UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICA

Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y estimaciones de la fórmula trapezoidal para funciones convexas.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Gustavo Di Giorgi** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson J. Merentes D.

Caracas, Venezuela

Mayo de 2014

Agradecimiento

Agradezco a Dios y al pilar fundamental en mi vida Giusto Mi Padre por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida.

A mi madre, que con su demostración de una madre ejemplar me ha enseñado a no desfallecer ni rendirme ante nada y siempre perseverar a través de sus sabios consejos.

A mi hermana y a mi novia, por su apoyo incondicional y por demostrarme la gran fe que tienen en mí, por acompañarme durante todo este arduo camino y compartir conmigo alegrías y fracasos.

Al Doctor Nelson Merentes, Tutor de tesis, por brindarme la oportunidad de trabajar con su valiosa guía y asesoramiento a la realización de la misma.

Gracias a todas las personas que ayudaron directa e indirectamente en la realización de este trabajo.

Gustavo Di Giorgi Armas.

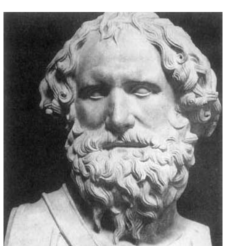
Este trabajo está dedicado a Dios, a la memoria de mi padre, a mi familia, mis amigos y profesores que me ayudaron a llegar donde estoy actualmente.

Gustavo Di Giorgi.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones convexas es de fundamental importancia en varios campos de la Matemática, tanto teórica como aplicada, ya que estas son de vital importancia para la mayor compresión de los estudios realizados en los campos de la teoría de la optimización, programación lineal y no lineal, la programación convexa y estas además aportan un tratamiento unificado para demostrar algunas desigualdades recientes y clásicas de la Matemática como por ejemplo, la desigualdad de la Media aritmética-Media geométrica, la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Jensen, la desigualdad de las Potencias Medias y algunas nuevas desigualdades del Tipo Hermites Hadamard que son de vital importancia para la realización de este trabajo especial de grado.


Arquímedes

La noción de convexidad se remonta a la época de Arquímedes (Circa 250 A.C.), en relación con la famosa estimación de π (usando polígonos regulares inscritos y circunscritos). Él notó un hecho importante, que el perímetro de una figura convexa es menor que el perímetro de cualquier otra figura convexa que la rodea [17].

Sin embargo, estudios mejor estructurados y con severidad matemática son presentados a finales del siglo XIX y principios del siglo XX como se pueden observase por ejemplo en los siguentes trabajos:

Otto Ludwig Hölder fue un matemático nacido en Stuttgart, Alemania. Es famoso por muchas contribuciones importantes por ejemplo su trabajo titulado *Über einen Mittelwertsatz* [8] en 1889 en el que demostró la forma moderada de la hoy conocida desigualdad de Jensen, bajo una hipótesis con mayor grado de presición para la función f, es decir, que la segunda derivada es no negativa $f''(x) > 0$, en su dominio.

O. Hölder

Luego Otto Stolz, un matemático austríaco muy conocido por sus trabajos sobre análisis matemático y sobre los infinitesimales, en el trabajo [27] titulado *Grundzüge der Differential und Integralrechnung,* demostró en 1893 que
si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y satisface la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

entonces f tiene derivada por la izquierda y por la derecha en cada punto de (a, b).

O. Stolz

J. Hadamard

Igualmente tenemos al francés Jacques Hadamard que en su trabajo titulado *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* [6] en el año 1893, obtuvo una desigualdad para integrales de funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$.

Así también durante el siglo XX se realizó una intensa acción de investigación en el campo de la matemática y se obtuvieron resultados significativos en el Análisis Funcional Geométrico, la Economía Matemática y Análisis Convexo, entre otros. El aumento en los estudios de Matemática relacionados al tema de las funciones convexas se debe al libro de G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya [7], titulado "*Inequations*"(Para más detalles de la historia del desarrollo de las funciones convexas se remite a [22]).

Uno de los resultados más importantes de las funciones convexas es que satisfacen las desigualdades siguientes:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)\,ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{0.2}$$

para todo $x, y \in I,\ x < y$.

El lado izquierdo de la desigualdad (0.2) fue demostrada por Jaques Salomon Hadamard [6] en 1893, para el caso en que las funciones f con derivada creciente en un intervalo cerrado de la recta real. En ese tiempo la noción de funciones convexas estaba en pleno proceso de contrucción. Ya hoy día esta desigualdad es conocida como la desigualdad de Hadamard. Mientras el lado derecho de la desigualdad (0.2) se le atribuye a Charles Hermite en 1883. En la actualidad la desigualdad (0.2) es conocida como la desigualdad de Hermite-Hadamard.

Ch. Hermite

Durante los años 1905-1906 el matemático danés Johan Ludwig William Valdemar Jensen ([11], [12]) en los trabajos *Om konvese Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier* y *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeursmoyennes* valoriza la importancia de

J. L. Jensen

esta noción y expresó lo siguiente Parece ser que la noción de función convexa es tan fundamental como la de función positiva o función creciente". Jensen considera la ecuación (0.1) para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de importantes resultados el cual (0.1) junto con la desigualdad implica la continuidad de f.


S. Ulam

En una epoca más reciente el año 1952, el polaco Stanislaw M. Ulam y el estadounidense Donald H. Hyers [10] demuestran en el artículo *Approximately convex functions*, que dada una función f es $\epsilon-$*convexa* definida en un subconjunto abierto convexo entonces esta puede ser apoximada por una función $\phi(x)$ convexa.


K. Baron


J. Matkowski


K. Nikodem

En la misma dirección que crece el conocimiento matemático en el transcurso de la historia, se desarrolan algunos resultados importantes en la matemática como por ejemplo, tenemos que dadas dos funciones f y g definidas sobre un espacio vectorial a valores reales, unos de los problemas de interés es determinar condiciones necesarias y suficientes sobre f y g para que exista una función h que separe a f y g ($f \leq h \leq g$) y que cumpla cierta condición, por ejemplo: continuidad, convexidad, cuasiconvexidad, cuasiconcavidad, monotonía, linealidad, etc. Existen varios trabajos donde se estudian estos problemas, como es el caso del trabajo titulo *A sandwich with convexity,* donde en el año 1994, los polacos Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem [2] demuestran que dos funciones reales f y g definidas sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y que satisfacen la desigualdad

$$f(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y) \quad x,y \in I \quad \text{y} \quad [0,1],$$

pueden ser separadas por una función convexa.

Un problema matemático importante es investigar cómo las funciones se obtienen bajo la acción de los promedios. El caso más conocido es la convexidad del punto medio (o convexidad de Jensen), que no son mas que aquellas funciones $f : I \to \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{0.3}$$

para todo $x, y \in I$.

En nuestra vida cotidiana experimentamos regularmente y de muchas maneras la convexidad y concavidad por ejemplo, en nuestra posición de pie, que se fija siempre y cuando la proyección vertical de nuestro centro de gravedad se encuentra dentro de la dotación convexa de los pies. Además la convexidad es de importancia en nuestra vida diaria ya que la usamos a través de sus numerosas aplicaciones a distintas áreas de conocimiento como: la medicina, la economía, la ingeniería, computación, entre otras.

Este trabajo especial de grado se ha estructurado en tres capitulos subdivididos cada uno de ellos en secciones, no muy extensas en la mayoría de los casos. Esto permitirá una mayor compresión del trabajo y una lectura más ágil del texto.

En el primer capítulo se comienza introduciendo la noción de funciones convexas, algunas desigualdades clásicas importantes como: la desigualdad de Hölder [16], la desigualdad de Jensen [16], la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard [6]. También en este capítulo se expondrán algunos conceptos básicos, la estimación de la formula trapezoidal para el cálculo de integrales y la estimación del error que se comete utilizando dicha fórmula.

En el segundo capítulo se expondrán algunas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas son convexas y algunas nuevas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard esto con el fin de mejorar las compresión de este trabajo especial de grado.

En el tercer capítulo se expondrán algunas aplicaciones para medias especiales, estas pueden considerarse extensiones o generalizaciones de la media aritmética, media logarítmica y media logarítmica generalizada para números reales positivos,por último les presentaremos algunas Estimaciones del Error en la Fórmula Trapezoidal para el Cálculo de integrales esto con el fin de dar a conocer algunas estimaciones de mayor eficiencia.

CAPÍTULO 1

CONVEXIDAD Y DESIGUALDADES

En este capítulo, se dará una introducción de convexidad, funciones del tipo Hermite-Hadamard y la estimación de fórmula trapezoidal para el calculo de integrales, esto se realizara por medio de Teoremas, Definiciones, Proposiciones, Ejemplos, entre otros tópicos que se relacionan con estos temas y además nos servirán para el desarrollo de los próximos capítulos en este Trabajo Especial de Grado.

1.1. Funciones Convexas

El estudio de las funciones convexas como una clase de funciones es generalmente atribuida al Danés Johan Ludwich William Valdemar Jensen por sus primeros trabajos entre los años 1905 y 1906 ([11] y [12]). Sin embargo, él no fue el primero en trabajar las funciones convexas, puesto que la forma discreta de la desigualdad de Jensen la demostró el alemán Otto Hölder en 1889 ([8]) bajo una hipótesis más fuerte la cual es que la segunda derivada sea no negativa (es decir $f''(x) > 0$). Por otra parte, el austriaco Otto Stolz demostró en 1893 ([27]) que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y satisface la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right) \tag{1.1}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ entonces f tiene derivada por la izquierda y por la derecha en cada punto de (a, b).

El francés Jacques Hadamard obtuvo en 1893 ([6]) una desigualdad para integrales para las funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$. Jensen utiliza (1.1) para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de resultados el cual junto con (1.1) implica la continuidad de f.

A continuación daremos la definición de función convexa y una serie de ejemplos que ilustran la definición:

Definición 1.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. La función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si satisface:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Si la desigualdad es en sentido contrario se dice que la función f es cóncava.

La función f se considera *estrictamente convexa* siempre que la desigualdad (1.2) sea estricta para $x \neq y$, análogamente se considera *estrictamente cóncava* si consideramos la desigualdad contraria para $x \neq y$.

La interpretación geométrica de una función convexa establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa entonces el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$,$(x_2, f(x_2)) \in$ Graf$f$ nunca está por debajo del Graf$f$, (Ver Fig 1.1).

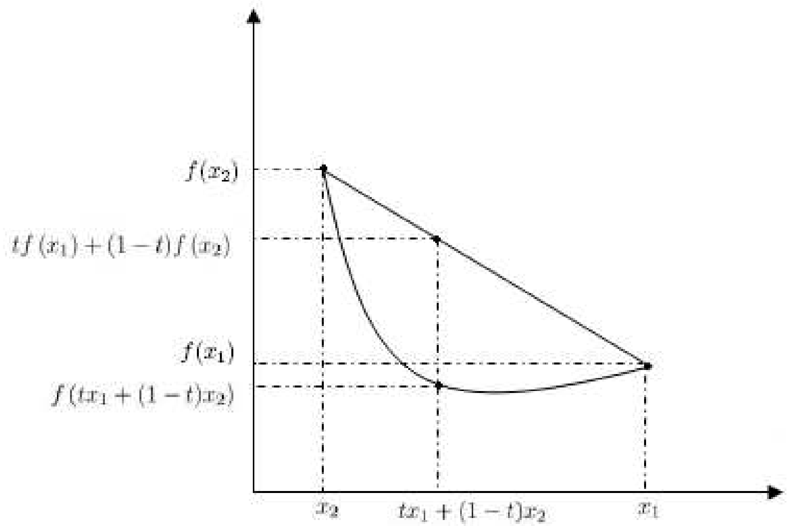


Figura 1.1: Función convexa, $I = [x_2, x_1]$

La interpretación geométrica de una función cóncava establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cóncava entonces el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$,$(x_2, f(x_2)) \in$ Graf$f$, está por debajo del Graf$f$, (Ver Fig 1.2).

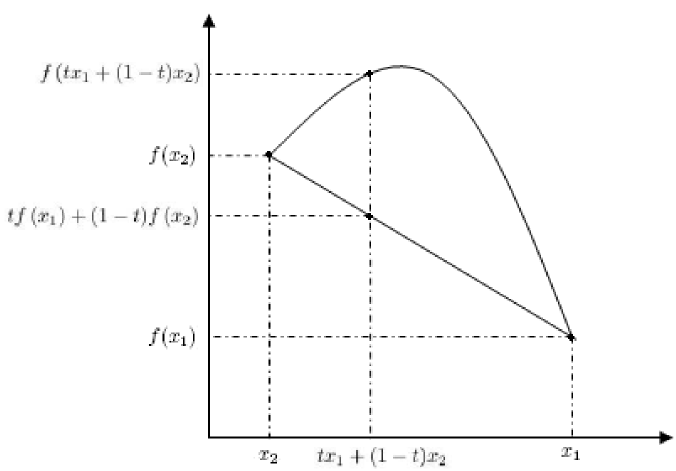


Figura 1.2: Función cóncava, $I = [x_2, x_1]$

A continuación se presenta una serie de ejemplos de funciones convexas, es decir, se demuestra que satisfacen la desigualdad (1.2).

Ejemplo 1.2 Sea $f(x) = x^2, \ \ x \in [-1, 1]$, para que f sea convexa se debe satisfacer que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}, \ \ t \in [0, 1],$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - (t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2) \\ &= t(1-t)x^2 - 2t(1-t)xy + (1-t)(1-1+t)y^2 \\ &= t(1-t)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= t(1-t)(x-y)^2, \ \ t \in [-1, 1], \end{aligned}$$

entonces $f(x) = x^2$ es convexa. Geométricamente se puede comprobar en la siguiente figura:

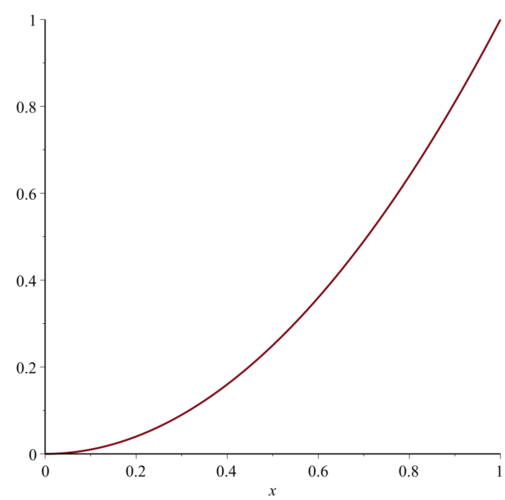


Figura 1.3: $f(x) = x^2, \quad I = [0, 1]$

Ejemplo 1.3 Sea $f(x) = |x|, \ \ x \in [-1, 2]$, se verifica que f es una función convexa. Así

$$f(tx + (1-t)y) = |tx + (1-t)y|$$

usando la desigualdad triangular

$$|tx + (1-t)y| \leq |tx| + |(1-t)y| = t|x| + (1-t)|y| = tf(x) + (1-t)f(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}, \ \ t \in [0, 1]$$

entonces $f(x) = |x|$ es convexa, tal como lo muestra la siguiente figura:

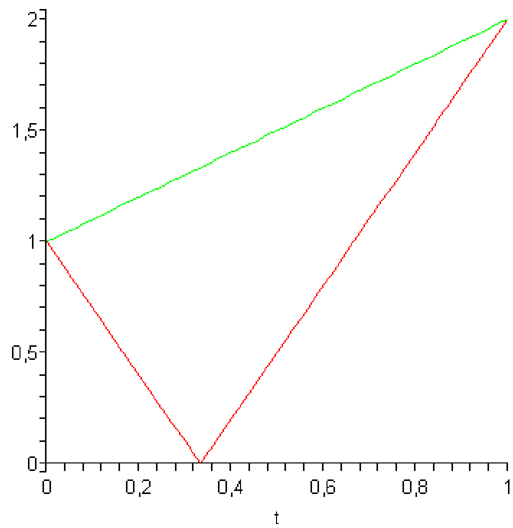


Figura 1.4: $f(x) = |x - \frac{3}{10}|, \quad I = [0, 1]$

Se puede observar que el Ejemplo 1.2 muestra el caso de una función convexa, mientras que el Ejemplo 1.3 no. Además el Ejemplo 1.3 muestra que las funciones convexas no son necesariamente derivables en todo punto (Ver Figura 1.5).

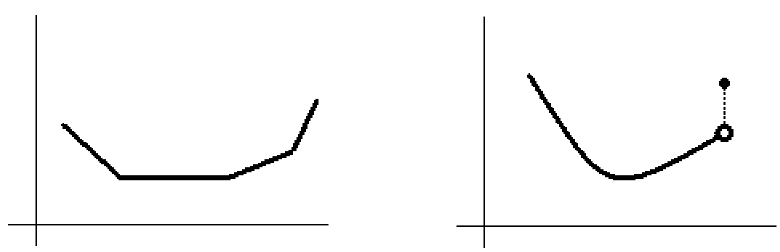


Figura 1.5: Las funciones convexas pueden ser no derivables o discontinuas.

En la próxima sección se expondran resultados sobre la continuidad y la diferenciabilidad de funciones convexas.

1.1.1. Continuidad y Diferenciabilidad

En esta sección se estudiarán las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de las funciones convexas. Se iniciará con una proposición que expresa que toda función convexa definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ es acotado.

Proposición 1.4 (Ver [25]) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces es acotada en $[a, b]$.*

Demostración:

Sea f una función convexa en un intervalo $[a, b]$, se considera $M = \text{máx}\{f(a), f(b)\}$ y $z \in [a, b]$, existe un $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$z = \lambda a + (1 - \lambda)b,$$

entonces

$$f(z) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \lambda M + (1 - \lambda)M = M,$$

luego f es acotada superiormente en $[a, b]$.

Además f está acotada inferiormente. En efecto, seleccionando un $t > 0$ adecuadamente se puede asegurar que $(a + b)/2 + t$ esté en el intervalo de $[a, b]$ y así

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \end{aligned}$$

se reescribe

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right),$$

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$$

y por lo tanto f es acotada.

$\square$

Es necesario que el intervalo en que está definida la función sea cerrado y acotado ya que en caso contrario puede suceder que la función no sea acotada, esto se comprueba mediante los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.5 Las funciones $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = tag(x)$ y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$

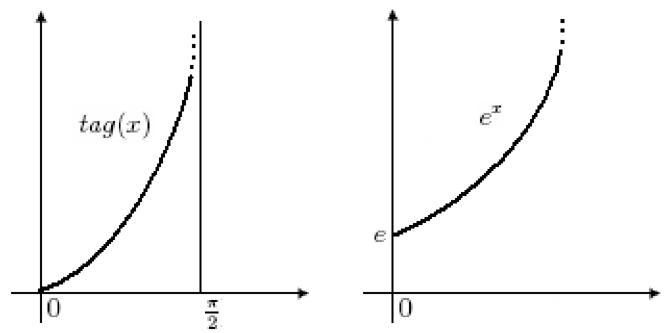


Figura 1.6: Geométricamente se observa que no son acotadas superiormente.

De estos ejemplos se tiene que las funciones pueden ser convexas en un intervalo y no acotadas superiormente, en ese intervalo.

El comportamiento de una función en los extremos en un intervalo I puede ser de varias maneras, sin embargo en el intervalo I^0 es el interior de I tiene propiedades importantes, para exponer algunos resultados que clarifiquen este tema, se expone a continuación la noción de Lipschitzidad.

Definición 1.6 Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ satisface la condición Lipschitz (o es Lipschitz) en el intervalo I si para todo $x, y \in I$ existe una constante K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{1.3}$$

La constante K se denomina constante de Lipschitzidad.

Se demostrará que toda función convexa $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en el interior de I.

Teorema 1.7 (Ver [25]) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces f es Lipschitz en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en el interior de I.*

Demostración:

Se considera $\varepsilon > 0$ de tal manera que $a - \varepsilon$ y $b + \varepsilon$ pertenezcan a I, y sean m y M el ínfimo y el máximo de f respectivamente en $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Si $x, y \in [a, b]$ son tales que $x \neq y$, y como $\left| \dfrac{1}{|y - x|}(x - y) \right| = 1$, resulta que

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y - x|}(y - x) \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon].$$

Luego,

$$y = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|} z + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |y - x|} x.$$

En consecuencia, se considera

$$\lambda = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|} \in (0, 1),$$

resulta que $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$ y como f es una función convexa se obtiene

$$f(y) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(x) = \lambda(f(z) - f(x)) + f(x),$$

por lo tanto

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M - m) < \frac{|y - x|}{\varepsilon}(M - m) = K|y - x|,$$

donde $K = \dfrac{M - m}{\varepsilon}$, y como para cualquier $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, se considera

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|,$$

es decir, f es Lipschitz en el intervalo $[a, b]$.

Se dice que la función f es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que para cualquier colección $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ de intervalos disjuntos de $[a, b]$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta.$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} K|b_i - a_i| = K\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < K\delta.$$

Claramente, si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$, se cumple que toda función convexa es absolutamente continua. Finalmente, la continuidad de f en I^0 es una consecuencia de la arbitrariedad de $[a, b]$.

□

Por otro lado, la derivada de una función convexa puede ser estudiada en términos de derivada por la izquierda y por la derecha definidas como sigue:

Definición 1.8 Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x, y \in I$, entonces las derivadas laterales se definen en caso de existir tal como sigue:

Derivada por la izquierda

$$f'_{-}(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y derivada por la derecha

$$f'_{+}(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

El siguiente teorema establece que las derivadas laterales de una función convexa existen, son monótonas y crecientes en I^0 (interior de I).

Teorema 1.9 *[17] Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa [estrictamente convexa] entonces en cada $x \in I^0$ existen las derivadas laterales y las funciones $f'_{-}(x)$ y $f'_{+}(x)$ son crecientes [estrictamente crecientes] en I^0.*

Se considera los siguientes puntos $w < x < y < z$ en I^0 con P, Q, R y S los puntos correspondientes en la gráfica de f (Ver Figura 1.7); es decir

$$P = (w, f(w)),\ Q = (x, f(x)),\ R = (y, f(y))\ \text{ y }\ S = (z, f(z)).$$

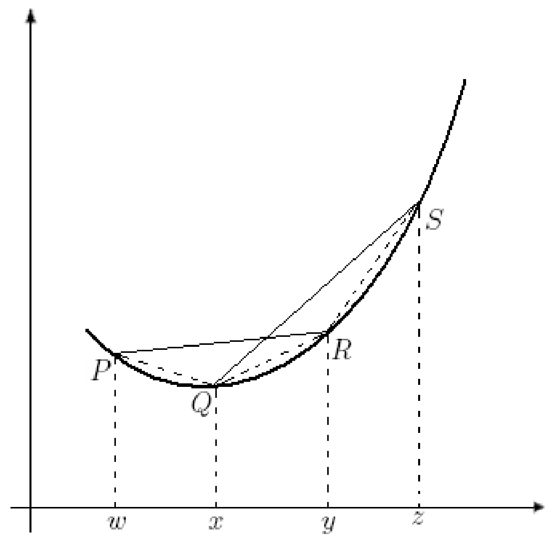


Figura 1.7: Relación entre las pendientes.

Sin pérdida de generalidad, se considera la siguiente notación para la pendiente de la recta que da dos puntos, tal como sigue $pendiente(AB) = pend(AB)$. Con esta notación se obtiene

$$pend(PQ) \leq pend(PR) \leq pend(QR) \leq pend(QS) \leq pend(RS) \tag{1.4}$$

y las desigualdades son estrictas si f es estrictamente convexa. Como $pend(PR) \leq pend(QR)$, entonces la $pend(QR)$ aumenta cuando $x \uparrow y$, y de manera similar la $pend(PR)$ disminuye a medida que $z \downarrow y$.

Estos hechos garantizan que $f'_-(y)$ y $f'_+(y)$ existen y satisfacen

$$f'_-(y) \leq f'_+(y) \tag{1.5}$$

para todo $y \in I^0$.

Por otra parte, considerando (1.4), se tiene

$$f'_+(w) \leq \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y),$$

y la desigualdad es estricta si y sólo si prevalece la convexidad estricta; de esta desigualdad y por (1.5) se obtiene

$$f'_-(w) \leq f'_+(w) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$

y así se establece la monotonía de $f'_-(y)$ y $f'_+(y)$.

$\square$

Realmente el resultado del Teorema 1.9 (interpretado apropiadamente) es valido para todos los $x \in I$, no soló en su interior. Por ejemplo si $I = (a, b]$, donde $f'_+(b)$ existe por lo menos en el sentido infinito y f'_- es creciente en $[a, b]$.

Hay varios resultados importantes que tienen relación con las propiedades de continuidad de f'_+ y f'_-. El carácter monótono de f'_+ significa que el límite de $f'_+(x)$ existe cuando $x \downarrow w$. De la desigualdad

$$f'_+ \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y de la continuidad de f se sigue que

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+ \leq \lim_{x \downarrow w} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(w)}{y - w}.$$

Si $y \downarrow w$ se obtiene

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+ \leq \lim_{y \downarrow w} \frac{f(y) - f(w)}{y - w} = f'_+(w).$$

Por otra parte, ya que $x > w$, la monotonicidad de f'_+ implica que $f'_+(x) \geq f'_+(w)$. Por lo tanto

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+(x) = f'_+(w) \tag{1.6}$$

y argumentos similares demuestran que

$$\lim_{x \uparrow w} f'_+(x) = f'_-(w). \tag{1.7}$$

Se señala que (1.6) y (1.7) son válidas en los extremos de I, siempre que f esté bien definida y sea continua en I. Por último se destaca que las condiciones análogas a (1.6) y (1.7) para el límite lateral izquierdo y derecho se mantiene para $f'_-(x)$.

$\square$

En las condiciones del Teorema 1.7 no se puede asegurar la continuidad en un extremo del intervalo, por ejemplo la función $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ definida por $f(a) = 1$ y $f(t) = 0$ si $a < t < b$, es convexa en $[a, b)$, pero no es continua en a.

Teorema 1.10 *Ver [17] Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa en el intervalo I entonces el conjunto E donde f' no existe es numerable. Además, f' es continua en $I \backslash E$.*

Demostración:

De (1.6) y (1.7), se concluye que $f'_+(w) = f'_-(w)$ si y sólo si f'_+ es continua en w. Así que E consiste en el conjunto de las discontinuidades de la función creciente f'_+ y por consiguiente es numerable; para más detalles ver [20]. En $I \backslash E$, f'_+ es continua, así f' coincide con f'_+ en $I \backslash E$ y también es continua allí.

$\square$

Ahora daremos una representación de una función convexa mediante una integral, se pueden tomar en el sentido de Riemann o de Lebesgue.

Teorema 1.11 (Ver [25]) *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa [estrictamente convexa] si y sólo si existe una función $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ creciente [estrictamente creciente] y un punto $d \in (a, b)$ tal que para todo $x \in (a, b)$,*

$$f(x) - f(d) = \int_d^x g(t)\, dt. \tag{1.8}$$

Demostración:

Supóngase que f es convexa, y sean $g = f'_+$ la cual existe y es creciente por el teorema 1.9 y d cualquier punto de (a, b). En virtud del Teorema 1.7, f es absolutamente continua en $[d, x]$. Del teorema clásico de la integral de Lebesgue (Ver [20], p.225) se tiene que

$$f(x) - f(d) = \int_d^x f'_+(t)\, dt = \int_d^x g(t)\, dt.$$

Por otra parte, si f es estrictamente convexa, $g = f'_+$ será estrictamente creciente (Ver Teorema 1.9).

Inversamente, supóngase (1.8) con g una función creciente y sean α y β escalares positivos tales que $\alpha + \beta = 1$; entonces, para $x < y$ en (a, b), se tiene que

$$\alpha f(x) + \beta f(y) - (\alpha + \beta) f(\alpha x + \beta y) = \beta \int_{\alpha x + \beta y}^{y} g(t)\, dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(t)\, dt.$$

$$\begin{aligned}
\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y) &= \alpha f(x)+\beta f(y)-(\alpha+\beta)f(\alpha x+\beta y)\\
&= \beta(f(y)-f(\alpha x+\beta y))-\alpha(f(\alpha x+\beta y)-f(x))\\
&= \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)\,dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)\,dt\\
&\geq \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(\alpha x+\beta y)\,dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(\alpha x+\beta y)\,dt\\
&= \beta g(\alpha x+\beta y)(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha g(\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta y-x)\\
&= g(\alpha x+\beta y)(\beta(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha(\alpha x+\beta y-x))\\
&= g(\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta y-(\alpha x+\beta y))=0.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y)\geq 0$$

para todo $\alpha,\beta\in[0,1]$, $\alpha+\beta=1$ y $x,y\in(a,b)$. Por lo tanto f es convexa. Además, como g es una función creciente se verifican

$$\begin{aligned}
x<t<\alpha x+\beta y \ \text{ entonces } \ g(t)\leq g(\alpha x+\beta y)\\
\alpha x+\beta y<t<y \ \text{ entonces } \ g(\alpha x+\beta y)\leq g(t).
\end{aligned}$$

Por último, se nota que la estimación realizada anteriormente es estricto cuando g es estrictamente creciente.

$\square$

El Teorema anterior demuestra que para una función diferenciable, la convexidad implica que la derivada es creciente. A continuación se presenta otra manera de ver la convexidad de una función.

Teorema 1.12 (Ver [25]) *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b). Entonces f es convexa [estrictamente convexa] si y sólo si f' es una función creciente [estrictamente creciente].*

Demostración:

Supóngase f' una función creciente [estrictamente creciente]. Entonces, el Teorema fundamental del calculo asegura que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\, dt \tag{1.9}$$

para cualquier $c \in (a, b)$, en virtud del Teorema 1.11 se tiene que f es convexa.

Recíprocamente, si la derivada f' es creciente [estrictamente creciente] y existe en todos los puntos del dominio de la función f, entonces de acuerdo con la relación (1.9) y de la aplicación del Teorema 1.11 con $g(t) = f'(t)$ para todo $t \in (a, b)$, se concluye que f es convexa [estrictamente convexa].

□

Corolario 1.13 (Ver [25], [26]) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada en (a, b). Si f es una función convexa en [a,b] si y sólo si $f'' \geq 0$ en (a, b). Además si $f'' > 0$ en (a, b), entonces f es estrictamente convexa en el intervalo (a, b).*

Demostración:

f' es una función creciente si y sólo si f'' es una función no negativa, y si f' es una función estrictamente creciente entonces f'' es una función positiva. Esto combinado con el Teorema 1.12 nos da el resultado.

A continuación daremos un ejemplo que ilustra el Corolario 1.13.

Ejemplo 1.14 Sea $f(x) = x^4$, $x \in (-1, 1)$ se demostrará que $f'' \geq 0$ en $(-1, 1)$. En efecto

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3,\ x \in (-1, 1)$$

y derivando nuevamente,

$$f''(x) = (4x^3)' = 12x^2 \geq 0$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Como $f''(x) \geq 0,\ x \in (-1, 1)$ por el Corolario 1.13 se tiene que f es una función convexa en $(-1, 1)$.

El recíproco del Corolario 1.13 es falso, es decir, el hecho de que f sea estrictamente convexa en (a, b) no implica que $f'' > 0$. En el Ejemplo 1.14 f es estrictamente convexa y no cumple que $f'' > 0$ ya que cuando $x = 0$ entonces $f''(x) = 0$.

La próxima caracterización depende de la idea geométrica que en cualquier punto de la gráfica de una función convexa, existe una recta que se encuentra por debajo o sobre la gráfica (Fig.1.8).

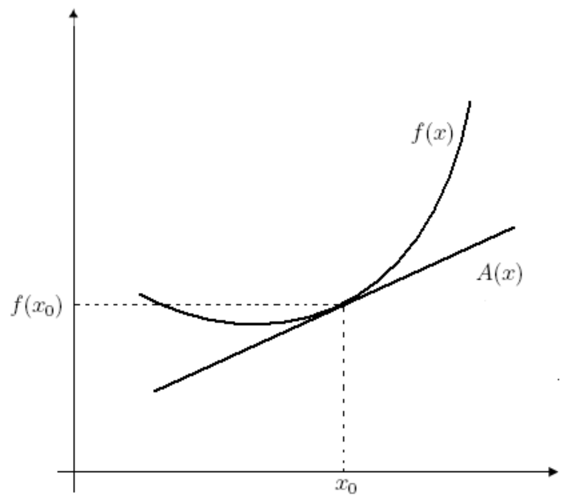


Figura 1.8: Recta de soporte de f en x_0.

Formalmente, se puede escribir que:

Definición 1.15 Sea f una función definida en el intervalo I. f tiene el soporte en $x_0 \in I$, si existe una función afín $A(x) = f(x_0)+m(x-x_0)$ que pasa por $(x_0, f(x_0))$, tal que $A(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

La función afín A es llamada *recta soporte de f en x_0*.

Teorema 1.16 (Ver [25]) *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si existe al menos una recta de soporte de f para cada $x_0 \in (a, b)$.*

Demostración:

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa, $x_0 \in (a, b)$ y $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ tal que si $x > x_0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq m$$

y si $x < x_0$, entonces

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m.$$

En ambos casos se obtiene que $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$. Se denota $A(x)$ como

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Inversamente, se supone que f tiene una recta soporte para cada punto de (a, b), donde $x, y \in (a, b)$. Si $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]$, sea $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ el soporte de la función f en x_0. Entonces,

$$f(x_0) = A(x_0) = \lambda A(x) + (1 - \lambda)A(x) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x)$$

por lo tanto f es convexa.

$\square$

El próximo resultado no es una caracterización de las funciones convexas, pero se relaciona con el Teorema 1.16.

Teorema 1.17 (Ver [25]) *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es diferenciable en x, si y sólo si la recta soporte de f en x_0 es única. Y en este caso,*

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

proporciona este único soporte.

Demostración:

Esta demostración se desprende del Teorema 1.16, es decir, para cada $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ existe una recta de apoyo de f en x_0. Por lo tanto la unicidad de la recta significa $f'_-(x) = f'(x_0)$, es decir, $f'(x_0)$ existe. Por otro lado, si concideramos que $f'(x_0)$ existe; además de cualquier recta de soporte

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

nos da que $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$. Para $x_1 < x_0 < x_2$, se obtiene

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq m \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

considerando límite $x_1 \uparrow x_0$ y $x_2 \downarrow x_0$ se obtiene $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$, la diferenciabilidad en x_0 implica la unicidad de m, por lo tanto, el soporte de A en x_0; es decir; que $m = f'(x_0)$, reescribiendo a $A(x)$,

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

□

1.1.2. Teorema del Sandwich

En 1994, Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem demuestran en [2] el teorema del Sandwich para funciones convexas.

Dadas dos funciones definidas en un intervalo I tal que $f \leq g$. Un problema de interés es determinar si existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ que separe a f y a g, es decir tal que $f \leq h \leq g$. Existen situaciones donde este problema tiene respuesta negativa como son los casos que se muestran en las siguientes figuras (ver [5])

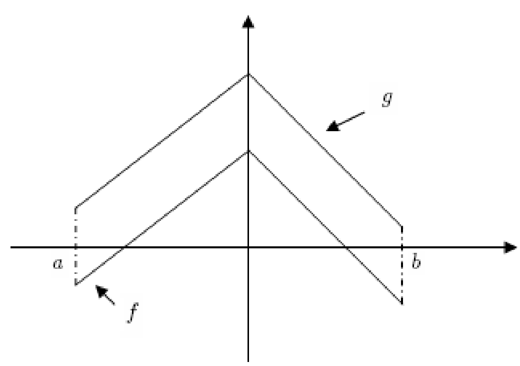


Figura 1.9:

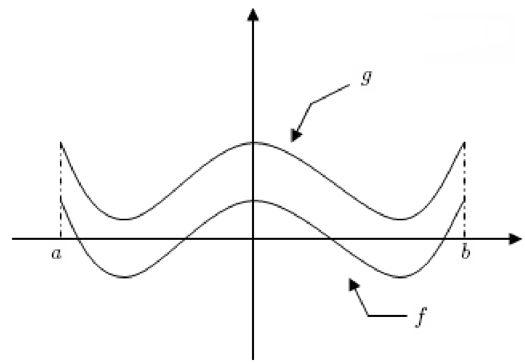


Figura 1.10:

Una situación como la mostrada en la Figura 1.9 ocurre cuando se considera $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 - |x|$ y $g(x) = 2 - |x|$. Si existiese $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ convexa tal que $f \leq h \leq g$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= f(0) = f(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1) \\
&\leq h(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1) \\
&\leq 12h(-1) + \frac{1}{2}h(1) \\
&\leq \frac{1}{2}g(-1) + \frac{1}{2}g(1) \\
&\leq \frac{1}{2}(-|-1| + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-|1| + \frac{1}{2}) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción; por lo tanto, no existe una función convexa que separe a las funciones f y g. Por supuesto, también existen casos donde la función h existe, por ejemplo si f y g son convexas o en una situación como en la ilustrada en la Figura 1.11

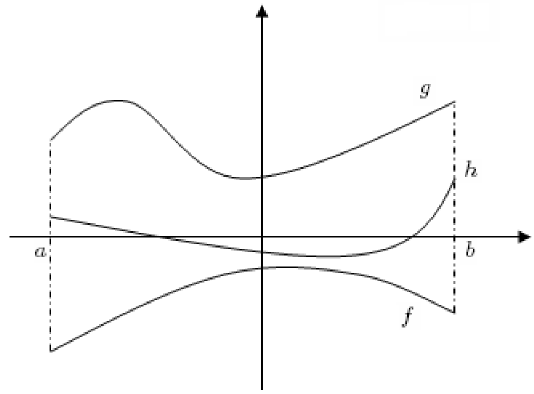


Figura 1.11:

La respuesta del problema que se plantearon fue dada por Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem en el año 1994 [2], quienes dieron una caracterización de las funciones reales que pueden ser separadas por funciones convexas. Para detalles de la demostración del siguiente Teorema se refiere al lector a [2].

Teorema 1.18 *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales que satisfacen*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \quad x, y \in I, \quad t \in [0,1], \tag{1.10}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$ si y sólo si existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$f \leq h \leq g.$$

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 1.18 no puede ser generalizado para funciones definidas en un subconjunto convexo del plano (complejo).

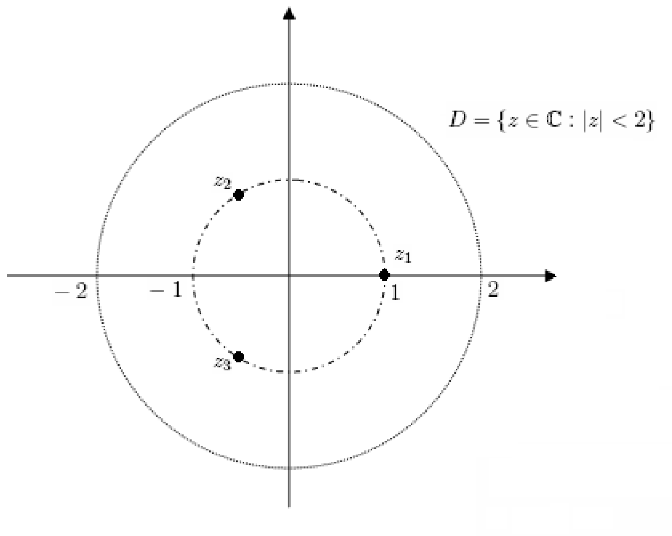


Figura 1.12:

Se puede observar que 0 no es combinación convexa de dos raíces cúbicas de la unidad. En efecto, sean $x, y \in D$ y $t \in (0,1)$, existen dos posibilidades$tx + (1-t)y = 0$, $tx + (1-t)y \neq 0$.

En el primer caso $f(tx + (1-t)y) = 0$, como $tg(x) + (1-t)g(y)$ es una combinación convexa de $g(x), g(y) \in [0,3]$, resulta

$$tg(x) + (1-t)g(y) \geq 0,$$

luego

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

En el segundo caso $x = \dfrac{t-1}{t}y$, $y = \dfrac{t}{1-t}x$ y $f(tx + (1-t)y) = 1$,

$$tg(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3t & \text{si } x \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases} \qquad (1-t)g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3(1-t) & \text{si } y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases}$$

sumando ambas funciones, y considerando que x e y no pueden ser ambas raíces cúbicas de la unidad, resulta que:

$$tg(x) + (1-t)g(y) = \begin{cases} 3(1-t) & \text{si } x \in \{z_1, z_2, z_3\}, \quad y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3t & \text{si } y \in \{z_1, z_2, z_3\}, \quad x \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3 & \text{si } x, y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases}$$

Si $x^3 = 1$, entonces

$$2 \geq |y| = \frac{t}{1-t}|x| = \frac{t}{1-t}$$

que equivale a

$$3 - 3t = 3(1-t) \geq 1.$$

Si $y^3 = 1$, entonces

$$2 \leq |z| = \frac{1-t}{t}$$

y en consecuencia

$$3t \geq 1.$$

Por último si $x^3 \neq 1$ y $y^3 \neq 1$ entonces $f(tx + (1-t)y) = 1 \leq 3$.

Entonces $f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$ para todo $x, y \in D$ y $t \in [0,1]$ para cualquier caso.

Supóngase que existe una función convexa $h : D \to \mathbb{R}$ que satisface que $f \leq h \leq g$. Entonces usando que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, por ser raíces de la unidad, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 = f(0) = f\left(\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\right) &\leq h\left(\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\right) \\ &\leq \frac{1}{3}(h(z_1) + h(z_2) + h(z_3)) \\ &\leq \frac{1}{3}(g(z_1) + g(z_2) + g(z_3)) = 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. La contradicción viene de haber supuesto que existe una función convexa h que satisface que $f \leq h \leq g$.

Si f es una función real definida en I tal que f es convexa entonces se cumple que para todo $\varepsilon > 0$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x)(1-t)f(y) + \varepsilon, \quad x, y \in I, \ t \in [0,1]. \tag{1.11}$$

Recíprocamente si f satisface (1.11) para todo $\varepsilon > 0$ entonces f es convexa.

Sin embargo, existen funciones que satisfacen (1.11) para algún numero positivo ε y esto es lo que se conoce como función ε-convexa realizada en [9] por el estadounidense Donald Hyers en el año 1941. De manera más formal:

2. **Definición 1.20** Sean f una función real definida en I y $\varepsilon > 0$. Se dice que f es ε-convexa si f satisface la desigualdad:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon, \quad x, y \in I, \ t \in [0,1].$$

Con el siguiente ejemplo se ilustra la Definición 1.20 en forma explicita.

Ejemplo 1.21 La función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = -x^2 + 1,$$

es 1-convexa, ya que el mayor valor que toma la expresión $f(tx + (1-t)y)$ es 1 y el menor valor de la expresión $tf(x) + (1-t)f(y) + 1$ es 1, luego

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 1, \quad x, y \in [-1,1], \ t \in [0,1].$$

En el año 1952, D. H. Hyers y S. M. Ulam demuestran en [10] que *si f es una función real definida en $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ε-convexa entonces existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x) - h(x)| \leq k_n \varepsilon, \quad x \in I,$$

donde $k_n = (n^2+3n)/(4n+4)$ y n es la dimensión del espacio donde se encuentra el dominio.

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 1.18.

Corolario 1.22 (Ver [2]) . *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función ε-convexa, entonces existe una función $h : I \to \mathbb{R}$ convexa tal que*

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I.$$

Demostración:

Se considera la función $g(x) = f(x) + \varepsilon$ y como f es una función ε-convexa se tiene

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \quad x, y \in I, \quad t \in [0,1],$$

entonces en virtud del Teorema 1.18 se sigue que existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq h(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) + \varepsilon,$$

restando $\dfrac{\varepsilon}{2}$ en ambos lados se obtiene

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq h(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir,

$$|h(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in I.$$

□

1.1.3. Desigualdad de Tipo Jensen

En ésta sección se desarrollarán desigualdades que generalizan la desigualdad que aparece en la noción de función convexa, dadas por J. W. Jensen en [12] y [11] en el año 1905 y 1906 respectivamente.

Teorema 1.23 (Ver [12], [11]) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i),$$

para todo $x_1, x_2, \ ... \ , x_n \in I$, $t_1, \ ... \ , t_n > 0$ tales que $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

Demostración:

Se fija $x_1, ..., x_n \in I$ y $t_1, ..., t_n > 0$ tales que $t_1 + \cdots + t_n = 1$. Sea $\bar{x} = t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$ y se considera una función $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = a(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$, donde g satisface que $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ y $g(x) \leq f(x), \ \ x \in I$.

Entonces, para todo $i = 1, ..., n$, se obtiene que

$$f(x_i) \geq g(x_i) = a(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x}),$$

multiplicando ambos lados por t_i y aplicando sumatoria se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq a \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq f(\bar{x}).$$

$\square$

A continuación se enuncia y demuestra un teorema análogo al Teorema 1.23, relativo a la forma integral de la desigualdad de Jensen.

Teorema 1.24 (Ver [20] y [22]) *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad, I un intervalo abierto y $\varphi : X \to I$ una función integrable Lebesgue. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces*

$$f\left(\int_X \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x)) d\mu. \tag{1.12}$$

Demostración:

Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función de la forma $g(x) = a(x-m)+f(m)$ que soporta a f en m e integrando sobre X en ambos lados de la desigualdad $f(\varphi(x)) \geq g(\varphi(x))$, para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}\int_X f(\varphi(x)) d\mu &\geq \int_X g(\varphi(x)) d\mu \\ &= \int_X a(\varphi(x) - m) d\mu + \int_X f(m) d\mu \\ &= a \int_X (\varphi(x) - m) d\mu + f(m) \int_X d\mu,\end{aligned}$$

usando el hecho de que X es un espacio de probabilidad, entonces $\int_X d\mu = 1$

$$\begin{aligned}\int_X f(\varphi(x)) d\mu &\geq a\left(\int_X \varphi(x) d\mu - m \int_X d\mu\right) + f(m) \\ &= a(m - m) + f(m) \\ &= f(m),\end{aligned}$$

reescribiendo la última desigualdad y sustituyendo $m = \int_X \varphi(x) d\mu$

$$f\left(\int_X \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x)) d\mu.$$

$\square$

Para cerrar esta sección se dará un ejemplo que ayuda a ilustrar el Teorema 1.24.

Ejemplo 1.25 Sean $\varphi : E \to [0, +\infty)$ y $f(t) := t^p$ con $p \geq 1$. Entonces

$$\left(\int_X \varphi(x) d\mu \right)^p \leq \int_X (\varphi(x))^p d\mu,$$

siempre que las integrales existan. Como los integrandos son positivos, es claro que bastará suponer que φ es integrable y $(\varphi(x))^p$ medible, para evitar integrales infinitas.

1.1.4. Desigualdad de Tipo Hölder

En ésta sección se presentarán desigualdades que generalizan la desigualdad de Hölder para integrales. Esta desigualdad fue descubierta, por primera vez, por L. J. Rogers (1888) en [8], y descubierta independientemente por Hölder (1889). En análisis matemático la desigualdad de Hölder, llamada así debido a Otto Hölder, es una desigualdad fundamental entre integrales y una herramienta indispensable para el estudio de los espacios Lp los cuales son fundamentales para la construcción y compresion de este trabajo especial de grado.

Comenzaremos esta sección enunciando y demostrando el Teorema de Hölder para sumatorias finitas.

Teorema 1.26 (Ver [17]) *Sean $\alpha, \beta, ..., \lambda$ números reales positivos, tales que son n numeros $\alpha + \beta + \cdots + \lambda = 1$. Consideremos las n-uplas de números reales no negativos $(a_1, ..., a_n)(b_1, ..., b_n)\ .\ .\ .\ (t_1, ..., t_n)$. En estas circunstancias se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} a_n^{\alpha} . b_n^{\beta} ... t_n^{\lambda} < \left(\sum_{i=1}^{n} a_n \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_n \right)^{\beta} ... \left(\sum_{i=1}^{n} t_n \right)^{\lambda}.$$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n^{\alpha}.b_n^{\beta}...t_n^{\lambda}}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n\right)^{\alpha}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_n\right)^{\beta}...\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_n\right)^{\lambda}} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_n}\right)^{\beta}...\left(\frac{t_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_n}\right)^{\lambda} \\
&< \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha\frac{a_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n}+\beta\frac{b_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_n}+...+\lambda\frac{t_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_n}\right) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha\frac{a_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_n}+\beta\sum_{i=1}^{n}\alpha\frac{b_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_n}+...+\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha\frac{t_n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_n} \\
&= \alpha+\beta+...+\lambda = 1.
\end{aligned}
$$

Y así tenemos la desigualdad de Hölder para sumatorias finitas

$$
\sum_{i=1}^{n} a_n^{\alpha}.b_n^{\beta}...t_n^{\lambda} < \left(\sum_{i=1}^{n} a_n\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} b_n\right)^{\beta}...\left(\sum_{i=1}^{n} t_n\right)^{\lambda}.
$$

□

A continuación se enuncia y demuestra un teorema análogo relativo a la forma integral de la desigualdad de Hölder, dicha noción es una herramienta de vital importacia para la construción de algunas pruebas presentes en el proximo capitulo.

Teorema 1.27 (Ver [17]) *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ con $p > 1$ y $q > 1$ numeros reales tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f^p y g^q son integrables, entonces $f.g$ es integrable y se tiene la siguiente desigualdad*

$$
\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}
$$

Demostración:

Si $\|f\|_p = 0$ ó $\|g\|_q = 0$ entonces $f = 0$ ó $g = 0$ y el resultado es evidente. Podemos por ende suponer que $0 < \|f\|_p < \infty$ y $0 < \|g\|_q < \infty$ en este caso, basta demostrar la *desigualdad* $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ *pues en caso general podemos considerar*

$$f' = \frac{f}{\|f\|_p} \qquad g' = \frac{g}{\|g\|_q}$$

y deducir la desigualdad para f *y* g *apartir de la correspondiente desigualdad para* f' *y* g'*. En el caso* $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ *si* $a, b \geq 0$ *entonces* $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *la desigualdad resulta inmediata de hecho, integrando la desigualdad*

$$|f(t)g(t)|dt \leq \frac{|f(t)|^p}{p} + \frac{|g(t)|^q}{q}$$

obtenemos

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \frac{1}{p}\|f(t)\|_p^p + \frac{1}{q}\|f(t)\|_q^q = \|f(t)\|_p + \|f(t)\|_q.$$

Así tenemos la desigualdal de Hölder.

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Para cerrar esta sección se dará un ejemplo que ayuda a ilustrar el Teorema 1.27.

Ejemplo 1.28 Para $p = 1$ se reduce a la desigualdad triangular. Si $p > 1$ sea $q = \frac{p}{(p-1)}$. Entonces por la desigualdad de Hölder (1.13) se tiene

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\sum_{k=0}^{n} |b_k||a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sumando miembro a miembro, dividiendo por el factor común de ambos miembros derechos y observando que $(p-1)q = p$ resulta

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.5. Desigualdad de Tipo Hermite-Hadamard

En esta sección presentaremos una de las desigualdades más conocida como desigualdad de Hermite-Hadamard que se derivan de la noción de función convexa.

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa definida en el intervalo I, $a, b \in I$, con $a < b$ entonces:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.14}$$

El lado izquierdo de la desigualdad (1.14) fue demostrado por Jaques Hadamard en 1893 antes de que las funciones convexas fuesen formalmente introducidas. Para funciones con derivadas crecientes en un intervalo cerrado, es algunas veces llamada desigualdad de Hadamard y el lado derecho la desigualdad de Jensen. En 1985, D. S. Mitrinović y I. B. Lacković en [19] señalan que la desigualdad (1.14) es debido a Charles Hermite quien la obtiene en el año 1883, diez años antes que Hadamard.

Esta desigualdad clásica de Hermite-Hadamard juega un rol importante en el análisis de la convexidad ya que trata sus aplicaciones, generalizaciones y refinamientos (para más detalles ver [3],[4],[22] y sus referencias). También se conoce que si f es continua, entonces la desigualdad de Hermite-Hadamard caracteriza la convexidad de f.

A continuación enunciamos y demostramos el Teorema de la desigualdad de Hermite-Hadamard.

Teorema 1.29 (Ver [6]) *Si una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa entonces*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\, ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1.15}$$

para todo $x, y \in \; I,\;\; x < y$. Inversamente, si f es continua y satisface el lado derecho o izquierdo de (1.15) para todo $x, y \in I,\;\; x < y$, entonces es convexa.

Demostración:

El lado derecho de (1.15) se obtiene de integrar la desigualdad (1.2) en el intervalo

[0,1] con respecto a t, tal como sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,dt &\leq \int_0^1 tf(x)\,dt+\int_0^1 (1-t)f(y)\,dt\\ &\leq \frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}\\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2}.\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $s = tx+(1-t)y$ en la integral

$$\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,dt = \frac{1}{x-y}\int_y^x f(s)\,ds,$$

se obtiene el lado derecho la desigualdad (1.15)

$$\frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\,ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Por otra parte, para demostrar el lado izquierdo de la desigualdad (1.15) se realiza la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\,ds &= \frac{1}{x-y}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s)\,ds+\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s)\,ds\right)\\ &= \frac{1}{x-y}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s_1)\,ds_1+\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s_2)\,ds_2\right).\end{aligned}$$

Haciendo los siguientes cambios de variables

$$s_1 = \frac{x+y-t(x-y)}{2} \quad y \quad s_2 = \frac{x+y+t(x-y)}{2},$$

en la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right)+f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right)\right]\,dt,$$

ahora usando la convexidad de la función se llega a la desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right)+f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right)\right]\,dt \geq &\quad \int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right)\,dt\\ = &\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right),\end{aligned}$$

y así se obtiene el lado izquierdo de la desigualdad (1.15)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \;\leq\; \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\,ds.$$

$\square$

A continuación se darán varios ejemplos para ilustrar la impotancia de la desigualdad de Hermite-Hadamard:

Ejemplo 1.30 Sea $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)}$, con $x \geq 0$. Sustituyendo en (1.14) se obtiene

$$\frac{2x}{2+x} \;<\; \ln(1+x) \;<\; \frac{x^2+2x}{2x+2}.$$

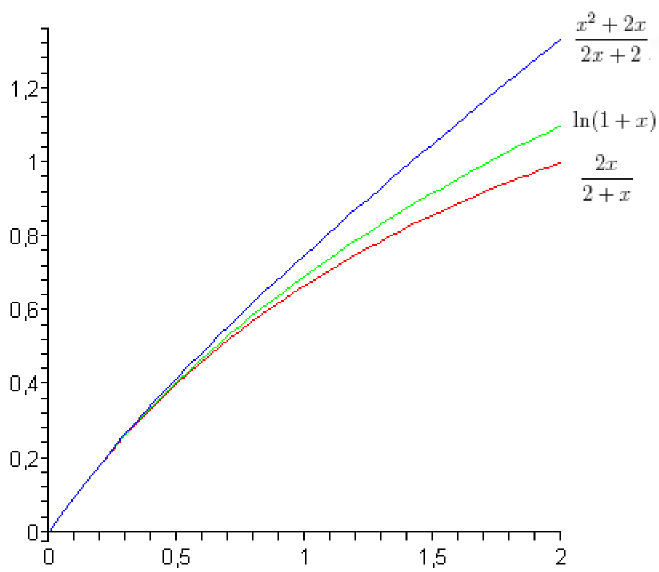


Figura 1.13:

Particularmente,

$$\frac{1}{n+1/2} \;<\; \ln(n+1)-\ln(n) \;<\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ en el intervalo $(n-1,n)$.

En este mismo orden de ideas para demostrar en el siguiente capitulo algunos teoremas que contiene una desigualdad integral del tipo Hermite-Hadamard, se enuncia y prueba el siguiente lema dado por S.S. Dragomir en el año 1988 en [4], dicho lema es una herramienta de vital importancia para la compresión de este trabajo.

Lema 1.31 *Sea $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o; $a, b \in I^o$ con $a < b$, si $f' \in L^1([a,b])$ entonces:*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \tag{1.16}$$

Demostración:

Si consideremos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b} - (1-2t)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du. \end{aligned}$$

Luego sustituyendo I en la ecuacion (1.16)

$$\begin{aligned} &\leq \frac{b-a}{2}\frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \end{aligned}$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt.$$

Así está completa la demostración □

1.2. Conceptos Básicos

En esta sección se presentarán algunas definiciones y conceptos básicos para conseguir una mejor comprensión de este trabajo. Por ejemplo los espacios L^p son los espacios vectoriales normados más importantes en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. Reciben también el nombre de espacio de Lebesgue por el matemático Henri Lebesgue. En esta sección estudiaremos brevemente importantes espacios de funciones reales. Nos restringiremos al caso de funciones definidas en $\mathbb{R}$ y medibles Lebesgue; sin embargo, el caso general de funciones definidas en un espacio de medida $\sigma - finito$ (X, F, μ) puede tratarse en algunos casos de forma similar.

Definición 1.32 Sea M el conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles Lebesgue. Análogamente, si $A \in L(\mathbb{R})$, denotaremos por $M(A)$ al conjunto de funciones $f : A \to \mathbb{R}$ medibles Lebesgue.

Sea $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L^p = L^p(\mathbb{R})$ se define de la siguiente manera

$$L^p = f \in M \; / \int |f|^p dx < \infty. \tag{1.17}$$

En particular, L^1 es el espacio de funciones medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$. Si $A \in L(\mathbb{R})$ entonces

$$L^p(A) = f \in M(A) \; / \int_A |f|^p dx < \infty. \tag{1.18}$$

A continuación enunciamos la definición de la norma para los espacios L^p.

Definición 1.33 Si $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p$ definimos la siguiente norma

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.19}$$

La norma anterior tienes las siguientes propiedades:

i. $\|f\|_p \geq 0$.
ii. $\|f\|_p = 0$ si y solo sí $f = 0$ en c.t.p.
iii. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$.
iv. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Definición 1.34 Si $1 < p, q < \infty$, decimos que p y q son índices conjugados si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por ende podemos decir que $q = \frac{p}{p-1}$ entonces tenemos que

$$L^{\frac{p}{p-1}} = f \in M \; / \int |f|^{\frac{p}{p-1}} dx = f \in M \; / \int |f|^q dx = L^q < \infty. \tag{1.20}$$

Tambien enunciamos la definición de interior de un espacio topologico, dicha definición será de utilidad para la mejor comprension de este trabajo.

Definición 1.35 Sea (X, Γ) un espacio topológico y $I \subset X$. Se define el interior de I (notado $int(I)$ ó I^o) como el abierto más grande (en el sentido de inclusión) contenido en I. Es decir, $V = int(I)$ si y sólo si V es abierto, está contenido en I y todo otro abierto contenido en I está contenido también en V.

1.2.1. Promedios Especiales

En esta seccion presentaremos mediante definiciones algunas nociones y conceptos básicos de las aplicaciones para medias especiales (promedios) esto lo realizaremos con el fin de obtener una mejor compresión de este trabajo; recuerdese que los siguientes medias podrían considerarse extensiones de la aritmética, logarítmicas y logarítmica generalizada de los números reales positivos.

En matemática y estadística, la media aritmética (también llamada promedio o simplemente media) de un conjunto finito de números es el valor característico de una serie de datos cuantitativos objeto de estudio que parte del principio de la esperanza matemática o valor esperado, se obtiene a partir de la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos. Cuando el conjunto es una muestra aleatoria recibe el nombre de media muestral siendo uno de los principales estadísticos muestrales. Expresada de forma más intuitiva, podemos decir que la media (aritmética) es la cantidad total de la variable distribuida a partes iguales entre cada observación.

Definición 1.36 Una función $A : I\text{x}I \to I$ se denomina la media.

$$\min(x, y) \leq A(x, y) \leq \max(x, y).$$

donde $A(x, y) = \frac{x+y}{2}$.

Definición 1.37 Dados los numeros $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, la media aritmetica se define como:

$$\widehat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Proposición 1.38

i. La suma de las desviaciones con respecto a la media aritmética es cero (0)*.*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{x}) = 0.$$

ii. La media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable con respecto a una constante cualquiera se hace mínima cuando dicha constante coincide con la media aritmética.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{x})^2 = 0.$$

iii. Si a todos los valores de la variable se le suma una misma cantidad, la media aritmética queda aumentada en dicha cantidad. Si todos los valores de la variable se multiplican por una misma constante la media aritmética queda multiplicada por dicha constante.

iv. La media aritmética de un conjunto de números positivos siempre es igual o superior a la media geométrica:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

v. La media aritmética está comprendida entre el valor máximo y el valor mínimo del conjunto de datos:

$$\text{mín}\,(a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \text{máx}\,(a_1, a_2, a_3, ..., a_n).$$

Demostración:

i. Veamos que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{x}) = 0.$$

Sabemos que $\widehat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ *entonces* $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \widehat{x} = n\widehat{x} - n\widehat{x} = 0.$

ii. Veamos que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\widehat{x})^2=0.$$

Sabemos por el teorema de Köring

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-K)^2}{n} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\widehat{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\widehat{x}+\widehat{x}^2)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2}{n}\widehat{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widehat{x}^2\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\widehat{x}^2+\widehat{x}^2\\
&= \widehat{x}^2-2\widehat{x}^2+\widehat{x}^2=0.
\end{aligned}$$

iii. Sea $y_i=x_i\pm b$ *entonces* $\widehat{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\pm b)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\pm\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b=\widehat{x}\pm b.$ *Simultaneamente se tiene que si* $y_i=x_ib$ *entonces* $\widehat{y}=\widehat{x}b$; $y_i=\frac{x_i}{b}$ *entonces* $\widehat{y}=\frac{\widehat{x}}{b}$.

Utilizando las propiedades anteriores obtenemos las propiedades iv y v.

En otros términos hay por lo menos un dato que es mayor o igual que la media aritmética.

A continuación presentamos un ejemplo el cual nos ilustrara mejor la noción de media aritmetica para un conjunto de dos puntos.

Ejemplo 1.39 :
Este ejemplo ilustra la media aritmetica para n=2.

$\widehat{x}=A(a,b)=\frac{a+b}{2}$; $a,b\in\mathbb{R}$.

Continuando en este mismo orden presentamos la definición de la media geralizada.

Definición 1.40 La media generalizada es una abstracción de los diversos tipos de media (geométrica, aritmética, armónica, etc). Se define para numeros reales positivos $x_i\geq 0$ como:

$$\widehat{x_m} = \begin{cases} \sqrt[m]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^m}; & m \neq 0 \\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}; & m = 0. \end{cases}$$

En donde el parámetro m indica el tipo media y con $i = 1, \cdots, n.$:
i. Aritmética, con $m = 1$.
ii. Geométrica con $m = 0$.
iii. Armónica con $m = -1$.
vi. Cuadrática con $m = 2$.

Obsérvese que para valores de $m \leq 0$ la expresión sólo tiene sentido si todos los $x_i \geq 0$.
El concepto de media generalizada también puede servir para definir otras aplicaciones mas amplias como por ejemplo:

Ejemplo 1.41 : i. La media logarítmica.

$$L(a,b) = \begin{cases} a, & a = b, \\ \frac{b-a}{ln|b|-ln|a|}; & |a| \neq |b|, \quad a.b \neq 0 \quad con \quad a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ii. La media logaritmica generalizada.

$$L_n(a,b) = \begin{cases} a, & a = b, \\ \left[\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}}; & a \neq b, \quad p \neq -1, \quad p \neq 0, \\ \left(\frac{b-a}{logb-loga}\right); & a \neq b, \quad p = -1, \\ \frac{1}{\exp}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{(b-a)}}; & a \neq b, \quad p = 0. \end{cases}$$

1.2.2. Desigualdad de Potencia Media

En esta sección presentaremos por medio de un Teorema, un resultado importante que será de mucha utilidad en algunas demostraciones posteriores en este trabajo, los medias generalizados son una familia de funciones que agrega una series de números, que incluyen como casos especiales de la aritmética , geométrica y logarítmica . La media generalizada es también conocida como potencia media o media Hölder (el nombre de Otto Hölder).

Definición 1.42 Sean $p_1, \ldots, p_n$ numeros reales positivos, tales que $\sum_{i=1}^{n} p_k = 1$ y $x_1, \ldots, x_n$ numeros reales positivos. Se define la p potencia media de los x_i con $i = 1, \ldots, n$ como:

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \neq 0 \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} & p = 0. \end{cases}$$

Para el caso especial $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ se obtiene

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} & p \neq 0 \\ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} & p = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.43 *Sean $(p_1, \ldots, p_n)$ el vector asociado al peso tal que $p_k \in [0,1]$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$ para $-\infty < s < t < \infty$, se tiene que:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^t\right)^{\frac{1}{t}}. \tag{1.21}$$

La igualdad ocurre si y solo sí $x_1 = \ldots = x_n$.

Demostración:

Para obtener $0 < s < t$, por la desigualdad de Jensen para la función $x \rightarrow x^p$ con $p > 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^p.$$

Con esta desigualdad y las sustituciones $y_k = x_k^s$, $p = \frac{t}{s} > 1$ *se tiene que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^{\frac{t}{s}} \leq \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{\frac{t}{s}}.$$

Así consideramos la t*-ésima raíz da la desigualdad deseada en este caso. Por otra parte, la convexidad estricta de* $x \to x^p$ *para* $p > 1$ *asegura que la igualdad se cumple si y sólo sí* $x_1 = \ \ldots = x_n$.

Para $s < t < 0$, *tenemos* $0 < t < -s$, *a continuación se tiene,*

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k^{-1})^{-t}\right)^{\frac{-1}{t}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k^{-1})^{-s}\right)^{\frac{-1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{t}\right)^{\frac{1}{t}}.
\end{aligned}$$

Para $s < 0 < t$, *y como* $-s > 0$ *entonces*

$$M_0 = \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k (x_k^{-1})^{-s}\right)^{\frac{-1}{s}} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \prod_{k=1}^{n} x_k^{p_k}.$$

Como $t > 0$, *para el resto de los casos* $0 = s < t$, *y* $s < t = 0$, *han sido cubiertos por la misma desigualdad por tanto tenemos*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{s}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^{t}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

$\square$

Asi está completa la prueba de la Desigualdad de Potencia Media, dicha desigualdad es de gran utilidad para la contrucción de este trabajo especial de grado.

1.3. Estimación de la Fórmula Trapezoidal para el Cálculo de Integrales

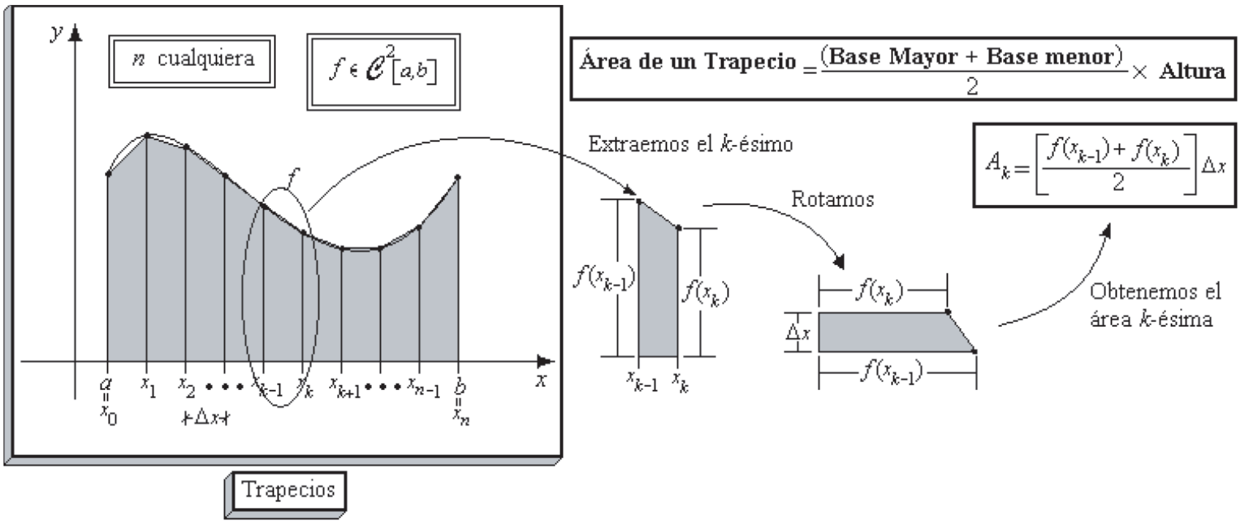
En esta seccion se presentará la Estimación de la Fórmula Trapezoidal para el Cálculo de Integrales y la Estimación del Error de la Fórmula Trapezoidal en cálculo de Integrales, esto se realizara por medio de Teoremas, Definiciones, Ejemplos, entre otros tópicos que se relacionan con estos temas y además nos servirán para el desarrollo de los próximos capítulos en este Trabajo.

En integración numérica, una forma de aproximar una integral definida en un intervalo $[a, b]$ es mediante la regla del trapecio, es decir, que sobre cada subintervalo en el que se divide $[a, b]$ se aproxima f por un polinomio de primer grado, para luego calcular la integral como suma de las áreas de los trapecios formados en esos subintervalos, el método utilizado para la regla de Simpson sigue la misma filosofía, pero aproximando los subintervalos de f mediante polinomios de segundo grado.

En análisis numérico, la regla o método de Simpson (nombrada así en honor de Thomas Simpson) y a veces llamada regla de Kepler es un método de integración numérica que se utiliza para obtener la aproximación de algunas integrales.

La regla trapezoidal es la primera de las fórmulas de integración cerrada de Newton-Cotes. Las formulas de integración de Newton-Cotes son los esquemas de integración numérica mas comunes, se basan en la estrategia de remplazar una función complicada o datos tabulados con una función aproximada que sea fácil de integrar. El objetivo es resolver el problema de cálculo del área bajo la curva entre dos límites conocidos, dividiendo en n sub áreas para calcular su valor asumiendo cada sub área como un pequeño trapecio.

Tanto en el caso de Riemann, como en el caso del método de la bisección, se consideran funciones constantes (polinomios de grado cero) en cada subintervalo, esto para construir áreas de rectangulos. Consideremos ahora, polinomios de primer grado (rectas) en cada subintervalo, esto geométricamente generará trapecios y la aproximación de la integral se obtendrá por sumas de áreas de trapecios. Para encontrar una fórmula adecuada, trataremos de generalizar el área de todos estos trapecios. Veamos entonces, cual es el área del k-ésimo trapecio. Todos los puntos de la partición evaluados en la función son, o la base mayor o la menor de cada uno de los trapecios, por tanto resulta indistinto colocar cual es cual. Se quiere, una función de la geometría clásica, observando la siguiente figura tenemos el área del k-ésimo trapecio para cada $1 \leq k \leq n$.

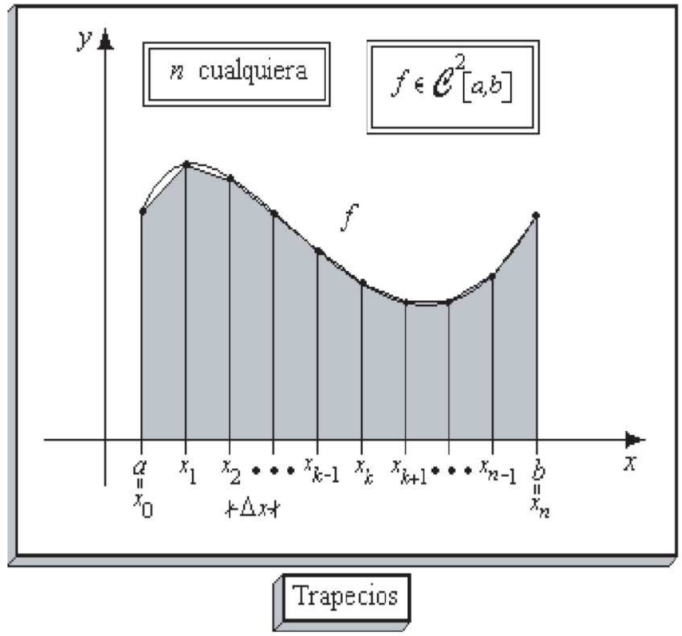


Para el caso de los trapecios, necesitamos no sólo que la función sea continua, sino, de clase C^2 en $[a, b]$ (lo utilizaremos más adelante para acotar el error). Por tanto, si P es una partición uniforme, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=1}^{n-1} A_k \\
&= \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right]\Delta x + \left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]\Delta x + ... + \left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]\Delta x \\
&= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3)+...+f(x_{n-1})+f(x_n)] \\
&= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(x_n)\right].
\end{aligned}
$$

Entonces, si $f \in C^2[a, b]$ y P es una partición uniforme de $[a, b]$, tenemos que la fórmula trapezoidal para la función f viene dada por:

$$
\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(x_n)\right].
$$



1.3.1. Estimación del Error de la Fórmula Trapezoidal en el Cálculo de Integrales

En esta sección presentaremos un resultado importante ya que cada vez que aproximamos usando la regla de estimación trapezoidal para el cálculo de integrales, el error que se comete lo podemos estimar.

Una estimacion del error trapezoidal para el calculo de integrales es

$$E_n^{\Gamma}(f) := I(f) - \Gamma_n(f) = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(c_n);$$

donde $h = \frac{(b-a)}{n}$, $c_n \in [a,b]$, P_n es un polinomio que interpola los nodos de $f(x)$.

La fórmula anterior se utiliza para acotar el error $E_n^{\Gamma}(f)$, sustituyendo $f''(c_n)$ por su mayor valor posible en el intervalo $[a,b]$, donde

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

y

$$\Gamma_n(f) = I(P_n) = \int_a^b P_n(x)dx = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

se fundamenta en

$$\int_a^b f(x)dx - h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) = -\frac{h^3}{12}f'(c) \tag{1.22}$$

donde $c \in [a,b]$.

Demostración:

Comenzaremos a demostrar la fórmula para la estimación del error trapezoidal

$$\begin{aligned}
E_n^{\Gamma}(f) &= \int_a^b f(x)dx - \Gamma_n(f) \\
&= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx - \Gamma_n(f) \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - h\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right) \\
&+ \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - h\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right) \\
&+ \ldots \\
&+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - h\left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando la igualdad (1.22) a cada uno de los sumandos anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned}
E_n^{\Gamma}(f) &= -\frac{h^3}{12}f''(t_1) - -\frac{h^3}{12}f''(t_2) - \ldots - -\frac{h^3}{12}f''(t_n) \\
&= -\frac{h^2}{12}(hf''(t_1) + hf''(t_2) + \ldots + hf''(t_n)) \\
&= -\frac{h^2}{12}(b-a)\frac{(f''(t_1) + f''(t_2) + \ldots + f''(t_n))}{n} \\
&= -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(c_n)
\end{aligned}$$

las constantes desconocidas $t_1, ..., t_n$ están localizadas en los intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$ respectivamente y $c_n \in [a, b]$.

La última igualdad es consecuencia del teorema de los valores intermedios para funciones continuas, cuyo enunciado y prueba presentamos a continuación.

Teorema 1.44 *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$. Sean $m = min_{x\in[a,b]}f(x)$ y $M = max_{x\in[a,b]}f(x)$. Entonces para cada valor y_0 que cumple $m \leq y_0 \leq M$, existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = y_0$. Luego al aplicar este resultado a la función $f''(x)$ que suponemos continua en $[a, b]$. En efecto, $m = min_{x\in[a,b]}f''(x)$ y $M = max_{x\in[a,b]}f''(x)$ entonces*

$$m \leq \frac{f''(t_1) + f''(t_2) + ... + f''(t_n)}{n} \leq M.$$

Por tanto existe $c_n \in [a, b]$ tal que

$$f''(c_n) = \frac{f''(t_1) + f''(t_2) + ... + f''(t_n)}{n}.$$

Para obtener una estimación del error trapezoidal, obsérvese que

$$hf''(t_1) + hf''(t_2) + ... + hf''(t_n)$$

es una suma de Riemann para la integral

$$\int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$$

cuando $n \to 1$ estas sumas de Riemann convergen a la integral. Entonces

$$\begin{aligned} E_n^\Gamma(f) &= -\frac{h^2}{12}(hf''(t_1) + hf''(t_2) + ... + hf''(t_n)) \\ &= -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx \\ &= -\frac{h^2}{12}f'(b) - f'(a). \end{aligned}$$

□

Observación 1.45 Estimación del error se dice asintótica ya que mejora conforme n aumenta. Es tan fácil de calcular como lo sea f'.

A continuación presentaremos varios ejemplos con el fin de familiarizarnos e ilustrar la Estimación del Error de la Fórmula Trapezoidal en el Cálculo de Integrales.

Ejemplo 1.46 Determine n, tal que, la regla trapezoidal de un error menor que 0,005, al aproximar la integral

$$\int_2^4 \frac{1+x}{1-x}dx.$$

Solución:

Sabemos que $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{x+1}{x-1} = -\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$, de donde obtenemos que

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

por consiguiente, el valor de M buscado es justamente 4 (Ver Figura 1.14).

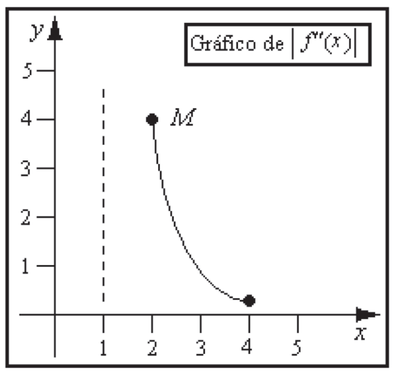


Figura 1.14:

Entonces si $E_n < 0{,}005$, tenemos que

$$\frac{4(4-2)^3}{12n^2} < 0{,}005 \Rightarrow n^2 > \frac{4{,}2^3}{12.(0{,}005)} \Rightarrow n^2 > 533.\widehat{3} \Rightarrow n > 23{,}09401077 \Rightarrow n \geq 24.$$

Ejemplo 1.47 Determine n, tal que, la regla trapezoidal de un error menor que 0,001, al aproximar la integral y use este valor para calcular dicha aproximación

$$\int_2^4 ln(x)dx.$$

Solución:

Sabemos que $f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, de donde obtenemos que el valor de M, está dado por $\frac{1}{4}$ (Ver Figura 1.15).

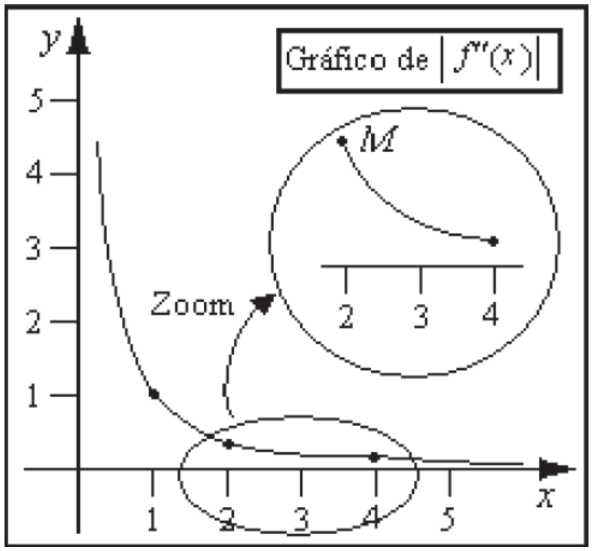


Figura 1.15:

Entonces, si $E_n < 0;001$, tenemos que

$$\frac{\frac{1}{4}(4-2)^3}{12n^2} < 0{,}001 \Rightarrow n^2 > \frac{\frac{1}{4},2^3}{12.(0{,}001)} \Rightarrow n^2 > 166.\widehat{6} \Rightarrow n > 12{,}90994449 \Rightarrow n \geq 13.$$

Consideremos entonces, $n = 13$ y construyamos la tabla de apoyo a la cuenta, con $\Delta x = \frac{2}{13}$.

k	x_k	$f(x_k)$	$\#_T$	$\#_T f(x_k)$
0	2	$\ln 2$	1	$\ln 2$
1	$\frac{28}{13}$	$\ln \frac{28}{13}$	2	$2\ln \frac{28}{13}$
2	$\frac{30}{13}$	$\ln \frac{30}{13}$	2	$2\ln \frac{30}{13}$
3	$\frac{32}{13}$	$\ln \frac{32}{13}$	2	$2\ln \frac{32}{13}$
4	$\frac{34}{13}$	$\ln \frac{34}{13}$	2	$2\ln \frac{34}{13}$
5	$\frac{36}{13}$	$\ln \frac{36}{13}$	2	$2\ln \frac{36}{13}$
6	$\frac{38}{13}$	$\ln \frac{38}{13}$	2	$2\ln \frac{38}{13}$
7	$\frac{40}{13}$	$\ln \frac{40}{13}$	2	$2\ln \frac{40}{13}$
8	$\frac{42}{13}$	$\ln \frac{42}{13}$	2	$2\ln \frac{42}{13}$
9	$\frac{44}{13}$	$\ln \frac{44}{13}$	2	$2\ln \frac{44}{13}$
10	$\frac{46}{13}$	$\ln \frac{46}{13}$	2	$2\ln \frac{46}{13}$
11	$\frac{48}{13}$	$\ln \frac{48}{13}$	2	$2\ln \frac{48}{13}$
12	$\frac{50}{13}$	$\ln \frac{50}{13}$	2	$2\ln \frac{50}{13}$
13	4	$\ln 4$	1	$\ln 4$
$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	**Total**	28,05907204

Entonces, tenemos que

$$\int_2^4 ln(x)dx \approx \frac{2}{26}\left[ln(2) + 2\sum_{k=1}^{13} ln(x_k) + ln(4)\right] \approx \frac{1}{13}.(28{,}05907204) \approx 2{,}158390157.$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$\int_2^4 ln(x)dx = x(ln(x) - 1)|_2^4 = 4(ln(4) - 1) - 2(ln(2) - 1) \approx 2{,}158883083.$$

Lo cual nos da exactamente, el entero y tres decimales.
¿Por qué nos dan tres decimales y no dos como lo pedía la cota del error?
La respuesta a esta pregunta, se encuentra en la forma que sacamos la cuenta en la tabla, tratando de realizar la menor cantidad de aproximaciones.

CAPÍTULO 2

DESIGUALDADES DEL TIPO HERMITE-HADAMARD

En este capítulo se presentan algunas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas son convexas, esto se realizará por medio de Teoremas, Definiciones, Proposiciones, entre otros tópicos que se relacionan con estos temas y además nos servirán para el desarrollo del próximo capítulo en este Trabajo Especial de Grado [13].

En el año 2008 fue demostrado por Dragomir y Agarwal en [4], el Teorema (2.1) en [1] y contiene una desigualdad integral del tipo Hermite-Hadamard.

Teorema 2.1 *Sea $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o; $a, b \in I^o$ con $a < b$. Si $\mid f' \mid$ es convexa en $[a, b]$, entonces tenemos la siguiente desigualdad:*

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{(b-a)(\mid f'(a) \mid + \mid f'(b) \mid)}{8}. \tag{2.1}$$

Demostración:

Considerando la ecuación (1.16), dado que $a < b$ entonces $b-a > 0$ por hipótesis, entonces:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(u)du\right| &= \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right| \\ &= \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|.\end{aligned}$$

Como f es una función diferenciable,

$$\frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|(1-2t)f'(ta+(1-t)b)\right| dt.$$

Luego dado que $|\ f'\ |$ es una función convexa, se tiene que

$$\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)\left[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|\right]dt = \frac{b-a}{2}\left[|f'(a)|\int_0^1 |1-2t|tdt + |f'(b)|\int_0^1 |1-2t|(1-t)dt\right].$$

Ahora, calculando las integrales involucradas en la expresión anterior

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t|tdt &= \int_0^1 |t-2t^2|dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (t-2t^2)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-2t^2)dt \\ &= \frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |1-2t|(1-t)dt &= \int_0^1 |1-2t|dt - \int_0^1 |1-2t|tdt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (t-2t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-2t)dt - \frac{1}{4} \\ &= t-t^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left(t-t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right) - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{(b-a)(\mid f'(a)\mid + \mid f'(b)\mid)}{8}.$$

$\square$

En el año 2007 en [14] Kirmaci, Bakula, Özdemir y Pecaric demostraron el siguiente teorema para desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas son cóncavas.

Teorema 2.2 *Sea $f: I \to \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$, $a < b$. Si $\mid f' \mid^q$ es cóncava en $[a,b]$ para algún $q > 1$, entonces:*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right). \tag{2.2}$$

Demostración:

Considerando la ecuación (1.16), dado que $a < b$ entonces $b-a > 0$ por hipótesis, entonces:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| = \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|.$$

Como f es una función diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}
&= \frac{b-a}{2}\left|\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\, f' \,|ta+(1-t)b|\, dt \\
&= \frac{b-a}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt\right].
\end{aligned}$$

Ahora, calculando las integrales involucradas en la expresión anterior

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt$$
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right| dt.$$

Por otra parte, usando la desigualdad integral de Hölder (1.13) con $q>1$ y $p=\frac{q}{q-1}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(1-2t)\left|f'(ta+(1-t)b)\right|dt \leq \left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Luego como $|f'|^q$ es una función cóncava en $[a,b]$, podemos utilizar la desigualdad de Jensen (1.12) y en efecto se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt &= \frac{1}{t^0}\int_0^{\frac{1}{2}}t^0\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\\
&\leq \frac{1}{t^0}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^0dt\right)\left|f'\left(\frac{1}{\int_0^{\frac{1}{2}}t^0dt}\int_0^{\frac{1}{2}}t^0(ta+(1-t)b)dt\right)\right|^q\\
&= \frac{1}{2}\left|f'\left(2\int_0^{\frac{1}{2}}(ta+(1-t)b)dt\right)\right|^q\\
&= \frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q.
\end{aligned}$$

Análogamente, para la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt &= \frac{1}{t^0}\int_{\frac{1}{2}}^1t^0\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\\
&\leq \frac{1}{t^0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1t^0dt\right)\left|f'\left(\frac{1}{\int_{\frac{1}{2}}^1t^0dt}\int_{\frac{1}{2}}^1t^0(ta+(1-t)b)dt\right)\right|^q\\
&= \frac{1}{2}\left|f'\left(2\int_{\frac{1}{2}}^1(ta+(1-t)b)dt\right)\right|^q\\
&= \frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q.
\end{aligned}$$

Así, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2}\Bigg[\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)\\
&+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-2t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f'(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)\Bigg]\\
&\leq\left[\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\frac{1}{2}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right]\\
&=\frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2(2q-1)}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right].
\end{aligned}$$

Entonces

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right).$$

$\square$

En el año 2008 en [15], Kirmaci obtiene el siguiente teorema y corolario relacionado con desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas son cóncavas.

Teorema 2.3 *Sea $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o; $a, b \in I^o$ con $a < b$ y con $p > 1$. Si la función $\mid f' \mid^p$ es cóncava en $[a, b]$, entonces se tiene:*

$$\begin{aligned}
&\left|f(ca+(1-c)b)(B-A)+f(a)(1-B)+f(b)A-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\\
&\leq(b-a)\left[K\left|f'\left(\frac{aT+b(K-T)}{K}\right)\right|+M\left|f'\left(\frac{aN+b(M-N)}{M}\right)\right|\right].
\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $K=\frac{A^2+(C-A)^2}{2}$, $T=\frac{A^3+C^3}{3}-\frac{AC^2}{2}$, $M=\frac{(B-C)^2+(1-B)^2}{2}$, $N=\frac{B^3+C^3+1}{3}-\frac{(1+C)^2B}{2}$.

Demostración:

Sea S una función definada de la forma

$$S(t)=\begin{cases} t-A & si\, t\in[0,c],\\ t-B & si\, t\in(c,1].\end{cases}$$

Si integramos por partes utilizando el cambio de variable $x = ta + (1-t)b$, tenemos

$$\int_0^1 S(t)'(ta+(1-t)b)dt \quad = \quad \int_0^c (t-A)'(ta+(1-t)b)dt + \int_c^1 (t-B)'(ta+(1-t)b)dt.$$

Luego utilizando la desigualdad (2.3)

$$\left|\frac{1}{b-a} f(ca+(1-c)b)(B-A) + f(a)(1-B) + f(b)A - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$= \int_0^c |t-A||f'ta+(1-t)b|dt + \int_c^1 |t-B||f'ta+(1-t)b|dt.$$

Luego usando la concavidad de $|f'|^p$ y la desigualdad integral de Jensen (1.12) se tiene la siguiente desigualdad

$$\int_0^c |t-A||f'ta+(1-t)b|dt \leq \left(\int_0^c |t-A|dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^c |t-A||f'ta+(1-t)b|dt}{\int_0^c |t-A|dt}\right)\right|.$$

Análogamente calculando la otra integral involucrada se tiene

$$\int_0^c |t-B||f'ta+(1-t)b|dt \leq \left(\int_0^c |t-B|dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^c |t-B||f'ta+(1-t)b|dt}{\int_0^c |t-B|dt}\right)\right|.$$

Ahora calculando las integrales involucradas obtenemos

$$K = \int_0^c |t-A|dt = \int_0^A (t-A)dt + \int_A^c (t-A)dt = \frac{A^2+(c-A)^2}{2}$$
$$T = \int_0^c |t-A|dt = \int_0^A (t-A)dt + \int_A^c (t-A)dt = \frac{A^3+c^3}{3} - \frac{Ac^2}{2}$$
$$M = \int_0^c |t-B|dt = \int_0^B (t-B)dt + \int_B^c (t-B)dt = \frac{(B-c)^2+(1-B)^2}{2}$$
$$N = \int_0^c |t-B|dt = \int_0^A (t-B)dt + \int_B^c (t-B)dt = \frac{B^3+c^3+1}{3} - (1-c^2)\frac{B}{2}.$$

Además, podemos calcular

$$K - T = \int_0^c |t-A|(1-t)dt = \int_0^A (t-A)(1-t)dt + \int_A^c (t-A)(1-t)dt$$

$$M - N = \int_0^c |t-B|(1-t)dt = \int_0^B (t-B)(1-t)dt + \int_B^c (t-B)(1-t)dt.$$

Así tenemos

$$\int_0^c |t-A||f'ta+(1-t)b|dt \leq \left(\int_0^c |t-A|dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^c |t-A||f'ta+(1-t)b|dt}{\int_0^c |t-A|dt}\right)\right|$$
$$= K\left|f'\left(\frac{aT+b(K-T)}{K}\right)\right|.$$

Análogamente calculando la otra integral involucrada se tiene

$$\int_0^c |t-B||f'ta+(1-t)b|dt \leq \left(\int_0^c |t-B|dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^c |t-B||f'ta+(1-t)b|dt}{\int_0^c |t-B|dt}\right)\right|$$
$$= M\left|f'\left(\frac{aN+b(M-N)}{M}\right)\right|.$$

Así esta completa la demostración □

Corolario 2.4 *Sea $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o; $a, b \in I^o$ con $a < b$ y con $p > 1$. Si la función $\mid f' \mid^p$ es concava en $[a, b]$ utilizando el Teorema 2.3 para los siguientes valores $A = B = C = \frac{1}{2}$, se tiene que:*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right) + f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right]. \tag{2.4}$$

Demostración:

Por el Teorema 2.3 se tiene

$$\left|f(ca+(1-c)b)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + f(a)\left(1-\frac{1}{2}\right) + f(b)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq (b-a)\left[K\left|f'\left(\frac{aT+b(K-T)}{K}\right)\right| + M\left|f'\left(\frac{aN+b(M-N)}{M}\right)\right|\right]$$

luego sustiyendo los siguientes valores $A = B = C = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\left|f(ca+(1-c)b)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + f(a)\left(1-\frac{1}{2}\right) + f(b)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \ (b-a)\left[\left(\frac{1}{8}\right)\left|f'\left(\frac{a(\frac{1}{48})+b(\frac{1}{8}-\frac{1}{48})}{\frac{1}{8}}\right)\right| + \left(\frac{1}{8}\right)\left|f'\left(\frac{a(\frac{-7}{8})+b(\frac{1}{8}-\frac{7}{48})}{\frac{1}{8}}\right)\right|\right]$$
$$\leq \ \frac{(b-a)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{(\frac{a}{48})+b(\frac{5}{48})}{\frac{1}{8}}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{a(\frac{5}{48})+b(\frac{1}{48})}{\frac{1}{8}}\right)\right|\right]$$
$$\leq \ \frac{(b-a)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|\right].$$

Así, se tiene que

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)+f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right].$$

$\square$

Los últimos resultados obtenidos son generalizaciones sobre la desigualdad de Hermite-Hadamard, para obtener dichos resultados y las generalizaciones debemos ver [1], [23] y [24]. Y las referencias dadas en ellos mismos.

2.1. Nuevas Desigualdades de Tipo Hermite-Hadamard

En esta sección con el fin de demostrar nuestros principales teoremas, debemos primero probar el siguiente lema cuyo resultado es importante y necesario para la concepción de este trabajo especial de grado.

Lema 2.5 *Ver [13]*

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $f' \in L[a, b]$ entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du =$$
$$\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt.$$

Demostración:

Observese que

$$J=\frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (t-1)f'(tx+(1-t)a)dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)f'(tx+(1-t)b)dt.$$

Integrando por partes se obtiene que

$$\begin{aligned}
J &= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{(t-1)f(tx+(1-t)a)}{x-a}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a}dt\right] \\
&+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{(t-1)f(tx+(1-t)b)}{x-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b}dt\right] \\
&= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{f(a)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(u)du\right] + \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[-\frac{f(b)}{x-b} - \frac{1}{(x-b)^2}\int_b^x f(u)du\right] \\
&= \frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du.
\end{aligned}$$

□

Luego usando el Lema 2.5 obtenemos el siguiente teorema del cual obtendremos algunos resultados importantes para continuar con la construcción de este trabajo.

Teorema 2.6 *Ver [13]*

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|$ es convexa en $[a,b]$ entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(a)|}{6}\right] \\
&+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(b)|}{6}\right]
\end{aligned}$$

para cada $x \in [a,b]$.

Demostración:

Usando el Lema 2.5 y el módulo se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt \\
&+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt.
\end{aligned}$$

Dado que $|f'|$ es convexo, entonces:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)[t|f'(x)+(1-t)|f'(a)|)]dt\\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)[t|f'(x)+(1-t)|f'(b)|)]dt\\ &= \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(a)|}{6}\right]\\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(b)|}{6}\right].\end{aligned}$$

así está completa la demostración. □

Usando el Teorema 2.6 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.7 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|$ es convexa en $[a,b]$ entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{12}\left(|f'(a)|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right). \tag{2.5}$$

Demostración:

Usando el Teorema 2.6

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\\ &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(a)|}{6}\right]+\frac{(b-x)^2}{b-a}\left[\frac{|f'(x)|+2|f'(b)|}{6}\right]\end{aligned}$$

para cada $x \in [a,b]$.

Si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-(\frac{a+b}{2}))f(b)+((\frac{a+b}{2})-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\\ &\leq \frac{((\frac{a+b}{2})-a)^2}{b-a}\left[\frac{|f'((\frac{a+b}{2}))|+2|f'(a)|}{6}\right]+\frac{(b-(\frac{a+b}{2}))^2}{b-a}\left[\frac{|f'((\frac{a+b}{2}))|+2|f'(b)|}{6}\right]\end{aligned}$$

reescribiendo la expresión

$$\left|\left(\frac{b-a}{2}\right)\frac{f(a)+f(b)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{2|f'(a)|+2|f'((\frac{a+b}{2}))|+2|f'(b)|}{6}\right]$$

luego simplificando se tiene:

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{12}\left(|f'(a)|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right).$$

□

Observación 2.8 Ver [13] En el Corolario 2.7, usando la convexidad de $|f'|$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{b-a}{12}\left(|f'(a)|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right)\\ &\leq \frac{b-a}{12}\left[f(a)+\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(b)\right]\\ &= \left(\frac{b-a}{12}\right)\frac{3}{2}\left(f(a)+f(b)\right).\end{aligned}$$

En consecuencia simplificando se obtiene la desigualdad del Teorema 2.1

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{8}(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

□

Luego usando el Lema 2.5 también obtenemos el siguiente teorema del cual obtendremos algunos resultados importantes para la construcción de este trabajo.

Teorema 2.9 *Ver [13]*

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ es convexa en $[a,b]$ y para algún fijo $q > 1$, entonces se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\\ &\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(a)|^q+|f'(x)|^q]^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2[|f'(x)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right]\end{aligned}$$

para cada $x \in [a,b]$ y con $q = \frac{p}{p-1}$.

Demostración:

Usando la desigualdad conocida como Hölder integral 1.13 y el Lema 2.5, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt + \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Como $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ es convexa, por la desigualdad de Hermite-Hadamard, tenemos

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \leq \frac{|f'(a)|^q + |f'(x)|^q}{2}$$

y

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'(b)|^q + |f'(x)|^q}{2}.$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(a)|^q+|f'(x)|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2[|f'(x)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right]
\end{aligned}$$

así está completa la demostración. □

Usando el Teorema 2.9 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.10 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ es convexa en $[a,b]$ y para algún fijo $q > 1$,* *si consideramos* $x = \frac{a+b}{2}$ *obtenemos la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ \leq\ & \frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\ \leq\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)| + |f'(b)|).\end{aligned}$$

Demostración:

Por el Teorema 2.9 tenemos

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(a)|^q+|f'(x)|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2[|f'(x)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right].\end{aligned}$$

Si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$ *obtenemos*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-\frac{a+b}{2})f(b)+(\frac{a+b}{2}-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2[|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-\frac{a+b}{2})^2[|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right].\end{aligned}$$

Rescribiendo y simplificando la expresión

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|f'(a)|^q+|f'(\frac{a+b}{2})|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(\frac{a+b}{2})|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se obtiene utilizando:
$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n}(a_k)^s + \sum_{k=1}^{n}(b_k)^s$ *para* $(0 \leq s < 1),\ a_1, a_2, a_3, ..., a_n \geq 0;$
$b_1, b_2, b_3, ..., b_n \geq 0,$ *con* $0 \leq \frac{p-1}{p} < 1,$ *para* $p > 1.$

Así tenemos

$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{4}\right) \left[|f'(a)| + \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2} + \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2} + |f'(b)|\right]$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{b-a}{2}\right) [|f'(a)| + |f'(b)|] .$$

□

Luego usando el Teorema 2.9 y el Lema 2.5 obtenemos el siguiente Teorema.

Teorema 2.11 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es concava en $[a,b]$, para algún fijo $q > 1$, entonces la siguiente desigualdad:*

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2 \left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + (b-x)^2 |f'\left(\frac{b+a}{2}\right)|}{b-a}\right]$$

para cada $x \in [a,b]$.

Demostración:

Por el Teorema 2.9, usando el Lema 2.5 y la Desigualdad integral de Hölder 1.13, para $q > 1$ y $\frac{q}{q-1}$, tenemos

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\ &\leq \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Puesto que $|f'|^q$ es cóncava en [a,b], utilizando la Desigualdad de Jensen integral 1.12 se *tiene:*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt &= \int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt \\ &\leq \left| f'\left(\int_0^1 (tx+(1-t)a)dt\right)\right|^q \\ &= \left| f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|^q\end{aligned}$$

rescribiendo obtenemos la desigualdad

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt = \left| f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|^q \tag{2.6}$$

Así análogamente se obtiene que:

$$\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \left| f'\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|^q. \tag{2.7}$$

De la combinación de las desigualdades 2.6 y 2.7 obtenidas anteriormente, tenemos que:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\ \leq &\left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left[\frac{(x-a)^2 \left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + (b-x)^2 |f'\left(\frac{b+a}{2}\right)|}{b-a}\right]\end{aligned}$$

así está completa la demostración. □

En este mismo orden usando el Teorema 2.11 obtendremos la siguiente observación.

Observación 2.12 Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es concava en $[a,b]$, para algún fijo $q > 1$, entonces si elegimos $x = \frac{a+b}{2}$ se tiene

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right)$$

que es la desigualdad 2.2.

Demostración:

Por el Teorema 2.11 tenemos

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|}{b-a}\right].$$

Si consideramos $x=\frac{a+b}{2}$ tenemos

$$\left|\frac{(b-\frac{a+b}{2})f(b)+(\frac{a+b}{2}-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2\left|f'\left(\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}\right)\right|+(b-\frac{a+b}{2})^2\left|f'\left(\frac{b+a}{2}\right)\right|}{b-a}\right].$$

Rescribiendo y simplificanco la expresión

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{\left(\frac{(a+b)^2}{4}\right)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|}{b-a}\right]\\ &\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{b-a}{4}\right)\left[\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right].\end{aligned}$$

□

Luego usando el Lema 2.5 obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.13 *Ver [13] Sea $f: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f'\in L[a,b]$, donde $a,b\in I$ con $a<b$. Si $|f'|^q$ es convexa en $[a,b]$, y para algun $q\geq 1$, entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(x)|^q+2|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2[|f'(x)|^q+2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right]$$

para cada $x\in[a,b]$.

Demostración:

Supongamos que $q \geq 1$, del Lema 2.5 y usando la conocida desigualdad de la potencia media (1.25), tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)a)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
+\ & \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |f'(tx+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Como $|f'|^q$ es convexa, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)a)|^q dt &\leq \int_0^1 (1-t)[t|f'(x)|^q+(1-t)|f'(a))|^q dt \\
&= \frac{|f'(x)|^q+2|f'(a))|^q}{6}.
\end{aligned}$$

Así análogamente obtenemos que:

$$\int_0^1 (1-t)|f'(tx+(1-t)b)|^q dt \leq \frac{|f'(x)|^q+2|f'(b))|^q}{6}.$$

La combinación de todas las desigualdades obtenidas anteriormente en esta demostración tenemos el resultado deseado

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(x)|^q+2|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}}+(b-x)^2[|f'(x)|^q+2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right]
\end{aligned}$$

para cada $x \in [a,b]$.

Así está completa la demostración □

El siguiente Corolario se obtiene del Teorema 2.13.

Corolario 2.14 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es convexa en $[a,b]$, y para algun $q \geq 1$, si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$, y luego usamos la convexidad de $|f'|$ se tiene:*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq \quad & \left(\frac{b-a}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(2|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(2|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq \quad & \left(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\right)(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|).
\end{aligned}
$$

Demostración:

En virtud del Teorema 2.13 se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2[|f'(x)|^q + 2|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-x)^2[|f'(x)|^q + 2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right].
\end{aligned}
$$

Si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$, y luego usamos la convexidad de $|f'|$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-\frac{a+b}{2})f(b)+(\frac{a+b}{2}-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2[|f'(\frac{a+b}{2})|^q + 2|f'(a)|^q]^{\frac{1}{q}} + (b-\frac{a+b}{2})^2[|f'(\frac{a+b}{2})|^q + 2|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}}{b-a}\right].
\end{aligned}
$$

Reescribiendo y simplificanco la expresión

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
&\leq \left(\frac{(3)^{\frac{-1}{q}}}{2}\right)\left(\frac{b-a}{4}\right)\left[\left(2|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(2|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

Luego usando la convexidad de $|f'|$ se tiene

$$\leq \left(\frac{(3)^{\frac{-1}{q}}}{8}\right)(b-a)\left[2|f'(a)| + \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2} + \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2} + |f'(b)|\right]$$

$$\leq \left(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\right)(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

□

A continuación siguiendo el mismo orden de ideas enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema usando la Desigualdad de Potencia Media (1.25), este resultado nos permitira presentar también la siguiente Observación 2.16.

Teorema 2.15 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es concava en $[a,b]$, y para algun $q \geq 1$, entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2|f'\left(\frac{x+2a}{3}\right)| + (x-b)^2|f'\left(\frac{x+2b}{3}\right)|}{b-a}\right].$$

Demostración:

En primer lugar, observese que por la concavidad de $|f'|^q$ y la desigualdad de la potencia media (1.25), tenemos

$$|f'(tx+(1-t)a)|^q \geq t|f'(x)|^q + (1-t)|f'(a)|^q.$$

Por lo tanto,

$$|f'(tx+(1-t)a)| \geq t|f'(x)| + (1-t)|f'(a)|.$$

Así que $|f'|$ es también cóncava.

Por consiguiente, utilizando el Lema 2.5 y la Desigualdad de Jensen integral 1.12, se *tiene*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)a)|dt+\frac{(b-x)^2}{b-a}\int_0^1(1-t)|f'(tx+(1-t)b)|dt \\
\leq\ & \frac{(x-a)^2}{b-a}\left(\int_0^1(1-t)dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1(1-t)(tx+(1-t)a)dt}{\int_0^1(1-t)dt}\right)\right| \\
+\ & \frac{(b-x)^2}{b-a}\left(\int_0^1(1-t)dt\right)\left|f'\left(\frac{\int_0^1(1-t)(tx+(1-t)b)dt}{\int_0^1(1-t)dt}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2|f'\left(\frac{x+2a}{3}\right)|+(x-b)^2|f'\left(\frac{x+2b}{3}\right)|}{b-a}\right].
\end{aligned}
$$

□

Observación 2.16 Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es concava en $[a,b]$, y para algun $q \geq 1$, si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$ se tiene:

$$
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)+f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right]
$$

que es la desigualdad (2.4).

Demostración:

Usando el Teorema 2.15 tenemos

$$
\left|\frac{(b-x)f(b)+(x-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2|f'\left(\frac{x+2a}{3}\right)|+(x-b)^2|f'\left(\frac{x+2b}{3}\right)|}{b-a}\right].
$$

Si consideramos $x = \frac{a+b}{2}$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{(b-\frac{a+b}{2})f(b)+(\frac{a+b}{2}-a)f(a)}{b-a}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left[\frac{(\frac{a+b}{2}-a)^2|f'\left(\frac{\frac{a+b}{2}+2a}{3}\right)|+(\frac{a+b}{2}-b)^2|f'\left(\frac{\frac{a+b}{2}+2b}{3}\right)|}{b-a}\right].
\end{aligned}
$$

Rescribiendo y simplificanco la expresión

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)}{4}\right)\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)+f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right]\\ &\leq \left(\frac{(b-a)}{8}\right)\left[\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)+f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right].\end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 3

APLICACIONES PARA MEDIAS ESPECIALES

En este capítulo se presentarán algunas aplicaciones para medias especiales; recuerdese que los siguientes medias podrían considerarse extensiones de la media aritmética, media logarítmicas y media logarítmica generalizada para los números reales positivos [18].

(1) La media aritmética:
$A = A(a,b) = \frac{a+b}{2}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) La media logarítmica:

$$L_n(a,b) = \begin{cases} a, & a = b, \\ L(a,b) = \frac{b-a}{ln|b|-ln|a|}; & |a| \neq |b|, \qquad a.b \neq 0 \qquad con \qquad a,b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(3) Lamedialogaritmicageneralizada:$

$$L_n(a,b) = \begin{cases} a, & a = b, \\ \left[\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}}; & a \neq b, \qquad p \neq -1, \qquad p \neq 0, \\ \left(\frac{b-a}{logb-loga}\right); & a \neq b, \qquad p = -1, \\ \frac{1}{\exp}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{(b-a)}}; & a \neq b, \qquad p = 0. \end{cases}$$

Ahora, utilizando las nociones del capítulo anterior, por medio de proposiciones les presentamos algunas aplicaciones para medias especiales de números reales.

Proposición 3.1 *Ver [13] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b, 0 \in \mathbb{R}$ y $n \in Z$, $|n| \geq 2$ entonces para todo $p > 1$*

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq |n|(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} A(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}).$$

Demostración:

La siguiente afirmación se desprende del Corolario 2.10 para $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $\left(L_n^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^n dx\right)$, $n \in Z$, $|n| \geq 2$.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Si consideramos $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in Z$, $|n| \geq 2$ se tiene

$$\left|\frac{(a^n)+(b^n)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b x^n dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}(|(a^n)'| + |(b^n)'|).$$

Resolviendo la integral y las derivadas tenemos

$$\left|A(a^n, b^n) - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right| \leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}|n|\left(\frac{|a|^{n-1} + |b|^{n-1}}{2}\right).$$

Luego usando las aplicaciones para medias especiales obtenemos

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq |n|(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} A(|a|^{n-1} + |b|^{n-1}).$$

□

Proposición 3.2 *Ver [13] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b, 0 \in \mathbb{R}$ y $n \in Z$, $|n| \geq 2$ entonces para todo $p > 1$*

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq |n|(b-a)\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4} A(|a|^{n-1}, |b|^{n-1}).$$

Demostración:

La siguiente afirmación se desprende del Corolario 2.14 para $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in Z$, $|n| \geq 2$.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\Big)(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Si consideramos $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in Z$, $|n| \geq 2$ *se tiene*

$$\left|\frac{a^n+b^n}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b (x^n)dx\right| \leq \Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\Big)(b-a)(|(a^n)'| + |(b^n)'|).$$

Resolviendo la integral y las derivadas tenemos

$$\left|A(a^n, b^n) - \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}\right| \leq \Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4}\Big)(b-a)|n| \left(\frac{|a|^{n-1} + |b|^{n-1}}{2}\right).$$

Luego usando las aplicaciones para medias especiales obtenemos

$$|A(a^n, b^n) - L_n^n(a,b)| \leq |n|(b-a)\Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4}\Big)A(|a|^{n-1} + |b|^{n-1}).$$

$\square$

Proposición 3.3 *Ver [13] Sean* $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b, 0 \in [a,b]$ *entonces para todo* $q \geq 1$

$$|A(a^{-1}, b^{-1}) - L^{-1}(a,b)| \leq (b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} A(|a|^{-2}, |b|^{-2}).$$

Demostración:

La afirmación se desprende de Corolario 2.10 para $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Si consideramos $f(x)=\frac{1}{x}$ se tiene

$$\left|\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{x}\right)dx\right|\leq\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left|\left(\frac{1}{a}\right)'\right|+\left|\left(\frac{1}{b}\right)'\right|\right).$$

Resolviendo la integral y las derivadas tenemos

$$\left|\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}-\frac{1}{b-a}\left(ln\left|\frac{1}{b}\right|-ln\left|\frac{1}{a}\right|\right)\right|\leq(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(|a|^{-2},|b|^{-2})}{2}\right).$$

Reescribiendo la expresión tenemos

$$\left|\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}-\left(\frac{(b-a)}{(ln|b|-ln|a|)}\right)^{-1}\right|\leq(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(|a|^{-2},|b|^{-2})}{2}\right).$$

Luego usando las aplicaciones para medias especiales obtenemos

$$|A(a^{-1},b^{-1})-L^{-1}(a,b)|\leq(b-a)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}A(|a|^{-2},|b|^{-2}).$$

$\square$

Proposición 3.4 *Ver [13] Sean $a,b\in\mathbb{R}$; $a<b, 0\in[a,b]$ entonces para todo $q\geq1$*

$$|A(a^{-1},b^{-1})-L^{-1}(a,b)|\leq(b-a)\left(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4}\right)A(|a|^{-2},|b|^{-2})$$

Demostración:

La afirmación se desprende de Corolario 2.14 para $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|\leq\Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\Big)(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|).$$

Si consideramos $f(x)=\frac{1}{x}$ se tiene

$$\left|\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\frac{1}{x}\right)dx\right|\leq\Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{8}\Big)(b-a)\left(\left|\left(\frac{1}{a}\right)'\right|+\left|\left(\frac{1}{b}\right)'\right|\right).$$

Resolviendo la integral y las derivadas tenemos

$$\left|\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}-\frac{1}{b-a}\left(ln\left|\frac{1}{b}\right|-ln\left|\frac{1}{a}\right|\right)\right| \leq \Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4}\Big)(b-a)\left(\frac{(|a|^{-2},|b|^{-2})}{2}\right).$$

Luego usando las aplicaciones para medias especiales obtenemos

$$|A(a^{-1},b^{-1})-L^{-1}(a,b)| \leq (b-a)\Big(\frac{3^{1-\frac{1}{q}}}{4}\Big)A(|a|^{-2},|b|^{-2}).$$

□

3.1. Estimaciones del Error de la Fórmula Trapezoidal

Por último les presentaremos algunas Estimaciones del Error de la Fórmula Trapezoidal para el Calculo de Integrales, esto se realizará por medio de Teoremas, Definiciones y Proposiciones.

Definición 3.5 Ver [13] La Fórmula Trapezoidal
Sea d una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n - 1 < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = T(f,d) + E(f,d) \tag{3.1}$$

donde

$$T(f,d) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i). \tag{3.2}$$

para está versión $T(f, d)$ denota estimación trapezoidal y $E(f, d)$ denota el error de aproximación asociado a la estimación trapezoidal.

Proposición 3.6 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ es convexa en [a,b] donde $p > 1$. Luego en la Definición 3.5, por cada división d de la partición del intervalo $[a,b]$, la estimación del error trapezoidal satisface:*

$$E(f,d) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} (|f'(x_i)| + |f'(x_{i+1}|).$$

Demostración:

Al aplicar el Corolario 2.10 en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ una partición se tiene

$$\left| \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} - \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \right| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} (|f'(x_i)| + |f'(x_{i+1}|).$$

De ahí, usando la Definición 3.5 tenemos.

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)dx - T(f,d) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right] \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right| \\
&\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} (|f'(x_i)| + |f'(x_{i+1}|).
\end{aligned}$$

Así, por lo tanto

$$E(f,d) = \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} (|f'(x_i)| + |f'(x_{i+1}|).$$

□

Proposición 3.7 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es convexa en $[a,b]$ donde $q > 1$. Luego, en la*

Definición 3.5, por cada división d de la partición del intervalo $[a,b]$, la estimación del error trapezoidal satisface

$$E(f,d) \leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} \left[\left| f'\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right) + f'\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right|\right].$$

Demostración:

Si aplicamos la Observación 2.12 en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ una partición se tiene

$$\left|\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} - \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\right|$$
$$\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{4}\right)\left(\left|f'\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right|\right).$$

Luego usando la definición de la Fórmula Trapezoidal (3.2) y la Proposición 3.6 tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - T(f,d)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{4}(x_{i+1}-x_i)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{4}(x_{i+1}-x_i)\right| \\
&\leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}\left(\left|f'\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

Así, por lo tanto

$$E(f,d) \leq \left[\frac{q-1}{2q-1}\right]^{\frac{q-1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} \left[\left| f'\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right) + f'\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right|\right].$$

$\square$

Proposición 3.8 *Ver [13] Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o tal que $f' \in L[a,b]$, donde $a, b \in I$ con $a < b$. Si $|f'|^q$ es convexa en $[a,b]$ donde $q \geq 1$. Luego, en la*

Definición 3.5, por cada división d de la partción del intervalo $[a, b]$, la estimación del error trapezoidal satisface:

$$E(f,d) \leq \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2\left[\left|f'\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right)+f'\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right)\right|\right]. \tag{3.3}$$

Demostración:

Si aplicamos la Observación 2.12 en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ con $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$ una partición se tiene

$$\left|\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}-\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\right| \leq \frac{(x_{i+1}-x_i)}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right)+f'\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right)\right|\right].$$

Luego usando la definición de la Fórmula Trapezoidal (3.2) y la Proposición 3.6 tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - T(f,d)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx-\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{8}(x_{i+1}-x_i)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx-\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{8}(x_{i+1}-x_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{8}\left[\left|f'\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right)+f'\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right)\right|\right].
\end{aligned}$$

Así, por lo tanto

$$E(f,d) \leq \frac{1}{8}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^2\left[\left|f'\left(\frac{5x_i+x_{i+1}}{6}\right)+f'\left(\frac{x_i+5x_{i+1}}{6}\right)\right|\right]. \tag{3.4}$$

$\square$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo especial de grado se realizó un estudio sobre las nociones de funciones convexas, basado en algunas propiedades de continuidad y diferenciabilidad, además de sus resultados tales como la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Jensen, la desigualdad de Potencia Media y la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard.

También se estudiaron algunos conceptos básicos para los espacios L_p, algunas nociones para Medios Especiales, la estimación de la Fórmula Trapezoidal para el Cálculo de Integrales y la estimación del Error de la Fórmula Trapezoidal en el Cálculo de Integrales.

Luego como punto neurálgico de este trabajo se estudiaron algunas de las nuevas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas son cóncavos o convexos, destacando algunas observaciones de dichas desigualdades evaluadas en el punto medio, obteniendo así algunos resultados importantes.

Además utilizando dichos resultados se presentaron algunas aplicaciones para medias especiales y funciones generalizadas. De igual manera utilizando algunos resultados obtenidos en este trabajo se realizó el estudio de algunas importantes estimaciones del Error que se comete al utilizar la Estimación de la Fórmula Trapezoidal para el Cálculo de Integrales esto con el fin de comprender y mejorar dichas estimaciones.

En el desarrollo de las investigaciones de este trabajo especial de grado han surgido diversos problemas, posiblemente problemas abiertos; a continuación expondremos una selección de aquellos que resultan más relevantes en el contexto de la tesis y que seguramente determinarán de, manera importante la investigación futura que se derivará de este trabajo:

1.- Estudiar la posibilidad de conseguir estimaciones para las funciones:

i) Fuertemente concava ó convexa con módulo c.

ii) Concavas ó convexas de orden superior.

iii) Concavas ó convexas conjunto valuada.

iv) Fuertemente concava ó convexa conjunto valuada con módulo c.

2.- Estudiar la posibilidad de obtener desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyos módulos de las derivadas sean:

i) Fuertemente concava con módulo c..

ii) Concava de orden superior.

iii) Concava conjunto valuada.

iv) Fuertemente concava conjunto valuada con módulo c..

3.- Estudiar el comportamiento de las posibles estimaciones en los puntos 1 y 2, nombrados anteriormente para obtener aplicaciones en las medias especiales vistos en el capítulo 3 de está tesis.

Para finalizar cabe destacar que los resultados expuestos en este trabajo especial de grado están en varios artículos de investigación publicados entre los años $1893 - 2011$ y se puede apreciar este trabajo como una contribución pragmática y pedagógica para la mejor compresión de los temas estudiados.

BIBLIOGRAFÍA

[1] SS. Agarwal, RP: *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula* Appl Math Lett. 11(5), (1998), 91-95.

[2] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity,* Math. Pannonica 5/1 (1994),139-144.

[3] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions,* Math. Inequal. Appl. 6/3 (2003), 379-392.

[4] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications,* RGMIA Monographs, Victoria University, 2002. (ONLINE:HTTP://rgmia.uv.edu.au/monographs/).

[5] B. C. Escobar, *Algunos Teoremas de Separación de Funciones,* Tesis de Grado, Univercidad Nacional Abierta, Vicerectorado Académico, Caracas, 2001.

[6] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann,* J. Math. Pures Appl. 58 (1893), 171-215.

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood , G. Polya, *Inequalities,* Cambridge Mathematical Library, 2nd Edition, 1952, Reprinted 1988.

[8] O. Hölder, *Über einen Mittelwertsatz,* Nachr. Ges. Wiss. Göettingen, (1889), 38-47.

[9] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. , (1941), 27, 222-224.

[10] D. H. Hyers, S. M. Ulam, *Approximately convex functions,* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952). 821-828.

[11] J. L. Jensen, *Om konvese Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier*, Nyt Tidsskr. Math. 16B (1905), 49-69.

[12] J. L. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Math. 30 (1906), 175-193.

[13] H. Kavumarci, M. Avci, M. Ozdemir, *New Inequalities of Hermites-Hadamard type for convex functions with appications*, Journal Inequalities and applications, año (2011).

[14] US. Klarièiæ Bakula, M. Özdemir, ME. Peèariæ, *Hadamard-type inequalities for s-convex functions.* Appl Math Comput. (2007), 193(1), 26-35.

[15] US. Kirmaci, *Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. Computers and Mathematics with Applications.* ,(2008), 55, 485-493.

[16] N. Merentes, N. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions,* Aequationes Mathematicae, 80 (2010), no. 1-2, 193-199.

[17] N. Merentes, S. Rivas, *El desarrollo del concepto de función convexa.* XXVI Escuela Venezolana de Matemáticas. 2013

[18] Yu-Ming Chu y Wei-Feng Xia *Inequalities for generalized logarithmic means*,Jornal of inequalities and applications, 2009.

[19] D. S. Mitrivić, I. B. lacković, *Hermite and convexity,* Aequationes Math. 28 (1985), 229-232.

[20] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable,* Frederick UNGAR Publishing Co. vol. I, New York, 1961.

[21] K. Nikodem, Zs. Páles, *Generalized convexity and separation theorems,* J. Conv. Anal. 14/2 (2007), 239-247.

[22] C. P. Nicculescu, L. -E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach* CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[23] JE. Proschan, F. Tong, *Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications.* Academic Press, New York (1991)

[24] J. Pearce, *Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature* formula. Appl Math Lett. (2000), 13(2), 5155.

[25] A. W. Roberts, D. E. Varberg, *Convex Functions,* Academic Press, New York-London, 1973.

[26] H. R. Romero, *Funciones Convexas*, Tesis de Grado, Universidad Nacional Abierta, Centro Local Zulia, Maracaibo, 1999.

[27] O. Stolz, *Grundzüge der Differential und Integralrechnung,* Vol. 1. Teubner, Leipzig (1893).