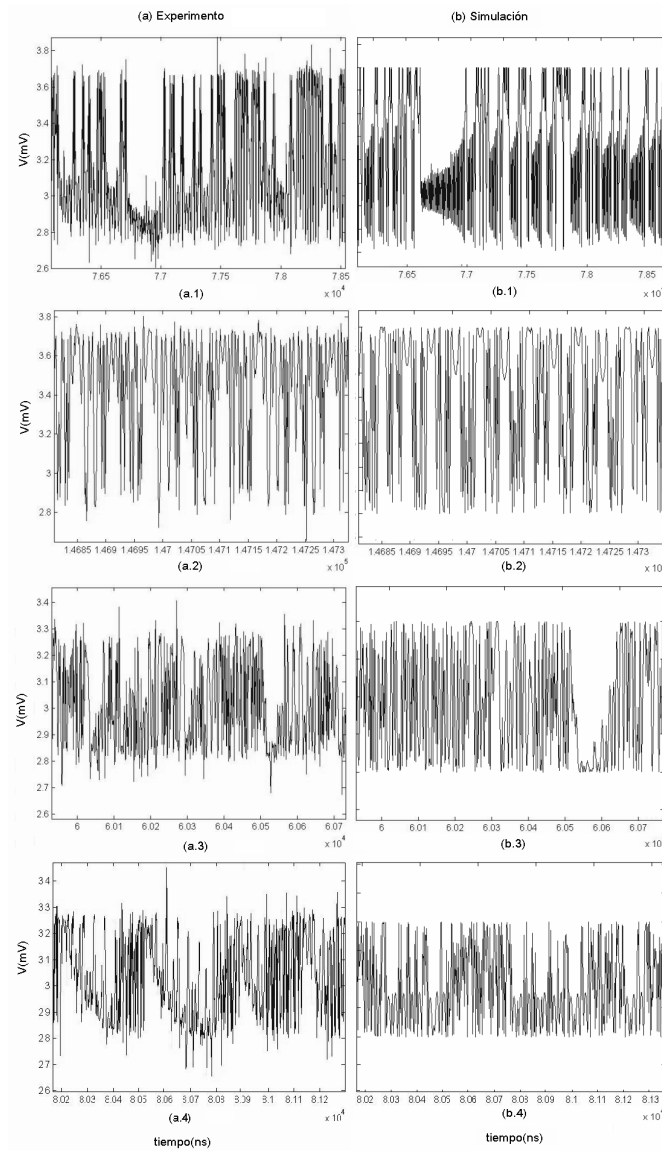


Figura 8.2: Series temporales de los atractores caóticos transformados con el sistema electro-óptico (a,b) experimental y simulado. Donde: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

El espectro de potencias es determinado con el programa `spectrum`, para los atractores caóticos, figura 8.3.a. Se establecen los espectros de cada señal obtenida con los circuitos electrónicos y con los atractores caóticos transformados, figura 8.3.b, mediante modulador Mach - Zehnder. La transformación evidencia cómo se ha aumentado la indeterminación, de tal forma que la distribución del espectro es bastante plana, semejante a la del ruido blanco, i.e., estamos en posesión de una señal ruidosa porque todas las frecuencias están presentes con igual amplitud, su potencia es constante.

Este análisis nos habla parcialmente de lo que aspiramos obtener, ya sabemos que el espectro es semejante al del ruido blanco, sin embargo, es condición necesaria mas no suficiente para probar su aleatoriedad, por ende son requeridos el resto de los análisis.

En la figura 8.4 hemos dispuesto dos resultados. La información mutua, 8.4.a, nos sirve para especificar qué tan correlacionados están los valores que componen la serie temporal; la curva roja deja ver la correlación no-lineal de cada atractor caótico, y la curva azul exhibe la misma luego de ser transformada. Observemos que, luego de la transformación con el modulador, la información mutua es casi cero para todo tiempo incrustado, en los gráfico 8.4.a.2 y 8.4.a.3 los resultados son mucho más no-correlacionados que el resto, esto se debe al tipo de maniobra experimental empleada, es decir, en estos dos casos se empleó un mayor número de picos y valles de la transformación cosenoidal, lo que es teóricamente relevante porque a mayor número de máximos y mínimos, mayor será su indeterminación, como fue plenamente discutido en el capítulo 3. En la figura 8.4.b, nos encontramos con los falsos vecinos cercanos, con curvas cuya estación en el eje de las abscisas muestra la dimensión mínima de cada sistema. La línea roja especifica la dimensión mínima de cada atractor extraño, con dimensión mínima igual a tres, que es la dimensión teórica de cada atractor caótico. La línea azul muestra la estimación de la dimensión mínima de cada atractor transformado, en la figura 8.4.b.2 se consiguió aumentar las dimensiones de 3 a 35, aproximadamente, debido a que en este atractor se utilizó un mayor número de valles y picos, mediante una gran amplificación de voltaje, como se esquematizó en la figura 7.3. En el gráfico 8.4.b.1 se observa la menor de las amplificaciones, con lo que tan sólo conseguimos adicionar 2 dimensiones, para un total de 5. El resto (figuras 8.4.b.3,4) la dimensión mínima alcanzó aproximadamente de 22 a 25 dimensiones. Los programas empleados para el cálculo numérico son `mutual` y `false_nearest`.

La observación del objeto en el espacio de fase revela cómo es posible el enmascaramiento de cierta información a través del modulador. La figura 8.5 evidencia los mapas de retorno de cada atractor, 8.5.a, y su equivalente transformado, 8.5.b, donde ya no logramos dilucidar la forma del objeto que teníamos en principio, ahora está empotrado en un conjunto de estados que hace las veces de disfraz a la infor-

mación administrada. De esta manera, la complejidad alcanzada debilita cualquier predicción, aumentando el número de soluciones x_n posibles para tan sólo un valor x_{n+1} , y viceversa. En la misma línea de pensamientos, la figura 8.6 concede una información adicional de sumo valor, debido a que nos concede la posibilidad de observar qué tan enmascarada está la señal suministrada, recordando que el mapa de Poincaré es útil para conocer la dinámica subyacente en espacios de fase demasiado congestionados, como los de la figura 8.5.b. Nótese las consecuencias de no poseer un número de máximos y mínimos óptimos de la transformación cosenoidal, a comparación de las figuras 8.6.b,2,3 y 4, el espacio de fase en 8.6.b.1 está bastante más desenmascarado, exhibiendo pequeños pero evidentes rasgos de la estructura latente que intenta ocultar, i.e., sus estados no están uniformemente distribuidos en esa nube. Los programas del TISEAN son `delay` y `poincare`.

Con el programa `lyap_k` caracterizamos el tipo de movimiento, ver la tabla 4.1, con el fin de esclarecer cuál es la tasa de divergencia exponencial entre dos trayectorias cercanas en un mismo sistema, que es definido como exponente máximo de Lyapunov. Para ello, calculamos la pendiente (línea verde) que forma el primer trozo del paquete de curvas en la figura 8.7. Como la teoría predice, los exponentes de Lyapunov de los atractores caóticos son mayores a cero, 8.7.a, estableciéndose como movimiento caótico, basándonos en la tabla 4.1. Luego, observamos el aumento de la tasa exponencial de divergencia, que es mucho mayor para una transformación cosenoidal con más picos y valles, en el atractor de Rössler transformado, figura 8.7.b.2. Ver tabla 8.1.

Tabla 8.1: Exponente Máximo de Lyapunov

| Señal | Atractor | Atractor transformado |
|---------|-----------------|-----------------------|
| Lorenz | 0.8 ± 0.1 | 1.7 ± 0.1 |
| Rössler | 0.05 ± 0.01 | 2.8 ± 0.2 |
| Duffing | 0.6 ± 0.1 | 1.5 ± 0.1 |
| Chua | 0.4 ± 0.1 | 1.4 ± 0.1 |

En las figuras 8.8 y 8.9 obtenemos el conocimiento de la dimensión y entropía de correlación usando un mismo programa `d2`. La dimensión de correlación estimada para el atractor de Lorenz, Rössler, Duffing y Chua, frente a la transformación del Lorenz, Rössler, Duffing y Chua. Los gráficos se contruyen con la dimensión y entropía de correlación como funciones de las dimensiones incrustadas y las ϵ -vecindades, que conforman una aproximación a los estados del sistema. Para el cálculo, obtenemos el promedio de las curvas obtenidas; examinando con cautela, la dimensión de correlación para $\epsilon \cong 0$ es más alta porque se está analizando un ruido real proveniente de los aparatos empleados para las mediciones, por lo que el promedio general puede verse ligeramente afectado por dicho ruido, y, con esto, la estimación total de la dimensión de correlación, consecuencia a tener en cuenta en el momento de presentar el resultado real del sistema. En cuanto a la entropía, figura 8.9, seguimos un procedimiento semejante para determinar la dimensión de correlación, pero adicional a este hecho, el procedimiento del programa indica que el resultado debe dividirse entre el retardo empleado para hacer el mapa de retorno. Evidentemente, tanto para la dimensión de correlación, como para la entropía, sus valores aumentaron con la transformación cosenoidal mediante el modulador Mach-Zehnder, como podemos caracterizar en la tabla 8.2, es decir, aumentó la dimensión del objeto en el espacio de fase, así como el desorden total del sistema.

Tabla 8.2: Dimensión y Entropía de Correlación para Atractores (At) y Atractores Transformados (At-Trans)

| Señal | Dimensión (At) | Dimensión (At-Trans) | Entropía (At) | Entropía (At-Trans) |
|---------|----------------|----------------------|-------------------|---------------------|
| Lorenz | 2.0 ± 0.1 | 3.0 ± 0.1 | 0.31 ± 0.01 | 0.40 ± 0.02 |
| Rössler | 1.9 ± 0.1 | 5.4 ± 0.1 | 0.141 ± 0.001 | 0.77 ± 0.02 |
| Duffing | 2.3 ± 0.1 | 4.7 ± 0.1 | 0.404 ± 0.014 | 0.53 ± 0.02 |
| Chua | 1.9 ± 0.1 | 4.5 ± 0.1 | 0.33 ± 0.01 | 0.47 ± 0.01 |

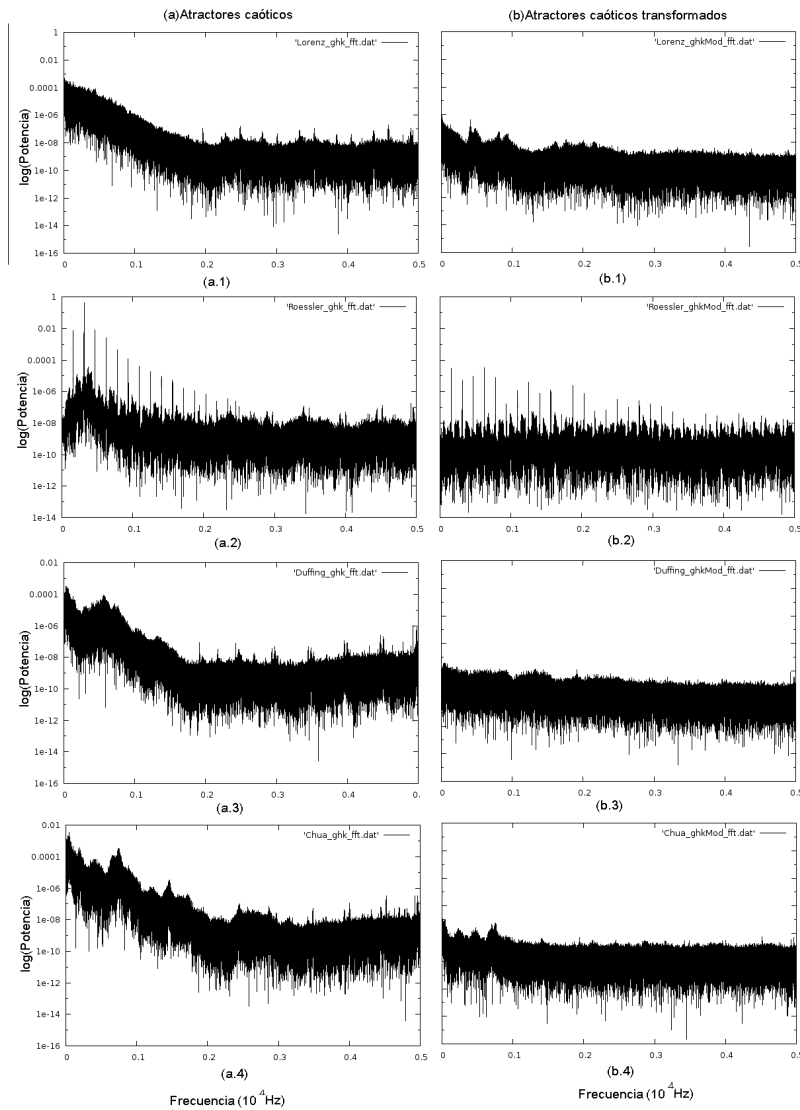


Figura 8.3: Espectro de potencia de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

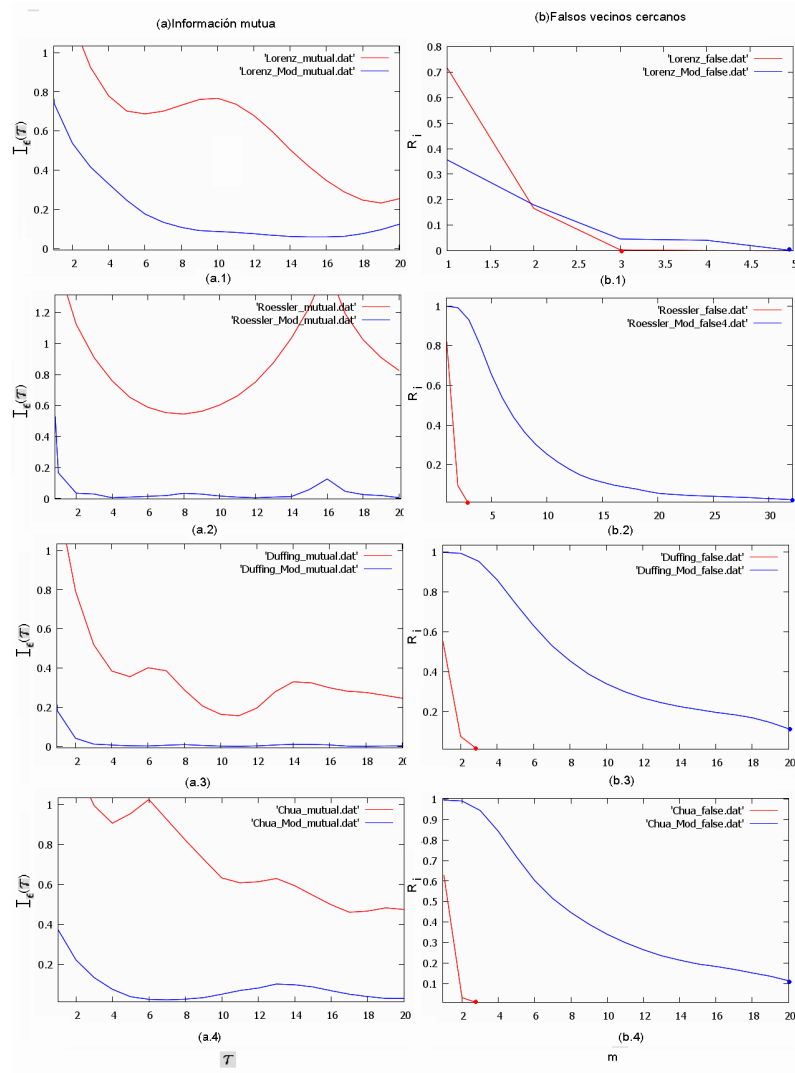


Figura 8.4: (a) Información mutua y (b) Falsos vecinos cercanos de los atractores caóticos y su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

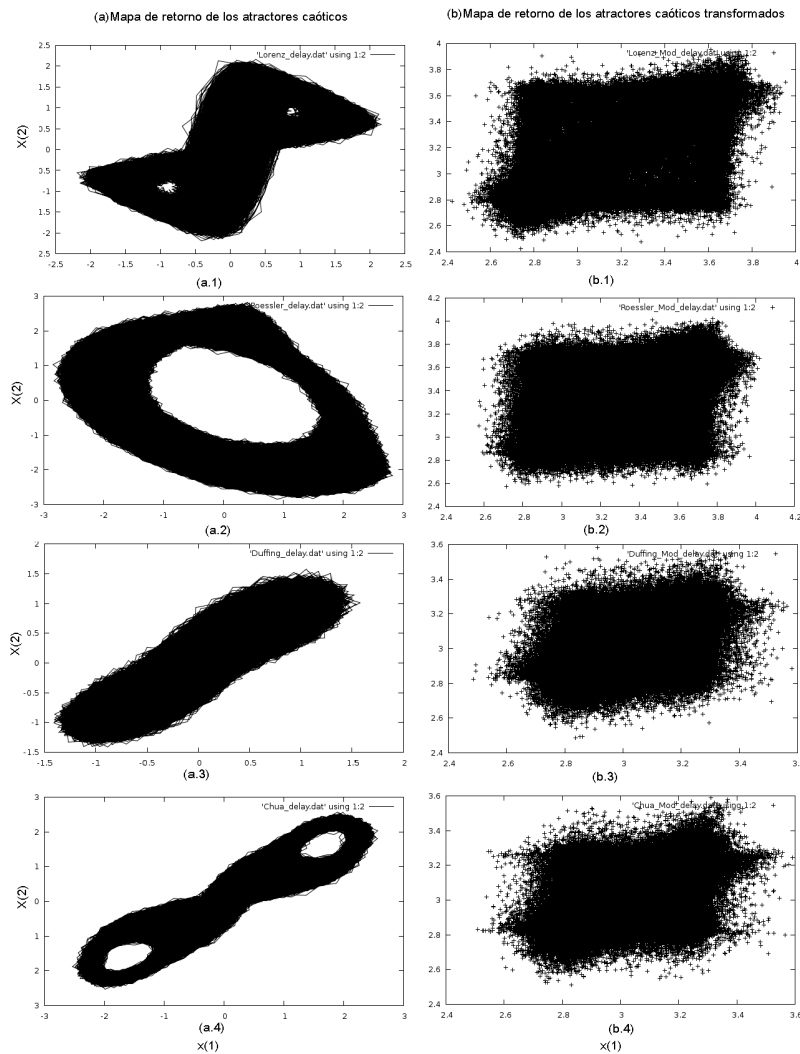


Figura 8.5: Mapas de retorno de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

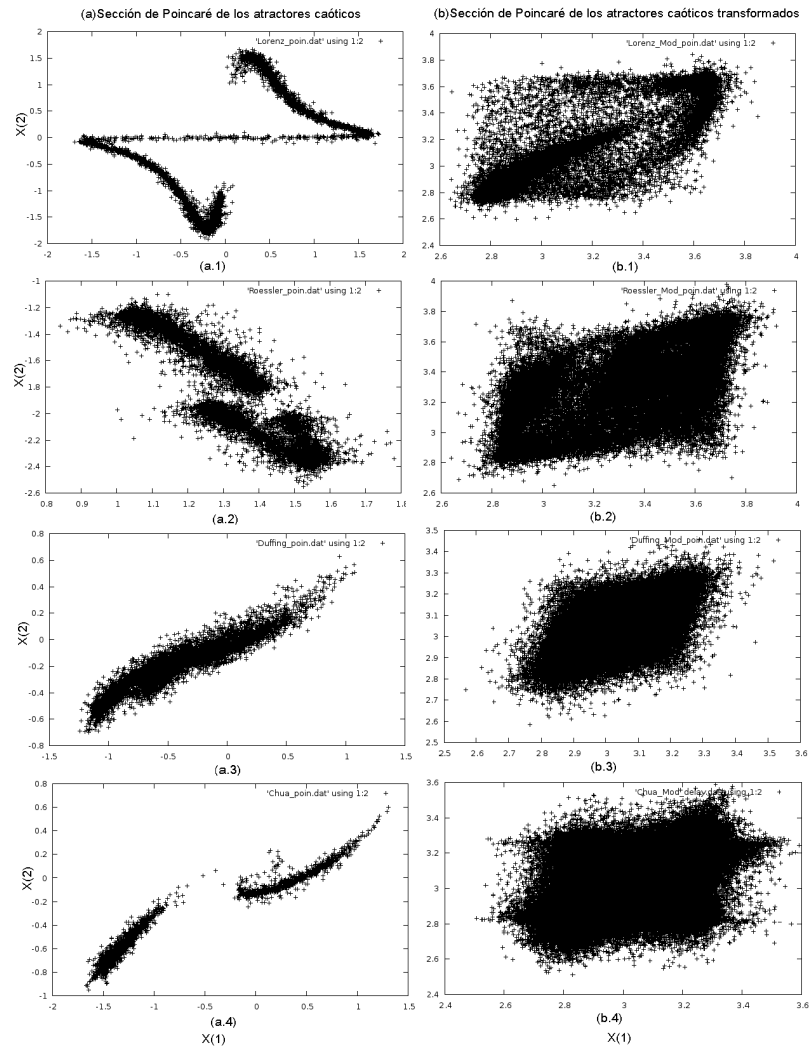


Figura 8.6: Sección de Poincaré de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

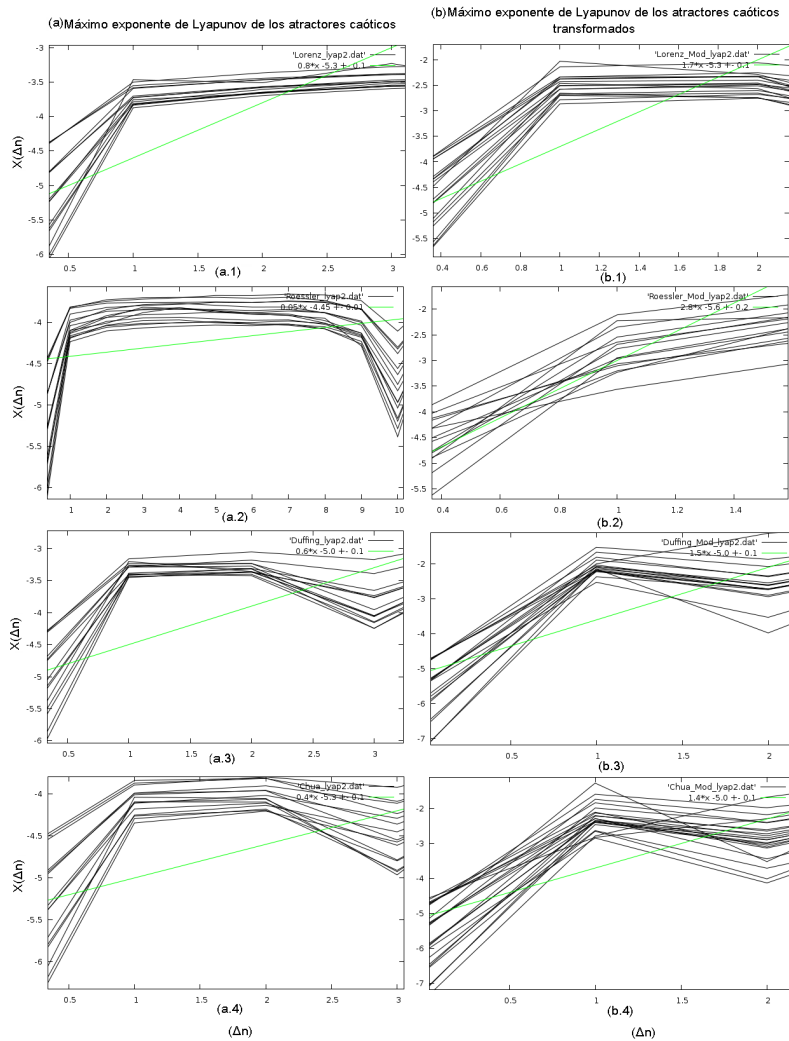


Figura 8.7: Exponente máximo de Lyapunov de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: ((a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

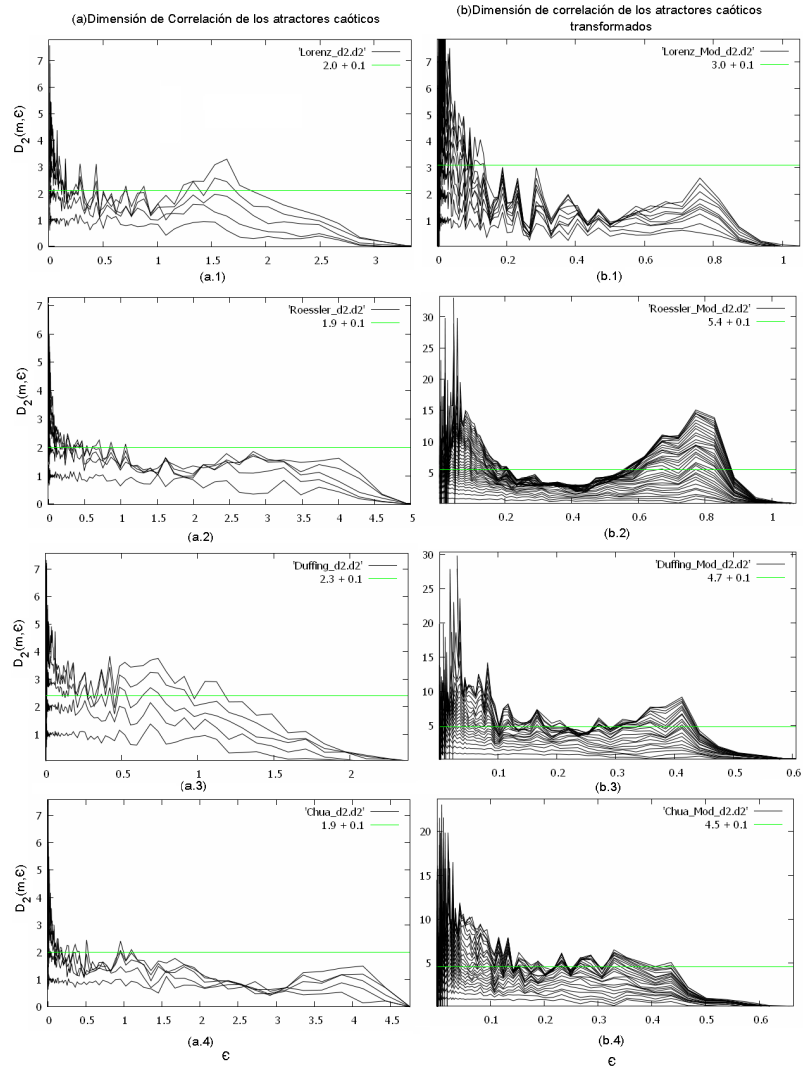


Figura 8.8: Dimensión de Correlación de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

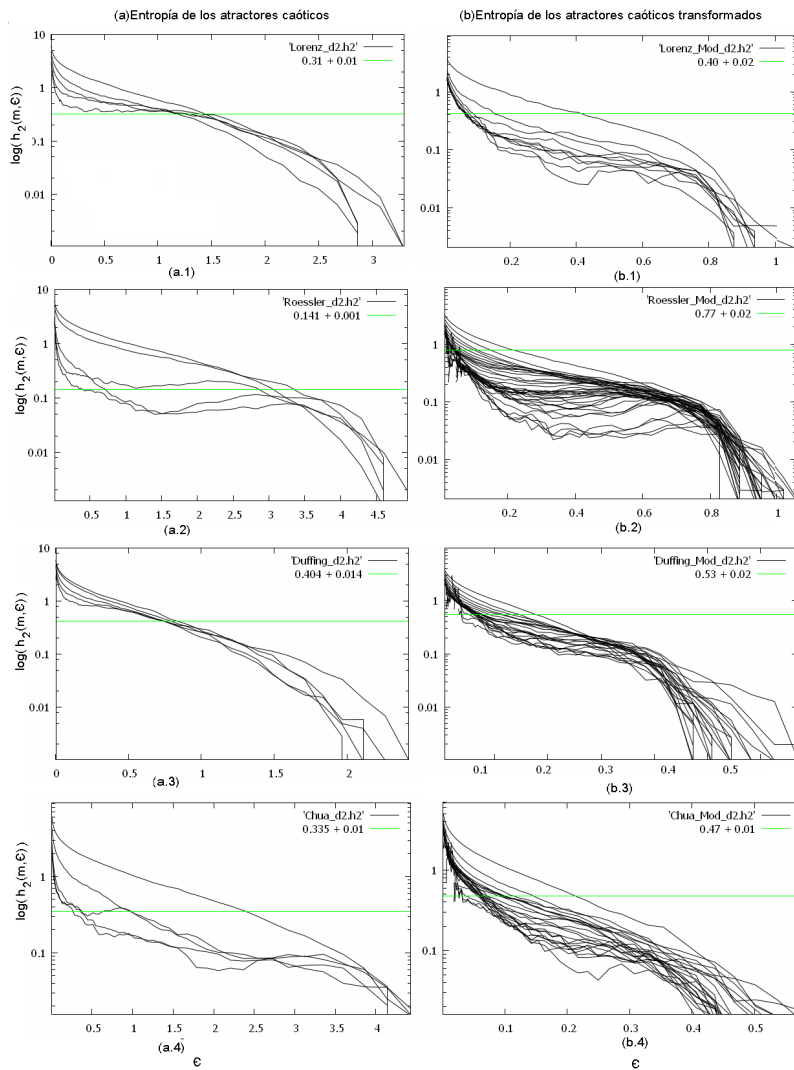


Figura 8.9: Entropía de Correlación de (a) los atractores caóticos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: (a,b.1)Atractor de Lorenz , (a,b.2)Atractor de Rössler, (a,b.3)Atractor de Duffing y (a,b.4)Atractor de Chua.

Resultados: Caos de Alta Dimensión

8.2. Transformación del Caos de Alta Dimensión con un Sistema Electro-óptico

Bajo la misma línea constructiva de la sección precedente, comenzamos con la exhibición de las series de tiempo experimentales y simuladas del sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal. Con el fin de dar a conocer un poco más de este sistema que, contrario a los atractores caóticos de baja dimensión anteriormente estudiados, no ha alcanzado una alta popularidad en la comunidad científica, por su corta edad. Así, contemplamos las diferentes facetas que éste adquiere cuando variamos un parámetro del cual depende, en este caso es la potencia del láser. A este fenómeno se le llama bifurcación, del cual padecen en la misma forma los atractores caóticos de baja dimensión.

La peculiaridad del caos electro-óptico, al que definiremos como hiper-caos porque los atractores yacen en el hiper-espacio, es que revela la existencia de los respiradores caóticos, también conocido como caos cíclico; estos consisten en oscilaciones periódicas que respiran caóticamente en baja frecuencia [48]. Obsérvese dicho fenómeno en la figura 8.10.a,b.2 y 8.10.a,b.3, donde aparece una curva que tiene propiedades periódicas que viven en conjunto con oscilaciones caóticas, cuya complejidad aumenta a medida que aumentamos la intensidad del láser, hasta desembocar en caos total en la figura 8.10.a,b.4.

Contémplese en la figura 8.11 la semejanza entre el espectro de potencias obtenido en la simulación y en el experimento, que posee una cuantiosa cantidad de ruido. El hiper - caos fue construido empleando un filtro digital para la tarjeta DSK6713, que es plenamente mostrado en la figura 8.11.a,b.4, con un declive suave debido a que dicho filtro es de orden 2. Su ancho de banda se exhibe en la figura 8.12, que está entre las frecuencias 100 y 10KHz.

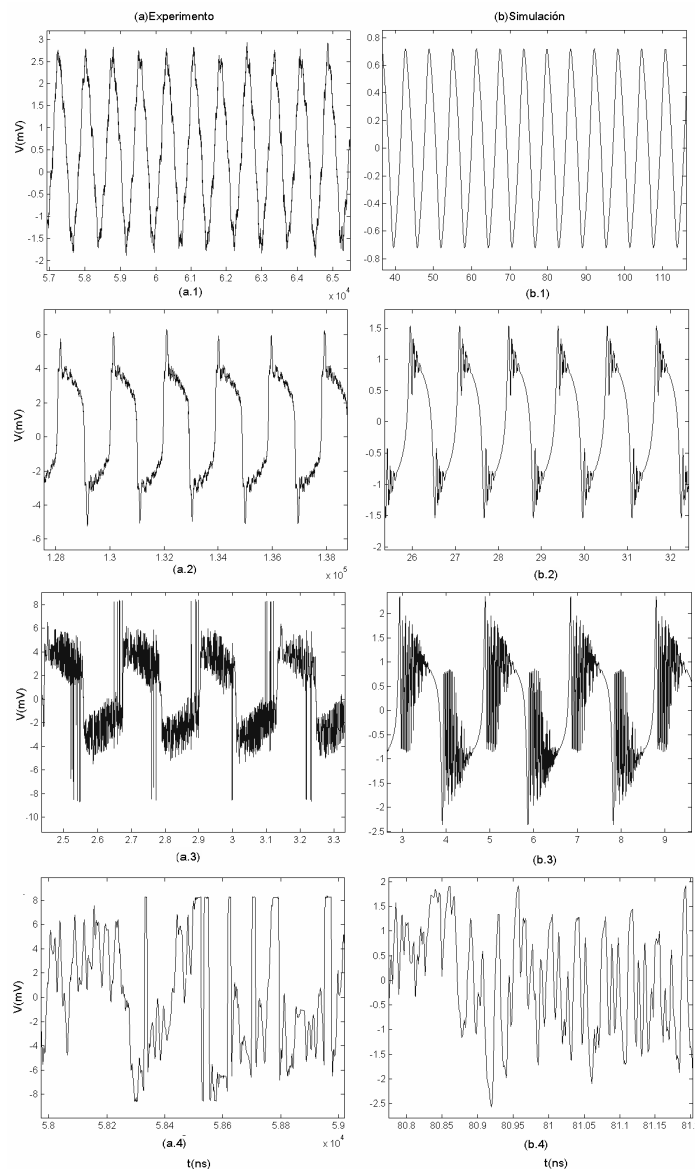


Figura 8.10: Serie de tiempo del sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal, (a) experimental y (b) simulado. Donde se modificó la potencia: (a,b.1) $P=122\text{mW}$, (a,b.2) $P=177\text{mW}$, (a,b.3) $P=266\text{mW}$ y (a,b.4) $P=503\text{mW}$.

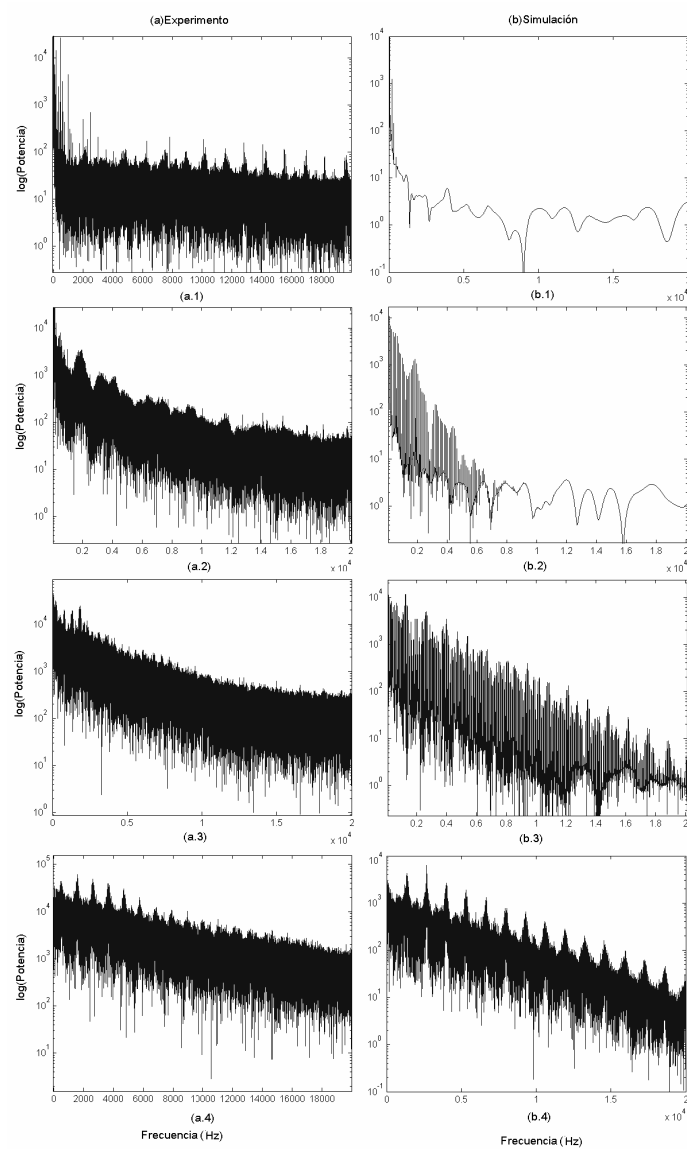


Figura 8.11: Espectro de potencias del sistema electro-óptico realimentado con retardo temporal, (a) experimental y (b) simulado. Donde se modificó la potencia: (a,b.1) $P=122\text{mW}$, (a,b.2) $P=177\text{mW}$, (a,b.3) $P=266\text{mW}$ y (a,b.4) $P=503\text{mW}$.

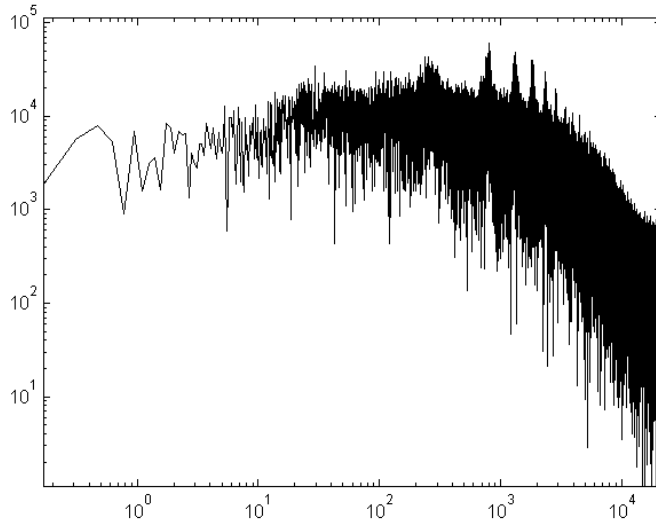


Figura 8.12: Filtro pasabanda de orden 2 para $P=503\text{mW}$, con ruido.

Los análisis en series de tiempo siguen exactamente la secuencia llevada en la sección pasada, así como los mismos programas del TISEAN. Utilizando la señal para en valor de potencial del láser $P=503\text{mW}$, realizamos la transformación mostrada en el esquema de la figura 7.4. El espectro de potencias es aplanado con el modulador, como observamos en la figura 8.13, eliminando correlaciones y acercándose a un espectro semejante al del ruido blanco.

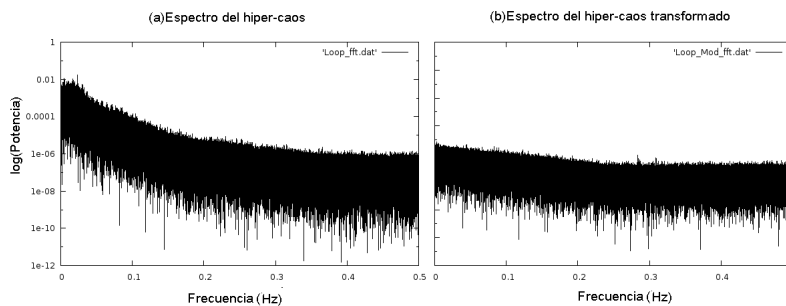


Figura 8.13: Espectro de potencia de (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para $P=503\text{mW}$.

En la figura 8.14.a se grafica la información mutua; nótese que el hiper-caos ya guarda una cierta estocasticidad, porque la curva roja ya tiene información mutua cercana a cero, en las proximidades de la no-correlación, y la curva verde, que es el

hiper-caos transformado con el modulador, nos concede una curva prácticamente sin correlación alguna, con información mutua igual a cero, como función del retardo. La figura 8.14.b nos permite estimar la dimensión mínima, que en el caso del hiper-caos (curva roja) estamos en una dimensión 20, y el mismo transformado está ubicado entre la dimensión 30 y 40. Estos resultados confirman que a pesar de que el sistema ya es bastante cercano a la aleatoriedad, aún es posible inyectarle más complejidad y acercarlo completamente hacia el ruido.

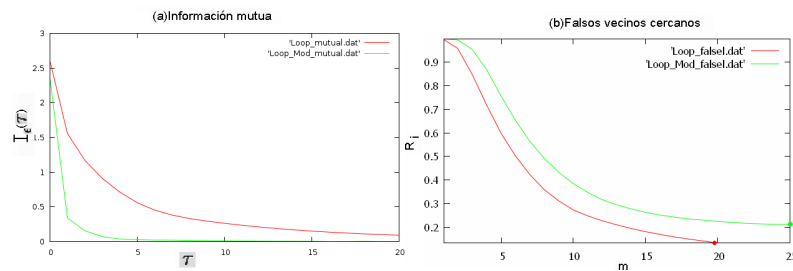


Figura 8.14: (a) Información mutua y (b) Falsos vecinos cercanos del hiper-caos y su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para $P=503\text{mW}$. Curva roja: hiper-caos y curva verde: la serie transformada.

El mapa de retorno y la sección de Poincaré, contruídas en las figuras 8.15.a,b y 8.15.c,d, nos permiten observar plenamente cómo es el atractor caótico de alta dimensión, además del nivel de ergodicidad alcanzada una vez que se transforma. Esto implica que estar en altas dimensiones no es indicativo de poseer una estructura demasiado cercana a la aleatoriedad, ver figura 8.15.a,b, es un atractor caótico que posee más dimensiones, pero no se asemeja al resultado del enmascaramiento con el modulador, de aquí que la importancia del mismo, para alcanzar ergodicidad, sea indudable. El mapa de Poincaré, 8.15.c,d, deja ver bastante de la estructura del hiper-caos, lo que significa que, pese a tener una forma definida, comprende una amplia presencia de estados que se involucran en su formación.

El máximo exponente de Lyapunov es determinado con la pendiente (línea verde) en los primeros intervalos de crecimiento del paquete de curvas en la figura 8.16. Los exponentes de Lyapunov pueden observarse en la tabla 8.3, donde tenemos un valor que es bastante mayor que cero; si es cotejado con los valores de la tabla 8.1, contemplamos que la divergencia exponencial del hiper-caos tiende a infinito compa-

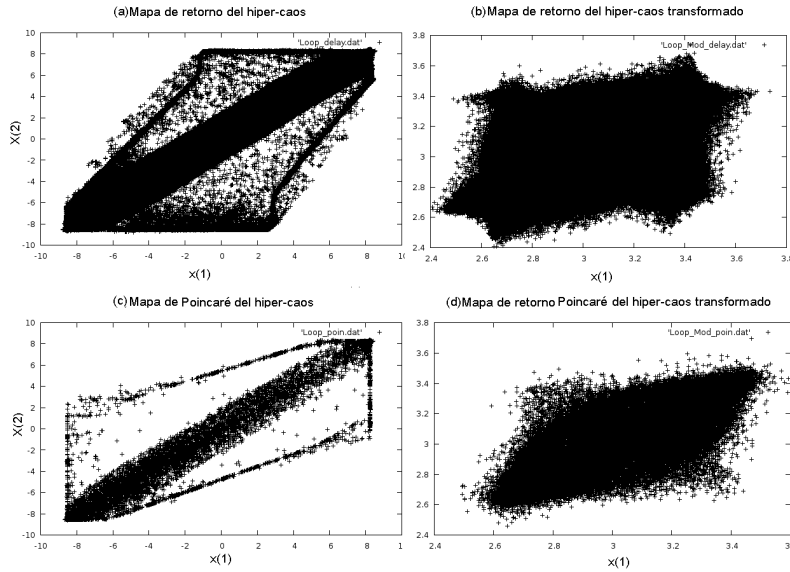


Figura 8.15: Mapa de retorno del (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico y Sección de Poincaré del (c) Hiper-caos y (d) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para $P=503\text{mW}$.

rado con el caos de baja dimensión, inclusive, el caos de Rössler transformado con el modulador, es apenas semejante en divergencia exponencial al hiper-caos. Cuando el sistema de alta dimensión es transformado, su exponente crece aún más, es decir, el resultado indica que se acerca a un exponente que caracteriza al ruido.

Tabla 8.3: Máximo exponente de Lyapunov del sistema electro-óptico

| Señal | Exponente de Lyapunov |
|----------------------|-----------------------|
| Sistema | 2.1 ± 0.1 |
| Sistema transformado | 3.3 ± 0.3 |

En las figuras 8.17.a,b y 8.17.b,c se determinan la dimensión y entropía de correlación mediante el cálculo del promedio del total de las curvas. Observemos que, en comparación con el caos de baja dimensión (figura 8.8 y 8.9), un mayor número de curvas están dispuestas, puesto que todas ellas caracterizan las dimensiones incrustadas, que en este caso sobrepasan las dimensiones del caos 3-dimensional. Asimismo, el número de ϵ -vecindades ha aumentado con las dimensiones. Como es de esperarse, la dimensión y entropía de correlación han aumentado con la transformación, estos

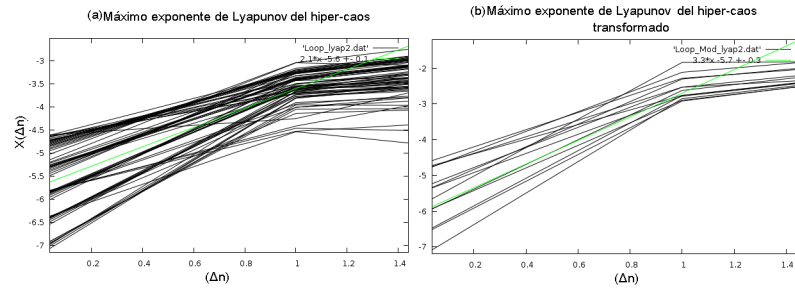


Figura 8.16: Exponente máximo de Lyapunov de (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para $P=503\text{mW}$.

valores pueden verse en la tabla 8.4. Cotejando el resultado con la tabla 8.2, notamos que los atractores de baja dimensión tienen valores inferiores en dimensión y entropía. Es importante comentar que el sistema electro-óptico transformado alcanza valores en entropía y dimensión mucho más altos que sus semejantes caóticos transformados, i.e., existe un objeto con dimensiones superiores y con mayor desorden.

Tabla 8.4: Dimensión y Entropía de Correlación del sistema electro-óptico

| Señal | Dimensión | Entropía |
|----------------------|---------------|-----------------|
| Sistema | 2.8 ± 0.1 | 0.29 ± 0.01 |
| Sistema transformado | 6.6 ± 0.1 | 0.97 ± 0.02 |

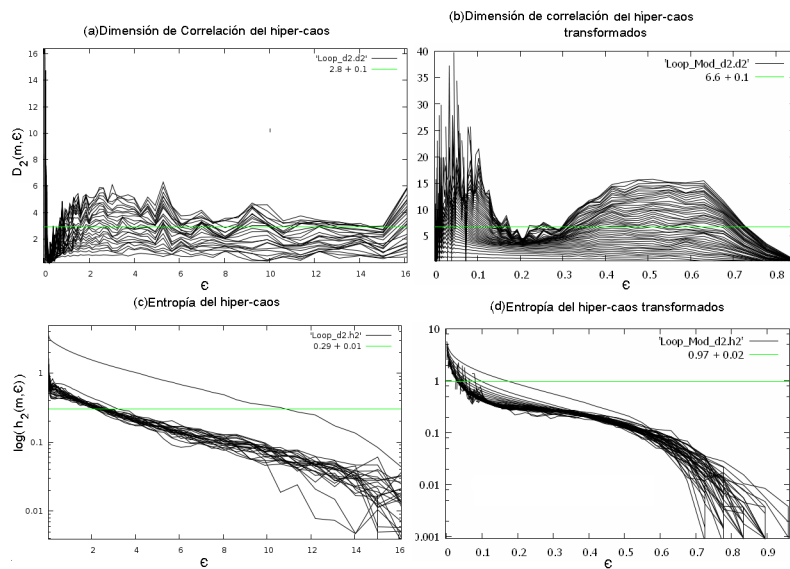


Figura 8.17: Dimensión de Correlación del (a) Hiper-caos y (b) su transformación con el sistema electro-óptico y Entropía del (c) Hiper-caos y (d) su transformación con el sistema electro-óptico. Con datos experimentales: para $P=503\text{mW}$.

Capítulo 9

Conclusiones

9.1. Conclusiones Generales

La formulación de dinámica estocástica determinista seguirá, posiblemente, creando polémica en las discusiones intelectuales, de carácter riguroso. En esta tesis, empero, se estableció un punto favorable a la discusión, mediante los hallazgos experimentales. Partiendo de la teoría, conseguimos representarla completamente en circuitos electrónicos y electro-ópticos, obteniendo los resultados que permitieron realizar numéricamente los estudios estadísticos.

Sobre el mapa aleatorio ya se ha hecho un estudio teórico [50],[51] que demuestra la ausencia de correlación, una vez que se ha realizado la transformación a alguna serie temporal oscilante no-periódica; ahora, pues, bajo los análisis de la serie temporal, encontramos que su información mutua tiende a cero, así como el considerable aumento de los grados de libertad, dependientes del número de máximos y mínimos de nuestra función de transferencia. La transformada de Fourier reveló la cercanía de nuestro resultado a lo que se conoce como ruido blanco, en el cual todas las frecuencias están presentes con la misma amplitud.

Consecuentemente, el exponente de Lyapunov aumentó considerablemente, bajo la transformación, inclusive para el caos de alta dimensión, del que podría esperarse pocos efectos, debido a su alta complejidad; sin embargo, notamos que el método no discrimina en el número de grados de libertad que posea la serie entrante, ocasionando

la aparición de más grados de libertad y aproximando el espectro del hiper-caos al ruido blanco. Asimismo, la reconstrucción del espacio de fase demostró cómo es posible el enmascaramiento de un objeto, luego de transformarlo, tanto más cuanto que su sección de Poincaré evidencia que el espacio está completamente congestionado, salvo que se hayan conseguido muy pocos picos y valles en la función cosenoidal del modulador.

Finalmente, la dimensión y entropía de correlación fue completamente afectada por el modulador, aumentando los niveles de desorden considerablemente. Lo que se interpreta como pérdida de información entre los estados, de tal forma que ellos no tengan información de su vecino, siendo independientes. La dimensión del objeto en el espacio de fase también cumplió este tanto, inclusive si se partió de caos de alta dimensión. Lo que indica que siempre podrán añadirse dimensiones, hasta el infinito; que sería aleatoriedad, impredecibilidad absoluta.

La importancia de esta tesis no sólo recae en la aplicabilidad de la teoría por sí misma, sino en posibilidad de llevar este tanto al mundo electro-óptico. El modulador Mach-Zehnder comprende una transformación no-lineal y no-invertible que puede hacerse a una señal electrónica, convirtiéndose en el corazón de todos los experimentos. Se indica que es posible llevar más allá este resultado experimental, hasta la aplicabilidad real, como telecomunicaciones seguras, disponiendo del caos de alta dimensión como portador de información de banda ancha, proporcionando privacidad a los datos que se transmiten. En la realidad [52] se ha planteado un sistema de comunicación de alta distancia y alta velocidad basada en la sincronización del caos, por un canal comercial de fibra óptica. Se codifican los mensajes mediante una onda portadora óptica, generada por un láser, luego la información será decodificada a través de un láser de la misma especie en el lugar de llegada, esto es posible porque la sincronización permite la separación entre el portador y el mensaje. En nuestro caso, emplearíamos sincronización de caos de alta dimensión [44] con propiedades estocásticas para encriptar los mensajes, como se observa en la figura 9.1.

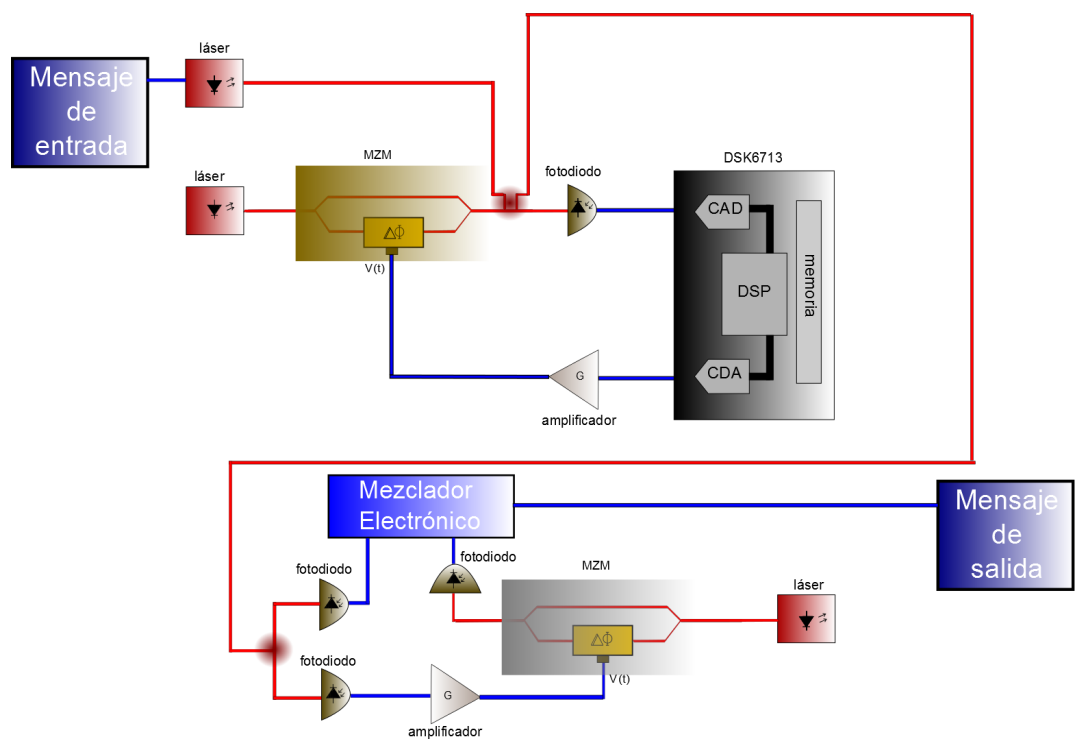


Figura 9.1: Esquema de circuitos realimentados con retardo temporal en sincronización

Referencias

- [1] Isaac Newton y D. T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press. 1976.
- [2] Leonhard Euler, Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides, *Mmoires de l'académie des sciences de Berlin*, 11 (1755), 1757, pp. 217-273.
- [3] Jean Baptiste Joseph Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Cambridge Library Collection (2009).
- [4] James Clerk Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, *Royal Society Transactions*, Vol. CLV, 1865, p 459.
- [5] V. Szebehely, Lagrange and the three-body problem, *La 'Mcanique analytique' de Lagrange et son hritage*, *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 126 (1992), suppl. 2, 201-213.
- [6] Henri Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, *Acta Mathematica* 13 (1890), pp. 1-270.
- [7] George David Birkhoff, *Dynamical systems*, New York, American Mathematical Society (1927).
- [8] Stephen Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967), 747-817.
- [9] V. I. Arnol'd, *Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Preservation of Conditionally Periodic Motions under a Small Perturbation of the Hamiltonian*, *Uspehi Mat. Nauk* 18, 13-40, 1963.

-
- [10] A. N. Kolmogorov, On Conservation of Conditionally Periodic Motions for a Small Change in Hamilton's Function, Dokl. Akad. Nauk SSSR 98, 527-530, 1954.
- [11] E. N. Lorenz "Deterministic Nonperiodic Flow." J. Atmos. Sci. 20, 130-141, 1963.
- [12] S.M. Ulam y J.V. Neumann, Bull. Am. Math. Soc. 53, 1120 (1947).
- [13] Jorge A. González y Lindomar B. De Carvalho, Modern Physics Letters B 11, 521 (1997).
- [14] J. A. González, M. Martín-Landrove y L. Trujillo, Absolutely unpredictable chaotic sequences, International Journal of Bifurcation and Chaos 10, 1867 (2000).
- [15] J. A. González, L. I. Reyes y L. E. Guerrero, Exact solutions to chaotic and stochastic systems, Chaos 11, 1 (2001).
- [16] J. A. González, L. I. Reyes, J. J. Suárez, L. E. Guerrero y G. Gutiérrez, A mechanism for randomness, Physics Letters A 295, 25 (2002).
- [17] Ott, Edward, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, 1993.
- [18] O.E. Rössler, An equations for Continuous chaos, Physics Letters 57A (1976) 397-398.
- [19] O.E. Rössler, Chaotic behaviour in simple reaction systems, Z. Naturforsch. 31 a, 259-274 (1976).
- [20] Ivana Kovacic, Michael J. Brennan, The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and Their Behaviour, Wiley (2011).
- [21] T. Matsumoto, L.O. Chua y M. Komuro, The Double Scroll, bifurcations. Int. J. Circuit Theory Appl. 14, no. 1 (1986), 117-146.
- [22] T. Matsumoto, A Chaotic Attractor from Chua's Circuit, IEEE Transactions on Circuits and Systems (IEEE) CAS-31 (12): 1055-1058 (1984).
- [23] M. C. Mackey y L. Glass, Oscillation and chaos in physiological control systems. Science, 197(4300):287-289 (1977).

-
- [24] S.M. Ulam, A collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.
- [25] P. Stein y S.M. Ulam, *Rozprawy Matematyczne* 39, 401 (1964).
- [26] T. Tsuchiya, A. Szabo y N. Saito, *Z. Naturforsch* 38a, 1035 (1983).
- [27] J.J. Suárez Vargas, *Dinámicas caóticas y estocásticas en circuitos no-lineales*, Tesis de Maestría, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas. Caracas, Febrero de 2004.
- [28] R. Hegger y H. Kant, Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *CHAOS*, V. 9, No. 2 (1999).
- [29] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [30] El programa TISEAN está disponible en la dirección web: <http://www.mpipks-dresden.mpg.de/tisean>.
- [31] D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock y M. I. Dykman, *Analogue studies of nonlinear systems*, *Rep. Prog. Phys.* 61 (1998) 889997.
- [32] A.P. Malvino, *Principios de electrónica*, McGraw-Hill (1999).
- [33] R. Boylestad, *Introductory circuit analysis*, Prentice Hall (2006).
- [34] Horowitz Group, *Build a Lorenz Attractor*, (<http://frank.harvard.edu>).
- [35] L.O. Chua, C.A. Desoer y E.S. Kuh, *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill Series in Electrical Engineering, New York, 1987.
- [36] L.O. Chua, *The Genesis of Chua's Circuit*, Hirzel-Verlag Stuttgart AEO, Vol. 46, No.4 (1992).
- [37] M.P. Kennedy, *Robust OP Amp realization of Chua's circuit*, *Frequenz*, Vol. 46, No. 3-4, pp. 66-80 (1992).

-
- [38] T.L. Carroll, A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos, *Am. J. Phys.* 63(4), 377-379 (1995).
- [39] E. Tamaseviciute, A. Tamasevicius, G. Nykolaitis, S. Bumeliene y E. Lindberg, Analogue Electrical Circuit for Simulation of the Dufng-Holmes Equation, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 13, No. 2, 241252 (2008).
- [40] R. Paschotta, Encyclopedia of laser physics and technology, rp-photonics, An Open Access Encyclopedia for Photonics and Laser Technology (<http://www.rp-photonics.com/encyclopedia.html>).
- [41] Power Source 1905 LMI, CW Laser Module with Optical Isolator Up to 30mW C-band, AVANEX.
- [42] Eds: M. Bass, E. W. Van Stryland, D. R. Williams, W. L. Wolfe, *Handbook of Optics, Volume II: Devices , Measurements ,and Properties*, McGraw-Hill , Inc (1995).
- [43] Optical Modulators Tutorial Electroabsorption Modulator (EAM) and Lithium Niobate Mach-Zehnder Modulator Modulator (MZ Modulator), Fiber Optic for Sale Co. (2009).
- [44] A. B. Cohen, Synchronization and Prediction of Chaotic Dynamics on Networks of Optoelectronic Oscillators, Tesis Doctoral, University of Maryland (2011).
- [45] B. Ravoori, Synchronization of Chaotic Optoelectronic Oscillators: Adaptative Techniques and the Design of Optimal Networks, Tesis Doctoral, University of Maryland (2011).
- [46] R. Chassaing y D. Reay, *Digital Signal Processing and Applications with the TMS320C6713 and TMS320C6416 DSK (Topics in Digital Signal Processing)*, Wiley-IEEE Press (2008).
- [47] T. E. Murphy, A. B. Cohen, B. Ravoori, K. R. B. Schmitt, A. V. Setty, F. Sorrentino, C. R. S. Williams, E. Ott and R. Roy, *Chaotic Dynamics and Syn-*

- chronization of Delayed-Feedback Nonlinear Oscillators”, *Phil. Trans R. Soc A* 368, 343-366 (2010).
- [48] Y. Chembo Kouomou, P. Colet, L. Larger and N. Gastaud, Chaotic breathers in delayed electro-optical systems, *Physical Review Letters* 95, 203903 (2005).
- [49] Application Notes, National Semiconductor Corporation, Arlington, TX, USA (1995).
- [50] J. A. González y L. Trujillo, Statistical independence of generalized chaotic sequences, *Journal of the Physical Society of Japan* 75, 2 (2006).
- [51] J. A. González y L. Trujillo, The search for independence in chaotic systems, *Acta Physica Polonica B* 37, 293 (2006).
- [52] A. Argyris, D. Syvridis, L. Larger, V. Annovazzi-Lodi, P. Colet, I.O. Fischer, J. García-Ojalvo, C. R. Mirasso, L. Pesquera y K. Alan Shore, Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links, *Nature* 438, 343-346 (2005).