



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

*Fórmulas de Kac-Rice en
Variedades Diferenciales*

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Kerlyns Martínez**, para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: José Gregorio Gómez.

Cotutor: Mairene Colina.

Caracas, Venezuela

Julio, 2014.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Fórmulas de Kac-Rice en Variedad del Diferenciales**”, presentado por la **Br. Kerlyns Martínez Rodríguez**, titular de la Cédula de Identidad **20.413.139**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

MSc. José Gregorio Gómez.
Tutor

Dr. Mairene Colina.
Cotutor

Dr. José León.
Jurado

Dr. Carenne Ludeña.
Jurado

A Dios,
y a mi madre...

Agradecimientos

Ser agradecido y dar mérito a quienes lo merecen es una de las maneras de demostrar humildad y un poco de sabiduría. Sinceramente creo que tengo agradecer a muchas personas por estar en donde estoy y por alcanzar lo poco que hasta ahora he alcanzado.

Comienzo por agradecerle a mi madre, porque por ella estoy aquí y por ella me he esforzado, pues me ha enseñado que con esfuerzo sabe mejor el triunfo. Espero que Dios me de la oportunidad de tenerla a mi lado por muchos años más.

Por supuesto también debo agradecer al profesor José Gregorio Gómez, que a pesar de que trabajamos a distancia, considero que el trabajo fue ameno y el resultado, en mi opinión, fructuoso; y a la profesora Mairene Colina ya que no sólo ambos me han ayudado sino que también me han apoyado y dado esos empujoncitos que muchas veces necesitamos para avanzar (y otras veces para frenar un poco cuando vamos muy rápido). Estoy segura que he dado algunos dolores de cabeza, pero me alegra haber podido trabajar con ambos y aprender de ambos.

Agradezco a la UCV, mi casa de estudios, y en especial a la Escuela de Matemáticas, y con esto me refiero a quienes son responsables de que esta esté en pie. A mis profesores, por su labor y por ayudar en mi formación y en las de mis compañeros. Si miramos atrás podremos ver que hemos aprendido mucho, y que todavía queda aún más por aprender.

Por último agradezco a mis familiares y amigos, y en especial a Andrea Delgado, por creer en mi y brindar esas palabras de aliento cuando, por alguna razón, nuestro entorno se torna nublado.

A Dios mil gracias...

Fórmulas de Kac-Rice en Variedades Diferenciales

Kerlyns Martínez.

Julio 2014.

Índice general

Introducción	1
1. Fórmula de Kac-Rice	3
1.1. Reseña Histórica	3
1.2. Fórmula del Área	4
1.3. Campos Aleatorios	21
1.4. Fórmula de Kac-Rice	27
2. Kac-Rice en Variedades	36
2.1. Variedades Diferenciables	36
2.2. Fórmula de Kac-Rice en Variedades Diferenciables	43
2.3. Independencia de las Cartas	54
2.4. FKR en variedades para todo nivel	59
3. Segundos Momentos en Variedades Diferenciables	63
A. Principios de Teoría de la Medida y Análisis Matemático	69
B. Resultados Previos a la Fórmula del Área	74
Bibliografía	88

Introducción

Me gustaría comenzar con un párrafo del prefacio del libro "*Geometric Measure Theory*" [6]: Durante las últimas décadas, el tema de la Teoría de la Medida Geométrica se ha desarrollado a partir de una colección de especiales resultados aislados en un cuerpo coherente de conocimientos básicos con una natural estructura amplia de sí misma, y con fuertes lazos con muchas otras partes de las matemáticas. Estos avances nos han brindado una percepción más profunda de las bases analíticas y topológicas de la geometría, y han dado además un nuevo sentido al cálculo de variaciones.

En nuestro caso, los espacios tangentes de conjuntos m -dimensionales son un aspecto importante a estudiar, lo que nos lleva al manejo y uso de la Geometría Integral, la cual surge a partir de un intento de perfeccionar ciertas afirmaciones de la teoría de probabilidad geométrica con el trabajo de Luis Santaló y Wilhelm Blaschke. De ello se deduce del teorema clásico de Crofton: expresar la longitud de una curva plana como la esperanza de el número de intersecciones con una recta aleatoria.

Las herramientas para el estudio del cálculo de variaciones son ya muy variadas y, como muy bien lo dice Federer en su libro, son muchas ya las áreas que han incursionado en este aspecto. En este trabajo utilizaremos una herramienta bastante poderosa llamada Fórmula del Área, ya que ella presenta un vínculo muy fuerte con la Fórmula de Kac-Rice.

Para adentrarnos un poco en materia de la Fórmula de Kac-Rice podemos imaginarnos un función polinómica, como es natural estamos entonces interesados en conocer las raíces de dicha función. Si suponemos además que este polinomio varía de manera aleatoria, esperamos calcular el número esperado de raíces. Al extender esta idea a funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tenemos campos aleatorios y estamos interesados en conocer el número esperado de cruces de f con cierto nivel $y \in \mathbb{R}^n$, y es la Fórmula de Kac-Rice la que nos brinda una expresión para este valor.

La idea de nuestro trabajo es ir un poco más allá y ofrecer una expresión para la

Fórmula de Kac-Rice (FKR) correspondiente a un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, donde \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades diferenciables. Para esto es necesario introducir, como ya lo dijimos, la Fórmula del Área, cuya demostración fue extraída del libro *Geometric Measure Theory* de Federer y que trabajamos en el capítulo 1. Al tener las herramientas para tratar la FKR, en espacios euclídeos, presentamos el resultado de esta para campos aleatorios localmente Lipschitz, y luego damos paso a la expresión de los momentos de orden mayor [4].

¿Por qué interesarnos en tener un equivalente a Kac-Rice en variedades diferenciables?. Si estudiamos un poco las aplicaciones físicas directas de la FKR nos daremos cuenta de que muchos de los campos aleatorios presentes en la vida real son campos definidos entre variedades diferenciables. Por ejemplo pensemos en el planeta y en la temperatura de cierto punto sobre la Tierra, podemos definir un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a partir de esta idea.

En este contexto, en el capítulo 2, se encuentra el núcleo de nuestra investigación: la generalización de las FKR en variedades diferenciables. Estas expresiones las trabajaremos progresivamente, con esto me refiero a que, primeramente, trabajamos la esperanza de la variable aleatoria *Número de cruces* para posteriormente buscar el equivalente de los momentos factoriales en variedades.

Sin embargo, de los principios de geometría diferencial, sabemos que al trabajar con variedades, las cartas locales son parte fundamental del estudio de estos espacios. Más aún, al obtener expresiones en donde las cartas diferenciables estén inmersas, es de gran importancia verificar la independencia de estas expresiones en función de las cartas. Por tanto, en este trabajo estudiamos también dos cosas fundamentales: la FKR en variedades diferenciables es independiente de las cartas escogidas y la validez de esta fórmula para todo nivel, [8].

CAPÍTULO 1

Fórmula de Kac-Rice

SECCIÓN 1.1
Reseña Histórica

Comencemos con un poco de historia relacionada al inicio del estudio de la Fórmula de Kac-Rice y en la posterior sección atenderemos algunas definiciones que involucran campos aleatorios y estudiaremos la Fórmula del Área, que representa la base de la Fórmula de Kac-Rice.

Marek Kac (1914-1984) fue un matemático polaco especializado en el área de las probabilidades y teoría espectral. En 1943, se interesó por conocer las raíces de la función algebraica, con valores reales aleatorios,

$$f(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_{n-1}t^{n-1},$$

tal que la variable aleatoria $\mathcal{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, tiene una distribución normal con media 0 y variancia $I_{n \times n}$, es decir, $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0, I_{n \times n})$. Y estableció así el siguiente resultado:

Teorema (Teorema de Kac): Sea N_n el número de raíces de la función $f(t) = x_0 + x_1t + x_2t^2 + \dots + x_{n-1}t^{n-1}$ tal que $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0, I_{n \times n})$, entonces

$$\mathbb{E}[N_n] = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1-y^2)^2} - \frac{n^2 y^{2n-2}}{(1-y^{2n})^2}} dy.$$

Al intentar extender esta idea, podemos imaginarnos a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $n \in \mathbb{N}$, donde f es una función aleatoria. Queremos entonces encontrar una descripción explícita para

$\mathbb{E}[\#\{t \in \mathbb{R}^n : f(t) = u\}]$, donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $\#$ denota el cardinal de un conjunto.

Es aquí cuando aparecen las ideas del ingeniero eléctrico Stephen Oswald Rice (1907-1986) especializado en teoría comunicacional.

Definiendo el conjunto

$$U_u(f, T) \equiv \#\{t \in T : f(t) = u, \dot{f}(t) > 0\}, \text{ para } T \subset \mathbb{R}^n \text{ y } \dot{f}(t) = \det(D_f(t)),$$

y agregando hipótesis de diferenciabilidad para f se llegó a la Fórmula de Kac-Rice:

$$\mathbb{E}[U_u(f, T)] = \int_T p_{f(t)}(u) \mathbb{E}\left[|\dot{f}(t)| \mathbb{I}_{(0, \infty)}(\dot{f}(t)) | f(t) = u\right] dt.$$

Más adelante estudiaremos una versión de esta fórmula para campos aleatorios localmente Lipschitz. Por ahora estableceremos algunas definiciones y resultados previos.

SECCIÓN 1.2

Fórmula del Área

Para el desarrollo de la Fórmula de Kac-Rice es necesario el estudio de la Fórmula del Área, ya que esta es su base. La Fórmula del Área nos permite obtener una expresión para la medida de Lebesgue de la imagen de un conjunto A a través de un campo vectorial f , que coincide con la integral sobre A del jacobiano de f .

La medida de Lebesgue que, como es de costumbre, denotaremos por λ , es una medida que generaliza la longitud, el área o el volumen a los subconjuntos del espacio euclídeo según sea su dimensión. Además de la medida de Lebesgue, hay otras medidas de uso común en el área de la Teoría de la Medida Geométrica. En nuestro caso trabajaremos la medida de Hausdorff, que es una manera de medir un conjunto n -dimensional con una medida m -dimensional, para $m \leq n$.

Definición 1.2.1: Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto, $\delta > 0$ pequeño y $\{S_j\}_{j \in \Delta}$ un cubrimiento de A . Decimos que $\{S_j\}_{j \in \Delta}$ es un δ -cubrimiento de A si para cada $j \in \Delta$ se tiene que

$$\text{diam}(S_j) = \sup_{x, y \in S_j} \|x - y\| \leq \delta.$$

Definición 1.2.2: Sea $\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ la medida de Lebesgue de la bola unitaria $B^n(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Para $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ y $\{S_j\}_{j \in \Delta}$ un δ -cubrimiento se define la medida de Hausdorff m -dimensional, $\mathcal{H}_m(A)$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_m(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{A \subseteq \cup S_j} \sum_j \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^m.$$

Observación 1.2.1: A medida que δ toma valores cada vez más pequeños, el ínfimo de la suma de los diámetros del cubrimiento se restringe, ya que son menos los conjuntos que cumplirán las condiciones de δ -cubrimiento, y no disminuye (pues se necesitan más conjuntos S_j para cubrir al conjunto A). Esto lo podemos apreciar en la figura 1.1.

Por lo que el límite existe y tenemos $0 \leq \mathcal{H}_n(A) \leq \infty$.

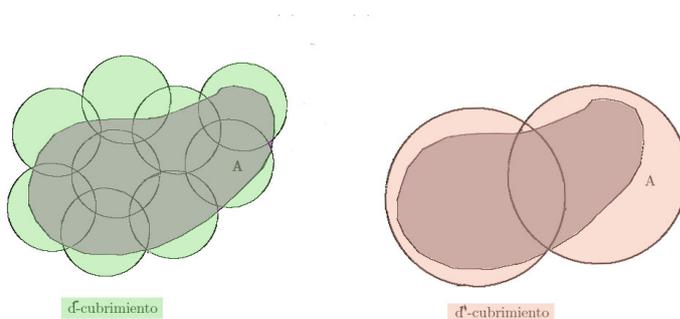


Figura 1.1: δ y δ' -cubrimientos con $\delta < \delta'$.

Definición 1.2.3: Bajo los mismos supuestos del apartado anterior definimos la dimensión de Hausdorff de A , $\dim_{\mathcal{H}}(A)$, como sigue

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{n \in \mathbb{R}^+ : \mathcal{H}_{n,\delta}(A) = 0\},$$

donde $\mathcal{H}_{n,\delta}(A) = \inf\{\sum_i (\text{diam}(U_i))^n : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } A\}$.

Observación 1.2.2: Note que de la definición anterior tenemos $\mathcal{H}_{1,\delta} \leq \text{diam}(A)$.

Veamos ahora un ejemplo en el cual calculemos el valor de $\mathcal{H}_{1,\delta}$ de algún conjunto A y vinculemos este valor con la medida de Lebesgue de dicho conjunto.

Ejemplo 1.2.1 Sea A un conjunto convexo de \mathbb{R} tal que $\text{diam}(A) < \delta$ para algún $\delta > 0$.

Sean $x_1, x_2 \in A$ y S el intervalo que está entre x_1 y x_2 , entonces $S \subset A$ pues A es convexo. Si $\{S_j\}_{j \in \Delta}$ es un δ -cubrimiento de A , entonces

$$\begin{aligned}
 |x_1 - x_2| = \lambda_1(S) &= \lambda_1(A \cap S) \\
 &= \lambda_1((\cup_j S_j) \cap S) \\
 &= \lambda_1(\cup_j (S_j \cap S)) \\
 &\leq \sum_j \lambda_1(S_j \cap S) \\
 &\leq \sum_j \text{diam}(S_j \cap S) \\
 &\leq \sum_j \text{diam}(S_j) \\
 &\leq \mathcal{H}_{1,\delta}(A).
 \end{aligned}$$

Pero

$$\mathcal{H}_{1,\delta}(A) \leq \text{diam}(A).$$

De donde

$$\mathcal{H}_{1,\delta}(A) = \text{diam}(A).$$

◇

Observación 1.2.3:

Note que \mathcal{H}_n es una medida exterior, es decir, no es σ -aditiva, pero es σ -subaditiva. Sin embargo, por Caratheodory, se puede extender a una medida $\mathcal{H}_n|_{\mathcal{F}_{\mathcal{H}_n}}$, siendo $\mathcal{F}_{\mathcal{H}_n}$ la σ -álgebra de conjuntos \mathcal{H}_n -medibles.

Mencionaremos a continuación algunas características de la medida de Hausdorff:

- Para $\delta > 0$ los conjuntos de Borel en general no son $\mathcal{H}_{n,\delta}$ -medibles, [16].

Esto lo podemos ejemplificar considerando, en \mathbb{R}^2 , los conjuntos $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (\frac{\epsilon}{2})^2\}$, con $\epsilon < \delta$.

Entonces

$$\mathcal{H}_{1,\delta}(A) = \text{diam}(A) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Pero,

$$\mathcal{H}_{1,\delta}(E \cap A) = \text{diam}(E \cap A) = \text{diam}(E^c \cap A) = \epsilon.$$

Así

$$\mathcal{H}_{1,\delta}(E \cap A) + \mathcal{H}_{1,\delta}(E^c \cap A) = 2\epsilon,$$

por lo que A no es $\mathcal{H}_{1,\delta}$ -medible ya que $\mathcal{H}_{1,\delta}(A) \neq \mathcal{H}_{1,\delta}(A \cap E) + \mathcal{H}_{1,\delta}(A \cap E^c)$.

Esto nos demuestra la importancia del paso al límite $\delta \rightarrow 0$ en la definición de la medida de Hausdorff.

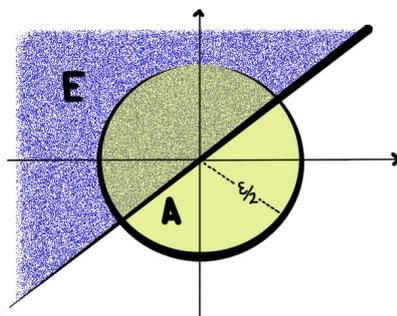


Figura 1.2: Conjuntos E y A .

- La σ -álgebra de Borel está contenida en la σ -álgebra de los conjuntos \mathcal{H}_n -medibles.
- La medida de Hausdorff es invariante por traslaciones.
- Sea A un conjunto. Supongamos que lo cubrimos con infinitos conjuntos S_j de diámetro δ pequeño, es decir, $\delta \rightarrow 0$.

Si suponemos n pequeño y positivo, entonces

$$(\text{diam}(S_j))^n \rightarrow 1,$$

así

$$\sum (\text{diam}(S_j))^n \rightarrow \infty.$$

Si por el contrario n es grande y positivo:

$$(\text{diam}(S_j))^n \rightarrow 0,$$

y de esta manera

$$\sum (\text{diam}(S_j))^n \rightarrow 0.$$

Luego, para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}^m$, existe n_0 tal que

$$\mathcal{H}^n(A) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > n_0 \\ \infty, & \text{si } n < n_0. \end{cases}$$

- En el caso en que $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ no sea un número entero decimos que A es un fractal.

Como últimas definiciones de esta sección tenemos lo siguiente:

Definición 1.2.4: Sean $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, y $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos un conjunto de excursión, $A_D(f, M)$, como sigue

$$A_D(f, M) \equiv \{t \in M \subseteq \mathbb{R}^m : f(t) \in D\}.$$

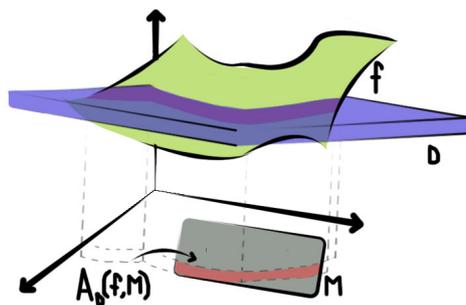


Figura 1.3: Conjunto de excursión. Caso particular $m=2$ y $n=1$

Definición 1.2.5: Sean $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, y $A \subseteq \mathbb{R}^m$, para $m \geq n$. Definimos el número de cruces de f con el nivel 'y' en el conjunto A para algún $y \in \mathbb{R}^n$, por

$$N(f|_A, y) \equiv \mathcal{H}_{m-n}(\{x \in A : f(x) = y\}).$$

En particular, para $m = n$ tenemos

$$N(f|_A, y) \equiv \#\{x \in A : f(x) = y\},$$

donde, como ya habíamos mencionado, $\#$ denota el cardinal de un conjunto.

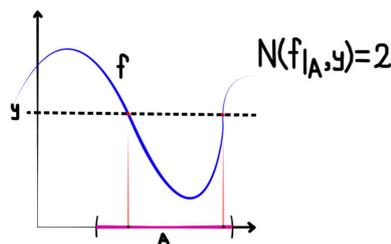


Figura 1.4: Gráfica de $N(f|_A, y)$ para el caso $m = n = 1$.

Como es lógico, la diferenciabilidad de un campo es un requisito sumamente importante en Geometría Integral y en nuestro caso, en la Fórmula del Área ya que esta evalúa directamente la integral del jacobiano de un campo vectorial sobre un conjunto

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

medible. Es por esto que consideramos a partir de ahora funciones Lipschitz o en su defecto localmente Lipschitz.

Definición 1.2.6: Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función, decimos que f es *Lipschitziana* o *de Lipschitz* si existe $M \geq 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq M d_X(x, y) \text{ para todo } x, y \in X.$$

M es conocida como *constante de Lipschitz* de la función f . A la menor de estas constantes, la denotaremos por $\mathcal{L}ip(f)$.

A continuación presentaremos un resultado que nos da condiciones para establecer la diferenciabilidad de funciones, y que es de suma utilidad en la demostración de la Fórmula del Área.

Teorema 1.2.1: (*Teorema de Rademacher*) Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz, entonces f es diferenciable en \mathbb{R}^m λ_m -casi siempre.

Para una demostración bastante simple y analítica de este teorema consulte [13].

Lema 1.2.2 (*Partición de Borel*): Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $\alpha > 1$, entonces el conjunto $\{x : D_{f(x)} \text{ es inyectiva}\}$ tiene un cubrimiento numerable, \mathcal{G} , que consiste en conjuntos borelianos E tales que $f|_E$ es inyectiva y existe un automorfismo lineal, s , de \mathbb{R}^m con

$$\mathcal{L}ip(f|_E \circ s^{-1}) \leq \alpha,$$

$$\mathcal{L}ip(s \circ f|_E^{-1}) \leq \alpha,$$

$$\frac{\|s(v)\|}{\alpha} \leq |\langle v, D_{f(x)} \rangle| \leq \alpha \|s(v)\|, \text{ para } x \in E \text{ y } v \in \mathbb{R}^m,$$

$$\frac{|\det(s)|}{\alpha^m} \leq J_f(x) \leq \alpha^m |\det(s)|, \text{ para } x \in E.$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} + \epsilon < 1 < \alpha - \epsilon.$$

Sea S un conjunto denso numerable de $\mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$ (el grupo lineal de \mathbb{R}^m). Asociaremos a cada $s \in S$ y cada $i \in \mathbb{N}$ un conjunto boreliano $\mathcal{Z}(s, i) \subset \mathbb{R}^m$ que consiste en todos los puntos 'a'tales que

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha} + \epsilon\right) \|s(v)\| \leq \|D_{f(a)} \cdot v\| \leq (\alpha - \epsilon) \|s(v)\|, \text{ para } v \in \mathbb{R}^m \\ \|f(b) - f(a) - D_{f(a)} \cdot (b - a)\| \leq \epsilon \|s(b - a)\|, \text{ para } b \in B_a\left(\frac{1}{i}\right). \end{cases}$$

Ahora bien, dado que s es lineal, tenemos que $\frac{\|s(v)\|^m}{\|v\|^m} = |\det(s)|$. Si aplicamos esta igualdad en nuestra primera condición, representamos el producto cuña por \bigwedge_m y usamos que $J_f(a) = \|\bigwedge_m D_{f(a)}\|$, se obtiene que

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \epsilon\right)^m |\det(s)| \leq J_f(a) \leq (\alpha - \epsilon)^m |\det(s)|. \quad (1.1)$$

Además si $E \subset \mathcal{Z}(s, i) \subset \mathbb{R}^m$ con $\text{diam}(E) \leq \frac{1}{i}$, entonces nuevamente de la primera condición tenemos

$$\begin{aligned} \|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| &\leq (\alpha - \epsilon) \|s(b - a)\| \\ &= \alpha \|s(b) - s(a)\| - \epsilon \|s(b) - s(a)\|, \text{ para todo } a, b \in E. \end{aligned}$$

Luego,

$$\|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| + \epsilon \|s(b - a)\| \leq \alpha \|s(b) - s(a)\|, \text{ para todo } a, b \in E. \quad (1.2)$$

Por otro lado, de la segunda condición, concluimos que para $a, b \in E$

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| - \|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| &\leq \|f(b) - f(a) - D_{f(a)} \cdot (b - a)\| \\ &= \epsilon \|s(b - a)\|. \end{aligned}$$

Así

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| + \epsilon \|s(b - a)\|. \quad (1.3)$$

De (1.2) y (1.3) obtenemos que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| + \epsilon \|s(b - a)\| \leq \alpha \|s(b) - s(a)\|,$$

para todo $a, b \in E \subset \mathcal{Z}(s, i)$ con $\text{diam}(E) \leq \frac{1}{i}$.

Con un razonamiento análogo llegamos a que

$$\|f(b) - f(a)\| \geq \|D_{f(a)} \cdot (b - a)\| - \epsilon \|s(b - a)\| \geq \frac{1}{\alpha} \|s(b) - s(a)\|,$$

siempre que $a, b \in E$.

Por lo tanto $\mathcal{Z}(s, i)$ tiene un cubrimiento numerable, el cual consiste en los conjuntos borelianos que cumplen las propiedades requeridas.

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

Para finalizar la demostración debemos probar que cada a , para el cual $D_{f(a)}$ es inyectiva, pertenece a algún $\mathcal{Z}(s, i)$.

Recordemos que, para algún $g \in \mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$, $h \in \mathcal{O}(m, n)$ (grupo ortogonal de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^n),

$$D_{f(a)} = h \circ g.$$

De donde, para todo $v \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \|D_{f(a)} \cdot v\| &= \|h(g(v))\| \\ &= \|g(v)\| \text{ pues } h \text{ es ortogonal.} \end{aligned}$$

Luego, tomando $s \in S$ tal que

$$\|s \circ g^{-1}\| < \left(\frac{1}{\alpha} + \epsilon\right)^{-1} \text{ y } \|g \circ s^{-1}\| < \alpha - \epsilon.$$

Tenemos en este caso

$$\begin{cases} \|s(v)\| \leq \left(\frac{1}{\alpha + \epsilon}\right)^{-1} \|g(v)\|, & x \in \mathbb{R}^m \\ \|g(v)\| \leq (\alpha - \epsilon) \|s(v)\|, & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

De esta manera se cumplen las condiciones requeridas en la definición.

Finalmente, como $\|b - a\| \leq \|s^{-1}\| \|s(b - a)\|$, obtenemos un índice, i , en la definición de $\mathcal{Z}(s, i)$ tal que $D_{f(a)}$ satisface las propiedades planteadas en el lema.

□

Observación 1.2.4: Con razonamientos análogos a los de la demostración de la Proposición 6 del Apéndice B, tenemos lo siguiente:

Si $S \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo de clase \mathcal{C}^1 sobre su imagen, $f(S)$, entonces para todo $A \subset S$ λ_m -medible se cumple que

$$\lambda_m(f(A)) = \int_A |\det(D_{f(x)})| d\lambda_m(x). \quad (1.4)$$

Además podemos extender a campos vectoriales, $f : S \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, difeomorfos y de clase \mathcal{C}^1 sobre su imagen, cambiando el término del integrando por el jacobiano del campo vectorial, i.e

$$\lambda_m(f(A)) = \int_A J_f(x) d\lambda_m(x), \quad (1.5)$$

siempre que A sea λ_m -medible.

Claramente si consideramos $m = n$ tenemos que la igualdad anterior coincide con (1.4), y si tomamos f lineal tenemos el Teorema B.8.

◇

Formalmente, la Fórmula del Área estudia el significado de la integral

$$\int_A J_f(x) d\lambda_m(x), \quad (1.6)$$

donde f es una función como la que describimos al inicio, A es un conjunto λ_m -medible y $m \leq n$.

Para el caso en el que $m > n$ se estudia la fórmula de coárea, que no tocamos en este trabajo.

Si consideramos $\text{ap} \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ como el límite superior aproximado de $f(x)$ cuando x tiende a a (definido en el Apéndice A), y $\text{ap} J_f(a)$ el jacobiano aproximado de f , cabe destacar que la hipótesis sobre f se puede debilitar de Lipschitz a localmente Lipschitz ó la condición

$$\text{ap} \limsup_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a)\|}{\|x - a\|} < +\infty \text{ para } x \in A.$$

Tenemos entonces el Teorema de la Fórmula del Área:

Teorema 1.2.3: (Fórmula del Área) Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz con $m \leq n$

(I). Si A es un conjunto λ_m -medible, entonces

$$\int_A J_f(x) d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y).$$

(II). Si u es una función λ_m -integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_f(x) d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u(x) d\mathcal{H}_m(y).$$

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

Demostración:

- (i). Para el caso en el que A tenga medida nula, es inmediato pues por Teorema B.7, del Apéndice B, se tiene que

$$\mathcal{H}_m(A) = \lambda_m(A), \text{ pues } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathbb{R}^m.$$

Luego, usando el Corolario B.6

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}ip(f))^m \cdot 0 \\ &= (\mathcal{L}ip(f))^m \lambda_m(A) \\ &= (\mathcal{L}ip(f))^m \mathcal{H}_m(A) \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y) \geq 0. \end{aligned}$$

De donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y) = 0 = \int_A J_f(x) d\lambda_m(x),$$

pues A tiene medida nula.

Concluimos que si $\lambda_m(A) = 0$, se cumple el apartado (I).

En general, por Teorema de Rademacher sabemos que f es diferenciable en casi todo punto de A , y como $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ entonces $0 < \lambda(A) < +\infty$.

Dividiremos ahora la demostración en dos casos.

Caso 1: $A \subset \{x : D_{f(x)} \text{ es inyectiva}\}$

Como f es diferenciable en A , ella es continua. Así, por Lema (1.2.2), para $\alpha > 1$ dado, escogemos un cubrimiento $G \subset \{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) : f|_E \text{ es inyectiva}\}$ y existe un automorfismo lineal s , de \mathbb{R}^m , con

$$\mathcal{L}ip(f|_E \circ s^{-1}) \leq \alpha,$$

$$\mathcal{L}ip(s \circ f|_E^{-1}) \leq \alpha,$$

$$\frac{\|s(v)\|}{\alpha} \leq |\langle v, D_{f(x)} \rangle| \leq \alpha \|s(v)\|, \text{ para } x \in E \text{ y } v \in \mathbb{R}^m, \quad (1.7)$$

$$\frac{|\det(s)|}{\alpha^m} \leq J_f(x) \leq \alpha^m |\det(s)|. \quad (1.8)$$

Construimos una partición boreliana \mathbf{H} , de A , tal que para cada $C \in \mathbf{H}$ se tiene que $C \subset E$, para algún $E \in G$. Es decir, tomamos una partición más pequeña de A .

Luego, integrando Lebesgue sobre C en (1.8), tenemos

$$\begin{aligned} \int_C \alpha^{-m} |\det(s)| d\lambda_m(x) &\leq \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \int_C \alpha^m |\det(s)| d\lambda_m(x) \\ \alpha^{-m} |\det(s)| \int_C d\lambda_m(x) &\leq \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^m |\det(s)| \int_C d\lambda_m(x). \end{aligned}$$

Así

$$\alpha^{-m} |\det(s)| \lambda_m(C) \leq \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^m |\det(s)| \lambda_m(C). \quad (1.9)$$

Por otro lado, de los Teoremas B.7 y B.8 del Apéndice B se sigue que,

$$\begin{aligned} |\det(s)| \lambda_m(C) &= \lambda_m(s(C)) \\ &= \mathcal{H}_m(s(C)). \end{aligned}$$

Luego aplicando Teorema B.7 y la Observación 1.2.4

$$\begin{aligned} \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) &\stackrel{ob (1.2.4)}{=} \lambda_m(f(C)) \\ &= \mathcal{H}_m(f(C)). \end{aligned}$$

De donde, por (1.9), tenemos

$$\alpha^{-m} \mathcal{H}_m(s(C)) \leq \mathcal{H}_m(f(C)) \leq \alpha^m \mathcal{H}_m(s(C)). \quad (1.10)$$

Luego, de (1.10) y (1.9), se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha^{-2m} \mathcal{H}_m(f(C)) &\leq \alpha^{-2m} \alpha^m \mathcal{H}_m(s(C)) \\ &= \alpha^{-m} \mathcal{H}_m(s(C)) \\ &\leq \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \\ &\leq \alpha^m \mathcal{H}_m(s(C)) \\ &= \alpha^{2m} \alpha^{-m} \mathcal{H}_m(s(C)) \\ &\leq \alpha^{2m} \mathcal{H}_m(f(C)). \end{aligned}$$

De esta manera

$$\alpha^{-2m} \mathcal{H}_m(f(C)) \leq \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \mathcal{H}_m(f(C)).$$

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

Sumando sobre $C \in \mathbf{H}$ nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \mathbf{H}} \alpha^{-2m} \mathcal{H}_m(f(C)) &\leq \sum_{C \in \mathbf{H}} \int_C J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \sum_{C \in \mathbf{H}} \alpha^{2m} \mathcal{H}_m(f(C)) \\ \alpha^{-2m} \sum_{C \in \mathbf{H}} \mathcal{H}_m(f(C)) &\leq \int_{\bigcup_{C \in \mathbf{H}} C} J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \sum_{C \in \mathbf{H}} \mathcal{H}_m(f(C)) \\ \alpha^{-2m} \mathcal{H}_m \left(\bigcup_{C \in \mathbf{H}} f(C) \right) &\leq \int_A J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \mathcal{H}_m \left(\bigcup_{C \in \mathbf{H}} f(C) \right) \\ \alpha^{-2m} \mathcal{H}_m \left(f \left(\bigcup_{C \in \mathbf{H}} C \right) \right) &\leq \int_A J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \mathcal{H}_m \left(f \left(\bigcup_{C \in \mathbf{H}} C \right) \right) \\ \alpha^{-2m} \mathcal{H}_m(f(A)) &\leq \int_A J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \mathcal{H}_m(f(A)). \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(f(A)) &= \int_{f(A)} d\mathcal{H}_m(y) \\ &= \int \mathbb{I}_{f(A)}(y) d\mathcal{H}_m(y) \\ &= \int N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha^{-2m} \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y) \leq \int_A J_f(x) d\lambda_m(x) \leq \alpha^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y).$$

Haciendo $\alpha \rightarrow 1$, tenemos para $A \subset \{x : D_{f(x)} \text{ es inyectiva}\}$

$$\int_A J_f(x) d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y).$$

Caso 2: $A \subset \{x : \dim(\ker(D_{f(x)})) > 0\} = \{x : J_f(x) = 0\}$

Para $\epsilon > 0$ arbitrario, factorizamos a f de la siguiente manera

$$f = p \circ g,$$

donde

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (f(x), \epsilon x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (y, z) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Luego, para $s \in A$ y $v \in \mathbb{R}^m$ tenemos

$$\begin{aligned} (D_{f(x)}(v), \epsilon v) &= (D_{p \circ g(x)}(v), \epsilon v) \\ &= (D_{p(g(x))}(v), \epsilon v) \\ &= (D_{p(g(x))}(v), 0_{m \times 1}) + (0_{n \times 1}, \epsilon v_{m \times 1}) \\ &= \begin{pmatrix} (D_{p(g(x))})_{n \times m} \\ 0_{m \times m} \end{pmatrix} v_{m \times 1} + \begin{pmatrix} 0_{n \times m} \\ \epsilon Id_{m \times m} \end{pmatrix} v_{m \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} D_{p(g(x))} \\ \epsilon Id_{m \times m} \end{pmatrix} v_{m \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} D_{p(g(x))} \\ D_{\epsilon x} \end{pmatrix} v \\ &= D_{(p(g(x)), \epsilon x)}(v) \\ &= D_{(f(x), \epsilon x)}(v) \\ &= D_{g(x)}(v). \end{aligned}$$

Es decir,

$$(D_{f(x)}(v), \epsilon v) = D_{g(x)}(v). \tag{1.11}$$

De donde es fácil ver que g es inyectiva. Además

$$\begin{aligned} \|D_{g(x)}\| &= \sup_{\|v\|=1} \|D_{g(x)}(v)\| \\ &= \sup_{\|v\|=1} \|(D_{f(x)}(v), \epsilon v)\| \\ &= \sup_{\|v\|=1} \{\|D_{f(x)}(v)\| + \epsilon\|v\|\} \\ &\leq \epsilon + \sup_{\|v\|=1} \mathcal{L}ip(f) \\ &= \epsilon + \mathcal{L}ip(f), \end{aligned}$$

Es decir,

$$\|D_{g(x)}\| \leq \epsilon + \mathcal{L}ip(f). \tag{1.12}$$

Luego

$$J_g(x) \leq \epsilon(\mathcal{L}ip(f) + \epsilon)^{m-1}. \tag{1.13}$$

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

Aplicando a g el Caso 1 y usando la desigualdad anterior, nos queda que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_m(f(A)) &\leq \mathcal{H}_m(g(A)) \text{ por ser } \mathcal{H}_m \text{ monótona} \\
 &= \int_A J_g(x) d\lambda_m(x) \\
 &\stackrel{(1.13)}{\leq} \int_A \epsilon(\mathcal{L}ip(f) + \epsilon)^{m-1} d\lambda_m(x) \\
 &= \epsilon(\mathcal{L}ip(f) + \epsilon)^{m-1} \lambda_m(A).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$0 \leq \mathcal{H}_m(f(A)) \leq \epsilon(\mathcal{L}ip(f) + \epsilon)^{m-1} \lambda_m(A).$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, tenemos

$$\mathcal{H}_m(f(A)) = 0.$$

Así

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y) &= \mathcal{H}_m(f(A)) \\
 &= 0 \\
 &= \int_A 0 d\lambda_m(x) \\
 &= \int_A J_f(x) d\lambda_m(x).
 \end{aligned}$$

(II). Veamos ahora la demostración del segundo apartado.

Supongamos que u es una función λ_m -integrable.

Caso 1: funciones indicadoras

Sea A un conjunto Lebesgue medible, suponga $u(x) = \mathbb{I}_A(x)$ con $x \in \mathbb{R}^m$. Entonces, por el apartado (I), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^m} u(x)J_f(x)d\lambda_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_A(x)J_f(x)d\lambda_m(x) \\
 &= \int_A J_f(x)d\lambda_m(x) \\
 &\stackrel{(I)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} N(f|_A, y)d\mathcal{H}_m(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \#\{x \in A : f(x) = y\}d\mathcal{H}_m(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \#\{x \in A : x \in f^{-1}(\{y\})\}d\mathcal{H}_m(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{I}_A(x)d\mathcal{H}_m(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u(x)d\mathcal{H}_m(y).
 \end{aligned}$$

De donde, (II) vale para funciones u indicadoras.

Caso 2: funciones medibles positivas

Supongamos que u es una función λ_m -integrable. Sea $\{\alpha_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$ y $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i = +\infty$. Entonces, por Teorema B.1, existen conjuntos $A_1, A_2 \dots$ λ_m -medibles tales que

$$u(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x), \text{ para } x \in \mathbb{R}^m.$$

Así, del Corolario B.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^m} u(x)J_f(x)d\lambda_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x)J_f(x)d\lambda_m(x) \\
 &\stackrel{col.(B.3)}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x)J_f(x)d\lambda_m(x)
 \end{aligned}$$

1.2. FÓRMULA DEL ÁREA

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{I}_{A_i}(x) J_f(x) d\lambda_m(x) \\
&\stackrel{\text{Caso 1}}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{I}_{A_i}(x) d\mathcal{H}_m(y) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) d\mathcal{H}_m(y) \\
&\stackrel{\text{col (B.3)}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) d\mathcal{H}_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) d\mathcal{H}_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u(x) d\mathcal{H}_m(y).
\end{aligned}$$

De donde se obtiene el resultado.

Caso 3: funciones λ_m -integrables

Consideremos u una función λ_m -integrable. Luego, por propiedades de las funciones integrables, $u = u^+ - u^-$, donde u^+ y u^- son funciones medibles positivas. Y de esta manera

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_f(x) d\lambda_m(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} (u^+(x) - u^-(x)) J_f(x) d\lambda_m(x) \\
&\stackrel{\text{Caso 2}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u^+(x) d\mathcal{H}_m(y) - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u^-(x) d\mathcal{H}_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} (u^+(x) - u^-(x)) d\mathcal{H}_m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} u(x) d\mathcal{H}_m(y).
\end{aligned}$$

Lo que finaliza la demostración.

□

Teorema 1.2.4: *Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz y $m \leq n$, entonces*

$$\int_A g(f(x))J_f(x)d\lambda_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)N(f|_A, y)d\mathcal{H}_m(y), \quad (1.14)$$

para A λ_m -medible, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y alguna de las siguientes condiciones se cumple:

- (I). g es \mathcal{H}_m -medible.
- (II). $N(f|_A, y) < \infty$ para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$.
- (III). $\mathbb{I}_A(g \circ f)J_f$ es λ_m -medible.

Demostración:

Supongamos que A es unión de una familia numerable de conjuntos compactos (esto es posible pues podemos descomponerlo de esa manera), $f(A)$ es un boreliano, y que $g(y) = 0$ para $y \in \mathbb{R}^n - f(A)$.

Primeramente, veamos el caso en el que g es la función característica de $B \subseteq f(A)$ \mathcal{H}_m -medible.

Si $\mathcal{H}_m(B) = 0$, entonces el resultado es inmediato. Por otro lado, si B es un boreliano, podemos entonces aplicar la Fórmula del Área a $A \cap f^{-1}(B)$. Así

$$\begin{aligned} \int_A (g \circ f)J_f d\lambda_m &= \int_{A \cap f^{-1}(B)} J_f d\lambda_m = \int N(f|_{A \cap f^{-1}(B)}, y) d\mathcal{H}_m(y) \\ &= \int g(y)N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y). \end{aligned}$$

Además, como $f(A)$ es \mathcal{H}_m -medible y numerable, todo subconjunto \mathcal{H}_m -medible de $f(A)$ es unión de un boreliano y un conjunto de medida nula.

Usando la condición (I) y la analogía de la demostración del apartado (II) de la Fórmula del Área, es fácil demostrar el resultado deseado.

Por otro lado, si suponemos que $N(f|_A, y) < \infty$, entonces:

$$g(y) = g(y)N(f|_A, y) \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{y: N(f|_A, y)=i\}}(y).$$

De donde, considerando la medibilidad del integrando derecho de (1.14), se cumple la condición (I).

1.3. CAMPOS ALEATORIOS

Finalmente, veamos que (III) \Rightarrow (I). En efecto, para $T \subset A \cap \{x : J_f(x) > 0\}$ tal que $f|_T$ es inyectiva y $\mathcal{H}_m(f(A) - f(T)) = 0$, entonces por la condición (III) se tiene que $\mathbb{I}_T(g \circ f)$ es λ_m -medible.

Luego, si $V \subset \overline{\mathbb{R}} - \{0\}$ es abierto, entonces $W = T \cup (g \circ f)^{-1}(V)$ es λ_m -medible y

$$f(W) \subset g^{-1}(V) \subset f(W) \cup (f(A) - f(T)),$$

de donde, $f(W)$ y $g^{-1}(V)$ son \mathcal{H}_m -medibles.

□

SECCIÓN 1.3

Campos Aleatorios

En esta sección presentaremos la definición de Campos Aleatorios, daremos ejemplos de dichos campos y haremos algunas observaciones importantes que nos servirán más adelante.

Definición 1.3.1: Consideremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $M \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que \mathcal{Z} es un campo aleatorio indexado sobre el conjunto M si $\mathcal{Z} \equiv \{\mathcal{Z}_p\}_{p \in M}$ es una familia de variables aleatorias (y por tanto funciones medibles) n -dimensionales, es decir,

$$\mathcal{Z}_p : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)), \text{ para todo } p \in M.$$

Observación 1.3.1: Para $\omega_0 \in \Omega$ fijo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\omega_0) : M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \mathcal{Z}_p(\omega_0) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

es un campo vectorial llamado trayectoria del proceso.

Nótese además que $\dim(\text{Graf}(\mathcal{Z})) = \dim(M)$.

Observación 1.3.2: En el caso $n = 1$ y $M \subseteq \mathbb{R}$, decimos que \mathcal{Z} es un proceso estocástico real.

Definición 1.3.2: Sea $\{\mathcal{Z}_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico real y consideremos el siguiente conjunto $\{t_1, t_2, \dots, t_m \in T : t_1 < t_2 < \dots < t_m\}$. A la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(\mathcal{Z}_{t_1}, \dots, \mathcal{Z}_{t_m}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{P}_{t_1, t_2, \dots, t_m} = \mathbb{P} \circ$

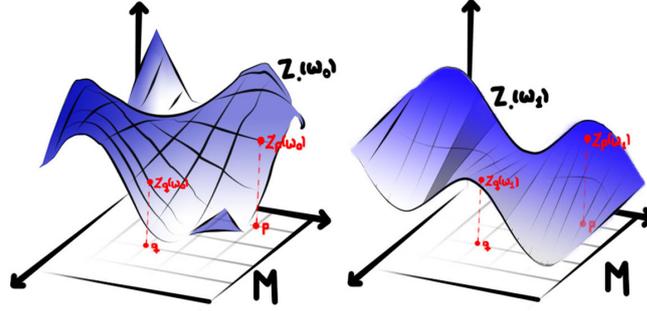


Figura 1.5: Ejemplo de trayectorias para un campo aleatorio con $m=2$ y $n=1$.

$(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})^{-1}$, se le llama distribución marginal finito-dimensional del proceso $\{Z_t\}_{t \in T}$.

Ejemplo 1.3.1: Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos variables aleatorias reales independientes. Consideremos

$$\mathcal{X}_t = t\mathcal{X} + \mathcal{Y}, \text{ para } t \in [0, +\infty).$$

Tenemos en este caso que $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ define claramente un campo aleatorio. Más aún las trayectorias de este proceso son rectas con coeficientes aleatorios. Observemos el comportamiento de este proceso en las Figuras 1.6 y 1.7:

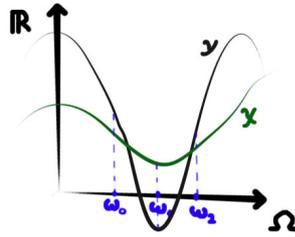


Figura 1.6: Variables aleatorias X e Y.

Y haciendo los cálculos correspondientes obtenemos que la distribución marginal finito-dimensional del proceso está dada por

$$\mathbb{P}(\mathcal{X}_{t_1} \leq x_1, \dots, \mathcal{X}_{t_n} \leq x_n) = \int_{\mathbb{R}} F_{\mathcal{X}} \left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i - y}{t_i} \right) dp_{\mathcal{Y}}(y),$$

donde $F_{\mathcal{X}}$ es la función de distribución de \mathcal{X} y $p_{\mathcal{Y}}$ la densidad de la variable aleatoria \mathcal{Y} .

Ejemplo 1.3.2: Sean \mathcal{X} e \mathcal{Y} dos variables aleatorias independientes ($\mathbb{E}[\mathcal{X}\mathcal{Y}] = \mathbb{E}[\mathcal{X}]\mathbb{E}[\mathcal{Y}]$) y con igual distribución. Sea además $\alpha \in \mathbb{R}^+$ fijo.

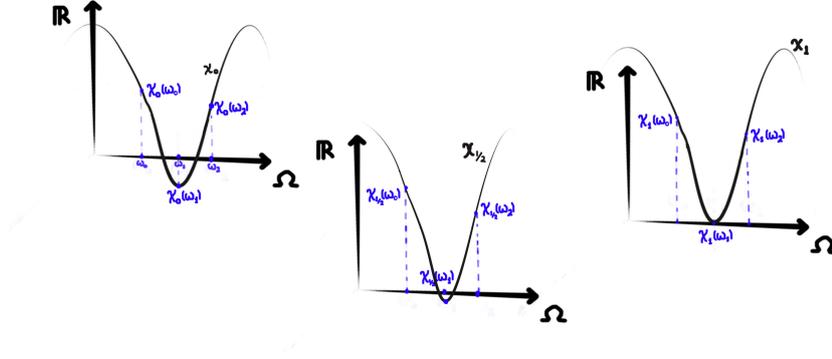


Figura 1.7: Variables aleatorias para $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ y $t = 1$.

Si definimos

$$\mathcal{X}_t \equiv \mathcal{X} \cos(\alpha t) + \mathcal{Y} \sin(\alpha t),$$

tenemos entonces que $\{\mathcal{X}_t\}_{t \in [0, +\infty)}$ es un proceso estocástico denominado *Proceso Coseno*.

El *Proceso Coseno* se caracteriza, entre otras cosas, por escribirse de la forma

$$\mathcal{X}_t = R \cos(\alpha(t - \theta)),$$

para $R^2 = \mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2$ y $\theta = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}}\right)$.

Asumiendo además por simplicidad $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = 0$, tenemos que la función de covarianza del proceso viene dada por

$$\begin{aligned} C(s, t) &= \mathbb{E}[\mathcal{X}_s \mathcal{X}_t] \\ &= \mathbb{E}[(\mathcal{X} \cos(\alpha s) + \mathcal{Y} \sin(\alpha s))(\mathcal{X} \cos(\alpha t) + \mathcal{Y} \sin(\alpha t))] \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2 \cos(\alpha s) \cos(\alpha t) + \mathcal{X} \mathcal{Y} \cos(\alpha s) \sin(\alpha t) + \mathcal{Y} \mathcal{X} \sin(\alpha s) \cos(\alpha t) + \mathcal{Y}^2 \sin(\alpha s) \sin(\alpha t)] \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] \cos(\alpha s) \cos(\alpha t) + \mathbb{E}[\mathcal{X} \mathcal{Y}] \cos(\alpha s) \sin(\alpha t) + \mathbb{E}[\mathcal{Y} \mathcal{X}] \sin(\alpha s) \cos(\alpha t) \\ &\quad + \mathbb{E}[\mathcal{Y}^2] \sin(\alpha s) \sin(\alpha t) \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] (\cos(\alpha s) \cos(\alpha t) + \sin(\alpha s) \sin(\alpha t)) + \mathbb{E}[\mathcal{X}] \mathbb{E}[\mathcal{Y}] \cos(\alpha s) \sin(\alpha t) \\ &\quad + \mathbb{E}[\mathcal{Y}] \mathbb{E}[\mathcal{X}] \sin(\alpha s) \cos(\alpha t) \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] (\cos(\alpha s) \cos(\alpha t) + \sin(\alpha s) \sin(\alpha t)) + 0 + 0 \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] \cos(\alpha s - \alpha t) \\ &= \mathbb{E}[\mathcal{X}^2] \cos(\alpha(s - t)). \end{aligned}$$

Lo que nos dice que este es un proceso estacionario pues su distribución es invariante por traslaciones, es decir, la función $C(s, t)$ depende sólo de $s - t$ y $\mathbb{E}[\mathcal{X}_t]$ es constante.

Ejemplo 1.3.3: La generalización a \mathbb{R}^n del *Proceso Coseno* se conoce como *Campo Coseno* y tiene la siguiente representación:

$$\mathcal{Z}_p = \mathcal{Z}_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_i(\alpha_i p_i), (p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n),$$

donde $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ es el proceso en \mathbb{R} dado por

$$\mathcal{X}_i(t) = \mathcal{X}_i \cos(t) + \mathcal{Y}_i \sin(t), \text{ para } \mathcal{X}_i \sim \mathcal{Y}_i \text{ e } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Nuestra intención es entonces usar la Fórmula del Área sobre campos aleatorios para hallar una expresión del número de cruce esperado de dicho campo con un nivel.

En lo que sigue, si $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}_p(\omega) : \omega \in \Omega\}_{p \in M}$ es un campo aleatorio, en donde está claro que Ω es el espacio muestral, entonces denotaremos al campo aleatorio, $\mathcal{Z}_p(\omega)$, por $\mathcal{Z}(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. En este sentido, es claro que $N(\mathcal{Z}|_A, y)$ es una variable aleatoria real no negativa para $y \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Los resultados en el capítulo anterior son válidos para campos aleatorios. Sin embargo, recordemos que los mismos valen para campos $\mathcal{Z} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $m \leq n$.

Veamos a continuación, gráficamente, ejemplos de campos aleatorios y número de cruces para los casos $n = m$, $n < m$ y $n > m$.

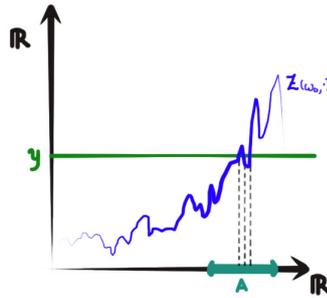


Figura 1.8: Ejemplo campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

En la figura 1.8 observamos la trayectoria de un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un nivel $y \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Además de esto podemos observar que $N(\mathcal{Z}|_A, y) = 3$.

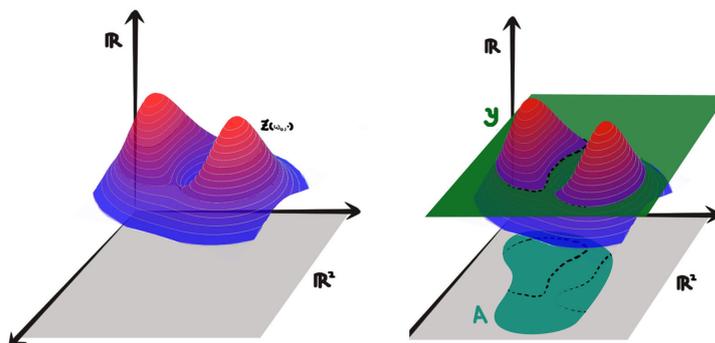


Figura 1.9: Ejemplo campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Esta vez, en la imagen de la izquierda de la Figura 1.9 observamos un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. En la misma figura, en la imagen derecha aparece un nivel $y \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Nótese que sobre el conjunto A se encuentra la porción de la proyección sobre \mathbb{R}^2 de la trayectoria del campo que cae dentro de este conjunto; esta curva representa el conjunto de excursión del campo \mathcal{Z} sobre el conjunto A y la medida de Hausdorff 1-dimensional de dicho conjunto (la longitud de esta curva) es el escalar $N(\mathcal{Z}|_A, y)$.

Por último, veamos qué pasa si $m < n$.

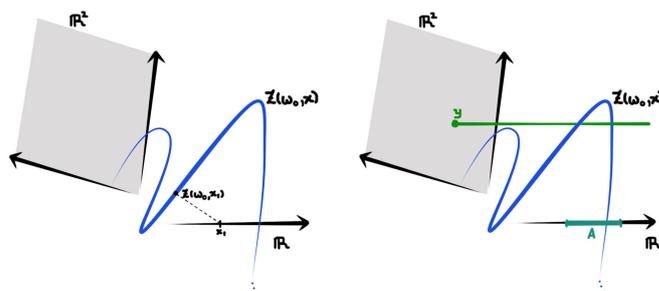


Figura 1.10: Ejemplo campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

En la Figura 1.10 tenemos un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. En el lado izquierdo de dicha figura observamos el gráfico de la trayectoria del proceso para un $\omega_0 \in \Omega$. Lo que acá es difícil visualizar es que dicha trayectoria toma valores en cualquier punto del plano; para visualizar esto debemos ver el plano de color gris como si este estuviese perpendicular a la hoja, de tal forma que la sensación visual

sea que la trayectoria sobresale de la página.

Entendido esto podemos ver que en el lado derecho de la Figura 1.10 tenemos nuestro nivel y y nuestro conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Note que este nivel no intersecta la trayectoria $\mathcal{Z}(\omega_0, x)$.

Si imaginamos que estamos ubicados sobre el eje de las preimágenes viendo hacia el plano gris, visualizamos entonces la trayectoria del campo de frente al plano, y de esta manera tenemos el siguiente gráfico:

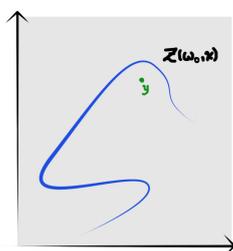


Figura 1.11: Ejemplo figura 1.10 vista frontal.

Podemos entonces observar que para el caso $m = 1$ y $n = 2$, tenemos curvas aleatorias y niveles definidos como puntos de \mathbb{R}^2 . Es claro entonces que el número esperado de cruces del campo \mathcal{Z} con el nivel y es nulo. Tenemos de esta manera la siguiente observación:

Observación 1.3.3: Para un campo aleatorio $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y un nivel $y \in \mathbb{R}^n$, donde $m < n$, se tiene que

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{Z}|_A, y)] = 0.$$

Esto se debe, como vimos en la explicación anterior, a que para el caso $m < n$ se tiene que para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$p_{\mathcal{Z}(x)}(y) = 0.$$

Es por esto que en lo que resta trabajaremos sólo el caso $m = n$. Sin embargo, podemos decir que para el caso en el que $m > n$ existen resultados análogos a los que estableceremos más adelante, en los que se hace el uso de un teorema similar al Teorema 1.2.3 denominado *Fórmula de Coárea*.

Fórmula de Kac-Rice

En lo que sigue enunciaremos y demostraremos, como mencionamos con anterioridad, la *Fórmula de Kac-Rice*, que nos brinda una expresión de la esperanza del número de cruces de un campo aleatorio con cierto nivel. De la misma manera estableceremos una expresión para los segundos momentos de la variable aleatoria de *Número de cruces de un campo aleatorio con un nivel*.

Para la demostración de la Fórmula de Kac-Rice debemos recordar algunas propiedades de la esperanza condicional y debemos tener en cuenta el Teorema de Fubini, ambos dispuestos en los apéndices para su lectura. Presentamos entonces nuestro resultado principal:

Teorema 1.4.1: (*Fórmula de Kac-Rice*) Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo aleatorio localmente Lipschitz para el cual se cumplen las siguientes condiciones:

- (I). Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la densidad de $\mathcal{Z}(\cdot, x)$, $p_{\mathcal{Z}(x)}(\cdot)$, existe.
- (II). $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}}(x) = 0\}) = 0$.
- (III). $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)} \text{ no existe}\}) = 0$.

Entonces, para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y casi todo $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos que

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{Z}|_A, y)] = \int_A \mathbb{E}[J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\lambda_n(x). \quad (1.15)$$

Demostración:

Las condiciones (II) y (III) nos permiten asegurar que la expresión es válida en el caso en el que la medida de Lebesgue del conjunto A es nula ó \mathcal{Z} no es diferenciable en A .

Para $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una función \mathcal{H}_n -medible, por Teorema 1.2.4, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(\mathcal{Z}|_A, y) d\mathcal{H}_n(y) = \int_A g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x) d\lambda_n(x),$$

integrando a ambos lados con respecto a la medida de probabilidad de la variable $\mathcal{Z}(\cdot, x)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(\mathcal{Z}|_A, y) d\mathcal{H}_n(y) p_{\mathcal{Z}(x)}(\omega) d\lambda_n(\omega) = \int_{\Omega} \int_A g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x) p_{\mathcal{Z}(x)}(\omega) d\lambda_n(x) d\lambda_n(\omega).$$

Usando ahora Fubini en la expresión anterior, nos queda que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[\int_{\Omega} N(\mathcal{Z}|_A, y) p_{\mathcal{Z}(x)}(\omega) d\lambda_n(\omega) \right] d\mathcal{H}_n(y) = \int_A \left[\int_{\Omega} g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x) p_{\mathcal{Z}(x)}(\omega) d\lambda_n(\omega) \right] d\lambda_n(x),$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] d\mathcal{H}_n(y) = \int_A \mathbb{E} [g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x)] d\lambda_n(x). \quad (1.16)$$

Por otro lado tenemos que por Proposición A.3, del Apéndice A

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y]] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [g(y) J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y]] \\ &= \mathbb{E} [g(y) \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y]] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\mathcal{H}_n(y). \end{aligned}$$

De donde

$$\mathbb{E} [g(\mathcal{Z}(x)) J_{\mathcal{Z}}(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\mathcal{H}_n(y). \quad (1.17)$$

Sustituyendo (1.17) en (1.16) y usando Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] d\mathcal{H}_n(y) &= \int_A \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\mathcal{H}_n(y) d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_A g(y) \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\lambda_n(x) d\mathcal{H}_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left(\int_A \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\lambda_n(x) \right) d\mathcal{H}_n(y). \end{aligned}$$

1.4. FÓRMULA DE KAC-RICE

De aquí obtenemos que

$$\mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] = \int_A \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) d\lambda_n(x),$$

para casi todo $y \in \mathbb{R}^n$.

□

Para ver una demostración de la Fórmula de Kac-Rice, con una hipótesis agregada, válida para todo nivel y consultar [8, pág.50].

Observación 1.4.1:

- Por Fórmula del Área, si $\int_A J_{\mathcal{Z}}(x) d\lambda_n(x) < \infty$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} N(\mathcal{Z}|_A, y) d\mathcal{H}_n(y) = \int_A J_{\mathcal{Z}}(x) d\lambda_n(x) < \infty.$$

De donde, para casi todo $y \in \mathcal{Z}(A)$,

$$N(\mathcal{Z}|_A, y) < \infty.$$

- Si consideramos ahora el conjunto

$$C = \{x \in A : J_{\mathcal{Z}}(x) \text{ no existe}\},$$

por Rademacher $\lambda_n(C) = 0$. Así $\mathcal{H}_n(\mathcal{Z}(C)) = 0$.

Luego, como $J_{\mathcal{Z}}$ es medible y finita en $\mathbb{R}^n - C$, hacemos $\mathbb{R}^n - C = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} C_k$ para ciertos conjuntos C_k , donde para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{C_k} J_{\mathcal{Z}}(x) d\lambda_n(x) < \infty,$$

y así, para $k \in \mathbb{N}$ y casi todo $y \in \mathcal{Z}(C_k)$

$$N(\mathcal{Z}|_{C_k}, y) < \infty.$$

Por otro lado,

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}^{-1}(\{y\}) \text{ es no numerable}\} \subseteq \mathcal{Z}(C) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{y \in \mathcal{Z}(C_k) : \mathcal{Z}^{-1}(\{y\}) \cap C_k \text{ es infinito}\}.$$

De donde,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \mathcal{H}_n(\{y \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}^{-1}(\{y\}) \text{ es no numerable}\}) \\
 &\leq \mathcal{H}_n(\mathcal{Z}(C)) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n(\{y \in \mathcal{Z}(C_k) : \mathcal{Z}^{-1}(\{y\}) \cap C_k \text{ es infinito}\}) \\
 &= 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

En conclusión, $N(\mathcal{Z}|_A, y)$ es finito o infinito numerable para $y \in \mathbb{R}^n$ \mathcal{H}_n -casi seguramente y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

- Más aún, por ser A un boreliano de \mathbb{R}^n y λ una medida regular, la medida λ_n sobre A es aproximada por la medida λ_n sobre un conjunto B compacto. De esta manera podemos asumir que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es compacto.

En este caso, como \mathcal{Z} es Lipschitz es claro que \mathcal{Z} es diferenciable en casi todo punto de A , además las imágenes dentro del conjunto A serán acotadas. Por lo tanto

$$\int_A J_{\mathcal{Z}}(x) d\lambda_n(x) < \infty.$$

Es decir, ambos lados de (1.15) son finitos.

□

Ahora daremos una expresión para los segundos momentos de la variable aleatoria que cuenta el número de cruces de un nivel con un campo. Usando los momentos factoriales de esta variable [4].

Teorema 1.4.2: *Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bajo las hipótesis del teorema anterior. Supongamos que para $k \geq 2$, $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ la distribución de $(\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k))$ existe y es no degenerada en \mathbb{R}^n . Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y casi todo $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}|_A, y) - (i-1)) \right] = \int_{A^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}}(x_i) \mid \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] p_{\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y, \dots, y) dx_1, \dots, dx_k.$$

Demostración:

Para cada $\delta > 0$ definamos el conjunto $D_{k,\delta}(A)$ y el proceso $\tilde{\mathcal{Z}}$ como sigue:

$$D_{k,\delta}(A) \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A^k : d(x_i, x_j) \leq \delta \text{ para } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k\} \subseteq \mathbb{R}^{nk},$$

1.4. FÓRMULA DE KAC-RICE

y

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Z}} : \Omega \times D_{k,\delta}(A) &\longrightarrow \mathbb{R}^{nk} \\ (\omega, x_1, \dots, x_k) &\mapsto (\mathcal{Z}(\omega, x_1), \mathcal{Z}(\omega, x_2), \dots, \mathcal{Z}(\omega, x_k))\end{aligned}$$

Si $y_k \equiv \underbrace{(y, \dots, y)}_{k\text{-veces}}$, entonces:

✓ Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un entorno V_x tal que $\mathcal{Z} : \Omega \times V_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz con constante Lipschitz $\mathcal{L}ip(\mathcal{Z}_x)$.

De esta manera, para cada $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A)$ existe un entorno

$$V_{1,\dots,k} \equiv V_{x_1} \times V_{x_2} \times \dots \times V_{x_k} \subseteq \mathbb{R}^{nk},$$

tal que, si $(x_1, x_2, \dots, x_k); (y_1, y_2, \dots, y_k) \in V_{1,\dots,k}$, entonces

$$\begin{aligned}d_{nk}(\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k), \tilde{\mathcal{Z}}(y_1, \dots, y_k)) &= d_{nk}((\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)), (\mathcal{Z}(y_1), \dots, \mathcal{Z}(y_k))) \\ &= \max_{1 \leq i \leq k} \{d_n(\mathcal{Z}(x_i), \mathcal{Z}(y_i))\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq k} \{\mathcal{L}ip(\mathcal{Z}_{x_i})d_n(x_i, y_i)\}\end{aligned}$$

Haciendo $\mathcal{L}ip(\mathcal{Z}_x) = \max_{1 \leq i \leq k} \mathcal{L}ip(\mathcal{Z}_{x_i})$, tenemos

$$d_{nk}(\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, x_2, \dots, x_k), \tilde{\mathcal{Z}}(y_1, y_2, \dots, y_k)) \leq \mathcal{L}ip(\mathcal{Z}_x)d_{nk}((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)),$$

de donde,

$\tilde{\mathcal{Z}}$ es localmente Lipschitz.

✓ Note que $D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)}$ está descrita explícitamente por las matrices $D_{\mathcal{Z}(x_i)}$ de orden $n \times m$, y entonces

$$D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} = D_{(\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k))} = \begin{pmatrix} D_{\mathcal{Z}(x_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{Z}(x_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\mathcal{Z}(x_k)} \end{pmatrix}_{kn \times kn}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)}^T D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} &= \begin{pmatrix} D_{\mathcal{Z}(x_1)}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{Z}(x_2)}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{\mathcal{Z}(x_k)}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\mathcal{Z}(x_1)} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & D_{\mathcal{Z}(x_k)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} D_{\mathcal{Z}(x_1)}^T D_{\mathcal{Z}(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{Z}(x_2)}^T D_{\mathcal{Z}(x_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{\mathcal{Z}(x_k)}^T D_{\mathcal{Z}(x_k)} \end{pmatrix}_{kn \times kn},
 \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 J_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} &= \sqrt{\det(D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)}^T D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)})} \\
 &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} D_{\mathcal{Z}(x_1)}^T D_{\mathcal{Z}(x_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{\mathcal{Z}(x_2)}^T D_{\mathcal{Z}(x_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{\mathcal{Z}(x_k)}^T D_{\mathcal{Z}(x_k)} \end{pmatrix}} \\
 &= \sqrt{\det(D_{\mathcal{Z}(x_1)}^T D_{\mathcal{Z}(x_1)}) \cdots \det(D_{\mathcal{Z}(x_k)}^T D_{\mathcal{Z}(x_k)})} \\
 &= \sqrt{\prod_{i=1}^k \det(D_{\mathcal{Z}(x_i)}^T D_{\mathcal{Z}(x_i)})} \\
 &= \prod_{i=1}^k \sqrt{\det(D_{\mathcal{Z}(x_i)}^T D_{\mathcal{Z}(x_i)})} = \prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}(x_i)}.
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$J_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} = \prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}(x_i)}. \tag{1.18}$$

1.4. FÓRMULA DE KAC-RICE

Luego, usando esta última igualdad

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k) = y_k, J_{\tilde{\mathcal{Z}}}(x_1, \dots, x_k) = 0 \} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : (\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)) = (y, \dots, y), J_{\tilde{\mathcal{Z}}}(x_1, \dots, x_k) = 0 \} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y, J_{\tilde{\mathcal{Z}}}(x_1, \dots, x_k) = 0 \} \right) \\
&\stackrel{(1.18)}{=} \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y, \prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}}(x_i) = 0 \} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\{ \exists x_1, \dots, x_k \in A : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y, J_{\mathcal{Z}}(x_1) \cdots J_{\mathcal{Z}}(x_k) = 0 \} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^k \{ \exists x_i \in A : \mathcal{Z}(x_i) = y, J_{\mathcal{Z}}(x_i) = 0 \} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P} \left(\{ \exists x_i \in A : \mathcal{Z}(x_i) = y, J_{\mathcal{Z}}(x_i) = 0 \} \right) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k) = y_k, J_{\tilde{\mathcal{Z}}}(x_1, \dots, x_k) = 0 \} \right) = 0.$$

✓ Tenemos también que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k) = y_k, D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} \text{ no existe} \} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y, \text{ al menos para un } i \in \{1, \dots, k\} D_{\mathcal{Z}(x_i)} \text{ no existe} \} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\{ \exists x_1, \dots, x_k \in A : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y, \text{ al menos para un } i \in \{1, \dots, k\} D_{\mathcal{Z}(x_i)} \text{ no existe} \} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{i=1}^k \{ \exists x_i \in A : \mathcal{Z}(x_i) = y, D_{\mathcal{Z}(x_i)} \text{ no existe} \} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P} \left(\{ \exists x_i \in A : \mathcal{Z}(x_i) = y, D_{\mathcal{Z}(x_i)} \text{ no existe} \} \right) = 0
\end{aligned}$$

De donde

$$\mathbb{P} \left(\{ \exists (x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k) = y_k, D_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)} \text{ no existe} \} \right) = 0.$$

Por todo esto, podemos entonces aplicar la Fórmula de Kac-Rice al campo $\tilde{\mathcal{Z}}$ sobre

el conjunto $D_{k,\delta}(A)$. De donde obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta}(A)}, y_k) \right] &= \int_{D_{k,\delta}(A)} \mathbb{E} \left[J_{\tilde{\mathcal{Z}}}(x_1, \dots, x_k) \mid \tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k) = y_k \right] \\ &\quad p_{\tilde{\mathcal{Z}}(x_1, \dots, x_k)}(y_k) d\lambda_n(x_1, \dots, x_k) \\ &= \int_{D_{k,\delta}(A)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}}(x_i) \mid \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] \\ &\quad p_{\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y_k) d\lambda_n(x_1) \dots d\lambda_n(x_k). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $\delta_1 \leq \delta_2$ y $(x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta_1}(A)$ se tiene que

$$d(x_i, x_j) \leq \delta_1 \leq \delta_2 \text{ para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \dots, k.$$

Es decir, $(x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta_2}(A)$, i.e., $D_{k,\delta}(A)$ decrece a medida que δ decrece.

Más aún

$$D_{k,\delta}(A) \downarrow A^k \cup \{(x_1, \dots, x_k) \in A^k : x_i = x_j \text{ para algún par } i \neq j\}, \quad (1.19)$$

donde el segundo conjunto de la unión tiene medida Lebesgue cero por ser una sección plana de un conjunto de mayor dimensión.

Además, como $D_{k,\delta_1}(A) \leq D_{k,\delta_2}(A)$ para $\delta_1 \leq \delta_2$, se tiene que

$$N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta_1}(A)}, y_k) \leq N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta_2}(A)}, y_k),$$

es decir, $\{N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta}(A)}, y_k)\}$ es una sucesión decreciente para $\delta \rightarrow 0$, lo que nos permite usar Beppo Levi. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta}(A)}, y_k) \right] &= \mathbb{E} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\tilde{\mathcal{Z}}_{|D_{k,\delta}(A)}, y_k) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \#\{(x_1, \dots, x_k) \in D_{k,\delta}(A) : \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y\} \right] \\ &= \mathbb{E}[\#\{x_1 \in A : \mathcal{Z}(x_1) = y\} \times \{x_2 \in A - \{x_1\} : \mathcal{Z}(x_2) = y\} \\ &\quad \times \dots \times \{x_k \in A - \{x_1, \dots, x_{k-1}\} : \mathcal{Z}(x_k) = y\}] \\ &= \mathbb{E}[\#\{x_1 \in A : \mathcal{Z}(x_1) = y\} \#\{x_2 \in A - \{x_1\} : \mathcal{Z}(x_2) = y\} \dots \cdot \\ &\quad \#\{x_k \in A - \{x_1, \dots, x_{k-1}\} : \mathcal{Z}(x_k) = y\}] \\ &= \mathbb{E} \left[N(\mathcal{Z}|_A, y) (N(\mathcal{Z}|_A, y) - 1) \dots (N(\mathcal{Z}|_A, y) - (k - 1)) \right]. \quad (1.20) \end{aligned}$$

1.4. FÓRMULA DE KAC-RICE

Finalmente, usando (1.19) y (1.20), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}|_A, y) - (i-1)) \right] &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[N(\tilde{\mathcal{Z}}|_{D_{k,\delta}(A)}, y_k) \right] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{D_{k,\delta}(A)} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}}(x_i) \mid \mathcal{Z}_{x_1} = \dots = \mathcal{Z}_{x_k} = y \right] \\
&\quad p_{\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y_k) dx_1 \dots dx_k \\
&= \int_{A^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\mathcal{Z}}(x_i) \mid \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] \\
&\quad p_{\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y_k) dx_1 \dots dx_k.
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.4.3: *Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo aleatorio localmente Lipschitz tal que*

- (i). Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ las densidades de las variables $\mathcal{Z}(\cdot, x_1)$ y $(\mathcal{Z}(\cdot, x_1), \mathcal{Z}(\cdot, x_2))$; $p_{\mathcal{Z}(x_1)}(\cdot)$ y $p_{(\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2))}(\cdot)$ respectivamente, existen y son no degeneradas.
- (ii). $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}}(x) = 0\}) = 0$.
- (iii). $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)} \text{ no existe}\}) = 0$.

Entonces para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y casi todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[(N(\mathcal{Z}|_A, y))^2 \right] &= \int_A \int_A \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x_1) J_{\mathcal{Z}}(x_2) \mid \mathcal{Z}(x_1) = \mathcal{Z}(x_2) = y] p_{\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2)}(y, y) dx_1 dx_2 \\
&\quad + \int_A \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) \mid \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) dx.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 2

Kac-Rice en Variedades

Nuestro próximo objetivo es generalizar la Fórmula de Kac-Rice, que estudiamos en el capítulo anterior, a variedades diferenciables. Es decir, tenemos un campo aleatorio definido entre dos variedades diferenciables y queremos calcular el número esperado de cruces de este campo con un nivel en la variedad de llegada. Para esto, discutiremos algunos conceptos básicos de Geometría Diferencial, daremos algunos ejemplos y procederemos a presentar el resultado principal de este capítulo.

Destacamos que el interés por generalizar las expresiones que nos ofrece el Teorema de Kac-Rice y el Teorema de los Momentos Factoriales, se debe a que en muchas de las aplicaciones, sobre todo en las relacionadas con la vida real, los campos aleatorios se definen sobre variedades. Debemos, sin embargo, pensar también en la importancia de la independencia de las FKR en variedades de las cartas locales, que es lo que más adelante estableceremos.

SECCIÓN 2.1

Variedades Diferenciables

Definición 2.1.1: Sea M un espacio métrico, diremos que (M, φ) es una carta local diferenciable si y sólo si $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo y U un abierto de M .

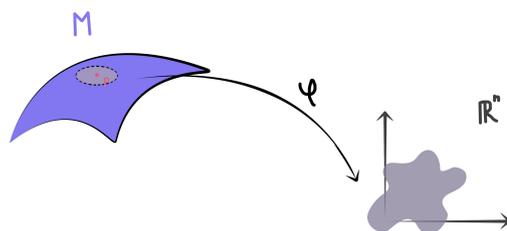


Figura 2.1: Carta local para el punto $p \in M$.

Definición 2.1.2: Sea (M, d) un espacio métrico. M es una variedad diferenciable n -dimensional si y sólo si

- (I) Para cada $p \in M$ existe una carta local $\varphi_p : U_p \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, que es llamado entorno coordenado de p .
- (II) Para todo $p \in M$, si (U_p, φ) y (U'_p, ψ) son entornos coordenados de p , entonces

$$f = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_p \cap U'_p) \rightarrow \psi(U_p \cap U'_p)$$

es un difeomorfismo, que se le denomina cambio de coordenadas.

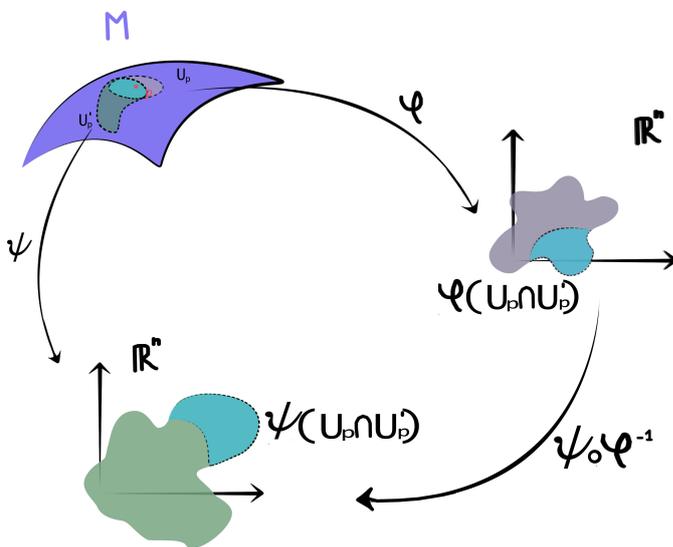


Figura 2.2: Cambio de coordenadas para $p \in M$ y entornos $U_p, U'_p \subseteq M$.

Ejemplo 2.1.1: Consideremos $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} = 1\}$ con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$.

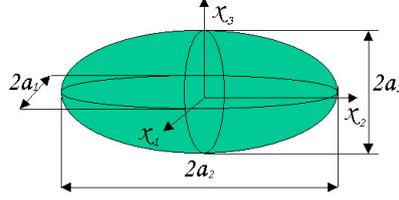


Figura 2.3: Elipsoide.

Luego, para cubrir a M utilizaremos seis cartas

$$\varphi_i^{(j)} : U_i^{(j)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i = (-1)^j a_i \sqrt{1 - \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_r^2}{a_r^2}}\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con $j = 0, 1$; $i, s, r \in \{1, 2, 3\}$ disjuntos dos a dos, y $\varphi_i^{(j)}$ viene dada por la proyección de $U_i^{(j)}$ sobre el plano $X_s X_r$. Con esto aseguramos que la condición (I) de la definición anterior se cumple.

Sea $p \in U_1^{(0)} \cap U_2^{(0)}$, es decir p está en los octantes de la derecha y anteriores de la Figura 2.3.

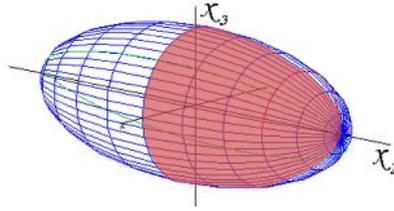


Figura 2.4: octantes de la derecha y anteriores de la figura 2.3.

Luego, si $(x, y) \in \varphi(U_1^{(0)} \cap U_2^{(0)}) = \{(x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} < 1, x_2 > 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_2^{(0)} \circ \varphi_1^{(0)-1} : \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{a_3^2} < 1, y > 0\} &\longrightarrow \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{a_3^2} < 1\} \\ (y, z) &\mapsto \left(a_1 \sqrt{1 - \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2}}, z \right), \end{aligned}$$

que claramente es un difeomorfismo.

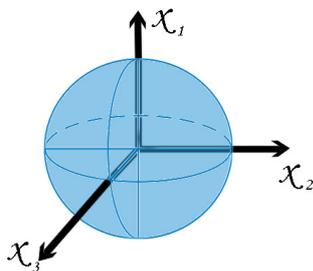
Análogamente, se puede ver que para cualquier par de entornos coordenados de un punto $p \in M$, U y V , $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ es un difeomorfismo.

De donde M es una variedad diferenciable.

□

Veamos a continuación, como ejemplo, a la esfera unitaria en el espacio como una variedad diferenciable, ¿Con cuántas cartas podemos cubrirla?. Calcularemos para esta variedad sus respectivas cartas y cambio de coordenada.

Ejemplo 2.1.2: Consideremos la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,



Como caso particular del ejemplo anterior tenemos las cartas locales

$$\varphi_i^{(j)} : U_i^{(j)} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_i = (-1)^j \sqrt{1 - x_s^2 - x_r^2}\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

con $j = 0, 1$; $i, s, r \in \{1, 2, 3\}$ disjuntos dos a dos.

Podemos también cubrir la esfera con dos entornos coordenados, con la proyección esférica:

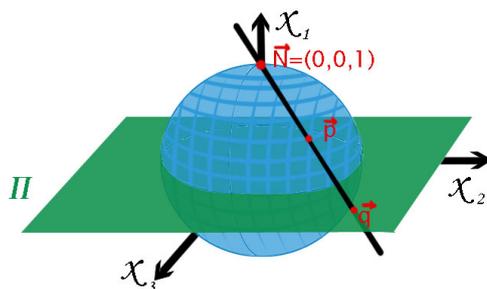


Figura 2.5: Proyección de la esfera al plano Π .

■ *Proyección de \mathbb{S}^2 sobre Π*

Tenemos por un lado la recta que proyecta un punto de la esfera al plano Π

$$l : (\vec{p} - \vec{N})t + \vec{N} = \begin{cases} x_1 t \\ x_2 t \\ (x_3 - 1)t + 1. \end{cases}$$

Para calcular esta proyección debemos hallar la intersección de la recta con el plano,

$$l \cap \Pi \Rightarrow (x_3 - 1)t + 1 = 0,$$

de donde nos queda que

$$t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Por lo tanto

$$P_{\mathbb{S}^2 \rightarrow \Pi}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right), \text{ para } x_3 \neq 1.$$

■ *Proyección de Π a \mathbb{S}^2*

En este caso conocemos los vectores \vec{N} y $\vec{q} = (x, y, 0)$. De aquí construimos una recta l que vaya desde \vec{N} a \vec{q} , y con esto obtenemos un punto sobre la esfera unitaria. Dicha recta viene dada por,

$$l : (\vec{q} - \vec{N})t + \vec{N} = \begin{cases} xt \\ yt \\ -t + 1. \end{cases}$$

Como queremos el punto sobre la esfera, calculamos $l \cap \mathbb{S}^2$. Y así

$$\begin{aligned} (xt)^2 + (yt)^2 + (-t + 1)^2 &= 1 \\ t^2(x^2 + y^2 + 1) - 2t &= 0 \\ t[t(x^2 + y^2 + 1) - 2] &= 0. \end{aligned}$$

Luego, como $t \neq 0$, tenemos que

$$t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Así,

$$P_{\Pi \rightarrow \mathbb{S}^2}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

De manera análoga podemos hallar la proyección de la esfera al plano a través de una recta que pasa por el polo sur. Así tenemos nuestro par de cartas locales

$$\begin{aligned}\varphi_p : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi_q : \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, estas aplicaciones poseen inversa. Por lo que son homeomorfismos y claramente son diferenciables en todo su dominio.

Más aún, para $p \in \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1); (0, 0, -1)\}$,

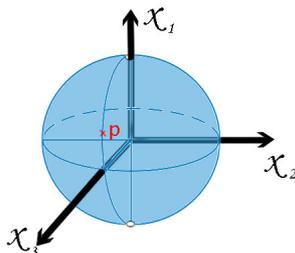


Figura 2.6: Punto $p \in \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1); (0, 0, -1)\}$.

las tuplas $(\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1), \varphi_p\})$ y $(\mathbb{S}^2 - \{(0, 0, -1), \varphi_q\})$ son entornos coordenados de p , tales que para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned}\varphi_q(\varphi_p^{-1}(x, y)) &= \varphi_q \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{-(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2x}{2}, \frac{2y}{2} \right) \\ &= (x, y).\end{aligned}$$

De donde,

$$\varphi_q \circ \varphi_p^{-1} = id_{\mathbb{R}^2},$$

que es difeomorfismo.

Por otro lado, si $p_0 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - \{(0, 0, 1)\}$ es tal que $x_1 > 0$, tenemos que

$$f(x, y) \equiv \varphi_1^{(0)}(\varphi_{p_0}^{-1}(x, y)) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right),$$

define el cambio de carta de estereográfica a hemisférica para un punto (x, y) tal que $x^2 + y^2 < 1$ y $(x, y) \neq (0, 1)$.

□

Definición 2.1.3: Una variedad Riemanniana es una variedad diferenciable n -dimensional M , tal que para alguna parametrización $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, con U_α abierto y $p \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$, las funciones

$$g_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right\rangle \text{ con } i, j = 1, 2, \dots, n;$$

son diferenciables en $\varphi_\alpha^{-1}(p)$.

De esta manera, para cada $p \in M$ se define un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p M$, donde

$$T_p M \equiv \left\{ \vec{u} : \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial y}, \vec{u} - \vec{p} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Con frecuencia $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p : p \in M\}$ es llamada métrica Riemanniana de M .

Observación 2.1.1:

Los resultados que presentaremos en la siguiente sección serán válidos para variedades diferenciables cualesquiera. Sin embargo, cabe destacar que esta puede ser considerada Riemanniana para solventar la existencia de la métrica sobre la variedad.

Definición 2.2.4: Sean M una variedad diferenciable n -dimensional. Un espacio localmente euclídeo $M_0 \subset M$ es una subvariedad diferenciable de M si y sólo si M_0 tiene una estructura de variedad diferenciable (tomando cartas sobre M e intersectando con M_0 , es decir, usando la topología relativa).

Veamos un ejemplo sencillo de esta última definición:

Ejemplo 2.1.3: Consideremos el conjunto $M_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$,

Entonces M_0 es una subvariedad diferenciable de \mathbb{S}^2 .

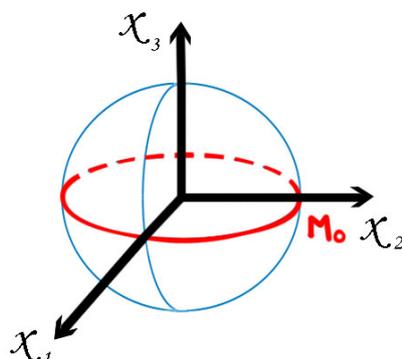


Figura 2.7: Subvariedad M_0 .

Observación 2.1.2:

Si consideramos $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ un campo aleatorio donde \mathbb{M} y \mathbb{N} son variedades m -dimensional y n -dimensional respectivamente. Sea $y \in \mathbb{N}$, el conjunto de excursión (que es también un conjunto aleatorio)

$$A_y(\mathcal{Z}, \mathbb{M}) = \{x \in \mathbb{M} : \mathcal{Z}(x) \geq y\} \subseteq \mathbb{M},$$

es una subvariedad diferencial de \mathbb{M} .

En particular, $N(\mathcal{Z}|_A, y)$ es una subvariedad $(m - n)$ -dimensional de \mathbb{M} para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{M})$, puesto que

$$N(\mathcal{Z}|_A, y) = \Pi_A(\text{graf}(\mathcal{Z}) \cap \{y\}),$$

donde $\Pi_A(B)$ es la proyección de B sobre el conjunto A .

SECCIÓN 2.2

Fórmula de Kac-Rice en Variedades Diferenciables

Como ya mencionamos, el objetivo principal de este trabajo es generalizar la Fórmula de Kac-Rice a variedades diferenciables y calcular de la misma manera los segundos momentos.

A continuación presentaremos la estructuración de nuestros espacios de medida sobre variedades dadas, para luego extender un proceso que esté definido sobre ellas

hacia un proceso entre espacios euclídeos, que es justamente en donde tenemos los resultados de Rice.

Consideremos $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio, con \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables m -dimensional y n -dimensional respectivamente.

En la variedad de partida, \mathcal{M} , vamos a considerar la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{M})$, es decir,

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}) \equiv \sigma\{B \subseteq \mathcal{M} : B \text{ es abierto}\}.$$

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ un conjunto tal que para algún $p \in \mathcal{M}$ existe un entorno coordinado

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

con $A \subseteq U$.

En caso de no cumplirse esto, ver Observación 2.2.1.

Luego, como φ es difeomorfismo, la aplicación

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow U,$$

es diferenciable y por tanto continua.

Así, puesto que $A \subseteq U$ es abierto, $(\varphi^{-1})^{-1}(A) = \varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Por otro lado, sea $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo donde V es un abierto de \mathcal{N} y $\mathcal{Z}(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces tomamos un nivel $y \in \mathcal{Z}(U) \cap V$. Y consideramos la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{N})$ sobre la variedad \mathcal{N} . Sea además $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $\psi^{-1}(B) \subseteq V \subseteq \mathcal{N}$ es abierto, es decir, $\psi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$.

Observe además que para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(\mathcal{Z}(\omega, y)) \in B$, existe $N \in \mathcal{B}(\mathcal{N})$ con $N \subseteq \psi^{-1}(B)$.

De esta manera tenemos un campo aleatorio

$\mathcal{Z} : (\Omega \times \mathcal{M}, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{M})) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$, con \mathcal{F} la σ -álgebra del espacio muestral Ω ,

bien definido y con propiedades que nos serán de utilidad más adelante.

Observación 2.2.1: Note que si no existe $p \in \mathcal{M}$ tal que (U, φ) sean un entorno coordinado de p con $A \subseteq U$, podemos entonces descomponer al conjunto de la siguiente manera:

2.2. FÓRMULA DE KAC-RICE EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

Tomamos $p_1 \in \mathcal{M}$ tal que existe $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ un entorno coordinado de p_1 con $\text{diam}(U_1 \cap A) = \max_{i \in \Delta} \{\text{diam}(U_i \cap A) : (U_i, \varphi_i) \text{ es un entorno coordinado de } p_i \in \mathcal{M}\}$.

Hacemos $A_1 = U_1 \cap A$ y tomamos ahora $p_2 \in \mathcal{M}$ tal que existe $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ un entorno coordinado de p_2 con

$$\text{diam}(U_2 \cap (A - A_1)) = \max_{i \in \Delta - \{1\}} \{\text{diam}(U_i \cap (A - A_1)) : (U_i, \varphi_i) \text{ es entorno coordinado de } p_i \in \mathcal{M}\}.$$

Hacemos $A_2 = U_2 \cap (A - A_1)$. Y así continuamos hasta cubrir al conjunto A .

Obtenemos entonces una sucesión $\{A_k\}_{k \in \Lambda}$ tal que,

$$A = \bigcup_{k \in \Lambda} A_k,$$

donde para cada $k \in \Lambda$ existe $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^m$ difeomorfismo, con $A_k \subseteq U_k$.

La existencia de estos entornos la garantiza el hecho de que \mathcal{M} es una variedad diferenciable.

◇

En conclusión:

Queremos calcular

$$\mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)],$$

para $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Tenemos entornos coordinados

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ para el nivel } y \in V \subseteq \mathcal{N}.$$

y

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ para } A \subseteq U \subseteq \mathcal{M}.$$

Es decir, hemos construido el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times U & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & V \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array} \quad (2.1)$$

Añadiremos ahora al diagrama 2.1 una cuarta aplicación entre los espacios euclídeos.

Lema 2.2.1: *(K.Martínez) Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos variedades diferenciables m -dimensional y n -dimensional respectivamente, y $\mathcal{Z} : (\Omega \times \mathcal{M}, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{M})) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{N}))$ un campo aleatorio. Entonces si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ es tal que existe una carta local en \mathcal{M} , (U, φ) , con $A \subseteq U$. Sea además (V, ψ) una carta diferenciable en \mathcal{N} con $\mathcal{Z}(U) \cap V \neq \emptyset$, entonces para $y \in \mathcal{Z}(U) \cap V \subseteq \mathcal{N}$ se tiene que existe un campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}} : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$N(\mathcal{Z}|_A, y) = N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A)}, \psi(y)).$$

Si A no cumple la condición descrita, entonces existen (U_k, φ_k) entornos coordinados tales que

$$N(\mathcal{Z}|_A, y) = \sum_{k \in \Lambda} N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi_k(A_k)}, \psi(y)).$$

Demostración:

Sean $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio con \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables, y sean además $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ e $y \in \mathcal{N}$.

Supongamos que existe $p \in \mathcal{M}$ tal que (U, φ) es un entorno coordinado de p y $A \subseteq U$. Consideramos (V, ψ) una carta diferenciable en \mathcal{N} con $\mathcal{Z}(U) \cap V \neq \emptyset$ (esta carta existe pues \mathcal{N} es variedad), tomamos entonces $y \in \mathcal{Z}(U) \cap V \subseteq \mathcal{N}$.

Definimos ahora el campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}} : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sigue,

$$\widehat{\mathcal{Z}}(x) \equiv (\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x).$$

De esta manera obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times U & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & V \\ \varphi \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \psi \\ \Omega \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{Z}}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde

$$\psi \circ \mathcal{Z} = \widehat{\mathcal{Z}} \circ \varphi. \tag{2.2}$$

Sea

$$\begin{aligned} f : \{x \in A : \mathcal{Z}(x) = y\} &\longrightarrow \{w \in \varphi(A) : \widehat{\mathcal{Z}}(w) = \psi(y)\} \\ x &\longmapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

2.2. FÓRMULA DE KAC-RICE EN VARIETADES DIFERENCIABLES

Luego, si $x' \in \{x \in A : \mathcal{Z}(x) = y\}$ tenemos que

$$f(x') = \varphi(x') \in \mathbb{R}^m.$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Z}}(\varphi(x')) &= \left(\widehat{\mathcal{Z}} \circ \varphi \right)(x') \\ &\stackrel{2.2}{=} (\psi \circ \mathcal{Z})(x') \\ &= \psi(\mathcal{Z}(x')) \\ &= \psi(y). \end{aligned}$$

De donde

$$f(x') \in \{w \in \varphi(A) : \mathcal{Z}(w) = \psi(y)\}.$$

Además, como $f = \varphi|_{\{x \in A : \mathcal{Z}(x) = y\}}$ tenemos que f está bien definida y es una aplicación biyectiva (pues φ lo es).

Se sigue que,

$$\begin{aligned} N(\mathcal{Z}|_A, y) &= \#\{x \in A : \mathcal{Z}(x) = y\} \\ N(\mathcal{Z}|_A, y) &= \#\{x \in \varphi(A) : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y)\} \\ N(\mathcal{Z}|_A, y) &= N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A)}, \psi(y)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

En caso de que $A \not\subseteq U$ para todo entorno coordinado (U, φ) , particionamos el conjunto A de acuerdo a la observación 2.2.1 y entonces

$$A = \bigsqcup_{k \in \Lambda} A_k,$$

donde para cada k se cumple lo anterior. Luego, usando (2.3)

$$\begin{aligned} N(\mathcal{Z}|_A, y) &= \#\{x \in A : \mathcal{Z}(x) = y\} \\ &= \#\{x \in \bigsqcup_{k \in \Lambda} A_k : \mathcal{Z}(x) = y\} \\ &= \#\bigsqcup_{k \in \Lambda} \{x \in A_k : \mathcal{Z}(x) = y\} \\ &= \sum_{k \in \Lambda} \#\{x \in A_k : \mathcal{Z}(x) = y\} \\ &= \sum_{k \in \Lambda} N(\mathcal{Z}|_{A_k}, y) \\ &\stackrel{(2.3)}{=} \sum_{k \in \Lambda} N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi_k(A_k)}, \psi(y)) \end{aligned}$$

□

Observación 2.2.2: Debemos señalar que tiene sentido comparar los cardinales $N(\widehat{\mathcal{Z}}|_A, y)$ y $N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A)}, \psi(y))$ pues por la observación 1.4.1 los conjuntos $\{x \in A : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = y\}$ y $\{x \in \varphi(A) : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y)\}$ son finitos o en su defecto numerables.

Tenemos ya un campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1} : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que nos ofrece un puente hacia el manejo de la fórmula de Kac-Rice en espacios euclídeos. Resta ver, antes de formalizar la Fórmula de Kac-Rice en variedades, qué forma adquiere el jacobiano del campo $\widehat{\mathcal{Z}}$.

Observación 2.2.3: Sean $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ dos funciones diferenciables con

$$g(x_1, \dots, x_m) = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m)),$$

y

$$f(y_1, \dots, y_n) = (f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_s(y_1, \dots, y_n)).$$

Entonces, $f \circ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ y además

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(g(x)) \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(g(x)) \frac{\partial g_2}{\partial x_j}(x) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(g(x)) \frac{\partial g_n}{\partial x_j}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x), \text{ para } i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Así,

$$\begin{aligned} [D_{(f \circ g)}(x)]_{s \times m} &= \left(\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(x) \right)_{ij} \\ &\stackrel{2.4}{=} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) \right)_{ij} \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(g(x)) \right)_{ij} \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) \right)_{ij} \\ &= [D_f(g(x))]_{s \times n} [D_g(x)]_{n \times m}. \end{aligned}$$

Entonces

$$D_{(f \circ g)}(x) = D_f(g(x)) D_g(x). \quad (2.5)$$

Esto nos lleva a nuestro siguiente corolario.

2.2. FÓRMULA DE KAC-RICE EN VARIETADES DIFERENCIABLES

Corolario 2.2.1: (*K. Martínez*) Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciables m y n -dimensionales ($m \leq n$) respectivamente, y $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio localmente Lipschitz. Consideremos

$\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1} : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ como el campo descrito en el Lema 2.2.1. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$ se tiene que

$$J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) = \sqrt{\det \left(D_{\varphi^{-1}}^T(x) D_{\widehat{\mathcal{Z}}}^T(\varphi^{-1}(x)) D_{\psi}^T(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x) \right)}.$$

Demostración:

Sean $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^r$ y $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^s$ dos variedades diferenciables m y n -dimensionales; $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio localmente Lipschitz y $\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}$, con φ y ψ difeomorfismos.

De la Observación A.1, del Apéndice A, se puede ver que tanto ψ como φ^{-1} son funciones localmente Lipschitz pues son diferenciables. Por lo tanto $\widehat{\mathcal{Z}}$ es localmente Lipschitz y entonces, por Rademacher, diferenciable λ_m -casi seguramente.

Más aún, de (2.5)

$$\begin{aligned} [D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x)]_{n \times m} &= [D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x)]_{n \times m} \\ &= [D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x))]_{n \times s} [D_{\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x)]_{s \times m} \\ &= [D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x))]_{n \times s} [D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x))]_{s \times r} [D_{\varphi^{-1}}(x)]_{r \times m}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Así,

$$\begin{aligned} D_{\widehat{\mathcal{Z}}}^T(x) D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) &\stackrel{2.6}{=} [D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x)]^T [D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x)] \\ &= D_{\varphi^{-1}}^T(x) D_{\mathcal{Z}}^T(\varphi^{-1}(x)) D_{\psi}^T(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Luego,

$$J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) = \sqrt{\det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}^T(x) D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \right)},$$

donde

$$D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) = D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x)) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x).$$

□

Observación 2.2.4 Note que si en el corolario anterior las variedades \mathcal{M} y \mathcal{N} están embebidas en \mathbb{R}^n y son de dimensión n , tenemos entonces que las matrices

jacobianas son de orden $n \times n$ y además

$$\begin{aligned}
 J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) &= \sqrt{\det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}^T(x) D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \right)} \\
 &= \sqrt{\det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \right) \right)} \\
 &= |\det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \right)| \\
 &= |\det \left(D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x) \right)| \\
 &= |\det \left(D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) \right)| |\det \left(D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) \right)| |\det \left(D_{\varphi^{-1}}(x) \right)| \\
 &= J_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) J_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) J_{\varphi^{-1}}(x). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Por teorema de la función inversa tenemos que

$$\begin{aligned}
 J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) &\stackrel{2.8}{=} J_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) J_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) J_{\varphi^{-1}}(x) \\
 &= \frac{J_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) J_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x))}{J_{\varphi}(\varphi^{-1}(x))}.
 \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.2: (*J.G.Gómez*) Sea X una variable aleatoria m -dimensional sobre algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que X tiene densidad Q . Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) una función localmente Lipschitz. Si $J_f(x) > 0$ \mathbb{P} - casi seguramente, entonces la variable aleatoria n -dimensional $Z = f(X)$ tiene densidad P dada por

$$P(z) = \sum_{x \in f^{-1}\{z\}} \frac{Q(x)}{J_f(x)}.$$

Para ver la demostración de este resultado consulte [8].

A continuación hallamos un equivalente a la Fórmula de Kac-Rice para un campo aleatorio definido entre variedades diferenciables.

Teorema 2.2.3: (*K.Martínez-J.Gómez*) Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio en el espacio de probabilidad $(\Omega \times \mathcal{M}, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{M}), \mathbb{P})$ localmente Lipschitz, donde \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades n -dimensionales. Considere $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $y \in \mathcal{N}$ y (U, φ) , (V, ψ) entornos coordinados como en el Lema 2.2.1. Supongamos que para el campo \mathcal{Z} se cumplen las siguientes condiciones:

- (I) Para todo $x \in \mathcal{M}$ la densidad de $\mathcal{Z}(\cdot, x)$, $p_{\mathcal{Z}(x)}(\cdot)$, existe.
- (II) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}}(x) = 0\}) = 0$.

2.2. FÓRMULA DE KAC-RICE EN VARIETADES DIFERENCIABLES

(III) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)} \text{ no existe}\}) = 0.$

Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, con $A \subseteq U$, y casi todo $y \in V \cap \mathcal{Z}(U)$

$$\mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] = J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \int_A \mathbb{E} [\mathcal{J}(u) | \mathcal{Z}(u) = y] J_{\varphi}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u), \quad (2.9)$$

donde $\mathcal{J}(u) = |\det [D_{\psi}(\mathcal{Z}(u)) D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi^{-1}}(\varphi(u))]|.$

Demostración:

Primero note que $\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1} : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{N}$ es un campo aleatorio en $(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{N}), \mathbb{P})$ con densidad $p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(\cdot).$

Además:

- Como $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es difeomorfismo, entonces ψ es localmente Lipschitz y $J_{\psi}(\cdot)$ no nulo. Luego, por Proposición 2.2.2, $\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}$ tiene densidad $p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\cdot)$ dada por

$$\begin{aligned} p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\cdot) &= \sum_{u \in \psi^{-1}\{\cdot\}} \frac{p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(u)}{J_{\psi}(u)} \\ &= \frac{p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(\psi^{-1}(\cdot))}{J_{\psi}(\psi^{-1}(\cdot))} \end{aligned} \quad (2.10)$$

- En el Corolario 2.2.1 vimos que el campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz con

$$\begin{aligned} J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) &= \sqrt{\det \left(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}^T(x) D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \right)} \\ &= \sqrt{\det \left(D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}^T(x) \det \left(D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x) \right) \right)} \\ &= \sqrt{\det \left(D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x) \right)^2} \\ &= |\det \left([D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x)] \right)|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De donde,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y), J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) = 0\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(y), |\det(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x)})| = 0\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = \psi^{-1} \circ \psi(y), \det(D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x)) = 0\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \text{ es no inyectiva}\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x) \text{ es no inyectiva}\}\right) \\
 &\stackrel{(2.11)}{=} \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, \right. \\
 &\quad \left. D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x) \text{ es no inyectiva}\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x))(x) \text{ es no inyectiva}\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, J_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) = 0\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}}(x) = 0\}\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y), J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) = 0\}\right) = 0. \quad (2.12)$$

■ También tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y), D_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) \text{ no existe}\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(y), D_{\psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}}(x) \text{ no existe}\}\right) \\
 &\stackrel{(2.11)}{=} \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x) = y, \right. \\
 &\quad \left. D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x) \text{ no existe}\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y, D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) \text{ no existe}\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}}(x) \text{ no existe}\}\right) \\
 &= 0. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Luego, por (2.10), (2.12) y (2.13) podemos aplicar la Fórmula de Kac-Rice al campo $\widehat{\mathcal{Z}}$ sobre el conjunto $\varphi(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y el nivel $\psi(y) \in \mathbb{R}^n$. De donde, usando Lemma 2.2.1 y Teorema 1.4.1 nos queda que,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N(\mathcal{Z}|_A, y)] &= \mathbb{E}\left[N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A)}, \psi(y))\right] \\
 &= \int_{\varphi(A)} \mathbb{E}\left[J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) | \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y)\right] p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\psi(y)) d\lambda_n(x) \\
 &\stackrel{(2.11)}{=} \int_{\varphi(A)} \mathbb{E}\left[|\det([D_{\psi}(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x)])| | \right. \\
 &\quad \left. \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(y)\right] p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\psi(y)) d\lambda_n(x) \\
 &= \int_{\varphi(A)} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) | \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(y)\right] p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\psi(y)) d\lambda_n(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\varphi(A)} \mathbb{E} [\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) | \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(\psi(y)) d\lambda_n(x) \\
 &= \int_{\varphi(A)} \mathbb{E} [\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) | \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y] \frac{p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(y)}{J_\psi(y)} d\lambda_n(x) \\
 &= (J_\psi(y))^{-1} \int_{\varphi(A)} \mathbb{E} [\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) | \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y] p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(y) d\lambda_n(x),
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) = |\det [[D_\psi(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1})(x) D_{\mathcal{Z}}(\varphi^{-1}(x)) D_{\varphi^{-1}}(x)]]|$.

Así aplicando el teorema de cambio de variable, con $u = \varphi^{-1}(x)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] &= (J_\psi(y))^{-1} \int_{\varphi(A)} \mathbb{E} [\mathcal{J}(\varphi^{-1}(x)) | \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)) = y] p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(y) d\lambda_n(x) \\
 &= (J_\psi(y))^{-1} \int_A \mathbb{E} [\mathcal{J}(u) | \mathcal{Z}(u) = y] J_\varphi(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u) \\
 &= J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \int_A \mathbb{E} [\mathcal{J}(u) | \mathcal{Z}(u) = y] J_\varphi(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u),
 \end{aligned}$$

con $\mathcal{J}(u) = |\det [D_\psi(\mathcal{Z}(u)) D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi^{-1}}(\varphi(u))]|$.

□

En el caso en el que no haya un entorno coordinado (U, ϕ) tal que $A \subseteq U$, tenemos el siguiente colorario:

Corolario 2.2.4 (*K.Martínez-J.Gómez*): *Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio en el espacio de probabilidad $(\Omega \times \mathcal{M}, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{M}), \mathbb{P})$ localmente Lipschitz, donde \mathcal{M} y \mathcal{N} son variedades n -dimensionales. Considere $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $y \in \mathcal{N}$ y (U_k, φ_k) , (V, ψ) entornos coordinados como en el Lema 2.2.1. Supongamos que para el campo \mathcal{Z} se cumplen las siguientes condiciones:*

- (I) *Para todo $x \in \mathcal{M}$ la densidad de $\mathcal{Z}(\cdot, x)$, $p_{\mathcal{Z}(x)}(\cdot)$, existe.*
- (II) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}}(x) = 0\}) = 0$.
- (III) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)} \text{ no existe}\}) = 0$.

Entonces, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ y casi todo $y \in V \cap \mathcal{Z}(U)$

$$\mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] = J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \sum_{k \in \Lambda} \int_{A_k} \mathbb{E} [\mathcal{J}_k(u) | \mathcal{Z}(u) = y] J_{\varphi_k}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u), \quad (2.14)$$

donde $\mathcal{J}_k(u) = |\det [D_\psi(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_k^{-1}}(\varphi_k(u))]|$ y los conjuntos A_k forman parte de la descomposición del Lema 2.2.1 de A .

Demostración:

Basta usar el hecho de que la esperanza es lineal y aplicar el Lema 2.2.1 y Teorema 2.2.3 sobre cada A_k .

Observación 2.2.5: Note que la observación 1.4.1 sigue valiendo puesto que la imagen de un compacto a través de una función continua sigue siendo compacto. De donde ambos lados en (2.9) y (2.14) son finitos.

◇

SECCIÓN 2.3

Independencia de las Cartas

Hemos construido una expresión, a partir de la Fórmula de Kac-Rice, para el número esperado de cruces de un campo aleatorio definido entre variedades diferenciales, $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, con un nivel $y \in \mathcal{N}$ sobre un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$. Esto lo hemos hecho extendiendo el campo \mathcal{Z} a un campo $\widehat{\mathcal{Z}}$ definido entre espacios euclídeos.

Observemos la Figura 2.8 en donde se muestra gráficamente lo que hace nuestro campo $\widehat{\mathcal{Z}}$. En esta figura podemos ver entonces que el campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}}$ proyecta de alguna manera el campo \mathcal{Z} a \mathbb{R}^n a través de las cartas. Nos podemos preguntar entonces ¿Es la expresión 2.9 dependiente de las cartas φ y ψ ?, y es esto lo que a continuación trataremos.

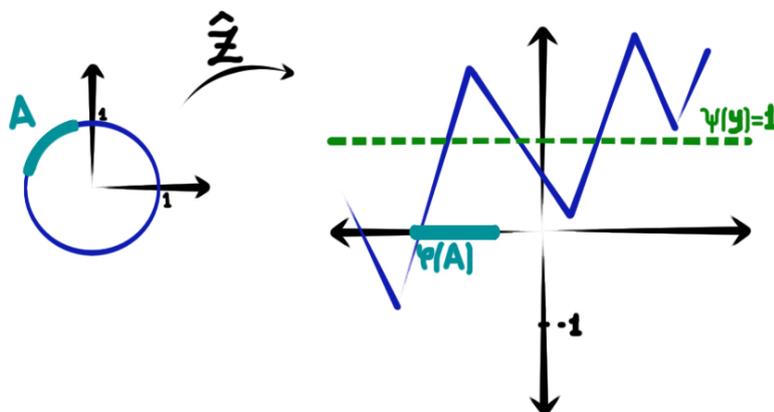


Figura 2.8: $\widehat{\mathcal{Z}} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

2.3. INDEPENDENCIA DE LAS CARTAS

Primero observemos la segunda figura de esta sección en donde se pueden visualizar dos campos $\widehat{\mathcal{Z}}_1$ y $\widehat{\mathcal{Z}}_2$ correspondientes a un campo aleatorio entre variedades diferenciales, \mathcal{Z} . Note que para diferentes cartas se tienen diferentes campos, conjuntos y niveles. Además, como las cartas son difeomorfismos, entonces estos campos conservan las propiedades del campo original.

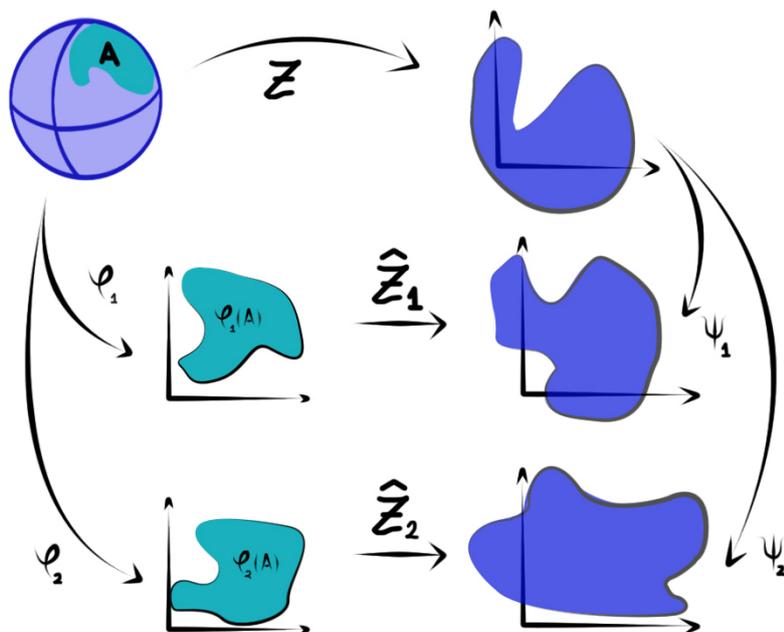


Figura 2.9: $\widehat{\mathcal{Z}}_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cierta variedad M 3-dimensional e $i \in \{1, 2\}$

Todo esto sugiere que para diferentes cartas tendremos la misma cantidad de cruces. En las siguientes proposiciones verificaremos la independencia de las cartas.

Observación 2.2.6: Una definición análoga de una variedad diferencial es la siguiente: Sea (M, d) un espacio métrico. M es una variedad diferenciable n -dimensional si y sólo si

- (I) Para cada $p \in M$ existe una carta local $\varphi_p : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U_p \subseteq M$.
- (II) Para todo $p \in M$, si φ y ψ son cartas locales de p , entonces

$$f = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(U_p \cap U'_p) \rightarrow \varphi^{-1}(U_p \cap U'_p).$$

Observe que aquí la diferencia es que con el espacio cubrimos a la variedad. Entonces nuestra expresión 2.9, con esta definición, es equivalente a cambiar φ por φ^{-1} .

A continuación demostraremos la independencia de cartas primeramente sobre la carta en la variedad de partida, y luego sobre la variedad de llegada. Para la carta en la variedad de partida tomaremos dos cartas equivalentes, φ_1 y φ_2 , haremos $\psi = id_{\mathbb{R}^n}$ y veremos que las expresiones (2.9) correspondientes a cada carta coinciden; análogamente para las cartas de llegada. Tenemos de esta manera las siguientes proposiciones:

Proposición 2.2.5: (*K.Martínez*) *Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio localmente Lipschitz como en el Teorema 2.2.3 y consideremos $\psi = id_{\mathbb{R}^n}$, entonces la expresión (2.9) no depende de φ .*

Demostración:

Sean $\varphi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1 \subseteq \mathcal{M}$, con $A \subseteq U_1$ y $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow U_2 \subseteq \mathcal{M}$, con $A \subseteq U_2$. Consideremos entonces el cambio de coordenadas f para $\varphi_2 \circ f = \varphi_1$.

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] &= J_\psi(\psi^{-1}(y)) \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\psi^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_1}(\varphi_1^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] \\ &\quad J_{\varphi_1^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \\ &= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_1}(\varphi_1^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] J_{\varphi_1^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_1}(\varphi_1^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] J_{\varphi_1^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) &= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_2 \circ f}(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] \\ &\quad J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \\ &= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))D_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] \\ &\quad J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \\ &= \int_A \mathbb{E} [J_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u))|\det [D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))] || \mathcal{Z}(u) = y] \\ &\quad J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tenemos además que,

$$J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u) = (J_{\varphi_2 \circ f}(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u)))^{-1},$$

2.3. INDEPENDENCIA DE LAS CARTAS

y

$$\begin{aligned}
J_{\varphi_2 \circ f}(z) &= \sqrt{\det [D_{\varphi_2 \circ f}^T(z) D_{\varphi_2 \circ f}(z)]} \\
&= \sqrt{\det [D_f^T(z) D_{\varphi_2}^T(f(z)) D_{\varphi_2}(f(z)) D_f(z)]} \\
&= \sqrt{\det [D_f^T(z)] \det [D_{\varphi_2}^T(f(z)) D_{\varphi_2}(f(z))] \det [D_f(z)]} \\
&= \sqrt{\det [D_f^T(z) D_f(z)]} \sqrt{\det [D_{\varphi_2}^T(f(z)) D_{\varphi_2}(f(z))]} \\
&= J_f(z) J_{\varphi_2}(f(z)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u) &= (J_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u)) J_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u)))^{-1} \\
&= (J_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u)))^{-1} (J_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u)))^{-1}.
\end{aligned}$$

De donde,

$$J_{f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u) = J_{f^{-1}}(\varphi_2^{-1}(u)) J_{\varphi_2^{-1}}(u). \quad (2.16)$$

Luego, por (2.15) y (2.16)

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi_1}(\varphi_1^{-1}(u))]| |\mathcal{Z}(u) = y] &= \int_A \mathbb{E} [J_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u)) |\det [D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))]| | \\
&\quad J_{\varphi_1^{-1}}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u) \quad |\mathcal{Z}(u) = y] J_{f^{-1}}(\varphi_2^{-1}(u)) J_{\varphi_2^{-1}}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u) \\
&= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))]| |\mathcal{Z}(u) = y] \\
&\quad J_f(f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}(u)) J_{f^{-1}}(\varphi_2^{-1}(u)) J_{\varphi_2^{-1}}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u) \\
&= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))]| |\mathcal{Z}(u) = y] \\
&\quad J_{f \circ f^{-1} \circ \varphi_2^{-1}}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u) \\
&= \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi_2}(\varphi_2^{-1}(u))]| |\mathcal{Z}(u) = y] \\
&\quad J_{\varphi_2^{-1}}(u) p_{\mathcal{Z}(u)}(y) d\lambda_n(u).
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.6: *(K.Martínez) Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio localmente Lipschitz como en el Teorema 2.2.3 y consideremos $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$, entonces la expresión (2.9) no depende de ψ .*

Demostración:

Sean $\psi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_1 \subseteq \mathcal{N}$, con $y \in V_1$ y $\psi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_2 \subseteq \mathcal{N}$, con $y \in V_2$. Consideremos entonces el cambio de coordenadas f para $\psi_2 \circ f = \psi_1$.

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] &= J_{\psi_1}(\psi_1^{-1}(y)) \int_A \mathbb{E} \left[|\det [D_{\psi_1^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)D_{\varphi}(\varphi^{-1}(u))] | | \mathcal{Z}(u) = y \right] \\ &\quad J_{\varphi^{-1}}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \\ &= J_{\psi_1}(\psi_1^{-1}(y)) \int_A \mathbb{E} \left[|\det [D_{\psi_1^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)] | | \mathcal{Z}(u) = y \right] p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} D_{\psi_1^{-1}}(\mathcal{Z}(u)) &= D_{f^{-1} \circ \psi_2^{-1}}(\mathcal{Z}(u)) \\ &= D_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u))D_{\psi_2^{-1}}(\mathcal{Z}(u)), \end{aligned} \tag{2.17}$$

y

$$\begin{aligned} J_{\psi_1}(\psi_1^{-1}(y)) &= J_{\psi_2 \circ f}(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y)) \\ &= \sqrt{\det [D_{\psi_2 \circ f}^T(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))D_{\psi_2 \circ f}(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))]} \\ &= \sqrt{\det [D_f^T(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))D_{\psi_2}^T(\psi_2^{-1}(y))D_{\psi_2}(\psi_2^{-1}(y))D_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))]} \\ &= J_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))J_{\psi_2}(\psi_2^{-1}(y)). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Luego, de (2.17) y (2.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] &= J_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y)) \int_A \mathbb{E} \left[J_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)) |\det [D_{\psi_2^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)] | | \mathcal{Z}(u) = y \right] \\ &\quad J_{\psi_2}(\psi_2^{-1}(y))p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) \\ &= \int_A \mathbb{E} \left[J_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))J_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)) |\det [D_{\psi_2^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}}(u)] | | \mathcal{Z}(u) = y \right] \\ &\quad J_{\psi_2}(\psi_2^{-1}(y))p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u). \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 J_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(y))J_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)) &= J_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1}(\mathcal{Z}(u)))J_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)) \\
 &= |\det [D_f(f^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u))D_{f^{-1}}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u))] | \\
 &= |\det(D_{id}(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)))| \\
 &= |\det(Id(\psi_2^{-1} \circ \mathcal{Z}(u)))| = 1
 \end{aligned}$$

De donde,

$$\int_A \mathbb{E} \left[|\det [D_{\psi_1^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}(u)}] | \mid \mathcal{Z}(u) = y \right] J_{\psi_1}(\psi_1^{-1}(y))p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u) = \int_A \mathbb{E} \left[|\det [D_{\psi_2^{-1}}(\mathcal{Z}(u))D_{\mathcal{Z}(u)}] | \mid \mathcal{Z}(u) = y \right] J_{\psi_2}(\psi_2^{-1}(y))p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u)$$

□

Observación 2.2.7: En general, como esencialmente nos interesa calcular el número esperado de cruces, no es de mucha importancia la forma que tiene el conjunto de llegada en el campo \mathcal{Z} . Por esto basta considerar $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$ y así la expresión (2.9) nos queda como sigue

$$\mathbb{E} [N(\mathcal{Z}|_A, y)] = \int_A \mathbb{E} [|\det [D_{\mathcal{Z}(u)}D_{\varphi^{-1}}(\varphi(u))] | \mid \mathcal{Z}(u) = y] J_{\varphi_1}(u)p_{\mathcal{Z}(u)}(y)d\lambda_n(u).$$

◇

SECCIÓN 2.4

FKR en variedades para todo nivel

En la parte anterior hemos verificado la independencia de las cartas en la Fórmula de Kac-Rice para variedades diferenciales. Sin embargo, debemos recordar que este resultado es válido para casi todo nivel.

En lo que respecta a las posibles aplicaciones de esta expresión, es necesario encontrar un resultado válido para todo nivel y es por ello que en lo que sigue estableceremos la Fórmula de Kac-Rice en variedades diferenciales válida para todo nivel. Para obtener dicho resultado utilizaremos el análogo en espacios euclídeos extraído de [8].

Definición 2.2.5: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un funcional, con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/T \text{ es una transformación lineal}\}$. Diremos que \mathcal{F} es un operador continuo si para $\{f_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ y $\{F_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ tales que

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f, \quad y \quad F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F$$

uniformemente sobre conjuntos compactos de U , entonces

$$\mathcal{F}(f_n, F_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}(f, F) .$$

Denotaremos $f_n \rightrightarrows f$, si f_n converge uniformemente a f .

En contexto con esto tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.7: (*J.G.Gómez*) Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo aleatorio localmente Lipschitz tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- (I) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ la densidad de $\mathcal{Z}(x)$, $p_{\mathcal{Z}(x)}(\cdot)$, existe y la función $(x, y) \mapsto p_{\mathcal{Z}(x)}(y)$ es continua en $A \times V_y$ para A compacto y V_y un entorno de y .
- (II) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}(x)}(x) = 0\}) = 0$.
- (III) $\mathbb{P}(\{\exists x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)}(x) \text{ no existe}\}) = 0$.

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un funcional tal que si $\{Z_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R}^n)$ y $\{D_{Z_n}\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(A, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ cumplen

$$Z_n \rightrightarrows \mathcal{Z} \quad y \quad D_{Z_n} \rightrightarrows D_{\mathcal{Z}},$$

entonces

$$\mathcal{F}(Z_n, D_{Z_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}(\mathcal{Z}, D_{\mathcal{Z}}) .$$

Tenemos entonces que para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{E} \left[N(\mathcal{Z}|_{A_+}, y) \right] = \int_{A_+} \mathbb{E} [J_{\mathcal{Z}}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] p_{\mathcal{Z}(x)}(y) dx, \quad (2.19)$$

donde A_+ es un boreliano de \mathbb{R}^n tal que $A_+ \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : J_{\mathcal{Z}}(x) > 0\}$.

En nuestro caso tenemos la proposición equivalente:

Teorema 2.2.8: (*K.Martínez-J.Gómez*) Sea $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un campo aleatorio localmente Lipschitz, con \mathcal{M} y \mathcal{N} variedades diferenciales n -dimensionales y φ, ψ cartas locales como las descritas en el Lemma 2.2.1; tal que se cumplen las siguientes condiciones:

- (I) Para todo $x \in \mathcal{M}$ la densidad de $\mathcal{Z}(x)$, $p_{\mathcal{Z}(x)}(\cdot)$, existe y la función $(x, y) \mapsto p_{\mathcal{Z}(x)}(y)$ es continua para todo $(x, y) \in U \times V$.

2.4. FKR EN VARIEDADES PARA TODO NIVEL

$$(II) \mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, J_{\mathcal{Z}(x)}(x) = 0\}) = 0.$$

$$(III) \mathbb{P}(\{\exists x \in \mathcal{M} : \mathcal{Z}(x) = y, D_{\mathcal{Z}(x)}(x) \text{ no existe}\}) = 0.$$

Consideremos $\mathcal{F} : \mathcal{C}^1(A, V \times \mathcal{L}(V)) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ un funcional tal que si $\{Z_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(A, V)$ y $\{D_{Z_n}\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(A, \mathcal{L}(V))$ cumplen

$$Z_n \rightrightarrows \mathcal{Z} \text{ y } D_{Z_n} \rightrightarrows D_{\mathcal{Z}},$$

entonces

$$\mathcal{F}(Z_n, D_{Z_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}(\mathcal{Z}, D_{\mathcal{Z}}).$$

Tenemos entonces que para todo $y \in V \cap \mathcal{Z}(U)$

$$\mathbb{E} \left[N(\mathcal{Z}|_{A_+}, y) \right] = J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \int_{A_+} \mathbb{E}[\mathcal{J}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] J_{\varphi}(x) p_{\mathcal{Z}(x)}(y) dx, \quad (2.20)$$

$$\text{donde } \mathcal{J}(x) = |\det [D_{\psi}(\mathcal{Z}(x)) D_{\mathcal{Z}}(x) D_{\varphi^{-1}}(\varphi(x))]|.$$

Demostración:

Deseamos aplicar la Proposición 2.2.7 al campo $\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}$. Es claro que las condiciones (II) y (III) se cumplen para este campo, resta entonces verificar las condiciones (I) y la continuidad del operador \mathcal{F} .

- Sabemos que la densidad de $\widehat{\mathcal{Z}}$ existe y viene dada por

$$p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\cdot) = J_{\psi^{-1}}(\psi(\cdot)) p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))}(\cdot).$$

Más aún, como $(x, y) \mapsto p_{\mathcal{Z}(x)}(y)$ e $y \mapsto J_{\psi^{-1}}(\psi(y))$ son continuas, entonces la función

$$(x, y') \mapsto p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(y'),$$

es continua para todo $(x, y') \in \varphi(A) \times \psi(V)$.

- Consideremos la sucesión $\{\widehat{Z}_n\}_{n \geq 1}$ definida por

$$\widehat{Z}_n(x) = \psi \circ Z_n \circ \varphi^{-1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con $\{Z_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{C}^1(A, V)$ una sucesión de funciones tal que

$$Z_n \rightrightarrows \mathcal{Z},$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Por otro lado, como ψ es inyectiva y diferenciable, tenemos que ψ es Lipschitz en V , digamos $\mathcal{L}ip(\psi) = M$.

Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$d_{\mathcal{N}}(Z_n(x), \mathcal{Z}(x)) < \frac{\epsilon}{M} \text{ para todo } x \in C \subseteq A, \text{ con } C \text{ compacto.}$$

De aquí, para $n \geq N$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_n(\widehat{Z}_n(x), \widehat{\mathcal{Z}}(x)) &= d_n(\psi(Z_n(\varphi^{-1}(x))), \psi(\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x)))) \\ &\leq M \cdot d_{\mathcal{N}}(Z_n(\varphi^{-1}(x)), \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x))) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

De donde

$$\widehat{Z}_n \rightrightarrows \widehat{\mathcal{Z}} \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

en $\varphi(C) \subseteq \varphi(A)$ compacto.

Análogamente podemos ver que

$$D_{\widehat{Z}_n} \rightrightarrows D_{\widehat{\mathcal{Z}}} \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para

$$D_{\widehat{Z}_n} := D_{\psi \circ Z_n \circ \varphi^{-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\widehat{Z}_n, D_{\widehat{Z}_n}) = \mathcal{F}(\widehat{\mathcal{Z}}, D_{\widehat{\mathcal{Z}}}).$$

Aplicando entonces el Lema 2.2.1, y el Teorema 2.2.7 a $\widehat{\mathcal{Z}}$, nos queda

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[N(\mathcal{Z}|_{A_+}, y) \right] &= \mathbb{E} \left[N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A_+)}, \psi(y)) \right] \\ &= \int_{\varphi(A_+)} \mathbb{E} \left[J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(x) | \widehat{\mathcal{Z}}(x) = \psi(y) \right] p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x)}(\psi(y)) dx, \end{aligned}$$

para todo $y \in V$.

Es decir, para todo $y \in V$ tenemos que

$$\mathbb{E} \left[N(\mathcal{Z}|_{A_+}, y) \right] = J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \int_{A_+} \mathbb{E} [\mathcal{J}(x) | \mathcal{Z}(x) = y] J_{\varphi}(x) p_{\mathcal{Z}(x)}(y) dx.$$

□

CAPÍTULO 3

Segundos Momentos en Variedades Diferenciables

En el capítulo anterior hemos obtenido una expresión para la esperanza, o media, de la variable aleatoria $N(\mathcal{Z}|_A, y)$ para \mathcal{Z} un campo aleatorio definido entre variedades diferenciales n -dimensionales, A un boreliano en la variedad de salida e y un nivel en la variedad de llegada. Otra cantidad importante para el estudio de una variable aleatoria es la varianza, o desviación estándar, que es una medida de la dispersión o variación de los valores de la variable aleatoria alrededor de la media.

Es natural entonces interesarnos en obtener expresiones no sólo para la varianza de la variable $N(\mathcal{Z}|_A, y)$ sino también para momentos de orden mayor. Para esto extendemos la expresión de los momentos factoriales del Teorema 1.4.2 del capítulo 1 a variedades diferenciables, y obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.3.1: (*K.Martínez-J.Gómez*) Sean $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$, $y \in \mathcal{N}$ y (U, φ) , (V, ψ) como en el Teorema 2.2.3, con $A \subseteq U$. Supongamos además que para $k \geq 2$ y $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathcal{M}$, la densidad del vector aleatorio $(\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k))$ existe y es no degenerada. Entonces para todo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ con $A \subset U$ y casi todo $y \in V \cap \mathcal{Z}(U)$, se tiene que:

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}|_A, y) - (i-1)) \right] = (J_\psi(y))^{-k} \int_{A^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(x_i) | \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] \prod_{i=1}^k J_\varphi(x_i) p_{\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y, y, \dots, y) dx_1 \dots dx_k, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{J}(x_i) = |\det(D_{\psi(\mathcal{Z}(u))} D_{\mathcal{Z}}(u) D_{\varphi^{-1}}(\varphi(u)))|$.

Demostración:

Como lo hemos hecho anteriormente, construimos a partir de \mathcal{Z} y los difeomorfismos φ y ψ , el campo aleatorio $\widehat{\mathcal{Z}} = \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Así, $\widehat{\mathcal{Z}}$ cumple las condiciones de la Fórmula de Kac-Rice.

Más aún para $k \geq 2$ y $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathcal{M}$, por Corolario J.Gómez, $(\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k))$ es un vector aleatorio con densidad $p_{\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(\cdot)$.

Entonces $(\mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x_1), \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x_2), \dots, \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(x_k))$ es un vector aleatorio con densidad $p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x_1)), \dots, \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x_k))}(\cdot)$.

Luego, considerando $\psi_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ definida por

$$\psi_k(x_1, \dots, x_k) = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)),$$

es claro que ψ_k es diferenciable.

Sea $y \in \mathbb{R}^{nk}$, digamos $y = (y_1, \dots, y_k)$ donde $y_i \in \mathbb{R}^n$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces para cada y_i existe $x_i \in V$ tal que $\psi(x_i) = y_i$. De esta manera

$$y = (y_1, \dots, y_k) = (\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)) := \psi_k(x_1, \dots, x_k).$$

De donde ψ_k es sobreyectiva.

Más aún, si $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in V^k$ son tales que $\psi_k(x_1, \dots, x_k) = \psi_k(y_1, \dots, y_k)$, entonces

$$(\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)) = (\psi(y_1), \dots, \psi(y_k)) \Rightarrow \psi(x_i) = \psi(y_i) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\}.$$

De donde, como ψ es inyectiva, ψ_k es inyectiva.

Concluimos que ψ_k es localmente Lipschitz con $J_{\psi_k}(x) > 0$ para todo $x \in V^k$. Entonces el vector aleatorio $(\widehat{\mathcal{Z}}(x_1), \widehat{\mathcal{Z}}(x_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(x_k))$ tiene densidad

$$p_{\widehat{\mathcal{Z}}(x_1), \widehat{\mathcal{Z}}(x_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(x_k)}(\cdot) = \frac{p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x_1)), \dots, \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(x_k))}(\psi_k^{-1}(\cdot))}{J_{\psi_k}(\psi_k^{-1}(\cdot))}, \quad (3.2)$$

con $\psi_k^{-1}(\cdot) = (\psi^{-1}(\cdot), \dots, \psi^{-1}(\cdot))$. Entonces la densidad de $(\widehat{\mathcal{Z}}(x_1), \widehat{\mathcal{Z}}(x_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(x_k))$ existe y es no degenerada.

Luego, por Teorema 1.4.2, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\widehat{\mathcal{Z}}|_{\varphi(A)}, \psi(y)) - (i-1)) \right] &= \int_{\varphi(A)^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(u_i) \mid \widehat{\mathcal{Z}}(u_1) = \dots = \widehat{\mathcal{Z}}(u_k) = \psi(y) \right] \\ & p_{\widehat{\mathcal{Z}}(u_1), \widehat{\mathcal{Z}}(u_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(u_k)}(\psi(y), \psi(y), \dots, \psi(y)) du. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Más aún, sabemos que $N(\mathcal{Z}_{|A}, y) = N(\widehat{\mathcal{Z}}_{|\varphi(A)}, \psi(y))$, por lo que

$$N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - (i - 1) = N(\widehat{\mathcal{Z}}_{|\varphi(A)}, \psi(y)) - (i - 1), \text{ para todo } i \in \mathbb{N},$$

en particular

$$N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - (i - 1) = N(\widehat{\mathcal{Z}}_{|\varphi(A)}, \psi(y)) - (i - 1), \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\}.$$

De donde

$$\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - (i - 1)) = \prod_{i=1}^k (N(\widehat{\mathcal{Z}}_{|\varphi(A)}, \psi(y)) - (i - 1)). \quad (3.4)$$

Usando (3.2), (3.3) y (3.4) nos queda que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - i + 1) \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\widehat{\mathcal{Z}}_{|\varphi(A)}, \psi(y)) - (i - 1)) \right] \\ &= \int_{\varphi(A)^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k J_{\widehat{\mathcal{Z}}}(u_i) \mid \widehat{\mathcal{Z}}(u_1) = \dots = \widehat{\mathcal{Z}}(u_k) = \psi(y) \right] \\ &\quad p_{\widehat{\mathcal{Z}}(u_1), \widehat{\mathcal{Z}}(u_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(u_k)}(\psi(y), \psi(y), \dots, \psi(y)) du_1 \dots du_k \\ &= \int_{\varphi(A)^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(\varphi^{-1}(u_i)) \mid \psi \circ \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(u_1) = \dots = \psi(y) \right] \\ &\quad p_{\widehat{\mathcal{Z}}(u_1), \widehat{\mathcal{Z}}(u_2), \dots, \widehat{\mathcal{Z}}(u_k)}(\psi_k(y)) du_1 \dots du_k \\ &= \int_{\varphi(A)^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(\varphi^{-1}(u_i)) \mid \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(u_1) = \dots = \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(u_k) = y \right] \\ &\quad \frac{p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(u_1)), \dots, \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(u_k))}(\psi_k^{-1}(\psi_k(y_k)))}{J_{\psi_k}(\psi_k^{-1}(\psi_k(y_k)))} du_1 \dots du_k \\ &= J_{\psi_k}^{-1}(y_k) \int_{\varphi(A)^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(\varphi^{-1}(u_i)) \mid \mathcal{Z} \circ \varphi^{-1}(u_1) = \dots = y \right] \\ &\quad p_{\mathcal{Z}(\varphi^{-1}(u_1)), \dots, \mathcal{Z}(\varphi^{-1}(u_k))}(y_k) du_1 \dots du_k. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Haciendo el cambio de variable

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (\varphi^{-1}(u_1), \varphi^{-1}(u_2), \dots, \varphi^{-1}(u_k)) := \varphi_k^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_k),$$

nos queda

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - (i - 1)) \right] &= (J_{\psi_k}(y_k))^{-1} \int_{A \times \dots \times A} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(x_i) \mid \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] \\ &\quad J_{\varphi_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) p_{\mathcal{Z}(x_1), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y_k) dx_1 \dots dx_k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

CAPÍTULO 3. SEGUNDOS MOMENTOS EN VARIEDADES DIFERENCIABLES

Por otro lado, para $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s) \in V \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^s$, tenemos

$$\psi(x_i) = \psi(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s) = (\psi_1(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s), \dots, \psi_n(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^s)).$$

Luego,

$$\psi_k(x_1, \dots, x_k) = (\psi_1(x_1^1, \dots, x_1^s), \dots, \psi_n(x_1^1, \dots, x_1^s), \dots, \psi_1(x_k^1, \dots, x_k^s), \dots, \psi_n(x_k^1, \dots, x_k^s)) \in \mathbb{R}^{nk}.$$

Así

$$D_{\psi_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1^1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1^s}(x) & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2^1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2^s}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_k^s}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1^1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1^s}(x) & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2^1}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_2^s}(x) & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_k^s}(x) \end{pmatrix}_{nk \times sk}.$$

Escrito de otro modo,

$$D_{\psi_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} D_\psi(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_\psi(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_\psi(x_k) \end{pmatrix}_{nk \times sk},$$

donde $D_\psi(x_1)$ es una matriz de orden $n \times s$.

De esta manera

$$D_{\psi_k}^T(x_1, \dots, x_k) = \begin{pmatrix} D_\psi^T(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_\psi^T(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_\psi^T(x_k) \end{pmatrix}_{sk \times nk}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
J_{\psi_k}(x_1, \dots, x_k) &= \sqrt{\det [D_{\psi_k}(x_1, \dots, x_k)D_{\psi_k}^T(x_1, \dots, x_k)]} \\
&= \sqrt{\det \left[\begin{pmatrix} D_\psi(x_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_\psi(x_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\psi^T(x_1) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & D_\psi^T(x_k) \end{pmatrix} \right]} \\
&= \sqrt{\det \left[\begin{pmatrix} D_\psi(x_1)D_\psi^T(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_\psi(x_2)D_\psi^T(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_\psi(x_k)D_\psi^T(x_k) \end{pmatrix} \right]} \\
&= \sqrt{\det [D_\psi(x_1)D_\psi^T(x_1)] \det [D_\psi(x_2)D_\psi^T(x_2)] \dots \det [D_\psi(x_k)D_\psi^T(x_k)]} \\
&= \prod_{i=1}^k \sqrt{\det [D_\psi(x_i)D_\psi^T(x_i)]} = \prod_{i=1}^k J_\psi(x_i).
\end{aligned}$$

De donde,

$$J_{\psi_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k J_\psi(x_i).$$

En particular,

$$J_{\psi_k}(y, \dots, y) = (J_\psi(y))^k. \quad (3.7)$$

Análogamente podemos ver que

$$J_{\varphi_k}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k J_\varphi(x_i). \quad (3.8)$$

Usando (2.26), (3.7) y (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k (N(\mathcal{Z}_{|A}, y) - (i-1)) \right] &= (J_\psi(y))^{-k} \int_{A^k} \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \mathcal{J}(x_i) | \mathcal{Z}(x_1) = \dots = \mathcal{Z}(x_k) = y \right] \prod_{i=1}^k J_\varphi(x_i) \\
&\quad p_{\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2), \dots, \mathcal{Z}(x_k)}(y, y, \dots, y) dx_1 \dots dx_k.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.2: (*K.Martínez-J.Gómez*) Consideremos $\mathcal{Z} : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ e $y \in \mathcal{N}$ como en el Teorema 2.3.1. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(N(\mathcal{Z}|_A, y))^2] &= J_\psi^{-2}(y) \int_{A^2} \mathbb{E} [\mathcal{J}(x_1)\mathcal{J}(x_2) | \mathcal{Z}(x_1) = \mathcal{Z}(x_2) = y] J_\varphi(x_1)J_\varphi(x_2) \\ p_{\mathcal{Z}(x_1), \mathcal{Z}(x_2)}(y, y) dx_1 dx_2 &+ J_{\psi^{-1}}(\psi(y)) \int_A \mathbb{E} [\mathcal{J}(x_1) | \mathcal{Z}(x_1) = \mathcal{Z}(x_2) = y] J_\varphi(x_1) p_{\mathcal{Z}(x_1)}(y) dx_1, \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{J}(x) = |\det [D_\psi(\mathcal{Z}(x))D_{\mathcal{Z}}(x)D_{\varphi^{-1}}(\varphi(x))]|.$$

□

Los modelos en campos aleatorios se utilizan ampliamente en aplicaciones científicas, incluyendo la descripción de estructuras en estudios ambientales y epidemiológicos.

Investigando un poco hemos encontrado aplicaciones dirigidas por Robert J. Adler en un artículo titulado *Estimating Thresholding levels for Random Fields via Euler Characteristics* junto a Kevin Batz. En este trabajo se crea un método con umbrales para la detección de la señal en campos aleatorios y para esto observa y estima las curvaturas de Lipschitz-Killing (LKC) y, consecuentemente, la característica de Euler del campo mediante la fórmula cinemática gaussiana a través de mínimos cuadrados generalizados. En particular, esta aplicación se vincula directamente con la Fórmula de Kac-Rice y el estudio estadístico de imágenes cerebrales y resonancias.

Sin embargo, el campo de aplicaciones es más amplio y se espera que este trabajo pueda abrir aún más las opciones de posibles aplicaciones para las expresiones de Kac-Rice.

APÉNDICE A

Principios de Teoría de la Medida y Análisis Matemático

En esta sección recordaremos algunas definiciones de Teoría de la Medida y de Análisis matemático como lo es medida imagen, matriz jacobiana, entre otras. Estas definiciones nos permiten establecer una base para la Fórmula del Área.

Iniciaremos dando la definición de la condición Lipschitz, que nos permite obtener diferenciabilidad en casi todo punto.

Definición A.1: Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios métricos, f es *localmente Lipschitz* si para cada $x \in X$ existe un entorno U_x tal que $f|_{U_x}$ es Lipschitz.

Observación A.1: En el caso en el que X sea un espacio vectorial normado y convexo se tiene que f es Lipschitz con $\mathcal{Lip}(f) \leq M$ si y sólo si para todo $x \in X$ se tiene que

$$\limsup_{z \rightarrow x} \frac{d_Y(f(x), f(z))}{\|x - z\|} \leq M.$$

El siguiente resultado nos afirma que es posible extender una función Lipschitz definida sobre un subconjunto a una función Lipschitz definida a un espacio.

Proposición A.1: (*Teorema de Kirszbraun*) Si $S \subset \mathbb{R}^m$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz, entonces f tiene una extensión Lipschitziana $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, $\mathcal{Lip}(g) = \mathcal{Lip}(f)$.

Para la demostración de este teorema consultar [6, pág.201].

El teorema anterior falla si \mathbb{R}^m ó \mathbb{R}^n se parametriza por una norma que no es

inducida por un producto interno. Veamos ahora un ejemplo de esto.

Ejemplo A.1: Consideremos el conjunto $S = \{(1, -1); (-1, 1); (1, 1)\}$ y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, con

$$f(1, -1) = (1, 0); f(-1, 1) = (-1, 0); f(1, 1) = (0, \sqrt{3}).$$

Consideremos $\|x\|_S = \sup\{|x_1|, |x_2|\}$ y $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, si $u, v \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - v\|_S &= 2 = \|f(u) - f(v)\|_{\mathbb{R}^2}, \\ \|u\|_S &= 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, no existe $\alpha \in \mathbb{R}^2$ para el cual

$$\|\alpha - f(u)\|_{\mathbb{R}^2} \leq 1 \text{ para } u \in S.$$

Así f no tiene extensión a $S \cup \{(0, 0)\}$ con constante Lipschitz 1 para $\|\cdot\|_S, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$.

Definiremos ahora el producto cuña y las nociones de derivada de un campo vectorial.

Definición A.2: Dados dos vectores $v, w \in V$, donde V es un espacio vectorial, denotamos por $v \wedge w$ al multivector que satisface

$$v \wedge w = -w \wedge v.$$

Análogamente podemos definir un k -multivector, $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$, el cual satisface $v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k = -v_1 \wedge \dots \wedge v_{i+1} \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_k$, para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

A la operación \wedge se le conoce como producto cuña y $\bigwedge^k V := \{v_1 \wedge \dots \wedge v_k : v_i \in V\}$.

Definición A.3: Consideremos $f : S \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y " a " un punto interior de S . Si $x \in \mathbb{R}^m$, definimos la derivada $f'(a, x)$ por

$$f'(a, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hx) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que este exista.

Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$, con $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $f'(a, x)$ existe si y sólo si $f'_i(a, x)$ existe. Y además

$$f'(a, x) = (f'_1(a, x), f'_2(a, x), \dots, f'_n(a, x)) = \sum_{i=1}^n f'_i(a, x) e_i.$$

Diremos entonces que f es diferenciable en a (punto interior a S) si existe una transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a, v)$$

donde $E(a, v) \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$, y $E(a, v) \in \mathbb{R}^n$.

Proposición A.2: Supongamos $f : S \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable en a con diferencial T_a . Existe entonces la derivada $f'(a, x)$ para todo $a \in \mathbb{R}^m$ y tenemos

$$T_a(y) = f'(a, y).$$

Además, si $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, tenemos

$$T_a(y) = \sum_{i=1}^n (\nabla f_i(a) \cdot y) e_i.$$

Más aún $T_a(y) = D_{f(a)}(y)$, donde $D_{f(a)}$ es la *Matriz Jacobiana* de orden $n \times m$.

$$D_{f(a)} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Teniendo definida la matriz jacobiana de un campo vectorial f , $D_{f(x)}$, podemos ahora definir el Jacobiano de f .

Definición A.4: Sea $f : S \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable con $m \leq n$ y sea $D_{f(x)}$ su matriz jacobiana. Definimos el *jacobiano de f* por

$$J_f(x) \equiv \sqrt{\det(D_{f(x)}^T D_{f(x)})}.$$

El jacobiano de un campo vectorial definido de esta manera nos da el factor con el que f expande o contrae su volumen cerca del punto x y es por esto que lo usamos en los cambios de variables en el cálculo de volúmenes.

Otro tipo de funciones de gran utilidad son las funciones medibles.

Definición A.5: Sean $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{F}, \nu)$ dos espacios de medida, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es una función medible ó $\mathcal{A} - \mathcal{F} - medible$ si:

$$f^{-1}(F) \in \mathcal{A} \text{ para todo } F \in \mathcal{F}.$$

Un ejemplo de funciones medibles son las llamadas variables aleatorias. Y una medida de gran utilidad es la medida imagen.

Definición A.6: Sea μ una medida en (X, \mathcal{A}) y $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{F})$ medible, entonces $f(\mu)$ denota la *medida imagen* en (Y, \mathcal{F}) dada por $f(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$, para todo $B \in \mathcal{F}$.

Finalmente presentaremos la esperanza condicional, $\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\mathcal{X}]$, de una variable aleatoria \mathcal{Y} respecto a la variable aleatoria \mathcal{X} , que no es más que el mejor predictor, en el sentido de error cuadrático medio, de \mathcal{X} respecto a \mathcal{Y} y se define por:

Definición A.7: Sean \mathcal{X} y \mathcal{Y} variables aleatorias conjuntamente distribuidas. La esperanza condicional de \mathcal{Y} dado $\mathcal{X} = x$ es

$$\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\mathcal{X} = x] = \begin{cases} \sum y p_{\mathcal{Y}|X=x}(y), & \text{caso discreto;} \\ \int_{\mathbb{R}} y f_{\mathcal{Y}|X=x}(y) dy, & \text{caso continuo.} \end{cases}$$

La esperanza condicional $\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\mathcal{X}]$ también puede ser interpretada como la proyección de \mathcal{Y} sobre \mathcal{X} . Una de sus propiedades es la siguiente:

Proposición A.3: Suponiendo \mathcal{X}, \mathcal{Y} variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\mathbb{E}[|\mathcal{X}|] < \infty$. Entonces

$$\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{X}|\mathcal{Y}]].$$

Ejemplo A.2: Una vara de longitud 1 se parte en un número aleatorio de puntos, uniformemente sobre ella. Los fragmentos resultantes se parten una vez más. Encuentre el valor esperado de piezas resultantes.

Sea $\mathcal{X} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ la variable que modela los fragmentos resultantes de la primera partición y \mathcal{Y} lo de la segunda partición, entonces

$$\mathcal{Y}|\mathcal{X} = x \sim \mathcal{U}(0, x).$$

Es claro que $\mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\mathcal{X} = x] = \frac{x}{2}$.

Luego, por la proposición anterior

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{Y}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{Y}|\mathcal{X}]] \mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{X}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[\mathcal{X}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Definición A.8: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto lebesgue medible, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto donde A tiene densidad lebesgue 1. El límite superior e inferior aproximado, respectivamente, de f viene dado por:

- El ínfimo de $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que el conjunto $\{f \leq a\}$ tiene densidad 1 en x_0 ;
- El supremo de $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ tal que el conjunto $\{f \geq a\}$ tiene densidad 1 en x_0

Estos usualmente son denotados por $ap \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $ap \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

APÉNDICE B

Resultados Previos a la Fórmula del Área

A continuación presentaremos algunos resultados de utilidad para demostrar la Fórmula del Área. Para obtener estos resultados, en general, basta con las definiciones dadas anteriormente.

Comenzaremos exponiendo algunas proposiciones conocidas de Teoría de la Medida para aproximaciones de funciones medibles.

Teorema B.1: Sean (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ una función μ -medible y $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ números positivos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = \infty.$$

Entonces existen conjuntos A_1, A_2, \dots μ -medibles tales que para todo $x \in X$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{I}_{A_n}(x).$$

(Este es un equivalente al teorema de aproximación de funciones medibles por funciones simples).

Demostración:

Definamos los siguientes conjuntos

$$A_n = \left\{ x \in X : f(x) \geq \alpha_n + \sum_{i < n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) \right\}.$$

Entonces, como $\left[\alpha_n + \sum_{i < n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x), \infty \right) \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^+})$ y f es medible, se tiene que

$$A_n = f^{-1} \left[\alpha_n + \sum_{i < n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x), \infty \right) \in \mathcal{F}.$$

Por lo que A_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Además tenemos lo siguiente,

Caso 1: $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Supongamos que $x \in X$ es tal que $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos por un lado que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{I}_{A_n}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot 1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \\ &= \infty. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Por otro lado, por definición de A_n tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \infty \geq f(x) &\geq \alpha_n + \sum_{i < n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) \\ &= \alpha_n + \sum_{i < n} \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i. \end{aligned}$$

Como lo anterior vale para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\infty \geq f(x) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty.$$

Luego,

$$f(x) = \infty, \tag{B.2}$$

de donde, por (B.1) y (B.2) tenemos que

$$f(x) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbb{I}_{A_n}(x).$$

Caso 2: $x \in A_i$ para un conjunto finito de índices

Supongamos ahora que $x \in X$ es tal que $x \in A_{i_j}$ para algunos $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \alpha_{i_j} + \sum_{k < i_j} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x) \\ &= \alpha_{i_j} + (\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_{j-1}}) \\ &= \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_j}. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $1 \leq j \leq n$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_j} + \alpha_{i_{j+1}} + \alpha_{i_{j+2}} + \dots + \alpha_{i_n} \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j} \mathbb{I}_{A_{i_j}}(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}(x). \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}(x) \leq f(x). \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado tenemos que $x \notin A_m$, para $m \neq i_1, i_2, \dots, i_n$, i.e $x \in A_m^c$ para $m \neq i_1, i_2, \dots, i_n$.

Luego por definición, siempre que $m \neq i_1, i_2, \dots, i_n$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &< \alpha_m + \sum_{j < m} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}(x) \\ &= \alpha_m + \sum_{\{i_j: i_j < m, 1 \leq j \leq n\}} \alpha_{i_j}. \end{aligned}$$

Además, para $\epsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $m \geq N$ entonces

$$\alpha_m = |\alpha_m| < \epsilon.$$

Para m lo suficientemente grande ($m > \max\{i_n, N\}$) tenemos

$$f(x) < \epsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x).$$

Luego, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, nos queda

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x). \quad (\text{B.4})$$

Por (B.3) y (B.4) nos queda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x) \leq f(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x),$$

de donde

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbb{I}_{A_k}(x).$$

□

Teorema B.2: (Teorema de convergencia de Lebesgue) Sea $\{f_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles en el espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) tales que

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \text{ para } x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) d\mu(x).$$

La demostración de este y algunos otros resultados los omitiremos ya que son bastantes conocidos y forman parte del curso básico de Teoría de la Medida.

Corolario B.3 (Teorema de Beppo Levi) Sean (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, Δ un conjunto numerable y f_i una función μ -medible y no negativa para cada $i \in \Delta$. Entonces,

$$\sum_{i \in \Delta} \int f_i d\mu = \int \sum_{i \in \Delta} f_i(x) d\mu(x).$$

Demostración:

Sea Δ un conjunto numerable.

Caso 1: Δ es finito numerable

En este caso el resultado es directo por linealidad de la integral.

Caso 2: Δ es infinito numerable

Existe entonces una correspondencia biunívoca entre el conjunto Δ y \mathbb{N} , el conjunto de los números naturales.

Consideremos la sucesión de sumas parciales $\{\sum_{i=1}^n f_i(x)\}_{n \geq 1}$. Esta sucesión es claramente creciente para todo $x \in X$ pues f_i es no negativa para cada $i \in \mathbb{N}$.

Luego, por teorema de convergencia de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^n f_i(x) d\mu(x) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) d\mu(x), \quad (\text{B.5})$$

de donde

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \Delta} \int f_i d\mu &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\int f_i d\mu \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\int f_i d\mu \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{i=1}^n f_i d\mu \right) \\
 &\stackrel{(B.5)}{=} \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) \right) d\mu(x) \\
 &= \int \left(\sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x) \right) d\mu(x) \\
 &= \int \sum_{i \in \Delta} f_i(x) d\mu(x).
 \end{aligned}$$

□

Continuaremos ahora con un resultado que vincula funciones Lipschitzianas con la medida de Hausdorff de su dominio. Dicho resultado lo utilizaremos en esta misma sección.

Teorema B.4 (*Principio de Lipschitz*) Sea $f : S \subseteq X \rightarrow f(S) \subseteq Y$ una función Lipschitz entre subconjuntos de espacios métricos, y sea $\mathcal{L}ip(f)$ la constante Lipschitz de f . Entonces

$$\mathcal{H}_m(f(S)) \leq (\mathcal{L}ip(f))^m \mathcal{H}_m(S) \text{ para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Demostración:

Supongamos $\mathcal{H}_m(S) < +\infty$ (en caso contrario el resultado es inmediato). Consideremos $\{U_n\}_{n \geq 1}$ un δ -cubrimiento de S y definamos la sucesión de conjuntos $\{V_n\}_{n \geq 1}$ como sigue

$$V_n \equiv f(U_n \cap S) \subseteq f(S) \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\text{diam}(V_n) &= \text{diam}(f(U_n \cap S)) \\
&\stackrel{f \text{ es sobre}}{=} \sup_{x,y \in U_n \cap S} \{d_Y(f(x), f(y))\} \\
&\leq \sup_{x,y \in U_n \cap S} \{\mathcal{L}ip(f)d_X(x, y)\} \\
&= \mathcal{L}ip(f) \sup_{x,y \in U_n \cap S} \{d_X(x, y)\}.
\end{aligned}$$

Además, como $U_n \cap S \subseteq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sup_{x,y \in U_n \cap S} \{d_X(x, y)\} \leq \sup_{x,y \in U_n} \{d_X(x, y)\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

De donde, como $\{U_n\}_{n \geq 1}$ es un δ -cubrimiento, se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{diam}(V_n) &\leq \mathcal{L}ip(f) \sup_{x,y \in U_n} \{d_X(x, y)\} \\
&= \mathcal{L}ip(f) \text{diam}(U_n) \leq \mathcal{L}ip(f)\delta.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

De (B.6) tenemos que $\{V_n\}_{n \geq 1}$ es un $(\mathcal{L}ip(f)\delta)$ -cubrimiento de $f(S)$.

Por otro lado, como

$$0 \leq \text{diam}(V_n) \leq \mathcal{L}ip(f) \text{diam}(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tenemos

$$0 \leq (\text{diam}(V_n))^m \leq (\mathcal{L}ip(f))^m (\text{diam}(U_n))^m \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } m = 0, 1, 2, \dots$$

De donde

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\text{diam}(V_n))^m \leq (\mathcal{L}ip(f))^m \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{diam}(U_n))^m.$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(V_n)}{2} \right)^m \leq (\mathcal{L}ip(f))^m \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(U_n)}{2} \right)^m. \tag{B.7}$$

Sabemos por propiedad del ínfimo que dado $\epsilon > 0$ existe $\{U'_n\}_{n \geq 1}$ un δ -cubrimiento, tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(U'_n)}{2} \right)^m \leq \inf_{\substack{\{U'_n\}_{n \geq 1} \\ \delta\text{-cubrimiento}}} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(U_n)}{2} \right)^m \right\} + \epsilon. \tag{B.8}$$

Note que haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ el δ -cubrimiento de S , $\{U_n\}_{n \geq 1}$, se acerca al cubrimiento más eficiente, por lo que también lo será el δ -cubrimiento de $f(S)$, $\{V_n\}_{n \geq 1}$.

Usando (B.7) nos queda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(V_n)}{2} \right)^m \leq (\mathcal{L}ip(f))^m \left[\inf_{\substack{\{U'_n\}_{n \geq 1} \\ \delta\text{-cubrimiento}}} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_m \left(\frac{\text{diam}(U_n)}{2} \right)^m \right\} + \epsilon \right].$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ y $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos el resultado. □

De este teorema se desprende un resultado que es de interés en este trabajo. Antes de enunciarlo, vamos a dar una caracterización de una medida sobre un espacio métrico separable.

Para ello necesitamos recordar primeramente que si se tiene un espacio métrico X , una familia de subconjuntos de X , \mathcal{F} , y una función ζ tal que

$$0 \leq \zeta(S) \leq +\infty \text{ para todo } S \in \mathcal{F},$$

se puede entonces construir por Caratheodory una medida, μ , sobre este espacio a partir de la función ζ . Más aún si X es separable, con

$$\zeta(A) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta(B), \text{ para } \mathcal{G} \text{ una familia numerable de borelianos y } A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \text{ un boreliano de } X.$$

Entonces la medida μ queda explícitamente definida por

$$\mu(A) = \sup \left\{ \sum_{B \in \mathbf{H}} \zeta(B) : \mathbf{H} \text{ es una partición boreliana de } A \right\}.$$

Si $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots$ son particiones borelianas de A , entonces

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup \{ \text{diam}(B) : B \in \mathbf{H}_j \} = 0, \text{ implica } \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{B \in \mathbf{H}_j} \zeta(B) = \mu(A).$$

Teorema B.5 Sean X un espacio métrico separable, ν una medida sobre un espacio Y , y $f : X \rightarrow Y$ una función tal que $f(A)$ es ν -medible para $A \in \mathcal{B}(X)$. Si ζ es la medida imagen para $S \subset X$ y μ es la medida sobre X resultante de la construcción de Caratheodory de ζ sobre $\mathcal{B}(X)$, entonces

$$\mu(A) = \int N(f|_A, y) d\nu(y), \text{ para todo } A \in \mathcal{B}(X).$$

Demostración:

Para demostrar esta caracterización de la medida, veamos primero cómo podemos reescribir el valor $N(f|_A, y)$ como límite de funciones indicadoras. Para ello sean $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots$ particiones borelianas de A tales que cada elemento de \mathbf{H}_j es igual a la unión de alguna subfamilia de \mathbf{H}_{j+1} , i.e:

Para cada $B \in \mathbf{H}_j$ existe $\{C_i\}_{i \in \Delta} \subset \mathbf{H}_{j+1}$ tal que $B = \bigcup_{i \in \Delta} C_i$.

Supongamos además que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup\{\text{diam}(S) : S \in \mathbf{H}_j\} = 0$.

Note que si $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \mathbb{I}_{f(S)}(y) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \# \left(\bigcup_{S \in \mathbf{H}_j} S \cap f^{-1}(\{y\}) \right) \\
&= \#(A \cap f^{-1}(\{y\})), \text{ pues } \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots \text{ son particiones borelianas de } A \\
&= N(f|_A, y).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Luego, por Corolario B.3 y Teorema B.2,

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \zeta(S) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \nu(f(S)) \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \int_{f(S)} d\nu \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \int \mathbb{I}_{f(S)}(y) d\nu(y) \\
&= \lim_{j \rightarrow +\infty} \int \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \mathbb{I}_{f(S)}(y) d\nu(y) \\
&= \int \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{S \in \mathbf{H}_j} \mathbb{I}_{f(S)}(y) d\nu(y) \\
&\stackrel{(B.9)}{=} \int N(f|_A, y) d\nu(y).
\end{aligned}$$

□

De este teorema obtenemos el siguiente corolario, que usaremos directamente en la demostración de la Fórmula del Área. Este corolario se desprende del Teorema B.5

tomando $\nu = \mathcal{H}_m$, de donde

$$\zeta(S) = \mathcal{H}_m(f(S)) \text{ para } S \subset X.$$

Además, por principio de Lipschitz

$$\zeta(S) = \mathcal{H}_m(f(S)) \leq (\mathcal{L}ip(f))^m \mathcal{H}_m(S) \text{ para } S \subset X. \quad (\text{B.10})$$

Tenemos entonces:

Corolario B.6: Sean X un espacio métrico separable, Y un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función Lipschitz. Para $m = 1, 2, \dots$ y $A \in \mathcal{B}(X)$ se tiene

$$(\mathcal{L}ip(f))^m \mathcal{H}_m(A) \geq \int N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y).$$

Demostración:

Si consideramos entonces ν , μ y ζ como en la construcción de Caratheodory y $\nu = \mathcal{H}_m$, y si $A \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$\mu(A) = \sup \left\{ \sum_{B \in \mathbf{H}} \zeta(B) : \mathbf{H} \text{ es partición boreliana de } A \right\}.$$

Como A es una partición boreliana de A , tenemos

$$\zeta(A) \in \left\{ \sum_{B \in \mathbf{H}} \zeta(B) : \mathbf{H} \text{ es partición boreliana de } A \right\}.$$

Así

$$\begin{aligned} \zeta(A) &\leq \sup \left\{ \sum_{B \in \mathbf{H}} \zeta(B) : \mathbf{H} \text{ es partición boreliana de } A \right\} \\ &= \mu(A). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Para obtener la desigualdad inversa, debemos dar una definición de μ análoga a la anterior: Para un cubrimiento de A , \mathbf{H} , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf \left\{ t : \text{para } \mathbf{H} \text{ existe } \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ numerable tal que } A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B, B \cap \mathbf{H} \neq \emptyset \right. \\ &\quad \left. \text{para } B \in \mathcal{G} \text{ y } \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta(B) < t \right\}. \end{aligned}$$

De donde, como A es un cubrimiento de A , se tiene

$$\zeta(A) \in \left\{ t : \text{para } \mathbf{H} \text{ existe } \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ numerable tal que } A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B, B \cap \mathbf{H} \neq \emptyset \text{ para } B \in \mathcal{G} \text{ y } \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta(B) < t \right\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \zeta(A) &\geq \inf\{t : \text{para } \mathbf{H} \text{ existe } \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ numerable tal que } A \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B, B \cap \mathbf{H} \neq \emptyset \text{ para } B \in \mathcal{G} \\ &\quad \text{y } \sum_{B \in \mathcal{G}} \zeta(B) < t\} \\ &= \mu(A). \end{aligned} \tag{B.12}$$

De (B.11) y (B.12) se cumple que

$$\zeta(A) = \mu(A) \text{ ,siempre que } A \in \mathcal{B}(X).$$

Así, por (B.10) y Teorema B.5, tenemos que para $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}ip(f))^m \mathcal{H}_m(A) &\geq \zeta(A) = \mu(A) \\ &= \int N(f|_A, y) d\mathcal{H}_m(y). \end{aligned}$$

□

Debemos ahora establecer una comparación entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue. El siguiente teorema nos permite hacer esta comparación.

Teorema B.7: *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$, entonces $\lambda_m(A) = \mathcal{H}_m(A)$. Es decir, en \mathbb{R}^m la medida de Lebesgue y la medida de Hausdorff coinciden.*

Observe que este hecho lo verificamos para el caso $m = 1$ en el *Ejemplo (1.2.1)*.

Para finalizar la sección, veamos un teorema que nos da una expresión de la medida de Lebesgue de la imagen de un conjunto por una aplicación lineal. La expresión de esta medida para un campo vectorial, en lugar de aplicación lineal, es vital para la formulación e interpretación de la Fórmula del Área.

Teorema B.8: *Sea λ_m la medida de Lebesgue en $(\mathbb{R}^m, \mathcal{F})$ y sea $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal y regular, es decir, $\det(T) \neq 0$. Entonces para $A \in \mathcal{F}$ se tiene que $T(A) \in \mathcal{F}$ y*

$$\lambda_m(T(A)) = |\det(T)|\lambda_m(A).$$

Demostración:

La demostración la haremos por casos, considerando al conjunto A como un cubo, un abierto y finalmente un conjunto medible cualquiera.

Caso 1: A un cubo

Suponiendo que A es un m -cubo unitario semicerrado, entonces podemos escribir a A como una homotecia de razón ' a ' para algún $a > 0$, es decir,

$$A = aQ_0 + \omega, \text{ para algún } \omega \in \mathbb{R}^m \text{ y } Q_0 = (0, 1]^m.$$

Así

$$\begin{aligned} \text{diam}(A) &= \text{diam}(aQ_0 + \omega) \\ &= \inf_{x,y \in A} \|x - y\| \\ &= \inf_{x,y \in Q_0} \|(ax + \omega) - (ay + \omega)\| \\ &= \inf_{x,y \in Q_0} \|ax - ay\| \\ &= \text{diam}(aQ_0) \\ &= a^m. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Además, dada la linealidad de T

$$\begin{aligned} T(A) &= T(aQ_0 + \omega) \\ &= aT(Q_0) + T(\omega). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_m(T(A)) &\stackrel{(1.14)}{=} \lambda_m(aT(Q_0) + T(\omega)) \\ &= \lambda_m(aT(Q_0)), \text{ pues } T(\omega) \text{ es un punto} \\ &= a^m \lambda_m(T(Q_0)) \\ &\stackrel{(B.13)}{=} \text{diam}(A) \lambda_m(T(Q_0)) \\ &= \lambda_m(A) \lambda_m(T(Q_0)) \\ &= \lambda_m(A) |\det(T)|, \text{ pues } Q_0 = (0, 1]^m. \end{aligned}$$

Caso 2: A es un abierto

Sea A un abierto, entonces existen $\{Q_i\}_{i \geq 1}$ cubos tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \text{ y } Q_i \cap Q_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

De esta manera

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} T(Q_i).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\lambda_m(T(A)) &= \lambda_m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T(Q_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_m(T(Q_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_m(Q_i) |\det(T)| \\
&= |\det(T)| \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_m(Q_i) \\
&= |\det(T)| \lambda_m\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} Q_i\right) \\
&= |\det(T)| \lambda_m(A).
\end{aligned}$$

Caso 3: conjuntos cualesquiera

Como la medida de Lebesgue es una medida regular,

$$\lambda_m(A) = \inf\{\lambda_m(U) : A \subset U \text{ y } U \text{ es abierto}\}.$$

Por lo tanto si G es un abierto tal que $T(A) \subseteq G$, entonces dada la continuidad de T $A \subseteq T^{-1}(G)$ es abierto. De donde

$$\begin{aligned}
\lambda_m(G) &= \lambda_m(T(T^{-1}(G))) \\
&\stackrel{\text{Caso 2}}{=} |\det(T)| \lambda_m(T^{-1}(G)) \\
&\geq |\det(T)| \lambda_m(A),
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\lambda_m(T(A)) &= \inf\{\lambda_m(G) : T(A) \subseteq G \text{ y } G \text{ es abierto}\} \\
&\geq |\det(T)| \lambda_m(A).
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\lambda_m(T(A)) \geq |\det(T)| \lambda_m(A). \tag{B.15}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\lambda_m(A) &= \lambda_m(T^{-1}(T(A))) \\
&= |\det(T^{-1})| \lambda_m(T(A)) \\
&\leq \frac{1}{|\det(T)|} \lambda_m(G).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo a ambos lados sobre G abierto, nos queda

$$\lambda_m(A) \leq \frac{1}{|\det(T)|} \lambda_m(T(A)). \quad (\text{B.16})$$

Finalmente, de (B.15) y (B.16) obtenemos el resultado.

□

Proposición B.9: (Teorema de Fubini) Sean (X, \mathcal{A}, μ) y (Y, \mathcal{F}, ν) espacios de medida, y $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ una función $\mathcal{A} \times \mathcal{F}$ -medible en $X \times Y$. Entonces, si se tiene que $\varphi(x) = \int_Y f_X d\nu$ y $\psi(y) = \int_X f_Y d\mu$ para $x \in X$ e $y \in Y$, se tiene lo siguiente:

- (I) φ es \mathcal{A} -medible y ψ es \mathcal{F} -medible.
- (II) $\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi d\nu$.

Bibliografía

- [1] ADLER, R.. *Geometry of Random Fields*. John Wiley and sons. Chichester, New York, Brisbane (1981).
- [2] ADLER, R.. *Random Fields and Random Geometry*. Electrical Engineering. Technion, Israel Institute of technology, October (2011).
- [3] ADLER, R. y TAYLOR, J.E.. *Topological Complexity of Smooth Random Functions*. Saint-Flour Lectures, July (2009).
- [4] AZAÏS, J. y WSCHEBOR, M.. *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. Electrical Engineering. John Wiley and Sons, Inc. New Jersey (2009).
- [5] DUDLEY, R.M.. *Real Analysis and Probability*. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge University Press (2004).
- [6] FEDERER, H.. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag (1996).
- [7] FELLER, W.. *An Introduction to Probability Theory and its Applications* «A first Course». John Wiley and sons, Inc., New York. Mei Publications, Inc., Taiwan. Volume II (1965).
- [8] GÓMEZ, J.G.. *Una teoría Matemática de Microlentes Estocásticas: «Imágenes aleatorias, cortes aleatorios y la Fórmula de Kac-Rice»*. Universidad Central de Venezuela. Caracas (2012).
- [9] GUT, A.. *An Intermediate Course in Probability*. Statistics Texts in statistics. Series Editors G.Casella, S. Frenberg, I.Olkin. Second Edition. Springer(2009).
- [10] IRIBARREN, I.. *Introducción a la Teoría de la Medida*. Universidad Central de Venezuela. Caracas (2006).
- [11] MUNKRES, J.. *Topology* «A first Course». Prentice Hall. Second Edition (2000).
- [12] NUALART, D.. *Stochastic Processes*. University of Kansas (2000).

- [13] RADEMACHER, H.. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit* . Math-Ann. (1919).Pág.: 340-359.
- [14] RATAJ, J. y BENĚŠ, V.. *Stochastic Geometry: «Selected Topics»*. Universität Kaiserslautern. Kluwer Academic Publishers. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow. Springer (2004).
- [15] RUDIN, W.. *Principles of Mathematical Analysis*.McGraw-Hill, Inc. Collection: International Series in Pure and Applied Mathematics. Third Edition (1976).
- [16] WEIZSÄCKER, H. y GEIßLER, J.. *Fractal sets and Preparation to Geometric Measure Theory*. Prentice Hall. Revised version (2006).