UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Criterios de convergencia en el espacio quasi-normado $(L_0, \|\cdot\|_0)$ de integrales de ciertas funciones aleatorias con respecto a medidas aleatorias generales.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Alejandro Labarca** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutora: Dra. Mairene Colina

Co-tutora: Dra. Cristina Balderrama

Caracas, Venezuela

Octubre, 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Criterios de convergencia en el espacio quasi-normado** $(L_0, \|\cdot\|_0)$ **de integrales de ciertas funciones aleatorias con respecto a medidas aleatorias generales.**", presentado por el **Br. Alejandro Labarca**, titular de la Cédula de Identidad **19763974**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mairene Colina
Tutora

Dra. Cristina Balderrama
Cotutora

Dr. José Rafael León
Jurado

Msc. Kenyer Aguiar
Jurado

Dedicatoria

A tí Dios Padre, con todo mi amor, porque siempre creístes en mí.

Introducción

Considerando un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y un espacio medible $(X, \mathfrak{B})$, el presente Trabajo Especial de Grado tiene como objetivo principal analizar y desarrollar teoremas de convergencia de integrales de funciones aleatorias de la forma

$$f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x), \tag{1}$$

donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, ξ_k es una v.a. y f_k es una función $\mathcal{B}$-medible, tal que $|f_k| \leq 1$; respecto a una medida aleatoria general, esto es, respecto a una función $\mu : \Omega \times \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ tal que μ sea finitamente aditiva y continua en probabilidad respecto del conjunto vacío. En (1), la convergencia se presenta de manera incondicional.

El origen de este tipo de integración son iniciados en 1955 por R.C. Bartle, N. Dunford y J.T. Schwartz al desarrollar la teoría de la llamada BDS-integral de funciones escalares con respecto a medidas a valores en espacios de Banach. A mediados de 1970, esto fue extendido por D.R. Lewis para medidas a valores en espacios localmente convexos y, casi al mismo tiempo, a aquellos con valores en un espacio vectorial topológico. En el último caso, contribuciones significativas fueron hechas por E. Thomas y Ph. Turpin. Se supuso que la medida convexamente acotada y sus definiciones eran más exigentes que el de la integral original BDS-integral. La motivación en ambos casos fue la validez del Teorema de Convergencia Dominada. Todo lo referente a esta teoría de integración se puede encontrar en [2] y [3].

Estructuramos el Trabajo Especial de Grado en tres capítulos. En el capítulo 1 se define, a través de los espacios quasi-normados, la topología $\mathfrak{T}_p$ donde se quiere estudiar los teoremas límites. Utilizamos resultados sobre convergencia en probabilidad incondicional, espacios de

Hausdorff, espacios secuencialmente completos y propiedades de sumas de variables aleatorias independientes de Bernoulli. En el capítulo 2 utilizamos los resultados precedentes para garantizan la integrabilidad de cualquier función $\mathcal{B}$-medible respecto a una medida aleatoria μ; y estudiamos sus propiedades. Luego, en el capítulo 3, se presentan los teoremas de convergencia, los cuales se desarrolan según lo establecido en [1]. Daremos las condiciones necesarias y suficientes para que las funciones aleatorias de la forma (1) sean μ-integrables. Mas aún, se estudia la diferenciación de esta integral e investigamos el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\mu_A = \eta_A + \int_A f \, d\mu$$

para todo $A \in \mathcal{B}$, donde η es una medida aleatoria conocida y f es una función aleatoria de la forma (1).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se dan a conocer resultados diversos sobre conjuntos y funciones, espacios métricos, espacios quasi-normados y espacios de Hausdorff, teoría de procesos y sumas de variables aleatorias independientes de Bernoulli.
En lo que sigue consideraremos el espacio medible $(X, \mathcal{B})$ y el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Usaremos algunas abreviaturas y símbolos las cuales se encuentran en el Apéndice.

1.1 Conceptos básicos sobre conjuntos, funciones y teoría de probabilidad

Esta sección contiene todos aquellos resultados elementales utilizados a lo largo del trabajo investigativo.

Definición 1.1. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ una sucesión de conjuntos. Se dice que $A_n \downarrow \varnothing$ si, para todo $n \geq 1$ se tiene que $A_{n+1} \subseteq A_n$ y $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} A_n = \varnothing$.

Definición 1.2. Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ una sucesión de conjuntos. Se dice que $A_n \uparrow X$ si, para todo $n \geq 1$ se tiene que $A_n \subseteq A_{n+1}$ y $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$.

Definición 1.3. Sea $f : X_1 \times X_2 \to Y$ una función; entonces

(i) Para $x_1 \in X_1$ (fijo), la sección x_1 de f es la función $f_{x_1} : X_2 \to Y$ dada por

$$f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$$

para todo $x_2 \in X_2$.

(ii) Para $x_2 \in X_2$ (fijo), la sección x_2 de f es la función $f_{x_2} : X_1 \to Y$ dada por

$$f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$$

para todo $x_1 \in X_1$.

Definición 1.4. Sean $(X_1, \mathfrak{F}_1)$, $(X_2, \mathfrak{F}_2)$ dos espacio de medida y consideremos $A \subseteq X_1 \times X_2$. Para $x_1 \in X$ y $x_2 \in X_2$ definimos

(i) La sección x_1 de A

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \,:\, (x_1, x_2) \in A\}.$$

(ii) La sección x_2 de A

$$A_{x_2} = \{x_1 \in X_1 \,:\, (x_1, x_2) \in A\}.$$

Proposición 1.1. Sea $f \in \mathrm{L}_2$ tal que $f \geq 0$. Entonces, para cada $\lambda \in (0, 1)$, se tiene que

$$P(\{f \geq \lambda \| f\|_1\}) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\| f\|_1^2}{\| f\|_2^2}.$$

Demostración:

Sea $A = \{f \geq \lambda \|f\|_1\}$. Entonces

$$\|f\chi_A\|_1 = \mathbb{E}[f\chi_A] = \mathbb{E}[f] - \mathbb{E}[f\chi_{A^c}] \geq \mathbb{E}[f] - \lambda\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[f](1 - \lambda).$$

Esto implica que,

$$\|f\chi_A\|_1 \geq \mathbb{E}[f](1 - \lambda) = \| f\|_1(1 - \lambda). \tag{1.1}$$

Por otro lado, como $f \in \mathrm{L}_2$ entonces, aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\|f\chi_A\|_1 \leq \|f\|_2\|\chi_A\|_2.$$

Así, sustituyendo en (1.1),

$$\| f\|_2 \|\chi_A\|_2 \geq \| f\|_1 (1-\lambda);$$

esto es,

$$\| f\|_2 P^{1/2}(A) \geq \| f\|_1 (1-\lambda).$$

Luego,

$$\| f\|_2^2 P(A) \geq \| f\|_1^2 (1-\lambda)^2;$$

de donde,

$$P(A) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\| f\|_1^2}{\| f\|_2^2}. \qquad \square$$

Observación 1.1. Tomando $\|f\|_1 > \frac{1}{4}$, la proposición anterior se satisface.

Proposición 1.2. (Desigualdad de Chebishev). Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio de medida y consideremos una función μ-medible y positiva f a valores reales extendendidos; entonces, para cualquier $t > 0$, se cumple

$$\mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq t\}) \leq \frac{1}{t^2} \int_\Omega |f|^2 \, d\mu. \qquad \square$$

1.2 Definiciones básicas sobre variables aleatorias y procesos estocásticos

En esta sección daremos algunos resultados vinculados a un tipo de variable aleatoria llamada Bernoulli. Así como la definición de proceso estocástico y su ejemplo más conocido, el Movimiento Browniano.

Consideremos un experimento que tiene dos posibles resultados: éxito y fracaso; y sea $p \in (0, 1)$ la probabilidad de obtener un éxito en una realización del experimento. Si definimos la variable aleatoria $\xi = 1$ cuando el resultado es éxito y $\xi = -1$ cuando el resultado es fracaso tenemos que ξ tiene función de probabilidad dada por

$$\begin{aligned} P(\xi = 1) &= p \\ P(\xi = -1) &= 1 - p. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por (1.2) se denomina variable aleatoria de Bernoulli.
En lo que sigue, se utilizarán variables de Bernoulli considerando $p = \frac{1}{2}$, es decir, colocando el mismo peso a la función de probabilidad.
A continuación, daremos algunos resultados sobre este tipo de variables aleatorias que serán de utilidad en la obtención de resultados posteriores.

Proposición 1.3. Sea $\theta_1, ..., \theta_n$ variables aleatorias independientes de Bernoulli. Entonces, para todo $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in (0,1)$ se tiene que

$$P\left(\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i\right)^2 \geq \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right\}\right) \geq \frac{1}{3}(1-\lambda)^2.$$

Demostración:
Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i(\omega)\right)^2$$

Entonces f es una variable aleatoria no negativa. Veamos que $f \in \mathrm{L}_2$ y $\|f\|_2^2 \leq 3\|f\|_1^2$.
Para ello utilizamos las siguientes afirmaciones las cuales se deducen directamente, dada la definición de la variable aleatoria θ_j, $j \in \{1, ..., n\}$.

(i) $\mathbb{E}[\theta_i] = 1P(\{\theta_i = 1\}) + (-1)P(\{\theta_i = -1\}) = \frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0$.

(ii) $\mathbb{E}[\theta_i\theta_j] = \mathbb{E}[\theta_i]\,\mathbb{E}[\theta_j] \overset{(i)}{=} 0$, para todo $i \neq j$.

(iii) $\mathbb{E}[\theta_i^2\theta_j^2] = \mathbb{E}[\theta_j^2] = \mathbb{E}[\theta_i^2] = \mathbb{E}[1] = 1$, para todo $i \neq j$.

(iv) $\mathbb{E}[\theta_i^4] = \mathbb{E}[\theta_i^2] \overset{(iii)}{=} 1$.

(v) $\mathbb{E}[\theta_k^2\theta_i\theta_j] = \mathbb{E}[\theta_i\theta_j] = \mathbb{E}[\theta_i]\,\mathbb{E}[\theta_j] \overset{(ii)}{=} 0$, para todo $i \neq j$, $k \in \mathbb{N}$.

(vi) $\mathbb{E}[\theta_i\theta_j^2\theta_{j+1}] = \mathbb{E}[\theta_i\theta_{j+1}] = 0$; para todo $i < j$.

Luego,

$$\|f\|_2^2 = \mathbb{E}[f^2] = \mathbb{E}\left[\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i\right)^2\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\theta_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j}^{n} \lambda i \lambda_j \theta_i \theta_j\right)^2\right].$$

Nótese que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\theta_i^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda i\lambda_j\theta_i\theta_j\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\theta_i^2\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\theta_i^2\right)\left(\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i\lambda_j\theta_i\theta_j\right) + 4\left(\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i\lambda_j\theta_i\theta_j\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4\theta_i^4 + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\theta_i^2\theta_j^2\right) + 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_k^2\theta_k^2\lambda_i\lambda_j\theta_i\theta_j + 4\left(\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i\lambda_j\theta_i\theta_j\right)^2\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4\mathbb{E}[\theta_i^4] + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\mathbb{E}[\theta_i^2\theta_j^2] + 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_k^2\lambda_i\lambda_j\mathbb{E}[\theta_k^2\theta_i\theta_j]\\
&+ 4\mathbb{E}\left[\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\theta_i^2\theta_j^2 + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i\lambda_j\theta_i\theta_j\lambda_j\lambda_{j+1}\theta_j\theta_{j+1}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4\mathbb{E}[\theta_i^4] + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\mathbb{E}[\theta_i^2\theta_j^2] + 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_k^2\lambda_i\lambda_j\mathbb{E}[\theta_k^2\theta_i\theta_j]\\
&+ 4\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\mathbb{E}[\theta_i^2\theta_j^2] + 8\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i\lambda_j^2\lambda_{j+1}\mathbb{E}[\theta_i\theta_j^2\theta_{j+1}]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4 + 2\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2 + 4\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4 + 6\sum_{1\le i<j}^{n}\lambda_i^2\lambda_j^2\\
&= 3\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^4 \le 3\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)^2 = 3\mathbb{E}^2[f] = 3\|f\|_1^2 < \infty
\end{aligned}
$$

de donde, $f \in \mathrm{L}_2$ y $\|f\|_2^2 \le 3\|f\|_1^2$.

Por consiguiente, usando la Proposición 1.1,

$$P\left(\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\theta_i\right)^2 \ge \lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right\}\right) = P\left(\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\theta_i\right)^2 \ge \lambda\|f\|_1\right\}\right) \ge (1-\lambda)^2\frac{\|f\|_1^2}{\|f\|_2^2} \ge \frac{(1-\lambda)^2}{3};$$

esto es,

$$P\left(\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\theta_i\right)^2 \ge \lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right\}\right) \ge \frac{(1-\lambda)^2}{3}. \qquad \square$$

Observación 1.2. Si la suma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 > \frac{1}{4}$, entonces, por la Observación 1.1, la proposición anterior se satisface.

Proposición 1.4. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $|\lambda_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces, existe una medida μ en $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ (que depende de la sucesión $\{\lambda_n\}$) tal que para cada conjunto finito de elementos $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$\mu\left(\left\{\{a_n\} \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right| > \frac{1}{8}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right|\right\}\right) > \frac{1}{8} \tag{1.3}$$

Demostración:
Sea $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. Los elementos de Ω son considerados como sucesiones $a = \{a_n\}_{n\geq 1}$, donde a_n toma valores -1 o 1, para cada $n \in \mathbb{N}$.
Sea $\lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|\lambda_n| \leq 1$; y consideremos las medidas de probabilidad $\mu_k : \mathbb{P}(\{-1,1\}) \to [0,1]$ tal que,

$$\mu_k(\{-1\}) = \frac{1-\lambda_k}{2} \quad ; \quad \mu_k(\{1\}) = \frac{1+\lambda_k}{2}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.
A partir de estas medidas construiremos la medida μ.
Definamos $\mu_\lambda : \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ por

$$\mu_\lambda = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \mu_k.$$

Tenemos que μ, es una medida de probabilidad en $(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}))$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $r_n : \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ por

$$r_n(a) = a_n$$

donde $a = \{a_n\}_{n\geq 1} \subseteq \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$.
No es difícil ver que $\{r_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de v.a.(s) independientes en $(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mu_\lambda)$.
Consideremos los siguientes casos: (i) Supongamos primero que $\lambda = (0, ..., 0, ...)$, esto es, $\lambda_k = 0$ para cada k; y denotemos $\mu_\lambda = \mu_0$.
Nótese que, $\{r_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes de Bernoulli

respecto a la función de probabilidad μ_0. De manera que, utilizando la Observación 1.2,

$$\mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{64}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}\right) \geq \frac{1}{3}(1-\frac{1}{16})^2 > \frac{1}{4} \tag{1.4}$$

Por otro lado, supongamos primero que, $\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right| = 1$; entonces, como,

$$\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\} \subseteq \left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\right\};$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right) &\geq \mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}\right)\\ &= \mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{64}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}\right)\end{aligned}$$

donde,

$$\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\} \subseteq \left\{a \in \{-1,+1\}^{n} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{64}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right) &\geq \mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{64}\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}\right)\\ &\geq \mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right|^2 > \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \frac{1}{4}\right\}\right)\\ &\overset{(1.4)}{\geq} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Así,

$$\mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right) > \frac{1}{4} \tag{1.5}$$

(ii) Ahora estudiaremos el caso $\lambda \neq \bar{0}$. Primero notemos que,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} r_k(a)\, d\mu_\lambda = \lambda_n. \tag{1.6}$$

Entonces, usando el hecho de que las variables aleatorias son independientes, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} (\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)\, d\mu_\lambda = \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[(\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)] &= \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[(\lambda_i - r_i)]\mathbb{E}_{\mu_\lambda}[(\lambda_j - r_j)]\\ &= (\mathbb{E}_{\mu_\lambda}[\lambda_i] - \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[r_i])\,(\mathbb{E}_{\mu_\lambda}[\lambda_j] - \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[r_j])\\ &= (\lambda_i - \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[r_i])\,(\lambda_j - \mathbb{E}_{\mu_\lambda}[r_j])\\ &\overset{(1.6)}{=} 0 \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

de donde, para todo $1 \leq i < j \leq n$,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} (\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)\, d\mu_\lambda = 0. \tag{1.7}$$

También vale la pena se˜alar que,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} r_k^2\, d\mu_\lambda = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} d\mu_\lambda = 1. \tag{1.8}$$

Así, si $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right)^2 d\mu_\lambda &= \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)^2 x_k^2 + 2\sum_{1\leq i<j}^{n}(\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)x_i x_j\right) d\mu_\lambda \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} (\lambda_k^2\, x_k^2 - 2\lambda_k\, r_k\, x_k^2 + r_k^2\, x_k^2)\, d\mu_\lambda + 2\sum_{1\leq i<j}^{n}\int_{\{-1,1\}^{n}} (\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)x_i x_j\, d\mu_\lambda \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2\, x_k^2 - 2\lambda_k\, x_k^2 \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} r_k\, d\mu_\lambda + x_k^2 \int_{\{-1,1\}^{n}} r_k^2\, d\mu_\lambda\right) \\
&+ 2\sum_{1\leq i<j}^{n} x_i x_j \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} (\lambda_i - r_i)(\lambda_j - r_j)\, d\mu_\lambda.
\end{aligned}$$

Por tanto, de (1.6)-(1.8),

$$\begin{aligned}
\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right)^2 d\mu_\lambda = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2\, x_k^2 - 2\lambda_k\, x_k^2 \lambda_k + x_k^2\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^2\, x_k^2 - 2\lambda_k^2\, x_k^2 + x_k^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2 - \lambda_k^2\, x_k^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\, x_k^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right)^2 d\mu_\lambda \leq \frac{1}{4}.$$

De manera que, aplicando la Desigualdad de Chebishev a la función medible $\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu_{\lambda_k}\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| \geq \frac{7}{8}\right\}\right) &\leq \frac{1}{(\frac{7}{8})^2}\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right)^2 d_{\mu_\lambda} \\
&\leq \frac{1}{(\frac{7}{8})^2}\frac{1}{4} = \frac{16}{49},
\end{aligned}$$

siempre que $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{1}{4}$.

Ahora bien, dado que

$$\mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| < \frac{7}{8}\right\}\right) = 1 - \mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| \geq \frac{7}{8}\right\}\right).$$

Entonces,

$$\mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| < \frac{7}{8}\right\}\right) \geq 1 - \frac{16}{49} > \frac{1}{4}, \tag{1.9}$$

siempre que $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{1}{4}$.

Nótese que

$$\begin{aligned}
&\mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| < \frac{7}{8}; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \frac{1}{4}\right\}\right) \\
&\leq \mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - r_k)x_k\right| < \frac{7}{8}\right\}\right) = \mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| < \frac{7}{8}\right\}\right) \\
&\leq \mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : 1 - \left|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| < \frac{7}{8}\right\}\right) = \mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right)
\end{aligned}$$

Luego, utilizando (1.9),

$$\mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right) > \frac{1}{4}. \tag{1.10}$$

Así, de (1.5) y (1.10),

$$\frac{\mu_\lambda\left(\left\{a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right) + \mu_0\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right| > \frac{1}{8}\right\}\right)}{2} > \frac{1}{8}$$

Por tanto, denotanto $\mu = \frac{\mu_\lambda + \mu_0}{2}$, se obtiene que (1.3) se satisface si $|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_n| = 1$. Como la escogencia de $x_1, ..., x_n$ es arbitraria, esto implica (1.3). □

Proposición 1.5. Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$; entonces, para cada conjunto finito de números reales $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que $|\lambda_k| \leq 1$, con $k \in \{1, ..., n\}$ y cualquier $t > 0$ se cumple que

$$P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k\right| > 8t\right) \leq 8 \max_{\theta_1, \ldots \theta_n = \pm 1} P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \theta_k \xi_k\right| > t\right).$$

Demostración:

Sea $t > 0$. Dado que $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$, utilizando la Proposición 1.4 con $\omega \in \Omega$ (fijo) y $x_k = \xi_k(\omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que,

$$\mu\left(\left\{a \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)\xi_k(w)\right| > \frac{1}{8}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\xi_k(w)\right|\right\}\right) > \frac{1}{8}. \tag{1.11}$$

Consideremos el conjunto

$$A = \left\{(w,a) \in \Omega \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}} : \left|\sum_{k=1}^{n} r_k(a)\xi_k(w)\right| > \frac{1}{8}\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\xi_k(w)\right|\right\}$$

entonces, por el Teorema de Fubini,

$$\int_\Omega \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \chi_A(w,a)\, d\mu(a)\, dP(w) = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \int_\Omega \chi_A(w,a)\, dP(w)\, d\mu(a) \tag{1.12}$$

donde,

(i) $\displaystyle\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \chi_A(w,a)\, d\mu(a) = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} (\chi_A)_w(a)\, d\mu(a) = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \chi_{A_w}(a)\, d\mu(a) = \mu(A_w).$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega \chi_A(w,a)\, dP(w) = \int_\Omega (\chi_A)_a(w)\, dP(w) = \int_\Omega \chi_{A_a}(w)\, dP(w) = P(A_a).$

Así, sustituyendo en (1.11),

$$\int_\Omega \mu(A_w)\, dP(w) = \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} P(A_a)\, d\mu(a). \tag{1.13}$$

En este sentido, integrando (1.12) con respecto a P y utilizando (1.13), se tiene que

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} P(A_a)\, d\mu(a) > \int_\Omega \frac{1}{8}\, dP(w) = \frac{1}{8}. \tag{1.14}$$

Por otro lado, para cada $a \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$P(A_a) \leq \max_{a_1 \ldots a_n = \pm 1} P(A_a)$$

de donde,

$$\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} P(A_a)\, d\mu(a) \leq \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \max_{a_1,\ldots,a_n=\pm 1} P(A_a)\, d\mu(a) = \max_{a_1,\ldots,a_n=\pm 1} P(A_a) \int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} d\mu(a) =$$

$$= \max_{a_1,\ldots,a_n=\pm 1} P(A_a)\mu(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}) = \max_{a_1,\ldots,a_n=\pm 1} P(A_a).$$

Por consiguiente, sustituyendo en (1.14),

$$\max_{a_1,\ldots,a_n=\pm 1} P(A_a) > \frac{1}{8}. \tag{1.15}$$

Ahora bien, si consideramos

$$\Omega_t = \left\{ w \in \Omega : \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k(w) \right| > 8t \right\}$$

entonces,

(*i*) Si $P(\Omega_t) = 0$, es claro que

$$P\left(\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \right| > \ 8t \right) = P(\Omega_t) \leq 8 \max_{a_1,\ldots a_n = \pm 1} P\left(\left| \sum_{k=1}^{n} r_k(a) \xi_k \right| > t \right).$$

(*ii*) Si $P(\Omega_t) > 0$, entonces

$$P_{\Omega_t}(A) = P(A|\Omega_t) = \frac{P(A \cap \Omega_t)}{P(\Omega_t)}.$$

define una medida de probabilidad para todo $A \in \Omega$.

Así, de manera análoga, P_{Ω_t} satisface (1.15); esto es,

$$\max_{a_1,\ldots,a_n = \pm 1} P_{\Omega_t}(A_a) > \frac{1}{8}$$

donde,

$$A_{\bar{\theta}} \cap \Omega_t \subset \left\{ w \in \Omega : \left| \sum_{k=1}^{n} r_k(a) \xi_k(w) \right| > t \right\}.$$

Esto implica que,

$$\max_{a_1,\ldots,a_n = \pm 1} \frac{P\left(\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} r_k(a) \xi_k(w) \right| > t \right\} \right)}{P(\Omega_t)} > \frac{1}{8}.$$

Luego,

$$\max_{a_1,\ldots,a_n = \pm 1} \frac{P\left(\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} r_k(a) \xi_k(w) \right| > t \right\} \right)}{P\left(\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k(w) \right| > 8t \right\} \right)} > \frac{1}{8}.$$

Por lo tanto,

$$P\left(\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k \right| > \ 8t \right) \leq 8 \max_{a_1,\ldots a_n = \pm 1} P\left(\left| \sum_{k=1}^{n} r_k(a) \xi_k \right| > t \right). \qquad \square$$

Veamos ahora algunos resultados básicos de procesos estocásticos.

Definición 1.5. Dado un espacio muestral Ω, diremos que $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ es un vector aleatorio de dimensión k si cada una de sus componentes $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, para i=1,...,k es una variable aleatoria.

En este punto se hace notable el nombrar dos definiciones importantes como es el caso de la definicioń de la esperanza y la matriz de covarianza de un vector aleatorio.

Definición 1.6. La esperanza matemática de un vector aleatorio $X = (X_1, ..., X_n)$ se define como

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}[X_1], ..., \mathbb{E}[X_n]).$$

Definición 1.7. Sea $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio donde cada X_i tiene varianza finita; entonces definimos la matriz de covarianza, $\sum_n(i,j)$, como la matriz cuyas entradas (i,j) es la covarianza

$$\sum_n(i,j) = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)],$$

donde $\mu_i = \mathbb{E}(X_i)$.

Es importante destacar que un vector aleatorio es discreto (resp. continuo) si, y solo si, sus componentes son variables aleatorias discretas (resp. continuas); y será mixto si existen al menos dos componentes tales que una corresponde a una variable aleatoria discreta y la otra a una variable aleatoria continua.
Un ejemplo de vector aleatorio continuo es el vector gaussiano, cuya definición se muestra a continuación.

Definición 1.8. Sea $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ un vector aleatorio. Se dice que X es un vector gaussiano si él tiene densidad normal multivariada; esto es, si
$f(X) = \frac{1}{\left(2\pi|\sum_n|\right)^{\frac{\pi}{2}}}(\exp(-x - \mu_n)\sum_n^{-1}(x - \mu_n)^t)$; donde $\mu_n = \mathbb{E}[X_i]$ y $\sum_n$ es la matriz de covarianza cuya entrada (i,j) está definida por $\sum_n(i,j) = cov(X_i, X_j)$.

Una manera de corroborar si un vector aleatorio X $= (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un vector normal o gaussiano es verificando que toda combinación lineal de sus componentes es una variable aleatoria gaussiana.

Ahora, en este mismo orden de ideas se define como proceso aleatorio a toda experiencia que genera una secuencia de valores modelizables como variables aleatorias. Cada experiencia global tiene un posicionamiento, o sea un orden en la experiencia global.
Seguidamente pasamos a definir proceso estocástico, una vez revisadas las definiciones anteriores.

Definición 1.9. Un proceso estocástico X es un familia $(X_t, t \in I) = (X_t(\omega), \omega \in \Omega, I \subseteq \mathbb{R})$, de variables aleatorias definidas sobre un espacio Ω, donde I es un intervalo, finito o infinito numerable.

Un proceso estocástico es una fución de dos variables:

(i) Para un instante de tiempo t fijo, $X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, es una variable aleatoria.

(ii) Para un ω fijo, $X_t(\omega)$, $t \in I$, es una función del tiempo. Esta función es llamada trayectoria del proceso X.

Se dice que un proceso estocástico es a tiempo discreto (resp. continuo) si el intervalo I es finito o infinito numerable.

Definición 1.10. Un proceso estocástico X_t, $t \in I$ es llamado gaussiano si sus distribuciones finito-dimensionales son gaussianas, es decir, si para cada colección de $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_k$, el vector aleatorio $Z = (X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ tiene distribución normal multivariada.

Un ejemplo de este tipo de procesos es el Movimiento Browniano.

Definición 1.11. Un proceso estocástico **B**$= \{\mathrm{B}_t \ : \ t \in [0, \infty\}$ es llamado Movimiento Browniano si las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) En el instante $t = 0$, $\mathrm{B}_0 = 0$.

(ii) Es estacionario e independiente por incrementos.

(iii) Para cada $t > 0$, B_t tiene una distribución normal $N(0, t)$.

(iv) Posee trayectorias aleatorias continuas.

1.3 Espacios quasi-normados

Esta sección abarca resultados sobre espacios topológicos, en particular espacios métricos, espacios de Hausdorff y espacios secuencialmente completos. Se da a conocer el concepto de quasi-norma, estableciendo la definición de los espacios quasi-normados a través de los espacios métricos. De igual manera daremos a conocer varios tipos de convergencia y considerando el espacio L_0 con una quasi-norma en particular, se demostrarán algunos enunciados relevantes que servirán para definir un tipo de integral respecto a una medida aleatoria desarrolada en los capítulos posteriores.

Definición 1.12. Sea V un espacio vectorial. Una quasi-norma* es un mapa $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}^+$ tal que,

(i) $\xi = 0$ si, y solo si, $\|\xi\| = 0$.

(ii) Para todo $\xi, \eta \in M$, $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

Ejemplo 1.1. El mapa $\|\cdot\|_0 : \mathrm{L}_0 \to \mathbb{R}^+$ dado por

$$\|\xi\|_0 = \sup\{\delta < 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\}$$

es una quasi-norma*. Veamos esto.

Para ver que $\|\cdot\|_0$ verifica las condiciones (i) y (ii) de la Definición 1.12 vamos a utilizar las siguientes afirmaciones

$$\sup\{\delta < 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} = \inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}$$

y

$$\inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \in \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}.$$

Las cuales demostraremos a continuación. Para ello, consideraremos conjuntos

$$A = \{\delta < 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} \quad y \quad B = \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}$$

Notemos que si $\delta_0 \in A$, $\delta_1 \in B$ tal que $\delta_1 \leq \delta_0$; entonces,

$$\delta_1 \geq P(\{|\xi| > \delta_1\}) \geq P(\{|\xi| > \delta_0\}) > \delta_0$$

de donde,

$$\delta_1 > \delta_0$$

lo cual representa una contradicción.

Así, es evidente que

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Luego, para obtener la igualdad, basta demostrar que no es posible que

$$\sup(A) < \inf(B).$$

Veamos esto por absurdo. Supongamos que $\sup(A) < \inf(B)$; entonces, existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup(A) < \delta < \inf(B).$$

Esto implica que,

$$\delta \notin A \qquad y \qquad \delta \notin B$$

esto es,

$$\delta \in A^c \qquad y \qquad \delta \in B^c \tag{1.16}$$

donde,

$$\begin{aligned}
A^c &= \{\delta < 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\}^c \\
&= \{\delta \in \mathbb{R} : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \cup \{\delta \geq 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} \\
&= \{\delta < 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \cup \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \cup \{\delta \geq 1 : P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} \\
&= \varnothing \cup \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \cup \varnothing \\
&= \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} = B.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, utilizando (1.16), se obtiene que

$$\delta \in B \qquad y \qquad \delta \in B^c$$

lo cual establece una contradicción.

De manera que,

$$\sup(A) = \inf(B)$$

esto es,

$$\|\xi\|_0 = \inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}. \tag{1.17}$$

Sólo falta mostrar que

$$\inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} \in \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}$$

o equivalentemente, utilizando (1.17),

$$\|\xi\|_0 \in \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}.$$

Para ello, consideremos una sucesión decreciente $\{\delta_n\}_{n\geq 1} \subseteq \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \|\xi\|_0$ y definamos los conjuntos

$$\Omega_n = \{|\xi| > \delta_n\} \tag{1.18}$$

$$y$$

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n \tag{1.19}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, de (1.17) y (1.18),

$$P(\Omega_n) \leq \|\xi\|_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto implica que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{P(\Omega_n)\} \leq \|\xi\|_0. \tag{1.20}$$

Mas aún, por (1.19), se obtiene que

$$\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \tag{1.21}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así,

$$\lim_{n\to\infty} P(\Omega_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{P(\Omega_n)\} \tag{1.22}$$

de donde, por el Teorema de convergencia Monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega_n}\, dP = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \chi_{\Omega_n}\, dP.$$

Luego, utilizando (1.20), (1.21) y (1.22) se tiene que

$$\begin{aligned} P(\{|\xi| > \|\xi\|_0\}) = \int_\Omega \chi_{\{|\xi|>\|\xi\|_0\}}\, dP = \int_\Omega \chi_{\cup_{n\geq 1}\Omega_n}\, dP = \int_\Omega \chi_{\lim\limits_{n\to\infty}\Omega_n}\, dP &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \chi_{\Omega_n}\, dP \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_{\Omega_n}\, dP \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\Omega_n) \\ &\leq \|\xi\|_0 \end{aligned}$$

esto es,

$$P(\{|\xi| > \|\xi\|_0\}) \leq \|\xi\|_0.$$

Por tanto,

$$\|\xi\|_0 \in \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\}. \tag{1.23}$$

Finalmente, veamos que $\|\cdot\|_0$ se cumplen las condiciones dadas en la Definición 1.12:

(i) ($\Rightarrow$) Supongamos que $\|\xi\|_0 = 0$; entonces, utilizando (1.23), se obtiene que

$$P(\{|\xi| > 0\}) \leq 0$$

esto es,

$$P(\{|\xi| > 0\}) = 0.$$

Luego,

$$P(\{|\xi| = 0\}) = 1$$

de donde,

$$\xi = 0.$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\xi = 0$, es decir, $P\{\xi = 0\} = 1$; entonces,

$$\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} = [0, \infty)$$

de donde

$$\inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi| > \delta\}) \leq \delta\} = 0$$

esto es,

$$\|\xi\|_0 = 0.$$

(ii) Sea $\xi, \eta \in L_0$; veamos que

$$\{|\xi+\eta| > \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0\} \subseteq \{|\xi| > \|\xi\|_0\} \cup \{|\eta| > \|\eta\|_0\}.$$

En efecto, consideremos $\omega_0 \in \{|\xi| \leq \|\xi\|_0\} \cap \{|\eta| \leq \|\eta\|_0\}$; entonces,

$$|\xi(\omega_0)| \leq \|\xi(\omega_0)\|_0 \quad y \quad |\eta(\omega_0)| \leq \|\eta(\omega_0)\|_0.$$

Esto implica que,

$$|(\xi+\eta)(\omega_0)| = |\xi(\omega_0)+\eta(\omega_0)| \leq |\xi(\omega_0)| + |\eta(\omega_0)| \leq \|\xi(\omega_0)\|_0 + \|\eta(\omega_0)\|_0$$

de donde,

$$|(\xi+\eta)(\omega_0)| \leq \|\xi(\omega_0)\|_0 + \|\eta(\omega_0)\|_0$$

esto es,

$$\omega_0 \in \{|\xi+\eta| \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0\}.$$

De modo que,

$$\{|\xi| \leq \|\xi\|_0\} \cap \{|\eta| \leq \|\eta\|_0\} \subseteq \{|\xi+\eta| \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0\}.$$

Así, tomando complemento en la relación anterior se tiene que

$$\{|\xi+\eta| > \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0\} \subseteq \{|\xi| > \|\xi\|_0\} \cup \{|\eta| > \|\eta\|_0\}. \tag{1.24}$$

Luego, utilizando (1.23) y (1.24), obtenemos que

$$P(\{|\xi+\eta| > \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0\}) \leq P(\{|\xi| > \|\xi\|_0\}) + P(\{|\eta| > \|\eta\|_0\}) \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0$$

de donde,

$$\|\xi\|_0 + \|\eta\|_0 \in \{\delta \geq 0 : P(\{|\xi+\eta| > \delta\}) \leq \delta\}.$$

Por tanto,

$$\inf\{\delta \geq 0 : P(\{|\xi+\eta| > \delta\}) \leq \delta\} \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0$$

esto es,

$$\|\xi+\eta\|_0 \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0.$$ □

Observación 1.3. Nótese que

$$\|c\xi\|_0 \geq |c|\|\xi\|_0, \quad \text{para todo } c \leq 1$$

y

$$\|c\xi\|_0 \leq |c|\|\xi\|_0; \quad \text{para todo } c \geq 1$$

En efecto, supongamos que para algún $|c| \leq 1$

$$\|c\,\xi\|_0 < |c|\|\xi\|_0.$$

Entonces, para todo $\delta \in \{\delta < 1 \,:\, P(\{|c\,\xi| > \delta\}) > \delta\}$,

$$\frac{\delta}{|c|} < \|\xi\|_0. \tag{1.25}$$

En particular, si $0 < \delta \leq |c|$, la desigualdad (1.25) se satisface. Por consiguiente,

$$\|\xi\|_0 > 1$$

lo cual establece una contradicción, pues $\|\xi\|_0 \leq 1$.
Así,

$$\|c\,\xi\|_0 \geq |c|\|\xi\|_0; \quad \text{para todo } |c| \leq 1.$$

De manera análoga, si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|c| \geq 1$ cumple que

$$\|c\xi\|_0 > |c|\|\xi\|_0.$$

Entonces, para todo $\delta \in \{\delta < 1 \,:\, P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\}$,

$$\|c\,\xi\|_0 > |c|\delta. \tag{1.26}$$

En particular, si $\delta > \frac{1}{|c|}$, la desigualdad (1.26) se satisface. Por consiguiente,

$$\|c\xi\|_0 > 1$$

lo cual establece una contracción, pues $\|c\xi\|_0 \leq 1$. $\square$

Observación 1.4. Para todo $\xi, \eta \in \mathrm{L}_0$ tal que $|\xi| \leq |\eta|$,

$$\|\xi\|_0 \leq \|\eta\|_0 \,.$$

En efecto, si $\xi, \eta \in \mathrm{L}_0$ son tales que $|\xi| \leq |\eta|$, entonces,

$$\{|\xi| > \delta\} \subseteq \{|\eta| > \delta\}$$

de donde,

$$P(\{|\xi| > \delta\}) \leq P(\{|\eta| > \delta\}).$$

Por consiguiente,

$$\{\delta < 1 \,:\, P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} \subseteq \{\delta < 1 \,:\, P(\{|\eta| > \delta\}) > \delta\}.$$

Luego,

$$\sup\{\delta < 1 \,:\, P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\} \leq \{\delta < 1 \,:\, P(\{|\eta| > \delta\}) > \delta\}$$

esto es,

$$\|\xi\|_0 \leq \|\eta\|_0.$$

Ahora introduciremos unas nociones básicas sobre espacios topológicos y algunas de sus caracterizaciones.

Definición 1.13. Sea X un conjunto y $\mathfrak{T} \subseteq \mathbb{X}$. Se dice que $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio topológico si, y solo si, se cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\varnothing, X \in \mathfrak{T}$.

(ii) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \mathfrak{T}$, entonces, $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathfrak{T}$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{T}$, entonces, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathfrak{T}$.

Observación 1.5. Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico.

(i) Se dice que U es abierto en $(X, \mathfrak{T})$ si, y solo si $U \in \mathfrak{T}$.

(ii) Se dice que U es cerrado en $(X, \mathfrak{T})$ si, y solo si $U^c \in \mathfrak{T}$.

Definición 1.14. Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de una topología de X si, y solo si, se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Para todo $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.

(ii) Para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Proposición 1.6. Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una base de una topología de X, se define

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X \,|\, \forall\, x \in U \;\exists\; B \in \mathcal{B} \text{ tal que } x \in B \subseteq U\} \cup \{\varnothing\}.$$

Entonces, $(X, \mathfrak{T}_{\mathcal{B}})$ es un espacio topológico.

Demostración:

Veamos que $\mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$ cumple las condiciones dadas en la (1.13) Es claro que $\varnothing \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$. Consideremos $x \in X$; entonces, como $\mathcal{B}$ es un base de una topología de X, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq X$$

de donde, $X \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$.

Veamos ahora que si $\{U_i\}_{i=1}^{n} \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$, entonces, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$.

Si $x \in \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} U_i$, se tiene que $x \in U_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Luego, por la definición de $\mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$, existe $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B_i \subseteq U_i$$

para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

Ahora bien, como $\mathcal{B}$ es una base, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Así,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}.$$

Sólo nos falta verificar que

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}.$$

Para ello, consideremos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$ y $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$; entonces, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que

$$x \in U_{\alpha_0}.$$

Como, $U_{\alpha_0} \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$$

de donde,

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathfrak{T}_{\mathcal{B}}.$$

Luego, $(X, \mathfrak{T}_{\mathcal{B}})$ es un espacio topológico. □

Un ejemplo de espacio topológico son los espacios métricos los cuales definimos a continuación.

Observación 1.6. Se dice que $\mathfrak{T}_{\mathcal{B}}$ es la topología generada por la base $\mathcal{B}$.

Definición 1.15. Sea X un conjunto y $d :\ X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Se dice que d es una métrica si, y solo si,

(i) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$.

(ii) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$.

(iii) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(iv) Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definición 1.16. Un espacio métrico es un par ordenado (X, d) donde X es un conjunto y d es una métrica en X.

Definición 1.17. Sea V un espacio vectorial. Una quasi-norma es una quasi-norma* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

define una métrica.

Ejemplo 1.2. El mapa $\|\cdot\|_0 : \mathrm{L}_0 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una quasi-norma.
Para ello, consideremos una función $d_p : \mathrm{L}_0 \times \mathrm{L}_0 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_p(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|_0.$$

Como ya vimos en el Ejemplo 1.1 $\|\cdot\|_0$ es una quasi-norma*. Sólo falta verificar las condiciones dadas en Definición 1.15.
Sea ξ, η, $\gamma \in \mathrm{L}_0$; entonces

(i) $d_p(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|_0 \geq 0$.

(ii) Como

$$d_p(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \|\xi - \eta\|_0 = 0 \Leftrightarrow \xi - \eta = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta$$

se tiene que,

$$d_p(\xi, \eta) = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta.$$

(iii) Dado que

$$d_p(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|_0 = \|\eta - \xi\|_0 = d_p(\eta, \xi)$$

entonces,

$$d_p(\xi, \eta) = d_p(\eta, \xi).$$

(iv) Considerando que

$$d_p(\xi, \gamma) = \|\xi - \gamma\|_0 = \|\xi - \gamma + \eta - \eta\|_0 \leq \|\xi - \eta\|_0 + \|\eta - \gamma\|_0 = d_p(\xi, \eta) + d_p(\eta, \gamma)$$

obtenemos

$$d_p(\xi, \gamma) \leq d_p(\xi, \eta) + d_p(\eta, \gamma).$$

Así, d_p es una métrica. □

Definición 1.18. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Se define la bola de centro en x y radio ϵ, denotada por $B(x, \epsilon)$, como sigue

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Teorema 1.1. Todo espacio métrico es topológico.

Demostración:

Sea (X, d) un espacio métrico. Consideremos la siguiente colección de subconjuntos

$$\mathcal{B}_d = \{ B(x, \epsilon) : x \in X \ , \ \epsilon > 0\}.$$

Veamos que $\mathcal{B}_d$ es una base de una topología de X.

Para ello, debemos mostrar que se cumplen las condiciones dadas en Definición 1.14:

(i) Es claro que, para todo $x \in X$, $x \in B(x, 1) \in \mathcal{B}_d$.

(ii) Sean $x, y \in X$ y $\epsilon, \delta > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta) \neq \varnothing$.

Consideremos $z \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta)$ y la bola abierta $B(z, \beta)$, donde

$$\beta = \min\{\epsilon - d(z, x) \ , \ \delta - d(x, y)\}. \tag{1.27}$$

Entonces, por la definición de $\mathcal{B}$, basta probar que

$$B(z, \beta) \subseteq B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta).$$

Sea $w \in B(z, \beta)$; entonces, utilizando (1.27),

$$d(w, z) < \beta \leq \epsilon - d(z, x)$$

y

$$d(w, z) < \beta \leq \delta - d(z, y).$$

Usando estas desigualdades y aplicando la propiedad de simetría respecto de la métrica d, tenemos

$$d(x, w) = d(w, x) \leq d(w, z) + d(z, x) < \epsilon$$

$$y$$

$$d(y, w) = d(w, y) \leq d(w, z) + d(z, y) < \delta.$$

Luego,

$$\omega \in B(x, \epsilon) \qquad y \qquad \omega \in B(y, \delta),$$

esto es,

$$\omega \in B(x, \epsilon) \cap B(y, \delta).$$

Así, $\mathcal{B}_d$ es una base para una topología de X. Por tanto, utilizando Proposición 1.6, $(X, \mathfrak{T}_{\mathcal{B}_d})$ es un espacio topológico. $\square$

Observación 1.7. La topología generada por la base $\mathcal{B}_d$ se llama topología inducida por la métrica d y se denota $\mathfrak{T}_d$.

Definición 1.19. Un espacio métrico generado por una quasi-norma se denomina espacio quasi-normado.

Las propiedades de los espacios quasi-normados pueden consultarse en [5].

Ejemplo 1.3. $(L_0, \mathfrak{T}_{d_p})$ es un espacio quasi-normado.

Una vez aclaradas las definiciones y características de espacios topológicos y espacios métricos estableciendo la conexión entre ellos, vamos ahora a trabajar con sucesiones en estos tipos de espacios.

Definición 1.20. Sea $(X, \mathfrak{T})$ un espacio topológico y $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos en X. Se dice que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x si, y solo si, para todo conjunto abierto U_x tal que $x \in U_x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in U_x$.
Se denotará $x_n \xrightarrow{\mathfrak{T}} x$.

Lema 1.1. Consideremos el espacio quasi-normado $(L_0, \mathfrak{T}_{d_p})$ y sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos en L_0. Entonces, $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ converge a una variable aleatoria ξ si, y solo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N(\epsilon)$ entonces $\|\xi_n - \xi\|_0 < \epsilon$ ($\xi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_0} \xi$).

Demostración:
En efecto,

$$\begin{aligned}
\xi_n \xrightarrow{\mathfrak{T}_{d_p}} \xi &\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \xi_n \in B_{d_p}(\xi, \epsilon)\,,\ si\ n \geq N. \\
&\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } d_p(\xi, \xi_n) < \epsilon\,,\ si\ n \geq N. \\
&\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } d_p(\xi_n, \xi) < \epsilon\,,\ si\ n \geq N. \\
&\Leftrightarrow \forall\, \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|\xi_n - \xi\|_0 < \epsilon\,,\ si\ n \geq N.
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 1.21. Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$. Se dice que $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a una variable aleatoria ξ si para cada $\epsilon > 0$, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \leq \delta,$$

esto es,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) = 0.$$

Se denotará $\xi_n \overset{P}{\to} \xi$ ó $\xi = \mathrm{p}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Proposición 1.7. Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones en L_0 tales que convergen en probabilidad a ξ, η respectivamente; entonces,

(i) $\{\xi_n + \eta_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a $\xi + \eta$.

(ii) $\{\xi_n \eta_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad a $\xi\,\eta$.

Demostración:
Sea ϵ, $\delta > 0$ y consideremos $\omega_0 \in \left\{|\xi_n - \xi| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \cap \left\{|\eta_n - \eta| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\}$; entonces,

$$\begin{aligned}
|(\xi_n + \eta_n)(\omega_0) - ((\xi + \eta)(\omega_0))| &= |\xi_n(\omega_0) + \eta_n(\omega_0) - (\xi(\omega_0) + \eta(\omega_0))| \\
&= |\xi_n(\omega_0) + \eta_n(\omega_0) - \xi(\omega_0) - \eta(\omega_0)| \\
&\leq |\xi_n(\omega_0) - \xi(\omega_0)| + |\eta_n(\omega_0) - \eta(\omega_0)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

de donde, $\omega_0 \in \{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| \leq \epsilon\}$.
Por consiguiente,

$$\left\{|\xi_n - \xi| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \cap \left\{|\eta_n - \eta| \leq \frac{\epsilon}{2}\right\} \subseteq \{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| \leq \epsilon\}.$$

Luego, de la convergencia de $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$, se tiene que existen $N_1(\epsilon, \delta), N_2(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_1$, $n \geq N_2$ entonces

$$P\left(\{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| > \epsilon\}\right) \leq P\left(\left\{|\xi_n - \xi| > \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) + P\left(\left\{|\eta_n - \eta| > \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Así, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se obtiene que

$$P(\{|(\xi_n + \eta_n) - (\xi + \eta)| > \epsilon\}) < \delta; \quad \text{para todo } n \geq N$$

De manera análoga, para probar (ii), consideremos $\omega_0 \in \{|\xi_n - \xi| \leq \epsilon_1\} \cap \{|\eta_n - \eta| \leq \epsilon_1\}$ con $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{1+|\eta|+|\xi|}$; entonces,

$$\begin{aligned}
|\xi_n \, \eta_n(\omega_0) - \xi \, \eta(\omega_0)| &= |\xi_n \, \eta_n(\omega_0) - \xi \, \eta(\omega_0) + \xi \, \eta_n(\omega_0) - \xi \, \eta_n(\omega_0)| \\
&= |\eta_n(\omega_0)((\xi_n - \xi)(\omega_0)) + \xi(\omega_0)((\eta_n - \eta)(\omega_0))| \\
&\leq |\eta_n(\omega_0)((\xi_n - \xi)(\omega_0))| + |\xi(\omega_0)((\eta_n - \eta)(\omega_0))| \\
&= |\eta_n(\omega_0)| \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| + |\xi(\omega_0)| \, |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \\
&= |\eta_n(\omega_0) - \eta(\omega_0) + \eta(\omega_0)| \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| + |\xi(\omega_0)| \, |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \\
&= |(\eta_n - \eta)(\omega_0) + \eta(\omega_0)| \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| + |\xi(\omega_0)| \, |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \\
&\leq (|(\eta_n - \eta)(\omega_0)| + |\eta(\omega_0)|) \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| + |\xi(\omega_0)| \, |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \\
&= |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| + |\eta(\omega_0)| \, |(\xi_n - \xi)(\omega_0)| \\
&\quad + |\xi(\omega_0)| \, |(\eta_n - \eta)(\omega_0)| \\
&\leq \epsilon_1^2 + |\eta| \, \epsilon_1 + |\xi| \, \epsilon_1 \leq \epsilon_1 + |\eta| \, \epsilon_1 + |\xi| \, \epsilon_1 = \epsilon_1(1 + |\eta| + |\xi|) = \epsilon
\end{aligned}$$

de donde, $\omega_0 \in \{|\xi_n \, \eta_n - \xi \, \eta| \leq \epsilon\}$.
Mas aún,

$$\{|\xi_n - \xi| \leq \epsilon_1\} \cap \{|\eta_n - \eta| \leq \epsilon_1\} \subseteq \{|\xi_n \, \eta_n - \xi \, \eta)| \leq \epsilon\}.$$

Luego, de la convergencia de $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$, se tiene que existen $N_3(\epsilon, \delta), N_4(\epsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq N_3$, $n \geq N_4$ cumplen que

$$P\left(\{|(\xi_n \, \eta_n) - \xi \, \eta)| > \epsilon\}\right) \leq P\left(\{|\xi_n - \xi| > \epsilon_1\}\right) + P\left(\{|\eta_n - \eta| > \epsilon 1\}\right) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Por tanto, tomando $N = \max\{N_3, N_4\}$, se obtiene que para todo $n \geq N$,

$$P(\{|\xi_n \, \eta_n - \xi \, \eta| > \epsilon\}) < \delta. \qquad \square$$

Proposición 1.8. La convergencia en la topología $\mathfrak{T}_{d_p}$ es equivalente a la convergencia en probabilidad, esto es,

$$\xi_n \overset{\|\cdot\|_0}{\to} \xi \;\Leftrightarrow\; \xi_n \overset{P}{\to} \xi.$$

Demostración:
Sean $\epsilon, \delta > 0$ y supongamos que $\xi_n \overset{\|\cdot\|_0}{\to} \xi$; luego, por Lema 1.1, existen $N_1(\epsilon)$, $N_2(\delta) > 0$

tales que si $n \geq N_1(\epsilon)$ y $n \geq N_2(\delta)$ entonces

$$\|\xi_n - \xi\|_0 < \epsilon \quad y \quad \|\xi_n - \xi\|_0 < \delta.$$

Ahora bien, utilizando (1.17), tenemos que

$$\inf\{\eta \geq 0 \,:\, P\{|\xi_n - \xi| > \eta\} \leq \eta\} < \epsilon$$

$$y$$

$$\inf\{\eta \geq 0 \,:\, P\{|\xi_n - \xi| > \eta\} \leq \eta\} < \delta$$

para todo $n \geq N_1(\epsilon)$ y $n \geq N_2(\delta)$.

De modo que, existen $\eta_0, \eta_1 \in \{\eta \geq 0 \,:\, P\{|\xi_n - \xi| > \eta\} \leq \eta\}$ para todo $n \geq N_1(\epsilon)$ y $n \geq N_2(\delta)$ tales que

$$\eta_0 < \epsilon \quad y \quad \eta_1 < \delta$$

de donde,

$$P(\{|\xi_n - \xi| \geq \epsilon\}) \leq P(\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\}) \leq P(\{|\xi_n - \xi| > \eta_0\}) \leq \eta_0 < \epsilon \tag{1.28}$$

$$y$$

$$P\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \leq P\{|\xi_n - \xi| > \eta_1\} \leq \eta_1 < \delta \tag{1.29}$$

para todo $n \geq N_1(\epsilon)$ y $n \geq N_2(\delta)$.

Así,

(i) Si $\delta \geq \epsilon$, entonces utilizando (1.28),

$$P\{|\xi_n - \xi| \geq \delta\} \leq P\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\} < \epsilon$$

para todo $n \geq N_1(\epsilon)$.

(ii) Si $\delta < \epsilon$, entonces utilizando (1.29),

$$P\{|\xi_n - \xi| \geq \epsilon\} \leq P\{|\xi_n - \xi| > \delta\} < \delta$$

para todo $n \geq N_2(\delta)$.

Luego, tomando $n \geq N(\epsilon, \delta) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\delta)\}$, se obtiene que

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi.$$

Recíprocamente, si $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N(\epsilon, \delta)$ cumle que

$$P(\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\}) < \frac{\delta}{2}$$

para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$. Tomando $\epsilon < \frac{\delta}{2}$, se obtiene que

$$P(\{|\xi_n - \xi| > \frac{\delta}{2}\}) \leq P(\{|\xi_n - \xi| > \epsilon\})$$

para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$; de donde

$$P(\{|\xi_n - \xi| > \frac{\delta}{2}\}) < \frac{\delta}{2}$$

para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$. Es por ello que, $\frac{\delta}{2} \in \{\eta \geq 0 \,:\, P(\{|\xi_n - \xi| > \eta\}) \leq \eta\}$, para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$.

Luego, para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$,

$$\inf\{\eta \geq 0 \,:\, P(\{|\xi_n - \xi| > \eta\}) \leq \eta\} \leq \frac{\delta}{2} < \delta$$

esto es,

$$\|\xi_n - \xi\|_0 < \delta$$

para todo $n \geq N(\epsilon, \delta)$.

Por lo tanto,

$$\xi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_0} \xi. \qquad \square$$

En lo que sigue, denotaremos el espacio topológico $(\mathrm{L}_0, \mathfrak{T}_{d_p})$ por $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ y nos referimos a la convergencia en L_0 como la convergencia en probabilidad.

Corolario 1.1. Si $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} P(\{|\xi_n| > c\}) = 0$$

entonces, $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad.

Demostración:

Sea $\epsilon_1, \epsilon > 0$ tal que $\epsilon_1 < \epsilon$ y consideremos $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} P(\{|\xi_n| > c\}) = 0.$$

Entonces, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $c \geq M$ cumple que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P(\{|\xi_n| > c\}) < \epsilon_1.$$

Luego,

$$P\left(\left\{\left|\frac{\epsilon_1}{c}\xi_n\right| > \epsilon_1\right\}\right) = P(\{|\xi_n| > c\}) < \epsilon_1 \tag{1.30}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $c \geq M$.

Por consiguiente,

$$\epsilon_1 \in \left\{\delta \geq 0 \,:\, P\left(\left\{\left|\frac{\delta}{c}\xi_n\right| > \delta\right\}\right) \leq \delta\right\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \geq M$.

Nótese que, utilizando (1.17),

$$\left\|\frac{\delta}{c}\xi_n\right\|_0 \leq \epsilon_1 \tag{1.31}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $c \geq M$, con $\delta \in \left\{\delta \geq 0 \,:\, P\left(\left\{\frac{\delta}{c}|\xi_n| > \delta\right\}\right) \leq \delta\right\}$.

Mas aún, de (1.30),

$$c \in \{\delta \geq 0 \,:\, P(\{|\xi_n| > c\}) \leq \delta\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \geq M$.

Así, considerando que

$$\left\{\delta \geq 0 \,:\, P\left(\left\{\left|\frac{\delta}{c}\xi_n\right| > \delta\right\}\right) \leq \delta\right\} = \{\delta \geq 0 \,:\, P(\{|\xi_n| > c\}) \leq \delta\}$$

obtenemos, de (1.31),

$$\|\xi_n\|_0 \leq \epsilon_1 < \epsilon.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \geq M$.

Luego, tomando $n > c$ y utilizando la Proposición 1.8, $\{\xi_n\}_{n\leq 1}$ converge en probabilidad.

$\square$

Ahora, procedemos a definir los espacios de Hausdorff y los espacios secuencialmente completos.

Definición 1.22. Un espacio topológico $(X, \mathfrak{T})$ es un espacio de Hausdorff si, y solo si, para todo $a, b \in X$ tal que $a \neq b$, existen conjuntos abiertos y disjuntos G y H tales que

$$a \in G \quad b \in H.$$

Corolario 1.2. Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff.

Demostración:
Sea (X, d) un espacio métrico. Sean $a, b \in X$ tales que $a \neq b$; entonces, $d(a, b) = \epsilon > 0$. Consideremos las bolas $B(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ y $B(b, \frac{1}{3}\epsilon)$. Aseguramos que $B(a, \frac{1}{3}\epsilon) \cap B(b, \frac{1}{3}\epsilon) = \varnothing$. En efecto, si $p \in B(a, \frac{1}{3}\epsilon) \cap B(b, \frac{1}{3}\epsilon)$, entonces $d(a, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ y $d(b, p) < \frac{1}{3}\epsilon$; de donde, por la desigualdad triangular,

$$d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon.$$

Esto establece una contradicción, pues $d(a, b) = \epsilon$.

Por tanto $B(a, \dfrac{1}{3}\epsilon) \cap B(b, \dfrac{1}{3}\epsilon) = \varnothing$. □

Ejemplo 1.4. $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ es un espacio de Hausdorff.

Definición 1.23. Un espacio topológico Hausdorff X es secuencialmente completo si toda sucesión numerable de Cauchy converge en X.

Se puede consultar [4] para verificar que L_0 es un espacio secuencialmente completo.
Para finalizar esta sección, veamos algunos resultados de convergencia incondicional en el espacio L_0.

Definición 1.24. Sea $(X, \mathfrak{T}, \circ)$ un grupo aditivo topológico. Se dice que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ es convergente en subseries si $\sum\limits_{k\geq 1} x_{n_k}$ es convergente, para toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{x_n\}_{n\geq 1}$.

Definición 1.25. Sea $(X, \mathfrak{T}, \circ)$ un grupo aditivo topológico. Una reordenación de la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es una serie de la forma $\sum_{n\geq 1} y_n$, donde $y_n = x_{f(n)}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva.

Ejemplo 1.5. Sea

$$a_n = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 2k+1. \\ 2k+1 & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

Tomando,

$$f(n) = \begin{cases} 2k+1 & \text{si } n = 2k. \\ 2k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

se tiene que f es una función biyectiva.

Luego, la serie $\sum_{n\geq 1} a_{f(n)} = \sum_{n\geq 1} a_n$ es una reordenación de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Definición 1.26. Sea $(X, \mathfrak{T}, \circ)$ un grupo aditivo topológico. Se dice que la serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ es incondicionalmente convergente si todo reordenamiento es convergente.

Ahora bien, considerando que L_0 es un espacio vectorial topológico secuencialmente completo respecto a la métrica generada por $\|\cdot\|_0$, se obtiene el siguiente resultado, cuya demostración se puede ver en [3].

Proposición 1.9.

Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos en el espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) La serie $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ converge incondicionalmente en (L_0, d_p).

(ii) La serie $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ en (L_0, d_p) es convergente en subseries. $\square$

Un resultado importante en el estudio de convergencia incondicional, el cual daremos sin demostración, es el siguiente

Proposición 1.10. [Teorema 2,[2]]

En el espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ la convergencia incondicional de la $\sum_{n\geq 1} \xi_n$ es equivalente a la convergencia de todas las series $\sum_{n\geq 1} \lambda_n \xi_n$, con $\lambda_n \in \ell_\infty$.

Nótese que, convergencia incondicional de la serie $\sum_{n\geq 1}\xi_n$ en el espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ es equivalente a la convergencia incondicional en probabilidad, esto es, toda reordenación de la de la serie converge en probabilidad.

A partir de las proposiciones 1.9 y 1.10 se obtiene lo siguiente

Corolario 1.3. En el espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ la convergencia en subseries de la serie $\sum_{n\geq 1}\xi_n$ es equivalente a la convergencia de todas las series $\sum_{n\geq 1}\lambda_n\xi_n$, con $\lambda_n \in \ell_\infty$.

Capítulo 2

Medidas aleatorias e integrales

La motivación de este capítulo es la construcción de la integral respecto a una medida aleatoria arbitraria μ. Definiremos la integral con respecto a medidas aleatorias siguiendo el mismo proceso utilizado en [4] pero, en este caso, adaptado al espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$. En este sentido, considerando que $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ es un espacio de Hausdorff secuencialmente completo, mostraremos que toda medida aleatoria es convexamente acotada; siendo éstas las condiciones necesarias y suficientes para definir la integral en cuestión. Luego, se citan algunas propiedades de interés y se considera la integral de funciones aleatorias particulares.

2.1 Medidas aleatorias

Definición 2.1. Sea $\mu : \Omega \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ una función de dos variables. Se dice que μ es una medida aleatoria si

(*i*) $\mu_A \in \mathrm{L}_0$, para cada $A \in \mathcal{B}$.

(*ii*) Para cada $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$, se cumple $\mu_{A_n} \underset{P}{\to} 0$.

(*iii*) Si $A, B \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B = \varnothing$ entonces $\mu_{A\cup B} = \mu_A + \mu_B$ c.s.

donde μ_A denota la sección A de μ, para todo $A \in \mathcal{B}$.

Definición 2.2. Un conjunto $A \in \mathcal{B}$ es llamado μ-nulo si, para cada $B \subset A$ con $B \in \mathcal{B}$, $\mu_B = 0$ c.s.

Observación 2.1. A menos que se indique lo contrario, no se utilizará explícitamente la dependencia de $w \in \Omega$, esto es, $\mu(A) := \mu(\omega, A)$, para todo $\omega \in \Omega$, $A \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 2.1. Sea $\mathbf{B} = \{B_t : t \in [0,T]\}$ un Movimiento Browniano, con $T > 0$ (fijo); entonces,

$$\mu(A) = \int_0^T \chi_A(t) B_t \, dB_t$$

es una medida aleatoria en $([0,T], \mathcal{B}([0,T]))$.

En efecto, basta con demostrar las condiciones dadas en Definición 2.1. Veámoslo:

(i) Sea $A \in \mathcal{B}$. Dado que (ver [9]), para todo $\omega \in \Omega$,

$$\mu_A(\omega) = \int_0^T \chi_A B_t(\omega) \, dB_t(\omega) = \int_A B_t(\omega) \, dB_t(\omega) = \frac{1}{2} B^2_{\max A}(\omega) - \max A \in \mathrm{L}_0$$

entonces, $\mu_A \in \mathrm{L}_0$.

(ii) Sean $\epsilon > 0$, $\{A_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{B}([0,T])$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$. Entonces, por el teorema de la Clase Monótona y propiedades de la función indicadora se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{A_k} = \lim_{k\to\infty} \int_0^T \chi_{A_k} B_t \, dB_t = \int_0^T \lim_{k\to\infty} \chi_{A_k} B_t \, dB_t \quad = \int_0^T \chi_{\lim\limits_{k\to\infty} A_k} B_t \, dB_t = \int_0^T \chi_{\varnothing} B_t \, dB_t = 0$$

Así, considerando $\epsilon > 0$, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} P(\{|\mu_{A_k}| < \epsilon\}) = \int_\Omega \chi_{\lim\limits_{k\to\infty} \{|\mu_{A_k}| < \epsilon\}} \, dP = \int_\Omega \chi_\Omega \, dP = P(\Omega) = 1.$$

de donde,

$$\lim_{k\to\infty} P(\{|\mu_{A_k}| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Por tanto,

$$\mu_{A_k} \xrightarrow{P} 0.$$

(iii) Sea $A, B \in \mathbb{B}([0,T])$ tal que $A \cap B = \varnothing$; entonces,

$$\begin{aligned}\mu_{A\cup B} = \int_0^T \chi_{A\cup B} B_t \, dB_t = \int_0^T (\chi_A + \chi_B) B_t \, dB_t &= \int_0^T (\chi_A B_t + \chi_B B_t) \, dB_t \\ &= \int_0^T \chi_A B_t \, dB_t + \int_0^T \chi_B B_t \, dB_t \\ &= \mu_A + \mu_B \quad \text{c.s.}\end{aligned}$$

de donde

$$\mu_{A\cup B} = \mu_A + \mu_B \quad \text{c.s.}$$

□

Proposición 2.1. Sean μ una medida aleatoria y $A, B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$; entonces

$$\mu_{B \setminus A}(\omega) = \mu_B(\omega) - \mu_A(\omega) \quad \text{c.s.}$$

Demostración:

Si $A, B \in \mathcal{B}$ tal que $A \subseteq B$, entonces podemos escribir B como unión de conjuntos disjuntos, a saber,

$$B = A \cup (B \setminus A).$$

Luego, como μ es una medida aleatoria,

$$\mu_B(\omega) = \mu_A(\omega) + \mu_{B \setminus A}(\omega) \quad \text{c.s.;}$$

esto es,

$$\mu_{B \setminus A}(\omega) = \mu_B(\omega) - \mu_A(\omega)\text{c.s.} \qquad \square$$

Proposición 2.2. Sea $\mu : \Omega \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ una función de dos variables tal que $\mu_A \in \mathrm{L}_0$, para cada $A \in \mathcal{B}$; entonces μ es una medida aleatoria si, y solo si, μ es σ-aditiva. tal que $\mu_A \in \mathrm{L}_0$, para cada $A \in \mathcal{B}$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que μ es una medida aleatoria.

Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Consideremos el conjunto $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$; y sea $\{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ la sucesión definida por:

$$B_n = \begin{cases} A & n = 1. \\ A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k & n > 1 \end{cases}$$

Por construcción es claro que $\{B_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente; por lo que,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\geq 1} B_n.$$

Veamos además que $B_n \downarrow \varnothing$.

En efecto, si $x \in \bigcap_{n\geq 1} B_n$, entonces $x \in B_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$; esto es,

$$x \in A \quad \text{y} \quad x \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$; de donde,

$$x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad \text{y} \quad x \notin \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Esto establece una contradicción, pues

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Por tanto, $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \varnothing$, esto es, $B_n \downarrow \varnothing$.

Usando este resultado y aplicando las poposiciones 1.7, 2.1, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_A - \text{p}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{A_k} &= \text{p}\lim_{n\to\infty} \left[\mu_A - \sum_{k=1}^{n} \mu_{A_k} \right] \\
&= \text{p}\lim_{n\to\infty} \left[\mu_A - \mu_{\bigcup_{n\geq k\geq 1} A_k} \right] \\
&= \text{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{A \setminus \bigcup_{n\geq k\geq 1} A_k} \\
&= \text{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{B_n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De manera que,

$$\mu_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} = \mu_A = \text{p}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{A_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{A_k}.$$

Luego, μ es σ-aditiva.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que μ es una función σ-aditiva; entonces es claro que μ es finitamente aditiva.

Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$; entonces, veamos que la sucesión $\{B_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ dada por

$$B_n = \begin{cases} A_1^c & \text{si } n = 1. \\ A_n^c \setminus A_{n-1}^c & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

es disjunta dos a dos.

Sean $i \neq j$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $i > j$; entonces,

$$\begin{aligned} B_i \cap B_j = (A_i^c \setminus A_{i-1}^c) \cap (A_j^c \setminus A_{j-1}^c) &= (A_i^c \cap A_{i-1}) \cap (A_j^c \cap A_{j-1}) \\ &= (A_i^c \cap A_j^c) \cap (A_{i-1} \cap A_{j-1}) \\ &= A_j^c \cap A_{i-1} \\ &\subseteq A_j^c \cap A_j = \varnothing \end{aligned}$$

de donde, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

Por otra parte, es claro que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n^c = \bigcup_{n\geq 1} B_n \quad y \quad A_n^c = \bigcup_{k=1}^{n} B_k. \tag{2.1}$$

Por consiguiente, considerando que $A_n^c \uparrow X$ y utilizando (2.1),

$$\begin{aligned} \mu_X = \mu_{\bigcup_{n\geq 1} A_n^c} = \mu_{\bigcup_{n\geq 1} B_n} = \sum_{n\geq 1} \mu_{B_n} &= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{B_k} \\ &= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{\bigcup_{k=1}^{n} B_k} \\ &= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{A_n^c}. \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\mu_X - \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{A_n^c} = 0$$

de donde, por las proposiciones 1.7 y 2.1,

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{A_n} = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{X\cap A_n} = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{X\setminus A_n^c} &= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \left[\mu_X - \mu_{A_n^c}\right] \\ &= \mu_X - \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \mu_{A_n^c} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, μ es una medida aleatoria.

Definición 2.3. Un familia de variables aleatorias $\{\xi_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ se dice que está acotada en probabilidad si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{\gamma\in\Gamma} P\left(\{|\xi_\gamma| > c\}\right) = 0$$

o equivalentemente,

$$\lim_{t\to 0} \sup_{\gamma\in\Gamma} \left\|t\,\xi_\gamma\right\|_0 = 0.$$

Definición 2.4. Sea μ una medida aleatoria. Se dice que μ esta acotada, si $\{\mu_A : A \in \mathcal{B}\}$ es acotado en probabilidad.

Otro resultado importante cuya demostración se puede encontrar en [8] y [11] es el siguiente

Teorema 2.1. Sea $\mathfrak{X}$ una σ-álgebra (o σ-anillo); entonces, el conjunto de funciones σ-aditivas $\mu : \mathfrak{X} \to \mathrm{L}_0$ esta acotado en probabilidad.

A partir de la Proposición 2.2 y el Teorema 2.1 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.1. Toda medida aleatoria μ es acotada.

Lema 2.1. Para toda medida aleatoria μ,

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{A_k\cap A_j=\varnothing\,,\, l\in\mathbb{N}\,,\,|c_k|\leq 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k\mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) = 0.$$

Demostración:

Sean $\{c_k\}_{k\geq 1} \subseteq [-1,1]$, $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$, con $i \neq j$, y consideremos $c > 0$; entonces, utilizando la Proposición 1.5, se obtiene que

$$P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k\mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) \leq 8 \max_{\theta_k=\pm 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} \theta_k\mu_{A_k}\right| \geq \frac{c}{8}\right\}\right). \tag{2.2}$$

Por otro lado, consideremos $\theta = \{\theta_1, ..., \theta_l\} \subseteq \{-1,1\}^l$ y definamos

$$A_\theta = \bigcup_{k\,:\,\theta_k=1}^{l} A_k \quad ; \quad B_\theta = \bigcup_{k\,:\,\theta_k=-1}^{l} A_k.$$

Entonces, como $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ es una sucesión disjunta de conjuntos, $A_\theta \cap B_\theta = \varnothing$.

Mas aún,

$$\sum_{k=1}^{l} \theta_k\mu_{A_k} = \sum_{k\,:\,\theta_k=1}^{l} \theta_k\mu_{A_k} + \sum_{k\,:\,\theta_k=-1}^{l} \theta_k\mu_{A_k} = \sum_{k\,:\,\theta_k=1}^{l} \mu_{A_k} - \sum_{k\,:\,\theta_k=-1}^{l} \mu_{A_k} = \mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}$$

de donde,

$$P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} \theta_k\mu_{A_k}\right| > \frac{c}{8}\right\}\right) = P\left(\left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| > \frac{c}{8}\right\}\right).$$

Por consiguiente,

$$\max_{\theta_k=\pm 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} \theta_k\mu_{A_k}\right| > \frac{c}{8}\right\}\right) = \max_{\theta_k=\pm 1} P\left(\left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| > \frac{c}{8}\right\}\right).$$

De modo que, utilizando (2.2),

$$P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k \mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) \leq 8 \sup_{A,B\in\mathcal{B}} P\left(\left\{|\mu_A - \mu_B| > \frac{c}{8}\right\}\right)$$

de donde

$$\sup_{A_k\cap A_j=\varnothing\,,\, l\in\mathbb{N}\,,\,|c_k|\leq 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k \mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) \leq 8 \sup_{A,B\in\mathcal{B}} P\left(\left\{|\mu_A - \mu_B| > \frac{c}{8}\right\}\right). \tag{2.3}$$

Sólo falta mostrar que

$$\left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| > \frac{c}{8}\right\} \subseteq \left\{|\mu_{A_\theta}| > \frac{c}{16}\right\} \cup \left\{|\mu_{B_\theta}| > \frac{c}{16}\right\}$$

Para ello, consideremos $\omega_0 \in \{|\mu_{A_\theta}| \leq \frac{c}{16}\} \cap \{|\mu_{B_\theta}| \leq \frac{c}{16}\}$; entonces,

$$|(\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta})(\omega_0)| = |\mu_{A_\theta}(\omega_0) - \mu_{B_\theta}(\omega_0)| \leq |\mu_{A_\theta}(\omega_0)| + |\mu_{B_\theta}(\omega_0)| \leq \frac{c}{16} + \frac{c}{16} = \frac{c}{8}$$

de donde, $\omega_0 \in \left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| \leq \frac{c}{8}\right\}$.

Esto implica que,

$$\left\{|\mu_{A_\theta}| \leq \frac{c}{16}\right\} \cap \left\{|\mu_{B_\theta}| \leq \frac{c}{16}\right\} \subseteq \left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| \leq \frac{c}{8}\right\}$$

o equivalentemente,

$$\left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| > \frac{c}{8}\right\} \subseteq \left\{|\mu_{A_\theta}| > \frac{c}{16}\right\} \cup \left\{|\mu_{B_\theta}| > \frac{c}{16}\right\}. \tag{2.4}$$

Así, utilizando (2.3) y (2.4),

$$\begin{aligned}
\sup_{A_k\cap A_j=\varnothing\,,\, l\in\mathbb{N}\,,\,|c_k|\leq 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k \mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) &\leq 8 \sup_{A,B\in\mathcal{B}} P\left(\left\{|\mu_{A_\theta} - \mu_{B_\theta}| > \frac{c}{8}\right\}\right) \\
&\leq 8 \sup_{A,B\in\mathcal{B}} P\left(\left\{|\mu_A| > \frac{c}{16}\right\} \cup \left\{|\mu_B| > \frac{c}{16}\right\}\right) \\
&\leq 16 \sup_{A\in\mathcal{B}} P\left(\left\{|\mu_A| > \frac{c}{16}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Luego, como μ es acotada (Corolario 2.1)

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{A_k\cap A_j=\varnothing\,,\, l\in\mathbb{N}\,,\,|c_k|\leq 1} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{l} c_k \mu_{A_k}\right| \geq c\right\}\right) = 0. \qquad \square$$

Este último resultado es de suma relevancia, pues nos permitirá demostrar que todas las funciones medibles acotadas son μ-integrables.
Veamos ahora el siguiente Teorema.

Teorema 2.2. Toda medida aleatoria es convexamente acotada.

Demostración:
Sea μ una medida aleatoria; entonces, por Corolario 2.1, μ es una medida acotada. Sea $\{\xi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ una sucesión tal que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \xi_n$ es convergente en subseries; entonces, utilizando el Corolario 1.3, se obtiene que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \lambda_n \xi_n$ es convergente, para todo $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \subseteq \ell_\infty$. Luego, μ es convexamente acotada (ver Corolario 2.3 en [4]). $\square$

2.2 Integrales de medidas aleatorias

Por los resultados dados en la sección anterior, podemos asegurar que:
(i) $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ es un espacio de Hausdorff secuencialmente completo.
(ii) Toda medida aleatoria μ es convexamente acotada.
En este sentido, la teoría de integración según lo previsto en [2], [3], y [6] de manera análoga a la integral de Lebesgue, definen la integral para una función $\mathcal{B}$-simple f, digamos, $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, como sigue

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_{A\cap A_i}; \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{B}.$$

Luego, para funciones medibles tenemos:

Definición 2.5. Una función medible $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable con respecto a una medida aleatoria μ, si existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{|g| \,\leq\, |f - f_n| \\ g\in S(X)}} \left\| \int_X g\, d\mu \right\|_0 = 0. \qquad \square$$

Las siguiente observación puede verse en [6] y se demuestra para espacios más generales en [2].

Observación 2.2. (i) Todas las funciones medibles y acotadas son μ-integrables.

(ii) Si f es μ-integrable, entonces para todo $H_k \in \mathcal{B}$ tal que $H_k \downarrow \varnothing$,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{|g| \leq |f| \\ g\in S(X)}} \left\| \int_{H_k} g \, d\mu \right\|_0 = 0.$$

Se demostrará (i) y se utilizará (ii) más adelante.

Sean $\epsilon > 0$, μ una medida aleatoria y $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible tal que $|f| \leq c$ μ-c.s. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c = 1$; entonces, por el Teorema de aproximación por funciones simples, existe $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$ tal que $f_n \uparrow |f|$ uniformemente; de donde, $|f_n| \to |f|$ de manera uniforme. Es por ello que, $|f_n| \leq 1$ μ-c.s.

Ahora bien, consideremos $g^{(0)} \in \{g \in \mathrm{S}(X) \,:\, |g| \leq |f_n - f|\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$; entonces,

$$\frac{|g^{(0)}|}{2} \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así, usando el Lema 2.1,

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left\{\left|\int_A \frac{g^{(0)}}{2} \, d\mu\right| \geq c\right\}\right) = 0.$$

Luego, del Corolario 1.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\left\|\int_X \frac{g^{(0)}}{2} \, d\mu\right\|_0 < \frac{\epsilon}{2}$$

Nótese que, por la Observación 1.3,

$$\frac{1}{2}\left\|\int_X g^{(0)} \, d\mu\right\|_0 \leq \left\|\int_X \frac{g^{(0)}}{2} \, d\mu\right\|_0.$$

De manera que,

$$\left\|\int_X g^{(0)} \, d\mu\right\|_0 < \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por tanto,

$$\sup_{\substack{|g| \leq |f - f_n| \\ g \in \mathrm{S(X)}}} \left\| \int_X g \, d\mu \right\|_0 < \epsilon$$

para todo $n \geq N$; esto es,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{|g| \leq |f - f_n| \\ g \in \mathrm{S(X)}}} \left\| \int_X g \, d\mu \right\|_0 = 0. \qquad \square$$

Corolario 2.2. Sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible y μ una medida aleatoria. Si f es integrable respecto de μ existe una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$ tal que

$$\mathrm{p} \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

existe.

Se denotará

$$\int_X f \, d\mu = \mathrm{p} \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Nótese que si $f : X \to \mathbb{R}$ es integrable respecto a μ existe $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$, $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$\sup_{\substack{|g| \leq |f - f_n| \\ g \in \mathrm{S(X)}}} \left\| \int_X g \, d\mu \right\|_0 < \frac{\epsilon}{2}.$$

De modo que, denotando

$$A_n = \{g \in \mathrm{S}(X) \, : \, |g| \leq |f - f_n|\}$$

obtenemos

$$\left\| \int_X g \, d\mu \right\|_0 < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.5}$$

para todo $n \geq N(\epsilon)$ tal que $g \in A_n$.

Ahora bien, supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\max\{|f_n - f|, |f_m - f|\} = |f_n - f|;$$

para todo $n, m \geq N(\epsilon)$.

Usando el hecho que $\{f_n - f_m\}_{n,m\geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$ y considerando que para todo $n, m \in \mathbb{N}$

$$|f_n - f_m| = |f_n - f_m + f - f| \leq |f_n - f| + |f_m - f| \leq 2\max\{|f_n - f|\,,\,|f_m - f|\};$$

se obtiene que

$$\left|\frac{f_n - f_m}{2}\right| = \frac{|f_n - f_m|}{2} \leq |f_n - f|$$

para todo $n, m \geq N(\epsilon)$.

Por consiguiente, para todo $n, m \geq N(\epsilon)$,

$$\left\|\int_X \frac{f_n - f_m}{2}\, d\mu\right\|_0 < \frac{\epsilon}{2}.$$

De manera que,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_X f_n\, d\mu - \int_X f_m\, d\mu\right\|_0 = \left\|\int_X f_n - f_m\, d\mu\right\|_0 &= \left\|\int_X \frac{f_n - f_m}{2}\, d\mu + \int_X \frac{f_n - f_m}{2}\, d\mu\right\|_0 \\
&\leq \left\|\int_X \frac{f_n - f_m}{2}\, d\mu\right\|_0 + \left\|\int_X \frac{f_n - f_m}{2}\, d\mu\right\|_0 \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

para todo $n, m \geq N(\epsilon)$.

Luego, $\left\{\int_X f_n\, d\mu\right\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ es una sucesión de Cauchy en probabilidad.

Por tanto, $\left\{\displaystyle\int_X f_n\, d\mu\right\}_{n\geq 1}$ converge en probabilidad. □

Observación 2.3. (i) Se puede ver en [6] que la integral anterior es lineal y monótona.
(ii) Para todo $A \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\int_A f\, d\mu = \int_X \chi_A f\, d\mu$.

Proposición 2.3. Sean μ una medida aleatoria y f una función medible tal que $|f| \leq c$; entonces $\displaystyle\int_X f\, d\mu$ es una medida aleatoria.

Demostración:

Dado que f es medible y acotada, por Observación 2.2 parte (ii), f es μ-integrable. Luego, usando el Corolario 2.2, existe $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$ tal que

$$\int_X f\, d\mu = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{2.6}$$

Veamos que $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ satisface las condiciones de la Definición 2.1

(i) Es claro que, $\displaystyle\int_A f\,d\mu \in \mathrm{L}_0$, con $A \in \mathcal{B}$ (fijo).

(ii) Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A_n \downarrow \varnothing$.

Nótese que, por la Proposición 1.8, la convergencia en probabilidad y la convergencia en la métrica generada por la quasi-norma $\|\cdot\|_0$ son equivalentes.

Por consiguiente, utiizando (2.6) y la Observación 2.2 parte (ii), se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\int_{A_k} f\,d\mu\right\|_0 = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\|\int_{A_k} f_n\,d\mu\right\|_0 \leq \lim_{k\to\infty}\sup_{\substack{|g|\,\leq\,|f|\\ g\in \mathrm{S(X)}}}\left\|\int_{A_k} g\,d\mu\right\|_0 = 0$$

Así, $\displaystyle\int_{A_k} f\,d\mu \xrightarrow{P} 0$.

(iii) Finalmente, considerando $A, B \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap B = \varnothing$.

$$\begin{aligned}
\int_{A\cup B} f\,d\mu = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_{A\cup B} f_n\,d\mu &= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l^n} c_{kn}\mu((A\cup B)\cap A_{kn})\\
&= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l^n} c_{kn}\mu((A\cap A_{kn})\cup(B\cap A_{kn}))\\
&= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l^n} c_{kn}(\mu(A\cap A_{kn})+\mu(B\cap A_{kn}))\\
&= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l^n} c_{kn}\mu(A\cap A_{kn})+\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{l^n} c_{kn}\mu(B\cap A_{kn})\\
&= \mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu+\mathrm{p}\lim_{n\to\infty}\int_B f_n\,d\mu.
\end{aligned}$$

con $\{A_{kn}\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, $\{c_{kn}\}_{k\geq 1} \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (fijo).

Por tanto, $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ es una medida aleatoria. □

Otro resultado que utilizaremos más adelante cuya demostración se encuentra en [10] es el siguiente

Lema 2.2. Para una función medible $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrable, la siguiente condición se satisface

$$\forall\, h : X \to \mathbb{R}\,\text{tal que}\,|h(x)| \leq c, \qquad \left\|\int_A fh\,d\mu\right\|_0 \leq 16\sup_{B\subset A}\left\|c\int_B f\,d\mu\right\|_0 \quad \forall\, A \in \mathcal{B}. \quad \square$$

Cnsideraremos ahora funciones aleatorias de la forma

$$f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\omega)f_k(x) \tag{2.7}$$

donde $\{\xi_k\}_{k\geq 1}\subseteq \mathrm{L}_0$ y $f_k : X \to \mathbb{R}$ son funciones medibles tales que $|f_k|\leq 1$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Para cada $x\in X$, excepto para un subconjunto μ-nulo de X, la serie (2.7) debe converger en probabilidad incondicionalmente.

Capítulo 3

Teoremas de Convergencia de funciones aleatorias

En ese capítulo daremos a conocer algunos teoremas de convergencia en el espacio quasi-normado $(L_0, \|\cdot\|_0)$ de integrales de funciones aleatorias dadas en el Capítulo 2, (2.7); estableciendo condiciones necesarias y suficientes para que dicha convergencia en L_0 se presente de manera incondicional.

3.1 Funciones aleatorias

En lo que sigue, consideramos las funciones aleatorias del siguiente tipo,

$$f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x) \tag{3.1}$$

donde $\{\xi_k\}_{k \geq 1} \subseteq L_0$ y $\{f_k\} \subseteq M(X)$ tales que $|f_k| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$, excepto para un subconjunto μ-nulo de X, la serie (3.1) debe converger en probabilidad incondicionalmente.

Definición 3.1. Una función aleatoria de la forma (3.1) es integrable respecto de la medida aleatoria μ si la serie

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k\,d\mu \tag{3.2}$$

converge en probabilidad incondicionalmente para todo $A \in \mathcal{B}$.

Ahora bien, considerando que el espacio quasinormado $(\mathrm{L}_0, \|\cdot\|_0)$ es un grupo topológico Hausdorff, enunciamos un resultado cuya demostración es análoga al Teorema 8.6 en [8].

Proposición 3.1. Sea $\{f^n\}_{n\geq 1}$ una sucesión funciones definidas en $\Omega \times \mathcal{B}$. Si, para cada $A \in \Omega$ existe $f_A = \mathrm{p}\lim\limits_{n\to\infty} f_A^n$, entonces f es σ-aditiva. □

Corolario 3.1. La integral de la forma (3.2) es una medida aleatoria.

Demostración: Sea $A \in \mathcal{B}$ y consideremos una función aleatoria f, μ-integrable, de la forma (3.2); entonces, existen una sucesión de funciones $\mathcal{B}$-medibles $\{f_k\}_{k\geq 1}$, $|f_k| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y $\{\xi_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que la serie

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k\,d\mu$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Nótese que, por la Proposición 2.3,

$$\int_A f_k\,d\mu$$

es una medida aleatoria, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Luego,

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_A f_k\,d\mu$$

es una medida aleatoria, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, usando la Proposición 3.1, se obtiene que

$$\int_A f\,d\mu$$

es una función σ-aditiva.

Por tanto, de la Proposición 2.2, $\displaystyle\int_A f\,d\mu$ es una medida aleatoria. □

Otro resultado de interés que se utilizará a lo largo del capítulo es la equivalencia de la convergencia en probabilidad y la convergencia generada por la quiasi-norma $\|\cdot\|_0$.

Nos referimos a μ como una medida aleatoria.

3.2 Teoremas de Convergencia

En lo que sigue daremos los teoremas de convergencia de las integrales de funciones aleatorias, definidas en la sección anterior, con respecto a medidas aleatorias generales.

Teorema 3.1. Sea $\{\xi_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que, para toda familia $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \tag{3.3}$$

converge en probabilidad incondicionalmente. Entonces, si $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X)$ tal que $|f_k| \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie (3.2) converge en probabilidad incondicionalmente.

Demostración:

Sean $A \in \mathcal{B}$ y $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X)$ tal que $|f_k| \leq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$; entonces, por la Observación 2.2, f_k es μ-integrable para todo $k \in \mathbb{N}$; de modo que existen $\{f_k^n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{S}(X)$, con $k \in \mathbb{N}$ (fijo), tal que

$$\int_A f_k \, d\mu = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_A f_k^n \, d\mu$$

donde, $|f_k^n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $k \in \mathbb{N}$ (fijo).

Esto implica que,

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k \, d\mu \right\|_0 \leq \sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{l_k} c_{ik} \mu_{A_{ik}} \right\|_0 = \sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik} \xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 . \tag{3.4}$$

Ahora bien, veamos que

$$\sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik} \xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

Para ello, mostremos primero que

$$\sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik} \xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 8 \sup_{\substack{\theta_{ik} \ \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} \theta_{ik} \xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 .$$

Sean $\{A_{ik}\}_{i,k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, $\{c_{ik}\}_{i\geq 1} \subseteq [-1,1]$ con $k \in \mathbb{N}$ (fijo). Consideremos

$$\delta_0 \in \left\{ \delta < 1 \, : \, P\left(\left\{ \left| \sum_{i,k} c_{ik} \xi_k \mu_{A_{ik}} \right| > \delta \right\} \right) > \delta \right\} .$$

Entonces,

$$P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right| > \delta_0\right\}\right) > \delta_0. \tag{3.5}$$

Luego, usando la Proposición 1.5 con $t = \frac{\delta_0}{8}$, se tiene que

$$8 \sup_{\substack{\theta_{i1},\ldots,\theta_{in} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right| > \frac{\delta_0}{8}\right\}\right) \geq P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right| > \delta_0\right\}\right).$$

Luego, de (3.5),

$$8 \sup_{\substack{\theta_{i1},\ldots\theta_{in} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right| > \frac{\delta_0}{8}\right\}\right) > \delta_0.$$

Así, existe una sucesión disjunta $\{B_{ik}\}_{i,k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y escalares $|\phi_{ik}| \leq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$ con k fijo, tal que

$$P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \frac{\delta_0}{8}\right\}\right) > \frac{\delta_0}{8}.$$

De manera que,

$$\delta_0 \in \left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \frac{\delta}{8}\right\}\right) > \frac{\delta}{8}\right\}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \frac{\delta}{8}\right\}\right) > \frac{\delta}{8}\right\} &= \left\{\delta < \frac{1}{8} \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \delta\right\}\right) > \delta\right\} \\
&\subseteq \left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \delta\right\}\right) > \delta\right\} \\
&\subseteq \left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \frac{\delta}{8}\right\}\right) > \delta\right\} \\
&= \left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|8\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \delta\right\}\right) > \delta\right\}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|\sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right| > \delta\right\}\right) > \delta\right\} \subseteq \left\{\delta < 1 \,:\, P\left(\left\{\left|8\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right| > \delta\right\}\right) > \delta\right\}.$$

De modo que, utilizando la Observación 1.3,

$$\left\|\sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right\|_0 \leq \left\|8\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right\|_0 \leq 8\left\|\sum_{i,k} \phi_{ik}\xi_k\mu_{B_{ik}}\right\|_0 \leq 8 \sup_{\substack{\theta_{ik} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\|\sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}}\right\|_0.$$

Por tanto,

$$\sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik}\xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 8 \sup_{\substack{\theta_{ik} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 . \tag{3.6}$$

Sólo falta mostrar que

$$8 \sup_{\substack{\theta_{ik} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

Para ello, consideremos $\theta_k = \{\theta_{1k}, ..., \theta_{l_k k}\}$ tal que $\theta_{ik} = \pm 1$, para todo $i \in \{1, ..., l_k\}$ con $k \in \mathbb{N}$ (fijo), y denotemos

$$A_{\theta_k} = \bigcup_{i\,:\,\theta_{ik}=1}^{l_k} A_{ik} \quad y \quad B_{\theta_k} = \bigcup_{i\,:\,\theta_{ik}=-1}^{l_k} A_{ik}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}} &= \sum_{k=m}^{n}\sum_{i=1}^{l_k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}} = \sum_{k=m}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{l_k} \theta_{ik}\mu_{A_{ik}} \\
&= \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\sum_{i:\,\theta_{ik}=1}^{l_k} \theta_{ik}\mu_{A_{ik}} + \sum_{i:\,\theta_{ik}=-1}^{l_k} \theta_{ik}\mu_{A_{ik}} \right) = \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\sum_{i:\,\theta_{ik}=1}^{l_k} \mu_{A_{ik}} - \sum_{i:\,\theta_{ik}=-1}^{l_k} \mu_{A_{ik}} \right) \\
&= \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\mu_{\bigcup_{i:\,\theta_{ik}=1}^{l_k} A_{ik}} - \mu_{\bigcup_{i:\theta_{ik}=-1}^{l_k} A_{ik}} \right) = \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\mu_{A_{\theta_k}} - \mu_{B_{\theta_k}} \right)
\end{aligned}$$

de donde,

$$\sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}} = \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\mu_{A_{\theta_k}} - \mu_{B_{\theta_k}} \right).$$

Es por ello que,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k\mu_{A_{ik}} \right\|_0 = \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \left(\mu_{A_{\theta_k}} - \mu_{B_{\theta_k}} \right) \right\|_0 &\leq \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_{\theta_k}} \right\|_0 + \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{B_{\theta_k}} \right\|_0 \\
&\leq 2 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$8 \sup_{\substack{\theta_{ik} \pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} \theta_{ik}\xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 . \tag{3.7}$$

Así, finalmente, utilizando (3.6)

$$\sup_{\substack{|c_{ik}| \leq 1 \\ A_{ik}\cap A_{ij}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik}\xi_k \mu_{A_{ik}} \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 . \tag{3.8}$$

Ahora bien, nótese que por las desigualdades (3.4) y (3.8)

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k \, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 . \tag{3.9}$$

De modo que, si la suma del lado izquierdo de (3.9) diverge, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 > \frac{\epsilon}{16}.$$

para todo $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N(\epsilon)$.

Por consiguiente, existe $\{B_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{B_k} \right\|_0 > \frac{\epsilon}{16}$$

para todo $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N(\epsilon)$.

Esto establece una contradicción, pues por hipótesis esta serie converge en probabilidad incondicionalmente.

Luego la serie

$$\sum_{k=m}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu$$

converge en probabilidad incondicionalmente. □

Nótese que el teorema previo asegura la integrabilidad de la función aleatoria de la forma (3.2).

Veamos las siguientes observaciones, las cuales serán de utilidad en la demostración de resultados que daremos posteriormente.

Observación 3.1. Con la desigualdad (3.9), para una función aleatoria f de la forma (3.1) tal que la serie (3.3) converge en probabilidad incondicionalmente, se obtiene que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 . \tag{3.10}$$

En efecto, dado (3.9),

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu \right\|_0 \leq \lim_{n \to \infty} 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

Así basta mostrar que,

$$\lim_{n\to\infty} 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 = 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

Para ello, consideremos $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y $\epsilon > 0$; entonces, como la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k}$$

converge en probabilidad incondicionalmente, se tiene que existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ cumple que

$$\left| \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 - \left\| \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 \right| < \epsilon$$

de donde,

$$\left| \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 - \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 \right| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 = \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 = 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k} \right\|_0 . \qquad \square$$

Observación 3.2. Sea $\{\xi_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que $\xi_k \in \mathrm{L}_2$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos $c \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{E}\mu_A^2 \leq c$, para todo $A \in \mathcal{B}$. Entonces, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mathbb{E}\xi_k^2}$ converge en probabilidad, se tiene que la serie (3.3) converge en probabilidad.

Para mostrar esto, primero consideremos $\xi \in \mathrm{L}_0$ y veamos que

$$\sqrt{\mathbb{E}\,|\xi|} \geq \|\xi\|_0$$

Sea $\delta_0 \in \{\delta < 1 \, : \, P(\{|\xi| > \delta\}) > \delta\}$; entonces,

$$\mathbb{E}\,|\xi| = \int_\Omega |\xi|\, dP = \int_{\{|\xi|>\delta_0\}} |\xi|\, dP + \int_{\{|\xi|\leq\delta_0\}} |\xi|\, dP \geq \int_{\{|\xi|>\delta_0\}} |\xi|\, dP > \delta_0\, P\left(\{|\xi| > \delta_0\}\right) > \delta_0^2$$

de donde,

$$\sqrt{\mathbb{E}\,|\xi|} > \delta_0.$$

Por consiguiente,

$$\sqrt{\mathbb{E}\,|\xi|} \geq \|\xi\|_0 \tag{3.11}$$

Ahora bien, sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$; entonces, aplicando la desigualdad Hölder,

$$\mathbb{E}\,|\xi_k \mu_{A_k}| \leq \sqrt{\mathbb{E}\,\xi_k^2\,\mathbb{E}\mu_{A_k}^2} \tag{3.12}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

De manera que,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k}\right\|_0 \overset{3.11}{\leq} \sqrt{\mathbb{E}\left|\sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k}\right|} \leq \sqrt{\mathbb{E}\sum_{k=m}^{n} |\xi_k \mu_{A_k}|} &= \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \mathbb{E}\,|\xi_k \mu_{A_k}|} \\ &\overset{3.12}{\leq} \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\,\xi_k^2\,\mathbb{E}\,\mu_{A_k}^2}}\end{aligned}$$

donde, por hipótesis,

$$\sqrt{\sum_{k=m}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\,\xi_k^2\,\mathbb{E}\,\mu_{A_k}^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\,\xi_k^2\,c}}.$$

Por tanto,

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} \xi_k \mu_{A_k}\right\|_0 \leq \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \sqrt{\mathbb{E}\,\xi_k^2\,c}}.$$

De modo que, si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k}$$

diverge, se establece una contradicción, pues $\xi_k \in \mathrm{L}_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Nótese que esta observación vale si la convergencia en L_0 se presenta de manera incondicional. De esta manera, encontramos una condición más fuerte para que la integral de la función aleatoria (3.1) tenga sentido, pues ésta nos garantiza la convergencia en probabilidad incondicional de la serie (3.3) y por ende, aplicando el Teorema 3.1, también nos asegura la convergencia en probabilidad de la serie (3.2) de manera incondicional.

A menos que se indique lo contrario, en lo que sigue nos referimos a la convergencia en probabilidad incondicional en el espacio quasi-normado $(\mathrm{L}_0, \|, \cdot\|_0)$ simplemente por convergencia.

Observación 3.3. Si existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu_A \neq 0$ c.s., entonces la convergencia de la serie $\sum_{k\geq} \xi_k \mu_{A_k}$ implica la convergencia de la serie

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k f_k$$

Para demostrar esto, procedemos por reducción al absurdo. Consideremos un conjunto $\mathcal{B}$-medible tal que $\mu_A \neq 0$ c.s. y una sucesión $\{\xi_k\} \subseteq \mathrm{L}_0$ tal que

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k$$

no converge en probabilidad incondicionalmente.

Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ se cumple

$$\left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k \right\|_0 > \epsilon \tag{3.13}$$

Nótese que, por Observación 1.3,

$$|\mu_A| \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\|_0 \leq \left\| \mu_A \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\|_0 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_A \right\|_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, utilizando (3.13),

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_A \right\|_0 > |\mu_A|\epsilon.$$

para todo $n \geq N$.

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_A$$

no converge en probabilidad incondicionalmente.

Esto establece una contradicción, pues

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k \mu_{A_k}$$

converge en probabilidad incondicionalmente, con $A_k = A$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Así,

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por tanto, de la Proposición 1.10,

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k f_k$$

converge en probabilidad incondicionalmente, para todo $\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X)$ tal que $|f_k| \leq 1$.$\square$

Es por ello que, si $\mu_A \neq 0$ para algún $A \in \mathcal{B}$, podemos asegurar la existencia de las funciones aleatorias de la forma (3.1). Es importante señalar que los resultados obtenidos no garantizan que dos representaciones de (3.1) determine el mismo valor de la integral. La desigualdad (3.10) es utilizada para obtener Teoremas límite de integrales de la forma (3.2).

Teorema 3.2. Consideremos la sucesión de funciones aleatorias $\{f^n\}_{n\geq 1}$ dada por

$$f^n(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{kn}(x).$$

donde, $\{\xi_{kn}\}_{k,n\geq 1} \subseteq \mathrm{L}_0$, $\{f_{kn}\}_{k,n\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X)$ tal que $|f_{kn}| \leq 1$.

Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu_{A_k}$ converge en probabilidad incondicionalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\forall\ A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\mu \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty$$

si, y solo si,

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu_{A_k} \right\|_0 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Demostración:

($\Leftarrow$) Supongamos que

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu_{A_k} \right\|_0 \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$; entonces, por hipótesis,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu_{A_k}$$

converge en probabilidad incondicionalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos un conjunto $\mathcal{B}$-medible A; entonces, por el Teormea 3.1, $\displaystyle\int_A f^n \, d\mu$ esta bien definida y viene dada por

$$\int_A f^n \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \int_A f_{kn} \, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, utilizando la Observación 3.1, puede verse que

$$\left\| \int_A f^n \, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_k} \right\|_0 .$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, de (3.14),

$$\int_A f^n \, d\mu \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

($\Rightarrow$) Para demostrar esta implicación, procedemos por reducción al absurdo.

Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_k} \right\|_0 = L \neq 0.$$

Entonces, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N(\epsilon)$, se obtiene que

$$\left| \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_k} \right\|_0 - L \right| < \epsilon$$

para cada $n \geq N(\epsilon)$.

Por consiguiente,

$$-\epsilon + L < \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_k} \right\|_0 < \epsilon + L$$

para cada $n \geq N(\epsilon)$.

Esto implica que, para cada $n \geq N(\epsilon)$, existe $\{A_{kn}\}_{k \geq 1}$ tal que

$$-\epsilon + L < \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_{kn}} \right\|_0 < \epsilon + L$$

de donde, para cada $n \geq N(\epsilon)$,

$$\left| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn} \mu_{A_{kn}} \right\|_0 - L \right| < \epsilon$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kn}\mu_{A_{kn}}\right\|_0 \neq 0. \tag{3.15}$$

Nótese que, tomando las funciones indicadoras $f_{kn}=\chi_{A_{kn}}$, para todo $k\in\mathbb{N}$ con $n\in\mathbb{N}$ (fijo),

$$\left\|\int_X f^n\,d\mu\right\|_0 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kn}\int_X f_{kn}\,d\mu\right\|_0 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{kn}\mu_{A_{kn}}\right\|_0.$$

Por tanto, de (3.15),

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\int_X f^n\,d\mu\right\|_0 \neq 0.$$

lo cual establece una contradicción. □

Este último resultado nos presenta una condición equivalente para que una sucesión de funciones aleatorias de la forma (3.1) sea μ-integrable. Además, si existe el segundo momento para toda $\{\xi_{kn}\}_{n\geq 1}\subseteq \mathrm{L}_0$ con k (fijo) y $\mathbb{E}\mu_A^2\leq c$, entonces una condición suficiente para asegurar la convergencia de la integral en el Teorema previo es la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mathbb{E}\xi_{kn}^2}\to 0, \qquad n\to\infty.$$

Para probar esto, se procede de manera similar a la Observación 3.2. De manera análoga, podemos obtener condiciones suficientes en términos de el segundo momento en el siguiente teorema.

Teorema 3.3. Sean μ y μ^n medidas aleatorias, para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea f una función aleatoria de la forma (3.1) y supongamos que las series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu_{A_k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu_{A_k}^n$ convergen en probabilidad incondicionalmente para todo $\{A_k\}_{k\geq 1}\subseteq\mathcal{B}$. Entonces, si

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\mu^n-\mu)_{A_k}\right\|_0\to 0, \qquad n\to\infty,$$

para todo $A\in\mathcal{B}$, la siguiente condición se satisface:

$$\int_A f\,d\mu^n \xrightarrow{P} \int_A f\,d\mu, \qquad n\to\infty.$$

Demostración:

Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y consideremos un conjunto $\mathcal{B}$-medible A; entonces, por hipótesis, las series

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k \mu_{A_k} \quad y \quad \sum_{k\geq 1} \xi_k \mu^n_{A_k}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas aún, por el Teorema 3.1, la función aleatoria f es integrable respecto de μ y μ^n, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d\mu^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente.

Notemos que, por la definición de la función aleatoria f dada en (3.1),

$$\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X) \text{ tal que } |f_k| \leq 1, \, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De manera que, por la Observación 2.2, existe una sucesión de funciones simples $\{f_k^m\}_{m\geq 1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con $|f_k^m| \leq 1$, tales que

$$\int_A f_k \, d\mu = \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A f_k^m \, d\mu$$

y

$$\int_A f_k \, d\mu^n = \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A f_k^m \, d\mu^n.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_A f\,d\mu^n - \int_A f\,d\mu\right\|_0 &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\int_A f_k\,d\mu^n - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\int_A f_k\,d\mu\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\int_A f_k^m\,d\mu^n - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\int_A f_k^m\,d\mu\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{l_{mk}} c_{imk}\mu^n_{A_{imk}} - \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{l_{mk}} c_{imk}\mu_{A_{imk}}\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{l_{mk}} c_{imk}\left(\mu^n_{A_{imk}} - \mu_{A_{imk}}\right)\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{l_{mk}} c_{imk}\left(\mu^n - \mu\right)_{A_{imk}}\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \mathrm{p}\lim_{m\to\infty}\int_A f_k^m\left(\mu^n - \mu\right)\right\|_0\\
&= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k \int_A f_k\left(\mu^n - \mu\right)\right\|_0\\
&= \left\|\int_A f\,d\left(\mu^n - \mu\right)\right\|_0.
\end{aligned}$$

De modo que,

$$\left\|\int_A f\,d\mu^n - \int_A f\,d\mu\right\|_0 = \left\|\int_A f\,d\left(\mu^n - \mu\right)\right\|_0. \tag{3.16}$$

Ahora bien, por hipótesis,

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\mu^n-\mu)_{A_k}\right\|_0 \to 0, \qquad n\to\infty,$$

donde, utilizando la desigualdad (3.10),

$$\left\|\int_A f\,d(\mu^n-\mu)\right\|_0 \leq 16\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k\leq 1}\xi_k(\mu^n-\mu)_{A_k}\right\|_0$$

Por lo tanto, sustituyendo en (3.16),

$$\left\|\int_A f\,d\mu^n - \int_A f\,d\mu\right\|_0 \to 0 \qquad n\to\infty$$

o equivalentemente,

$$\int_A f\,d\mu^n \xrightarrow{P} \int_A f\,d\mu, \qquad n\to\infty. \qquad \square$$

A partir de una sucesión de medidas aleatorias μ^n, este último teorema nos permite establecer la convergencia de integrales de la forma (3.2) respecto de μ^n. Más aún, podemos asegurar que esta convergencia nos arroja otra integral de la forma (3.2). Veamos ahora que ocurre si consideramos una sucesión en particular de funciones aleatorias de la forma (3.1).

Teorema 3.4. Sea μ y μ^n medidas aleatorias, para todo $n \in \mathbb{N}$ y consideremos funciones aleatorias de la forma (3.1) como sigue,

$$f_{(n)}(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{k0}(x) \quad , \quad f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_{k0}(x).$$

Además, supongamos que las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu^n_{A_n}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu^n_{A_k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente, para todo $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y $n \in \mathbb{N}$.
Entonces, si

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{kn} - \xi)\mu^n_{A_k} \right\|_0 \to 0 \qquad y \qquad \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu^n_{A_k} - \mu_{A_k}) \right\|_0 \to 0, \quad n \to \infty,$$

la siguiente condición, para todo $A \in \mathcal{B}$, se satisface:

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu^n \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu, \quad n \to \infty.$$

Demostración:
Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y consideremos un conjunto $\mathcal{B}$- medible A; entonces,

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f_{(n)}\, d\mu^n - \int_A f\, d\mu \right\|_0 &= \left\| \int_A f_{(n)}\, d\mu^n - \int_A f\, d\mu + \int_A f\, d\mu^n - \int_A f\, d\mu^n \right\|_0 \\ &= \left\| \int_A (f_{(n)} - f)\, d\mu^n + \int_A f\, d\mu^n - \int_A f.\mu \right\|_0 . \end{aligned} \tag{3.17}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Nótese que, por un resultado análogo al obtenido en la ecuación (3.16) que forma parte de la demostración del teorema anterior,

$$\left\| \int_A f\, d\mu^n - \int_A f.\mu \right\|_0 = \left\| \int_A f\, d(\mu^n - \mu) \right\|_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, sustituyendo en la ecuación (3.17),

$$\begin{aligned}\left\| \int_A f_{(n)}\, d\mu^n - \int_A f\, d\mu \right\|_0 &= \left\| \int_A (f_{(n)} - f)\, d\mu^n + \int_A f\, d(\mu^n - \mu) \right\|_0 \\ &\leq \left\| \int_A (f_{(n)} - f)\, d\mu^n \right\|_0 + \left\| \int_A f\, d(\mu^n - \mu) \right\|_0 . \end{aligned} \tag{3.18}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, utilizando la Observación 3.1, puede verse que

$$\left\| \int_A (f_{(n)} - f)\, d\mu^n \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{kn} - \xi_k) \mu^n_{A_k} \right\|_0 , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y

$$\left\| \int_A f\, d(\mu^n - \mu) \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu^n - \mu)_{A_k} \right\|_0 , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

De manera que, sustituyendo en la ecuación (3.18),

$$\left\| \int_A f_{(n)}\, d\mu^n - \int_A f\, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{kn} - \xi_k) \mu^n_{A_k} \right\|_0 + 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu^n - \mu)_{A_k} \right\|_0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis, el lado derecho de la desigualdad anterior converge a cero cuando $n \to \infty$.

Luego,

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu^n \overset{\|\cdot\|_0}{\to} \int_A f\, d\mu$$

o equivalentemente,

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu^n \overset{P}{\to} \int_A f\, d\mu.$$

□

Ahora, estudiemos la diferenciabilidad de la integral (3.2).

Teorema 3.5. Sean $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y f una función aleatoria de la forma (3.1) tal que

(i) $\mu_{A_n} \neq 0$ c.s.

(ii) El conjunto de las variables aleatorias $\left\{ \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}},\, B \subset A_n,\, n \geq 1 \right\}$ es acotado.

(iii) Para toda sucesión $\{A_{nk}\}_{n,k\geq 1}$ (formada por los conjuntos A_n y, posiblemente, ciertos conjuntos se repitan) y todo $B_k \subset A_{n_k}$, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_{n_k}}}$ converge en probabilidad incondicionalmente.

(iv) Para ciertos números c_k, $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_n} |f_k(x) - c_k| = 0$, y en este caso, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$ converge en probabilidad incondicionalmente.

Entonces,

$$\frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f\, d\mu \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k, \quad n \to \infty.$$

Demostración:

Consideremos $\{A_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ y veamos primero que $\int_{A_n} f\, d\mu$ esta bien definida, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ello consideremos la sucesión $\{A_{nk}\}_{n,k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ dada por:

$$A_{nk} = \begin{cases} A_n & \text{si } n \neq k. \\ A_n \cup A_{n+1} & \text{si } n = k \end{cases}$$

Nótese que, $A_k \subset A_{kk}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, utilizando la condición (iii) con $B_k = A_k$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{A_k}}{\mu_{A_{nk}}}$$

converge en probabilidad incondicionalmente, para todo $n \geq 1$ (en particular para todo $n \neq k$).

Así, por construcción de los conjuntos A_{nk},

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{A_k}}{\mu_{A_n}}$$

converge en probabilidad incondicionalmente, para todo $n \neq k$.

Es por ello que, podemos garantizar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_{A_k}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por tanto, usando el Teorema 3.1, aseguramos que $\int_{A_n} f\, d\mu$ esta bien definida y viene dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_{A_n} f_k\, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde la convergencia de la serie es en probabilidad de manera incondicional.

Veamos ahora que f es una función aleatoria $\frac{\mu}{\mu_{A_n}}$-integrable.

Para ello, notemos que por la definición de la función aleatoria f dada en (3.1),

$$\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X) \text{ tal que } |f_k| \leq 1, \, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De manera que, usando la Observación 2.2, existe una sucesión de funciones simples $\{f_k^m\}_{m\geq 1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con $|f_k^m| \leq 1$, tales que

$$\int_A f_k \, d\mu = \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A f_k^m \, d\mu.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu = \frac{1}{\mu_{A_n}} \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_{A_n} f_k^m \, d\mu &= \frac{1}{\mu_{A_n}} \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \mu_{A_{ikm}\cap A_n} \\
&= \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \frac{\mu_{A_{ikm}\cap A_n}}{\mu_{A_n}} \\
&= \mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_{A_n} f_k^m \, d\left(\frac{\mu}{\mu_{A_n}}\right) \\
&= \int_{A_n} f_k \, d\left(\frac{\mu}{\mu_{A_n}}\right). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Así, f es una función $\frac{\mu}{\mu_{A_n}}$-integrable, para todo $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente paso en la demostración es representar la serie

$$\frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu \qquad (3.20)$$

para estudiar la convergencia de los factores del lado derecho de (3.20).

Para ello consideremos $\epsilon > 0$; entonces, utilizando la condición (iii), se tiene que existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq N(\epsilon)$, obtenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} - \sum_{k=1}^{j} \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} \right\|_0 < \epsilon$$

para todo $B_k \subset A_{nk}$.

Nótese que,

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} - \sum_{k=1}^{j} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}}$$

para todo $B_k \subset A_{nk}$.

Por consiguiente, para todo $j \geq N(\epsilon)$,

$$\sup_{B_k \subset A_n} \left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} \right\|_0 < \epsilon. \tag{3.21}$$

Ahora bien, de la ecuación (3.19), podemos utilizar la Observación 3.1, para garantizar que

$$\left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{B_k \subset A_n} \left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \xi_k \frac{\mu_{B_k}}{\mu_{A_n}} \right\|_0 .$$

Luego, de (3.21),

$$\left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu \right\|_0 \to 0, \quad j \to \infty. \tag{3.22}$$

Sólo falta mostrar que

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k \, d\mu \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{j} \xi_k c_k, \quad n \to \infty.$$

Para ello consideremos $\alpha_{kn} = \sup_{x \in A_n} |f_k(x) - c_k|$, donde los c_k son tales que se verifica la condición (iv), para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Usando la condición (ii), podemos asegurar que,

$$\lim_{t \to 0} \sup_{B \subset A_n} \left\| t \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}} \right\|_0 = 0.$$

De modo que, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t| < \delta(\epsilon)$, entonces

$$\left\| t \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}} \right\|_0 < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset A_n$.

Nótese que, de la condición (iv), existe $N_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1(\epsilon)$, entonces

$$|\alpha_{kn}| < |t|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Así, usando la Observación 1.4,

$$\left\| \alpha_{kn} \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}} \right\|_0 < \epsilon$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$ tal que $B \subset A_n$.

Luego,

$$\sup_{B \subset A_n} \left\| \alpha_{kn} \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}} \right\|_0 < \epsilon \tag{3.23}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1$.

Ahora bien, notemos que por el Lema 2.2,

$$\left\| \int_{A_n} (f_k - c_k)\, d\left(\frac{\mu}{\mu_{A_n}}\right) \right\|_0, \leq 16 \sup_{B \subset A_n} \left\| \alpha_{kn} \frac{\mu_B}{\mu_{A_n}} \right\|_0 . \tag{3.24}$$

donde

$$\int_{A_n} (f_k - c_k)\, d\left(\frac{\mu}{\mu_{A_n}}\right) \overset{(3.19)}{=} \frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu - c_k$$

para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, de (3.23) y (3.24),

$$\frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu \overset{\|\cdot\|_0}{\to} c_k, \quad n \to \infty$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu \overset{P}{\to} c_k, \quad n \to \infty.$$

Es por ello que, del Corolario 1.7,

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu \overset{P}{\to} \sum_{k=1}^{j} \xi_k c_k, \quad n \to \infty. \tag{3.25}$$

Por lo tanto, de la condición (iv) y las ecuaciones (3.22), (3.25), aseguramos la existencia de escalares $N_2(\epsilon)$, $N_3(\epsilon)\, N_4(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tales que si $j \geq N_2(\epsilon)$, $j \geq N_3(\epsilon)$ y $n \geq N_4(\epsilon)$ entonces

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f\, d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \right\|_0 = \left\| \sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \right\|_0 \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k \right\|_0 + \left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu . \right\|_0 \leq \left\| \sum_{k=1}^{j} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu - \sum_{k=1}^{j} \xi_k c_k \right\|_0 \\
&+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k - \sum_{k=1}^{j} \xi_k c_k \right\|_0 + \left\| \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\mu_{A_n}} \int_{A_n} f_k\, d\mu \right\|_0 \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Luego, tomando $n \geq \max\{N_2, N_3, N_4\}$, se obtiene lo requerido. □

Consideremos una función aleatoria f de la forma (3.1), esto es,

$$f(x,\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\omega)f_k(x)$$

Estudiaremos ahora la integrabilidad de la función aleatoria f^{n+1}, que viene dada por

$$f^{n+1}(x,\omega)=\sum_{k_1,\ldots,k_n\geq 1}\xi_{k_1}\ldots\xi_{k_n}f_{k_1}\ldots f_{k_n}.$$

En principio, veamos el caso fg tal que $g\neq f$. Para ello denotemos,

$$g(x,\omega)=\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r(\omega)g_r(x).$$

Además, supongamos que, para todo x excepto para un conjunto μ-nulo, la serie

$$\sum_{k,r=1}\xi_k(\omega)\eta_r(\omega)f_k(x)g_r(x) \tag{3.26}$$

converge en probabilidad incondicionalmente. Entonces el producto fg es también una función aleatoria de la forma (3.1) y esta determinada por la serie (3.26)

Teorema 3.6. Sea μ una medida aleatoria y consideremos dos funciones aleaorias f y g como antes tales que satisfagan la condición de convergencia (3.26). Supongamos que para todo $\{A_k\}_{k\geq 1}$, $\{A_{kr}\}_{k,r\geq 1}\subseteq\mathcal{B}$, las series

$$\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r\mu_{A_r} \quad , \quad \sum_{k,r=1}^{\infty}\xi_k\eta_r\mu_{A_{kr}}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente. Entonces, para todo $A\in\mathcal{B}$,

$$\int_A f\,d\left(\int g\,d\mu\right)=\int_A f\,g\,d\mu.$$

Demostración:

Sea $A\in\mathcal{B}$. Aseguramos la existencia de las integrales de g y fg respecto de μ.

Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$, $\{A_{kr}\}_{k,r\geq 1}\subseteq\mathcal{B}$. Nótese que, por hipótesis,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r\mu_{A_r}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por consiguiente, aplicando el Teorema 3.1, se tiene que $\int_A g\,d\mu$ esta bien definida.

Ahora bien, utilizando un resultado análogo al obtenido en la ecuación (3.8), que forma parte de la demostración del Teorema 3.1, podemos asegurar que

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \sum_{r=p}^{q} \xi_k \eta_r \int_A f_k g_r \, d\mu \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{kr} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \sum_{r=p}^{m} \xi_k \eta_r \mu_{A_{kr}} \right\|_0 .$$

Entonces, si la serie del lado derecho no converge en probabilidad, existe $\{A'_{kr}\}_{k,r\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$ tal que la serie

$$\sum_{k,r=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \mu_{A'_{kr}}$$

diverge, lo cual establece una contradicción pues por hipótesis esta serie converge en probabilidad incondicionalmente.

Así, $\int_A f\, g\, d\mu$ esta bien definida.

Ahora, denotemos

$$f_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k \quad , \quad g_{(n)} = \sum_{r=1}^{n} \eta_r g_r$$

$$\mu_g^{(n)}(A) = \int_A g_{(n)} d\mu \quad , \quad \mu_g(A) = \int_A g\, d\mu.$$

El siguiente paso es demostrar que $f_{(n)}$ es $\mu_g^{(n)}$-integrable, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, notemos que por el Corolario 3.1, $\mu_g^{(n)}$ es una medida aleatoria. Más aún, dado que f es una función aleatoria de la forma (3.1),

$$\{f_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathrm{M}(X) \text{ tal que } |f_k| \leq 1, \, \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

De manera que, por la Observación 2.2, existe una sucesión de funciones simples $\{f_k^m\}_{m\geq 1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, con $|f_k^m| \leq 1$, tales que

$$\int_A f_k \, d\mu = \mathrm{p} \lim_{m\to\infty} \int_A f_k^m \, d\mu$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_A f_k\, d\left(\int g_{(n)}\, d\mu\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_A f_k\, d\left(\sum_{r=1}^{n} \eta_r \int g_r\, d\mu\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \int_A f_k\, d\left(\int \sum_{r=1}^{n} \eta_r g_r\, d\mu\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A f_m^k\, d\left(\int \sum_{r=1}^{n} \eta_r g_r\, d\mu\right)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \int_{A_{ikm}\cap A} \sum_{r=1}^{n} \eta_r g_r\, d\mu\right] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \int_{A_{ikm}\cap A} \sum_{r=1}^{n} \eta_r g_r\, d\mu\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \int_{A_{ikm}\cap A} g_r\, d\mu\right] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_{A_{ikm}\cap A} \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} g_r\, d\mu\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \chi_{A_{ikm}} g_r\, d\mu\right] = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \int_A f_m^k g_r\, d\mu\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \int_A f_k g_r\, d\mu = \sum_{k,r=1}^{n} \xi_k \eta_r \int_A f_k g_r\, d\mu,$$

de donde, $f_{(n)}$ es $\mu_g^{(n)}$-integrable, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como por hipótesis, la serie

$$\sum_{k,r=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \int_A f_k g_r\, d\mu$$

converge en probabilidad incondicionalmente; entonces

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} = \sum_{k,r=1}^{n} \xi_k \eta_r \int_A f_k g_r\, d\mu \xrightarrow{P} \sum_{k,r=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \int_A f_k g_r\, d\mu = \int_A f\, g\, d\mu, \quad n \to \infty,$$

esto es,

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} \xrightarrow{P} \int_A f\, g\, d\mu, \quad n \to \infty. \tag{3.27}$$

De manera que, para demostrar el teorema, es suficiente ver que

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu_g, \quad n \to \infty.$$

Primero notemos que, siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 3.1,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=p}^{m}\xi_k\sum_{r=q}^{n}\eta_r\int_{A_k}g_r\,d\mu\right\|_0 = \left\|\sum_{k,r}\xi_k\eta_r\int_X g_r\chi_{A_k}\,d\mu\right\|_0 &\le \sup_{\substack{|c_{ir}|\le 1\\ A_{ikr}\cap A_{ikr}=\varnothing}}\left\|\sum_{k,r}\xi_k\eta_r\sum_{i=1}^{l_r}c_{ir}\mu_{A_{ikr}}\right\|_0\\
&\le 8\sup_{\substack{\theta_{ir}=\pm 1\\ A_{ikr}\cap A_{jkr}=\varnothing}}\left\|\sum_{k,r,i}\theta_{ir}\xi_k\eta_r\mu_{A_{ikr}}\right\|_0\\
&\le 16\sup_{A_{kr}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k,r}\xi_k\eta_r\mu_{A_{kr}}\right\|_0\\
&= 16\sup_{A_{kr}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=p}^{m}\sum_{r=q}^{n}\xi_k\eta_r\mu_{A_{kr}}\right\|_0,
\end{aligned}$$

de donde,

$$\sup_{A_k\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=p}^{m}\xi_k\sum_{r=q}^{n}\eta_r\int_{A_k}g_r\,d\mu\right\|_0 \le 16\sup_{A_{kr}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=p}^{m}\sum_{r=q}^{n}\xi_k\eta_r\mu_{A_{kr}}\right\|_0. \tag{3.28}$$

Ahora, verifiquemos las hipótesis del Teorema 3.4, con $\mu_g^{(n)}$, μ_g, $f_{(n)}$ y f.

En principio, veamos que las series

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_g^{(n)}(A_k),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu_g^{(n)}(A_k)\,d\mu,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\mu_g(A_k) \tag{3.29}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente.

Por hipótesis,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\eta_r\mu_{A_r}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Entonces, aplicando Teorema 3.1, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k\int_{A_k}g_{(n)}\,d\mu = \sum_{k=1}^{n}\xi_k\mu_g^{(n)}(A_k)$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Para las series restantes procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que las series correspondientes en (3.29) no convergen en probabilidad incondicionalmente para alguna sucesión $\{A'_k\}_{k\ge 1}\subseteq\mathcal{B}$; entonces,

$$\left\|\sum_{k=p}^{m}\xi_k\mu_g^{(n)}(A'_k)\right\|_0 = \left\|\sum_{k=p}^{m}\xi_k\int_{A'_k}g_{(n)}\,d\mu\right\|_0 = \left\|\sum_{k=p}^{m}\xi_k\sum_{r=1}^{n}\eta_r\int_{A_{k'}}g_r\,d\mu\right\|_0 \overset{(3.28)}{\le} 16\sup_{A_{kr}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{k=p}^{m}\sum_{r=1}^{n}\xi_k\eta_r\mu_{A_{kr}}\right\|_0.$$

Por consiguiente, existe $\epsilon > 0$ para alguna sucesión $\{B_{kr}\}_{k,r\geq 1} \in \mathcal{B}$, tal que

$$\left\| \sum_{k=p}^{m} \sum_{r=1}^{n} \xi_k \eta_r \mu_{B_{kr}} \right\|_0 > \frac{\epsilon}{16}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$.

De modo que,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} \xi_k \eta_r \mu_{B_{kr}} \right\|_0 = \infty.$$

Luego,

$$\lim_{(n,m)\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} \xi_k \eta_r \mu_{B_{kr}} \right\|_0 = \infty.$$

Esto representa una contradicción, pues por hipótesis, la serie

$$\sum_{k,r\geq 1} \xi_k \eta_r \mu_{B_{kr}}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Así,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k)\, d\mu$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por otro lado, dado que

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k \mu_g(A'_k) = \sum_{k\geq 1} \xi_k \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r \int_{A'_k} g_r\, d\mu = \sum_{k\geq 1} \xi_k \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r \int_{A'_k} g_r\, d\mu,$$

entonces, la serie

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k \sum_{r=1}^{\infty} \eta_r \int_{A'_k} g_r\, d\mu$$

no converge en probabilidad incondicionalmente.

Luego, utilizando la desigualdad (3.28), existe $\epsilon > 0$ para alguna sucesión $\{B'_{kr}\}_{k,r\geq 1}$ tal que

$$\left\| \sum_{k,r=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \mu_{B'_{kr}} \right\|_0 > \frac{\epsilon}{16},$$

lo que genera una contradicción, pues por hipótesis, la serie

$$\sum_{k,r=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \mu_{B'_{kr}}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por tanto, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g(A_k)$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Ahora bien, falta verificar las hipótesis restantes del Teorema 3.4, a saber,

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\|_0 \ \to \ 0 \quad n \to \infty$$

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_g - \mu_g^{(n)})(A_k) \right\|_0 \ \to \ 0 \quad n \to \infty.$$

Notemos que,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\|_0 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\|_0 \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k \sum_{r=1}^{n} \eta_r \int_{A_k} g_r \, d\mu \right\|_0 .$$

y

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_g^{(n)} - \mu_g)(A_k) \right\|_0 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left(\sum_{r=1}^{\infty} \eta_r \int_{A_r} g_r \, d\mu - \sum_{r=1}^{n} \eta_r \int_{A_k} g_r \right) d\mu \right\|_0 = \left\| \sum_{r=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \int_{A_r} g_r \, d\mu \right\|_0$$

Por consiguiente, de (3.28),

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{kr} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{r=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_r \mu_{A_{kr}} \right\|_0$$

y

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_g^{(n)} - \mu_g)(A_k) \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{kr} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{r=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_r \mu_{A_{kr}} \right\|_0$$

De modo que, para n suficientemente grande, el supremo del lado derecho de las desigualdades precedentes tiende a cero (ver la demostración Teorema 3.2).

Así,

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\|_0 \ \to \ 0 \quad n \to \infty.$$

y

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_g - \mu_g^{(n)})(A_k) \right\|_0 \ \to \ 0 \quad n \to \infty.$$

Por lo tanto, utilizando el Teorema 3.4,

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu_g, \quad n \to \infty.$$

Luego, de (3.27),

$$\int_A f\, d\mu_g = \int_A f\, g\, d\mu$$

esto es,

$$\int_A f\, d\left(\int g\, d\mu\right) = \int_A f\, g\, d\mu. \qquad \square$$

En lo que sigue, centraremos nuestro estudio en las soluciones de la equación

$$\mu_A = \eta_A + \int_A f\, d\mu \tag{3.30}$$

donde η es una medida aleatoria conocida y f es una función aleatoria de la forma (3.2), esto es,

$$f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x)$$

La ecuación (3.30) se satisface c.s. para todo $A \in \mathcal{B}$.

Teorema 3.7. Supongamos que, para todo n y todo x excepto para un conjunto μ-nulo, las series

$$\sum_{k_1,\dots,k_n \geq 1} \xi_{k_1} \dots \xi_{k_n} f_{k_1}(x) \dots f_{k_n}(x)$$

convergen en probabilidad incondicionalmente.

Supongamos que, para todo conjunto $\mathcal{B}$-medible $A_{i_1 \dots i_n} \in \mathcal{B}$, las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ i_1 \dots i_n \geq 1}} \xi_k \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} \eta_{A_{k\, i_1 \dots i_n}} \tag{3.31}$$

convergen en probabilidad incondicionalmente.

Supongamos que, para toda sucesión $\{A_k\}_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_{A_k} \tag{3.32}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Entonces, la medida aleatoria dada por

$$\mu(A,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f^n\, d\eta(\omega) \tag{3.33}$$

esta bien definida y es una solución de la ecuación (3.30).

Demostración:

Sea $\{A_k\}_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$; Dada la convergencia de la serie (3.32) y usando el Teorema 3.1, se obtiene que f es η-integrable. Nótese que, por hipótesis,

$$f^{n+1}(x,\omega) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \leq 1} \xi_{k_1}(\omega)\ldots\xi_{k_n}(\omega) f_{k_1}(x)\ldots f_{k_n}(x)$$

es una función aleatoria, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Más aún, tomando k, n (fijos), obtenemos la convergencia en probabilidad de la serie

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_{k_1}\ldots\xi_{k_n}\eta_{A_{k_1\ldots k_n}}.$$

de manera incondicional.

Luego, utilizando el Teorema 3.1, la serie

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_{k_1}\ldots\xi_{k_n} \int_{A_k} f_k^{n+1}\, d\eta$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Por consiguiente, f^{n+1} es η-integrable, para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo que f^n esta bien definida, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f^n\, d\eta \tag{3.34}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que la serie (3.34) no converge en probabilidad incondicionalmente para algún $A' \in \mathcal{B}$.

Notemos que,

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} \int_A f^n\, d\eta \right\|_0 = \left\| \sum_{n=p}^{p} \sum_{i_1\ldots i_n \geq 1} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n} \int_A f_{i_1}\ldots f_{i_n}\, d\eta \right\|_0 \overset{(3.9)}{\leq} 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{n=p}^{p} \sum_{i_1\ldots i_n \geq 1} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}\eta_{A_{i_1\ldots i_n}} \right\|_0$$

Luego, existe $\{B_{i_1\ldots i_n}\}_{i_k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}$, para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1\ldots i_n \geq 1} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_n}\eta_{B_{i_1\ldots i_n}}$$

diverge, lo cual contradice la hipótesis dada en (3.31). Así, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f^n\, d\eta$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

De manera que, por la Proposición 3.1, $\eta_A + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_A f^n \, d\eta$ es una función σ-additiva. Más aún, usando la Proposición 2.2,

$$\mu(A,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f^n \, d\eta(\omega) = \eta(A,\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f^n \, d\eta(\omega) \tag{3.35}$$

es una medida aleatoria.

Veamos ahora que μ_A es solución de la equación (3.30). Dado que f es una función aleatoria de la forma (3.1) η-integrable, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen una sucesión de funciones η-simples

$$f_k^m(x) = \sum_{i=1}^{l_{km}} c_{ikm} \chi_{A_{ikm}}(x),$$

con $|f_k^m| \leq 1$, tales que

$$\begin{aligned}
&\int_A f \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{ikm}} c_{ikm} \sum_{n=0}^{q} \int_{A_{ikm}\cap A} f^n \, d\eta \right] = \sum_{n=0}^{q} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \left[\mathrm{p}\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{l_{ikm}} c_{ikm} \int_{A_{ikm}\cap A} f^n \, d\eta \right] \\
&= \sum_{n=0}^{q} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k \, d \left(\int f^n \, d\eta \right) = \sum_{n=0}^{q} \int_A f \, d \left(\int f^n \, d\eta \right).
\end{aligned}$$

Nótese que, aplicando el Teorema 3.6,

$$\sum_{n=0}^{q} \int_A f \, d \left(\int f^n \, d\eta \right) = \sum_{n=0}^{q} \int_A f^{n+1} \, d\eta.$$

Por consiguiente,

$$\int_A f \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) = \sum_{n=0}^{q} \int_A f^{n+1} \, d\eta = \sum_{n=0}^{q} \int_A f^n \, d\eta - \eta_A$$

de donde,

$$\sum_{n=0}^{q} \int_A f^n \, d\eta = \int_A f \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) + \eta_A. \tag{3.36}$$

Así, sólo queda mostrar que,

$$\int_A f \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) \xrightarrow{P} \int_A f \, d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int f^n \, d\eta \right), \quad q \to \infty.$$

Para ello, verifiquemos las hipótesis del Teorema 3.3. Consideremos,

$$\mu^q_{A_k} = \sum_{n=0}^{q-1} \int_{A_k} f^n \, d\eta.$$

Entonces, por Proposición 2.2, μ^q es una medida aleatoria, para cada $q \in \mathbb{N}$. Mas aún, usando (3.31),

$$\sum_{k\geq 1} \xi_k \mu^q_{A_k}$$

converge en probabilidad incondicionalmente.

Ahora, veamos que

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k (\mu - \mu^q)_{A_k} \right\|_0 \; \to \; 0, \quad n \to \infty.$$

En efecto, dado que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k (\mu - \mu^q)_{A_k} \right\|_0 &= \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k (\mu_{A_k} - \mu^q_{A_k}) \right\|_0 = \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_k} f^n \, d\eta - \sum_{n=0}^{q-1} \int_{A_k} f^n \, d\eta \right) \right\|_0 \\
&= \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k \sum_{n=q}^{\infty} \int_{A_k} f^n \, d\eta \right\|_0 = \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_n} \int_{A_k} f_{k_1} \cdots f_{k_n} \, d\eta \right\|_0 \\
&= \left\| \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k,k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_k \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_n} \int_{A_k} f_{k_1} \cdots f_{k_n} \, d\eta \right\|_0 \overset{(3.9)}{\leq} 16 \sup_{A_{k i_1 \cdots i_n} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k,i_1,\ldots,i_n \geq 1} \xi_k \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} \eta_{A_{k\, i_1 \cdots i_n}} \right\|_0
\end{aligned}$$

entonces,

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k (\mu - \mu^q)_{A_k} \right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{k i_1 \cdots i_n} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k,i_1,\ldots,i_n \geq 1} \xi_k \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_n} \eta_{A_{k\, i_1 \cdots i_n}} \right\|_0 .$$

Nótese que el supremo del lado derecho de la desigualdad previa tiende a cero cuando $n \to \infty$, en caso contrario, podemos construir una serie no convergente de la forma (3.31) y caemos en una contradicción. Por consiguiente

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k\geq 1} \xi_k (\mu - \mu^q)_{A_k} \right\|_0 \; \to \; 0, \quad n \to \infty.$$

De modo que, aplicando el Teorema 3.3,

$$\int_A f \left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta \right) \overset{P}{\to} \int_A f \, d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int f^n \, d\eta \right), \quad q \to \infty.$$

Por lo tanto, de (3.36),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_A f^n\,d\eta = \eta_A + \int_A f\,d\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int f^n\,d\eta\right)$$

esto es,

$$\mu_A = \eta_A + \int_A f\,d\mu\ .$$

Luego, μ_A es solución de la ecuación (3.30). □

Veamos ahora, bajo que condiciones la medida aleatoria μ dada en el teorema previo es la única solución que satiface (3.30).

Teorema 3.8. Supongamos que todas las condiciones del Teorema 3.7 se satisfacen. Entonces para toda medida aleatoria μ tal que

$$\forall\, n,\quad A\in\mathcal{B}\quad \int_A f^n\,d\left(\int f\,d\mu\right) = \int_A f^{n+1}\,d\mu \quad \text{y} \tag{3.37}$$

$$\forall\, A\in\mathcal{B}\quad \int_A f^n\,d\mu \xrightarrow{P} 0,\quad n\to\infty, \tag{3.38}$$

no existe otra sulución para la ecuación (3.30) que difiera de

$$\mu(A,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_A f^n\,d\eta(\omega). \tag{3.39}$$

Demostración:

Procedemos por reducción al absurdo; sea $A\in\mathcal{B}$ y supongamos que existe otra solución μ que satisfaga las condiciones (3.37) y (3.38). Entonces,

$$\begin{aligned}\mu_A = \eta_A + \int_A f\,d\mu &= \eta_A + \int_A f\,d\left(\eta + \int f\,d\mu\right)\\ &= \eta_A + \int_A f\,d\eta + \int_A f\left(\int f\,d\mu\right)\\ &\overset{3.37}{=} \eta_A + \int_A f\,d\eta + \int_A f^2 d\mu = \ \dots\ = \sum_{k=0}^{n}\int_A f^k\,d\eta + \int_A f^{n+1}\,d\mu.\end{aligned}$$

Note que, cuando $n\to\infty$, la suma converge (aplicando el Teorema 3.7) y el último término converge a cero, por la condición (3.38).

Luego,

$$\mu_A = \sum_{k=0}^{\infty}\int_A f^k\,d\eta$$

lo que establece una contradicción.

Por tanto, la ecuación (3.39) es la única solución para (3.30). □

Falta investigar la estabilidad de las soluciones (3.39) en la ecuación (3.30), es decir, bajo que condiciones una sucesión de soluciones de la forma (3.39) converge en este mismo espacio.

Consideremos la colección de equaciones con las funciones

$$\mu_A^n = \eta_A^n + \int_A f_{(n)}\, d\mu^n, \quad n \geq 1, \quad \mu_A = \eta_A + \int_A f\, d\mu,$$

$$f_{(n)}(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_k, \qquad f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x). \tag{3.40}$$

Teorema 3.9. Supongamos que en (3.40) existe $\mathbb{E}\eta_A^{n^2}$, $\mathbb{E}\eta_A^2$, $\mathbb{E}(\xi_{i_1 n}...\xi_{i_k n})^2$, $\mathbb{E}(\xi_{i_1}...\xi_{i_k})^2$. Supongamos que para $f_{(n)}$, η^n, y para f y η satisfacen las condiciones del Teorema 3.9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

(i) $\sup_{A,n}\{\mathbb{E}\eta_A^{n^2}, \mathbb{E}\eta_A^2\} < \infty$.

(ii) $\sup_A \mathbb{E}((\eta^n - \eta)_A)^2 \ \to \ 0, \quad n \to \infty$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \sum_{i_1,...,i_k \geq 1} \sqrt{\mathbb{E}(\xi_{i_1}...\xi_{i_k})^2} < \infty$.

(iv) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \sum_{i_1,...,i_k \geq 1} \sqrt{\mathbb{E}(\xi_{i_1 n}...\xi_{i_k n} \ - \ \xi_{i_1}...\xi_{i_k})^2} \ \to \ 0 \quad n \to \infty$.

Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}$, cuando $n \to \infty$,

$$\mu_A^n = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f_{(n)}^k\, d\eta^n \xrightarrow{P} \mu_A = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f^k\, d\eta.$$

Demostración:

Sea $A \in \mathcal{B}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|\mu_A^n \ - \ \mu_A\|_0 &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f_{(n)}^k\, d\eta^n \ - \ \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f^k\, d\eta \right\|_0 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_A f_{(n)}^k\, d\eta^n - \int_A f^k\, d\eta \right) \right\|_0 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_A f_{(n)}^k\, d\eta^n - \int_A f^k\, d\eta \ + \int_A f^k\, d\eta^n \ - \ \int_A f^k\, d\eta^n \right) \right\|_0 .
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Nótese que,

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_A f_{(n)}^k \, d\eta^n - \int_A f^k \, d\eta + \int_A f^k \, d\eta^n - \int_A f^k \, d\eta^n\right)\right\|_0$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{m}\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n + \int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0 \leq \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n + \int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n + \int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0 \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 + \left\|\int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0\right)$$

$$= \|(\eta^n - \eta)_A\|_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 + \left\|\int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0\right)$$

$$\leq \sup_{A\in\mathcal{B}} \|(\eta^n - \eta)_A\|_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 + \left\|\int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta))\right\|_0\right).$$

Así, de (3.41), para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mu_A^n - \mu_A\|_0 \leq \sup_{A\in\mathcal{B}} \|(\eta^n - \eta)_A\|_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 + \left\|\int_A f^k \, d\,(\eta^n - \eta)\right\|_0\right). \tag{3.42}$$

Ahora bien, nosotros necesitamos estimar las expresiones matemáticas de la desigualdad anterior. Para ello, notemos que

$$\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 = \left\|\sum_{i_1,\ldots,i_k\geq 1} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\int_A f_{i_1}\ldots f_{i_k}\, d\eta^n\right\|_0$$

y

$$\left\|\int_A f^k \, d(\eta^n - \eta)\right\|_0 = \left\|\sum_{i_1\ldots i_k\geq 1} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k}\int_A f_{i_1}\ldots f_{i_k}\, d(\eta^n - \eta)\right\|_0 .$$

Por consiguiente, usando la Observación 3.1,

$$\left\|\int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta^n\right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{i_1\ldots i_k}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{i_1\ldots i_k\geq 1} (\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})\eta^n_{A_{i_1\ldots i_k}}\right\|_0$$

y

$$\left\|\int_A f^k \, d(\eta^n - \eta)\right\|_0 \leq 16 \sup_{A_{i_1\ldots i_k}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{i_1\ldots i_k\geq 1} (\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})(\eta^n - \eta)_{A_{i_1\ldots i_k}}\right\|_0$$

Más aún, de la Observación 3.2,

$$\sup_{A_{i_1\ldots i_k}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{i_1\ldots i_k\geq 1} (\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})\eta^n_{A_{i_1\ldots i_k}}\right\|_0 \leq \sum_{k\geq 1, i_1\ldots i_k}\sqrt{\mathbb{E}(\xi_{i_1 n}\ldots\xi_{i_k n} - \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})^2}\,\sup_{A_{i_1\ldots i_k}}\sqrt{\mathbb{E}\eta^{n^2}_{A_{i_1\ldots i_k}}}$$

y

$$\sup_{A_{i_1\dots i_k}\in\mathcal{B}}\left\|\sum_{i_1\dots i_k\geq 1}(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})(\eta^n-\eta)_{A_{i_1\dots i_k}}\right\|_0 \leq \sum_{k\geq 1, i_1\dots i_k}\sqrt{\mathbb{E}(\xi_{i_1}\dots\xi_{i_k})^2}\sup_{A_{i_1\dots i_k}}\sqrt{\mathbb{E}((\eta^n-\eta)_{A_{i_1\dots i_k}})^2}.$$

Luego, de las condiciones (ii) y (iv), las series del lado derecho de las desigualdades anteriores convergen a cero, cuando $n \to \infty$.

Sólo queda mostrar que,

$$\sup_{A\in\mathcal{B}}\|(\eta^n-\eta)_A\|_0 \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

Notemos que, $\mathrm{L}^2(\Omega, P) \subseteq \mathrm{L}^1(\Omega, P)$, pues P es una medida acotada.

Así, de la condición (ii),

$$\sup_{A}\mathbb{E}(\eta^n-\eta)_A\,dP \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

Por consiguiente, usando (3.11)

$$\sup_{A\in\mathcal{B}}\|(\eta^n-\eta)_A\|_0 \ \to\ 0, \quad n\to\infty.$$

De manera que, utilizando (3.42),

$$\mu_A^n = \sum_{k=0}^{\infty}\int_A f_{(n)}^k\,d\eta^n \xrightarrow{P} \mu_A = \sum_{k=0}^{\infty}\int_A f^k\,d\eta. \qquad \square$$

Apéndice

Con respecto a las abreviaturas y símbolos, denotaremos por

$(G, \circ)$ - Grupo aditivo.

$\mathrm{S}(X)$ - Espacio vectorial de todas las funciones simples de X.

$\mathrm{M}(X)$ - Espacio vectorial de todas las funciones medibles de X.

$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0(\Omega, P)$ - Espacio vectorial de todas las v.a.(s) en Ω.

$\mathfrak{L}_p = \mathfrak{L}_p(\Omega, P)$, $1 \leq p < \infty$ - Espacio vectorial de todas las v.a.(s) ξ tales que $\int_\Omega |\xi|^p \, dP < \infty$.

$\mathcal{R}$ - Relación de equivalencia en $\mathfrak{L}_p$, con $0 \leq p < \infty$, dada por: $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ c.s.

$\mathrm{L}_p = \mathrm{L}_p(\Omega, P)$ - Espacio cociente $\mathfrak{L}_p / \sim$, con $0 \leq p < \infty$.

ℓ_∞ - Espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$.

$\|\xi\|_p = \left(\int_\Omega |\xi|^p \, dP \right)^{1/p}$, con $1 \leq p < \infty$.

$\| \{x_n\} \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

$\{\omega \in \Omega : \rho(\omega) < c\} = \{\rho < c\}$, para todo $\rho \in \mathrm{L}_0, c \in \mathbb{R}$ (Análogo en el caso $>, \leq, \geq$ ó $=$).

$A^B = \{f : B \to A \, : \text{ f es función}\}$, A, B conjuntos.

Bibliografía

[1] V.N. Radchenko, Integrals of certain random functions with respect to general random measure: *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 51, No. 8, 1999. 1997.

[2] P. Turpin, Convexités dans les espaces vectorielles topologiques généraux: *Diss. Math.*, Vol. 131 (1976).

[3] I. Labuda y L. Drewnowski, Bartle-Dunford-Schwartz integration: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 401 (2013) 620-640.

[4] N.N. Vakhaniya, V.I. Tarieladze y S.A. Chobanyan, Probability Distributions in Banach Spaces [en ruso]: Nauka, Moscow (1985).

[5] S. Rolewicz Metric Linear Space: *Polish Scientific Publishers, Miodowa* Vol. 10, 00-251 Warzawa, Poland.

[6] V.N. Radchenko, Integrals with respect to General Random Measures: *Proceedings of Institute of Mathematics*, Vol 27. Kiev, Instituto de Matemáticas, 1999, 196 pag. [en ruso].

[7] L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration I, II y III: *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math., Astron., Phys.*, 20, No. 6, 439-445 (1972).

[8] L. Drewnowski, Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurable functions *Proc. Amer. Math. Soc.*, 91, No. 4, 581-588 (1984).

[9] V.N. Radchenko, Uniform integrability and the Lebesgue theorem on convergence in L_0-valued measure Ukr. Mat. Zh., 48, No. 6, 857-860 (1996).

[10] V.N. Radchenko, Convergence of integrals of unbounded real functions in random measures, *Theory Probab. Appl.*, Vol. 42, No. 2.

[11] M. Talagrand, Les mesures vectorielles *à* valeurs dans L^0 sont bornées,*Ann. Sci. Éc.* Norm. Supér. 14(1981) 445-452.