



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE COMPUTACIÓN

**ACELERACIONES DE LOS MÉTODOS DE PROYECCIONES  
ALTERNANTES Y SIMULTÁNEAS EN EL PROBLEMA DE  
ASIGNACIÓN DE AUTOVALORES**

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por **Gledys Sulbarán** para optar al título de Licenciada en Computación.

**Tutores: Dr. Luis Manuel Hernández y Dra. Joali Moreno**

Caracas, Venezuela

Febrero 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aceleraciones de los Métodos de Proyecciones Alternantes y Simultáneas en el Problema de Asignación de Autovalores**”, presentado por **Gledys Sulbarán**, titular de la Cédula de Identidad **17.313.160**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Computación**.

---

**Dr. Luis Manuel Hernández.**

**Tutor**

---

**Dra. Joali Moreno.**

**Tutora**

---

**Dr. Marcos Raydan.**

**Jurado**

---

**Dr. Otilio Rojas.**

**Jurado**

# Agradecimientos

A Dios por darme salud y fuerzas.

A mi tutores, el profesor Luis Manuel Hernández Ramos y el profesora Joali Moreno por toda la atención, la paciencia y el conocimiento que siempre me brindaron. Muchas gracias por creer en mi.

A mi madre Gladys Goyo, por estar a mi lado en todo momento. A mi hermanita Glendy por apoyarme y ayudarme cuando la necesito.

A mis queridos amigos Gisell, Freddy, Yoel, Mariolys, Adolfo, Adelis, Lilibeth, Nelson, Augusto.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Métodos de Proyecciones Alternantes</b>	<b>4</b>
2.1. Introducción . . . . .	4
2.2. Proyecciones Alternantes . . . . .	4
2.2.1. Algoritmo MAP . . . . .	5
2.3. Los Métodos de Kaczmarz y Cimmino . . . . .	7
2.3.1. Método de Kaczmarz . . . . .	7
2.3.2. Método de Cimmino . . . . .	8
2.4. Velocidad de Convergencia . . . . .	9
2.4.1. Ángulo entre Subespacios . . . . .	9
2.4.2. Velocidad de Convergencia para Proyecciones Alternantes . . . . .	9
<b>3. Proyecciones Alternantes para el PAMM</b>	<b>12</b>
3.1. Introducción . . . . .	12
3.2. Sistema matricial de segundo orden en problemas de control . . . . .	13
3.3. Asignación parcial de autovalores en problemas de control . . . . .	14
3.4. Formulación del problema . . . . .	15
3.5. Exigir una estructura dada . . . . .	19
3.6. Aceleración del MAP con ideas Appleby y Smorlarski . . . . .	22

<b>4. Métodos tipo residual para sistemas no lineales aplicado al PAMM</b>	<b>27</b>
4.1. Introducción . . . . .	27
4.2. Aceleración para variedades lineales . . . . .	28
4.3. Métodos tipo residual para sistemas no lineales . . . . .	29
4.4. Aceleración del Método de Cimmino en variedades lineales para el PAMM usando DF-SANE . . . . .	30
4.5. Aceleración del Método de Proyecciones Alternantes en variedades lineales para el PAMM usando DF-SANE . . . . .	33
4.5.1. El método DF-SANE manteniendo un patrón de rareza dado . . . . .	35
<b>5. Resultados numéricos</b>	<b>36</b>
5.1. Experimento 1 . . . . .	37
5.2. Experimento 2 . . . . .	39
5.3. Experimento 3 . . . . .	41
5.4. Experimento 4 . . . . .	43
<b>6. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>46</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio y análisis de vibraciones tiene como propósito combatir el fenómeno de la resonancia en estructuras. Los sistemas estructurales son representados por ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las vibraciones están relacionadas con los autovalores que surgen del modelo. En este análisis los sistemas estructurales son representados por un sistema matricial de segundo orden de la siguiente forma:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = 0. \quad (1.1)$$

donde  $M, D, K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  representan la masa, la amortiguación y la rigidez respectivamente. Los vectores  $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t) \in \mathbf{R}^n$  son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento respectivamente (ver detalle en [19]). Además  $\dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$  representan la primera y segunda derivada de  $x(t)$  con respecto al tiempo. Una solución fundamental para el sistema (1.1) es  $x(t) = ve^{\lambda t}$  donde el escalar  $\lambda$  y el vector  $v$  satisfacen la siguiente ecuación cuadrática de autovalores (Quadratic Eigenvalue Problem - QEP)

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K)v = 0, \quad (1.2)$$

la cual posee  $2n$  autovalores y  $2n$  autovectores. Estos autovalores están relacionados con las frecuencias naturales del sistema homogéneo.

Sólo algunos autovalores causan un fenómeno no deseado que es conocido como resonancia. De allí la importancia de resolver el problema cuadrático de asignación parcial

de autovalores, que consiste en reemplazar los autovalores “no deseados” por autovalores “deseados”, manteniendo invariante el resto del espectro, evitando así el fenómeno de resonancia.

El Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM) consiste en actualizar algunas matrices que surgen en el modelo matricial de segundo orden, de manera que los autovalores asociados al modelo sean los deseados y al mismo tiempo preservar la estructura y simetría de las matrices involucradas. En el trabajo doctoral [18], se plantea el PAMM como un problema de optimización no lineal con restricciones, y en dicho trabajo se propone el uso del método de proyecciones alternantes (MAP) y sus variantes para resolver dicho problema, además se plantea una estrategia de aceleración basada en una técnica propuesta por Appleby y Smorlarski [1].

Los métodos de proyecciones alternantes y simultáneas suelen tener una convergencia lenta. En [13] se estudia el problema de mejor aceleración en variedades lineales. Los autores proponen mejorar a los algoritmos de proyecciones alternantes y de Cimmino utilizando técnicas de optimización. En el caso de variedades lineales se usan técnicas basadas en métodos tipo residual, como por ejemplo el SANE y el DF-SANE, estudiadas y analizadas por la Cruz et al. [5][6], para acelerar los métodos basados en proyecciones. Estas técnicas pueden igualmente ser empleados para resolver el Problema de Actualización en el Modelo Matricial.

En este trabajo proponemos la aplicación y comparación de estas técnicas recientes propuestas en [13] para resolver el PAMM con métodos basados en proyecciones como propone [18] y además se realizan experimentos numéricos con una nueva propuesta basada en la aceleración del MAP mediante el DF-SANE.

# Capítulo 2

## Métodos de Proyecciones Alternantes

### 2.1. Introducción

En este capítulo se resumen algunos conceptos acerca el Método de Proyecciones Alternantes (MAP, por sus siglas en inglés). Este capítulo se basa principalmente en el libro de Escalante y Raydan [11] y en la tesis doctoral de Hernández-Ramos [13].

### 2.2. Proyecciones Alternantes

El Método de Proyecciones Alternantes en su versión original fue desarrollado por Von Neumann en 1933 [20], quien trató el problema de encontrar la proyección de un punto dado en un espacio de Hilbert en la intersección de dos subespacios cerrados. Posteriormente, el método de Von Neumann fue extendido por Halperin [12] a una familia finita de subespacio cerrados de  $H$ . Igualmente, en 1937, Kaczmarz [15] había propuesto un método análogo al método de Halperin, pero solo en el caso particular de sistemas de ecuaciones lineales.

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $M$  un subespacio cerrado de  $H$ . Denotemos por  $P_M$



el operador de Proyección ortogonal sobre  $M$ . Este es un operador lineal, autoadjunto ( $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ ) e idempotente ( $P^2 \equiv P$ ).  $P_M$  es tal que:

$$\|x - P_M(x)\| = d(x, M)$$

donde  $d(x, M) = \inf\{\|x - y\|, y \in M\}$ , es decir  $P_M(x)$  es el punto más cercano a  $x$  en  $M$ . Una propiedad que lo caracteriza en el caso de subespacios es:

$$\langle x - P_M(x), y \rangle = 0, \forall y \in M.$$

Una definición que utilizaremos luego es la del complemento ortogonal de un conjunto. El Complemento ortogonal de  $M$  (denotado por  $M^\perp$ ) se define como:

$$M^\perp := \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in M\}.$$

Es decir,  $x - P_M(x)$  es ortogonal a  $M$ .

Sean  $A$  y  $B$  subespacios cerrados de  $H$ . Entonces  $P_A P_B = P_B P_A$  si y sólo si  $P_A P_B = P_{A \cap B}$ . Es decir,  $P_A$  y  $P_B$  conmutan si y solo si su composición es también una proyección ortogonal. Von Neumann estuvo interesado en el caso donde  $P_A$  y  $P_B$  no conmutan, probando el siguiente resultado:

**Teorema 2.1.** (Von Neumann [1933]) [20] Sean  $A$  y  $B$  subespacios cerrados en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces, para cada  $x \in H$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_B P_A)^n(x) = P_{A \cap B}(x).$$

### 2.2.1. Algoritmo MAP

El Teorema de Von Neumann induce un algoritmo iterativo (Algoritmo 1) para calcular la proyección en la intersección de dos subespacios cerrados.

La interpretación geométrica de este método nos dice que para encontrar la mejor aproximación a un punto  $x$  desde  $A \cap B$ , primero se proyecta  $x$  sobre  $A$ , el vector obtenido se proyecta sobre  $B$ , y así se continua proyectando de forma alternada sobre  $A$  y  $B$ . La

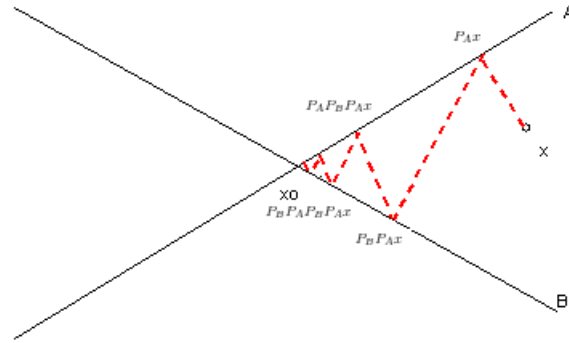


Figura 2.1: Proyecciones Alternantes

sucesión de los elementos generados de esta manera converge a  $P_{A \cap B}(x)$ . La utilidad práctica de este procedimiento proviene del hecho de que es más sencillo proyectar sobre cada subespacio individualmente que proyectar sobre la intersección.

---

**Algoritmo 1 MAP**


---

- 1: Dado  $x_0$
  - 2: **for**  $n = 1, \dots$ , **do**
  - 3:  $x_n = P_B P_A x_{n-1} = (P_B P_A)^n x$
  - 4: **end for**
- 

El resultado obtenido por Von Neumann fue extendido posteriormente por Halperin [12] a una familia finita de subespacio cerrados.

**Teorema 2.2.** (Halperin 1962). Sean  $M_1, M_2, \dots, M_r$  subespacios cerrados en  $H$  y  $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_2} P_{M_1})^n(x) = P_{\bigcap_{i=1}^r M_i}(x)$$

para cada  $x \in H$ .

*Demostración.* Ver [11]. □

Es importante mencionar que la demostración del teorema 2.2 cuando  $r \geq 3$  es diferente a la dada por Von Neumann para el teorema 2.1 cuando  $r = 2$ .

En 1983, Frank Deutsch [8] hace una generalización del teorema 2.2 al caso donde los conjuntos involucrados son un número finito de variedades lineales.

**Teorema 2.3.** (Deutsch, 1983 [8]) Si  $M_1, M_2, \dots, M_r$  son variedades lineales cerradas en un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces, para cada  $x \in H$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{M_r} P_{M_{r-1}} \dots P_{M_2} P_{M_1})^n(x) = P_{\bigcap_{i=1}^r M_i}(x).$$

## 2.3. Los Métodos de Kaczmarz y Cimmino

### 2.3.1. Método de Kaczmarz

Este método fue propuesto originalmente por Kaczmarz [15] quien estableció su convergencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales  $Ax = b$ . Dicho método es un caso particular del método propuesto posteriormente por Halperin para el caso específico de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos el problema de resolver los sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b.$$

Donde  $A$  es una matriz real  $m \times n$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  y  $b \in \mathbf{R}^m$ . Sea

$$H_i = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle a_i, x \rangle = b_i\}.$$

Aquí  $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbf{R}^n$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  y  $b_i \in \mathbf{R}$   $i = 1, \dots, m$ .

Encontrar una solución de  $Ax = b$  es equivalente a encontrar un punto en la intersección de todos los hiperplanos  $H_i$ , es decir en  $\bigcap_{i=1}^m H_i$ . Para encontrar tal punto, por el método de Kaczmarz, para un iterado inicial  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  arbitrario, se define la iteración:

$$x_n = (P_{H_m} P_{H_{m-1}} \dots P_{H_2} P_{H_1}) x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Entonces por el teorema 2.3 se tiene que

$$\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} \longrightarrow P_{\bigcap_{i=1}^m H_i}(x_0) =: y_0.$$

Es decir, la iteración del método de Kaczmarz converge a un punto  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  que satisface la ecuación  $Ax = b$ .

Note que para cada  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $a_i$  es ortogonal a  $H_i$ . Si  $z \notin H_i$ , la proyección sobre  $H_i$  viene dada por la siguiente expresión:

$$P_{H_i}(z) = z + \frac{b_i - \langle a_i, z \rangle}{\langle a_i, a_i \rangle} a_i.$$

Es importante resaltar que si  $z \in H_i$  la proyección sobre  $H_i$  es el mismo  $z$ .

### 2.3.2. Método de Cimmino

Este método fue propuesto por Cimmino [4], quien estableció la convergencia para la solución de sistemas de ecuaciones lineales  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Para un  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , un paso típico del método de Cimmino es el siguiente,

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{H_i}(x_k)$$

donde

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle = b_i\}.$$

El método de Cimmino ha sido extendido y generalizado para variedades lineales. Kammerer y Nashed en [16] generalizan el método de la siguiente manera:

Sean  $V_1, V_2, \dots, V_n$  variedades lineales cerradas de un espacio de Hilbert  $H$ , y dado  $x_0 \in H$ . El método de Cimmino viene dado entonces por la secuencia,

$$x_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{V_i}(x_k)$$

Tal como en el método de Kaczmarz, las iteraciones de este método convergen a  $P_V(x_0)$ , donde  $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ .

## 2.4. Velocidad de Convergencia

La velocidad de convergencia del Método de Proyecciones Alternantes ha sido estudiada por varios autores, entre ellos: Smith, Solmon y Wagner [21], Kayalar y Weinert [17] y F. Deutsch [10]. En general, la velocidad de convergencia del MAP es r-lineal y depende del ángulo entre los subespacios o variedades lineales involucrados.

### 2.4.1. Ángulo entre Subespacios

Recordemos que si  $x, y \in H$ , el ángulo  $\theta$  entre  $x$  e  $y$  está definido como el ángulo cuyo coseno está dado por:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

La siguiente definición introducida originalmente por Friedrichs en 1937, es la más utilizada en la literatura del MAP para trabajar con el ángulo entre subespacios.

**Definición 2.4.** (Friedrichs, [1937]) [9] *El ángulo  $\theta(M, N)$  entre dos subespacios cerrados  $M$  y  $N$  de  $H$  es el ángulo en  $[0, \pi/2]$  cuyo coseno  $C(M, N) = \cos\theta(M, N)$  esta dado por:*

$$C(M, N) := \sup\{|\langle x, y \rangle| : x \in M \cap (M \cap N)^\perp, \|x\| \leq 1, y \in N \cap (N \cap M)^\perp, \|y\| \leq 1\}$$

### 2.4.2. Velocidad de Convergencia para Proyecciones Alternantes

#### Caso dos subespacios

En el siguiente teorema se demuestra que la velocidad de convergencia del Método de Proyecciones Alternantes depende del ángulo entre los subespacios involucrados. De dicho teorema tenemos que si el ángulo entre los subespacios es pequeño el método se hace lento en el sentido de que se requerirán muchas iteraciones para su convergencia. [10]

**Teorema 2.5.** (Aronszajn 1950)[2]: Sean  $M_1$  y  $M_2$  subespacios cerrados en  $H$  cuyo coseno  $C(M_1, M_2) = \cos \theta(M_1, M_2)$ . Entonces, para cada  $x \in H$

$$\| (P_{M_2}P_{M_1})^n(x) - P_{M_1 \cap M_2}(x) \| \leq C^{2n-1} \| x - P_{M_1 \cap M_2}(x) \| \leq C^{2n-1} \| x \|$$

para  $n = 1, 2, \dots$  por otra parte, la constante  $C^{2n-1}$  es la más pequeña posible.

En la siguiente figura se puede apreciar la dependencia del ángulo en la velocidad de convergencia para el caso de dos subespacios A y B. En el ejemplo de la figura 2.2, el método realiza menos iteraciones para llegar a la solución mientras que el ejemplo 2.3 converge más lentamente ya que realiza más iteraciones para llegar a la solución, es decir, el método es más rápido cuando el ángulo entre los subespacios está más cerca de la ortogonalidad

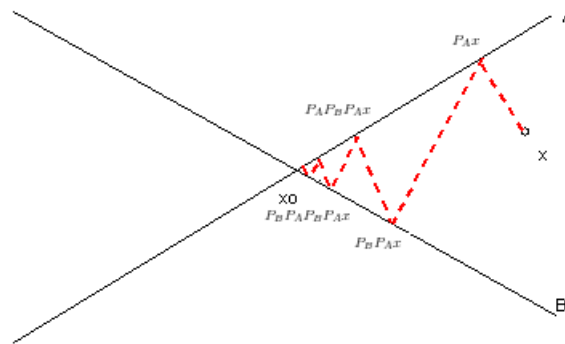


Figura 2.2: Método MAP: ángulo grande

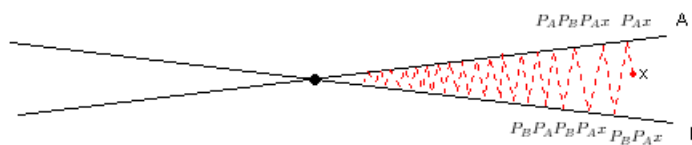


Figura 2.3: Método MAP: ángulo pequeño

**Caso  $n$  subespacios**

Smith, Solmon, and Wagner(1977) determinaron una cota análoga en el caso de más de dos subespacios.

**Teorema 2.6.** (Smith, Solmon, Wagner 1977 [21]): Sean  $M_1, M_2, \dots, M_k$  subespacios cerrados en  $H$  y Sea  $M = \cap_{i=1}^k M_i$ . Entonces, para cada  $x \in H$  y un entero  $n \geq 1$

$$\| (P_{M_k} P_{M_{k-1}} \cdots P_{M_1})^n(x) - P_{\cap_{i=1}^k M_i}(x) \| \leq C^n \| x \|$$

Donde

$$C = [1 - \prod_{i=1}^{k-1} \text{sen}^2 \theta_i]^{1/2}$$

Y  $\theta_i$  es el Ángulo entre el subespacio  $M_i$  y  $\cap_{j=i+1}^k M_j$

# Capítulo 3

## Proyecciones Alternantes para el PAMM

### 3.1. Introducción

En este capítulo nos apoyamos en el trabajo doctoral [18] y en el artículo [19], en donde se plantea un nuevo enfoque para resolver el Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM), el cual consiste en actualizar algunas matrices que surgen en el modelo matricial de segundo orden, de manera tal que se sustituyen los autovalores y autovectores “malos” por los “deseados”, planteando el PAMM como un problema de optimización no lineal con restricciones se propone aplicar el método de proyecciones alternantes (MAP) y además se muestra una variación de aceleración de Appleby y Smorlarski [1] planteada en [18] para resolver el problema no lineal, conservando las propiedades de las matrices involucradas.



## 3.2. Sistema matricial de segundo orden en problemas de control

Se plantea el siguiente sistema matricial de segundo orden, el cual es obtenido a través de una semidiscretización de la ecuación de movimiento mediante el modelo de elemento finito aplicado a un problema de control:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t),$$

donde  $\dot{x}(t)$  y  $\ddot{x}(t)$  denotan la primera y segunda derivada con respecto al tiempo  $t$ . Las matrices  $M$ ,  $D$  y  $K$  de  $n \times n$  son llamadas matriz de masa, amortiguación y de rigidez respectivamente cuyas características son;  $M$  es simétrica positiva definida ( $M = M^t > 0$ ),  $D$  y  $K$  son simétricas ( $D = D^t, K = K^t$ ). Los vectores  $\ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t) \in \mathbf{R}^n$  son los vectores de aceleración, velocidad, desplazamiento respectivamente, y  $F(t)$  es un vector que representa la fuerza externa. Estamos interesados en estudiar el caso homogéneo, lo que significa que no se toma en cuenta la fuerza externa  $F(t) = 0$ , es decir estudiaremos sistemas modelados por la siguiente ecuación:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = 0. \quad (3.1)$$

La solución fundamental para el sistema 3.1 es de la forma  $x(t) = ve^{\lambda t}$ , suponiendo que el sistema obedece a un movimiento armónico, por lo cual el escalar  $\lambda$  y el vector  $v$  deben ser la solución del siguiente problema cuadrático de autovalores (Quadratic Eigenvalue Problem - QEP),

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K)v = 0, \quad (3.2)$$

el cual posee  $2n$  autovalores y  $2n$  autovectores. Los autovalores son las raíces de la ecuación no lineal  $\det(P(\lambda)) = 0$  donde

$$P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K. \quad (3.3)$$

Estamos interesados en cambiar únicamente los autovalores “no deseados” o “malos”, mientras que el resto permanecen invariantes, puesto que estos autovalores malos son los responsable de la resonancia del sistema.

### 3.3. Asignación parcial de autovalores en problemas de control

El problema consiste en reemplazar parte del espectro (conjunto de autovalores) para mantener y/o controlar la estabilidad del sistema. Este proceso es llamado problema cuadrático de asignación parcial de autovalores, y puede ser definido de la siguiente manera:

Dados:

- Las matrices  $M, K, D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , que deben ser:  $M = M^t > 0, K = K^t, D = D^t$
- Un subconjunto de los autovalores  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  con  $p < n$ , del conjunto de autovalores de 3.2 y sus correspondientes autovectores  $\{x_1, \dots, x_p\}$ .
- Los autovalores  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  y autovectores  $\{y_1, \dots, y_p\}$  deseados.

Encontrar las matrices  $\tilde{K}, \tilde{D} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , tales que el espectro de  $\lambda^2 M + \lambda \tilde{D} + \tilde{K}$  sea  $\{\mu_1, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$  y el conjunto de autovectores sea  $\{y_1, \dots, y_p, x_{p+1}, \dots, x_{2n}\}$ , donde  $\{x_{p+1}, \dots, x_{2n}\}$  son los autovectores de 3.2 correspondientes a  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2n}\}$ , es decir, se cambian  $p$  de los  $2n$  autovalores y autovectores denominados “no deseados”  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  y  $\{x_1, \dots, x_p\}$ , por los deseados  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  y  $\{y_1, \dots, y_p\}$ . El resto de los  $2n - p$  autovalores y sus correspondientes autovectores permanecen sin cambio.

El Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM) reemplaza los autovalores y autovectores “no deseados” por medio de la actualización de las matrices del modelo, exigiendo que las matrices a encontrar  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  sean simétricas.

Se debe mencionar que el espacio de Hilbert que trabajaremos es el de las matrices reales de tamaño  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , con la norma de Frobenius definida como

$$\|A\|_F = (\text{traza}(A^t A))^{\frac{1}{2}}$$

y el producto interno

$$\langle A, B \rangle_F = \text{traza}(A^t B).$$

### 3.4. Formulación del problema

El Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM), puede ser reformulado como un problema de optimización de la siguiente manera [18]:

Encontrar las matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  de modo que:

$$\min \|K - \tilde{K}\|_F^2 + \|D - \tilde{D}\|_F^2 \quad (3.4)$$

sujeto a:

$$\tilde{K} = \tilde{K}^t, \tilde{D} = \tilde{D}^t \quad (3.5)$$

$$MY_1(\Lambda_1^*)^2 + \tilde{D}Y_1(\Lambda_1^*) + \tilde{K}Y_1 = 0 \quad (3.6)$$

donde:

$\Lambda_1^* = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ , es una matriz con los autovalores “deseados”.

$Y_1^* = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ , es una matriz cuyas columnas son los autovectores “deseados”.

El problema se reduce a encontrar las matrices  $\tilde{K}$  y  $\tilde{D}$ , más cercanas a  $K$  y  $D$  tal que sean simétricas y actualicen los autovalores y autovectores no deseados. Una opción para resolver este problema es usar el MAP, puesto que nuestro objetivo es encontrar la mejor aproximación en la intersección de subespacios y variedades lineales. En este caso el vector solución es una matriz.

La técnica que se va a describir fue estudiada en [19], en ella se utiliza el Método de Proyecciones Alternantes (MAP). Observando que las restricciones del problema pueden

ser vistas como subespacios o variedades lineales, cuya solución está en la intersección de los mismos.

Para simplificar el problema 3.4 se reescribe el sistema de la siguiente manera:

$$\min \|K - \tilde{K}\|_F^2 + \|D - \tilde{D}\|_F^2 \quad (3.7)$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{K}^t, \tilde{D} = \tilde{D}^t \\ A + \tilde{D}B + \tilde{K}C &= 0 \end{aligned}$$

Donde:

$$A = MY_1(\Lambda_1^*)^2, B = Y_1(\Lambda_1^*)^2, C = Y_1.$$

Con  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times p}$ ,  $n$  es la dimensión del problema y  $p$  la cantidad de autovalores y autovectores que se actualizará.

Se reformula el problema 3.7 en función de una matriz, de modo que se definen las matrices en bloque  $X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  y  $\tilde{X} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  como:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{K} & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix}.$$

Haciendo manipulaciones algebraicas (ver detalles en [19]) el problema queda reducido a encontrar  $\tilde{X}$  tal que:

$$\min \|X - \tilde{X}\|_F^2 \quad (3.8)$$

sujeto a:

$$\tilde{X} = \tilde{X}^t \quad (3.9)$$

$$A + \hat{I}^t * \tilde{X} * W = 0. \quad (3.10)$$

El operador  $*$  representa la multiplicación de matrices,  $\hat{I}$  y  $W$  son matrices por bloques, definidas como  $\hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ , donde  $I_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n \times n$ .

La solución del problema planteado 3.8 se encuentra utilizando el MAP, proyectando sobre cada una de las restricciones.

La primera restricción 3.9 es que la matriz  $\tilde{X}$  debe pertenecer al espacio de las matrices simétricas, la proyección ortogonal de una matriz  $X$  sobre este subespacio viene dada por:

$$P_{SIM}(X) = \{X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} : X = X^t\}.$$

El conjunto de las matrices que satisfacen la segunda restricción 3.10 es una variedad lineal, aquí se contempla la asignación de los nuevos autovalores y autovectores, necesitamos proyectar en el siguiente conjunto,

$$V = \{X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} : A + \hat{I}XW = 0\}.$$

Los vectores que cumplen las restricciones 3.9 y 3.10 son los vectores de la intersección.

El siguiente teorema establece la proyección de  $X$  sobre la variedad lineal  $V$ . La demostración se puede ver con detalle en [19].

**Teorema 3.1.** *Si  $X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  es cualquier matriz dada, entonces la proyección de  $X$  sobre la variedad lineal  $V$  está dada por  $P_V(X) = X + \hat{I}\Sigma W^t$ , donde  $\Sigma$  satisface  $W^t W \Sigma = -\frac{1}{2}(A^t + W^t X^t \hat{I})$ .*

*Demostración.* Ver [19]. □

El siguiente Algoritmo de Proyecciones Alternantes calcula las matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  tal que sean simétricas y actualicen los autovalores y autovectores no deseados, es decir  $\tilde{K}$  y  $\tilde{D}$  es solución de la ecuación 3.8.

---

**Algoritmo 2 Algoritmo de Proyecciones Alternantes para la actualización de las matrices D y K**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: QR=W (Factorización QR de W)

7: **while**  $X \notin V$  **do**

8:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

9:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

10:  $X = X + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X$  sobre  $V$ )

11:  $X = \frac{X+X^t}{2}$  (Proyección de  $X$  sobre el subespacio de las matrices simétricas)

12: **end while**

13: Salida: Las matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  solución de 3.8

---

- Las matrices  $M, K, D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  cuya propiedad es  $M = M^t > 0$ ,  $K = K^t$  y  $D = D^t$
- La matriz diagonal  $\Lambda_1^* = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$  que contiene los autovalores “deseados”
- La matriz  $Y_1 =$  contiene los autovectores “deseados” en columna  $\{y_1, \dots, y_p\}$

El algoritmo proyecta sobre la variedad lineal  $V$  en las líneas 7 a la 10 del algoritmo 2, y luego proyecta sobre el subespacio de las matrices simétricas encontrando la proyección sobre la intersección. Por el teorema 2.3 el algoritmo 2 converge a la única solución de(3.8) con las restricciones (3.9) y (3.10).

### 3.5. Exigir una estructura dada

Dependiendo de la naturaleza del problema, las matrices asociadas a la ecuación matricial 3.1 poseen una estructura de rareza que en la mayoría de los casos se desea conservar, las matrices actualizadas  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  deben tener el mismo patrón de rareza que las matrices iniciales  $D$  y  $K$ , los patrones de rareza encontrados comúnmente corresponden a matrices diagonales, matrices tridiagonales, matrices en banda en general, entre otras.

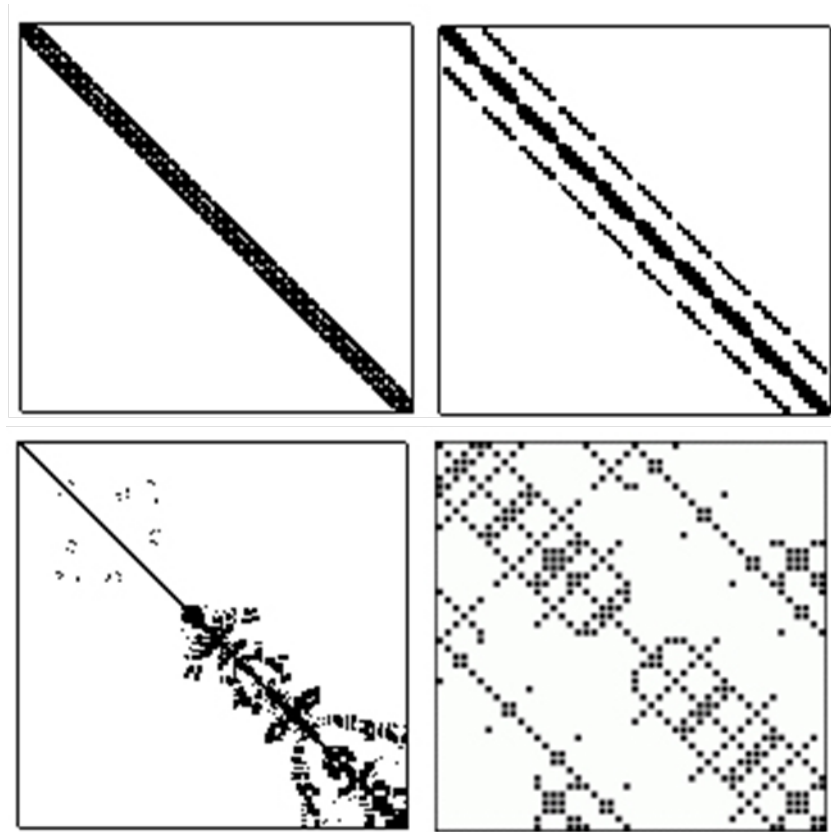


Figura 3.1: Patrones de rareza

Al resolver el problema de optimización 3.8-3.10, usando el método de proyecciones alternantes, es probable que en cada iteración las matrices iniciales  $D$  y  $K$  pierdan su patrón de rareza, por lo tanto es necesario modificar el problema planteado originales en 3.8-3.10 agregando una nueva restricción que permita a las matrices actualizadas

mantener esta característica. El problema con la nueva restricción sería:

$$\min \|X - \tilde{X}\|_F^2 \quad (3.11)$$

sujeto a:

$$\tilde{X} = \tilde{X}^t \quad (3.12)$$

$$A + \hat{I}^t * \tilde{X} * W = 0. \quad (3.13)$$

$$\tilde{X} \text{ posee el mismo patrón de rareza que } X \quad (3.14)$$

La restricción 3.14 hace referencia a que la matriz  $X$  debe pertenecer al siguiente subespacio,

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} : X \text{ posee el mismo patrón de rareza que } S\}.$$

La matriz  $S$  está conformada por elementos unos y ceros que determinan el patrón de rareza, es decir, si  $s_{ij}$  es igual a uno, entonces se debe mantener el valor ubicado en la posición  $(i, j)$  de la matriz a proyectar, en caso contrario debe colocarse un cero en esta posición.

La proyección sobre el subespacio  $\Omega$  viene dada por:

$$P_\Omega(N) = N \circ S$$

donde  $\circ$  representa el producto de Hadamard entre las matrices  $N$  y  $S$ .

$$(N \circ S) = \begin{cases} N_{ij} & \text{si } S_{ij} = 1; \\ 0 & \text{si } S_{ij} = 0. \end{cases}$$

El Algoritmo 2 es modificado añadiendo la proyección sobre el subespacio  $\Omega$  asociado a la restricción 3.14. Esta modificación se puede ver en la línea 13 del algoritmo 3, donde



se realiza el producto de Hadamard entre las matrices  $X$  y  $S$ , con la finalidad de que la matriz  $X$  recupere el patrón de rareza que poseía originalmente, el cual está almacenado en la matriz  $S$ .

---

**Algoritmo 3 Algoritmo actualización D y K con un patrón de rareza**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: Contruir la matriz  $S$  con el patrón de rareza de  $X$ .

$$S = \begin{cases} N_{ij} & \text{si } S_{ij} = 1; \\ 0 & \text{si } S_{ij} = 0. \end{cases}$$

7: QR=W (Factorización QR de W)

8: **while**  $X \notin V$  **do**

9:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

10:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

11:  $X = X + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X$  sobre  $V$ )

12:  $X = \frac{X+X^t}{2}$  (Proyección de  $X$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

13:  $X = X \circ S$  (Proyección de  $X$  sobre es subespacio  $\Omega$ )

14: **end while**

15: Salida: La matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  solución de 3.8

---

### 3.6. Aceleración del MAP con ideas Appleby y Smolarski

En el capítulo anterior se observó que el MAP tiene una velocidad de convergencia lenta cuando los ángulos entre los subespacios involucrados son pequeños. Los métodos clásicos son lentos y en el trabajo doctoral Moreno [18] se propone un método de aceleración lineal utilizando las ideas de Appleby y Smolarski [1] calculando dos centroides  $x_{c1}, x_{c2} \in \mathbf{R}^n$ , como el promedio de todas las proyecciones en una iteración (paso de Cimmino). Este método determina una línea parametrizada a través de estos centroides, y moviéndose a lo largo de esta línea se calcula el nuevo iterado  $\hat{x}$  que está más cercano a la solución, dicho iterado puede ser descrito como sigue:

$$\tilde{x} = x_{c1} + \delta(x_{c2} - x_{c1}), \quad (3.15)$$

Donde  $\delta$  es una distancia a lo largo de la línea que pasa por el iterado  $x_{c1}$  con dirección  $x_{c2} - x_{c1}$ . Para esto se calcula el nuevo iterado  $\tilde{x}$  como el punto de intersección entre la línea y el hiperplano más cercano a esta.

En el caso del problema PAMM, los iterados son matrices de  $\mathbf{R}^{n \times n}$ , por lo que se adapta el método de aceleración lineal a matrices. El cálculo de  $\delta$  no es directo y éste se convierte en un problema de optimización.

Sean

$$\hat{X} = X_{c1} + \delta(X_{c2} - X_{c1}) \quad (3.16)$$

Para determinar  $\delta$  forzando que  $\hat{X}$  sea simétrica, se quiere encontrar  $\delta$  tal que

$$\min_{\delta} \|A_n - A_n^t\|_F^2,$$

donde  $A_n = A_{c1} + \delta(A_{c2} - A_{c1})$  y  $A_n^t = A_{c1}^t + \delta(A_{c2}^t - A_{c1}^t)$ . Haciendo manipulaciones algebraicas se obtiene (Para más detalles [18]).

$$\delta = \frac{\|A_{c1} - A_{c1}^t\|_F^2 - \langle A_{c1} - A_{c1}^t, A_{c2} - A_{c2}^t \rangle}{\|A_{c1} - A_{c1}^t\|_F^2 - 2\langle A_{c1} - A_{c1}^t, A_{c2} - A_{c2}^t \rangle + \|A_{c2} - A_{c2}^t\|_F^2} \quad (3.17)$$

Se muestra a continuación el algoritmo de aceleración correspondiente al Algoritmo 2 usando el  $\delta$  que se acaba de calcular.

---

**Algoritmo 4 Aceleración del MAP con ideas Appleby y Smorlarski para la actualización de las matrices D y K**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: QR=W (Factorización QR de W)

7: **while**  $X \notin V$  **do**

8:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

9:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

10:  $X_1 = X + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X$  sobre  $V$ )

11:  $X_2 = \frac{X_1 + X_1^t}{2}$  (Proyección de  $X$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

12:  $X_{c1} = \frac{X_1 + X_2}{2}$  (Cálculo del primer centroide)

13:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX_{c1}^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

14:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

15:  $X_1 = X_{c1} + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X_{c1}$  sobre  $V$ )

16:  $X_2 = \frac{X_{c1} + X_{c1}^t}{2}$  (Proyección de  $X_{c1}$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

17:  $X_{c2} = \frac{X_1 + X_2}{2}$  (Cálculo del segundo centroide)

18: Cálculo del escalar  $\delta$  dada en 3.17

19:  $X = X_{c1} + \delta(X_{c2} - X_{c1})$  (Cálculo el nuevo iterado)

20: **end while**

21: Salida: La matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  solución de 3.8

---

El Algoritmo 2 se modificó obteniendo así el algoritmo acelerado 4, en este caso una vez calculado los centroides en las líneas 12 y 17 se genera un nuevo iterado en la línea 19, pero para el cálculo de cada centroide se debe proyectar sobre una variedad lineal y luego sobre el subespacio.

Ahora bien, debido a la necesidad de conservar el patrón de rareza, se plantea el siguiente algoritmo 5 cuya diferencia con respecto al algoritmo 4 es que en lugar de trabajar con un subespacio y una variedad lineal, se tienen dos subespacios y una variedad lineal, para poder conservar dicho patrón de rareza, como se puede observar en la línea 19.

---

**Algoritmo 5 Aceleración del MAP con ideas Appleby y Smorlarski para la actualización de las matrices D y K con un patrón de rareza**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: Contruir la matriz  $S$  con el patrón de rareza de  $X$ .

$$S = \begin{cases} N_{ij} & \text{si } S_{ij} = 1; \\ 0 & \text{si } S_{ij} = 0. \end{cases}$$

7: QR=W (Factorización QR de W)

8: **while**  $X \notin V$  **do**

9:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

10:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

11:  $X_1 = X + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X$  sobre  $V$ )

12:  $X_2 = \frac{X_1 + X_1^t}{2}$  (Proyección de  $X$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

13:  $X_3 = X_2 \circ S$  (Proyección de  $X$  sobre es subespacio  $\Omega$ )

14:  $X_{c1} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  (Cálculo del primer centroide)

15:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^tX_{c1}^t\hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

16:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

17:  $X_1 = X_{c1} + \hat{I} * \Sigma * W^t$  (Proyección de  $X_{c1}$  sobre  $V$ )

18:  $X_2 = \frac{X_{c1} + X_{c1}^t}{2}$  (Proyección de  $X_{c1}$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

19:  $X_3 = X_{c1} \circ S$  (Proyección de  $X_{c1}$  sobre es subespacio  $\Omega$ )

20:  $X_{c2} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  (Cálculo del segundo centroide)

21: Cálculo del escalar  $\delta$  dada en 3.17

22:  $X = X_{c1} + \delta(X_{c2} - X_{c1})$  (Cálculo el nuevo iterado)

23: **end while**

24: Salida: La matrices  $\tilde{D}$  y  $\tilde{K}$  solución de 3.8

---

# Capítulo 4

## Métodos tipo residual para sistemas no lineales aplicado al PAMM

### 4.1. Introducción

Recientemente se han desarrollado técnicas para acelerar los métodos de proyecciones alternantes y simultáneas. Estas técnicas pudieran aplicarse para resolver el Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM).

En este trabajo, se implementarán algunas de esas técnicas y las compararemos con las estrategias de aceleración basadas en las ideas Appleby y Smolarski [1], estudiadas y aplicadas para el PAMM en [18] y que fueron descritas en el capítulo anterior.

En [13] y [14], se proponen estrategias de aceleración de los métodos de proyecciones alternantes basadas en técnicas de optimización numérica. En el caso que nos concierne (variedades lineales), estos autores proponen estrategias de aceleración basadas en métodos que avanzan en la dirección del residual, tales como el DF-SANE, recientemente desarrolladas por La Cruz et al [5][6].

## 4.2. Aceleración para variedades lineales

Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sean  $V_1, V_2, \dots, V_m$  variedades lineales cerradas de  $H$ ,  $V = \cap_{i=1}^m V_i$ ,  $V \neq \emptyset$  y  $x \in H$ .

Para variedades lineales, los métodos de proyecciones alternantes y simultáneas pueden escribirse como la iteración siguiente, dado  $x_0 \in H$

$$x_{k+1} = Tx_k.$$

Para el caso del método de Cimmino el operador  $T = \frac{1}{m} \sum_i^m P_{V_i}$  y para el caso de MAP el operador  $T = P_{V_m} P_{V_{m-1}} \dots P_{V_1}$ .

La sucesión  $\{x_k\}$  converge a un punto  $x$  tal que  $Tx = x$ , en ambos casos, el conjunto de puntos fijos del operador  $Fix T = V$ . Pero además, en el caso de variedades lineales, los métodos MAP y Cimmino, convergen hacia la proyección de  $x_0$  en  $V$ , donde  $V = Fix T$ .

La idea propuesta en [13] y [14] es de encontrar los puntos fijos resolviendo la ecuación:

$$F(x) = (I - T)x = 0.$$

El método a escoger para resolver esta ecuación depende de las características de  $F = (I - T)$ . Por ejemplo, en el caso de que todos los  $V_i$  sean subespacios, el operador  $T$  asociado al método de Cimmino es lineal, autoadjunto y semipositivo definido; lo mismo para el operador  $I - T$ . Por lo tanto es posible usar el método de los gradientes conjugados en la ecuación  $F(X) = 0$  para acelerar el método. En cambio, cuando al menos un  $V_i$  es una variedad lineal que no es un subespacio, el operador  $F$  deja de ser lineal, y por ello [13] y [14] proponen el uso de métodos tipo residual que no utilizan derivadas, tales como el DF-SANE, estos métodos avanzan en la dirección de  $\pm F(x)$ .

A continuación describiremos brevemente el método DF-SANE basados en el artículo [5].



### 4.3. Métodos tipo residual para sistemas no lineales

Los métodos de residual que usan  $\pm F(x)$ , como dirección de búsqueda para resolver sistemas de ecuaciones no lineales  $F(x) = 0$ , han sido desarrollados recientemente por La Cruz et al. [5][6].

Las iteraciones de residual (DF-SANE o SANE) analizadas en [5][6], para problemas no lineales finito dimensionales, están definidas como:

$$x_{k+1} = x_k \pm \alpha_k F(x_k), \quad (4.1)$$

donde  $\alpha_k \geq 0$  es el tamaño del paso y la dirección de búsqueda es  $\pm F(x)$  dependiendo de cual es la dirección de descenso para la función,

$$f(x) = \|F(x)\|^2 = \langle F(x), F(x) \rangle. \quad (4.2)$$

La convergencia de 4.1 se alcanza para sistemas no lineales generales, cuando está asociada con las búsquedas lineales no monótonas y libre de derivadas como se explica en [6]. Si el Jacobiano de  $F(x)$  es simétrico y positivo semidefinido, entonces habrá convergencia para el método puro, es decir, sin estrategias de globalización y usando la dirección  $-F(x)$ . En [13] se demostró para el caso del método de Cimmino, el operador  $F(x)$  tiene Jacobiano autoadjunto y positivo definido lo que es condición suficiente para que el método converja en su versión pura, es decir, sin globalización. Sin embargo en el caso del operador asociado al método MAP la convergencia sin globalización no se ha demostrado..

Para el tamaño de paso  $\alpha_k \geq 0$ , se toma la escogencia espectral no monótona, dada por:

$$\alpha_k = \frac{\langle s_{k-1}, s_{k-1} \rangle}{\langle s_{k-1}, y_{k-1} \rangle}, \quad (4.3)$$

donde  $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}$ , y  $y_{k-1} = F(x_k) - F(x_{k-1})$ . Mediante la aplicación del tamaño de paso 4.3, se acelera la convergencia.

---

**Algoritmo 6 DF-SANE para  $F(x)$ , en su forma pura**


---

- 1: Dado  $x_0 \in H, \alpha_0 \in \mathbf{R}, \alpha_0 \neq 0$
  - 2: **for**  $k = 0, 1, \dots$ , **do**
  - 3:  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k F(x_k)$
  - 4:  $s_k = x_{k+1} - x_k$
  - 5:  $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$
  - 6:  $\alpha_{k+1} = \langle s_k, s_k \rangle / \langle s_k, y_k \rangle$
  - 7: **end for**
- 

En [13] se demostró que en el caso de variedades lineales, la sucesión  $\{x_k\}$  del método DF-SANE (con o sin globalización) produce una sucesión que converge hacia la proyección del iterado inicial  $x_0$  en *Fix T*, es decir, en la intersección de las variedades  $\cap_{i=1}^m V_i$ .

#### 4.4. Aceleración del Método de Cimmino en variedades lineales para el PAMM usando DF-SANE

Recordemos que el problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM), es equivalente a un problema de optimización, en el cual se quiere encontrar  $\tilde{X}$  tal que:

$$\min \|X - \tilde{X}\|_F^2 \quad (4.4)$$

sujeto a:

$$\tilde{X} = \tilde{X}^t \quad (4.5)$$

$$A + \hat{I}^t * \tilde{X} * W = 0. \quad (4.6)$$

Donde  $\hat{I}$  y  $W$  son matrices por bloques, definidas como  $\hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$ , donde  $\hat{I}_n$  es la matriz identidad de tamaño  $n \times n$ .

Si llamamos  $F = (I - T_V)$ , donde  $T_V = \frac{1}{2}(P_V + P_S)$  siendo  $P_S$  la proyección sobre el subespacio  $S$  y  $P_V$  es la proyección sobre la variedad lineal  $V$ , el problema  $F(x) = 0$  puede ser resuelto utilizando métodos tipo residual para hallar ceros de funciones como el método DF-SANE, estudiado en la sección anterior, estos métodos usan la dirección  $\pm F(x_k)$  y las iteraciones son del tipo:

$$x_{k+1} = x_k \pm \alpha_k F(x_k), \quad (4.7)$$

donde  $\alpha_k > 0$  es el tamaño del paso y la dirección de búsqueda es  $F(x_k)$  o  $-F(x_k)$ .

En el método de Cimmino, la función  $F$  viene dada por:

$$F(x) = x - \frac{1}{2}(P_V(x) + P_S(x)) \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2}(x - P_V(x)) + \frac{1}{2}(x - P_S(x)) \quad (4.9)$$

Sea  $X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  una matriz en bloque, entonces la función  $F$  viene dada como:

$$F(X) = \frac{1}{2}(X - P_V(X)) + \frac{1}{2}(X - P_S(X)) \quad (4.10)$$

donde  $P_V$  es la proyección sobre la variedad lineal  $V$  definida como:

$$V = \{X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n} : A + \hat{I}^t * X * W = 0\},$$

y  $P_S$  es la proyección ortogonal de una matriz  $X$  sobre el subespacio de las matrices simétricas, es decir, esta proyección viene dada por:

$$P_S = \frac{X + X^t}{2}.$$

El nuevo algoritmo de actualización para el PAMM usando DF-SANE que se mostrará a continuación, utiliza las mismas matrices de entrada que en el Algoritmo 4.

Donde,

- Las matrices  $M, K, D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  cuya propiedad es  $M = M^t > 0$ ,  $K = K^t$  y  $D = D^t$
- La matriz diagonal  $\Lambda_1^* = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$  que contiene los autovalores “deseados”

---

**Algoritmo 7 Actualización de las matrices D y K usando el método de DF-SANE mediante Cimmino**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: QR=W (Factorización QR de W)

7: **while**  $X \notin V$  **do**

8:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^t X_k^t \hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

9:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

10:  $P_V = X_k + \hat{I} * \sum * W^t$  (Proyección de  $X_k$  sobre  $V$ )

11:  $P_S = \frac{X_k + X_k^t}{2}$  (Proyección de  $X_k$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

12:  $F(X_k) = \frac{1}{2}(X_k - P_V) + \frac{1}{2}(X_k - P_S)$

13:  $X_{k+1} = X_k - \alpha_k F(X_k)$

14:  $S_k = X_{k+1} - X_k$

15:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^t X_{k+1}^t \hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

16:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

17:  $P_V = X_{k+1} + \hat{I} * \sum * W^t$  (Proyección de  $X_{k+1}$  sobre  $V$ )

18:  $P_S = \frac{X_{k+1} + X_{k+1}^t}{2}$  (Proyección de  $X_{k+1}$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

19:  $F(X_{k+1}) = \frac{1}{2}(X_{k+1} - P_V) + \frac{1}{2}(X_{k+1} - P_S)$

20:  $Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$

21:  $\alpha_{k+1} = \frac{\langle S_k, S_k \rangle_F}{\langle S_k, Y_k \rangle_F}$

22: **end while**

23: Salida: La matrices  $\hat{D}$  y  $\hat{K}$  solución de 3.8

---

- La matriz  $Y_1 =$  contiene los autovectores “deseados” en columna  $\{y_1, \dots, y_p\}$

En el siguiente algoritmo 7 se observa:

- Las líneas del 8 al 10 encuentra la proyección de  $X_k$  sobre la variedad lineal  $V$ .
- La línea 11 calcula la proyección ortogonal de  $X_k$  sobre el subespacio de las matrices simétricas.
- La línea 12 calcula la función  $F(X_k)$  es el cálculo de la función  $F(X_k)$  usando Cimmino (proyecciones simultáneas).
- La línea 13 calcula el iterado  $X_{k+1}$ .
- Desde la línea 15 a 19 repite los pasos anteriores para encontrar  $F(X_{k+1})$ .
- Por último se calcula en la línea 21 el tamaño de paso  $\alpha_k$  4.3.

Finalmente obtenemos la adaptación del DF-SANE para el problema de Actualización Modelo Matricial.

## 4.5. Aceleración del Método de Proyecciones Alternantes en variedades lineales para el PAMM usando DF-SANE

A continuación se muestra otra aceleración del método de proyecciones alternantes usando el DF-SANE, es decir, la función  $F = I - T$  viene dada por:

$$F(x) = (x - P_S P_V(x)) \quad (4.11)$$

En el siguiente algoritmo 8 se observa:

- Las líneas del 8 al 10 encuentra la proyección de  $X_k$  sobre la variedad lineal  $V$ .

---

**Algoritmo 8 Actualización de las matrices D y K usando el método de DF-SANE mediante MAP**


---

1: Dadas las matrices  $M, K, D, \Lambda_1^*, Y_1$

2:  $A = MY_1(\Lambda_1^*)^2$

3:  $B = Y_1(\Lambda_1^*)$

4:  $C = Y_1$

5: Contruir las matrices y vectores en bloque:

$$X = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \hat{I} = \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix}$$

6: QR=W (Factorización QR de W)

7: **while**  $X \notin V$  **do**

8:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^t X_k^t \hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

9:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

10:  $P_V = X_k + \hat{I} * \sum * W^t$  (Proyección de  $X_k$  sobre  $V$ )

11:  $P_S = \frac{X_k + X_k^t}{2}$  (Proyección de  $X_k$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

12:  $F(X_k) = X_k - P_S P_V(X_k)$

13:  $X_{k+1} = X_k - \alpha_k F(X_k)$

14:  $S_k = X_{k+1} - X_k$

15:  $R^t\Gamma = -\frac{1}{2}(A^t + W^t X_{k+1}^t \hat{I})$  (Sustitución hacia adelante para hallar  $\Gamma$ )

16:  $R\Sigma^t = \Gamma$  (Sustitución hacia atrás, para hallar  $\Sigma$ )

17:  $P_V = X_{k+1} + \hat{I} * \sum * W^t$  (Proyección de  $X_{k+1}$  sobre  $V$ )

18:  $P_S = \frac{X_{k+1} + X_{k+1}^t}{2}$  (Proyección de  $X_{k+1}$  sobre es subespacio de las matrices simétricas)

19:  $F(X_{k+1}) = X_{k+1} - P_S P_V(X_{k+1})$

20:  $Y_k = F(X_{k+1}) - F(X_k)$

21:  $\alpha_{k+1} = \frac{\langle S_k, S_k \rangle_F}{\langle S_k, Y_k \rangle_F}$

22: **end while**

23: Salida: La matrices  $\hat{D}$  y  $\hat{K}$  solución de 3.8

---

- La línea 11 calcula la proyección ortogonal de  $X_k$  sobre el subespacio de las matrices simétricas.
- La línea 12 calcula la función  $F(X_k)$  que a diferencia del algoritmo anterior aquí utilizamos la composición o el producto de las proyecciones, es decir, una iteración del método MAP.
- La línea 13 calcula el iterado  $X_{k+1}$ .
- Desde la línea 15 a 19 repite los pasos anteriores para encontrar  $F(X_{k+1})$ .
- Por último se calcula en la línea 21 el tamaño de paso  $\alpha_k$ .

Finalmente obtenemos la adaptación del DF-SANE para el resolver el PAMM usando el MAP.

#### 4.5.1. El método DF-SANE manteniendo un patrón de rareza dado

En muchos casos, es importante que la solución al problema PAMM mantenga un patrón de rareza dado [18]. En este caso, la solución debe no solo pertenecer a la intersección del subespacio de las matrices simétricas y la variedad lineal dada en 3.13, sino que debe también pertenecer al subespacio de las matrices que tienen ese patrón de rareza. Es por ello que nuestros métodos de proyecciones trabajarán ahora con 3 conjuntos, y los operadores de la iteración de punto fijo estarán dados por  $T = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 P_{V_i}$  para el caso de Cimmino y  $T = P_{V_3} P_{V_2} P_{V_1}$  en el caso de MAP, donde:

- $P_{V_3}$  es la proyección para conservar patrón de rareza.
- $P_{V_2}$  es la proyección sobre las matrices simétricas.
- $P_{V_1}$  es la proyección sobre la variedad lineal.

# Capítulo 5

## Resultados numéricos

En este capítulo mostramos los resultados de las diferentes aceleraciones aplicadas a la técnica para resolver el problema de actualización modelo matricial (PAMM) estudiada en [18], para ello se compara el método clásico usando el método de proyecciones alternantes visto en el capítulo 3, las estrategias de aceleración basadas en las ideas Appleby y Smolarski [1] estudiadas en [18], las estrategias de aceleración de los métodos de proyecciones alternantes basadas en técnicas de optimización numérica propuesta por [13] y [14], y una aceleración sugerida por Hernández-Ramos.

Todas estas aceleraciones aplicadas a la técnica para resolver el PAMM además de disminuir el número de iteraciones, disminuye también el tiempo de ejecución ya que el costo por iteración es menor.

Para realizar los experimentos se seleccionaron cuatro problemas de la tesis doctoral [18] que están incluidos en la bibliografía.

En los algoritmos desarrollados se observa el siguiente orden de proyecciones:

- Primero se proyecta sobre la variedad lineal  $V$ , esta proyección sustituye los autovalores y autovectores no deseados por los deseados.
- Segundo, se proyecta sobre el subespacio de las matrices simétricas.

En todo método iterativo es necesario especificar mediante ciertas condiciones cuando



hay que detener el proceso. El criterio de parada utilizado tiene en cuenta dos factores:

1. La solución encontrada satisface los requerimientos de precisión (tolerancia). Se fijó una tolerancia de  $1 \times 10^{-8}$ .
2. La cantidad de iteraciones empleadas supera el máximo establecido.

Para el primer criterio, el proceso iterativo se detiene cuando

$$\|A + \hat{I}^t XW\|_F \leq 10^{-8},$$

donde  $X$  es la matriz obtenida al finalizar una iteración de los algoritmos, por lo cual la matriz  $X$  pertenece al subespacio de las matrices simétricas.

Para el segundo criterio el máximo número de iteraciones que establecimos es de 5000, el cual consideramos que el algoritmo no converge si pasa este número de iteraciones.

Los algoritmos requeridos para realizar la pruebas numéricas se desarrollaron en Matlab 7.12 (R2011a) y han sido ejecutados con un computador Intel Core 2 Quad 2.10 GHz, 4Gb de RAM con Windows 7.

## 5.1. Experimento 1

Para este experimento se seleccionó un ejemplo tomado del artículo de Datta y Sarkissian [7]. Las matrices  $M, D, K$  de  $4 \times 4$ , simétricas semidefinidas positivas vienen dadas por:

$$M = \begin{pmatrix} 1,4685 & 0,7177 & 0,4757 & 0,4311 \\ 0,7177 & 2,6938 & 1,2660 & 0,9676 \\ 0,4757 & 1,2660 & 2,7061 & 1,3918 \\ 0,4311 & 0,9676 & 1,3918 & 2,1876 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1,3525 & 1,2695 & 0,7967 & 0,8160 \\ 1,2695 & 1,3274 & 0,9144 & 0,7325 \\ 0,7967 & 0,9144 & 0,9456 & 0,8310 \\ 0,8160 & 0,7325 & 0,8310 & 1,1536 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1,7824 & 0,0076 & -0,1359 & -0,7290 \\ 0,0076 & 1,0287 & -0,0101 & -0,0493 \\ -0,1359 & -0,0101 & 2,8360 & -0,2564 \\ -0,7290 & -0,0493 & -0,2564 & 1,9130 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de  $\lambda^2 M + \lambda D + K$  calculados con MATLAB son:

$$-0,0861 \pm 1,6242i, -0,1022 \pm 0,8876i, -0,1748 \pm 1,1922i, -0,4480 \pm 0,2465i.$$

Se quiere reasignar solo los autovalores causantes de la inestabilidad. En este caso, es el par  $-0,0861 \pm 1,6242i$ , el cual va a ser sustituido por el par  $-0,1000 \pm 1,6242i$ .

A continuación se muestra la gráfica del desempeño de cada algoritmo con respecto al número de iteraciones, usando como datos de entradas las matrices  $M$ ,  $D$  y  $K$  arriba mencionada.

Algoritmos	iter	tiempo
MAP para la actualización D y K	96	0,2580
Aceleración Appleby-Smorlarski	43	0,0350
DF-SANE Cimmino	35	0,0270
DF-SANE MAP	17	0,0030

Cuadro 5.1: Comparación entre los diferentes métodos para el Problema de Actualización en el Modelo Matricial en el experimento 1

El costo por iteración de los algoritmos para acelerar el PAMM es menor, esto hace que disminuya también el tiempo de ejecución.

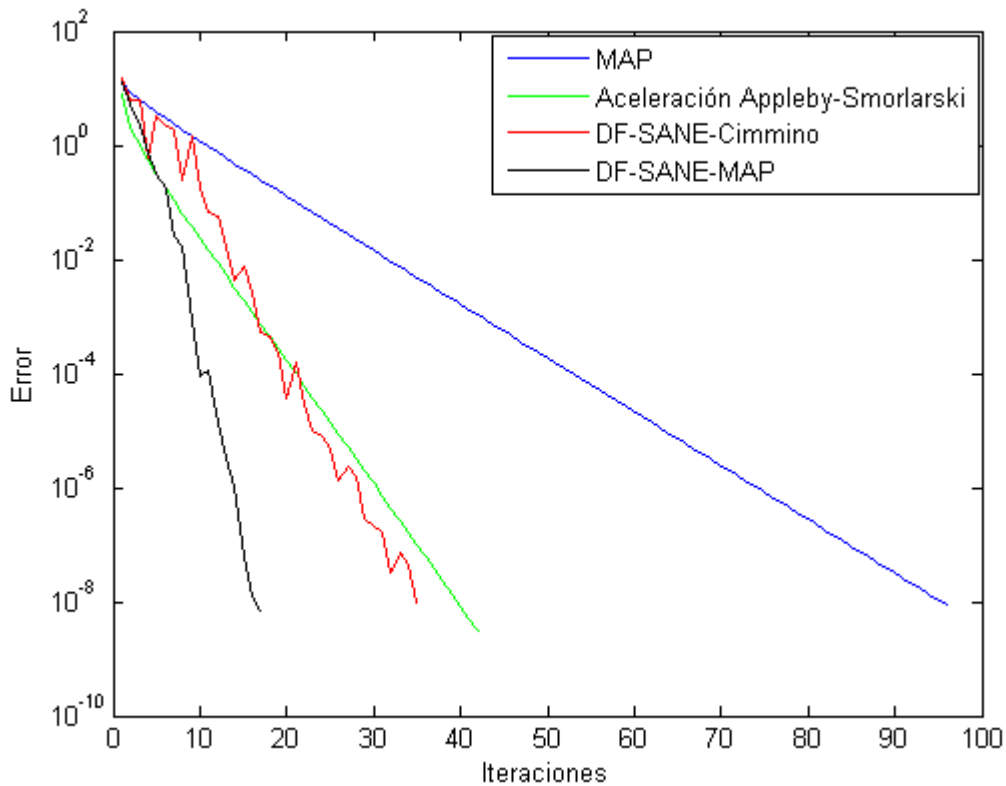


Figura 5.1: Experimento 1

Se puede observar que para este experimento, el método DF-SANE MAP tiene una ganancia en tiempo y en número de iteraciones. Sin embargo en arquitecturas paralelas, en el método de Cimmino las proyecciones pudieran realizarse simultáneamente, lo que significaría una ganancia en tiempo.

## 5.2. Experimento 2

Para el segundo experimento seleccionamos las matrices  $M$ ,  $D$ ,  $K$  de  $30 \times 30$  simétricas y definidas positivas, cuyas matrices están descritas en Benner, Laud y Mehrmann [3]. Este experimento proviene de la aplicación de un modelo de una secuencia formada por los resortes, los amortiguadores de aire, y las masas unidas, los cuales dan origen a las

siguientes matrices:

$M, D = \{A \in \mathbb{R}^{30 \times 30} / a(i, j) = 4 \text{ para } i = j, a(i, j) = 0 \text{ para } i \neq j\}$ . Es decir:

$$M, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$K = \{A \in \mathbb{R}^{30 \times 30} / a(i, j) = 2, a(i + 1, j) = a(j, i + 1) = -1 \text{ para todo } i = j, a(i, j) = 0 \text{ para todo } i \neq j, a(1, 1) = a(30, 30) = 1\}$ . Es decir:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso se empleó el algoritmo 3 y el algoritmo acelerado 5 para encontrar  $\tilde{D}$  (matriz diagonal) y  $\tilde{K}$  (matriz tridiagonal) y pueda conservar el patrón de rareza.

A continuación se muestra la gráfica y un cuadro comparativo del desempeño de cada algoritmo con respecto al número de iteraciones, usando como datos de entradas las matrices  $M, D$  y  $K$  arriba mencionada.

El costo por iteración de los algoritmos para acelerar el PAMM es menor, esto hace que disminuya también el tiempo de ejecución. Sin embargo se puede observar que para este experimento el método DF-SANE MAP tiene una ganancia en tiempo y en número de iteraciones.

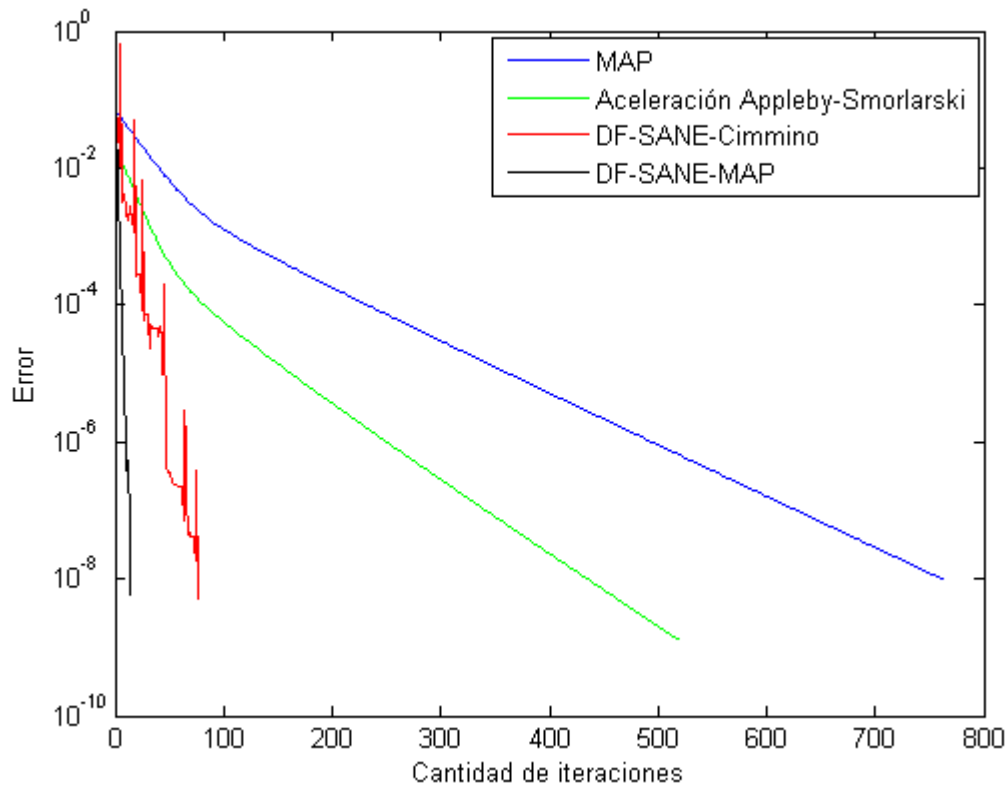


Figura 5.2: Experimento 2

Algoritmos	iter	tiempo
MAP para la actualización D y K con un patrón de rareza	762	0,6090
Aceleración Appleby-Smorlarski con un patrón de rareza	518	0,4840
DF-SANE Cimmino con un patrón de rareza	76	0,0930
DF-SANE MAP con un patrón de rareza	14	0,0010

Cuadro 5.2: Comparación entre los diferentes métodos para el Problema de Actualización en el Modelo Matricial en el experimento 2

### 5.3. Experimento 3

Sean las matrices  $M$ ,  $D$  y  $K$ .

- Las matrices  $M, K \in \mathbb{R}^{66 \times 66}$  son provenientes de un problema de plataforma petrolera. La matriz  $M$  es simétrica definida positiva y la matriz  $K$  es simétrica semidefinida positiva, ambas matrices son densas.
- La matriz de amortiguación  $D$  está definida por  $D = \rho I_{66}$  con  $\rho = 1,55$ .

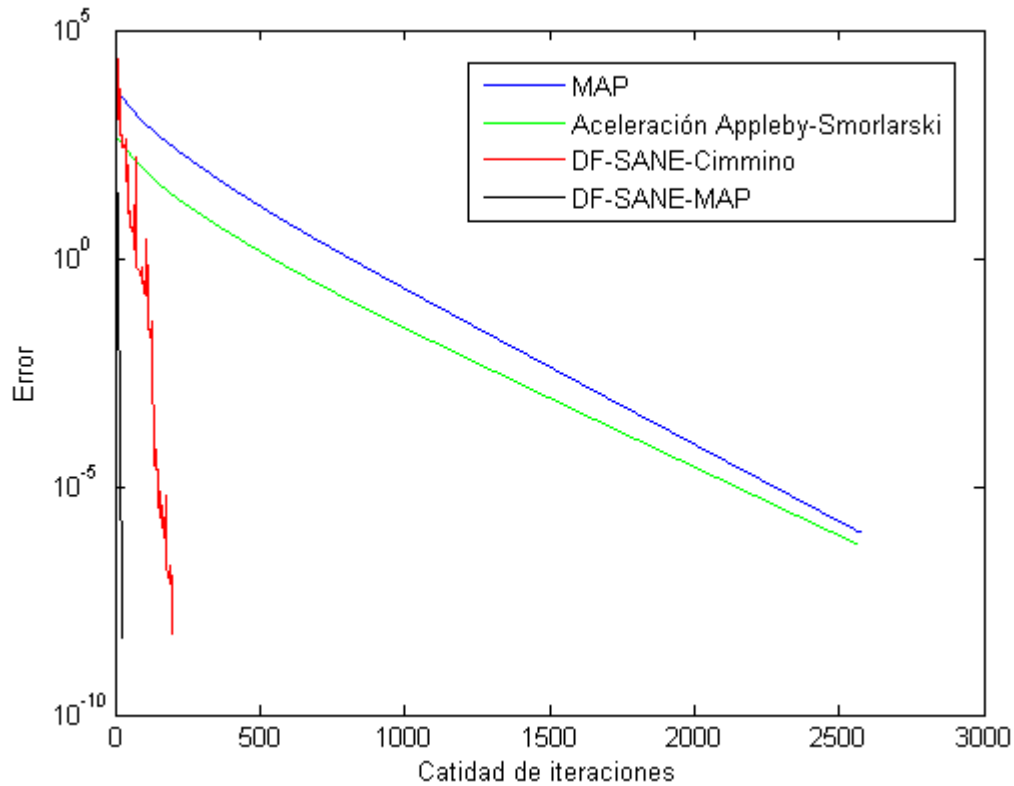


Figura 5.3: Experimento 3

Al igual que en los experimentos anteriores, se observa que las técnicas de aceleración aplicadas al PAMM tiene una disminución en número de iteraciones y en tiempo de ejecución, ya que el costo por iteración es menor. Sin embargo el algoritmo que mejor acelera en términos computacionales es el DF-SANE con MAP.

Algoritmos	iter	tiempo
MAP para la actualización D y K con un patrón de rareza	2574	14,8190
Aceleración Appleby-Smorlarski con un patrón de rareza	2563	13,3590
DF-SANE Cimmino con un patrón de rareza	200	0,8740
DF-SANE MAP con un patrón de rareza	25	0,0460

Cuadro 5.3: Comparación entre los diferentes métodos para el Problema de Actualización en el Modelo Matricial en el experimento 3

## 5.4. Experimento 4

- Sean las matrices  $M, K \in \mathbb{R}^{211 \times 211}$  simétricas definidas positivas, descritas en Ben-ner, Laudd y Mehrman [3]. Este ejemplo modela un problema que se presenta en centrales eléctricas.

Algoritmos	iter	tiempo
MAP para la actualización D y K con un patrón de rareza	Núm máx iteraciones	*
Aceleración Appleby-Smorlarski con un patrón de rareza	Núm máx iteraciones	*
DF-SANE Cimmino con un patrón de rareza	Núm máx iteraciones	*
DF-SANE MAP con un patrón de rareza	168	6,2170

Cuadro 5.4: Comparación entre los diferentes métodos para el Problema de Actualización en el Modelo Matricial en el experimento 4

En este experimento alcanzó el número máximo de iteraciones (5000) excepto para la técnica de aceleración usando DF-SANE MAP, por lo cual esta propuesta sirve para atacar problemas que de otra forma son difíciles de atacar.

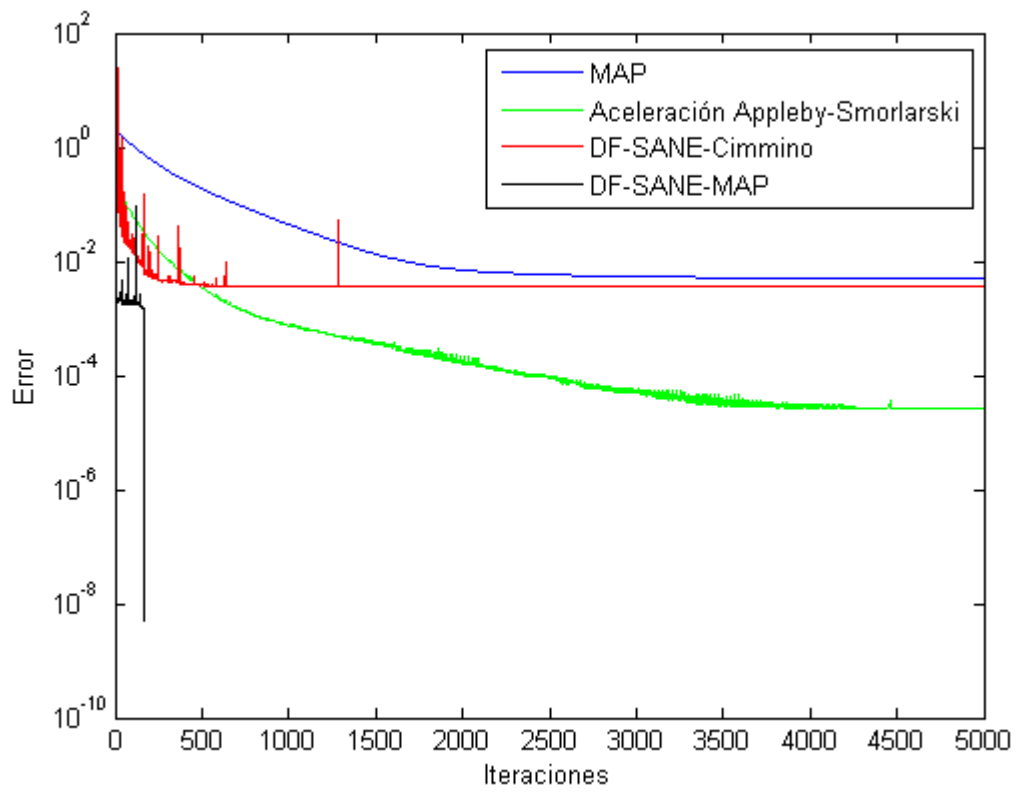


Figura 5.4: Experimento 4



# Capítulo 6

## Conclusiones y Recomendaciones

Basado en las técnicas recientes desarrolladas en [13], las cuales utilizan métodos tipo residual, el presente trabajo propone aplicar dichas técnicas para resolver el Problema de Actualización en el Modelo Matricial (PAMM), estudiado en [18]. El cual es planteado como un problema de optimización no lineal con restricciones, utilizando los métodos de proyecciones alternantes para resolverlo, y el método de Cimmino para acelerarlo.

Se pudo observar a través de la experimentación numérica, un aumento de la velocidad de convergencia utilizando las técnicas recientes desarrolladas en [13]. Adicionalmente se hacen pruebas con un operador distinto asociado al método de proyecciones alternantes (DF-SANE MAP). En dichas pruebas esta propuesta fue la que dio mejores resultados computacionales.

Todas las aceleraciones aplicadas a la técnica para resolver el PAMM además de disminuir el número de iteraciones, disminuye también el tiempo de ejecución ya que el costo por iteración es menor.

La convergencia sin globalización para el caso del método de Cimmino acelerado fue demostrada en [13]. Esa prueba no se ha hecho en el caso del método MAP acelerado (DF-SANE MAP), sin embargo en todos los experimentos realizados se dio la convergencia, así que podemos conjeturarla y queda su prueba como un problema abierto para futuras investigaciones.

# Bibliografía

- [1] G. APPLEBY and D. SMOLARSKI. A linear acceleration row action method for projecting onto subspaces. *Electronic Transactions on Numerical Analysis (ETNA)*, 20:253–275, 2005.
- [2] N. ARONSZAJN. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.
- [3] P. BENNER, A.J. LAUD, and V. MEHRMANN. A collection of benchmark examples for the numerical solutions of algebraic riccati equations i: Continuous-time case. In *Available in electronic form from <http://www.tu-chemnitz.de/pester/sfb/spc95pr.html>*. 1995.
- [4] G. CIMMINO. Calcolo approssimate per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari. *La Ricerca Scientifica. ed. Il progresso tecnico nell' economia nazionale. Consiglio Nazionale delle Ricerche. Ministero dell' Educatione Nazionale*, 9(2):326–333, 1938.
- [5] W. LA CRUZ, J.M. MARTINEZ, and M. RAYDAN. Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations. *Mathematics of Computation*, 75(255):1429–1448, 2006.
- [6] W. LA CRUZ and M. RAYDAN. Nonmonotone spectral methods for large-scale nonlinear systems. *Optimization Methods and Software*, 18(5):583–599, 2003.
- [7] B.N. DATTA and D.R SARKISSIAN. Theory and computations of some inverse eigenvalue problems for the quadratic pencil. *Contemporary Mathematics*, Structured

- Matrices in Operator Theory, Control and Signal and Image Processing, American Mathematical Society:280:221–240, 2001.
- [8] F. DEUTSCH. Applications of von Neumann’s alternating projections algorithm. In P. Kenderov, editor, *Mathematical Methods in Operations Research*, pages 44–51. Sofia, Bulgaria, 1983.
- [9] F. DEUTSCH. The method of alternating orthogonal projections. In S.P. Singh, editor, *Approximation Theory, Spline Functions and Applications*, pages 105–121. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1992.
- [10] F. DEUTSCH. The angle between subspaces of a Hilbert space. In *Approximation theory, wavelets and applications (Maratea, 1994)*, pages 107–130. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [11] R. ESCALANTE and M. RAYDAN. *Alternating Projection Methods*. SIAM, 2011 (ISBN 978-1-611971-93-4).
- [12] I. HALPERIN. The product of projection operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 23:96–99, 1962.
- [13] L.M. HERNANDEZ-RAMOS. *Método de Proyecciones Alternantes vía optimización numérica*. Doctoral dissertation, Universidad Central de Venezuela, 2011.
- [14] L.M. HERNANDEZ-RAMOS, R. ESCALANTE, and M. RAYDAN. Unconstrained optimization techniques for the acceleration of alternating projection methods. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2010.
- [15] S. KACZMARZ. Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. *Bull. Internat. Acad. Pol. Sci. Lett.*, A 35:355–357, 1937.
- [16] W.J. KAMMERER and M.Z. NASHED. A generalization of a matrix iterative method of G. Cimmino to best approximate solution of linear integral equations of

- the first kind. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*(8), 51:20–25, 1971.
- [17] S. KAYALAR and H.L. WEINERT. Error bounds for the method of alternating projections. *Math. Control Signals Systems*, 1:43–59, 1988.
- [18] J. MORENO. *Actualización óptima de matrices en problemas de control*. doctoral dissertation, Universidad Central de Venezuela, 2011.
- [19] J. MORENO, B. DATTA, and M. RAYDAN. A symmetry preserving alternating projection method for matrix model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, pages 23:1784–1791, 2009.
- [20] J. VON NEUMANN. Functional operators vol. II. The geometry of orthogonal spaces. *Annals of Math. Studies*, 22, 1950. Princeton University Press. This is a reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933.
- [21] K.T. SMITH, D.C. SOLMON, and S.L. WAGNER. Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83:1227–1270, 1977.