UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Espacios de Krein con Núcleos Reproductivos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Erlin Fumero** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Ángel Padilla.

Caracas, Venezuela
octubre 2016

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Espacios de Krein con núcleos reproductivos**", presentado por el **Br. Erlin Fumero**, titular de la Cédula de Identidad **18.529.647**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ángel Padilla
Tutor

Ramón Bruzual
Jurado

Alejandra Aguilera
Jurado

Dedicatoria

Para Leidy.

Para estar contigo fue que logré terminar este trabajo a tiempo.

Agradecimiento

“Pero el asunto mi querido Érlin, es que esto no es matemática, es educación. Y como señaló mi querido Paulo Freire en Pedagogía de la Esperanza, cuando habla que por ser profesor de biología no significa que se debe separar de la realidad histórica-cultural-social-económica de Brasil. Obviamente, debe enseñar biología, pero no a espaldas de esta realidad. Las matemáticas no pueden pasar por encima de esta realidad, no por lo menos cuando se es educador.”

Índice general

Introducción

Las primeras exposiciones de un núcleo definido positivo surgieron como generalización de las funciones definidas positivas en los trabajos de James Mercer [**2**], en los primeros años del siglo XX. En el trabajo de Mercer se consideraron núcleos continuos de operadores integrales definidos positivos y se resolvieron ecuaciones que involucraban al operador integral.

Más recientemente, el matemático francés Laurent Schwartz [**3**] consideró una teoría de espacios de Hilbert continuamente contenidos en espacios localmente convexos quasi-completos y conectó esta teoría con la teoría de espacios de Hilbert con núcleos reproductivos del matemático polaco Nachman Aronszajn [**4**].

Estas caracterizaciones obtenidas por L. Schwartz representan una base para este trabajo, ya que a partir de ellas encontraremos conexiones entre los núcleos hermitianos y la existencia de una descomposición de Kolmogorov de estos núcleos en espacios de Krein con producto interno indefinido.

Estructuramos nuestro Trabajo Especial de Grado de la siguiente forma: En el Capítulo 1 se presentan resultados básicos del análisis funcional, los cuales se estudiaron en la licenciatura y se pueden encontrar en [**6**], [**7**] y [**9**].

En el Capítulo 2 presentamos una brave exposición de los espacios con métrica indefinida y los espacios de Krein que nos servirán de base para el estudio de los núcleos hermitianos y reproductivos.

Finalmente, en el Capítulo 3 estudiaremos los mencionados núcleos hermitianos y reproductivos así como la descomposición de Kolmogorov. Esto nos guía al objetivo central de nuestro Trabajo Especial de Grado que consiste en demostrar la equivalencia entre la existencia de un espacio de Krein con núcleo reproductivo y la existencia de una descomposición de Kolmogorov. Cabe destacar que estos resultados son de la autoría de Tiberiu Constantinescu y Aurelian Gheondea los cuales aparecen en [**8**].

Capítulo 1

Preliminares

1. Espacios métricos y espacios normados

En este capítulo se presentan algunos resultados básicos del análisis funcional los cuales serán útiles para comprender los capítulos sucesivos. En la mayoría de los casos se omiten las demostraciones ya que éstas han sido estudiadas a lo largo de la Licenciatura en Matemática y se pueden encontrar en [**6**] y [**7**].

Definición 1.1. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una *métrica* en $\mathbb{X}$ es una función $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x, y, z \in \mathbb{X}$ se verifica:

(1) $d(x, y) \geq 0$.
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
(3) $d(x, y) = d(y, x)$.
(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Además, se dice que $(\mathbb{X}, d)$ es un *espacio métrico.*

Definición 1.2. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una *norma* en $\mathbb{X}$ es una función $\|\|: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple:

(1) $\| x \| \geq 0$.
(2) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(3) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.
(4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Al par $(\mathbb{X}, \|\|)$ se le llama *espacio normado.*

Observación 1.3. Todo espacio normado da origen a un espacio métrico.

Dado $(\mathbb{X}, \|\|)$ un espacio normado, definimos:

$$d(x, y) = \| x - y \| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{X}.$$

Se puede probar que $(\mathbb{X}, d)$ es un espacio métrico.

A todo espacio métrico se le puede asociar una topología denominada la topología de la métrica. Consideremos $(\mathbb{X}, d)$ un espacio métrico. Sean $x_0 \in X$ y $r > 0$, la bola de centro x_0 y radio r se define por:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X} : d(x, x_0) < r\}.$$

La topología de la métrica es la topología en $\mathbb{X}$ generada por:

$$\mathbb{B} = \{B(x_0, r) : x_0 \in \mathbb{X}, r > 0\}.$$

Por tanto, $A \subseteq \mathbb{X}$ es abierto si y solo si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.

Se tiene que para un espacio normado, la topología inducida por la norma es la topología inducida por la métrica asociada a la norma.

Definición 1.4. Sean $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$ y $(\mathbb{Y}, \|\|_{\mathbb{Y}})$ espacios normados. Consideremos el espacio

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \{(x, y) : x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y}\}$$

con las operaciones

(1) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$; $y_1, y_2 \in \mathbb{Y}$.
(2) $\alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$ para $\alpha \in \mathbb{C}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Al espacio vectorial $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ se le denomina *espacio producto.*

A través de la siguiente proposición se define una norma para el espacio producto.

Proposición 1.5.

Sean $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\|_{\mathbb{Y}})$ *espacios normados. Consideremos* $\| \cdot \|_1$: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la operación definida por:*

$$\| (x, y) \|_1 = \| x \|_{\mathbb{X}} + \| y \|_{\mathbb{Y}}$$

Entonces $(\mathbb{X} \times \mathbb{Y}, \|\|_1)$ *es un espacio normado.*

2. Espacios de Banach

Definición 1.6. Sea $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$ un espacio normado. La sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{X}$ converge a $x \in \mathbb{X}$ si dado $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon > 0$ tal que:

$$\text{si } n > N_\epsilon \text{ entonces } \| x_n - x \|_{\mathbb{X}} < \epsilon.$$

Definición 1.7. Sea $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$ un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{X}$ es de Cauchy si dado $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo par $n, m > N$ se cumple que $\| x_n - x_m \|_{\mathbb{X}} < \epsilon$.

Definición 1.8. Sea $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$ un espacio normado y d la métrica asociada a la norma. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{X}$ es *completo* con respecto a la métrica d si toda sucesión de Cauchy contenida en A converge a un elemento de A.

Definición 1.9. Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo.

Ejemplo 1.10.

(1) $\mathbb{C}$ con la norma usual es un espacio de Banach.
(2) $l_n^p = (\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_p)$ donde
$$\| (x_1, x_2, ..., x_n) \|_p = (\sum_{i=1}^{n} | x_i |_p)^{\frac{1}{p}}$$
para $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach.
(3) $l_\infty^p = (\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_\infty)$ donde
$$\| (x_1, x_2, ..., x_n) \|_\infty = \text{máx}\{| x_1 |, | x_2 |, ..., | x_n |\}$$
para $n \in \mathbb{N}$, es un espacio de Banach.
(4) Para $1 \leq p < \infty$ consideramos
$$l_p = \{\{x_n\}_{n\geq 1} : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p < \infty\}.$$
Si $x = \{x_n\}_{n\geq 1}$ definimos
$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p)^{\frac{1}{p}}$$
Se tiene que l_p con la norma anteriormente definida en un espacio de Banach.

3. Operadores lineales

En este sección se dan resultados relevantes de los operadores lineales en espacios normados. Se comienza definiendo lo que es un operador lineal.

Consideremos $(\mathbb{X}, \|\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\|_{\mathbb{Y}})$ dos espacios normados normados sobre el mismo cuerpo de escalares.

Definición 1.11. Sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$. Se dice que T es una operador lineal si

(1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$.
(2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y todo escalar λ.

Sean $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ dos espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{K}$. Decimos que el operador lineal T es un operador acotado si existe $M > 0$ tal que:

$$\| T(x) \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x \|_{\mathbb{X}} \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Definición 1.12. Sean $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$, $(\mathbb{Y}, \|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ dos espacios normados y $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ un operador lineal. Decimos que T es continuo en $x \in \mathbb{X}$ si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ que converge a x se tiene que $\{T(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge a $T(x) \in \mathbb{Y}$.

De este modo, T es *continuo* en $\mathbb{X}$ si es continuo en todo punto de $\mathbb{X}$.

Definición 1.13. Definimos el espacio $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ como

$$\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \{\text{T: } \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y} \mid \text{T es lineal y continuo}\}$$

Consideremos las operaciones de suma y multiplicación por un escalar en el espacio $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$:

(1) $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
(2) $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Con estas operaciones, $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio vectorial.

A continuación se dará un resultado que muestra la equivalencia entre un operador lineal acotado y un operador lineal continuo.

Teorema 1.14. *Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalente:*

(1) *T es continuo.*
(2) *T es acotado.*

Demostración.

Supongamos que T es acotado. Tenemos que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\| T(x) \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x \|_{\mathbb{X}} \text{ para todo } x \in \mathbb{X}.$$

Sea $x_0 \in \mathbb{X}$ y consideremos $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{X}$ que converge a x_0.

Así, dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N(\epsilon)$ se tiene que

$$\| x_n - x_0 \|_{\mathbb{X}} < \frac{\epsilon}{M}$$

Luego si $n > N(\epsilon)$ entonces

$$\| T(x_n) - T(x_0) \|_{\mathbb{Y}} = \| T(x_n - x_0) \|_{\mathbb{Y}} \leq M \| x_n - x_0 \|_{\mathbb{X}} < \frac{M\epsilon}{M} = \epsilon$$

Por tanto, T es continuo en x_0 y como x_0 es arbitrario, se sigue que T es continuo en $\mathbb{X}$.

Recíprocamente, para probar que si T es continuo implica que T es acotado, procedemos por contradicción. Supongamos que T no es acotado. Es decir, para cualquier constante $n \in \mathbb{N}$ existe algún punto x_n tal que

$$\| T(x_n) \|_{\mathbb{Y}} > n \| (x_n) \|_{\mathbb{X}}$$

Consideremos los vectores

$$z_n = \frac{x_n}{n \| x_n \|_{\mathbb{X}}}$$

con normas

$$\| z_n \|_{\mathbb{X}} = \frac{\| x_n \|_{\mathbb{X}}}{n \| x_n \|_{\mathbb{X}}} = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, se verifica que la sucesión $\{z_n\}_{n \geq 0}$ converge a cero en $\mathbb{X}$. Luego, como T es lineal y continuo, se tiene que $T(z_n) \to T(0) = 0$.

Pero

$$\| T(z_n) \|_{\mathbb{Y}} = \frac{\| T(x_n) \|_{\mathbb{Y}}}{n \| x_n \|_{\mathbb{X}}}$$

y además, como

$$\| T(x_n) \|_{\mathbb{Y}} > n \| (x_n) \|_{\mathbb{X}}$$

se tiene que

$$\| T(z_n) \|_{\mathbb{Y}} > 1.$$

De modo que, $T(z_n)$ no puede converger a cero.

Como llegamos a un resultado contradictorio, la suposición que T no es acotado cuando T es continuo es falsa.

Luego, T debe ser un operador acotado. $\square$

4. Espacios de Hilbert

DEFINICIÓN 1.15. Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un *producto interno* en $\mathbb{X}$ es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que:

(1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$.
(2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in \mathbb{X}$.
(3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.
(4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$.
(5) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$.

Al par $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le denomina *espacio con producto interno o Pre-Hilbert.*

PROPOSICIÓN 1.16. *Sea $(\mathbb{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno. Si definimos para cada $x \in \mathbb{X}$, $\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ entonces $\| \cdot \|$ es una norma en $\mathbb{X}$.*

DEFINICIÓN 1.17. Un *espacio de Hilbert* es un espacio vectorial con producto interno que es completo con respecto a la norma dada por el producto interno.

EJEMPLO 1.18.

(1) $\mathbb{C}$ con el producto usual de números complejos es un espacio de Hilbert complejo.
(2) $\mathbb{C}^n$ con el producto interno dado por
$$\langle z, w \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$
para $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ y $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ en $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert complejo.
(3) El espacio $l_2(\mathbb{N})$ dado por
$$l_2(\mathbb{N}) = \{x = \{x_n\}_{n \geq 1} : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2 < \infty\}$$
es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por
$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$
para $x = \{x_n\}_{n \geq 1}, y = \{y_n\}_{n \geq 1}$ en $l_2(\mathbb{N})$.

El siguiente teorema asegura que un funcional dado por el producto interno en un espacio de Hilbert es lineal y continuo.

Proposición 1.19. *Sea* $(\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio de Hilbert y sea* $y \in \mathbb{H}$. *Se define*

$$f_y : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ por } f_y(x) = \langle x, y \rangle \text{ para cada } x \in \mathbb{H}.$$

Entonces f_y *es un funcional lineal y continuo en* $\mathbb{H}$.

El teorema de representación de Riesz que enunciamos a continuación lo emplearemos en los capítulos sucesivos.

Teorema 1.20 (Teorema de representación de Riesz).

Sea $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* f *un funcional lineal y acotado en* $\mathbb{H}$. *Entonces existe un único* $y \in \mathbb{H}$ *tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in \mathbb{H}.$$

Además, $\| f \| = \| y \|$.

Finalmente, se considera la definición del operador adjunto en espacios de Hilbert.

Si $T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ es un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$, definimos el operador adjunto de T como el único operador T^* lineal y acotado en $\mathbb{H}$ tal que:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

para todo par $x, y \in \mathbb{H}$ y además $\| T \| = \| T^* \|$.

5. Continuidad conjunta

En esta sección se da la definición de continuidad conjunta y se demuestra que el producto interno es una función conjuntamente continua. Para ello, se considera la continuidad en término de sucesiones.

Definición 1.21. Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ y $\mathbb{Z}$ espacios normados. La función $f : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$ se dice que es conjuntamente continua en $(x_0, y_0) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ si para toda sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \geq 1}$ que converge a (x_0, y_0) se cumple que $\{f(x_n, y_n)\}_{n \geq 1}$ converge a $f(x_0, y_0)$.

De este modo, f es una función conjuntamente continua en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ si es conjuntamente continua en todo punto de $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Proposición 1.22.

Sea $\mathbb{H}$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert. El producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ es conjuntamente continuo respecto a la topología producto en $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

Demostración.

Sea $\| \cdot \|$ la norma en $\mathbb{H}$ inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

En $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ consideramos la topología producto y la norma que la induce:

$$\| (v, w) \|_1 = \| v \| + \| w \|$$

Consideremos $\{(v_n, w_n)\}_{n \geq 1} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ una sucesion que converge a $(v, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Esto es, dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon)$ tal que para $n > N(\epsilon)$

$$\| (v_n, w_n) - (v, w) \|_1 = \| (v_n - v, w_n - w) \|_1 = \| v_n - v \| + \| w_n - w \| < \epsilon$$

Las sucesionces $\{v_n\}_{n \geq 1}$ y $\{w_n\}_{n \geq 1}$ convergen a v y w respectivamente en $\mathbb{H}$ ya que

$$\| v_n - v \| \leq \| v_n - v \| + \| w_n - w \| = \| (v_n - v, w_n - w) \|_1 < \epsilon \text{ si } n > N(\epsilon)$$

y

$$\| w_n - w \| \leq \| v_n - v \| + \| w_n - w \| = \| (v_n - v, w_n - w) \|_1 < \epsilon \text{ si } n > N(\epsilon).$$

Luego para $n > N(\epsilon)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
| \langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle | &= | \langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle + \langle v, w_n \rangle - \langle v, w_n \rangle | \\
&= | \langle v_n - v, w_n \rangle + \langle v, w_n \rangle - \langle v, w \rangle | \\
&= | \langle v_n - v, w_n \rangle + \langle v, w_n - w \rangle | \\
&\leq | \langle v_n - v, w_n \rangle | + | \langle v, w_n - w \rangle | \\
&\leq \| v_n - v \| \| w_n \| + \| v \| \| w_n - w \|
\end{aligned}$$

Consideremos dos casos.

<u>Caso 1</u>:

Supongamos que $\| v \| \neq 0$.

Por desigualdad triangular tenemos que

$$\| w_n \| = \| w_n - w + w \| \leq \| w_n - w \| + \| w \| < \epsilon + \| w \|$$

Tomamos entonces

$$\| w_n - w \| < \frac{\epsilon}{2 \| v \|} \text{ y } \| v_n - v \| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + \| w \|)}$$

De esta forma,

$$\| v_n - v \| \| w_n \| + \| v \| \| w_n - w \| < \frac{\epsilon}{2(\epsilon + \| w \|)}(\epsilon + \| w \|) + \| v \| \frac{\epsilon}{2 \| v \|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así, $| \langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle | < \epsilon$ para $n > N$.

De donde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es conjuntamente continua en $(v, w) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

Caso 2:

Supongamos que $\| v \| = 0$.

De esta forma,

$$\| v_n - v \| \| w_n \| + \| v \| \| w_n - w \| = \| v_n - v \| \| w_n \|$$

Como $\| v_n - v \| < \epsilon$, tomemos $\| w_n \| < 1$.

Así

$$\| v_n - v \| \| w_n \| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $| \langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle | < \epsilon$ para $n > N$.

De modo que, por los resultados de los casos 1 y 2 la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es conjuntamente continua en $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$

□

Capítulo 2

Espacios con métrica indefinida

1. Espacios con producto interno

En este capítulo, los productos internos que se consideran son más generales que los utilizados para definir los espacios de Hilbert. El objetivo para esta parte es definir los espacios de Krein.

Definición 2.1. Sea $\Im$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Un *producto interno* en $\Im$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Im \times \Im \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumple:

(1) $\langle \alpha x_1 + x_2, y\rangle = \alpha \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ para todo $x_1, x_2, y \in \Im$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$.
(2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in \Im$.

Al par $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se le llama *espacio con producto interno.*

Ejemplo 2.2. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el siguiente producto interno a valores complejos:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = x_1x_2 - y_1y_2$$

Se puede probar que $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno.

Observación 2.3.

Si $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno entonces $(\Im, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ también lo es y se le conoce como anti-espacio de $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Observación 2.4.

(1) Para cualquier $x \in \Im$ se cumple que $\langle 0, x\rangle = 0$.
(2) Para cualquier $x, y, z \in \Im$ se tiene que $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
(3) Para todo $x \in \Im$, $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$ y por lo tanto, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

La siguiente proposición establece la llamada *fórmula de polarización.*

Proposición 2.5. *Si* $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio con producto interno, entonces*
$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\langle x + y, x + y\rangle - \frac{1}{4}\langle x - y, x - y\rangle + \frac{i}{4}\langle x + iy, x + iy\rangle - \frac{i}{4}\langle x - iy, x - iy\rangle.$

OBSERVACIÓN 2.6. La fórmula anterior implica que un producto interno está determinado por sus valores en la diagonal $\{(x,x) : x \in \Im\}$.

2. Producto interno indefinido, semidefinido y definido

Consideremos primero la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.7. Sean $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $x \in \Im$. Decimos que:

(1) x es *positivo* cuando $\langle x,x\rangle > 0$.
(2) x es *negativo* cuando $\langle x,x\rangle < 0$.
(3) x es *neutro* cuando $\langle x,x\rangle = 0$.

A partir de ésta, establecemos los conceptos de espacio con producto interno indefinido, semidefinido y definido como sigue:

DEFINICIÓN 2.8. Si el espacio con producto interno $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ posee elementos tanto positivos como negativos se dice que el espacio es *indefinido*. En caso contrario, decimos que el espacio con producto interno es *semidefinido*.

Los productos internos semidefinidos tienen sus propias categorías como se ve a continuación:

DEFINICIÓN 2.9. Un producto interno semidefinido puede ser:

(1) *Semidefinido positivo* si $\langle x,x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \Im$.
(2) *Semidefinido negativo* si $\langle x,x\rangle \leq 0$ para todo $x \in \Im$.
(3) *neutro* si $\langle x,x\rangle = 0$ para todo $x \in \Im$.

DEFINICIÓN 2.10. Se dice que un espacio con producto interno $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es *definido* cuando $\langle x,x\rangle = 0$ implica que $x = 0$.

También se dan las definiciones de producto interno definido positivo y negativo como sigue:

DEFINICIÓN 2.11. Se dice que un espacio con producto interno $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es *definido positivo* cuando $\langle x,x\rangle > 0$ para $x \neq 0$. Y es *definido negativo* cuando $\langle x,x\rangle < 0$ para $x \neq 0$.

LEMA 2.12 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Si $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio con producto interno semidefinido entonces*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \, \langle y, y\rangle \text{ para todo } x, y \in \Im.$$

DEMOSTRACIÓN.

Si $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es semidefinido positivo, la prueba es la usual que se presenta cuando se estudian los espacios de Hilbert y se puede encontrar en ([**6**], página 2). Si $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es semidefinido negativo consideramos el producto interno $[\cdot,\cdot] : \Im \times \Im \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$[x, y] = -\langle x, y\rangle \text{ para todo } x, y \in \Im.$$

De esta forma, $[x, y] \geq 0$ para todo $x, y \in \Im$.

Por ende,

$$|\langle x, y\rangle|^2 = |-\langle x, y\rangle|^2 = |[x, y]|^2 \leq ([x, x])([y, y]) = (-\langle x, x\rangle)(-\langle y, y\rangle) = \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle.$$

□

3. Variedades lineales

DEFINICIÓN 2.13. Sea $\Im$ un espacio vectorial y $A \subseteq \Im$ un conjunto no vacío. A es una variedad lineal si $\alpha x + y \in A$ para todo $x, y \in A$, y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $A_1, ..., A_n$ son subconjuntos de $\Im$, la *variedad lineal generada* por $A_1, ..., A_n$ la denotaremos por:

$$\bigvee\{A_1, ..., A_n\}.$$

Si $L_1, L_2, ..., L_n$ son variedades lineales en $\Im$, la variedad lineal generada por ellas, es decir, $\bigvee\{L_1, ..., L_n\}$ se puede escribir como

$$L_1 + L_2 + ... + L_n.$$

A la suma vectorial de variedades lineales linealmente independientes $L_1, L_2, ..., L_n$ se le llama *suma directa* y se denota como

$$L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} ... \dot{+} L_n.$$

DEFINICIÓN 2.14. La variedad lineal L es *definida positiva* si para todo $x \in L \setminus \{0\}$ se cumple que $\langle x, x\rangle > 0$. Del mismo modo, La variedad lineal L es *definida negativa* si para todo $x \in L \setminus \{0\}$ se cumple que $\langle x, x\rangle < 0$.

Si $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio con producto interno definimos los siguientes conjuntos:

(1) $B^o = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle = 0\}$

(2) $B^{oo} = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle = 0,\, x \neq 0\}$

(3) $B^+ = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle \geq 0\ \}$

(4) $B^{++} = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle > 0 \text{ o } x = 0\}$

(5) $B^- = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle \leq 0\ \}$

(6) $B^{--} = \{x \in \Im : \langle x, x\rangle < 0 \text{ o } x = 0\}$

4. Ortogonalidad

Definición 2.15. Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sean $x, y \in \Im$. Se dice que x e y son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$ y lo denotamos por $x \perp y$.

Definición 2.16. Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sean $A, B \subseteq \Im$. Se dice que A y B son conjuntos ortogonales si $x \perp y$ para todo $x \in A$, y para todo $y \in B$; esto se denota por $A \perp B$.

Anteriormente, se había definido la suma directa de variedades lineales. Definamos ahora la suma directa ortogonal de variedades lineales.

Definición 2.17. Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y L una variedad lineal en $\Im$. Si L es la suma de variedades lineales $L_1, L_2, ..., L_n$ ortogonales dos a dos, se dice que L es la *suma ortogonal* de las variedades lineales $L_1, L_2, ..., L_n$ y se denota

$$L = L_1(+)L_2(+)...(+)L_n.$$

Si además la suma es directa, entonces se dice que L es la *suma directa ortogonal* de las variedades lineales $L_1, L_2, ..., L_n$ y se escribe

$$L = L_1(\dot{+})L_2(\dot{+})...(\dot{+})L_n.$$

Definición 2.18. Sea $L \subseteq \Im$ una variedad lineal del espacio con producto interno $\Im$. La variedad lineal $L \cap L^{\perp}$ se denotará por L^o y la llamaremos parte isotrópica de L. Asimismo, a sus vectores los llamaremos vectores isotrópicos de L.

A partir de la definición se puede notar que los vectores isotrópicos son ortogonales a si mismos y por tanto la parte isotrópica de una variedad lineal es neutra.

Si $L^o \neq \{0\}$ se dice que L es una *variedad lineal degenerada.*

Del mismo modo, si $L^o = \{0\}$ se dice que L es una *variedad lineal no degenerada.*

El lema que a continuación presentaremos es una consecuencia de la definición de la parte isotrópica.

LEMA 2.19. *Si $L, L_1, ..., L_n$ son variedades lineales contenidas en el espacio con producto interno $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tales que $L = L_1(\dot{+})...(\dot{+})L_n$ entonces*

$$L^o = L_1^o(\dot{+})...(\dot{+})L_n^o.$$

LEMA 2.20. *Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno semidefinido. La parte isotrópica de $\Im$ es el conjunto de los vectores neutros de $\Im$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $x \in \Im^o$. Tenemos que

$$\Im^o = \Im \cap \Im^\perp$$

De esta forma, x es ortogonal a sí mismo, es decir,

$$\langle x, x\rangle = 0.$$

De modo que x es un vector neutro de $\Im$.

Recíprocamente, consideremos a x como un vector neutro de $\Im$.

Como $\Im$ es semidefinido, podemos hacer uso de la desigualdad de Cauchy-Schwarzt. Así, considerando $y \in \Im$ tenemos

$$|\ \langle x, y\rangle\ | \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\ \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$$

ya que x es neutro.

Como nuestro producto interno es semidefinido, nos queda que

$$\langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo } y \in \Im.$$

Por ende, $x \in \Im^\perp = \Im^o$. □

COROLARIO 2.21. *Si todo vector de $\Im$ es neutro entonces el producto interno en $\Im$ es trivial.*

Demostración.

Como $\Im$ es un espacio con producto interno neutro, se tiene que

$$\langle x, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in \Im.$$

Además, por la fórmula de polarización se sigue que para $x, y \in \Im$,

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \tfrac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle + \tfrac{i}{4}\langle x+iy, x+iy\rangle - \tfrac{i}{4}\langle x-iy, x-iy\rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle = 0$. □

Definición 2.22. Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y $L \subseteq \Im$ una variedad lineal. Consideremos $x \in \Im$. Si existen $y \in L$, $z \in L^{\perp}$ tales que $x = y + z$ decimos que y es una proyección ortogonal de x sobre L.

5. Operadores lineales en espacios con métrica indefinida

Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno.

Sea $D \subseteq \Im$ una variedad lineal y $T : D \longrightarrow \Im$ un operador lineal. A D se le llama dominio de T y se le suele denotar por $D(T)$.

Se dice que T es hermitiano si $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$.

T es una isometría si $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$.

T es una contracción si $\langle T(x), T(x)\rangle \leqslant \langle x, x\rangle$ para todo $x \in D(T)$.

$P : \Im \longrightarrow \Im$ es una proyección si $P = P^2$.

Decimos que P es una proyección ortogonal o un proyector ortogonal si P es una proyección hermitiana.

6. Descomposiciones fundamentales

Definición 2.23. Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Se dice que $\Im$ es *descomponible* si:

$$\Im = S^o (\dot{+}) \Im^+ (\dot{+}) \Im^- \tag{2.1}$$

donde $S^o \subseteq B^o$, $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$.

Toda descomposición de este tipo se llama *descomposición fundamental*.

LEMA 2.24. *Sea* $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio con producto interno descomponible*

$$\Im = S^o(\dot{+})\Im^+(\dot{+})\Im^-$$

donde $S^o \subseteq B^o$, $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$. *Entonces* S^o *es la parte isotrópica de* $\Im$.

DEMOSTRACIÓN.

Tenemos que S^o, $\Im^+$, $\Im^-$ son variedades lineales contenidas en el espacio con producto interno $\Im$ tales que

$$\Im = S^o\ (\dot{+})\ \Im^+\ (\dot{+})\ \Im^-$$

donde $S^o \subseteq B^o$, $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$.

Por el lema (2.20) se cumple que

$$\Im^o = (S^o)^o\ (\dot{+})\ (\Im^+)^o\ (\dot{+})\ (\Im^-)^o$$

$\Im^+$ es una variedad lineal definida positiva y $\Im^-$ es una variedad lineal definida negativa.

Así, $(\Im^+)^o$ y $(\Im^-)^o$ son no degenerados. Esto es,

$$(\Im^+)^o = (\Im^-)^o = \{0\}$$

De modo que $\Im^o = (S^o)^o$.

Como S^o es neutro, su parte isotrópica coincide con el espacio. O sea que, $S^o = (S^o)^o$.

Por tanto, $\Im^o = S^o$.

$\square$

En virtud del resultado anterior, podemos escribir la descomposición fundamental como sigue:

$$\Im = \Im^o\ (\dot{+})\ \Im^+\ (\dot{+})\ \Im^-$$

donde $\Im^o \subseteq B^o$, $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$.

COROLARIO 2.25. *Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno no degenerado es de la forma*

$$\Im = \Im^+\ (\dot{+})\ \Im^-$$

donde $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$.

Demostración.

Como $\Im$ es un espacio con producto interno no degenerado, se tiene que

$$\Im^o = \{0\}.$$

Así, la descomposición fundamental de $\Im$ queda de la forma

$$\Im = \Im^+ \ (\dot{+}) \ \Im^-$$

donde $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$. $\square$

7. Simetrías fundamentales

Sea $(\Im, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno no degenerado y descomponible con descomposición fundamental

$$\Im = \Im^+ \ (\dot{+}) \ \Im^-$$

donde $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$.

Si $x \in \Im$ entonces x se puede descomponer de manera única de la forma

$$x = x^+ + x^- \text{ donde } x^+ \in \Im^+, \ x^- \in \Im^-$$

Definimos los proyectores fundamentales como

$$P^+ x = x^+, \ P^- x = x^-$$

Además, estos proyectores son ortogonales.

Definición 2.26. El operador $J : \Im \longrightarrow \Im$ definido por $J = P^+ - P^-$ se llama *simetría fundamental* asociada a la descomposición fundamental $\Im = \Im^+ \ (\dot{+}) \ \Im^-$.

Lema 2.27. *Sea $(\Im, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interno no degenerado y descomponible con descomposición fundamental*

$$\Im = \Im^+ \ (\dot{+}) \ \Im^-, \ \textit{donde } \Im^+ \subseteq B^{++}, \ \Im^- \subseteq B^{--}.$$

Si J es la simetría fundamental asociada a la descomposición fundamental $\Im = \Im^+ \ (\dot{+}) \ \Im^-$ e I es el operador identidad, se cumple que

(1) $J^2 = I$.

(2) $P^+ = \frac{1}{2}(I + J)$

(3) $P^- = \frac{1}{2}(I - J)$

Demostración.

Demostremos que $J^2 = I$.

$$J^2 = (P^+ - P^-)^2 = (P^+)^2 - P^+P^- - P^-P^+ + (P^-)^2 = P^+ + P^- = I.$$

Ahora, para la parte (2), tenemos que $P^+x = x^+$.

Además, $(P^+P^-)x = P^+(P^-x) = P^+x^- = 0$ y $P^2 = P$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(I+J) &= \tfrac{1}{2}(J^2+J)\\
&= \frac{1}{2}((P^+ - P^-)^2 + P^+ - P^-)\\
&= \frac{1}{2}((P^+)^2 - P^+P^- - P^-P^+ + (P^-)^2 + P^+ - P^-)\\
&= \frac{1}{2}(P^+ + P^- + P^+ - P^-)\\
&= \frac{1}{2}(2P^+)\\
&= P^+
\end{aligned}$$

Para la parte (3) se procede análogamente. □

Proposición 2.28. *El operador J es una isometría hermitiana.*

Demostración.

Sea $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno no degenerado y descomponible con descomposición fundamental

$$\Im = \Im^+ \, (\dot{+}) \, \Im^-$$

donde $\Im^+ \subseteq B^{++}$, $\Im^- \subseteq B^{--}$

Consideremos $x, y \in \Im$. Así, existen únicos $x^+, y^+ \in \Im^+$, $x^-, y^- \in \Im^-$ tales que:

$$x = x^+ + x^-, \;\; y = y^+ + y^-$$

Veamos que el operador J es una isometría:

Sabemos que $\langle x^+, y^- \rangle = \langle x^-, y^+ \rangle = 0$ ya que $\Im^+ \perp \Im^-$ entonces

$$
\begin{aligned}
\langle Jx, Jy \rangle &= \langle (P^+ - P^-)(x), (P^+ - P^-)(y) \rangle \\
&= \langle x^+ - x^-, y^+ - y^- \rangle \\
&= \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^+, y^- \rangle - \langle x^-, y^+ \rangle + \langle x^-, y^- \rangle \\
&= \langle x^+, y^+ \rangle + \langle x^+, y^- \rangle + \langle x^-, y^+ \rangle + \langle x^-, y^- \rangle \\
&= \langle x^+ + x^-, y^+ + y^- \rangle \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned}
$$

Ahora, veamos que el operador J es hermitiano:
Al igual que en el resultado anterior como $\Im^+ \perp \Im^-$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\langle Jx, y \rangle &= \langle (P^+ - P^-)(x), y \rangle \\
&= \langle x^+ - x^-, y^+ + y^- \rangle \\
&= \langle x^+, y^+ > + < x^+, y^- \rangle - \langle x^-, y^+ \rangle - \langle x^-, y^- \rangle \\
&= \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^+, y^- \rangle + \langle x^-, y^+ \rangle - \langle x^-, y^- \rangle \\
&= \langle x^+, y^+ - y^- \rangle + \langle x^-, y^+ - y^- \rangle \\
&= \langle x^+ + x^-, y^+ - y^- \rangle \\
&= \langle x, Jy \rangle
\end{aligned}
$$

$\square$

DEFINICIÓN 2.29. Definimos el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ en $(\Im, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ por

$$\langle x, y\rangle_J = \langle Jx, y\rangle$$

PROPOSICIÓN 2.30. *El producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ es definido positivo en $\Im$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $x \in \Im$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle_J &= \langle Jx, x\rangle \\
&= \langle x^+ - x^-, x\rangle \\
&= \langle x^+ - x^-, x^+ + x^-\rangle \\
&= \langle x^+, x^+\rangle - \langle x^-, x^+\rangle + \langle x^+, x^-\rangle - \langle x^-, x^-\rangle \\
&= \langle x^+, x^+\rangle - \langle x^- - x^-\rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

ya que $x^+ \in \Im^+ \subseteq B^{++}$ y $x^- \in \Im^- \subseteq B^{--}$. □

A $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ se le puede asociar una norma cuadrática llamada J-norma y definida por

$$\| x \|_J = \langle x, x\rangle_J^{\frac{1}{2}}$$

LEMA 2.31.

Sea J la simetría fundamental asociada a la descomposición fundamental

$$\Im = \Im^+ \ (\dot{+})\ \Im^-,$$

entonces:

(1) *$\Im^+$ y $\Im^-$ son $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$-ortogonales.*
(2) *J es una $\|\cdot\|_J$-isometría.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sean $x \in \Im^+$, $y \in \Im^-$. De esta forma,

$$\langle x, y \rangle_J = \langle Jx, y \rangle = \langle x, y \rangle = 0.$$

(2) Sea $x \in \Im$, luego

$$\| Jx \|_J^2 = \langle Jx, Jx \rangle_J = \langle J^2 x, Jx \rangle = \langle x, Jx \rangle = \langle x, x \rangle_J = \| x \|_J^2$$

□

LEMA 2.32.

La J-norma satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $x, y \in \Im$.

Como el operador J es una isometría, y el $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es definido positivo, tenemos que

$$| \langle x, y \rangle | = | \langle Jx, Jy \rangle | = | \langle x, Jy \rangle_J | \leq \| x \|_J \| Jy \|_J = \| x \|_J \| y \|_J.$$

□

8. Topologías en espacios con producto interno

DEFINICIÓN 2.33. Sea $p : \Im \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $\Im$ es un espacio vectorial. Decimos que p es una seminorma si cumple:

(1) $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \Im$.
(2) $p(\alpha x) = | \alpha | p(x)$ para todo $x \in \Im$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
(3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in \Im$.

EJEMPLO 2.34. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\Im$ y considerando $y \in \Im$ entonces

$$p(x) = | \langle x, y \rangle |$$

es una seminorma.

Sea $\{p_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de seminormas en $\Im$. Esta familia induce una topología en $\Im$ de la siguiente manera:

Un conjunto $A \subseteq \Im$ es abierto si y solo si para cada $x \in \Im$ existe una cantidad finita γ_1,...,$\gamma_n \in \Gamma$ y $\epsilon > 0$ tal que

$$\{y \in \Im : p_{\gamma_j}(x - y) < \epsilon\} \subset A.$$

DEFINICIÓN 2.35. Definimos la topología débil τ_0 de $\Im$ como la topología inducida por la familia de seminormas $\{p_y\}_{y\in\Im}$ donde

$$p_y(x) = |\ \langle x, y\rangle\ |$$

9. Espacios de Krein y topología fuerte

La demostración del siguiente teorema de puede encontrar en ([**5**] página 32).

TEOREMA 2.36.

Sea $\Im$ un espacio con producto interno, no degenerado y descomponible. Sean

$$\Im = \Im_1^+(\dot{+})\Im_1^-, \qquad \Im_1^+ \subseteq B^{++}, \Im_1^- \subseteq B^{--},$$

y

$$\Im = \Im_2^+(\dot{+})\Im_2^-, \qquad \Im_2^+ \subseteq B^{++}, \Im_2^- \subseteq B^{--},$$

dos descomposiciones fundamentales de $\Im$.

Si $\left(\Im_1^+, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ y $\left(\Im_1^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ son espacios de Hilbert, entonces $\left(\Im_2^+, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ y $\left(\Im_2^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ también son espacios de Hilbert y las normas hilbertianas inducidas por ambas descomposiciones son equivalentes.

DEFINICIÓN 2.37. Al hablar de espacios de Krein nos referimos a un espacio con producto interno $(\Re, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ que admite una descomposición fundamental

$$\Re = \Re^+(\dot{+})\Re^-,\ \Re^+ \subseteq B^{++},\ \Re^- \subseteq B^{--} \tag{2.2}$$

tales que $(\Re^+, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\Re^-, -\langle\cdot,\cdot\rangle)$ son espacios de Hilbert.

Dado un espacio de Krein $\Re$ y una descomposición como en (2.2), denotamos por $|\ \Re\ |$ al espacio de Hilbert que se obtiene de la descomposición (2.2) reemplazando a $\Re^-$ por su anti-espacio $|\ \Re^-\ | = -\Re^-$:

$$|\ \Re\ | = \Re^+ \oplus |\ \Re^-\ | \tag{2.3}$$

La norma en este espacio de Hilbert $|\ \Re\ |$ dada por $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{|\Re|}$ es una norma para el espacio de Krein $\Re$.

En esta situación, el operador simetría fundamental $J_{\Re}$ definido en el espacio de Krein $\Re$ por

$$J_{\Re}(f) = f^{+} - f^{-} \text{ para todo } f \in \Re$$

tal que $f = f^{+} + f^{-}$ con $f^{\pm} \in \Re^{\pm}$, establece una relación entre el espacio de Krein $(\Re, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Re})$ y el espacio de Hilbert $(|\Re|, \langle \cdot, \cdot \rangle_{|\Re|})$; y es que $\Re$ y $|\Re|$ coinciden como espacios vectoriales y además

$$\langle f, g \rangle_{|\Re|} = \langle J_{\Re} f, g \rangle_{\Re} \text{ y } \langle f, g \rangle_{\Re} = \langle J_{\Re} f, g \rangle_{|\Re|}$$

para cualquier par de vectores f y g en $\Re$.

Definición 2.38. La topología fuerte de un espacio de Krein $\Re$ es la topología inducida por la norma de cualquier espacio de Hilbert (2.3) asociado a la descomposición fundamental (2.2) del espacio de Krein $\Re$.

Observación 2.39. Recordemos que por el Teorema 2.36 dos descomposiciones fundamentales dan origen a normas equivalentes y por lo tanto dan origen a la misma topología. Además, las nociones de convergencia y continuidad en un espacio de Krein se refieren a esta topología.

10. Funcionales lineales en espacios de Krein

Teorema 2.40 (Teorema de representación de Riesz).

Sea $f : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y continuo con respecto a la topología fuerte, donde $(\Re, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Krein. Entonces existe un único $y \in \Re$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in \Re.$$

Demostración.

En virtud de la topología fuerte que definimos en $\Re$ tenemos que $f : |\Re| \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y continuo.

Luego, por el teorema de representación de Riesz en espacios de Hilbert, existe un único $z \in \Re$ tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle_J \text{ para todo } x \in \Re.$$

Como $\langle x, z \rangle_J = \langle x, Jz \rangle$ tomamos $y = Jz$ y obtenemos

$$f(x) = \langle x, z \rangle_J = \langle x, Jz \rangle = \langle x, y \rangle \text{ para todo } x \in \Re.$$

La unicidad se obtiene a partir de la hipótesis de que $\Re$ es no degenerado, ya que tendríamos que el único vector ortogonal a si mismo en $\Re$ es el vector cero.

Supongamos que $\langle x, y\rangle = \langle x, y_1\rangle$ para todo $x \in \Re$.

Entonces, $\langle x, y - y_1\rangle = 0$ para todo $x \in \Re$.

Así, $y - y_1 = 0$. □

11. Adjunto de un operador lineal

Sea $D(T) \subseteq \Re$ una variedad lineal densa y un operador lineal $T : D(T) \longrightarrow \Re$.

Ahora, definimos el siguiente conjunto:

Consideremos $D(T^*) = \{\ y \in \Re : \varphi(x)$ es continua$\}$. Donde

$$\varphi : D(T) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi(x) = \langle Tx, y\rangle$$

La función φ se puede extender de manera continua a todo $\Re$ ya que $D(T)$ es denso en $\Re$.

Sea $x \in \Re$ y $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq \Re$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Como φ es continua, consideramos

$$\psi : \Re \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\psi|_{D(T)} = \varphi$$

dada por

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$$

Por el teorema de representación de Riesz en espacios de Krein, existe un único vector $z \in K$ tal que

$$\psi(x) = \langle x, z\rangle \text{ para todo } x \in D(T).$$

Luego como $\psi(x) = \langle Tx, y\rangle$ para todo $x \in D(T)$, nos queda que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \text{ , para todo } x \in D(T).$$

Recordemos que para $M \subseteq \Re$ un conjunto denso, si $x \in \Re$ y $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in M$ entonces $x = 0$.

Ahora, veamos que fijado y el vector z es único. Consideramos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall x \in D(T). \tag{2.4}$$

Supongamos que existe otro vector z_1 tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z_1\rangle \, \forall x \in D(T). \tag{2.5}$$

De las igualdades (2.4) y (2.5) nos queda

$$\langle x, z\rangle = \langle x, z_1\rangle \text{ para todo } x \in D(T).$$

Empleando propiedades del producto interno obtenemos

$$\langle x, z - z_1\rangle = 0 \text{ para todo } x \in D(T).$$

Como $D(T)$ es denso en $\Re$ se verifica que

$$z = z_1.$$

De esta forma, podemos definir el operador adjunto de la siguiente manera

Definición 2.41. El adjunto del operador lineal $T : D(T) \subseteq \Re \longrightarrow \Re$ es el único operador lineal

$$T^* : D(T^*) \longrightarrow \Re$$

tal que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*\rangle,\ x \in D(T),\ y \in D(T^*)$$

Probemos ahora que la correspondencia $\phi : y \longrightarrow T^*y$ es lineal.

Sean $x \in D(T), y_1, y_2 \in D(T^*), \lambda \in \mathbb{C}$, luego

$$\begin{gathered}\langle x, \phi(\lambda y_1 + y_2)\rangle = \langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2)\rangle = \langle Tx, \lambda y_1 + y_2\rangle = \overline{\lambda}\,\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \\ = \overline{\lambda}\,\langle x, T^*y_1\rangle + \langle x, T^*y_2\rangle = \langle x, \lambda T^*y_1\rangle + \langle x, \lambda T^*y_2\rangle = \langle x, \lambda T^*y_1 + \lambda T^*y_2\rangle = \\ = \langle x, \lambda\phi(y_1) + \phi(y_2)\rangle .\end{gathered}$$

Capítulo 3

Espacios de Krein con núcleos reproductivos

1. Núcleos hermitianos

Sea Λ una familia arbitraria de índices. Denotemos por $\mathbb{H} = \{\mathcal{H}_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de espacios de Krein con productos internos indefinidos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_i}$.

DEFINICIÓN 3.1. Una función K definida en $\Lambda \times \Lambda$ tal que

$$K(i,j) \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i) \text{ para todo } i,j \in \Lambda$$

es llamada $\mathbb{H}$-núcleo.

Recordemos que $\mathbb{L}(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i) = \{T : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathcal{H}_i :$ T es lineal y acotado $\}$.

DEFINICIÓN 3.2. El $\mathbb{H}$-núcleo K es llamado hermitiano si

$$K(i,j) = K(j,i)^* \text{ para todo } i,j \in \Lambda$$

Denotemos por $\mathfrak{F}(\mathbb{H}) = \{f = \{f(i)\}_{i\in\Lambda} : f(i) \in \mathcal{H}_i \text{ para todo } i \in \Lambda\}$.

Del mismo modo, denotemos por $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{H}) : Supp(f) \text{ es finito}\}$, donde

$$Supp(f) = \{i \in \Lambda\text{: f(i)} \neq 0\}.$$

Ahora, sea K un $\mathbb{H}$-núcleo hermitiano. A partir de este $\mathbb{H}$-núcleo, equipamos a $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ con un producto interno indefinido $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ dado por:

$$\langle f,g\rangle_K = \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j)f(j), g(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \text{ para todo } f,g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

En efecto, $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ es un producto interno.

Sean $f,g,h \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Luego

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha f + g, h\rangle_K &= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j)(\alpha f + g)(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j)(\alpha f(j) + g(j)), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle \alpha K(i,j) f(j) + K(i,j) g(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \left[\langle \alpha K(i,j) f(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} + \langle K(i,j) g(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\right] \\
&= \alpha \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j) f(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j) g(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \alpha \langle f, h\rangle_K + \langle g, h\rangle_K .
\end{aligned}
$$

Hemos probado la linealidad del producto interno. Ahora demostremos la propiedad de conjugación. Para ello, usaremos que el $\mathbb{H}$-núcleo K es hermitiano.

$$
\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_K &= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j) f(j), g(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle f(j), K(i,j)^* g(i)\rangle_{\mathcal{H}_j} \\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle f(j), K(j,i) g(i)\rangle_{\mathcal{H}_j} \\
&= \overline{\textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(j,i) g(i), f(j)\rangle_{\mathcal{H}_j}} \\
&= \overline{\langle g, f\rangle_K} .
\end{aligned}
$$

Hemos probado que $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ es un producto interno.

Definición 3.3. Un $\mathbb{H}$-núcleo K es semidefinido positivo cuando

$$\langle h, h\rangle_K = \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j) h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \geq 0 \ \text{ para todo } \ h \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

A partir de esta definición se tiene que $\mathbb{H}$-núcleo K es semidefinido positivo si y solo si $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ es no negativo.

LEMA 3.4. *Todo $\mathbb{H}$-núcleo K semidefinido positivo es hermitiano.*

DEMOSTRACIÓN.

Paso 1.

Veamos primero que $K(i_o, i_o)^* = K(i_o, i_o)$ para todo $i_o \in \Lambda$.

En efecto, sean $i_o \in \Lambda$ y $f \in \mathcal{H}_{i_o}$. Consideremos un vector $h \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, dado por

$$h = (h(i))_{i \in \Lambda} = \begin{cases} f & \text{si } i = i_o \\ 0 & \text{si } i \neq i_o. \end{cases}$$

Por hipótesis, tenemos que

$$\langle h, h \rangle_K \geq 0 \text{ y por lo tanto } \langle h, h \rangle_K = \overline{\langle h, h \rangle}_K.$$

Entonces,

$$\langle K(i_o, i_o) f, f \rangle_{\mathcal{H}_{i_o}} = \overline{\langle K(i_o, i_o) f, f \rangle}_{\mathcal{H}_{i_o}} = \langle f, K(i_o, i_o) f \rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}.$$

De donde,

$$K(i_o, i_o)^* = K(i_o, i_o) \text{ para todo } i_o \in \Lambda.$$

Paso 2.

Ahora, debemos probar que $K(j_o, i_o)^* = K(i_o, j_o)$ para todo $i_o, j_o \in \Lambda$.

Veamos que $Im\left(\langle K(i_o, j_o) f, g \rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}\right) = Im\left(\langle f, K(j_o, i_o) g \rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}\right)$ para todo $i_o, j_o \in \Lambda$ y para todo $f \in \mathcal{H}_{j_o}$ y todo $g \in \mathcal{H}_{i_o}$.

Sean $i_o, j_o \in \Lambda$, $f \in \mathcal{H}_{j_o}$ y $g \in \mathcal{H}_{i_o}$. Consideremos $h \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, dado por

$$h = (h(i))_{i \in \Lambda} = \begin{cases} g & \text{si } i = i_o \\ f & \text{si } i = j_o \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que $\langle h, h \rangle_K = \overline{\langle h, h \rangle}_K$. Entonces

$$\textstyle\sum_{i,j \in \Lambda} \langle K(i,j) h(j), h(i) \rangle_{\mathcal{H}_i} = \sum_{i,j \in \Lambda} \langle h(i), K(i,j) h(j) \rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{gathered}\langle K(i_o,i_o)g,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle K(j_o,j_o)f,f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}+\langle K(j_o,i_o)g,f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}=\\ \langle g,K(i_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle g,K(i_o,j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle f,K(j_o,j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}+\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.\end{gathered}$$

Luego,

$$\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle K(j_o,i_o)g,f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}=\langle g,K(i_o,j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.$$

De modo que

$$\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}-\langle g,K(i_o,j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}=\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}-\langle K(j_o,i_o)g,f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.$$

Es decir,

$Im\left(\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}\right)=Im\left(\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}\right)$ para todo $i_o,j_o\in\Lambda$ y para todo $f\in\mathcal{H}_{j_o}$ y todo $g\in\mathcal{H}_{i_o}$.

<u>Paso 3.</u>

Veamos que $Re\left(\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}\right)=Re\left(\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}\right)$ para todo $i_o,j_o\in\Lambda$ y para todo $f\in\mathcal{H}_{j_o}$ y todo $g\in\mathcal{H}_{i_o}$.

Sea $h\in\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, dado por

$$h=(h(i))_{i\in\Lambda}=\begin{cases} g & \text{si } i=i_o\\ \mathfrak{i}f & \text{si } i=j_o\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Donde $\mathfrak{i}$ es la unidad imaginaria. Entonces, tenemos que $\langle h,h\rangle_K=\overline{\langle h,h\rangle}_K$. De modo que

$$\textstyle\sum_{i,j\in\Lambda}\langle K(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}=\sum_{i,j\in\Lambda}\langle h(i),K(i,j)h(j)\rangle_{\mathcal{H}_i}.$$

De esta forma,

$$\begin{gathered}\langle K(i_o,i_o)g,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle K(i_o,j_o)\mathfrak{i}f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle K(j_o,j_o)\mathfrak{i}f,\mathfrak{i}f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}+\langle K(j_o,i_o)g,\mathfrak{i}f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}=\\ \langle g,K(i_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle g,K(i_o,j_o)\mathfrak{i}f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\langle \mathfrak{i}f,K(j_o,j_o)if\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}+\langle \mathfrak{i}f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.\end{gathered}$$

Así,

$$\mathfrak{i}\,\langle K(i_o,j_o)f,g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}-\mathfrak{i}\,\langle K(j_o,i_o)g,f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}=-\mathfrak{i}\,\langle g,K(i_o,j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}+\mathfrak{i}\,\langle f,K(j_o,i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.$$

Luego,

$$\langle K(i_o, j_o)f, g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}} + \langle g, K(i_o, j_o)f\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}} = \langle f, K(j_o, i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}} + \langle K(j_o, i_o)g, f\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}.$$

Es decir,

$Re\left(\langle K(i_o, j_o)f, g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}}\right) = Re\left(\langle f, K(j_o, i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}\right)$ para todo $i_o, j_o \in \Lambda$ y para todo $f \in \mathcal{H}_{j_o}$ y todo $g \in \mathcal{H}_{i_o}$.

Paso 4.

$\langle K(i_o, j_o)f, g\rangle_{\mathcal{H}_{i_o}} = \langle f, K(j_o, i_o)g\rangle_{\mathcal{H}_{j_o}}$ para todo $i_o, j_o \in \Lambda$ y para todo $f \in \mathcal{H}_{j_o}$ y todo $g \in \mathcal{H}_{i_o}$.

Este resultado se obtiene del paso 2 y el paso 3.

Por lo tanto, $K(i_o, j_o) = K(j_o, i_o)^*$ para todo $i_o, j_o \in \Lambda$. □

Definamos los siguientes conjuntos para establecer una notación.

(1) Sea $\mathbb{K}^h(\mathbb{H})$ el conjunto de todos los $\mathbb{H}$-núcleos hermitianos:

$$\mathbb{K}^h(\mathbb{H}) = \{K : \text{K es un } \mathbb{H}\text{-núcleo hermitiano}\}.$$

(2) Sea $\mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ el conjunto de todos los $\mathbb{H}$-núcleos semidefinidos positivos:

$$\mathbb{K}^+(\mathbb{H}) = \{K : \text{K es un } \mathbb{H}\text{-núcleo semidefinido positivo}\}.$$

En $\mathbb{K}^h(\mathbb{H})$ definimos la adición, sustracción y multiplicación con número reales de manera usual. Más aún, en $\mathbb{K}^h(\mathbb{H})$ tenemos un orden parcial que se define como sigue:

Definición 3.5. Sean $A, B \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. Diremos que A $\leq$ B cuando

$$\langle f, f\rangle_A \leq \langle f, f\rangle_B \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

En virtud de esta definición, tenemos que

$$\mathbb{K}^+(\mathbb{H}) = \{\text{A} : \text{A} \geq 0\}.$$

Lema 3.6. *El conjunto* $\mathbb{K}^+(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$ *y es cerrado bajo adición y multiplicación con escalares positivos.*

Demostración.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Como $A \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$, A es semidefinido positivo y por tanto es hermitiano. Así, $A \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$.

Veamos que $\alpha A + B \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$. Sea $h \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$

$$\begin{aligned}
\langle h,h\rangle_{\alpha A+B} &= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle(\alpha A+B)(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle(\alpha A(i,j)+B(i,j))h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle\alpha A(i,j)h(j)+B(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\\
&= \textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \left[\langle\alpha A(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} + \langle B(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\right]\\
&= \alpha\textstyle\sum_{i,j\in\Lambda} \langle A(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} + \sum_{i,j\in\Lambda}\langle B(i,j)h(j),h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}\\
&= \alpha\langle h,h\rangle_A + < h,h >_B \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.7. *Sean $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$ y $f,g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mid \lambda \mid = 1$ y $Re(\langle f,\lambda g\rangle_K) = \langle f,\lambda g\rangle_K$.*

Demostración.

Consideremos dos casos.

(1) Caso 1. Supongamos que $\langle f,g\rangle_K = 0$.

En este caso, $Re\left(\langle f,\lambda g\rangle_K\right) = \langle f,\lambda g\rangle_K = 0$. Basta tomar $\lambda = 1$.

(2) Caso 2. Supongamos que $\langle f,g\rangle_K \neq 0$.

Sea $\lambda = \dfrac{\langle f,g\rangle_K}{\mid \langle f,g\rangle_K \mid}$. Por lo tanto,

$$\langle f,\lambda g\rangle_K = \overline{\lambda}\langle f,g\rangle_K = \frac{\overline{\langle f,g\rangle_K}}{\mid \langle f,g\rangle_K \mid}\langle f,g\rangle_K = \frac{\mid \langle f,g\rangle_K \mid^2}{\mid \langle f,g\rangle_K \mid} = \mid \langle f,g\rangle_K \mid$$

Así, $Re(\langle f,\lambda g\rangle_k) = \langle f,\lambda g\rangle_k$.

□

2. Completación cociente de un espacio pre-Hilbert

En esta sección se estudia el proceso de completación de un espacio pre-Hilbert para obtener un espacio de Hilbert. Este proceso involucra el uso de una relación de equivalencia y el empleo del espacio cociente.

Sea L un $\mathbb{H}$-núcleo semidefinido positivo. Este $\mathbb{H}$-núcleo induce un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ semidefinido positivo en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$. De este modo, $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ es un espacio pre-Hilbert.

Consideremos la parte isotrópica del espacio con producto interno semidefinido positivo $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ dado por

$$\mathcal{N}_L = \{f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : \langle f, f \rangle_L = 0\}$$

Veamos que $\mathcal{N}_L$ es subespacio de $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$

(1) $0 \ \in \ \mathcal{N}_L$ ya que $\langle 0, 0 \rangle_L \ = \ 0$.

(2) De lo anterior también se desprende que $\mathcal{N}_L \neq \emptyset$.

(3) Sean $f, g \ \in \mathcal{N}_L, \ \alpha \ \in \mathbb{C}$.

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es un producto interno semidefinido positivo, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + g, \alpha f + g \rangle_L &= \ \mid \alpha \mid (\langle f, f \rangle_L + \langle g, f \rangle_L + \langle f, g \rangle_L + \langle g, g \rangle_L) \\ &= \ 2 \mid \alpha \mid Re \, \langle f, g \rangle_L \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarzt, se obtiene que

$$\mid \langle f, g \rangle_L \mid \leq \ \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \ \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} \ = \ 0$$

Por tanto, $\langle \alpha f + g, \alpha f + g \rangle_L \ = \ 0$.

Entonces, $\alpha f + g \in \mathcal{N}_L$.

Ahora, considerando el subespacio $\mathcal{N}_L$, definimos en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ una relación de equivalencia para obtener el espacio cociente $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ constituído por el conjunto de las clases de equivalencia. Luego, se definen las operaciones de suma y multiplicación por un escalar de clases por las operaciones correspondientes sobre los representantes.

Tal relación de equivalencia viene dada por

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}_L \ \text{ para todo } \ f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Comprobemos que, en efecto, se trata de una relación de equivalencia.

(1) **Simetría**.

Supongamos que $f \sim g$, esto es $f - g \in \mathcal{N}_L$.

De este modo, $\langle f - g, f - g \rangle_L = 0$. Luego

$$\langle f - g, f - g \rangle_L = \langle -f + g, -f + g \rangle_L = \langle g - f, g - f \rangle_L$$

Así, $\langle g-f, g-f\rangle_L = 0$ y por tanto, $g-f \in \mathcal{N}_L$. Entonces $g \sim f$.

(2) **Reflexividad**.

Veamos que $g \sim g$. Es decir, $g - g \ = \ 0 \in \mathcal{N}_L$.

Como Ņ_L es un subespacio tenemos que $0 \in \mathcal{N}_L$. Así, $g \sim g$.

(3) **Transitividad**.

Veamos que si $f \sim g$ y $g \sim h$ entonces $f \sim h$.

Como $f \sim g$ nos queda que $f - g \in \mathcal{N}_L$. De igual forma, $g - h \in \mathcal{N}_L$.

Luego, $f - g + g - h \ = \ f - h$. Como $\mathcal{N}_L$ es un subespacio, $f - h \in \mathcal{N}_L$.

Entonces, $f \sim h$.

Las clases de equivalencia en esta relación son:

$$\begin{aligned}
\overline{f} &= \{g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : g \sim f\} \\
&= \{g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : g - f \in \mathcal{N}_L\} \\
&= \{g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : g = f + h, h \in \mathcal{N}_L\}
\end{aligned}$$

La notación usual en álgebra es:

$$\overline{f} = f + \mathcal{N}_L = \{f + h : h \in \mathcal{N}_L\}$$

Al espacio cociente por medio de esta relación se le denota por:

$$\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L := \{f + h : h \in \mathcal{N}_L\}$$

En $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ definimos las operaciones suma y producto por un escalar de clases como sigue:

(1) $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g}$ para todo $f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$.

(2) $\alpha\overline{f} = \overline{\alpha f}$ para todo $f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Con estas operaciones, $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ tiene estructura de espacio vectorial.

Seguidamente, equipamos a nuestro espacio cociente con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ para convertirlo en un espacio con producto interno. Definamos un producto interno en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ como sigue:

Sea $\left\langle \overline{f}, \overline{g} \right\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L} = \langle f, g\rangle_L$ donde $\overline{f}, \overline{g} \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ y f, g son los representantes de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ respectivamente.

Sean $f_1, f_2 \in \overline{f},\ \ g_1, g_2 \in \overline{g}$. Así, $f_1 - f_2,\ g_1 - g_2 \in \mathcal{N}L$. Se sigue que

$$\langle f_1, g_1 \rangle_L - \langle f_2, g_2 \rangle_L = \langle f_1 - f_2, g_1 \rangle_L + \langle f_2, g_1 - g_2 \rangle_L = 0.$$

Por tanto, la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ está bien definida y así $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ deviene en un espacio con producto interno.

Para terminar nuestra completación, tomamos la clausura de nuestro espacio cociente con producto interno y lo denotamos por $\mathcal{K}_L$. Esto es

$$\mathcal{K}_L = \overline{(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)}.$$

Lema 3.8. *Si $\mathcal{N}_K$ es la parte isotrópica del espacio con producto interno indefinido $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$, entonces $\mathcal{N}_K$ es subespacio de $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$.*

Demostración.

Tenemos que $\mathcal{N}_K = \{f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : \langle f, f \rangle_K = 0\}$

(1) $0 \in \mathcal{N}_K$ ya que $\langle 0, 0 \rangle_K = 0$.

(2) De lo anterior también se desprende que $\mathcal{N}_K \neq \emptyset$.

(3) Sean $f, g \in \mathcal{N}_K,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Tenemos que $\mathcal{N}_K$ es un espacio con producto interno neutro, por tanto, $\langle f, g \rangle_K = 0$ para todo $f, g \in \mathcal{N}_K$.

Así, $\langle \alpha f + g, \alpha f + g \rangle_K = 0$. De donde, $\alpha f + g \in \mathcal{N}_K$.

□

El siguiente resultado establece una relación entre $\mathcal{N}_L$ y $\mathcal{N}_K$.

Lema 3.9. *Sea $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. Si existe $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que*

$$|\langle f, g \rangle_K| \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Entonces $\mathcal{N}_L$ es un subconjunto de $\mathcal{N}_K$.

Demostración.

Por hipótesis, tenemos que

$$|\langle f, g \rangle_K| \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Sea $f \in \mathcal{N}_L$. Entonces, $\langle f, f \rangle_L = 0$.

En la desigualdad anterior, consideramos $f = g$. De esta forma, obtenemos

$$| \langle f, f \rangle_K | \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}}$$

$$| \langle f, f \rangle_K | \leq \langle f, f \rangle_L = 0.$$

De donde, $\langle f, f \rangle_K = 0$. Por ende, $f \in \mathcal{N}_K$.

Luego, $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}_K$. □

El siguiente lema involucra el uso del teorema de representación de Riesz.

LEMA 3.10. *Sea $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. Si existe $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que*

$$| \langle f, g \rangle_K | \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} \quad \textit{para todo } f, g \in \mathcal{K}_L.$$

Entonces existe un operador $A \in \mathbb{L}(\mathcal{K}_L)$ autoadjunto $A = A^*$ y contractivo tal que

$$\langle f, g \rangle_K = \langle Af, g \rangle_L \textit{ para todo } f, g \in \mathcal{K}_L.$$

donde $\mathcal{K}_L$ un espacio de Hilbert.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{K}_L$ un espacio de Hilbert obtenido por completación cociente del espacio pre-Hilbert $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$.

Veamos que se puede construir un operador $A : \mathcal{K}_L \longrightarrow \mathcal{K}_L$ tal que $A = A^*$ y que A sea una contracción.

Consideremos un vector $g \in \mathcal{K}_L$. Definimos $T_g : \mathcal{K}_L \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $T_g(f) = \langle f, g \rangle_K$ para todo $f \in \mathcal{K}_L$. Este funcional dado por un producto interno es lineal y continuo. Luego, por el teorema de representación de Riesz, existe un único vector $h_g \in \mathcal{K}_L$ tal que

$$T_g(f) = \langle f, h_g \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathcal{K}_L.$$

Definimos el operador $A : \mathcal{K}_L \longrightarrow \mathcal{K}_L$ por $A(g) = h_g$.

De esta forma, nos queda que

$$\langle f, g \rangle_K = \langle f, A(g) \rangle_L \, \forall f, g \in \mathcal{K}_L. \tag{3.1}$$

Veamos que A es autoadjunto.

Tenemos que

$$\langle A(f), g\rangle_L \;=\; \overline{\langle g, A(f)\rangle_L} \;=\; \overline{\langle g, f\rangle_K} \;=\; \langle f, g\rangle_K \;\; \forall f, g \in \mathcal{K}_L. \tag{3.2}$$

Por (3.1) y (3.2) obtenemos

$$\langle f, A(g)\rangle_L \;=\; \langle A(f), g\rangle_L \text{ para todo } f, g \in \mathcal{K}_L.$$

Así, A es autoadjunto.

Comprobemos que A es una contracción. Sabemos que se cumple

$$|\langle f, g\rangle_K| \leq \; \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \; \langle g, g\rangle_L^{\frac{1}{2}} \;\; \forall f, g \in \mathcal{K}_L. \tag{3.3}$$

Como $\langle \cdot, \cdot\rangle_L$ es semidefinido positivo,

$$\langle A(f), A(f)\rangle_L \geq 0 \text{ para todo } f \in \mathcal{K}_L.$$

Consideremos dos casos.

(1) Supongamos que $\langle A(f), A(f)\rangle_L > 0$.

De modo que

$$|\langle A(f), A(f)\rangle_L| = \langle A(f), A(f)\rangle_L.$$

Luego, por la desigualdad (3.3) y sabiendo que $\langle f, g\rangle_K = \langle A(f), g\rangle_L$ para todo $f, g \in \mathcal{K}_L$.

$$\langle A(f), A(f)\rangle_L = |\langle A(f), A(f)\rangle_L| = |\langle f, A(f)\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \; \langle A(f), A(f)\rangle_L^{\frac{1}{2}}.$$

De donde,

$$\langle A(f), A(f)\rangle_L^{\frac{1}{2}} \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}}.$$

Así

$$\langle A(f), A(f)\rangle_L \leq \langle f, f\rangle_L \text{ para todo } f \in \mathcal{K}_L.$$

(2) Si $\langle A(f), A(f)\rangle_L = 0$ entonces,

$$\langle A(f), A(f)\rangle_L = 0 \leq \langle f, f\rangle_L.$$

□

El siguiente lema que se dará sin demostración utiliza para la misma resultados de teoría espectral.

LEMA 3.11. *Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A \in \mathbb{L}(\mathbb{H})$ una contracción autoadjunta. Entonces existen dos contracciones autoadjuntas A^+ y A^- en $\mathbb{L}(\mathbb{H})$ tales que*

(1) *A^+ y A^- son no negativas,*
(2) *$A = A^+ - A^-$.*

3. Descomposición de Kolmogorov de núcleos hermitianos

DEFINICIÓN 3.12. Una descomposición del Kolmogorov del $\mathbb{H}$-núcleo K es un par $(V, \mathfrak{K})$ donde $(\mathfrak{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{K}})$ es un espacio de Krein y $V = \{V_i\}_{i \in \Lambda}$ es una familia de operadores lineales, sujetos a las siguientes condiciones:

(a) $V_i \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i, \mathfrak{K})$ para todo $i \in \Lambda$.
(b) $\mathfrak{K} = \bigvee_{i \in \Lambda} V_i \mathcal{H}_i$. (Propiedad de minimalidad).
(c) $K(i,j) = V_i^* V_j$ para todo $i, j \in \Lambda$.

DEFINICIÓN 3.13. Decimos que dos núcleos $A, B \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ son disjuntos si para cualquier núcleo $P \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que $P \leq A$ y $P \leq B$ se tiene que $P = 0$.

Utilizaremos los resultados de las secciones anteriores para demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 3.14.
Sea $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(1) *Existe $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que $-L \leq K \leq L$.*
(2) *Existe $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que*
$$| \langle f, g \rangle_K | \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$
(3) *$K = K_1 - K_2$ con $K_1, K_2 \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$.*
(4) *$K = K^+ - K^-$ tal que $K^\pm \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ y son disjuntos.*
(5) *Existe una descomposición del Kolmogorov $(V, \mathfrak{K})$ de K.*

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2)

Sea $L \in \mathbb{K}^{+}(\mathbb{H})$ tal que $-L \leq K \leq L$. En virtud del orden parcial en $\mathbb{K}^{h}(\mathbb{H})$,

$$| \langle f, f \rangle_K | \leq \ \langle f, f \rangle_L \, \forall f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}). \tag{3.4}$$

Sean $f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle f+g, f+g \rangle_K - \langle f-g, f-g \rangle_K &= \overline{\langle f, g \rangle_k} + \langle f, g \rangle_k + \overline{\langle f, g \rangle_k} + \langle f, g \rangle_k \\ &= 2\overline{\langle f, g \rangle_k} + 2 \langle f, g \rangle_k \\ &= 4Re(\langle f, g \rangle_k). \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular

$$4 \mid Re(\langle f, g \rangle_k) \mid \leq \mid \langle f+g, f+g \rangle_K \mid + \mid \langle f-g, f-g \rangle_K \mid .$$

Hacemos uso de la desigualdad (3.4) para obtener

$$\mid \langle f+g, f+g \rangle_K \mid + \mid \langle f-g, f-g \rangle_K \mid \leq \langle f+g, f+g \rangle_L + \langle f-g, f-g \rangle_L .$$

Así,

$$4 \mid Re(\langle f, g \rangle_k) \mid \leq \langle f+g, f+g \rangle_L + \langle f-g, f-g \rangle_L.$$

Ahora, desarrollamos los productos internos sobre L

$$\langle f+g, f+g \rangle_L + \langle f-g, f-g \rangle_L = 2 \langle f, f \rangle_L + 2 \langle g, g \rangle_L .$$

De modo que,

$$4 \mid Re(\langle f, g \rangle_k) \mid \leq 2 \langle f, f \rangle_L + 2 \langle g, g \rangle_L .$$

Por el lema 3.7 existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mid \alpha \mid = 1$ y $Re(\langle f, \alpha g\rangle_K) = \langle f, \alpha g\rangle_K$.

Luego, la última desigualdad nos queda

$$4 \mid Re(\langle f, \alpha g\rangle_k) \mid = 4 \mid \langle f, \alpha g\rangle_k \mid \leq 2\langle f, f\rangle_L + 2\langle \alpha g, \alpha g\rangle_L = 2\langle f, f\rangle_L + 2\langle g, g\rangle_L .$$

De donde,

$$\mid \langle f, \alpha g\rangle_k \mid \leq \tfrac{1}{2}\langle f, f\rangle_L + \tfrac{1}{2}\langle g, g\rangle_L .$$

Como $\mid \alpha \mid = 1$, se tiene que

$$\mid \langle f, g\rangle_k \mid \leq \frac{1}{2}\langle f, f\rangle_L + \frac{1}{2}\langle g, g\rangle_L . \tag{3.5}$$

En este punto consideramos dos caso.

Caso 1:

Supongamos que $\langle f, f\rangle_L = 0$ o $\langle g, g\rangle_L = 0$. Tomemos $\langle f, f\rangle_L = 0$.

La desigualdad (3.5) nos queda

$$\mid \langle f, g\rangle_k \mid \leq \tfrac{1}{2}\langle g, g\rangle_L .$$

Ahora, consideramos $t > 0$. Reemplazamos g por tg para obtener

$$\mid \langle f, tg\rangle_k \mid \leq \tfrac{1}{2}\langle tg, tg\rangle_L .$$

$$\mid \langle f, g\rangle_k \mid \leq \tfrac{t}{2}\langle g, g\rangle_L .$$

Si $t \longrightarrow 0$ entonces $\langle f, g\rangle_k = 0$ y obtenemos nuestro resultado. Análogamente, se tiene el resultado si se supone que $\langle g, g\rangle_L = 0$.

Caso 2:

Supongamos que tanto $\langle f, f\rangle_L$ como $\langle g, g\rangle_L$ son diferentes de cero.

En la desigualdad (3.5) reemplazamos f por $\langle f, f\rangle_L^{-\frac{1}{2}} f$ y g por $\langle g, g\rangle_L^{-\frac{1}{2}} g$. De este modo, se obtiene que

$$\mid \langle f, g\rangle_K \mid \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_L^{\frac{1}{2}} .$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Tenemos que existe $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que

$$|\langle f, g\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_L^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Por lo tanto consideramos $f = g$ y obtenemos

$$|\langle f, f\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}}$$

$$|\langle f, f\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L$$

Luego, en virtud de la definición de orden parcial en $\mathbb{K}^h(\mathbb{H})$, nos queda

$$-L \leq K \leq L.$$

(2) $\Rightarrow$ (4)

Sea $\mathcal{N}_L = \{f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : \langle f, f\rangle_L = 0\}$ la parte isotrópica del espacio con producto interno semidefinido positivo $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$, consideramos el espacio cociente $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ y lo completamos al espacio de Hilbert $\mathcal{K}_L$.

Consideramos $\mathcal{N}_K = \{f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) : \langle f, f\rangle_K = 0\}$ la parte isotrópica del espacio con producto interno indefinido $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$. Usando la hipótesis, se obtiene que el subespacio isotrópico $\mathcal{N}_L$ está contenido en el subespacio isotrópico $\mathcal{N}_K$.

Seguidamente, equipamos a $\mathcal{K}_L$ con el producto interno indefinido $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K}$ a partir del producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_K$ en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$. Esto es,

$\langle \overline{f}, \overline{g}\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K} = \langle f, g\rangle_K$ donde $\overline{f}, \overline{g} \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K$ y f, g son los representantes de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ respectivamente.

Sabemos que $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}_K$. A partir de esta contención, se seguirá cumpliendo nuestra hipótesis en el espacio $\mathcal{K}_L$ ya que para cualquier par de vectores $f, g \in \mathcal{K}_L$ se tiene que

$$|\langle \overline{f}, \overline{g}\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K}| = |\langle f, g\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_L^{\frac{1}{2}} = \langle \overline{f}, \overline{f}\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L}^{\frac{1}{2}} \langle \overline{g}, \overline{g}\rangle_{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L}^{\frac{1}{2}}.$$

Así,

$$|\langle f, g\rangle_K| \leq \langle f, f\rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g\rangle_L^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f, g \in \mathcal{K}_L.$$

Por el lema 3.10, existe un operador $A \in \mathbb{L}(\mathcal{K}_L)$ autoadjunto y contractivo tal que

$$\langle f, g \rangle_K = \langle Af, g \rangle_L \text{ para todo } f, g \in \mathcal{K}_L.$$

Por el lema 3.11 consideramos $A = A^+ - A^-$ la descomposición de Jordan de A en $\mathcal{K}_L$. Tenemos que, $A^\pm$ son contracciones no negativas y recordando que $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es semidefinido positivo, consideramos cualquier vector $f \in \mathcal{K}_L$ y así,

$\langle A^\pm f, f \rangle_L =\mid \langle A^\pm f, f \rangle_L \mid \leq (\langle A^\pm f, A^\pm f \rangle)_L^{\frac{1}{2}} (\langle f, f \rangle)_L^{\frac{1}{2}} \leq (\langle f, f \rangle)_L^{\frac{1}{2}} (\langle f, f \rangle)_L^{\frac{1}{2}} = \langle f, f \rangle_L$ para todo $f \in \mathcal{K}_L$.

Vamos a probar que los productos internos semidefinidos positivos $\langle A^\pm \cdot, \cdot \rangle_L$ inducen $\mathbb{H}$-núcleos $K^\pm \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tales que

$$\langle f, f \rangle_{K^\pm} \leq \langle f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}) \text{ y } K = K^+ - K^-.$$

Efectivamente, el producto interno $\langle A^+ \cdot, \cdot \rangle_L$ restringido a $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ puede ser extendido a un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ haciéndolo nulo sobre $\mathcal{N}_L$.

Además, como $\langle A^+ \cdot, \cdot \rangle_L \leq \langle f, f \rangle_L$ se cumple que

$$\langle f, f \rangle_+ \leq \langle f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Sean $i, j \in \Lambda$ arbitrarios y tales que $i \neq j$. Podemos identificar el espacio de Krein $\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j$ con el subespacio de $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ que consiste en aquellos f tales que $supp(f) \subseteq \{i, j\}$.

Con esta identificación, consideramos las restricciones de los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ a $\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j$.

Tenemos que el producto interno semidefinido positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es conjuntamente continuo con respecto a la topología fuerte de $\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j$. Además, por la equivalencia entre las aserciones (1) y (2) del presente teorema, probadas anteriormente, y sabiendo que se cumple

$$\langle f, f \rangle_+ \leq \langle f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Se comprueba que $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ también es conjuntamente continuo con respecto a la topología fuerte de $\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j$.

Ahora, por el teorema de representación de Riesz en espacios de Krein, existe un operador autoadjunto $B \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j)$ tal que

$$\langle f, g\rangle_+ = \langle Bf, g\rangle_{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} \text{ para todo } f, g \in \mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j.$$

Definimos el $\mathbb{H}$-núcleo $K^+ \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$.

$$\begin{aligned} K^+(i,j) &= P_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} B\mid_{\mathcal{H}_j} & K^+(j,i) &= P_{\mathcal{H}_j}^{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} B\mid_{\mathcal{H}_i} \\ K^+(i,i) &= P_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} B\mid_{\mathcal{H}_i} & K^+(j,j) &= P_{\mathcal{H}_j}^{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} B\mid_{\mathcal{H}_j} \end{aligned}$$

Sean $f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ tenemos que

$$\langle f, g\rangle_{K^+} = \langle K^+(i,j)f(j), g(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} = \left\langle P_{\mathcal{H}_i}^{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} Bf(j), g(i)\right\rangle_{\mathcal{H}_i} = \langle Bf, g\rangle_{\mathcal{H}_i(\dot{+})\mathcal{H}_j} = \langle f, g\rangle_+ .$$

Luego, como el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$ es semidefinido positivo, $K^+ \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ y como todo $\mathbb{H}$-núcleo semidefinido positivo es hermitianos, $K^+ \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. Más aún, $K^+ \leq L$ ya que

$$\langle f, f\rangle_{K^+} = \langle f, f\rangle_+ \leq \langle f, f\rangle_L \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Análogamente, construímos el $\mathbb{H}$-núcleo $K^- \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que $K^- \leq L$ y

$$\langle f, g\rangle_{K^-} = \langle f, f\rangle_- \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$$

Donde el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$ es la extensión de la restricción del producto interno $\langle A^-\cdot,\cdot\rangle_L$ a $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$ haciéndolo nulo sobre $\mathcal{N}_L$.

Tomando en cuenta la construcción de estos $\mathbb{H}$-núcleos y que $A = A^+ - A^-$ tenemos que

$$\langle f, g\rangle_K = \langle Af, g\rangle_L = \langle A^+f - A^-f, g\rangle_L = \langle A^+f, g\rangle_L - \langle A^-f, g\rangle_L = \langle f, g\rangle_+ - \langle f, g\rangle_- = \\ \langle f, g\rangle_{K^+} - \langle f, g\rangle_{K^-}$$

Como esto se cumple para cualquier $f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ entonces $K = K^+ - K^-$.

Ahora, veamos que K^+ y K^- son disjuntos. Sea $P \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ tal que $P \leq K^\pm$. Entonces

$$\langle f, f \rangle_P \leq \langle f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H}).$$

Esto implica que $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}_P$.

Como antes, $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ induce un producto interno semidefinido positivo en $\mathcal{K}_L$ tal que se cumple

$$\langle A^\pm f, f \rangle_L \leq \langle f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathcal{K}_L.$$

Vimos que los productos internos $\langle A^\pm \cdot, \cdot \rangle_L$ inducen los núcleos $K^\pm \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$.
Como $P \leq K^\pm$ entonces

$$\langle f, f \rangle_P \leq \langle A^\pm f, f \rangle_L \text{ para todo } f \in \mathcal{K}_L.$$

Siguiendo esta desigualdad y considerando que $A^+A^- = 0$, se prueba que $\langle f, f \rangle_P = 0$ para todo $f \in \mathcal{K}_L$. Como $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}_P$ entonces $\langle f, f \rangle_L = 0$ para todo $f \in \mathcal{K}_L$.

Sean $f, g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ es semidefinido positivo, podemos aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se obtiene

$$| \langle f, g \rangle_P | \leq \langle f, f \rangle_P^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_P^{\frac{1}{2}} \leq \langle f, f \rangle_L^{\frac{1}{2}} \langle g, g \rangle_L^{\frac{1}{2}} = 0$$

ya que $\langle f, f \rangle_L = 0$ para todo $f \in \mathcal{K}_L$. Luego, el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ es nulo en todo $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$ y por ende, $P = 0$. Así, K^+ y K^- son disjuntos.

(4) $\Rightarrow$ (3)

Es evidente.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Tenemos que $K = K_1 - K_2$ con $K_1, K_2 \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$. De esta forma, para cualquier h en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} &= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle (K_1-K_2)(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle (K_1(i,j)-K_2(i,j))h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K_1(i,j)h(j)-K_2(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K_1(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} - \langle K_2(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K_1(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} - \sum_{i,j\in\Lambda} \langle K_2(i,j)h(j), h(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\langle h,h\rangle_K = \langle h,h\rangle_{k_1-K_2} = \langle h,h\rangle_{K_1} - \langle h,h\rangle_{K_2}.$$

Definimos $L = K_1 + K_2$. De esta forma, como $K_1, K_2 \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$ nos queda

$$\langle h,h\rangle_K = \langle h,h\rangle_{K_1} - \langle h,h\rangle_{K_2} \leq \langle h,h\rangle_{K_1} + \langle h,h\rangle_{K_2} = \langle h,h\rangle_L.$$

Por ende, $K \leq L$.

Del mismo modo se prueba que, $-L \leq K$. Así

$$-L \leq K \leq L.$$

(2) $\Rightarrow$ (5)

Consideremos la completación cociente del espacio pre-Hilbert $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ para obtener el espacio de Hilbert $\mathcal{K}_L$, el operador autoadjunto $A \in \mathbb{L}(\mathcal{K}_L)$ tal que

$$\langle f,g\rangle_K = \langle Af,g\rangle_L \text{ para todo } f,g \in \mathcal{K}_L.$$

y la descomposición de Jordan $A = A^+ - A^-$ de A en $\mathcal{K}_L$.

Sean $\mathfrak{K}^+ = A^+\mathcal{K}_L$ y $\mathfrak{K}^- = A^-\mathcal{K}_L$ los subespacios espectrales del operador A correspondientes a los semiejes $(0,\infty)$ y $(-\infty,0)$ respectivamente.

Así, podemos definir el espacio de Krein $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+ [\dot{+}] \mathfrak{K}^-.$$

De igual forma, consideramos $\mathcal{N}_L$ y $\mathcal{N}_K$ las partes isotrópicas de los espacios con producto interno $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_L)$ y $(\mathfrak{F}_0(\mathbb{H}), \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ respectivamente. Además, $\mathcal{N}_L \subseteq \mathcal{N}_K$.

Ahora, para todo $i \in \Lambda$ y todo vector $h \in \mathcal{H}_i$ consideramos la función

$$h(j) = \begin{cases} h & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Luego, definimos los operadores lineales

$$V_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathfrak{K}.$$

$$V_i h = h + \mathcal{N}_K \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K \subseteq \mathfrak{K}.$$

Veamos que $V_i \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i, \mathfrak{K})$ para todo $i \in \Lambda$.

Para demostrar la linealidad, consideramos $h, g \in \mathcal{H}_i,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} V_i(\lambda h + g) &= (\lambda h + g) + \mathcal{N}_K \\ &= \overline{\lambda h + g} \\ &= \overline{\lambda h} + \overline{g} \\ &= \lambda \overline{h} + \overline{g} \\ &= \lambda(h + \mathcal{N}_K) + (g + \mathcal{N}_K) \\ &= \lambda V_i h + V_i g. \end{aligned}$$

Veamos que los operadores V_i son continuos. Sea $i \in \Lambda$ fijo. Consideremos las normas unitarias $\|\mid A \mid^{\frac{1}{2}} \cdot \|_{\mathfrak{K}} = \langle \mid A \mid \cdot, \cdot \rangle_K$ donde $\mid A \mid = A^+ + A^-$ y $\| \cdot \|_{\mathcal{H}_i}$ en el espacio de Krein $\mathfrak{K}$ y $\mathcal{H}_i$ respectivamente, y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_i}$ el correspondiente producto interno semidefinido positivo en $\mathcal{H}_i$.

Luego, para $h \in \mathcal{H}_i$ arbitrario, tenemos

$$\begin{aligned}
\| V_i h \|_{\mathfrak{K}}^2 &= \| h + \mathcal{N}_K \|_{\mathfrak{K}}^2 \\
&= \| | A |^{\frac{1}{2}} (h + \mathcal{N}_K) \|_{\mathfrak{K}}^2 \\
&= \langle | A | (h + \mathcal{N}_K), h + \mathcal{N}_K \rangle_K \\
&= \langle (A^+ + A^-)(h + \mathcal{N}_K), h + \mathcal{N}_K \rangle_K \\
&= \langle A^+(h + \mathcal{N}_L), h + \mathcal{N}_L \rangle_L + \langle A^-(h + \text{Ņ}_L), h + \mathcal{N}_L \rangle_L \\
&\leq \langle h + \mathcal{N}_L, h + \mathcal{N}_L \rangle_L + \langle h + \text{Ņ}_L, h + \mathcal{N}_L \rangle_L \\
&= 2 \langle h + \mathcal{N}_L, h + \mathcal{N}_L \rangle_L \\
&= 2 \langle L(i,i)h, h \rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= 2 \mid \langle L(i,i)h, h \rangle_{\mathcal{H}_i} \mid \\
&\leq 2 \| (L(i,i)h) \|_{\mathcal{H}_i} \| h \|_{\mathcal{H}_i} \\
&\leq 2 \| L(i,i) \| \| h \|_{\mathcal{H}_i}^2 .
\end{aligned}$$

Así, $V_i \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i, \mathfrak{K})$ para todo i $\in \Lambda$. Seguidamente, para probar la propiedad (c) de la definición 3.12 consideremos vectores arbitrarios $h \in \mathcal{H}_i$ y $g \in \mathcal{H}_j$ y la identificación de vectores con funciones en $\mathfrak{F}(\mathbb{H})$.

$$\begin{aligned}
\langle V_i^* V_j g(j), h(i) \rangle_{\mathcal{H}_i} &= \langle V_i^* V_j g, h \rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \langle V_j g, V_i h \rangle_{\mathfrak{K}} \\
&= \langle g + \mathcal{N}_K, h + \mathcal{N}_K \rangle_{\mathfrak{K}} \\
&= \langle K(i,j) g, h \rangle_{\mathcal{H}_i.}
\end{aligned}$$

Para ver que

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{i \in \Lambda} V_i \mathcal{H}_i$$

notemos primero que el subespacio generado por $\{V_i \mathcal{H}_i\}_{i \in \Lambda}$ es $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K$.

Para probar la propiedad de minimalidad de la descomposición de Kolmogorov demostremos que la variedad lineal $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K$ es K-débilmente densa en $\mathfrak{K}$.

Efectivamente, cualquier vector en $\mathcal{K}_L$ puede ser aproximado L-débilmente por vectores en $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L$. De igual modo, cualquier vector en $\mathfrak{K}$ puede ser aproximado K-débilmente por vectores en $\mathcal{K}_L/\mathcal{N}_L$.

Es fácil ver que $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K = (\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_L)/\mathcal{N}_K$.

Ahora, sean las familias de seminormas $\{p_g\}_{g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K}$, $\{q_g\}_{g \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K}$ donde

$$p_g(f) = |\, \langle f, g \rangle_L \;\text{ y }\; q_g(f) = |\, \langle f, g \rangle_K \,| \,.$$

Luego, por la fórmula de polarización y sabiendo que $-L \leq K \leq L$

$$\begin{aligned} q_g(f) &= |\, \langle f, g \rangle_K \,| \\ &= \tfrac{1}{4} \langle f+g, f+g \rangle_K - \tfrac{1}{4} \langle f-g, f-g \rangle_K + \tfrac{i}{4} \langle f+ig, f+ig \rangle_K - \tfrac{i}{4} \langle f+ig, f+ig \rangle_K \\ &\leq \tfrac{1}{4} \langle f+g, f+g \rangle_L - \tfrac{1}{4} \langle f-g, f-g \rangle_L + \tfrac{i}{4} \langle f+ig, f+ig \rangle_L - \tfrac{i}{4} \langle f+ig, f+ig \rangle_L \\ &= |\, \langle f, g \rangle_L \,| \\ &= p_g(f). \end{aligned}$$

Por tanto, la topología L-débil es más fuerte que la topología K-débil.

Así, $\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K$ es K-débilmente denso en $\mathfrak{K}$. Es decir, $\overline{\mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K} = \mathfrak{K}$ respecto a la topología débil dada por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$.Como

$$\bigvee_{i \in \Lambda} V_i \mathcal{H}_i = \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})/\mathcal{N}_K,$$

tenemos que

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{i \in \Lambda} V_i \mathcal{H}_i.$$

(5) $\Rightarrow$ (1)

Sea $(\mathfrak{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Krein y $\{V_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de operadores lineales tales que $V_i \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i, \mathfrak{K})$ para todo $i \in \Lambda$ y además

$$K(i,j) = V_i^* V_j \text{ para todo } i,j \in \Lambda$$

Consideramos una simetría fundamental J en $\mathfrak{K}$ y para cada $i \in \Lambda$ una simetría fundamental J_i en $\mathcal{H}_i$.

Luego, definimos el $\mathbb{H}$-núcleo L por

$$L(i,j) = J_i V_i^* V_j \text{ para todo } i,j \in \Lambda$$

Veamos que $L \in \mathbb{K}^+(\mathbb{H})$.

Sea $f \in \mathfrak{F}_0(\mathbb{H})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\Lambda} \langle L(i,j)f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} &= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle J_i V_i^* V_j f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_i^* V_j f(j), f(i)\rangle_{J_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_j f(j), V_i f(i)\rangle_{J} \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{j\in\Lambda} \langle V_j f(j), V_i f(i)\rangle_{J} \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \left\langle \sum_{j\in\Lambda} V_j f(j), V_i f(i)\right\rangle_{J} \\
&= \left\langle \textstyle\sum_{j\in\Lambda} V_j f(j), \displaystyle\sum_{i\in\Lambda} V_i f(i)\right\rangle_{J} \\
&= \| \sum_{i\in\Lambda} V_i f(i) \|_J^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ya que i y j varían en la misma familia Λ.

Ahora, veamos que $-L \leq K \leq L$. Tomando en cuenta que $J \leq I$ respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in\Lambda} \langle K(i,j)f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} &= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_i^* V_j f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_j f(j), V_i f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle J V_j f(j), V_i f(i)\rangle_{J} \\
&\leq \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_j f(j), V_i f(i)\rangle_{J} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle V_i^* V_j f(j), f(i)\rangle_{J_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle J_i V_i^* V_j f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} \langle L(i,j)f(j), f(i)\rangle_{\mathcal{H}_i}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\langle f, f\rangle_K \leq \langle f, f\rangle_L$. Es decir, $K \leq L$.

Similarmente, teniendo en cuenta que $-I \leq \tilde{\mathrm{J}}$ concluímos que $-L \leq K$.

$\square$

4. Espacios de Krein con núcleos reproductivos

En esta sección se demuestra el teorema que representa el objetivo general de la investigación.

Definición 3.15. Dado $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$, un espacio de Krein con núcleo reproductivo K es un espacio de Krein $(\mathfrak{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{R}})$ sujeto a las siguientes condiciones:

(1) $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{H})$.

(2) $\mathfrak{R} = \bigvee_{i\in\Lambda} K(\cdot, i)\mathcal{H}_i$ (Propiedad de minimalidad).

(3) $\langle f(i), h\rangle_{\mathcal{H}_i} = \langle f, K(\cdot, i)h\rangle_{\mathfrak{R}}$ para todo $f \in \mathfrak{R},\ h \in \mathcal{H}_i,\ i \in \Lambda$ (Propiedad reproductiva).

TEOREMA 3.16. *Sea $K \in \mathbb{K}^h(\mathbb{H})$. K admite una descomposición de Kolmogorov si y solo si existe un espacio de Krein con núcleo reproductivo K.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $(V, \mathfrak{K})$ una descomposición de Kolmogorov del $\mathbb{H}$-núcleo K. Tenemos que $V = \{V_i\}_{i\in\Lambda}$ es una familia de operadores lineales tales que $V_i \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_i, \mathfrak{K})$ para todo $i \in \Lambda$. Definimos:

$$\mathfrak{R} = \{(V_i^* f)_{i\in\Lambda} \mid f \in \mathfrak{K}\} \tag{3.6}$$

Dado $f \in \mathfrak{K}$, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{K} &\longrightarrow \mathfrak{R} \\ f &\longrightarrow (V_i^* f)_{i\in\Lambda}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sean $f, g \in \mathfrak{K}$ tales que $V_i^* f = V_i^* g$ para todo $i \in \Lambda$. Luego, para $h_i \in \mathcal{H}_i$ se tiene

$$\langle f - g, V_i h(i)\rangle_{\mathfrak{K}} = \langle V_i^*(f-g), h(i)\rangle_{\mathfrak{K}} = \langle V_i^* f, h(i)\rangle_{\mathfrak{K}} - \langle V_i^* g, h(i)\rangle_{\mathfrak{K}} = 0.$$

Es decir, $\langle f - g, V_i h_i\rangle_{\mathfrak{K}} = 0$ para todo $i \in \Lambda$, $h_i \in \mathcal{H}_i$. Teniendo en cuenta que

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{i\in\Lambda} V_i \mathcal{H}_i,$$

tendremos que $f - g = 0$.

La sobreyectividad de la aplicación φ se obtiene trivialmente y por tanto tendremos que φ es biyectiva.

Ahora, definimos el producto interno en $\mathfrak{R}$:

$$\langle (V_i^* f)_{i\in\Lambda}, (V_i^* g)_{i\in\Lambda}\rangle_{\mathfrak{R}} = \langle f, g\rangle_{\mathfrak{K}} \, \forall f, g \in \mathfrak{K} \tag{3.8}$$

Luego, dotemos a $\mathfrak{R}$ con la topología fuerte. Necesitamos definir una norma para nuestro espacio $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$.

Como la norma en el espacio $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{K}})$ es

$$\| f \|_{\mathfrak{K}} = \langle f, f\rangle_{\mathfrak{K}}^{\frac{1}{2}} \text{ para todo } f \in \mathfrak{K}.$$

Tendremos que

$$\| (V_i^* f)_{i\in\Lambda} \|_{\mathfrak{R}} = \langle (V_i^* f)_{i\in\Lambda}, (V_i^* f)_{i\in\Lambda} \rangle_{\mathfrak{K}}^{\frac{1}{2}} = \langle f, f \rangle_{\mathfrak{K}}^{\frac{1}{2}} = \| f \|_{\mathfrak{K}} \text{ para todo } f \in \mathfrak{K}$$

Así, $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$ y $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{K}})$ son unitariamente equivalentes ya que existe una transformación unitaria, φ, biyectiva y que preserva el producto interno entre ellos.

Por lo tanto, $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$ deviene en un espacio de Krein unitariamente equivalente con $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{K}})$.

Para ver que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(\mathbb{H})$, basta tomar $g \in \mathfrak{R}$ y por tanto, $g = (V_i^* f)_{i\in\Lambda}$ con $f \in \mathfrak{K}$. Y como $V_i^* : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathcal{H}_i$ obtenemos la contención de $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{F}(\mathbb{H})$.

Ahora, de acuerdo con la propiedad (c) de la descomposición de Kolmogorov:

$$K(i,j) = V_i^* V_j \text{ para todo } i, j \in \Lambda,$$

se sigue que tomando $h \in \mathcal{H}_j$, obtenemos

$$K(\cdot, j)h = (V_i^* V_j h)_{i\in\Lambda} = (V_i^*(V_j h))_{i\in\Lambda}, \forall j \in \Lambda \tag{3.9}$$

Esto es, para todo $j \in \Lambda$ y todo $h \in \mathcal{H}_j$ se tiene que $K(\cdot, j)h \in \mathfrak{R}$.

Luego, por la propiedad de minimalidad de la descomposición de Kolmogorov y la definición de $\mathfrak{R}$

$$\bigvee_{j\in\Lambda} K(\cdot, j)\mathcal{H}_j = \bigvee_{j\in\Lambda} (V_i^* V_j \mathcal{H}_j)_{i\in\Lambda} = (V_i^* \bigvee_{j\in\Lambda} V_j \mathcal{H}_j)_{i\in\Lambda} = (V_i^* \mathfrak{K})_{i\in\Lambda} = \mathfrak{R}.$$

Así, $\mathfrak{R} = \bigvee\limits_{j\in\Lambda} K(\cdot, j)\mathcal{H}_j$ y se cumple la propiedad de minimalidad para los espacios de Krein con núcleos reproductivos.

Sea $f \in \mathfrak{R}$. Como φ es biyectiva, existe $g \in \mathfrak{K}$ tal que $f = (V_i^* g)_{i\in\Lambda}$.

Tomando en cuenta (3.9) tenemos que para todo $j \in \Lambda$ y $h \in \mathcal{H}_i$

$$\begin{aligned}
\langle f(i), h\rangle_{\mathcal{H}_i} &= \langle (V_i^* g), h\rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \langle g, V_i h\rangle_{\mathfrak{K}} \\
&= \left\langle (V_j^* g)_{j\in\Lambda}, (V_j^* V_i h)_{j\in\Lambda}\right\rangle_{\mathfrak{R}} \\
&= \left\langle (V_j^* g)_{j\in\Lambda}, K(\cdot, i)h\right\rangle_{\mathfrak{R}} \\
&= \langle f, K(\cdot, i)h\rangle_{\mathfrak{R}}
\end{aligned}$$

Así, $\langle f(i), h\rangle_{\mathcal{H}_i} = \langle f, K(\cdot, i)h\rangle_{\mathfrak{R}}$ para todo $f \in \mathfrak{R}, h \in \mathcal{H}_i, i \in \Lambda$. Cumpliéndose la propiedad reproductiva de los espacios de Krein con núcleos reproductivos.

Por lo tanto, $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$ es un espacio de Krein con núcleo reproductivo K.

Recíprocamente, sea $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$ un espacio de Krein con núcleo reproductivo K.

Identificamos $(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{K}})$ con $(\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$, es decir,

$$(\mathfrak{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{K}}) = (\mathfrak{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{R}})$$

Sea $j \in \Lambda$ arbitrario. Definimos Vj como sigue

$$Vj : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathfrak{K} \tag{3.10}$$

$$V_j = K(\cdot, j)$$

De esta forma, como $\mathfrak{R} = \bigvee_{i\in\Lambda} K(\cdot, i)\mathcal{H}_i$ tendremos que

$$\mathfrak{K} = \bigvee\nolimits_{j\in\Lambda} V_j \mathcal{H}_j,$$

cumpliéndose la propiedad de minimalidad de la descomposición de Kolmogorov.

Además, por la propiedad reproductiva de los espacios de Krein con núcleos reproductivos, se tiene que para $f \in \mathfrak{K}, h \in \mathcal{H}_i, i \in \Lambda$,

$$\langle f(j), h \rangle_{\mathcal{H}_j} = \langle f, K(\cdot, j)h \rangle_{\Re} = \langle f, V_j h \rangle_{\Re} = \left\langle V_j^* f, h \right\rangle_{\mathcal{H}_j}.$$

De donde, $V_j^* = f(j)$, para todo $j \in \Lambda$. Esto es, existe V_j^* como un operador definido en $\mathcal{H}_j$ y coincide con el operador lineal

$$T_j : \mathfrak{K} \longrightarrow \mathcal{H}_j$$

$$f \mapsto f(j)$$

Como $T_j = V_j^*$, se tiene que $T_j^{**} = V_j^{***} = V_j$.

Por el Teorema 4.15 que podemos encontrar en la página 39 de [**5**] se concluye que T_j^{**} es un operador cerrado y por lo tanto, V_j es cerrado.

Luego, como V_j está definido en todo el espacio de Krein $\mathcal{H}_j$, por el teorema del gráfico cerrado, $V_j \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_j, \mathfrak{K})$ para todo $j \in \Lambda$.

Proseguimos observando que con la definición del operador

$$V_j : \mathcal{H}_j \longrightarrow \mathfrak{K}$$

y aplicando la propiedad reproductiva de los espacios de Krein con núcleos reproductivos a la función $f = K(\cdot, j)h(j)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle V_i^* V_j h(j), h(i) \rangle_{\mathcal{H}_i} &= \langle V_j h(j), V_i h(i) \rangle_{\mathfrak{K}} \\
&= \langle K(\cdot, j)h(j), K(\cdot, j)h(i) \rangle_{\Re} \\
&= \langle f, K(\cdot, j)h(i) \rangle_{\Re} \\
&= \langle f(i), h(i) \rangle_{\mathcal{H}_i} \\
&= \langle K(i, j)h(j), h(i) \rangle_{\mathcal{H}_i}
\end{aligned}$$

para $i, j \in \Lambda$ arbitrarios, $h(i) \in \mathcal{H}_i$ y $h(j) \in \mathcal{H}_j$.

Por tanto, $(V, \mathfrak{K})$ es una descomposición del Kolmogorov del $\mathbb{H}$-núcleo K. $\square$

COROLARIO 3.17. *Dado un $\mathbb{H}$-núcleo K, la aplicación*

$$(V, \mathfrak{K}) \longrightarrow \Re(V, \mathfrak{K})$$

donde $\Re(V, \mathfrak{K}) = \{(V_i^* f)_{i \in \Lambda} \mid f \in \mathfrak{K}\}$, *tal que el producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Re(V,\mathfrak{K})}$ *en* $\Re(V, \mathfrak{K})$ *se define como sigue:*

$$\langle (V_i^* f)_{i \in \Lambda}, (V_i^* g)_{i \in \Lambda} \rangle_{\Re(V,\mathfrak{K})} = \langle f, g \rangle_{\mathfrak{K}} \text{ para todo } f, g \in \mathfrak{K}$$

envía el conjunto de todas las descomposiciones de Kolmogorov de K en el conjunto de todos los espacios de Krein con núcleo reproductivo K.

DEMOSTRACIÓN.

Sean $C_K = \{(V, \mathfrak{K}) \mid (V, \mathfrak{K})$ es una descomposición de Kolmogorov del $\mathbb{H}$-núcleo $K\}$ y $C_{HNR} = \{(\Im \langle \cdot, \cdot \rangle) \mid (\Im \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Krein con núcleo reproductivo$\}$.

Consideremos la aplicación

$$\Psi : C_K \longrightarrow C_{HNK}$$

$$\Psi(V, \mathfrak{K}) = \{(V_i^* f)_{i \in \Lambda} : f \in \mathfrak{K}\}.$$

Por el teorema anterior, $\Psi(V, \mathfrak{K}) \in C_{HNK}$ para toda descomposición de Kolmogorov $(V, \mathfrak{K})$ de K. Veamos que Ψ es sobreyectiva.

Sea $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle) \in C_{HNK}$. Así, L es un espacio de Krein con núcleo reproductivo K.

Si definimos $V_j = K(\cdot, j) : \mathcal{H}_j \longrightarrow L$ para $j \in \Lambda$, entonces $V_j \in \mathbb{L}(\mathcal{H}_j, L)$.

Si tomamos $V = (V_j)_{j \in \Lambda}$ se tiene que (V, L) es una descomposición de Kolmogorov de K. Es decir, $(V, L) \in C_K$.

Además, $\Psi(V, L) = \{(V_j^* f)_{j \in \Lambda} : f \in L\} = L$ ya que en el teorema anterior se probó que $\{(V_j^* f)_{j \in \Lambda} : f \in L\}$ se puede identificar con L por medio de la biyección $f \longrightarrow (V_j^* f)_{j \in \Lambda}$.

$\square$

Bibliografía

[1] J. Bognar Indefinite inner product spaces. Springer-Verlag. IX, 1974. 9

[2] J. Mercer, Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A vol. **209** (1909), 415-446.

[3] L. Schwartz, Sous espace Hilbertiens d'espaces vectoriel topologiques et noyaux associes, (noyaux reproduisants), J. Analyse Math., **13** (1964), 115-256

[4] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, *Trans. A. M. S.* **68** (1950) 337-404.

[5] R. Bruzual, Espacios con métrica indefinida. Publicaciones del Postgrado en Matemáticas de la Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias de la UCV. 2011

[6] R. Bruzual, M. Domínguez, Espacios de Hilbert. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos de la Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias de la UCV. 2005

[7] R. Bruzual, M. Domínguez, Espacios de Banach. Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos de la Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias de la UCV. 2005

[8] T. Constantinescu, A. Gheondea, Representations of hermitians kernels by means of Krein spaces Publ. RIMS, Kyoto Univ **33** (1997) 917-951.

[9] W. Rudin, Análisis funcional. Interscience, 1962