UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

LA FUNCIÓN DE TAKAGI

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Luis Hernández** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dra. Cristina Balderrama.

Caracas, Venezuela
Octubre, 2016

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**La función de Takagi**", presentado por el **Br. Luis Hernández**, titular de la Cédula de Identidad **V-19.655.491**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Prof. Cristina Balderrama

Tutor

Prof. Mairene Colina

Jurado

Angel Padilla

Prof. Angel Padilla

Jurado

Agradecimientos

A Dios por darme la oportunidad de vivir.

Índice general

Resumen

La función de Takagi es una función continua nunca diferenciable definida en el intervalo $[0, 1]$, introducida por Teiji Takagi en 1903. Esta ha aparecido en diferentes contextos de la matemática , como en análisis matemático, probabilidades y teoría de números. En este trabajo presentaremos tres construcciones de la función de Takagi incluyendo la que Takagi utilizó originalmente y estudiaremos la derivabilidad de la misma en el intervalo $[0, 1]$.

Palabras claves: La función de Takagi; Continuidad; Derivabilidad.

Introducción

De los cursos de matemática básica hemos aprendido que la función $f(x) = |x|$ es una función continua que carece de derivada solo en el punto $x = 0$. A principios del siglo XIX los matemáticos de la epóca creían que todas las funciones continuas se comportaba como el ejemplo de la función de valor absoluto, es decir, solo carecen de derivadas en una cantidad finita de puntos. En 1872, Karl Weierstrass en un seminario de análisis deslumbró a la sociedad matemática al demostrar que esta conjetura era falsa, pues él presentó una función que era continua en todo su dominio pero no era derivable, y no fue hasta 1875 que se publicó en un artículo escrito por Duboys-Reymond [**6**], con el debido crédito al maestro.

En 1903 el matemático japonés Teiji Takagi como se evidencia en [**17**] introdujo un ejemplo más sencillo de una función continua nunca diferenciable en el intervalo $[0, 1]$. Originalmente Takagi definió su función utilizando expansiones binarias y además demostró que esta representación era consisitente para los puntos racionales diádicos. Esta función fue redescubierta por otros matemáticos años después en diferentes contextos y proporcionarón representaciones alternativas de la misma. Tales como Van der Waerden en 1930, usando la representación en la base 10 de un número, presentó una variación de la función de Takagi, y Hildebrandt en 1933, usando la representación binaria de un número, simplificó la función presentada por Van der Waerden redescubriendo la función de Takagi.

El primer objetivo de este trabajo será construir la función de Takagi utilizando funciones lineales a trozos y la representación binaria de un número. Para esto seguiremos los esquemas presentados por Abbott y Lagarias, en [**1**] y [**13**], y luego concluiremos que estas construcciones se diferencian una de la otra por una contracción de $\frac{1}{2}$ en el dominio y en las alturas. Una vez establecida la representación consistente para la función de Takagi, estudiaremos la relaciones funcionales que satisface en el intervalo $[0, 1]$. Además presentaremos un resultado que nos muestra como es el comportamiento asintótico de la función de Takagi

El segundo objetivo de este trabajo es demostrar que la función de Takagi no posee derivada finita en ningún punto de su dominio, para demostrar este hecho nos basaremos en el esquema presentado por Abbott en [**1**] que mediante reducción al absurdo comprueba que no existe derivada finita en ningún punto del intervalo $[0, 1]$. La demostración del hecho anterior nos conduce a definir la derivada impropia y siguiendo el esquema presentado por Krüppel en [**11**], estudiaremos las derivadas laterales impropias en los puntos racionales diádicos. Por último presentaremos uno de los resultados más importante de este trabajo publicado por Allart y Kawamura en [**2**] que garantiza las condiciones bajo las cuales la derivada impropia existe en los puntos no racionales diádicos.

Más de un siglo ha pasado desde que Takagi presentó su ejemplo de una función continua nunca diferenciable y hasta ahora esta función sigue siendo de gran interés para los investigadores. Es muy curioso como esta función ha aparecido frecuentemente en diversos contextos y ha servido como una gran herramienta para la solución, tanto en problemas de análisis real clásico y teoría de números. En las últimas dos décadas ha habido un incremento en la investigación relacionada con la función de Takagi, lo que muestra su vigencia.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Años después de que K. Weierstrass diera a conocer su función continua nunca diferenciable, Teiji Takagi en 1903 [**17**], presentó un ejemplo mucho más sencillo de este tipo de funciones en el intervalo $[0,1]$, el cual lo construyó usando la representación binaria de un número $x \in [0,1]$ y además demostró que esta definición era consistente para aquellos números que poseen dos expansiones binarias, es decir, los racionales diádicos.

Por tal motivo, iniciaremos este capítulo con una breve explicación acerca de la representación de un número real en la base p, con $p \in \mathbb{N}$, y luego estudiaremos la representación en la base $p=2$ (binaria). También vamos a definir las funciones sumas de dígitos binarios, las cuales Takagi las utilizó para la construcción de su función.

SECCIÓN 1

Desarrollo en la base p de un número

Como hemos mencionado, es necesario trabajar con la representación binaria de un número $x \in [0,1]$ para construir y estudiar las propiedades de la función de Takagi pues, se tiene que al trabajar con esta representación, se logra una visión más amplia sobre el comportamiento de la misma.

En primer lugar, daremos una construcción de la representación de un número $x \in [0,1]$ en una base $p \in \mathbb{N}$ arbitraria y luego la llevaremos al caso en que $p=2$.

Teorema 1.1. *Sean $x\in[0,1)$, $p\in\mathbb{N}$, entonces existe una única sucesión $\{a_i\}_{i\geqslant 1}$, tal que $a_i\in\{0,\cdots,p-1\}$ para todo $i\geqslant 1$ y se tiene que*

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{p^i}, \tag{1.1}$$

salvo en los puntos de la forma $x=\frac{k}{p^l}$, con $k\in\mathbb{Z}$, $l\in\mathbb{N}$, en donde existen dos representaciones.

Demostración: Para verificar la igualdad (1.1) haremos una partición del intervalo [0,1) en *p-intervalos* de longitud $\frac{1}{p}$ de la forma $\left[\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}\right)$ con $k\in\{0,\cdots,p-1\}$, es decir,

$$[0,1)=\bigcup_{k=0}^{p-1}\left[\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}\right)$$

y $\left[\frac{k}{p},\frac{k+1}{p}\right)\cap\left[\frac{l}{p},\frac{l+1}{p}\right)=\emptyset$ para $k\neq l$.

Luego, dado $x\in[0,1)$ existe un único $k_0\in\{0,\cdots,p-1\}$ tal que $x\in\left[\frac{k_0}{p},\frac{k_0+1}{p}\right)$ y definiendo los siguientes términos

$$a_1:=k_0 \qquad\qquad S_1:=a_1p^{-1},$$

se tiene que $x=S_1+r_1$, donde $0\leqslant r_1<p^{-1}$. Si $r_1=0$ entonces $x=\frac{k_0}{p}$ y ya hemos encontrado la representación en la base p de x y finalizamos el proceso. En caso contrario ($r_1\neq 0$) se divide el intervalo $\left[\frac{k_0}{p},\frac{k_0+1}{p}\right)$ en *p-partes* iguales de longitud $\frac{1}{p^2}$ de la forma $\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{k+1}{p^2}\right)$ con $k\in\{0,\cdots p-1\}$. Así obtenemos una partición de $\left[\frac{k_0}{p},\frac{k_0+1}{p}\right)$ donde

$$\left[\frac{k_0}{p},\frac{k_0+1}{p}\right)=\bigcup_{k=0}^{p-1}\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{k+1}{p^2}\right)$$

y $\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{k+1}{p^2}\right)\cap\left[\frac{k_0}{p}+\frac{l}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{l+1}{p^2}\right)=\emptyset$ para $k\neq l$. Luego existe un único $k_1\in\{0,\cdots,p-1\}$ tal que $x\in\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{k_1+1}{p^2}\right)$ y definiendo

$$a_2:=k_1 \qquad\qquad S_2:=a_1p^{-1}+a_2p^{-2},$$

se tiene que $x=S_2+r_2$ donde $0\leqslant r_1<p^{-2}$. Si $r_2=0$ entonces $x=S_1+\frac{k_1}{p^2}$ y ya hemos encontrado su representación en la base p. Si $r_2\neq 0$ se divide de nuevo el intervalo $\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2},\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2}\right)$ en *p-partes* iguales y utilizando el mismo procedimiento que en el paso anterior se concluye que existe un único $k_2\in\{0,\cdots,p-1\}$ tal que $x\in\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2}+\frac{k_2}{p^3},\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2}+\frac{k_2+1}{p^3}\right)$.

Siguiendo con este mismo procedimiento para el *n-ésimo* paso, se tiene que al dividir el intervalo $\left[\frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2}+\cdots+\frac{k_{n-2}}{p^{n-1}}, \frac{k_0}{p}+\frac{k_1}{p^2}+\cdots+\frac{k_{n-2}+1}{p^{n-1}}\right)$ en *p-partes* iguales, existe un único $k_{n-1}\in\{0,\cdots,p-1\}$ tal que $x\in\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k_i}{p^{i+1}}, \sum_{i=0}^{n-2}\frac{k_i}{p^{i+1}}+\frac{k_{n-1}+1}{p^n}\right)$ y definiendo

$$a_n := k_{n-1} \qquad\qquad S_n := a_1p^{-1}+\cdots+a_np^{-n},$$

se tiene que $x = S_n + r_n$ donde $0 \leqslant r_n < p^{-n}$. Si $r_n = 0$ entonces $x = S_n$, por otra parte, si $r_n \neq 0$ se repite el procedimiento anterior.

Luego, se concluye que si $r_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{p^i}.$$

Veamos que sucede en el caso en que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o lo que equivale a preguntarse si es convergente la serie

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{p^i}.$$

Para verificar la convergencia basta ver que la sucesión de sumas parciales es convergente. Tenemos que $r_n = x - S_n$ y ademas $0 \leqslant r_n < p^{-n}$.

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $N_\epsilon = \left[\frac{\log(\epsilon)}{-\log(p)}\right]+1$ de modo que si $n \geq N_\epsilon$, entonces $n \geq \frac{\log(\epsilon)}{-\log(p)}$ lo que implica que

$$\frac{1}{p^n} < \epsilon.$$

Por lo tanto $0 \leq x - s_n < \frac{1}{p^n} < \epsilon$ siempre que $n \geq N$, es decir, S_n converge a x y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{p^n}$ converge a $x \in [0,1]$.

Si consideramos intervalos semiabiertos a la izquierda en lugar de la derecha como lo hicimos en la construcción anterior, la representación para los puntos de la forma $\frac{k}{p^l}$ cambian. La diferencia está que al considerar este tipo de intervalos, se tiene que para $n > l$ la representación terminará en unos en vez de ceros. $\square$

De ahora en adelante solo utilizaremos la representación que termina en ceros para los puntos de la forma $x = \frac{k}{p^l}$ pertenecientes a [0,1]. Es decir, solo consideremos intervalos semiabiertos a la derecha.

Ahora nos interesa saber como es la representación en la base p para cualquier $t \in \mathbb{Z}$, en primer lugar demostraremos que este este hecho se cumple para los enteros positivos.

Teorema 1.2. *Sea p un entero positivo tal que $p \geqslant 1$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y enteros $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ tales que*

$$t = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i. \tag{1.2}$$

Demostración: De acuerdo con el algoritmo de la división de Euclides, si se divide t entre p entonces existen enteros q_0, b_0 tales que

$$t = q_0 p + b_0, \quad \text{donde } b_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

luego, dividimos el cociente q_0 entre p y del algoritmo de la división de Euclides, se obtiene la siguiente igualdad

$$q_0 = q_1 p + b_1, \quad \text{donde } b_1 \in \{0, 1, 2 \ldots, p-1\}$$

repitiendo este mismo proceso para cada cociente q_1, se obtiene la siguiente secuencia de igualdades

$$\begin{aligned} q_1 &= q_2 p + b_2, \quad \text{donde } b_2 \in \{0, 1, 2 \ldots, p-1\} \\ &\vdots \\ q_{n-3} &= q_{n-2} p + b_{n-2}, \quad \text{donde } b_{n-2} \in \{0, 1, 2 \ldots, p-1\} \\ q_{n-2} &= q_{n-1} p + b_{n-1}, \quad \text{donde } b_{n-1} \in \{0, 1, 2 \ldots, p-1\}, \end{aligned}$$

Podemos observar que a medida que vamos dividiendo cada uno de los cocientes q_i entre p, van decreciendo estrictamente, y justo en el momento en que uno de ellos sea menor que p, se tiene

$$q_{n-1} = b_n.$$

Sustituyendo el valor de q_{n-1} en la igualdad anterior se obtiene,

$$q_{n-2} = b_n p + b_{n-1},$$

sustituyendo el valor de q_{n-2} en la igualdad anterior, se obtiene

$$q_{n-3} = b_n p^2 + b_{n-1} p + b_{n-2},$$

Repitiendo este proceso sucesivamente, obtendremos una representación de t en función de los coeficientes b_i y en potencias de p, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} &\vdots \\ q_1 &= b_n p^{n-2} + b_{n-1} p^{n-3} + \cdots + b_3 p + b_2, \\ q_0 &= b_n p^{n-1} + b_{n-1} p^{n-2} + \cdots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1, \\ t &= b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0. \qquad \square \end{aligned}$$

Si t es un entero negativo, entonces también admite una representación en la base p, la demostración de este hecho es análoga al Teorema 1.2, solo con la diferencia que los dígitos $b_i \in -(\imath - \nVdash), -(\imath - \nvDash), \ldots, -\nvDash, -\nVdash, \nvdash$. Por lo tanto, se tiene una representación en la base p, para cualquier $t \in \mathbb{Z}$. Es importante notar que cualquier $t \in \mathbb{Z}$ tendrá una representación finita en la base p.

Por otra parte, si $x \in \mathbb{R}$, este puede ser escrito de la siguiente forma

$$x = t + \alpha$$

donde $t \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in [0, 1]$. De lo estudiado anteriormente se obtiene el siguiente resultado

TEOREMA 1.3. *Sean* $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, *entonces existen una única sucesión* $\{a_i\}_{i \geqslant 1}$, $n \in \mathbb{N}$ *y enteros* $b_0, b_1, \ldots, b_n$, *tales que* $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ *para todo* $i \geqslant 1$ *y* $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ *se tiene que*

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i p^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p^i}.$$

SECCIÓN 2

Desarrollo en base 2 de un número $x \in \mathbb{N}$

Ahora nos enfocaremos en la representación binaria, es decir, aquella que tiene como base al número $p=2$. Este tipo de representación nos será útil para construir la función de Takagi y demostrar ciertas propiedades que esta satisface.

Si $x \in [0,1]$, existe una única sucesión $a_i \in \{0,1\}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \quad \text{donde } a_i \in \{0,1\}. \tag{1.3}$$

salvo en los puntos de la forma $x = \frac{k}{2^l}$, donde $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$, los cuales poseen dos representaciones.

Los puntos de la forma $\frac{p}{2^l}$ reciben el nombre de racionales diádicos y son de gran interés, pues la función de Takagi satisface propiedades únicas en este conjunto de números. Como antes, consideraremos intervalos semiabiertos a la derecha, es decir, trabajaremos con la representación que termina en ceros para estos puntos.

En la sección anterior vimos que los números enteros tienen una representación finita en la base p, en particular es cierto para $p=2$, de donde se tiene que si $t \in \mathbb{Z}$, su representación binaria viene dada por

$$t = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i, \quad \text{donde } b_i \in \{0,1\}. \tag{1.4}$$

Recordemos que un número $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, puede ser escrito como $x = t + \alpha$, con $t \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in [0,1]$. Utilizando las representaciones dadas en (1.4) y (1.3), se concluye que

$$x = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}, \quad \text{donde } a_i, b_i \in \{0,1\}.$$

Aparte de la notación dada en (1.3), vamos a utilizar la siguiente expresión para escribir la representación binaria de un número $x \in [0,1]$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \quad \text{donde } a_i \in \{0,1\}. \tag{1.5}$$

Esta representación permite presentar con mayor simplicidad los resultados que estudiaremos en el Capítulo 3.

SECCIÓN 3

La funciones suma de dígitos binarios

Originalmente Teiji Takagi en [**17**] construyo la función de Takagi utilizando una función que contaba la cantidad de 1 o 0 que hay antes de un cierto dígito de la representación binaria de un número $x \in [0,1]$. Esta función es conocida como la función suma de dígitos binarios y está definida tanto para números enteros y números que pertenecen al intervalo $[0,1]$.

Es importante mencionar que los números que pertenecen al intervalo $[0,1]$ poseen infinitos términos en su representación binaria, por lo tanto, esta función solo contará la cantidad de dígitos que hay en los primeros n términos de su representación. Recordemos que los puntos de la forma $x = \frac{k}{2^l}$, es decir, los racionales diádicos poseen dos expansiones binarias, así que dichas funciones dependen del tipo de representación que se use. No debemos perder de vista que nosostros usaremos la representación que termina en ceros.

Definición 1.1. *Sea $t \in \mathbb{Z}^+$ con representación binaria dada en* (1.4), *definimos la función suma de dígitos binarios de la siguiente manera*

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i. \tag{1.6}$$

Podemos notar que esta función cuenta la cantidad de dígitos $b_i = 1$, que tiene t en su representación binaria.

De las nociones de Álgebra, sabemos que el conjunto de los números enteros lo podemos particionar en enteros pares e impares. A continuación, daremos un resultado que caracteriza a la función suma de dígitos binarios para estos conjuntos de números.

Proposición 1.1. *La función suma de dígitos binarios, cumple con las siguientes igualdades*

$$s(2t) = s(t) \tag{1.7}$$

$$s(2t+1) = s(t) + 1. \tag{1.8}$$

Demostración: Sea $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con representación binaria $t = \sum_{i=0}^{n} 2^i b_i$, entonces $2t$ tiene representación binaria

$$2t = 2\sum_{i=0}^{n} 2^i b_i = \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} b_i = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i b_{i-1},$$

por lo que

$$s(2t) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} b_i = s(t).$$

Por otra parte, $2t+1$ tiene representación binaria

$$2t + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} 2^i b_{i-1} + 1.2^0.$$

Luego

$$(2t+1) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i-1} + 1 = 1 + s(t).$$

$\square$

Ahora vamos a definir la función suma de dígitos para valores pertenecientes al intervalo $[0, 1]$, como se mencionón al inicio de esta sección, estos poseen infinitos términos en su representación binaria, debido a esto la función suma de dígitos contará la cantidad de 1 o 0 que hay en los primeros n términos de la representación.

Definición 1.2. *Sea* $x \in [0,1]$ *cuya expansión binaria viene dada por* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *con* $a_i \in \{0,1\}$, *entonces para* $i \geq 1$ *definimos las siguientes funciones a valores enteros*

(i) *La función suma de dígitos*

$$N_n^1(x) := a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1.9}$$

Esta expresa la cantidad de 1 *en los primeros* n *términos de la expasión binaria de* x.

(ii) *La función suma de ceros*

$$N_n^0(x) := n - N_n^1(x). \tag{1.10}$$

Esta expresa la cantidad de ceros en los primeros n *términos de la expasión binaria de* x.

(iii) *La función suma de dígitos deficiente* $D_n(x)$ *definida como*

$$D_n(x) := N_n^0(x) - N_n^1(x) = n - 2N_n^1(x) = n - 2(a_1 + a_2 \cdots + a_n). \tag{1.11}$$

Esta cuenta el exceso de dígitos 0 sobre los dígitos 1 en los primeros n *términos, es decir, será positiva si hay más ceros que unos. En caso contrario será negativa.*

SECCIÓN 4

La función distancia al entero más cercano

Hasta ahora, nuestro enfoque principal ha sido trabajar con la representación binaria de un número $x \in \mathbb{R}$ y luego definir las funciones sumas de dígitos binarios para construir la función de Takagi. En lo que sigue, presentaremos una función que mide la distancia de un número x al entero más cercano, esta función es de gran importancia ya que nos permite dar una construcción alternativa de la función de Takagi, la cual resulta ser más simple a la hora de demostrar ciertas propiedades que satisface esta función.

DEFINICIÓN 1.3. *Sea $x \in \mathbb{R}$, la función distancia al entero más cercano, viene dada por*

$$\ll x \gg = \inf_{m\in\mathbb{Z}} |x-m|.$$

Como hemos hecho anteriormente, iniciaremos el estudio de esta función para un $x \in [0,1]$ y luego extederemos este resultado para toda la recta real.

PROPOSICIÓN 1.2. *La función distancia al entero más cercano satisface las siguientes propiedades*

(i) *Si $x \in [0,1]$ se tiene*

$$\ll x \gg := \begin{cases} x, & si\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right). \\ 1-x, & si\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \tag{1.12}$$

(ii) *Si $x \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$\ll 2^n x \gg := \begin{cases} 2^n x - t, & si\ x \in \left[\frac{2t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}}\right),\ t \in \mathbb{Z}. \\ t - 2^n x, & si\ x \in \left[\frac{2t-1}{2^{n+1}}, \frac{2t}{2^{n+1}}\right),\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Demostración: Tenemos que el intervalo $[0,1]$, se puede particionar de la siguiente manera

$$[0,1] = \left[0, \frac{1}{2}\right) \bigcup \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

Luego, si $x \in [0, \frac{1}{2})$ se tiene

$$\inf_{m\in\mathbb{Z}} |x-m| = |x-0| = x.$$

Por otra parte, si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ se satisface

$$\inf_{m\in\mathbb{Z}}|x-m|=|x-1|=1-x,$$

de donde concluimos con la condición (1.12).

Por otra parte, se tiene que para un entero $n\geqslant 0$ fijo, el conjunto de los números reales puede ser particionado de la siguiente manera

$$\mathbb{R}=\bigcup_{t\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2t-1}{2^{n+1}},\frac{2t}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2t}{2^{n+1}},\frac{2t+1}{2^{n+1}}\right),$$

luego existe un único t_0, tal que

$$x\in\left[\frac{2t_0-1}{2^{n+1}},\frac{2t_0}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2t_0}{2^{n+1}},\frac{2t_0+1}{2^{n+1}}\right).$$

De esto se tiene que si $x\in\left[\frac{2t_0-1}{2^{n+1}},\frac{2t}{2^{n+1}}\right)$ entonces $2^nx\in\left[\frac{2t_0-1}{2},t_0\right)$ y así concluimos que

$$\ll 2^nx\gg=\inf_{m\in\mathbb{Z}}|2^nx-m|=|2^nx-t_0|=t_0-2^nx.$$

Por otra parte, si $x\in\left[\frac{2t_0}{2^{n+1}},\frac{2t_0+1}{2^{n+1}}\right)$ entonces $2^nx\in\left[t_0,\frac{2t_0+1}{2}\right)$, luego

$$\ll 2^nx\gg=\inf_{m\in\mathbb{Z}}|2^nx-m|=|2^nx-t_0|=2^nx-t_0.$$

de donde, se verifica (1.13). □

También podemos definir la función distancia al entero más cercano usando la expansión binaria de un número $x\in\mathbb{R}$.

Proposición 1.3. *Consideremos $x\in[0,1]$ con su expasión binaria $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}=0,a_1a_2\ldots,$ donde $a_i\in\{0,1\}$. Entonces, tenemos que*

(i)

$$\ll x\gg:=\begin{cases}0,a_1a_2a_3\cdots, & \textit{si } a_1=0,\\ \\ 0,\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\cdots, & \textit{si } a_1=1.\end{cases} \tag{1.14}$$

donde $\bar{a}=1-a$, para $a=0$ o $a=1$, es el complemento del dígito binario.

(ii)

$$\ll 2^nx\gg:=\begin{cases}0,a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\cdots, & \textit{si } a_{n+1}=0,\\ \\ 0,\bar{a}_{n+1}\bar{a}_{n+2}\bar{a}_{n+3}\cdots, & \textit{si } a_{n+1}=1.\end{cases} \tag{1.15}$$

Demostración: Utilizaremos un razonamiento análogo a la proposición (1.2). Tenemos que el intervalo $[0,1)$ lo podemos particionar de la siguiente manera

$$[0,1)=\left[0,\frac{1}{2}\right)\bigcup\left[\frac{1}{2},1\right).$$

Para el caso en que $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, es decir, $a_1=0$ se tiene que

$$\ll x\gg=\inf_{m\in\mathbb{Z}}|x-m|=|x-0|=x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}=0,a_1a_2\ldots,$$

por otra parte, si $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ que es equivalente a que $a_1=1$

$$\ll x\gg=\inf_{m\in F}|x-m|=|x-1|=1-x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-a_i}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{a}_i}{2^i}=0,\bar{a}_1\bar{a}_2\ldots.$$

Tenemos que para todo entero $n\geqslant 0$, el intervalo [0,1] puede ser particionado de la siguiente manera

$$[0,1]=\bigcup_{t=0}^{2^n-1}\left[\frac{2t}{2^{n+1}},\frac{2t+1}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2t+1}{2^{n+1}},\frac{2t+2}{2^{n+1}}\right),$$

tomando esto cuenta vamos a proponer los siguientes casos:

En la representación binaria de un punto $x\in[0,1]$, el término a_{n+1} será igual a cero si $x\in[\frac{2t}{2^{n+1}},\frac{2t+1}{2^{n+1}})$ y a_{n+1} será igual a uno si $x\in[\frac{2t+1}{2^{n+1}},\frac{2t+2}{2^{n+1}})$.

Una vez establecido este razonamiento tenemos que si $x\in[0,1]$, existe un único $t_0\in\{0,1,\ldots,2^n-1\}$ tal que

$$x\in\left[\frac{2t_0}{2^{n+1}},\frac{2t_0+1}{2^{n+1}}\right)\cup\left[\frac{2t_0+1}{2^{n+1}},\frac{2t_0+2}{2^{n+1}}\right),$$

de donde

$$2^nx\in\left[\frac{2t_0}{2},\frac{2t_0+1}{2}\right)\cup\left[\frac{2t_0+1}{2},\frac{2t_0+2}{2}\right).$$

Primero, estudiemos el caso en que $2^nx\in\left[\frac{2t_0}{2},\frac{2t_0+1}{2}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\ll 2^nx\gg=\inf_{m\in\mathbb{Z}}|2^nx-m|=2^nx-t_0=\sum_{i=0}^{\infty}2^n\frac{a_i}{2^i}-t_0=\sum_{i=0}^{n}2^{n-i}a_i+\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{n-i}a_i-t_0\\=\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{n-i}a_i=0,a_{n+1}a_{n+2}\ldots\end{aligned}$$

Por otra parte, si $2^n x \in \left[\frac{2t_0+1}{2}, \frac{2t_0+2}{2}\right)$, se tiene que

$$\ll 2^n x \gg = \inf_{m\in\mathbb{Z}} |2^n x - m| = t_0 + 1 - 2^n x = t_0 + 1 - \sum_{i=0}^{\infty} 2^n \frac{a_i}{2^i} = t_0 + 1 - \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i} a_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i$$

$$= 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{n-i} a_i = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1-a_i}{2^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\bar{a}_i}{2^i} = 0, \bar{a}_{n+1}\bar{a}_{n+2}\ldots.$$

Quedando (1.15) demostrado $\square$

En general, podemos escribir la función distancia al entero más cercano para $x \in [0,1]$ de la siguiente manera

$$\ll x \gg = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(1-a_1) + (1-a_i)a_1}{2^i}, \quad \text{donde } a_i \in \{0,1\}. \tag{1.16}$$

Por otra parte, se tendrá que

$$\ll 2^n x \gg = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}(1-a_{n+1}) + (1-a_{n+i})a_{n+1}}{2^i}. \tag{1.17}$$

CAPÍTULO 2

La función de Takagi

Años después que Takagi presentara su función, esta fue redescubierta por otros matemáticos en diferentes contextos y proporcionaron representaciones alternativas de la misma. Tales como Van der Waerden en 1930 [**20**], presentó una variación de la función de Takagi, usando la representación en la base 10 de un número. En 1933, Hildebrandt en [**8**], simplificó la función presentada por Van der Waerden usando la representación binaria de un número y así redescubriendo la función de Takagi. En 1957, Georges de Rham en [**16**] en el contexto de funciones auto-afines, redescubrió a la función de Takagi, identificándola como un miembro de una clase más general de funciones que son soluciones de cierta familia de ecuaciones funcionales.

En este Capítulo vamos a construir a la función de Takagi utilizando aproximaciones lineales y a partir de las funciones dígitos binarios, basándonos en las ideas planteadas por Abbott en [**1**] y Lagarias en [**13**].

SECCIÓN 1

Construcción de la función de Takagi a partir de funciones lineales a trozos

Consideremos la función $h(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ y luego tomemos su extensión periódica al exigir que $h(x + 2) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El resultado de esta extensión periódica es la función carpa la cual viene dada en la siguiente figura

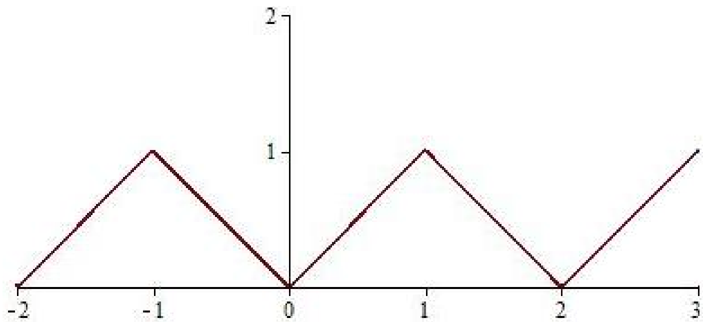

FIGURA 1. La función $h(x)$

Se puede observar que por construcción, h es una función periódica de período 2 y explícitamente se tiene que

$$h(x) = \begin{cases} x - 2t, & \text{si } x \in [2t, 2t+1],\ t \in \mathbb{Z} \\ \\ 2t - x, & \text{si } x \in [2t-1, 2t],\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Además, h es una función par, pues sí $x \in [0, 1]$

$$h(-x) = |-x| = |x| = h(x).$$

Por otra parte, se tiene que $h(2t) = 0$ y $h(2t - 1) = 1$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

Para cada entero $n \geqslant 0$, definamos las funciones h_n como

$$h_n(x) = \frac{1}{2^n} h(2^n x),\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Veamos como se comporta $h_1(x) = \frac{1}{2}h(2x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Note que al multiplicar por 2 el argumento de la función h, estamos contrayendo en $\frac{1}{2}$ su dominio, por lo que h_1 es también una función periódica pero ahora con período 1. Finalmente al multiplicar a $h(2x)$ por $\frac{1}{2}$, estamos contrayendo en $\frac{1}{2}$ las alturas tomadas por h. En la Figura 2, vemos el gráfico de h_1 en el intervalo $[-2, 2]$

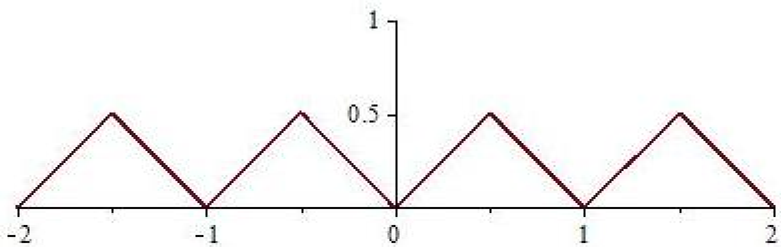

FIGURA 2. Extensión periódica de la función $h_1(x)$.

y explícitamente se tiene

$$h_1(x) = \begin{cases} x - t & \text{si } x \in \left[t, \frac{2t+1}{2}\right], t \in \mathbb{Z} \\ \\ -x + t & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2}, t\right], t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Usando un razonamiento análogo al caso anterior, podemos hallar el comportamiento de $h_2(x) = \frac{1}{2^2} h(2^2 x)$ y explícitamente se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$h_2(x) = \begin{cases} x - \frac{t}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2}, \frac{2t+1}{4}\right], t \in \mathbb{Z}, \\ \\ -x + \frac{t}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{4}, \frac{t}{2}\right], t \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.4}$$

además $h_2(x)$ es una función periódica de período $\frac{1}{2}$.

En general, se tiene que cada h_n es una función periódica de período $\frac{1}{2^{n-1}}$ y es una función par. Además $h_n\left(\frac{2t}{2^n}\right) = 0$, $h_n\left(\frac{2t-1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ y $|h_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Explícitamente se tiene

$$h_n(x) = \begin{cases} x - \frac{t}{2^{n-1}} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2^{n-1}}, \frac{2t+1}{2^n}\right], t \in \mathbb{Z} \\ \\ -x + \frac{t}{2^{n-1}} & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2^n}, \frac{t}{2^{n-1}}\right], t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.5}$$

Se puede observar, que cada una de las funciones h_n al extenderlas periódicamente en toda la recta real definen una función carpa, solo que a medida que n crece el período se reduce en un factor de $\frac{1}{2^{n-1}}$.

En esta sección vamos a construir a la función de Takagi como la suma de las funciones h_n. El resultado de estas sumas son funciones lineales en los intervalos que tienen por extremo a los racionales diádicos y además en cada uno de estos intervalos la pendiente de la recta varían y como es de esperarse a medida que estos intervalos se vayan haciendo más pequeños la suma de las pendientes de las rectas tienden a $+\infty$ o $-\infty$.

La suma parcial de nivel N de la función de Takagi, viene dada por

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{h_n(x)}{2^n}. \tag{2.6}$$

A continuación presentaremos los gŕaficos de la sucesión de sumas parciales para los casos $N = 1, 2, 3$.

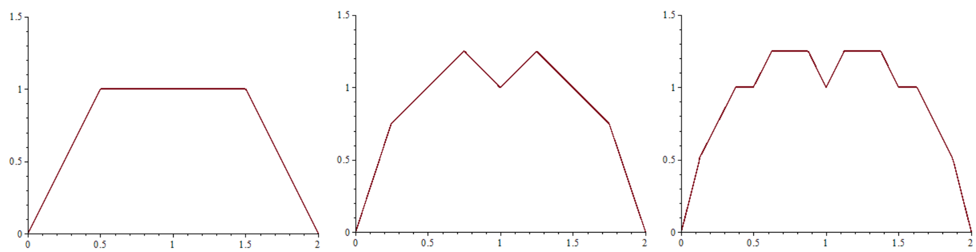

Figura 3. Aproximaciones de la función de Takagi: (De izquierda a derecha) $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$.

Definición 2.1. *Considerando las funciones h_n definidas en la ecuación* (2.2) *se define la función de Takagi como*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x). \tag{2.7}$$

Nuestro primer paso es garantizar la convergencia uniforme de la serie (2.7), resultado que demostraremos en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x),$$

es convergente.

Demostración: Para verificar este resultado debemos considerar la sucesión de funciones $M_n = \frac{1}{2^n}$ y el hecho de que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|h_n| \leqslant M_n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la serie es convergente, y del Criterio M de Weierstrass, que la serie (2.7) converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$ y converge uniformemente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. $\square$

El Teorema 2.1, nos garantiza que es posible construir la función de Takagi mediante aproximaciones lineales. Gráficamente la función g viene dada por

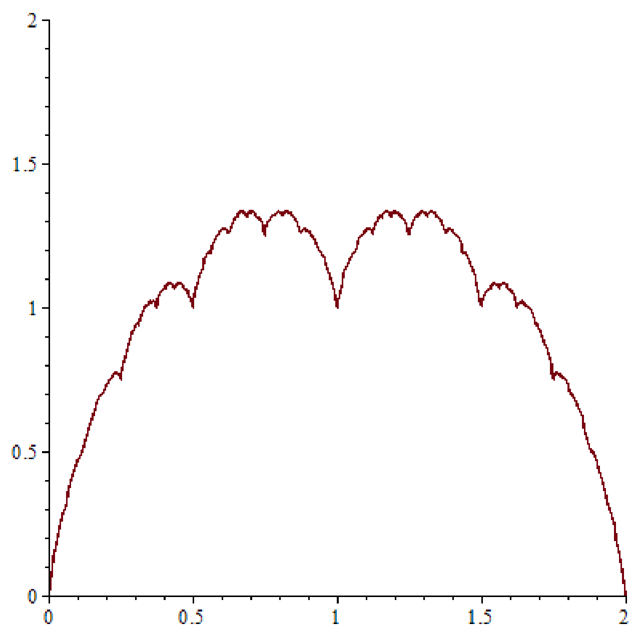

FIGURA 4. Gráfico de la función $g(x)$.

Ahora, vamos a estudiar algunas de las propiedades que satisface esta función.

PROPOSICIÓN 2.1. *La funcion de Takagi satisface las siguientes propiedades*

(i) *La función g es períodica de período* 2.

(ii) *La función g es par.*

(iii) *La función g es continua.*

Demostración: Para demostrar (i) usaremos el hecho que la función h tiene período 2 y que es par. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$g(2+x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(2+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^{n+1} + 2^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n x) = g(x).$$

Veamos que g es una función par. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces, como cada función h_n es par

$$g(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) = g(x).$$

Para garantizar la continuidad, usaremos el hecho de que $\{h_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas y ademas $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ converge uniformemente a g entonces g es continua. $\square$

SECCIÓN 2

La función de Takagi a partir de la función distancia al entero más cercano

Al igual que en la sección anterior, vamos a construir la función de Takagi como límite de funciones lineales a trozos pero esta vez lo haremos utilizando la función distancia al entero más cercano. Para esto, consideraremos $\ll x \gg$ en el intervalo $[0, 1]$ y consideraremos su extensión periódica al exigir que $\ll x+1 \gg = \ll x \gg$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Gráficamente se tiene

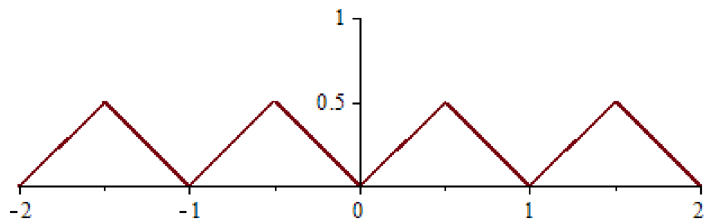

FIGURA 5. Extensión periódica de $\ll x \gg$

Esta extensión periódica nos da como resultado la función carpa, pero a diferencia de h esta tiene una contracción de $\frac{1}{2}$ en sus alturas y su período está reducido a 1, explícitamente se tiene

$$\ll x \gg := \begin{cases} x - t, & \text{si } x \in \left[\frac{2t}{2}, \frac{2t+1}{2}\right), \\ \\ t - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2}, \frac{2t}{2}\right). \end{cases} \tag{2.8}$$

Veamos como se comporta $\frac{1}{2} \ll 2x \gg$ en el intervalo $[-1, 1]$. Tenemos que al multiplicar por 2 el argumento de la función $\ll \cdot \gg$, estamos contrayendo en $\frac{1}{2}$ su dominio, por lo que $\frac{1}{2} \ll 2x \gg$ es también una función periódica pero ahora con período $\frac{1}{2}$. Finalmente al multiplicar a $\ll 2x \gg$ por $\frac{1}{2}$, estamos contrayendo en $\frac{1}{2}$ las alturas tomadas por $\ll \cdot \gg$. En la Figura 6, vemos el gráfico de $\frac{1}{2} \ll 2x \gg$ en el intervalo $[-1, 1]$

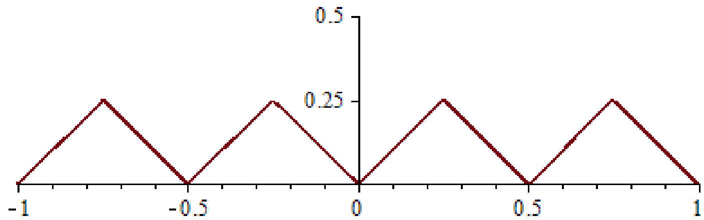

FIGURA 6. Función $\frac{1}{2} \ll 2x \gg$, en el intervalo $[-1, 1]$.

y explícitamente se tiene

$$\frac{1}{2} \ll 2x \gg = \begin{cases} x - \frac{t}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2}, \frac{2t+1}{4}\right], t \in \mathbb{Z}, \\ \\ -x + \frac{t}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{4}, \frac{t}{2}\right], t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Usando un razonamiento análogo al caso anterior, podemos hallar el comportamiento de $\frac{1}{2^2} \ll 2^2 x \gg$. Gráficamente se tiene

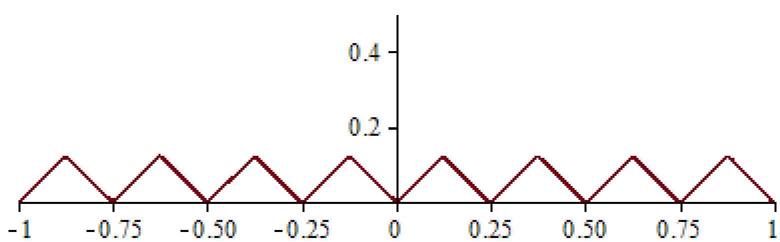

FIGURA 7. Función $\frac{1}{2^2} \ll 2^2 x \gg$, en el intervalo $[-1, 1]$.

y explícitamente se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2^2} \ll 2^2 x \gg = \begin{cases} x - \frac{t}{2^2} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{4}, \frac{2t+1}{4}\right], t \in \mathbb{Z}, \\ \\ -x + \frac{t}{2^2} & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{4}, \frac{t}{4}\right], t \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.10}$$

además $\frac{1}{2^2} \ll 2^2 x \gg$ es una función periódica de período $\frac{1}{4}$.

En general, se tiene que para todo entero $n \geqslant 0$ los términos $\frac{1}{2^n} \ll 2^n x \gg$ son funciones periódicas de período $\frac{1}{2^{n+1}}$ y explícitamente se tiene

$$\frac{1}{2^n} \ll 2^n x \gg = \begin{cases} x - \frac{t}{2^n} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2^{n+1}}, \frac{2t+1}{2^{n+1}}\right], t \in \mathbb{Z} \\ \\ -x + \frac{t}{2^n} & \text{si } x \in \left[\frac{2t-1}{2^{n+1}}, \frac{t}{2^{n+1}}\right], t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.11}$$

Se puede observar, que cada una de las funciones $\frac{1}{2^n} \ll 2^n x \gg$ al extenderlas periódicamente en toda la recta real definen una función carpa, solo que a medida que n crece el período se reduce en un factor de $\frac{1}{2^{n+1}}$.

Como se hizo en la sección anterior, construiremos la función de Takagi como la suma de las funciones lineales $\frac{1}{2^n} \ll 2^n x \gg$.

La suma parcial de nivel n de la función de Takagi, viene dada por

$$\tau_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\ll 2^i x \gg}{2^i}. \tag{2.12}$$

En la siguiente figura presentaremos el comportamiento de esta suma parcial para el caso $n = 1, 2, 3$.

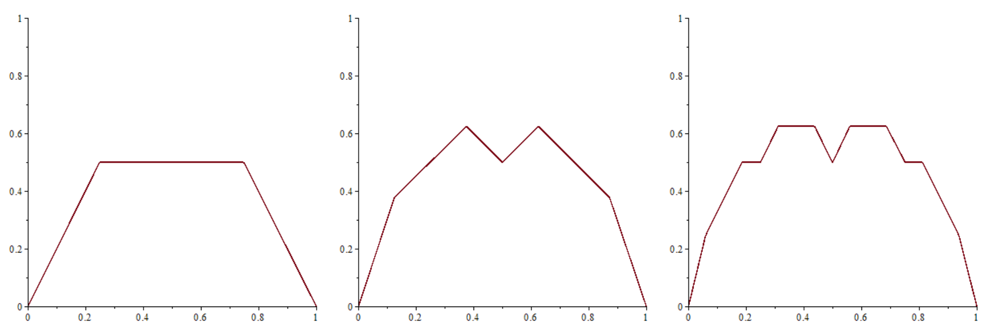

FIGURA 8. Aproximaciones de la función de Takagi: (De izquierda a derecha) $\tau_1(x)$, $\tau_2(x)$, $\tau_3(x)$.

DEFINICIÓN 2.2. *La función de Takagi viene dada por*

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n}. \tag{2.13}$$

Una vez definida τ, nos interesa garantizar la convergencia de la serie (2.13), esto será demostrado en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Para todo* $x\in\mathbb{R}$, *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ll 2^n x\gg}{2^n} \tag{2.14}$$

es convergente.

Demostración: Tenemos que la función distancia al entero más cercano satisface para todo $x\in\mathbb{R}$ y $n\geqslant 0$

$$\ll 2^n x\gg\leqslant\frac{1}{2}.$$

Luego considerando la sucesión de funciones $M_n=\frac{1}{2^{n+1}}$ tenemos que $\frac{1}{2^n}\ll 2^n x\gg\leqslant M_n$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty}M_n$, es una serie geométrica de razón $r=\frac{1}{2}$ y por lo tanto convergente, se sigue del criterio M de Weierstrass que la serie (2.14) converge absolutamente en todo $\mathbb{R}$ y converge absolutamente en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. $\square$

El siguiente Teorema nos muestra una comparación entre las dos representaciones τ y g de la función de Takagi que hemos definido. Antes de dar la demostración de este hecho debemos comprobar el siguiente Lema

Lema 2.1. *Para todo* $x\in[0,1]$ *la función distancia al entero más cercano satisface la siguiente relación con la función* h*.*

$$\ll 2^n x\gg = 2^n h_{n+1}(x).$$

Demostración: Se tiene que la función $\ll\cdot\gg$ es una contracción de la función h en un factor de $\frac{1}{2}$ en el dominio y también en un factor de $\frac{1}{2}$ en las alturas, lo que nos dice que $\ll x\gg=\frac{1}{2}h(2x)=h_1(x)$. Se puede ver en las ecuaciones (2.8) y (2.3) que en efecto estas funciones coinciden para todo $x\in\mathbb{R}$. Igualmente, se tiene a partir de las ecuaciones (2.11) y (2.4) que $\frac{1}{2}\ll 2x\gg=\frac{1}{2^2}h(2^2x)=h_2(x)$.

Continuando con este razonamiento, se tiene que para todo entero $n\geqslant 0$

$$\frac{1}{2^n}\ll 2^n x\gg=\frac{1}{2^{n+1}}h(2^{n+1}x)=h_{n+1}(x).$$

$\square$

Teorema 2.3. *Para cada $x \in [0,1]$, se tiene que*

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n} = \frac{1}{2} g(2x).$$

Demostración: Del Lema 2.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n h_{n+1}(x)}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2(2^n x))}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(2x) = \frac{1}{2} g(2x). \end{aligned}$$

□

Podemos observar que τ no es idéntica a la función g dada en la Definición 2.1, pues esta posee una contracción en $\frac{1}{2}$ del dominio g, es decir, τ es una función de período 1 y una contracción en las alturas de $\frac{1}{2}$. Gráficamente

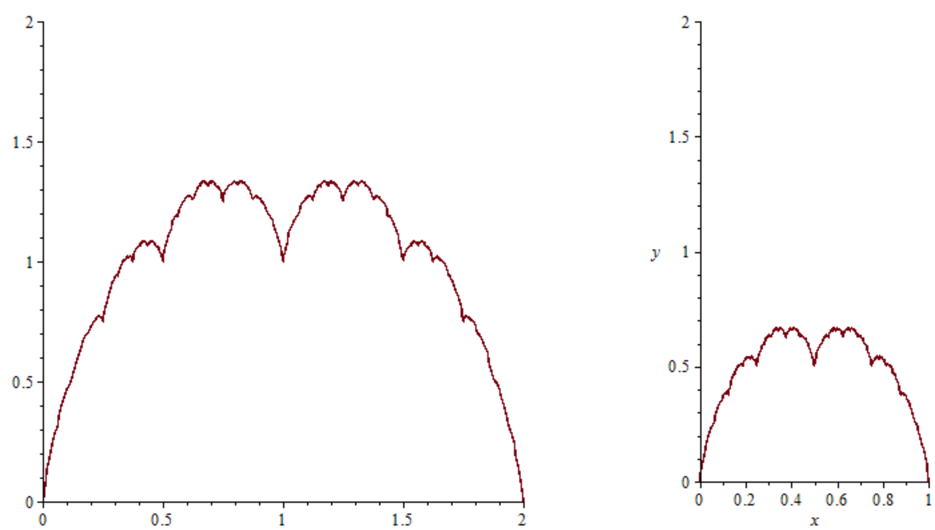

Figura 9. Funciones g y τ.

Ahora vamos a estudiar las propiedades de la función τ

PROPOSICIÓN 2.2. *La función τ satisface las siguientes propiedades*

(i) *τ es de período 1.*

(ii) *τ es una función par.*

(iii) *τ es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Estas propiedades se siguen del Teorema 2.3 y la Proposición 2.1. En efecto

$$\tau(x+1) = \frac{1}{2}g(2(x+1)) = \frac{1}{2}g(2x+2)$$

de la periodicidad de g se tiene que

$$\tau(x+1) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

Para demostrar que τ es par, usaremos el hecho de que g es una función par

$$\tau(-x) = \frac{1}{2}g(2(-x)) = \frac{1}{2}g(-2x) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

Como las funciones $\left\{\frac{\ll 2^i x \gg}{2^i}\right\}_{i\geqslant 0}$ son continuas en $\mathbb{R}$ y además $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ll 2^i x \gg}{2^i}$ converge uniformemente a τ, se tiene que τ es continua.

$\square$

SECCIÓN 3

Definición original de Takagi

Las representaciones más comunes de la función de Takagi son las que hemos dado en las secciones anteriores, es decir, las representaciones dadas en (2.7) y (2.13). Como vimos, estas representaciones fueron construidas a partir de funciones lineales a trozos. La construcción que presentaremos en esta sección se obtiene a partir de las funciones sumas de dígitos binarios y fue la que utilizó Teiji Takagi en el año 1903 [**17**].

El siguiente resultado es presentado por Lagarias y Maddock en [**12**]. Este nos afirma que la definición original de Takagi, presentada en [**17**] coincide con la función τ.

Teorema 2.4. *Para* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ *la función de Takagi viene dada por*

$$\tau(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{l_m}{2^m}, \tag{2.15}$$

donde $0 \leq l_m = l_m(x) \leq m$, cuenta el número de dígitos diferentes que hay antes del término que se encuentra en posición m, es decir,

$$l_m(x) = \#\{i : 1 \leq i < m, a_i \neq a_m\}.$$

En términos de la función suma de dígitos, se tiene

$$l_m(x) := \begin{cases} N^1_{m-1}(x), & \text{si } a_m = 0, \\ \\ N^0_{m-1}(x), & \text{si } a_m = 1, \end{cases}$$

o, equivalentemente

$$l_m(x) = a_m N^0_{m-1}(x) + (1 - a_m) N^1_{m-1}(x). \tag{2.16}$$

Demostración: Para ver que (2.13) y (2.15) son equivalentes, usaremos la relación dada en (1.17) para la función distancia al entero más cercano, de donde se tiene que

$$\frac{\ll 2^n x \gg}{2^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{n+i}(1 - a_{n+1}) + (1 - a_{n+i}) a_{n+1}}{2^{n+i}}, \tag{2.17}$$

luego sustituyendo esta expresión en (2.13), obtenemos que

$$\tau(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ll 2^n x\gg}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{n+i}(1-a_{n+1})+(1-a_{n+i})a_{n+1}}{2^{n+i}}.$$

Fijando n y haciendo el cambio $m=n+i$ tenemos

$$\tau(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{a_m(1-a_{n+1})+(1-a_m)a_{n+1}}{2^m},$$

intercambiando las series llegamos al siguiente resultado

$$\tau(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{a_m(1-a_{n+1})+(1-a_m)a_{n+1}}{2^m}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a_m}{2^m}\left[\sum_{n=0}^{m-1}(1-a_{n+1})\right]+\frac{(1-a_m)}{2^m}\left[\sum_{n=0}^{m-1}a_{n+1}\right]\right\}$$

$$\tau(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a_m}{2^m}\left[\sum_{n=1}^{m}(1-a_n)\right]+\frac{(1-a_m)}{2^m}\left[\sum_{n=1}^{m}a_n\right]\right\}. \tag{2.18}$$

Notemos que la expresión (2.18) nos dará una contribución de $\frac{1}{2^m}$ siempre que $a_n=0$ y $a_m=1$, por otra parte la suma $\sum_{n=1}^{m}a_n$ nos dará una contribución de $\frac{1}{2^m}$ siempre que $a_n=1$ y $a_m=0$, es decir, cada una de estas sumas parciales cuenta el número de a_n con $1\leqslant n<m$ que tienen valor contrario a a_m, es decir, si $a_m=1$ la serie $\sum_{n=1}^{m}(1-a_n)$ cuenta la cantidad de ceros antes de a_m y si $a_m=0$ la serie $\sum_{n=1}^{m}a_n$ cuenta la cantidad de unos antes de a_m. Luego, en términos de la función suma de dígitos y suma de ceros se tiene

$$\begin{aligned}\tau(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ll 2^n x\gg}{2^n}=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{a_m}{2^m}\left[\sum_{n=1}^{m}(1-a_n)\right]+\frac{(1-a_m)}{2^m}\left[\sum_{n=1}^{m}a_n\right]\right\}\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_mN_{m-1}^0(x)+(1-a_m)N_{m-1}^1(x)}{2^m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{l_m}{2^m}.\qquad\square\end{aligned}$$

SECCIÓN 4

Relaciones Funcionales

La función de Takagi satisface ciertas ecuaciones funcionales que son de gran ayuda para el estudio de su derivabilidad. Para estudiar estas propiedades es necesario saber que la función de Takagi es una función acotada.

De la Figura 9, es fácil ver que la mínima altura de esta función es cero y en los únicos puntos donde la alcanza son $x = 0$ y $x = 1$, para el caso del gráfico de τ. Por otra parte veremos que el $\max\limits_{x\in[0,1]} \tau(x) = \dfrac{2}{3}$ y a diferencia del mínimo, este es alcanzado en muchos puntos del dominio. Es interesante saber que este conjunto cumple con la propiedad de que es un conjunto de primera categoría y además tiene medida de Lebesgue cero. Estos resultados no serán demostrados en este escrito pero pueden verse en [**10**] y [**12**].

Teorema 2.5. *Para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $0 \leqslant \tau(x) \leqslant \frac{2}{3}$. El valor mínimo es alcanzado en $x = 0$ y $x = 1$.*

Para llevar a cabo está demostración debemos hacer una reordenación de la función de Takagi, para ello debemos considerar la representación (2.13), dada por

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ll 2^i x \gg}{2^i}.$$

Agrupando los términos de esta serie de la siguiente manera

$$\tau(x) = \left(\ll x \gg + \frac{1}{2} \ll 2x \gg\right) + \left(\frac{1}{4} \ll 4x \gg + \frac{1}{8} \ll 8x \gg\right) + \cdots,$$

se tiene que la función de Takagi puede ser rescrita como

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \ll 2^{2i} x \gg + \frac{1}{2^{2i+1}} \ll 2^{2i+1x} \gg . \tag{2.19}$$

Cada uno de estos sumando será menor que un factor $\frac{1}{2^{2i+1}}$. Una manera sencilla de ver que esto es cierto es observando la gŕafica que se obtiene al sumar cada uno de los términos agrupados dos a dos.

Para el caso $i = 0$ tenemos que

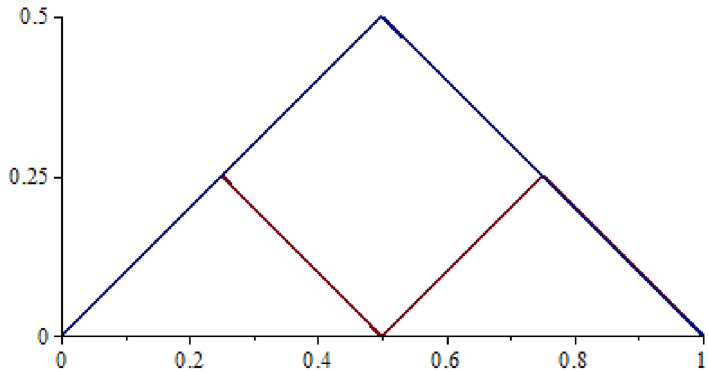

FIGURA 10. Funciones $\ll x \gg$ y $\frac{1}{2} \ll 2x \gg$.

De este gráfico se puede observar que al sumar estas funciones las máximas alturas son alcanzadas en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$ y tendrán valor igual a $\frac{1}{2}$. Gráficamente se tiene

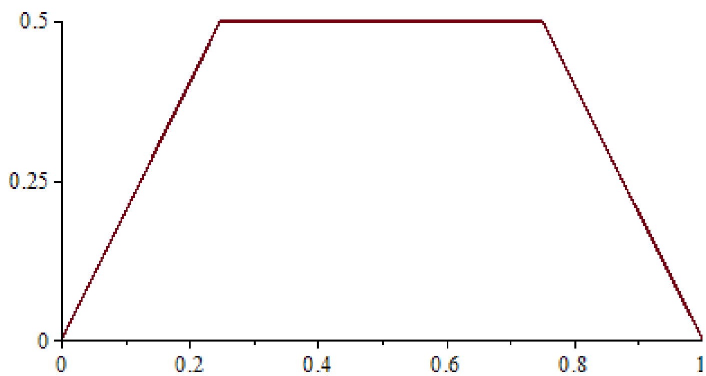

FIGURA 11. $\ll x \gg + \frac{1}{2} \ll 2x \gg$.

Para el caso $i = 1$, tenemos la siguiente suma $\frac{1}{4} \ll 4x \gg + \frac{1}{8} \ll 8x \gg$, estas funciones las podemos observar en la Figura 12.

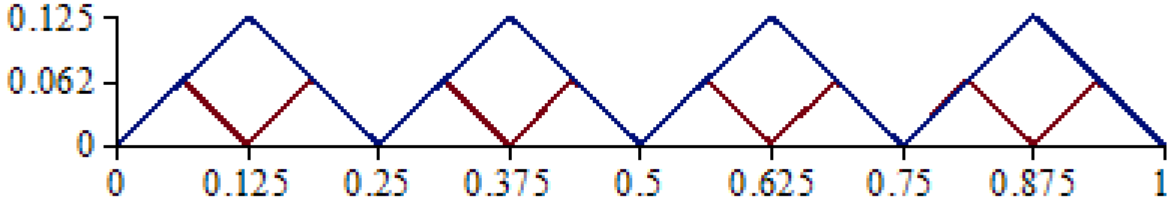

FIGURA 12. Funciones $\frac{1}{4} \ll 4x \gg$ y $\frac{1}{8} \ll 8x \gg$.

Como podemos ver, la máxima altura de esta suma de funciones es $\frac{1}{8}$ alcanzada en los intervalos $\left[\frac{2k-1}{16}, \frac{2k+1}{16}\right]$, con $1 \leqslant k \leqslant 7$. Gráficamente se tiene

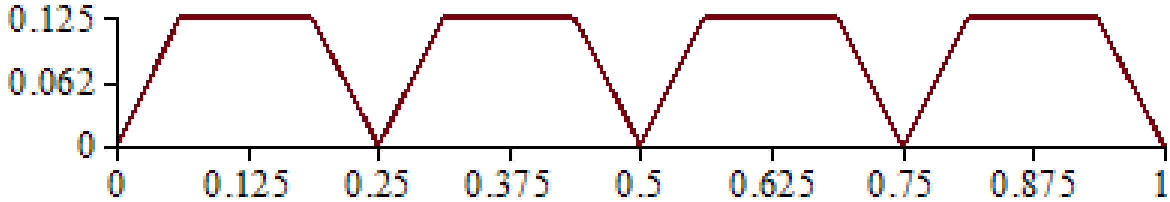

FIGURA 13. $\frac{1}{4} \ll 4x \gg + \frac{1}{8} \ll 8x \gg$.

Siguiendo con este proceso, se llega a la conclusión de que los términos de la serie (2.19) satisfacen la siguiente propiedad

$$\frac{1}{2^{2i}} \ll 2^{2i}x \gg + \frac{1}{2^{2i+1}} \ll 2^{2i+1} \gg \leqslant \frac{1}{2^{2i+1}} \quad \text{para todo entero } i \geqslant 0. \tag{2.20}$$

Luego, de esto es sencillo ver que

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} \ll 2^{2i}x \gg + \frac{1}{2^{2i+1}} \ll 2^{2i+1x} \gg \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right] = \frac{2}{3}. \qquad \square$$

Vamos a presentar algunas ecuaciones funcionales que satisface la función de Takagi. Estas ecuaciones fueron estudiadas por Kaires en [**9**].

PROPOSICIÓN 2.3. *Para todo $x \in [0,1]$ la función de Takagi satisface las siguientes ecuaciones funcionales*

(i) *Satisface la ecuación de reflexión*

$$\tau(x) = \tau(1-x). \tag{2.21}$$

(ii) *Satisface las ecuaciones de autosimiliridad diádica*

$$\tau\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x), \tag{2.22}$$

$$\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x). \tag{2.23}$$

Demostración: Para demostrar (i), usaremos la relación dada por el Teorema 2.3, entonces para $x \in [0,1]$,

$$\tau(1-x) = \frac{1}{2}g(2(1-x)) = \frac{1}{2}g(2-2x),$$

además de la Proposición 2.1 se tiene que g es una función par y de período 2, de donde

$$\tau(1-x) = \frac{1}{2}g(2-2x) = \frac{1}{2}g(-2x) = \frac{1}{2}g(2x) = \tau(x).$$

Esta ecuación de reflexión nos dice que la función de Takagi es simétrica. Estudiemos ahora, las ecuaciones (2.22) y (2.23). Sea $x \in [0,1]$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^{n-1}x \gg}{2^n} = \ll \frac{x}{2} \gg + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ll 2^{n-1}x \gg}{2^n} \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^{n-1}(1+x) \gg}{2^n} = \ll \frac{1+x}{2} \gg + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ll 2^{n-1}x \gg}{2^n} \\ &= \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n} = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x).\end{aligned}$$

En esta demostración, se usó el hecho de que como $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $0 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, y así $\ll \frac{x}{2} \gg = \frac{x}{2}$. Análogamente, se tiene que si $0 \leqslant x \leqslant 1$, entonces $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1+x}{2} \leqslant 1$, de donde $\ll \frac{1+x}{2} \gg = \frac{1-x}{2}$. $\square$

En la siguiente proposición, vamos a generalizar las ecuaciones dadas en el resultado anterior.

Proposición 2.4. *Para $l \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, la función de Takagi satisface las ecuaciones funcionales*

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(k)}{2^l}x + \frac{1}{2^l}\tau(x),\ k = 0,1,2,\dots,2^{l-1}. \tag{2.24}$$

$$\tau\left(\frac{k-x}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{2s(k-1)-l}{2^l}x + \frac{1}{2}\tau(x),\ k = 1,2,\dots,2^{l-1}. \tag{2.25}$$

Donde s es la función suma de dígitos, definida en la fórmula (1.6). Más aún, para $x = \frac{n}{2^l}$ con $n = 1, 2 \dots, 2^l$ la función τ tiene la representación

$$\tau\left(\frac{n}{2^l}\right) = \frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n-1} s(k) \tag{2.26}$$

Demostración: Primero comprobaremos la igualdad (2.24), y para ello utilizaremos el principio de inducción. Para el caso $l = 1$, tenemos que $k = 0$ ó $k = 1$.

Si $k = 0$, se sigue de (2.22)

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x).$$

Además

$$\tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(k)}{2^l}x + \frac{1}{2^l}\tau(x) = \tau(0) + \frac{1-2s(0)}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x),$$

es decir, para $l = 1$ y $k = 0$, se satisface (2.24).

Si $k = 1$, de la ecuación (2.23) se tiene que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^l}\right) = \frac{1-x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x),$$

por otra parte

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)+\frac{l-2s(k)}{2^l}x+\frac{1}{2^l}\tau(x)&=\frac{1}{2}+\frac{1-2s(1)}{2}x+\frac{1}{2}\tau(x)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1-2}{2}x+\frac{1}{2}\tau(x)=\frac{1-x}{2}+\frac{1}{2}\tau(x).\end{aligned}$$

Luego, se concluye que la igualdad (2.24) es cierta para *l=1* y $k=1$.

Ahora supongamos que la igualdad es cierta para un entero $l \geqslant 1$, es decir, para todo $k \in \{0,1,\ldots,2^l-1\}$ y $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^l}\right)=\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)+\frac{l-2s(k)}{2^l}+\frac{1}{2^l}\tau(x). \tag{2.27}$$

Esta será nuestra hipótesis inductiva, ahora veamos que es cierto para $l{+}1$, es decir, queremos ver que si $k \in \{0,1,\ldots,2^{l+1}-1\}$ y $x \in [0,1]$, entonces

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^{l+1}}\right)=\tau\left(\frac{k}{2^{l+1}}\right)+\frac{l+1-2s(k)}{2^{l+1}}+\frac{1}{2^{l+1}}\tau(x).$$

Supongamos primero que k es par, entonces existe $n_k \in \{0,1,\ldots,2^l-1\}$ tal que $k=2n_k$, luego usando la hipótesis inductiva, (2.22) y (1.7)

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{k+x}{2^{l+1}}\right)&=\tau\left(\frac{2n_k+x}{2^{l+1}}\right)=\tau\left(\frac{n_k+\frac{x}{2}}{2^l}\right)=\tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right)+\frac{l-2s(n_k)}{2^l}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^l}\tau\left(\frac{x}{2}\right)\\&=\tau\left(\frac{2n_k}{2^{l+1}}\right)+\frac{l-2s(2n_k)}{2^{l+1}}x+\frac{x}{2^{l+1}}+\frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)\\&=\tau\left(\frac{2n_k}{2^{l+1}}\right)+\frac{l+1-2s(2n_k)}{2^{l+1}}x+\frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)\\&=\tau\left(\frac{k}{2^{l+1}}\right)+\frac{l+1-2s(k)}{2^{l+1}}x+\frac{1}{2^{l+1}}\tau(x).\end{aligned}$$

Si k es impar, entonces existe $n_k \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$ tal que $k = 2n_k + 1$ y se tiene por la hipótesis inductiva y (2.23) que

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^{l+1}}\right) = \tau\left(\frac{2n_k+1+x}{2^{l+1}}\right) = \tau\left(\frac{n_k+\frac{x+1}{2}}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^l}\frac{(x+1)}{2} + \frac{1}{2^l}\tau\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}}(x+1) + \frac{1-x}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)$$

$$= \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}}x - \frac{x}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)$$

$$= \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{l-1-2s(n_k)}{2^{l+1}}x + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x).$$

Usando la hipótesis inductiva para $x = \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\tau\left(\frac{2n_k+1}{2^{l+1}}\right) = \tau\left(\frac{n_k+\frac{1}{2}}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^l}\frac{1}{2} + \frac{1}{2^l}\tau\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}},$$

de esto se sigue, usando (1.8)

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^{l+1}}\right) = \tau\left(\frac{n_k}{2^l}\right) + \frac{l-2s(n_k)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}} + \frac{l-1-2s(n_k)}{2^{l+1}}x + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)$$

$$= \tau\left(\frac{2n_k+1}{2^{l+1}}\right) + \frac{l-1-2(s(2n_k+1)-1)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)$$

$$= \tau\left(\frac{2n_k+1}{2^{l+1}}\right) + \frac{l+1-2s(2n_k+1)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x)$$

$$= \tau\left(\frac{k}{2^{l+1}}\right) + \frac{l+1-2s(2n_k+1)}{2^{l+1}} + \frac{1}{2^{l+1}}\tau(x).$$

Con lo que hemos demostrado que las 2^{l+1} igualdades son ciertas y por lo tanto (2.24) se cumple para todo $l \in \mathbb{N}$.

Para verificar (2.25) consideraremos $k \in \{1, 2 \ldots, 2^l\}$ y $x \in [0, 1]$, entonces se tiene que $k - 1 \in \{0, 1, \ldots, 2^l - 1\}$ y $1 - x \in [0, 1]$. Luego, se obtiene de (2.24) que

$$\tau\left(\frac{k-x}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k-1+1+x}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k-1}{2^l}\right) + \frac{l-2s(k-1)}{2^l}(1-x) + \frac{1}{2^l}\tau\left(1-x\right).$$

Por otra parte, aplicando (2.24) para $x = 1$ se tiene que

$$\tau\left(\frac{k}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k-1+1}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k-1}{2^l}\right) + \frac{l-2s(k-1)}{2^l} + \frac{1}{2^l}\tau\left(1\right).$$

Usando el hecho de que $\tau(1) = 0$ se concluye que

$$\tau\left(\frac{k-1}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{2s(k-1)-l}{2^l}.$$

De la periocidad de τ se obtiene la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2^l}\tau\left(1-x\right) = \frac{1}{2^l}\tau\left(x\right).$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau\left(\frac{k-x}{2^l}\right) &= \tau\left(\frac{k-1}{2^l}\right) + \frac{l-2s(k-1)}{2^l} + \frac{2s(k-1)-l}{2^l}x + \frac{1}{2^l}\tau\left(x\right) \\
&= \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{2s(k-1)-l}{2^l} + \frac{l-2s(k-1)}{2^l} + \frac{2s(k-1)-l}{2^l}x + \frac{1}{2^l}\tau\left(x\right) \\
&= \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{2s(k-1)-l}{2^l}x + \frac{1}{2^l}\tau\left(x\right),
\end{aligned}$$

concluyendo que la igualdad (2.25) se cumple para todo $l \in \mathbb{N}$.

Para verificar la igualdad (2.26) usaremos (2.24) con $x = 1$ y el hecho de que $\tau(0) = \tau(1) = 0$.

Para $n = 1$ y $l \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene que

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{1}{2^l}\right) &= \tau\left(\frac{0+1}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{0}{2^l}\right) + \frac{l-2s(0)}{2^l} + \frac{1}{2^l}\tau(1)\\ &= \frac{l}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}s(0),\end{aligned}$$

luego para $n = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{2}{2^l}\right) &= \tau\left(\frac{1+1}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{1}{2^l}\right) + \frac{l-2s(1)}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}}\tau(1)\\ &= \frac{l}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}s(0) + \frac{l}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}s(1)\\ &= \frac{2l}{2^l} - \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{1} s(k).\end{aligned}$$

Supongamos que es cierto para $n = N$, entonces se tiene que

$$\tau\left(\frac{N}{2^l}\right) = \frac{Nl}{2^l} - \sum_{k=0}^{N-1} s(k),$$

veamos que es cierto para $n = N + 1$. Por (2.24)

$$\begin{aligned}\tau\left(\frac{N+1}{2^l}\right) &= \tau\left(\frac{N}{2^l}\right) + \frac{l-2s(N)}{2^l} + \frac{1}{2^l}\tau(1)\\ &= \frac{Nl}{2^l} - \sum_{k=0}^{N-1} s(k) + \frac{l}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}s(N) = \frac{(N+1)l}{2^l} - \sum_{k=0}^{N} s(k).\end{aligned}$$

Con lo que se cumple (2.26) para $n = 1, 2 \dots, 2^l$.

$\square$

Una consecuencia de esta proposición es que para $l \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, 2^l - 1\}$ y $x \in [0, 1]$ la función de Takagi satisface

$$\tau\left(\frac{k+x}{2^l}\right) - \tau\left(\frac{k-x}{2^l}\right) = \frac{l - s(k) - s(k-1)}{2^{l-1}}x.$$

Para el caso en que $k = l = 1$ y $x \in [0,1]$ esta igualdad expresa la simetría de la función de Takagi con respecto a $\frac{1}{2}$.

Los siguientes resultados están presentados en [**10**] y nos ilustran como es el comportamiento asintótico de la función de Takagi a lo largo del intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

LEMA 2.2. *Sea $0 < x < \frac{1}{2}$ la función de Takagi satisface el estimado*

$$x \log_2\left(\frac{1}{x}\right) \leq \tau(x) \leq x \log_2\left(\frac{1}{x}\right) + cx \tag{2.28}$$

donde c es una constante tal que $c < \frac{2}{3}$.

Demostración: Para $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ consideremos la siguiente función

$$C(x) = \frac{\tau(x)}{x \log_2\left(\frac{1}{x}\right)},$$

y veamos que para $\frac{1}{2^{l+1}} < x < \frac{1}{2^l}$, con $l \in \mathbb{N}$ se cumple

$$1 \leqslant C(x) \leqslant 1 + \frac{c}{l+1}. \tag{2.29}$$

De (2.22) obtenemos lo siguiente

$$C\left(\frac{x}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{x}\right) = \left[\frac{\tau\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}\log_2\left(\frac{2}{x}\right)}\right]\log_2\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{x}\left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tau(x)\right] = 1 + \frac{\tau(x)}{x} = 1 + \frac{\tau(x)\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}{x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}$$
$$= 1 + C(x)\log_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Restando $\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ a ambos lados de la igualdad y utilizando la identidad $\log_a(a) = 1$ se tiene que

$$C\left(\frac{x}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{x}\right) - \log_2\left(\frac{1}{x}\right) = \log_2(2) + C(x)\log_2\left(\frac{1}{x}\right) - \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

de donde

$$C\left(\frac{x}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{x}\right) - \log_2\left(\frac{1}{x}\right) - \log_2(2) = \{C(x) - 1\}\log_2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Luego, de las propiedades de la función logaritmo se sigue que

$$C\left(\frac{x}{2}\right)\log_2\left(\frac{2}{x}\right) - \log_2\left(\frac{2}{x}\right) = \{C(x) - 1\}\log_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

de donde se conluye la siguiente igualdad

$$\left\{C\left(\frac{x}{2}\right)-1\right\}\log_2\left(\frac{2}{x}\right)=\{C(x)-1\}\log_2\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.30}$$

Vamos a demostrar primero que se cumple que $C(x)\geqslant 1$ para $\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$, para esto usaremos el hecho de que $\tau(x)\geqslant\tau_3(x)$. De (2.12) se sigue que $\tau_3(x)$ tiene la siguiente forma

$$\tau_3(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+x & \text{para } x\in[\frac{1}{4},\frac{3}{8}],\\ \\ 1-x & \text{para } x\in[\frac{3}{8},\frac{1}{2}].\end{cases}$$

Consideremos la función $f(x)=x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{8}$ entonces tenemos que

$$f'(x)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2}{x^2\ln(2)}=\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(2)}-\frac{1}{\ln(2)}=\frac{-1+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(2)}=\frac{-\ln(e)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(2)}$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)+\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(2)}=\frac{\ln\left(\frac{1}{ex}\right)}{\ln(2)}<\frac{\ln\left(\frac{4}{e}\right)}{\ln(2)}<1=\tau_3'(x).$$

De la monotonía de la integral se tiene

$$\int_{\frac{1}{4}}^{x}f'(t)dt<\int_{\frac{1}{4}}^{x}\tau_3'(t)dt,$$

por lo tanto

$$0<\int_{\frac{1}{4}}^{x}\left(\tau_3'(t)-f'(t)\right)dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, se sigue que

$$0<\tau_3(x)-f(x)-\tau_3\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right).$$

Ahora bien $\tau_3\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$, de donde se concluye que si $\frac{1}{4}<x<\frac{3}{8}$, entonces $\tau_3(x)\geqslant f(x)$, lo que implica que

$$C(x)=\frac{\tau(x)}{x\log_x\left(\frac{1}{x}\right)}\geqslant\frac{\tau_3(x)}{x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{\tau_3(x)}{f(x)}\geqslant\frac{f(x)}{f(x)}=1,$$

para los valores de $x\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$.

Ahora estudiemos el caso en que $\frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)} = \frac{-1-\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{-\ln(ex)}{\ln(2)} > \frac{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(e)-\ln(2)}{\ln(2)}$$

$$= \frac{\ln(e)}{\ln(2)} - 1 = \ln(e^{\ln(2)}) - 1 = \ln(2) - 1 > -1 = \tau_3'(x),$$

utilizando el mismo razonamiento que la parte anterior se tiene que

$$\int_x^{\frac{1}{2}} f'(t)dt > \int_x^{\frac{1}{2}} \tau_3'(t)dt,$$

de las propiedades de la integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)dt < \int_{\frac{1}{2}}^{x} \tau_3'(t)dt.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos el siguiente resultado

$$0 < \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left(\tau_3'(t) - f'(t)\right) dt = \tau_3(x) - f(x) - \tau_3\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right),$$

usando el hecho de que $\tau_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, se sigue que si $\frac{3}{8} < x < \frac{1}{2}$, entonces $\tau_3(x) \geqslant f(x)$. Igual que antes, se cumple también que $C(x) \geqslant 1$, de donde para $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, tenemos que $C(x) \geqslant 1$. De la igualdad (2.24) y usando un argumento inductivo se sigue el resultado para todo $x \in (0, \frac{1}{2}]$.

Para verificar la desigualdad restante en (2.29), utilizaremos un razonamiento inductivo y además estudiaremos el comportamiento de la función $\frac{1}{f(x)}$ para $x \in \left(\frac{1}{2^{l+1}}, \frac{1}{2^l}\right)$ y $l \in \mathbb{N}$. Para $l = 1$ tenemos que $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{f(x)}$ es creciente para $x > \frac{1}{e}$ y decreciente para $0 < x < \frac{1}{e}$. Veamos que en efecto es cierto

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}\right)' = \left(\frac{\ln(2)}{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)' = \frac{-\ln(2)\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right) + x\frac{-x}{x^2}\right]}{x^2\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{-\ln(2)\left[\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)\right]}{x^2\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\ln\left(\frac{1}{ex}\right)}{x^2\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

De esto concluimos que $\frac{1}{f(x)}$ es creciente si y solo si $\ln(\frac{1}{ex}) < 0$, es decir, si $x > \frac{1}{e}$. Por otra parte $\frac{1}{f(x)}$ es decreciente si y solo si $\ln(\frac{1}{ex}) > 0$, es decir, si $0 < x < \frac{1}{e}$. Como $\frac{1}{f(x)}$ es continua en el intervalo acotado $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ entonces debe alcanzar máximos en $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{4}$. De donde $\frac{1}{f(x)} \leqslant \max\left\{\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}, \frac{1}{f\left(\frac{1}{4}\right)}\right\}$ y como $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, se tiene que $\frac{1}{f(x)} \leqslant 2$ para todo $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Por otra parte tenemos que $\tau(x) < \frac{2}{3}$ para todo $x \in [0,1]$ y así se concluye que

$$C(x) = \frac{\tau(x)}{f(x)} < \frac{2}{3}.2 = \frac{4}{3} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1+1},$$

es decir, la desigualdad (2.29) es cierta para el caso $l = 1$ y una constante $c < \frac{2}{3}$. Supongamos que la desigualdad es cierta para algún $l \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que para $\frac{1}{2^{l+1}} < x < \frac{1}{2^l}$

$$C(x) \leqslant 1 + \frac{c}{l+1}.$$

De (2.30) tenemos que para $\frac{1}{2^{l+1}} < x < \frac{1}{2^l}$

$$\frac{C\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{C(x) - 1} = \frac{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}{\log_2\left(\frac{2}{x}\right)} = \frac{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \log_2\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 - \frac{1}{1 + \log_2\left(\frac{1}{x}\right)} < 1 - \frac{1}{l+2} = \frac{l+1}{l+2},$$

utilizando la hipótesis inductiva llegamos a que

$$C\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \leqslant \{C(x) - 1\}\frac{l+1}{l+2} \leqslant \frac{c}{l+1}.\frac{l+1}{l+2} = \frac{c}{l+2},$$

para $\frac{1}{2^{l+2}} < \frac{x}{2} < \frac{1}{2^{l+1}}$, es decir, la desigualdad (2.29) es cierta también para $l + 1$ y por lo tanto para todo $l \in \mathbb{N}$. Finalmente para $\frac{1}{2^{l+1}} < x$ se tiene que $\frac{1}{l+1} < \frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)}$, de donde

$$C(x) \leqslant 1 + \frac{c}{l+1} \leqslant 1 + \frac{c}{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)},$$

así

$$1 \leqslant \frac{\tau(x)}{x\log_2\left(\frac{1}{x}\right)} \leqslant 1 + \frac{c}{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)},$$

por lo tanto

$$x\log_2\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \tau(x) \leqslant x\log_2\left(\frac{1}{x}\right) + cx.$$

$\square$

PROPOSICIÓN 2.5. *La función de Takagi τ satisface en cada punto racional diádico $x=\frac{k}{2^l}$ la siguiente relación*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(x+h)-\tau(x)}{|h|\log_2\frac{1}{|h|}}=1.$$

Demostración: Para el caso en que $x=0$, nos queda el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(h)}{|h|\log_2\frac{1}{|h|}}.$$

En primer lugar, estudiaremos el comportamiento de este límite cuando $h\to 0^+$, es decir, debemos ver que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\tau(h)}{h\log_2\frac{1}{h}}=1. \tag{2.31}$$

Tomando $0<h<\frac{1}{2^l}$ y por el Lema 2.2, se tiene que

$$1\leqslant\frac{\tau(h)}{h\log_2\frac{1}{h}}\leqslant 1+\frac{ch}{h\log_2\frac{1}{h}}=1+\frac{c}{\log_2\frac{1}{h}},$$

es fácil comprobar que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\log_2\frac{1}{h}}=0$, de donde se sigue el resultado.

Por otra parte, si $h\to 0^-$, tenemos el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\tau(h)}{-h\log_2\frac{1}{-h}},$$

mediante un cambio de variable y de la simetría de la función de Takagi

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\tau(-h)}{h\log_2\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\tau(h)}{h\log_2\frac{1}{h}}.$$

Luego, de la parte anterior y devolviendo el cambio de variable, concluimos que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\tau(h)}{-h\log_2\frac{1}{-h}}=1,$$

por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(h)}{|h|\log_2\frac{1}{|h|}}=1.$$

Ya que τ es simétrica, solo estudiaremos el caso en que $x > 0$, para ello consideremos $x = \frac{k}{2^l}$ con $l \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant 2^l - 1$ y $0 < h < \frac{1}{2^l}$. De acuerdo a la ecuación (2.24) tenemos el siguiente resultado

$$\tau(x+h) - \tau(x) = \tau\left(\frac{k}{2^l} + h\right) - \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) = \tau\left(\frac{k+2^l h}{2^l}\right) - \tau\left(\frac{k}{2^l}\right)$$

$$= \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) + \frac{\{l - 2s(k)\}2^l h}{2^l} + \frac{1}{2^l}\tau(2^l h) - \tau\left(\frac{k}{2^l}\right)$$

$$= \{l - 2s(k)\}h + \frac{1}{2^l}\tau(2^l h).$$

Dividiendo esta última expresión entre $h \log_2 \frac{1}{h}$, se tiene que

$$\frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h \log_2 \frac{1}{h}} = \frac{l - 2s(k)}{\log_2 \frac{1}{h}} + \frac{\tau(2^l h)}{2^l h \log_2 \frac{1}{h}}.$$

Tomando $t = 2^l h$, el segundo término del lado derecho de la expresión anterior puede ser escrito de la siguiente manera

$$\frac{\tau(t)}{t \log_2\left(\frac{2^l}{t}\right)} = \frac{\tau(t)}{t[\log_2(2^l) - \log_2(t)]} = \frac{\tau(t)}{t[l + \log_2\left(\frac{1}{t}\right)]} = \frac{\tau(t)}{t \log_2\left(\frac{1}{t}\right)[1 - \frac{l}{\log_2(t)}]}.$$

Tenemos que $\frac{l}{\log_2(t)} \to 0$ cuando $t \to 0^+$, por (2.31) se concluye que esta última expresión tiende a 1 cuando $t \to 0^+$. Por otra parte, $\frac{l - s(k)}{\log_2 \frac{1}{h}} \to 0$, cuando $h \to 0^+$,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h \log_2 \frac{1}{h}} = 1.$$

Para el caso en que $h < 0$, tenemos el siguiente límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{-h \log_2\left(\frac{1}{-h}\right)}.$$

Haciendo el cambio de variable $r=-h$, tenemos que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\tau(x+h)-\tau(x)}{-h\log_2\left(\frac{1}{-h}\right)}=\lim_{r\to 0^+}\frac{\tau(x-r)-\tau(x)}{r\log_2\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Por otra parte, de la igualdad (2.23), se sigue el siguiente resultado

$$\tau(x-r)-\tau(x)=\tau\left(\frac{k}{2^l}-r\right)-\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)=\tau\left(\frac{k-2^lr}{2^l}\right)-\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)$$

$$=\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)+\frac{2s(k-1)-l}{2^l}2^lr+\frac{\tau(2^lr)}{2^l}-\tau\left(\frac{k}{2^l}\right)=[2s(k-1)-l]r+\frac{\tau(2^lr)}{2^l},$$

dividiendo entre $r\log_2\left(\frac{1}{r}\right)$, la última expresión obtenemos

$$\tau(x-r)-\tau(x)=\frac{2s(k-1)-l}{\log_2\left(\frac{1}{r}\right)}+\frac{\tau(2^lr)}{2^lr\log_2\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Usando un razonamiento análogo al caso $h>0$, se concluye que este límite tiende a 1 y por lo tanto se conluye

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(x+h)-\tau(x)}{|h|\log_2\frac{1}{|h|}}=1.$$

□

CAPÍTULO 3

Diferenciabilidad

A principios del siglo XIX los grandes matemáticos de la época creían que las funciones continuas eran diferenciables en casi todo su dominio, salvo en una cantidad finita de puntos [**19**]. Algunos intentaron demostrar este hecho pero ninguno llegó a dar una respuesta concreta. No fue hasta el año 1872, cuando Karl Weierstrass dio a conocer en uno de sus seminarios de análisis el siguiente resultado:

Si $0 < a < 1$ *y* $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, *entonces, la función*

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

es continua para todo $x \in \mathbb{R}$ *y en ninguno de los puntos de su dominio es diferenciable.*

Esta función conmovió a toda la sociedad matemática y en 1875 fue publicada en un artículo escrito por Duboys-Reymond [**6**], con el debido crédito al maestro. La función de Takagi entra en esta clase de funciones pero a diferencia de la función de Weierstrass, esta posee derivadas en un conjunto de puntos siempre que aceptamos la definición de derivada impropia.

Antes de dar inicio al estudio de estas propiedades, debemos mencionar la notación que será usada para representar la función de Takagi, pues, en primera instancia usaremos la representación

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h(2^n x)}{2^n},$$

dada en la Definición 2.1. Esta representación será usada para demostrar que la función de Takagi no posee derivada finita en ningún punto. Aunque varios autores han demostrado este hecho, nosotros nos basaremos en la idea presentada por Abbott en [**1**].

TEOREMA 3.1. *La función de Takagi no posee derivada finita en ningún punto.*

Demostración: La idea de esta demostración está que al suponer la existencia de la derivada en un punto $x_0 \in [0,1]$, el límte

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

debe existir y ser finito y supongamos que este vale L. Pero al aproximarnos a x_0 por sucesiones veremos que $g'(x_0)$ tiende a infinito y contradice el hecho de la existencia de la derivada en este punto.

Comenzaremos estudiando la derivada en los puntos $x=0$, $x=1$, $x=\frac{1}{2}$. Luego, estudiaremos el caso $x=\frac{p}{2^k}$, es decir, cuando es un racional diádico y por último para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $g'(0)$ existe, entonces, para toda sucesión $\{x_m\}_{m\geq 1} \subset [0,1]$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = 0$, se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g(x_m)-g(0)}{x_m-0} = g'(0).$$

Considerando la sucesión $x_m = \frac{1}{2^m}$, llegaremos a que

$$\frac{g(x_m)-g(0)}{x_m-0} = m+1. \tag{3.1}$$

Esto contradice el hecho que supusimos, es decir, que la derivada en cero es un número. Sin embargo, este resultado podría incitarnos a pensar que es posible que $g'(0) = +\infty$ (si permitimos que la derivada tome valores en los reales extendidos), pero esto tampoco es cierto, pues si se considera la sucesión $y_m = -\frac{1}{2^m}$, se puede ver que

$$\frac{g(y_m)-g(0)}{y_m-0} = -m-1. \tag{3.2}$$

Veamos que en efecto (3.1) es cierto, para ello debemos evaluar g en $x=0$, obteniendo el siguiente resultado

$$g(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}h(2^n 0)=0.$$

Por otra parte, calculemos el valor de $g(x_m)$ para un $m\in\mathbb{N}$ fijo. Esto lo haremos considerando la sucesión de sumas parciales de g y tomando $N\in\mathbb{N}$ con $N>m$, de donde

$$g_N(x_m)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^n x_m)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^{n-m})=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^n}h(2^{n-m})+\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^{n-m}), \tag{3.3}$$

luego para $n\leqslant m$ tenemos que $0<2^{n-m}\leqslant 1$, obteniendo el siguiente resultado

$$h(2^{n-m})=2^{n-m}.$$

Por otro lado, si $n>m$ entonces $2^{n-m}>1$ y es un número par y por lo tanto

$$h(2^{n-m})=0.$$

Sustituyendo en (3.3), tenemos que

$$g_N(x_m)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^n}2^{n-m}=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^m}=\frac{m+1}{2^m}.$$

Luego, tomando $N\to\infty$ se tiene que

$$g(x_m)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^{n-m})=\lim_{N\to\infty}\frac{m+1}{2^m}=\frac{m+1}{2^m}.$$

Así

$$\frac{g(x_m)-g(0)}{x_m-0}=\frac{\frac{m+1}{2^m}-0}{2^m-0}=m+1,$$

resultado al cual queríamos llegar.

Ahora veamos que (3.2) se cumple. Para comprobar este hecho utilizaremos el mismo razonamiento de la parte anterior. Entonces, para $N>m$, se tiene que

$$g_N(y_m)=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{2^n}h(-2^{n-m})+\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{2^n}h(-2^{n-m}), \tag{3.4}$$

luego para $n \leqslant m$, $-1 \leqslant -2^{n-m} < 0$, de donde

$$h(-2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Por otro lado si $n > m$ entonces $-2^{n-m} < -1$ y es un número par, así

$$h(-2^{n-m}) = 0,$$

luego al sustituir en (3.4) y tomando $N \to \infty$

$$g(y_m) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} 2^{n-m} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^m} = \frac{m+1}{2^m}$$

por lo tanto se concluye que

$$\frac{g(y_m) - 0}{y_m - 0} = \frac{\frac{m+1}{2^m} - 0}{-\frac{1}{2^m} - 0} = -m - 1.$$

Como podemos ver, el hecho de suponer la existencia de la derivada en $x = 0$ nos ha llevado a una contradicción, pues existe un sucesión $x_m \to 0^+$, tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g'(x_m) - g(0)}{x_m - 0} = +\infty.$$

Por otra parte, si aceptamos que $g'(x_0)$ tome el valor infinito entonces la derivada tampoco existe pues existe una sucesión $y_m \to 0^-$, tal que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g'(y_m) - g(0)}{y_m - 0} = -\infty.$$

El siguiente paso es demostrar que g no es diferenciable en $x = 1$, para esto consideraremos un razonamiento análogo al caso $x = 0$, es decir, vamos a suponer que $g'(1)$ existe y nos acercaremos a este punto mediante dos sucesiones, una por la derecha y otra por la izquierda y al igual que en el caso anterior obtendremos valores diferentes.

Entonces, supongamos que $g'(1)$ existe, es decir,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g(1 + x_m) - g(1)}{1 + x_m - 1} = g'(1).$$

Como $h(2t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, entonces

$$g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(2^n.1) = \frac{1}{2^0} h(2^0) = h(1) = 1.$$

Luego, utilizando el mismo argumento que en (3.1), se tiene que para $N > m$

$$g_N(1+x_m) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n\left[\frac{1}{2^m}+1\right]\right) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}+2^n) + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2^n} h(2^{n-m}+2^n). \tag{3.5}$$

Si $m \geqslant n > 0$ tenemos que $2^{n-m} < 1$ y por la periodicidad de h

$$h(2^{n-m} + 2^n) = h(2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Por otro lado, si $n > m$ entonces $2^{n-m} > 1$ y es un número par, por lo tanto

$$h(2^{n-m} + 2^n) = 0.$$

Para el caso $n = 0$, se satisface que $1 < \frac{1}{2^m} + 1 < 2$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, y de la ecuación (2.1), se tiene que

$$h\left(\frac{1}{2^m} + 1\right) = 2 - \left(\frac{1}{2^m} + 1\right) = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Sustituyendo estos valores de h en la expresión (3.5) y haciendo $N \to \infty$

$$g(1 + x_m) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n\left[\frac{1}{2^m} + 1\right]\right) = h(2^{-m} + 1) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} 2^{n-m}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{m}{2^m} = \frac{m-1}{2^m} + 1. \tag{3.6}$$

De donde

$$\frac{g(1 + x_m) - g(1)}{1 + x_m - 1} = \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{\frac{1}{2^m} + 1 - 1} = m - 1.$$

Al igual que en el caso $x = 0$, es tentador pensar que $g'(1) = \infty$, pero si consideramos la sucesión $y_m = \frac{-1}{2^m}$, tendremos que para $N > m$

$$g_N(1 + y_m) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n\left[1 - \frac{1}{2^m}\right]\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n} h(2^n - 2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2^n} h(2^n - 2^{n-m}). \tag{3.7}$$

Luego, para el caso en que $0 < n \leqslant m$, $\quad -1 < -2^{n-m} < 0$ y por la periodicidad de h,

$$h(2^n - 2^{n-m}) = h(-2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Por otro parte, si $n > m$, entonces -2^{n-m} es un número par, por lo tanto

$$h(2^n - 2^{n-m}) = 0.$$

Por último, cuando $n = 0$, tenemos que $0 < 1 - \frac{1}{2^m} < 1$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y de la ecuación (2.1), se tiene que

$$h\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) = 1 - \frac{1}{2^m} - 0 = 1 - \frac{1}{2^m}$$

Sustituyendo estos resultados en (3.7) y tomando $N \to \infty$, se concluye que

$$g(1+y_m) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} h\left(2^n \left[1 - \frac{1}{2^m}\right]\right) = h\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} 2^{n-m} = 1 - \frac{1}{2^m} + \frac{m}{2^m} = \frac{m-1}{2^m} + 1.$$

De donde

$$\frac{g(1+y_m) - g(1)}{1 + y_m - 1} = \frac{\frac{m-1}{2^m} + 1 - 1}{1 - \frac{1}{2^m} - 1} = 1 - m.$$

Utilizando un razonamiento similar al caso en $x = 0$ concluimos que $g'(1)$ no existe. Ahora estudiaremos el caso $x = \frac{1}{2}$, al igual que los casos anteriores, vamos a suponer que $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ existe. Entonces se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + x_m - \frac{1}{2}} = g'\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3.8}$$

Ahora bien

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} h(1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} h\left(2^{n-1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

y para $N > m$

$$g_N\left(\frac{1}{2} + x_m\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \left[\frac{1}{2} + x_m\right]\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{2} + 2^{-m}\right) + \frac{1}{2} h\left(1 + 2^{1-m}\right) + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{2^n} h(2^{n-m} + 2^{n-1}) + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2^n} h(2^{n-m} + 2^{n-1}). \tag{3.9}$$

Luego para $1 < n < m$, 2^{n-1} es par y $0 < 2^{n-m} \leqslant 1$, por lo tanto

$$h(2^{n-m} + 2^{n-1}) = h(2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Para $n > m$, $2^{n-m} + 2^{n-1} > 1$ es par, de donde

$$h(2^{n-m} + 2^{n-1}) = 0.$$

Para el caso $n = 0$, se tiene que $0 < 2^{-m} + 2^{-1} \leqslant 1$ para todo entero $m \geqslant 1$, y de la ecuación (2.1)

$$h(2^{-m} + 2^{-1}) = 2^{-m} + 2^{-1} - 0 = 2^{-1} + 2^{-m}.$$

Para el caso $n = 1$, se tiene que $1 < 2^{1-m} + 1 \leqslant 2$, para todo entero $m \geqslant 1$ y de la ecuación (2.1), se tiene que

$$h(2^{1-m} + 2^{0}) = 2 - \left(2^{1-m} + 1\right) = 1 - 2^{1-m}.$$

Sustituyendo en (3.9) y haciendo $N \to \infty$

$$g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) = \lim_{N\to\infty}\left[2^{-m} + 2^{-1} + (1 - 2^{1-m})\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{2^n} 2^{n-m}\right] = 1 + \frac{m-1}{2^m}\cdot$$

Así

$$g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) = 1 + \frac{m-1}{2^m}$$

y sustituyendo en (3.8), obtenemos que

$$\frac{g\left(\frac{1}{2} + x_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + x_m - \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{m-1}{2^m} - 1}{\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{m-1}{2^m}}{\frac{1}{2^m}} = m - 1.$$

Por otra parte, si consideramos la sucesión y_m, se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{1}{2} + y_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + y_m - \frac{1}{2}} = g'\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3.10}$$

Luego, para $N > m$

$$g_N\left(\frac{1}{2} + y_m\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n\left[\frac{1}{2} + y_m\right]\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{2} - 2^{-m}\right) + \frac{1}{2} h\left(1 - 2^{1-m}\right) + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{2^n} h(2^{n-1} - 2^{n-m}) + \sum_{n=m+1}^{N} \frac{1}{2^n} h(2^{n-1} - 2^{n-m}). \tag{3.11}$$

Luego, para $1 < n < m$, 2^{n-1} es par y $1 \leqslant -2^{n-m} < 0$, por lo tanto

$$h(2^{n-1} - 2^{n-m}) = h(-2^{n-m}) = 2^{n-m}.$$

Para $n > m$, $2^{n-1} - 2^{n-m} > 1$ es par, de donde

$$h(2^{n-m} + 2^{n-1}) = 0.$$

Para el caso $n = 0$, se tiene que $0 \leqslant 2^{-1} - 2^{-m} < 1$ para todo entero $m \geqslant 1$, y de la ecuación (2.1)

$$h(2^{-1} - 2^{-m}) = 2^{-1} - 2^{-m} - 0 = 2^{-1} - 2^{-m}.$$

Para el caso $n = 1$, se tiene que $0 \leqslant 1 - 2^{1-m} + 1 < 1$ para todo entero $m \geqslant 1$ y de la ecuación (2.1), se tiene que

$$h(1 - 2^{1-m}) = 1 - 2^{1-m} - 0 = 1 - 2^{1-m}.$$

Sustituyendo en (3.20) y haciendo $N \to \infty$

$$g\left(\frac{1}{2} + y_m\right) = \lim_{N\to\infty}\left[2^{-1} + 2^{-m} + (1 - 2^{1-m})\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{m}\frac{1}{2^n}2^{n-m}\right] = 1 + \frac{m-1}{2^m}.$$

sustituyendo en (3.10), obtenemos que

$$\frac{g\left(\frac{1}{2} + y_m\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + y_m - \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{m-1}{2^m} - 1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{m-1}{2^m}}{\frac{-1}{2^m}} = 1 - m.$$

Usando el mismo razonamiento aplicado para el caso $x = 0$, se tiene que $g'(\frac{1}{2})$ no existe.

En general se tendra que

$$\frac{g\left(\frac{1}{2^n} + x_m\right) - g\left(\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n} + x_m - \frac{1}{2^n}} = m - 1,$$

y para cualquier entero $n \geqslant 0$, y usando el mismo razonamiento que en los casos anteriores podemos concluir que $g'\left(\frac{1}{2^n}\right)$ no existe.

Ahora nos tomaremos la tarea de demostrar que $g'(x)$ no existe para ningún número racional diádico. Sea $x = \frac{p}{2^k}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$, un racional diádico y supongamos que la derivada existe en dicho punto, entonces se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g\left(\frac{p}{2^k}+x_m\right)-g\left(\frac{p}{2^k}\right)}{\frac{p}{2^k}+x_m-\frac{p}{2^k}} = g'\left(\frac{p}{2^k}\right), \tag{3.12}$$

como antes, veamos cuanto vale

$$g\left(\frac{p}{2^k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{p}{2^k}\right).$$

Para $N \geqslant k$, se tiene que

$$g_N\left(\frac{p}{2^k}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} h\left(2^n \frac{p}{2^k}\right)$$

y como $p \in \{1, \cdots, 2^k - 1\} \subseteq [1, 2^k) = \bigcup_{j=0}^{k-1} [2^j, 2^{j+1})$ existe un único $j \in \{1, \cdots, k-1\}$ tal que $p \in [2^j, 2^{j+1})$, así

$$2^{j+n-k} \leqslant \frac{2^n p}{2^k} < 2^{j+n-k+1}.$$

Luego, tenemos que si $n \leqslant k - j - 1$, entonces $j + n - k + 1 \leqslant 0$ y por lo tanto

$$0 \leqslant \frac{2^n p}{2^k} < 2^0 = 1.$$

De donde,

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = \frac{2^n p}{2^k}.$$

Si $n \geqslant k$, tenemos que $\frac{2^n p}{2^k}$ es un múltiplo de 2, luego

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = 0.$$

Si $n \geqslant k - j$, es decir $j + n - k \leqslant 0$, entonces

$$1 = 2^0 < \frac{2^n p}{2^k},$$

para este caso, cuando $k - j \leq n < k$, no podemos dar con el valor explícito de $h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right)$, ya que h depende de p, entonces se presentan dos casos. Si p es impar entonces h describe una recta con pendiente negativa, si p es par h dscribe una recta con pendiente positiva. Más adelante veremos que no es necasario calcularlo. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} g_N\left(\frac{p}{2^k}\right) &= \sum_{n=0}^{k-j-1}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)+\sum_{n=k+1}^{N}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{k-j-1}\frac{1}{2^n}\frac{2^np}{2^k}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)\\ &= (k-j)p2^{-k}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Haciendo $N\to\infty$

$$g\left(\frac{p}{2^k}\right)=\lim_{N\to\infty}\left[(k-j)p2^{-k}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)\right]=(k-j)p2^{-k}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right).$$

Ahora calculemos $g\left(\frac{p}{2^k}+x_m\right)$. Para $N>m$, tenemos que

$$g_N\left(\frac{p}{2^k}+x_m\right)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}h\left(2^n\left[\frac{p}{2^k}+2^{-m}\right]\right)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^{n-k}p+2^{n-m})$$

$$= \sum_{n=0}^{k-j-1}\frac{1}{2^n}h(2^{n-k}p+2^{n-m})+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h(2^{n-k}p+2^{n-m})+\sum_{n=k+1}^{m}\frac{1}{2^n}h(2^{n-k}p+2^{n-m})+\sum_{n=m+1}^{N}\frac{1}{2^n}h(2^{n-k}p+2^{n-m}) \tag{3.13}$$

Luego, si $0\leqslant n\leqslant k-j-1$, entonces $\frac{2^np}{2^k}<1$ y por la propiedad Arquimedeana existe $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2^n}{2^m}<1-\frac{2^np}{2^k},$$

de donde $\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}<1$. Luego, para m suficientemente grande

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)=\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}.$$

Si $k+1\leqslant n\leqslant m$, entonces $\frac{2^np}{2^k}$ es un multiplo de 2 y $\frac{2^n}{2^m}<1$, por la periodicidad de h se tiene que

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)=h\left(\frac{2^n}{2^m}\right)=\frac{2^n}{2^m}.$$

Si $m+1\leq n\leq N$, $\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}$ es un multiplo de 2 y por lo tanto

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)=0,$$

para el caso restante, es decir, cuando $k-j\leqslant n\leqslant k$ no podemos dar el valor explícito de $h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)$, ya que esta expresión depende del valor de p y de acuerdo la escogencia de este valor podemos caer en un intervalo donde h sea una recta con pendiente positiva o una recta con pendiente negativa. Sustituyendo en (3.13) y haciendo $N \to \infty$ tenemos que para m suficientemente grande

$$g\left(\frac{p}{2^k}+x_m\right)=\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{k-j-1}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)+\sum_{n=k+1}^{m}\frac{1}{2^n}\frac{2^n}{2^m}\right]$$
$$=\frac{(k-j)p}{2^k}+\frac{k-j}{2^m}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)+\frac{m-k}{2^m}.$$

Sustituyendo en (3.12), concluimos que

$$\frac{g\left(\frac{p}{2^k}+x_m\right)-g\left(\frac{p}{2^k}\right)}{\frac{2^np}{2^k}+x_m-\frac{2^np}{2^k}}=\frac{\frac{(k-j)p}{2^k}+\frac{k-j}{2^m}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)+\frac{m-k}{2^m}-\left[(k-j)p2^{-k}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)\right]}{\frac{1}{2^m}}$$
$$=\frac{\frac{m-j}{2^m}+\sum_{n=k-j}^{k}\frac{1}{2^n}\left[h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^k}\right)-h\left(\frac{2^np}{2^m}\right)\right]}{\frac{1}{2^m}}. \tag{3.14}$$

Veamos como escribir esta última suma, para ello consideremos la partición

$$[1,\infty)=\bigcup_{l=1}^{\infty}[l,l+1),$$

tenemos que para $k-j\leq n\leq k$ existe un unico $l_0\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{2^np}{2^k}\in[l_0,l_0+1)$, luego para m suficientemente grande $\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\in[l_0,l_0+1)$. consideremos dos casos.

Si l_0 es par, de la ecuación (2.1) tenemos que

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)=\frac{2^np}{2^k}-l$$

además

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)=\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^k}-l$$

luego

$$h\left(\frac{2^np}{2^k}+\frac{2^n}{2^m}\right)-h\left(\frac{2^np}{2^k}\right)=\frac{2^n}{2^m}.$$

Por otra parte, si l_0 es impar, nuevamente de la ecuación (2.1) se tiene que

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = -\frac{2^n p}{2^k} + l + 1$$

y

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) = -\frac{2^n p}{2^k} - \frac{2^n}{2^m} + l + 1.$$

Luego

$$h\left(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}\right) - h\left(\frac{2^n p}{2^k}\right) = -\frac{2^n}{2^m}.$$

De donde se concluye que para cualquiera de los dos casos

$$h(\frac{2^n p}{2^k} + \frac{2^n}{2^m}) - h(\frac{2^n}{2^m}) = \varepsilon_n \frac{2^n}{2^m},$$

con $\varepsilon_n = \pm 1$. Sustituyendo la expresión anterior en (3.14) tenemos que

$$\frac{g\left(\frac{p}{2^k} + x_m\right) - g\left(\frac{p}{2^k}\right)}{\frac{p}{2^k} + x_m - \frac{p}{2^k}} = \frac{\frac{m-j}{2^m} + \sum_{n=k-j}^{k} \frac{1}{2^n} \varepsilon_n \frac{2^n}{2^m}}{2^m} = m - j + \sum_{n=k-j}^{k} \varepsilon_n \tag{3.15}$$

y al hacer $m \to \infty$ se tiene que $x_m + \frac{p}{2^k} \to \frac{p}{2^k}$, de donde

$$g'\left(\frac{p}{2^k}\right) = \lim_{m\to\infty}\left[m - j + \sum_{n=k-j}^{k} \varepsilon_n\right],$$

así se concluye que $g'\left(\frac{p}{2^k}\right)$.

Ahora solo nos queda por comprobar que g no es diferenciable para valores no racionales diádicos, es decir, tomaremos $x \in [0,1]$ arbitrario. Para llevar a cabo esta demostración haremos uso del siguiente Lema:

Lema 3.1. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a < a_n < x < b_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y ademas $a_n \to x$ y $b_n \to x$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f'(x)$ existe entonces*

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Demostración: tenemos que

$$\left|\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right| \leq \left|\frac{b_n - a_n}{b_n - a_n}\right| = 1 \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right| \leq \left|\frac{b_n - a_n}{b_n - a_n}\right| = 1.$$

Usando esto podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x)\right| = \left|\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - a_n} + \frac{f(x) - f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x)\right| \\
&= \left|\frac{(b_n - x)(f(b_n) - f(x))}{(b_n - x)(b_n - a_n)} + \frac{(a_n - x)(f(x) - f(a_n))}{(a_n - x)(b_n - a_n)} + \frac{(a_n - x)f'(x) - (b_n - x)f'(x)}{b_n - a_n}\right| \\
&= \left|\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\left(\frac{f(b_n) - f(x)}{(b_n - x)} - f'(x)\right) + \frac{a_n - x}{b_n - a_n}\left(\frac{f(a_n) - f(x)}{(a_n - x)} - f'(x)\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right|\left|\frac{f(b_n) - f(x)}{(b_n - x)} - f'(x)\right| + \left|\frac{a_n - x}{b_n - a_n}\right|\left|\frac{f(a_n) - f(x)}{(a_n - x)} - f'(x)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{f(b_n) - f(x)}{(b_n - x)} - f'(x)\right| + \left|\frac{f(a_n) - f(x)}{(a_n - x)} - f'(x)\right|
\end{aligned}$$

de donde esta expresión tiende a cero, cuando $n \to \infty$. Así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x). \qquad \square$$

Aproximémonos a x de la siguiente manera, fijemos $m \in \mathbb{N}$ y $p_m \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que x se encuentra entre dos números racionales diádicos sucesivos, es decir,

$$\frac{p_m}{2^m} < x < \frac{p_m + 1}{2^m}.$$

Repitiendo este procedimiento para cada m, llegamos a que existen dos suceciones $x_m = \frac{p_m}{2^m}$ y $y_m = \frac{p_m+1}{2^m}$ tales que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = x$ y $x_m < x < y_m$.

Supongamos que $g'(x)$ existe y consideremos las sucesiones $x_m = \frac{p_m}{2^m}$ y $y_m = \frac{p_m+1}{2^m}$, tenemos que estas sucesiones satisfacen las hipótesis del Lema 3.1, por lo tanto se tiene que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{g(y_m) - g(x_m)}{y_m - x_m} = g'(x).$$

Como hemos visto antes, $h(2^k y_m) = h(2^k x_m) = 0$ para $k > m$, de donde solo consideraremos el caso $0 \leq k \leq m$. Por el gráfico de h_n tenemos que esta función es lineal en los intervalos que tienen por extremos números racionales diádicos, además si $t \leq l$ se tiene que $\frac{1}{2^l} < \frac{1}{2^t}$ de donde $\left[\frac{p_1}{2^l}, \frac{p_1+1}{2^l}\right] \subseteq \left[\frac{p_0}{2^t}, \frac{p_0+1}{2^t}\right]$. Luego para $k < m$

$$[x_m, y_m] = \left[\frac{p_m}{2^m}, \frac{p_m+1}{2^m}\right] \subseteq \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$$

para algún $j \in \mathbb{Z}$. De esto se obtiene que $\{x_m\}$ y $\{y_m\}$ están sobre la misma recta, por lo tanto poseen la misma pendiente. De la ecuación (2.1) se tiene que $h(2^k y_m) - h(2^n x_m) = \frac{1}{2^r}$ si p es par y $h(2^k y_m) - h(2^n x_m) = -\frac{1}{2^r}$ si p es impar, donde $r = m - k$. Luego

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{h(2^k b_n) - h(2^n a_n)}{b_n - a_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\pm 2^{-l}}{2^{-l}} = \sum_{k=0}^{n} \pm 1,$$

al hacer $n \to \infty$ la serie diverge y esto contradice el hecho de que g' exista, por lo tanto g no es diferenciable en ningún $x \in \mathbb{R}$.

□

Debemos mencionar que a partir de este punto haremos uso de la representación

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ll 2^n x \gg}{2^n}$$

dada en la Definición 2.2. No daremos una prueba directa que esta representación no posee derivadas finitas en todo su dominio, ya que este hecho es una consecuencia directa del Teorema 2.3 presentado en [**7**], que nos dice

$$\tau(x) = \frac{1}{2} g(2x), \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

SECCIÓN 1

Derivadas impropias para puntos racionales diádicos

De las nociones de cálculo, hemos manejado el concepto de derivada de una función f en un punto x_0 de su dominio como el siguiente límite [**1**]

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{3.16}$$

siempre que este exista y esto geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a f en el punto x_0. En el caso que (3.16) sea divergente, es interesante saber que significado tiene como derivada. Desde un punto de vista geométrico, nos dice la recta tangente a la curva f en el punto x_0 es paralelo al eje vertical.

Debemos aclarar que en lo que sigue vamos trabajar en el conjunto de los números reales extendidos, por lo tanto la derivada puede tomar el valores $+\infty$ o $-\infty$. Esto nos conduce a definir la derivada impropia en un punto como el siguiente límite

$$\tau'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = \pm\infty.$$

Los resultados que vamos a presentar son consecuencia de la Proposición 2.5, dada por Krüppel en [**11**]. Estos nos garantizarán la existencia de las derivada lateral impropia en los puntos racionales diádicos, es decir, para los puntos de la forma $\frac{p}{2^k}$, $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 3.1. *Para cada racional diádico,* $x = \frac{p}{2^k}$, *con* $p \in \mathbb{Z}$ *y* $k \in \mathbb{N}$, *se tiene que*

(1) La derivada impropia a la derecha existe

$$\tau'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = +\infty.$$

(2) La derivada impropia a la izquierda existe

$$\tau'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = -\infty.$$

(3) Para el valor absoluto se satisface

$$\tau'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{|h|} = +\infty$$

Demostración: Para $0 < h < \frac{1}{2^{k+1}}$ y de la igualdad (2.24)

$$\tau(x+h) - \tau(x) = \tau\left(\frac{p + 2^k h}{2^k}\right) - \tau(x) = \{k - 2s(p)\}h + \frac{1}{2^k}\tau(2^k h),$$

dividiendo entre h esta última expresión obtenemos

$$\frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = \{k - 2s(p)\} + \frac{1}{2^k h}\tau(2^k h).$$

Por el Lema 2.2, tenemos que para k suficientemente grande

$$\frac{\log_2\left(\frac{1}{h}\right)}{2^k} \leqslant \frac{\tau(2^k h)}{2^k h} \leqslant \frac{\log_2\left(\frac{1}{h}\right)}{2^k} + \frac{c}{2^k},$$

de donde, se tiene que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(2^k h)}{2^k h} = \infty,$$

por lo tanto

$$\tau'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = +\infty.$$

Para calcular $\tau'_-(x)$ notemos que

$$\tau'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{h} = -\lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(x-h) - \tau(x)}{h}.$$

Luego, de la ecuación (2.25) se tiene

$$\tau(x-h) - \tau(x) = \tau\left(\frac{p - 2^k h}{2^k}\right) - \tau(x) = \{2s(p-1) - k\}h + \frac{1}{2^k}\tau(2^k h).$$

Con un razonamiento análogo al caso anterior, vemos que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tau(x-h) - \tau(x)}{h} = +\infty,$$

lo que implica que $\tau'_-(x) = -\infty$. Además, se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tau(x+h) - \tau(x)}{|h|} = +\infty. \qquad \square$$

Estamos interesados en saber como es la variación de la función de Takagi para valores muy cercanos, ya que esto nos da una idea de como es el comportamiento de la derivada. En lo que sigue usaremos la representación binaria dada en (1.5).

Definición 3.1. *Sea* $x \in [0,1]$ *con expresiones binarias* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2, \ldots,$ *entonces se tiene que que para* $n \geqslant 1$

$$x_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-n}} = 0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots = . \tag{3.17}$$

Utilizaremos la notación la notación $\bar{a} = 1 - a$ *para representar el complemento binario del término* i *de la representación binaria.*

La siguiente Proposición nos muestra como es la variación de la función de Takagi para valores del dominio que se encuentran muy cercanos

Proposición 3.2. *Sean* x *e* y *puntos diferentes en* $[0,1]$ *con representación binaria dada por*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2, \ldots, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} = 0, b_1 b_2, \ldots.$$

Además, vamos a suponer que estos términos satisfacen la siguiente condición, $a_i = b_i$ *para* $i < n \in \mathbb{N}$, *es decir, los primeros* $n-1$ *términos de la representación binaria coinciden. Entonces se tiene que* x_n *y* y_n *también son diferentes, y*

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{a_i} + \frac{\tau(x_n) - \tau(y_n)}{x_n - y_n}. \tag{3.18}$$

En particular, si $b_i = 1 - a_i$, *para todo* $i \geqslant n$, *es decir,* $x_n + y_n = 1$, *entonces tenemos que* $|x - y| \leqslant \frac{1}{2^n}$ *y además*

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{a_i}. \tag{3.19}$$

Demostración: Consideremos $k_n = [2^{n-1}x]$, como la parte entera de $2^{n-1}x$, es decir, $k_n = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i-1} a_i$. De donde,

$$x = \frac{2k_n + x_n}{2^n}, \qquad y = \frac{2k_n + y_n}{2^n}.$$

Por lo tanto

$$x - y = \frac{x_n - y_n}{2^n}. \tag{3.20}$$

De la igualdad (2.24), obtenemos que

$$\tau(x) = \tau\left(\frac{2k_n + x_n}{2^n}\right) = \tau\left(\frac{2k_n}{2^n}\right) + \frac{n - 2s(2k_n)}{2^n}x_n + \frac{\tau(x_n)}{2^n}$$
$$\tau(y) = \tau\left(\frac{2k_n + y_n}{2^n}\right) = \tau\left(\frac{2k_n}{2^n}\right) + \frac{n - 2s(2k_n)}{2^n}y_n + \frac{\tau(y_n)}{2^n}.$$

Restando estos términos, llegamos a que

$$\tau(x) - \tau(y) = \frac{n - 2s(2k_n)}{2^n}(x_n - y_n) + \frac{\tau(x_n - \tau(y_n))}{2^n}, \tag{3.21}$$

dividiendo (3.20) entre (3.21), se tiene que

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} = n - 2s(2k_n) + \frac{\tau(x_n) - \tau(y_n)}{x - y}. \tag{3.22}$$

Por otra parte, tenemos que el primer término de la parte derecha de la igualdad anterior lo podemos reescribir de la siguiente manera

$$n - 2s(2k_n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 - 2s(k_n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 - 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=0}^{n-1}(1 - 2a_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{a_i}.$$

Sustituyendo esta última igualdad en (3.25), llegamos al resultado requerido, es decir

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{a_i} + \frac{\tau(x_n) - \tau(y_n)}{x - y}.$$

Para el caso en que $y_n = 1 - x_n$, usaremos la simetría de la función de Takagi, de donde $\tau(x_n) = \tau(1 - x_n) = \tau(y_n)$ y así se tiene que

$$\frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{a_i}.$$

Por último, de la igualdad (3.20) tenemos que

$$|x-y| = \frac{|x_n-y_n|}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|a_k-b_k|}{2^{k-n+1}} \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|a_k-b_k|}{2^{k-n+1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}} \tag{3.23}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \tag{3.24}$$

□

A continuacion presentaremos un Corolario que nos dice como es el comportamiento de la función D_n (suma de dígitos deficiente) si asumimos la existencia de la derivada impropia en un punto, no solamente racional diádico sino arbitrario. Este resultado se desprende de la ecuación (3.19) y fue publicado por Krüppel en [**11**].

Corolario 3.1. *Sea* $x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^i} = a_0, a_1a_2\ldots$, *si existe la derivada impropia y es tal que* $\tau'(x) = +\infty$ *entonces*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{a_i} = +\infty, \tag{3.25}$$

y si $\tau'(x) = -\infty$ *entonces*

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{a_i} = -\infty. \tag{3.26}$$

Es importante resaltar que el recíproco de este Corolario no siempre es cierto, más adelante estudiaremos las condiciones para que la expresión $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{a_i}$ garantice la existencia de la derivada impropia.

En lo que sigue, nos enfocaremos en aquellos números en los que su representación binaria es periódica y para ello tomaremos en cuenta la siguiente definición.

Definición 3.2. *Un número x tiene una representación binaria periódica de período p, si a partir de un cierto $n \geqslant 1$ se tiene que los términos $a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+p}$ se repiten consecutivamente.*

Ejemplo 3.1. *Podemos ver que a partir de $i = 2$, los términos* (1001) *se repiten consecutivamente*

$$0,3 = 0,0100110011001\ldots$$

Por otra parte, vamos a definir una repitición como una secuencia de ceros o unos que aparece consecutivamente en la representación binaria de un número x.

Ejemplo 3.2. *Para ilustrar la idea de una repitición, tomemos un valor $x \in [0,1]$ arbitrario y supongamos que este posee la siguiente representación binaria*

$$x = 0,0001110110011\ldots$$

Podemos notar, que en la representación binraria de este término aparecen ceros y unos consecutivamente. A estas secuencias las llamaremos repiticiones y las denotaremos como R_i. Si consideramos a x con la representación dada anteriormente, se tiene

$$x = 0,\underbrace{000}_{R_1}\underbrace{111}_{R_2}\underbrace{0}_{R_3}\underbrace{11}_{R_4}\underbrace{00}_{R_5}\underbrace{11}_{R_6}\ldots$$

Una vez que se entiende lo que es una repetición, nos interesa contar la cantidad de términos consecutivos que hay en cada una. Para ello, vamos a denotar por $\#R_i$ como la cantidad de dígitos iguales en la *i-ésima* repeticiíon. En el Ejemplo 3.2.

$$\#R_1 = 3$$

$$\#R_2 = 3$$

$$\#R_3 = 1$$

$$\#R_4 = 2$$

$$\#R_5 = 2$$

$$\#R_6 = 2$$

$$\vdots$$

En nuestro estudio sobre las derivadas, nos enfocaremos en aquellos números para los cuales $\sup_i \#R_i < \infty$. Un caso particular de los números que cumplen esta propiedad, son los puntos con representación periódica p.

Es importante notar que $\#R_i < \infty$ para todo i no garantiza que $\sup_i \#R_i < \infty$. Por ejemplo, si consideramos un valor $y \in \mathbb{R}$ con la siguiente representación binaria

$$y = 0,011000111100000111111\ldots,$$

es fácil ver que las $\#R_i < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pero se tiene que el $\sup_{i\in\mathbb{N}} \#R_i$ no satisface la condición $\sup_{i\in\mathbb{N}} \#R_i < \infty$, pues conjunto de los enteros positivos no es acotado superiormente.

El siguiente Teorema presentado en [**11**], garantiza la derivada para los cuales $\sup_{i\in\mathbb{N}} \#R_i < \infty$.

TEOREMA 3.2. *Si en la representación binaria de un número x se tiene que $\sup_i \#R_i < \infty$ entonces*

(i) *Si* $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{a_i} = +\infty$ *se tiene que existe la derivada impropia y además* $\tau'(x) = +\infty$

(ii) *Si* $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{a_i} = -\infty$ *se tiene que existe la derivada impropia y además* $\tau'(x) = -\infty$

Demostración: Consideremos $y \neq x$ y sea n el mayor entero tal que $a_i = b_i$. De la Proposición 3.2 se sigue que

$$\left|\frac{\tau(x)-\tau(y)}{x-y} - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{a_\nu}\right| = \left|\frac{\tau(x_n)-\tau(y_n)}{x_n-y_n}\right|$$

Si $d = \sup_{i\in\mathbb{N}} \#R_i$, es decir, d representa la máxima cantidad de dígitos en la *i-ésima* repetición, entonces para el caso en que $a_n = 1$, $b_n = 0$ tenemos que $x_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{d+3}}$.

Veamos que se cumple esta desigualdad, para ello vamos a garantizar que existe i_0 tal que $n < i_0 < n+d+2$ y $a_{i_0} = 1$. Esto lo podemos verificar utilizando reducción al absurdo, en efecto, si para todo $n < i < n+d+2$ $a_i = 0$ entonces hay $d+1$ términos consecutivos que son iguales a cero. Esto contradice la escongencia de d como la máxima cantidad de repeticiones, luego existe $n < i < n+d+2$ tal que $a_{i_0} = 1$

De donde, tenemos que

$$x_n = \sum_{\substack{i=n+1 \\ i\neq k_0}}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-n+1}} + \frac{a_i}{2} + \frac{a_{i_0}}{2^{i_0-n+1}} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i_0-n+1}}$$

Usando el hecho de que $i_0 - n + 1 \leqslant n + d + 2 - n + 1 = d + 3$, se tiene que $\frac{1}{2^{i_0-n+1}} > \frac{1}{2^{d+3}}$. Luego se tiene que

$$x_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{d+3}}$$

Por otra parte, tenemos que

$$y_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i-n+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{n+i-1}}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{n+i}}{2^i} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}.$$

Luego, concluimos que

$$x_n - y_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{d+3}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{d+3}}.$$

En el caso en que $a_n = 0$ y $b_n = 1$, se tiene que $x_n < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{d+3}}$. Para deducir este resultado, debemos utilizar un razonamiento análogo al caso anterior, es decir, de acuerdo a la escogencia de d podemos garantizar la existencia $a_i = 0$ para $n \leqslant i \leqslant n+d+2$, de donde

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-n+1}} = \sum_{\substack{i=n+1 \\ i\neq k_0}}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-n+1}} < \sum_{\substack{i=n+1 \\ i\neq i_0}}^{\infty} \frac{1}{2^{i-n+1}} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-n+1}} - \frac{1}{2^{i_0-n+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+2}} - \frac{1}{2^{i_0-n+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2^{i_0-n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{i_0-n+1}} \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $n \leqslant i_0 < n+d+2$, se tiene que $n-n+1 \leqslant i_0-n+1 < n+d+2-n+1 = d+3$. De esto, se concluye que $2 < 2^{i_0-n+1} < 2^{d+3}$, llegando $\frac{1}{2^{i_0-n+1}} > \frac{1}{2^{d+3}}$. Así. se tiene que

$$x_n < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{d+3}}$$

y además se tiene que

$$y_n = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{b_k}{2^{i-n+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+n-1}}{2^i} = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b_{i+n-1}}{2^i} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Luego, concluimos que

$$y_n - x_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{d+3}} = -\frac{1}{2^{d+3}}$$

De las propiedades de la función de Takagi, se tiene que

$$|\tau(x_n) - \tau(y_n)| < \frac{2}{3},$$

de donde

$$\left| \frac{\tau(x_n) - \tau(y_n)}{x_n - y_n} \right| < \frac{2}{3} 2^{d+3}.$$

Tomando $C = \frac{2}{3}2^{d+3}$, se tiene que

$$\left| \frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} - \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{a_i} \right| < C$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{a_i} - C < \frac{\tau(x) - \tau(y)}{x - y} < \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{a_i} + C.$$

Podemos ver de esta ultima desigualdad, que en el caso en que el número de 0 sea mayor que el número de 1, se cumple (3.25), es decir, $\tau'(x) = \infty$. Por otra parte, si la cantidad de dígitos iguales a 1 es mayor que la cantidad de dígitos iguales a 0 en la representación binaria, entonces se satisface la igualdad (3.26), es decir, $\tau'(x) = -\infty$. $\square$

El siguiente Corolario es consecuencia directa del Teorema 3.2 y garantiza la existencia la derivda impropia para los racionales periódicos, pues estos satisfacen la propiedad $\sup_{i \in \mathbb{N}} \#R_i < \infty$.

COROLARIO 3.2. *Sea x un racional periódico de período $a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+p}$, entonces se tiene lo siguiente*

$$a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+p} = \begin{cases} < \frac{p}{2} & \tau'(x) = +\infty \\ \\ > \frac{p}{2}, & \tau'(x) = -\infty \\ \\ = \frac{p}{2}, & \tau'(x) \textit{ no existe la derivada} \end{cases} \tag{3.27}$$

En el último caso, p debe ser un número par.

Se puede observar que la condición $a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+p} < \frac{p}{2}$, nos indica que la cantidad de dígitos iguales a cero es mayor que la cantidad de dígitos iguales a uno y de acuerdo al Teorema 3.2, se tiene que $\tau'(x) = \infty$. Por otro lado, si $a_{n+1}a_{n+2}\dots a_{n+p} > \frac{p}{2}$, entonces el número de 1 en las repeticiones es mayor que el número de 0, y del Teorema 3.2 se tiene que $\tau'(x) = -\infty$.

Por último, en el caso en que p sea par, tenemos que el número de 0 y 1 son iguales, de donde se concluye que $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{a_k}$ es divergente y por lo tanto no existe la derivada impropia.

En resumen, este Corolario dice que si un racional periódico x, es de período impar, siempre podemos garantizar la existencia de su derivada impropia.

EJEMPLO 3.3. *Si $x_1 = \frac{1}{7} = 0,001001\dots$, entoces este tiene período* 001 *y del Corolario* 3.2, *tenemos que su derivada es $\tau'(x) = \infty$.*

Ahora tomemos, $x = \frac{6}{7} = 0,110110\dots$, entonces este número tiene período 110 *y del Corolario* 3.2 *se sigue que $\tau'(x) = -\infty$.*

SECCIÓN 2

Derivada impropia para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario

En esta sección estudiaremos la derivada impropia para puntos no racionales diádicos, es decir, aquellos puntos que en su representación binaria, los dígitos cambian constantemente a ceros y a unos. No daremos una prueba detallada de este hecho, ya que se sale de los lineamientos de esta disertación. Podemos encontrar una demostración completa en [**3**] y en [**11**].

Estos autores proponen que para garantizar la derivada impropia en un punto no racional diádico se debe estudiar las derivadas laterales impropias por seperado. De la ecuación (2.21), presentada por Kaires en [**9**], tenemos que la función de Takagi satisface la siguiente relación $\tau(x) = \tau(1-x)$, entonces se tiene que $\tau_+ = \pm\infty$ si y solo si $\tau_-(x) = \pm\infty$, por lo tanto, solo nos centraremos en el estudio de $\tau_+(x) = +\infty$.

Para los puntos $x \in [0,1]$ no racionales diádicos, vamos a considerar la siguiente representación

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}}, \tag{3.28}$$

donde $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$ es una sucesión de enteros positivos creciente.

Ejemplo 3.4. *si consideramos la sucesión $a_n = 4^n$, tenemos que x posee la siguiente representación binaria*

$$x = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{64}} + \dots = 0.0001000000000000100000\dots$$

podemos observar que para este ejemplo la cantidad de dígitos iguales a ceros crece muy rápido y nos conduce a pensar que $\tau'(x) = +\infty$, aunque debemos ser cuidadosos al decir esta afirmación, ya que no siempre es cierta. El siguiente Teorema fue presentado por Allart y Kawamura en [**3**] y caracteriza la existencia de la derivada para los puntos no racionales diádicos. Como mencionamos anteriormente, no se dará una demostración completa de este hecho.

TEOREMA 3.3. *Sea $x \in [0,1]$ arbitrario que no tiene representación $x = \frac{p}{2^k}$, con $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ y considerando la siguiente representación de dicho número*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-a_n} \qquad 1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-b_n}, \tag{3.29}$$

donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de enteros positivos, monótonas crecientes, las cuales están determinadas únicamente por x. Entonces

(i) $\tau'_+(x) = +\infty$ *si y solo si* $a_n - 2n \to +\infty$

(ii) $\tau'_-(x) = +\infty$ *si y solo si*

$$a_{n+1} - 2a_n + 2n - \log_2(a_{n+1} - a_n) \to -\infty. \tag{3.30}$$

(iii) $\tau'_+(x) = -\infty$ *si y solo si*

$$b_{n+1} - 2b_n + 2n - \log_2(b_{n+1} - b_n) \to -\infty. \tag{3.31}$$

(iv) $\tau'_-(x) = -\infty$ *si y solo si* $b_n - 2n \to \infty$

Las condiciones (3.30) y (3.31) son las más importantes para determinar la derivada impropia en un punto que no es de la forma $\frac{p}{2^k}$. Daremos algunos unos ejemplos presentados en [**3**], que ilustran como es el comportamiento de estos términos. Ya que estas condiciones son análogas estudiaremos solo (3.30).

EJEMPLO 3.5. *Si consideramos un punto $x \in [0,1]$ con la representación dada en* (3.28) *y además exigimos que este cumpla con la condición $d = \sup_{i \in \mathbb{N}} \# R_i < \infty$, se tendrá que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión de enteros positivos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, no puede excederse del valor d $a_{n+1} - a_n \leqslant d + 1$, luego*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - 2a_n + 2n - \log_2(a_{n+1} - a_n) &\leqslant (a_{n+1} - a_n) - a_n + 2n - \log_2(d+1) \\
&\leqslant d + 1 - (a_n - 2n) - \log_2(M+1) \\
&\leqslant d + 1 - (a_{n+1} - 2n)
\end{aligned}$$

Vemos que que esta desigualdad nos conduce al Teorema 3.2 presentado Krüppel en [**11**]. Vemos que si $D_n \to +\infty$ y la cantidad de ceros es acotada se sigue que $\tau'(x) = +\infty$. Por otra parte, si $D_n \to -\infty$ y la cantidad de unos es acotada, entonces $\tau'(x) = -\infty$.

EJEMPLO 3.6. *En la condición (i) del Teorema* 3.3*, el término* $a_n - 2n = D_{a_n}$*, por lo tanto esta afirmación es equivalente a decir que* $\tau'_+(x) = +\infty$ *si y solo si* $D_{a_n} \to +\infty$.

De la simetría de la función de Takagi, basta probar solo las condiciones (i) y (iii).

El siguiente Coralario nos muestra la la importancia que tiene el término (3.30) y (3.31) para determinar la derivada en un punto no racional diádico.

COROLARIO 3.3. *En notación del Teorema* 3.3*, se tiene que*

(i) $\tau'(x) = +\infty$ *si y solo si se satisface* (3.30).

(ii) $\tau'(x) = -\infty$ *si solo si se satisface* (3.31).

Demostración: Si asumimos que (3.30) es cierto, se tiene que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n + 2n - \log_2(a_{n+1} - a_n) &= a_{n+1} - a_n - \log_2(a_{n+1} - a_n) - (a_n - 2n) \\ &\geqslant a_{n+1} - a_n - (a_{n+1} - a_n) - (a_n - 2n) \\ &= -(a_n - 2n). \end{aligned}$$

Lo que implica que $a_n - 2n \to +\infty$ y por lo tanto $\tau'_+(x) = +\infty$. Como las derivadas laterales coinciden se tiene que $\tau'(x) = +\infty$. Análogamente se demuestra que $\tau'(x) = -\infty$ si (3.31) es cierta. $\square$

SECCIÓN 3

El contraejemplo de Kruppel

A pesar de que Takagi dio su propia demostración sobre el hecho de que su función no tenía derivada finita en ningún punto [**17**], otros autores como Hildebrandt [**8**] y De Rham [**16**] dieron una demostración alternas del mismo hecho basandose en la misma idea lógica.

En el Teorema 3.1, presentado al inicio de este capítulo, vimos que para un punto arbitrario la derivada estaba determinada por el siguiente factor

$$\sum_{k=0}^{n} \pm 1.$$

Esta argumento nos lleva a pensar a que la derivada puede existir en algunos puntos siempre y cuando aceptemos la definición de derivada impropia. Hildebrandt en [**8**], dejo una nota donde le pedía a los lectores tratar de caracterizar el conjunto de puntos donde la función de Takagi aceptaba la definición de derivada impropia. Tres años despúes, Begle y Ayres en [**4**], respodieron la nota dejada por Hildebrandt, donde estos exponían que que $\tau'(x) = \infty$ si la función suma de dígitos deficiente cumplía con la condición $D_n \to \infty$ y además se tenía que $\tau'(x) = -\infty$ si $D_n \to -\infty$.

A primera vista esta condición parace ser cierta, pero en realidad no lo es, pues Krüppel [**11**] dio un contraejemplo de un punto tal que $D_n \to \infty$ pero $\tau'(x) \neq +\infty$. Finalizaremos este trabajo con una idea que apunta al contraejemplo dado por Krüppel en [**11**]. Como antes debemos considerar a un x no racional diádico con la representación dada en (3.28).

Haremos uso de la representación

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_n}},$$

dada en (3.28) para representar a un número no racional diádico. Donde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de enteros positivos. Tomemos $a_n = 4^n$, del Ejemplo 3.4 se puede observar que x cumple con la condición $D_n \to \infty$.

De la Proposición 2.4, se tiene que para todo racional diádico se satisface la condición

$$\tau\left(\frac{n}{2^l}\right) = \frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n-1} s(k).$$

Para l fijo, sea k el entero tal que $\frac{k}{2^l} < x < \frac{k+1}{2^l}$, entonces se tiene que

$$\tau\left(\frac{k+1}{2^l}\right) - \tau\left(\frac{k}{2^l}\right) = \frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n} s(k) - \left[\frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n-1} s(k)\right] = \frac{1}{2^l}(l - 2s(n)) = \frac{1}{2^l}D_l$$

De donde se tiene que la diferencias de las alturas tienden a infinito. Sin embargo, si tomamos $m = a_{n+1} - 1$, entonces $s(k) = n$, mientras que $s(k-1) = n + a_{n+1} - a_n - 2$ y $s(k-2) = n + a_{n+1} - a_n - 3$. Luego, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\tau\left(\frac{k+1}{2^l}\right) - \tau\left(\frac{k-2}{2^l}\right)}{\frac{k+1}{2^l} - \frac{k-2}{2^l}} &= \frac{2^l}{3}\left[\frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n} s(k) - \left(\frac{nl}{2^l} - \frac{1}{2^{l-1}}\sum_{k=0}^{n-3} s(k)\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[3m - 2s(k) - 2s(k-1) - 2s(k-2)\right] = \frac{1}{3}\left[4a_n - a_{n+1} - 6n + 7\right].\end{aligned}$$

Se tiene por regla de crecimiento que la última expresión tiende al infinito negativo siempre que $n \to \infty$. Con lo que se concluye que es falso la afirmación de Beagle y Ayres.

□

Bibliografía

[1] S. Abbott, Understanding Analysis, Springer, 2010.

[2] P. C. Allart, K. Kawamura, *The improper infinite derivatives of Takagi's nowhere-differentiable function*, J. Math. Anal. Appl **372** (2010), 656-665.

[3] P. C. Allart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey,* arXiv: 1110.1691, October 8, 2011.

[4] E. G. Begle and W. L. Ayres, *On Hildebrandt's example of a function without a finite derivative,* Amer. Math. Monthly **43** (1936), no. 5, 294-296.

[5] P. Billingsley, *Van Der Waerden's continuous nowhere differentiable function,* Amer. Math. Monthly **89** (1982), no. 9, 691

[6] P. Du Bois-Reymond, *Versus einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen,* J Reine Angew. Math. **79**(1875,) 21-37.

[7] M. Hata, M. Yamaguti, *The Takagi function and its generalization,* Japan J. Appl. Math. **1** (1984), 183-199.

[8] T. H. Hilderbrandt, *A simple continuous function with finite derivative at no point,* Amer. Math. Monthly **40** (1933), 547-548.

[9] H. H., Kaires *Takagi's function and its functional equations,* Rocz. Nauk. Dydakt. Pr. Mat., **15** (1998), 73-83.

[10] M. Krüppel, On the extrema and the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function. Rostock. Math. Kolloq. **62**, 41-59 (2007)

[11] M. Krüppel, On the improper derivatives of Takagi's continuous nowhere differentiable function, American Mathematical Society, 2010.

[12] J. C. Lagarias, Z. Maddock, *Level sets of Takagi function: local level sets,* eprint: arXiv: 1009.0855, v5, 29 july, 2012.

[13] J. C. Lagarias, *The Takagi function and its properties*, Functions in Number Theory and their Probabilistic Aspects, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34**, Aug. 2012, pp. 153–189. arXiv:1112.4205v2

[14] J. S. Lipinski, *On zeros of continuous nowhere differentiable function,* Amer. Math. Monthly **73** (1966), no. 2, 166-168.

[15] Z. MADDOCK, *Properties of the Takagi function,* 2006.
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.324.6728&rep=rep1&type=pdf

[16] G. de Rham, *Sur un example de fonction sans dérivée.* Enseignement Math. **3** (1957), 71-72.

[17] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative, from Proceedings of the Phsyco-Mathematical Society of Japan,* ser II, Vol. 1. 1903, pp 176-177. [Collected papers of Teiji Takagi (S. Iyanaga, Ed) Springer verlag, New York 1990].

[18] R. Tambs-Lyche, *une fonction continue sans dérivée,* Enseignement Math. **38** (1939/40), 208-211.

[19] J. THIM, *Continuous nowhere differentiable functions.* Master's Thesis. Lulea University of Technology, 2003.

[20] B. L. Van der Waerden, *Ein einfaches Beispiel einer nichtdifferenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Z. **32** (1930), 474-475.