UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# La fórmula de Faà Di Bruno

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por **Br. Judith Nathalie García Rodríguez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: Dra. Marisela Domínguez.**

Caracas, Venezuela
Noviembre de 2014

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "La fórmula de Faà Di Bruno", presentado por la **Br. Judith Nathalie García Rodríguez**, titular de la Cédula de Identidad **15.800.635**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

**Dra. Marisela Domínguez**
**Tutora**

**Dr. Ramón Bruzual**
**Jurado**

**Dr. Ángel Padilla**
**Jurado**

## Dedicatoria

A Dios por permitirme llegar a este momento tan especial en mi vida. Por los triunfos y los momentos difíciles que me han enseñado a valorarlo cada día más. A mis padres quienes me han acompañado durante todo mi trayecto estudiantil y de vida, a mi profesora Marisela Domínguez por confiar en mí y por apoyarme, a mis amigas Mayra Montilla y Carmen Hernández gracias por su apoyo incondicional.

# Agradecimiento

Agradezco a Dios por protegerme durante todo mi camino y darme fuerzas para superar obstáculos y dificultades a lo largo de toda mi vida. Agradezco el apoyo brindado por mis Padres que sin duda alguna en el trayecto de mi vida me han demostrado su amor, corrigiendo mis faltas y celebrando mis triunfos.

A mi profesora Marisela Domínguez por el tiempo dedicado para culminar este trabajo, agradezco mucho su excelente tutoría así como la sabiduría que me transmitió en el desarrollo de mi formación profesional. También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional porque todos han aportado con un granito de arena a mi formación, y en especial a mis profesores Marisela Domínguez y Alexis Quevedo, por sus consejos, su enseñanza y más que todo por su amistad.

A mis amigas Mayra Montilla y Carmen Hernández por su apoyo incondicional y por demostrarme la gran fe que tienen en mi, las quiero mucho.

Gracias a todas las personas que ayudaron directa e indirectamente en la realización de este proyecto.

# Introducción

Es muy conocida la fórmula de Leibniz para el cálculo de la $n$-ésima derivada del producto de dos funciones

$$D^n(f \cdot g)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(t) D^{n-k} g(t).$$

Mucho menos conocida es *la fórmula de Faà Di Bruno* para la $n$-ésima derivada de la composición de dos funciones $f_\circ g$ (ver Teorema 3.5). El propósito del siguiente trabajo es estudiar esta fórmula menos conocida, presentando la demostración dada por Steven Roman en un artículo de la revista "The American Mathematical Monthly" (ver [**16**]). Esto se hará de manera más detallada.

La fórmula de Faà Di Bruno es una identidad que generaliza la regla de la cadena a derivadas de orden superior, llamada así en honor a Francesco Faà Di Bruno, aunque él no fue el primero en afirmar o demostrar la fórmula. En efecto, en 1800, más de 50 años antes de los trabajos de Faà Di Bruno, el matemático francés Louis François Antoine Arbogast declaró la fórmula en un libro de cálculo (ver [**1**]) considerada la primera referencia publicada al respecto sobre el tema (ver [**5**]).

Varias pruebas de esta fórmula han aparecido en la literatura. Por ejemplo, en [**9**] hay un breve bosquejo de una prueba usando series de Taylor. Sin embargo, los detalles omitidos son bastante complicados. En [**4**] está una prueba que involucra los polinomios de Bell. En [**2**] y [**12**] existe una prueba que se basa en el viejo estilo del cálculo umbral desarrollado a mediados del siglo XIX. No obstante, esta técnica no era matemáticamente rigurosa y se debe justificar por otros medios.

El cálculo umbral tuvo grandes avances en la década de los setenta, como lo demuestra la literatura [**6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 18**], haciéndola una teoría completamente rigurosa, a la que llamaremos la teoría moderna del cálculo umbral. Se usará esta teoría para probar la fórmula de Faà Di Bruno. Una breve explicación del término moderno de cálculo umbral del siglo XIX, se basa en un método notacional para derivar las identidades que implican sucesiones puestas en un índice de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, aparentando que los índices son exponentes $a^1, a^2, a^3, \ldots$ Interpretando literalmente, esto es absurdo, sin embargo, es muy útil. Las identidades obtenidas vía el cálculo umbral también se pueden obtener por métodos más complicados, que se pueden tomar literalmente sin dificultad lógica.

En matemáticas antes de la década de 1970, el cálculo umbral de términos era una manera de expresar las semejanzas que existían entre las ecuaciones polinómicas y otra relación matemática, las pruebas eran ciertas técnicas vagas. Estas técnicas fueron introducidas por Juan Blissard en 1861 y se conocen como el método simbólico de Blissard. Edouard Lucas y James Sylvester usaron esta técnica extensivamente, por esta razón a veces se les atribuye a ellos.

Entre los años 1930 y los años 1950, Eric Temple Bell intentó dar unas bases más rigurosas para el cálculo umbral.

Entre los años 1970 y 1980, Steven Roman, Gian-Carlo Rota y otros desarrollaron el cálculo umbral por medio de funcionales lineales en espacios de polinomios. Actualmente, por cálculo umbral se entiende el estudio de las sucesiones de Sheffer, incluyendo sucesiones polinómicas y de las sucesiones binomiales de Appell (ver [**19**]). El cálculo umbral moderno surgió de un intento de desarrollar una teoría unificada para esta clase de sucesiones polinómicas.

Después de un Capítulo 1 de preliminares, la teoría moderna del cálculo umbral se presenta en el Capítulo 2. Esta teoría es un componente esencial que permite explicar la demostración de la fórmula de Faà Di Bruno, en el Capítulo 3. Este último capítulo incluye una aplicación de dicha fórmula.

Más información acerca de cálculo umbral puede verse en [**3, 7, 8**] y series formales para cálculo umbral en [**13, 14**]. Para detalles acerca de polinomios de tipo binomial y enumeración binomial consultar [**6, 10**].

# Índice general

Dedicatoria iii

Agradecimiento iv

Introducción v

Capítulo 1. Análisis vectorial y espacios duales 1

1. Espacios vectoriales 1
2. Series 3
3. Álgebras 4
4. Producto interno 4
5. Operadores lineales entre espacios normados 5
6. Funcionales lineales 5

Capítulo 2. Álgebra de los polinomios sobre un cuerpo y cálculo umbral 7

1. El álgebra de los polinomios sobre un cuerpo 7
2. El cálculo umbral 9

Capítulo 3. Fórmula de Faà Di Bruno 15

Bibliografía 28

CAPíTULO 1

# Análisis vectorial y espacios duales

Este primer capítulo tratará acerca de las nociones básicas del álgebra y del análisis matemático, necesarias para alcanzar la comprensión de la demostración de la fórmula de Faà Di Bruno que se presentará al final de este trabajo.

## 1. Espacios vectoriales

En lo que sigue $\mathbb{K}$ representará al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición 1.1.

Un *espacio vectorial* (o un *espacio lineal*) consiste de:

(1) Un cuerpo de escalares $\mathbb{K}$,

(2) un conjunto $X$ de objetos, llamados vectores,

(3) una operación llamada *suma de vectores*, que asigna a cada par de vectores $x, y \in X$ un vector $x + y \in X$, llamado suma de $x$ y de $y$, de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

   (a) La suma es conmutativa, esto es, $x + y = y + x$, para todo $x, y \in X$.

   (b) La suma es asociativa, esto es, $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todo $x, y, z \in X$.

   (c) Existe un único vector $0$ en $X$, llamado el *vector cero*, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.

   (d) Para cada vector $x \in X$ existe un único vector llamado *vector opuesto* $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$,

(4) una operación llamada *multiplicación por un escalar*, que asigna a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y a cada vector $x \in X$ un vector $\lambda x$, llamado producto de $\lambda$ y de $x$, de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

   (a) $1x = x$ para todo $x \in X$.

   (b) $(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X$.

(c) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$.

(d) $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $x \in X$.

Cuando no hay confusión con el cuerpo de escalares, uno se puede referir al espacio vectorial como $X$, pero a veces es deseable especificar el cuerpo de escalares y en ese caso se dice que $X$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Se dice que $X$ es un espacio real o complejo según el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ sea $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

(1) El conjunto de los números complejos con las operaciones habituales de adición y multiplicación, es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

(2) El espacio vectorial de $n$ dimensiones, denotado por $\mathbb{R}^n$, es decir, el conjunto de todos los sistemas posibles de $n$ números (reales o complejos) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en el que la adición y la multiplicación se definen mediante las fórmulas

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

es también un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Definición 1.2.

Sea $X$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en $X$ es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{K}$ tal que

(i) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$.

(ii) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$,

se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio normado.*

A continuación se verán algunos ejemplos de espacios normados:

(1) El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es un espacio normado, si se toma $\|x\| = |x|$ para todo número $x \in \mathbb{R}$.

(2) En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, con elementos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tomamos

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Se tiene que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado.

## 2. Series

Sea $X$ un espacio normado.

Definición 1.3.

Una **serie** es un par $(\{x_n\}, \{s_n\})$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de $X$ y

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

La siguiente terminología es usual:

(a) a $x_n$ se le llama término general de la serie.

(b) a la sucesión $\{s_n\}$ se le llama sucesión de sumas parciales de la serie.

La siguiente notación es usual:

En vez de referirse a las series como un par $(\{x_n\}, \{s_n\})$ es usual hablar de la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

Definición 1.4.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ se dice que:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es convergente.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ diverge cuando la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ es divergente.

Sea $s \in X$, si la sucesión $\{s_n\}$ converge a $s$ se suele escribir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \text{ en } X.$$

Esto también puede abreviarse mediante

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = s \text{ en } X.$$

Pero las expresiones anteriores, realmente significan:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - s\right\|_X = \lim_{n\to+\infty}\|s_n - s\|_X = 0.$$

En esto último debe quedar claro que:

(a) $s \in X$ ($s$ es un vector).

(b) $s$ no se obtiene simplemente por adición, $s$ es el límite de una sucesión de sumas.

## 3. Álgebras

Como ya se mencionó $\mathbb{K}$ denotará el cuerpo de los números reales o números complejos.

Definición 1.5.

Un *álgebra* $A$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial tal que existe una aplicación $P : A \times A \to A$ llamada *producto*, que se denotará mediante $P(a, b) = a \cdot b$ para todo $a, b \in A$, que verifica las siguientes propiedades: para todo $a, b, c \in A$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumple

(i) $\lambda \cdot (a \cdot c) = (\lambda a) \cdot c$

(ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(iv) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

A continuación se verá un ejemplo de álgebra:

(1) El conjunto formado por

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ tales que } f \text{ es continua}\}$$

es un álgebra con el producto usual de funciones $P(f, g) = f \cdot g$, es decir

$$(f \cdot g)(t) = f(t)g(t).$$

## 4. Producto interno

Definición 1.6.

Sea $X$ un espacio vectorial. Un *producto interno* en $X$ es una función $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$.

(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(iii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ para todo $x, y \in X$.

(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

(v) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ para todo $x, y, z \in X$.

A continuación se verá un ejemplo de producto interno:

(1) Sean $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y el producto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

entonces $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

## 5. Operadores lineales entre espacios normados

Sean $X, Y$ dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares).

Definición 1.7.
Sea $T : X \to Y$ se dice que $T$ es un *operador lineal* si

(i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in X$,

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in X$, para todo escalar $\lambda$.

A continuación se verá un ejemplo de un operador lineal:

(1) Sea $X = C^1[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$ y $T$ definida de la siguiente manera

$$T(f) = f',$$

donde $f'$ es la derivada de $f$. Entonces $T$ es un operador lineal.

## 6. Funcionales lineales

Sea $X$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

Definición 1.8.
Un *funcional lineal* en $X$ es una función $f : X \to \mathbb{K}$ que es lineal.

Definición 1.9.
El *dual algebraico* de $X$ es

$$X' = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ tal que } f \text{ es funcional lineal}\}.$$

Definición 1.10.

El *dual topológico* de $X$ es

$$X^* = L(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ tales que } f \text{ es un funcional lineal y continuo}\}.$$

Ejemplo 1.11.

Sea $X = \mathbb{R}^n$ con el producto interno usual.

Dado $y \in \mathbb{R}^n$ fijo. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

entonces $f$ es lineal.

Se tiene que $f$ es continua. En efecto, dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ sea $\delta = \frac{\epsilon}{\|y\|}$. Si $x$ es tal que $\|x - x_0\| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\langle x, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| \\ &= |\langle x - x_0, y \rangle| \\ &\leq \|x - x_0\| \|y\| \\ &< \delta \|y\| = \epsilon. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $f$ es continua. Luego $f \in X^* = (\mathbb{R}^n)^*$.

CAPíTULO 2

# Álgebra de los polinomios sobre un cuerpo y cálculo umbral

Este capítulo está compuesto por las ideas básicas necesarias para lograr la comprensión de la nueva demostración de la fórmula de Faà Di Bruno realizada por Steven Roman, que se tratará en el capítulo tres. Para nuestro propósito se presentan el álgebra de los polinomios sobre un cuerpo y nociones del cálculo umbral.

## 1. El álgebra de los polinomios sobre un cuerpo

Un *polinomio* es una expresión matemática construida por un conjunto finito de variables (no determinadas o desconocidas) y constantes (números fijos llamados coeficientes). En términos más precisos, es una relación $n$-aria de monomios (expresión algebraica en la que se utilizan exponentes naturales de variables literales que constan de un solo término) o una sucesión de sumas y restas de potencias enteras de una o de variables variables indeterminadas. A continuación se trabajará con una sola variable.

Sea $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o números complejos, y sea

$$\mathbb{P}_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n | a_i \in \mathbb{K}, i \in \{0, 1, \cdots, n\}\},$$

el *conjunto de los polinomios en una variable con coeficientes en el cuerpo* $\mathbb{K}$ *y grado* $\leq n$ (en el conjunto anterior $x$ es la variable del polinomio).

El polinomio se puede escribir más concisamente usando sumatorias como

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Definición 2.1.

Sea $P_n$ el polinomio dado por $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Si $a_n \neq 0$, se dirá que $P_n$ tiene *grado* $n$, es decir, el grado del polinomio es el mayor exponente de $x$ que tenga coeficiente no nulo.

Entre las operaciones con polinomios se destacan la adición y multiplicación, las cuales se detallarán a continuación.

Definición 2.2 (Adición de polinomios).

La suma de polinomios es una operación, en la que partiendo de dos polinomios $B$ y $Q$, se obtiene un tercero $R$, que es la suma de los dos anteriores, $R$ tiene por coeficiente de cada monomio el de la suma de los coeficientes de los monomios de $B$ y $Q$ del mismo grado.

Dados dos polinomios $B$ y $Q$ con variable $x$ de la forma

$$B(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

el polinomio suma será $R(x) = B(x) + Q(x)$ que es lo mismo que

$$R(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i.$$

Definición 2.3 (Multiplicación de polinomios).

Dados dos polinomios $B$ de grado $n$ y $Q$ de grado $m$, el producto de estos dos polinomios $B \cdot Q$ que será un polinomio de grado $n + m$.

Si $x$ es la variable y

$$B(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$$

entonces

$$\begin{aligned} B(x) \cdot Q(x) &= \left( \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (a_i x^i)(b_j x^j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}. \end{aligned}$$

La doble sumatoria anterior puede reordenarse de la siguiente manera

$$B(x) \cdot Q(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left( \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} \right) x^k.$$

Si tomamos en $\mathbb{P}_n$ la suma usual de polinomios y se define la multiplicación por un escalar, mediante

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Y si tomamos el producto usual de polinomios se tiene que $(\mathbb{P}_n, +, \cdot)$ es un álgebra. Se denota por $\mathbb{P}$ el álgebra de los polinomios en una variable sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Teorema 2.4.
*Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $n$ un entero no negativo, se tiene que*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2.1}$$

Este es el teorema del binomio o del binomio de Newton. Da una fórmula que proporciona el desarrollo de la potencia $n$-ésima de una suma con dos sumandos (siendo $n$, un entero positivo). De acuerdo con este teorema, es posible expandir la potencia $(x+y)^n$ en una suma que contiene términos de la forma $ax^by^c$, donde los exponentes $b$ y $c$ son números naturales con $b+c=n$ y el coeficiente $a$ de cada término es un número entero positivo que depende de $n$ y $b$.

La fórmula del binomio de Newton se generaliza para más de dos sumandos de la siguiente manera

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_r=n}^{n} \binom{n}{k_1, \cdots, k_r} x_1^{k_1} \cdots x_r^{k_r}, \tag{2.2}$$

donde

$$\binom{n}{k_1, \cdots, k_r}$$

es el coeficiente multinomial que se define por

$$\binom{n}{k_1, \cdots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}. \tag{2.3}$$

## 2. El cálculo umbral

Para nuestro propósito las ideas básicas del cálculo umbral pueden resumirse de la siguiente manera. Sea $P$ el álgebra de los polinomios en una variable $x$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, tal como se indicó antes $\mathbb{K}$ representa al cuerpo de los números reales o al de los números complejos.

Sea $v_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ la función dada por

$$v_n(x) = x^n.$$

Sea $P'$ el espacio vectorial dual algebraico de funcionales lineales en $P$. Se usará la notación $\langle L|p\rangle$, notación proveniente del área de física, para la acción de un funcional lineal $L$ en el polinomio $p$. Para cada entero no negativo $k$ se define el funcional lineal $A^k$ por

$$\langle A^k|v_n\rangle = n!\delta_{n,k} \tag{2.4}$$

para todo $n \geq 0$, donde $\delta_{n,k}$ es la *función delta de Kronecker* definida como sigue

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases} \tag{2.5}$$

Entonces $A^k$ se extiende para cualquier polinomio, por linealidad. Es decir, si $P$ es un polinomio dado por

$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n,$$

que es lo mismo que

$$P = \sum_{n=0}^{N} c_n v_n,$$

entonces

$$\langle A^k|P\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n n!\delta_{n,k}.$$

Ahora cualquier funcional lineal en $P$ puede ser expresado como una serie formal en $A^k$. Se entiende por *serie formal* en $A^k$, a una expresión de la forma

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \tag{2.6}$$

donde $a_k = \langle A|v_n\rangle \in \mathbb{K}$. La condición (2.5) asegura la convergencia de la serie y ésta converge a $A$ (ver [**18**]). La serie formal es utilizada para evitar inconvenientes con la convergencia de series infinitas. Una serie de esta forma representa un funcional lineal bien definido si se verifica que dado el lado izquierdo de (2.7) perteneciente a $P$, entonces el lado derecho pertenece a $\mathbb{K}$.

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \middle| p \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\langle A^k|p\right\rangle. \tag{2.7}$$

En efecto, por definición de la función delta de Kronecker (ver 2.5), se tiene que $\langle A^k|p\rangle = 0$, a excepción de un número finito de enteros $k$ para los cuales $\delta_{n,k} = 1$, donde $n$ es el grado del polinomio $p$, así la suma del lado derecho es finito y por lo tanto, pertenece a $\mathbb{K}$.

Definición 2.5.

Sea $F$ el *álgebra de series de potencia formal* en la variable $A$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Un elemento en $F$ tiene la forma

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \quad a_k \in \mathbb{K}.$$

La suma y multiplicación en $F$ están definidas de la siguiente manera

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) A^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k A^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) A^k.$$

Y si tomamos a $F$ con estas operaciones usuales $(F, +, \cdot)$ es un álgebra.

Cada serie de potencia formal

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} A^k,$$

define un funcional lineal en $P$ (ver [**11**]) si se establece que

$$\langle f(A) | v_n \rangle = a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Un funcional lineal $L$ en $P'$ puede ser identificado con una sucesión de constantes

$$a_k = \langle L | v_k \rangle.$$

Esta identificación puede ser usada (ver [**17**]) para dar a $P'$ la estructura del álgebra de series de potencia formal al hacer la identificación

$$L \to \sum_{k=0}^{\infty} \langle L | v_k \rangle A^k.$$

A continuación se probará el siguiente teorema, el cual proporciona un isomorfismo entre $P'$ y $F$.

Teorema 2.6.

*Si $L$ es un funcional lineal en $P$ entonces $L$ se puede escribir como*

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L | v_k \rangle}{k!} A^k. \tag{2.8}$$

Demostración. Se ha probado que la suma de arriba (2.8) es un funcional lineal bien definido al demostrar (2.7). Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|v_k\rangle}{k!} A^k \middle| v_n \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|v_k\rangle}{k!} \langle A^k|v_n\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|v_k\rangle}{k!}\, n!\delta_{n,k} \\ &= \langle L|v_n\rangle,\end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $n \geq 0$. Así (2.8) se mantiene y esto completa la prueba. □

El Teorema 2.6 implica que el espacio vectorial $P'$ es isomorfo al espacio vectorial $F$ conformado por todas las series de potencia formales en la variable $A$, lo que nos permite establecer una correspondencia biunívoca compatible con las operaciones en $P'$ y el espacio vectorial $F$.

Además el espacio vectorial $F$ es un álgebra. Por consiguiente, también lo es $P'$ debido al isomorfismo. Para ser explícitos se define en $P'$ un álgebra con el siguiente producto

$$A^k A^j = A^{k+j}. \tag{2.10}$$

Entonces dadas $L$ y $M$ en la forma de la ecuación (2.8) el producto sería

$$\begin{aligned} LM &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|v_k\rangle}{k!} A^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle M|v_j\rangle}{j!} A^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L|v_k\rangle \langle M|v_{n-k}\rangle \right] A^n, \end{aligned}$$

en lo anterior se considera $n = k + j$ y se usa el Teorema 2.4.

Finalmente usando (2.4), se obtiene la fórmula del producto de dos funcionales lineales

$$\langle LM|v_n\rangle = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L|v_k\rangle \langle M|v_{n-k}\rangle. \tag{2.11}$$

A partir de esta fórmula y usando un argumento de inducción se determina la fórmula para un producto múltiple de funcionales lineales, como se muestra a continuación

$$\langle L_1 \cdots L_j|v_n\rangle = \sum_{k_1+\cdots+k_j=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_j} \langle L_1|v_{k_1}\rangle \cdots \langle L_j|v_{k_j}\rangle. \tag{2.12}$$

En efecto, por inducción sobre $j$.

Para $j = 2$ se cumple (ver 2.11).

A continuación se hará el paso inductivo. Se supone cierto para $j = m$, entonces

$$\langle L_1 \cdots L_m | v_n \rangle = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \langle L_1 | v_{k_1} \rangle \cdots \langle L_m | v_{k_m} \rangle.$$

Se verá que se cumple para $j = m + 1$.

$$\begin{aligned} \langle L_1 \quad \cdots \quad & L_m \cdot L_{m+1} | v_n \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle L_1 \cdots L_m | v_k \rangle \cdot \langle L_{m+1} | v_{n-k} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{k_1+\ldots+k_m=k} \binom{k}{k_1, \ldots, k_m} \langle L_1 | v_{k_1} \rangle \cdots \langle L_m | v_{k_m} \rangle \cdot \langle L_{m+1} | v_{n-k} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_m=k} \binom{n}{k} \binom{k}{k_1, \ldots, k_m} \langle L_1 | v_{k_1} \rangle \cdots \langle L_m | v_{k_m} \rangle \cdot \langle L_{m+1} | v_{n-k} \rangle. \end{aligned}$$

Sea $k_{m+1} = n - k$, luego sustituyendo $k = n - k_{m+1}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle L_1 \quad \cdots \quad & L_m \cdot L_{m+1} | v_n \rangle = \\ &= \sum_{k_1+\ldots+k_m+k_{m+1}=n} \sum_{k_{m+1}=0}^{n} \binom{n}{n-k_{m+1}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_m} \langle L_1 | v_{k_1} \rangle \cdots \langle L_{m+1} | v_{k_{m+1}} \rangle, \\ &= \sum_{k_1+\ldots+k_m+k_{m+1}=n} \sum_{k_{m+1}=0}^{n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m, k_{m+1}} \langle L_1 | v_{k_1} \rangle \cdots \langle L_{m+1} | v_{k_{m+1}} \rangle, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.

Al álgebra $P'$ se le llamará el *álgebra umbral*. La notación

$$L = f(A)$$

significa que $f(A)$ es la serie dada en la ecuación (2.8). Es de hacer notar, que la variable es $A$.

Se necesita establecer sólo un simple hecho acerca del álgebra umbral antes de iniciar con la fórmula de Faà Di Bruno.

Si

$$L = f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L | v_k \rangle}{k!} A^k,$$

entonces por $L'$ o $f'(A)$, que significa el funcional lineal obtenido tomando la derivada formal de la serie $f(A)$ con respecto a la variable $A$. Así por ejemplo,

$$(A^k)' = kA^{k-1}. \tag{2.13}$$

Lema 2.7.

*Si $L = f(A)$ es un funcional lineal en $P$, entonces*

$$\langle f'(A)|p\rangle = \langle f(A)|v_1 p\rangle, \tag{2.14}$$

*para todos los polinomios $p$.*

*Esto a veces se expresa mediante*

$$\langle f'(A)|p(x)\rangle = \langle f(A)|xp(x)\rangle.$$

Demostración. Como $L = f(A)$ es un funcional lineal en $P$, por linealidad, sólo se necesita determinar para $p(x) = x^n$ y $f(A) = A^k$.

Como antes, se toma $v_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ la función dada por

$$v_n(x) = x^n.$$

Con esto bastaría probar que

$$\langle (A^k)'|v_n\rangle = \langle A^k|v_{n+1}\rangle, \tag{2.15}$$

Veámoslo,

$$\begin{aligned} \langle (A^k)'|v_n\rangle &= \langle kA^{k-1}|v_n\rangle \\ &= kn!\delta_{n,k-1} \\ &= (n+1)!\delta_{n+1,k} \\ &= \langle A^k|v_{n+1}\rangle, \end{aligned}$$

donde se usan las ecuaciones (2.13), (2.4), se hace uso de que si $\delta_{n,k-1} = 1$ implica que $n = k-1$ y por lo tanto $k = n+1$ y $(n+1)n! = (n+1)!$, luego se usa nuevamente la ecuación (2.4).

De esta manera se completa la prueba. □

CAPíTULO 3

# Fórmula de Faà Di Bruno

En este capítulo se seguirá la prueba de la fórmula de Faà Di Bruno dada en [**16**]. Para simplificar la presentación de la demostración, se presentan algunos lemas.

Usaremos $D^n f$ para denotar la $n$-ésima derivada de una función $f$.

Como ya se mencionó, en la introducción, la motivación de este trabajo de grado proviene de la bien conocida fórmula de Leibniz para el cálculo de la $n$-ésima derivada del producto de dos funciones.

$$D^n f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f(t) D^{n-k} g(t), \tag{3.1}$$

Veamos un ejemplo. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{x^3}$. Por la fórmula de Leibniz se obtiene que

$$D^2(x^2)(e^{x^3}) = 18x^3e^{x^3} + 9x^6e^{x^3} + 2e^{x^3}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
D^2(x^2)(e^{x^3}) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} D^k f(t) D^{2-k} g(t) \\
&= \binom{2}{0} D^0(x^2)D^2(e^{x^3}) + \binom{2}{1} D^1(x^2)D^1(e^{x^3}) + \binom{2}{2} D^2(x^2)D^0(e^{x^3}) \\
&= x^2[6xe^{x^3} + 3x^2e^{x^3}3x^2] + 12x^3e^{x^3} + 2e^{x^3} \\
&= 6x^3e^{x^3} + 9x^6e^{x^3} + 12x^3e^{x^3} + 2e^{x^3} \\
&= 18x^3e^{x^3} + 9x^6e^{x^3} + 2e^{x^3}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, es mucho menos conocida *la fórmula de Faà Di Bruno* para la $n$-ésima derivada de la composición de dos funciones $f_\circ g$.

Lema 3.1.

*Si $n \in \mathbb{N}$, si $f$ y $g$ son funciones en las que las derivadas hasta orden $n$ están bien definidas en $t \in \mathbb{R}$, entonces*

$$D^n(f_\circ g)(t) = \sum_{k=1}^{n} (D^k f)(g(t))\, l_{n,k}(D^1 g, \ldots, D^n g)(t),$$

*donde $l_{n,k}(D^1 g, \ldots, D^n g)$ no depende de las funciones $D^k f|_{g(\cdot)}$.*

Demostración.

Sea

$$h = f_\circ g.$$

Para simplificar la notación en lo que sigue se usará

$$\begin{aligned} h_n &= D^n h \\ g_n &= D^n g \\ f_n(\cdot) &= D^n f|_{g(\cdot)}\,. \end{aligned}$$

Con esta notación la regla de la cadena se escribe así

$$D f_\circ g(t) = D f|_{g(t)} D g(t).$$

Luego

$$h_1 = f_1 g_1.$$

Y así basta tomar

$$l_{1,1}(g_1) = g_1.$$

En lo que sigue se usará que

$$D^1 f_k(\cdot) = D^1(D^k f|_{g(\cdot)}) = g'(\cdot) D^{k+1} f|_{g(\cdot)} = g_1(\cdot) f_{k+1}(\cdot).$$

Es decir,

$$D^1 f_k = g_1 f_{k+1}.$$

Para tener una idea de lo que se va a probar, comentamos los casos correspondientes a $n = 2, 3$.

Caso $n = 2$. Usando la fórmula para derivación de un producto se tiene que

$$
\begin{aligned}
h_2 &= D^1 h_1 = D^1(f_1 g_1) = g_1 D^1 f_1 + f_1 D^1 g_1 \\
&= g_1 g_1 f_2 + f_1 D^1 D^1 g = g_1^2 f_2 + f_1 D^2 g \\
&= f_1 g_2 + f_2 g_1^2.
\end{aligned}
$$

Basta tomar

$$
\begin{aligned}
l_{2,1}(g_1, g_2) &= g_2, \\
l_{2,2}(g_1, g_2) &= g_1^2.
\end{aligned}
$$

Caso $n = 3$. Usando

$$D^1(g_1^2) = 2g_1 D^1 g_1 = 2g_1 g_2,$$

sigue que

$$
\begin{aligned}
h_3 &= D^1 h_2 = D^1(f_1 g_2 + f_2 g_1^2) = D^1(f_1 g_2) + D^1(f_2 g_1^2) \\
&= g_2 D^1 f_1 + f_1 D^1 g_2 + g_1^2 D^1 f_2 + f_2 D^1(g_1^2) \\
&= g_2 g_1 f_2 + f_1 g_3 + g_1^2 D^1 f_2 + f_2 2 g_1 g_2 \\
&= g_2 g_1 f_2 + f_1 g_3 + g_1^2 g_1 f_3 + 2 f_2 g_1 g_2 \\
&= f_1 g_3 + 3 f_2 g_1 g_2 + f_3 g_1^3.
\end{aligned}
$$

En este caso basta tomar

$$
\begin{aligned}
l_{3,1}(g_1, g_2, g_3) &= g_3, \\
l_{3,2}(g_1, g_2, g_3) &= 3 g_1 g_2 \\
l_{3,3}(g_1, g_2, g_3) &= g_1^3.
\end{aligned}
$$

Ya se probó que se cumple para $n = 1, 2, 3$.

Se probará para $h_n$. Supongamos cierto para $n$, entonces se tiene que

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \, l_{n,k}(g_1, \dots, g_n).$$

A continuación se probará para $n + 1$, es decir, se probará que

$$h_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} f_k \, l_{n+1,k}(g_1, \dots, g_{n+1}).$$

En efecto, por propiedades de la derivada y por la hipótesis inductiva se tiene que

$$\begin{aligned}
h_{n+1} = Dh_n &= D\sum_{k=1}^{n} f_k\, l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} D(f_k\, l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n))\\
&= \sum_{k=1}^{n} l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)\, Df_k + \sum_{k=1}^{n} f_k\, Dl_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{k+1}\, l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n) + \sum_{k=1}^{n} f_k\, Dl_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)\\
&= \sum_{k=2}^{n+1} f_k\, l_{n+1,k}(g_1,\ldots,g_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} f_k\, Dl_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} f_k\, l_{n+1,k}(g_1,\ldots,g_{n+1}),
\end{aligned}$$

donde

$$l_{n+1,k}(g_1,\ldots,g_{n+1}) = \begin{cases} Dl_{n,k}(g_1,\ldots,g_n), & \text{si } k=1\\ l_{n+1,k}(g_1,\ldots,g_n) + Dl_{n,k}(g_1,\ldots,g_n), & \text{si } 2\le k\le n\\ l_{n+1,k}(g_1,\ldots,g_{n+1}), & \text{si } k=n+1. \end{cases}$$

□

En lo que sigue se buscará una expresión más precisa para $l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n)$, para eso se tomará una $f$ particular.

Lema 3.2.

*Si $n\in\mathbb{N}$, si $g$ es una función en la que las derivadas hasta orden $n$ están bien definidas en $t\in\mathbb{R}$, entonces para todo $a\in\mathbb{R}$ las funciones $l_{n,k}(D^1g,\ldots,D^ng)$ obtenidas en el Lema 3.1 satisfacen*

$$e^{-ag(t)}D^n(e^{ag(t)}) = \sum_{k=1}^{n} a^k\, l_{n,k}(D^1g(t),\ldots,D^ng(t)).$$

Demostración.

Sean

$$f(t) = e^{at},$$

$$B_n(t) = e^{-ag(t)}D^ne^{ag(t)}.$$

En este caso, se tiene que

$$(D^k f)(g(t)) = a^k e^{ag(t)},$$

y

$$D^n(f_\circ g)(t) = D^n(e^{ag(t)}).$$

Sustituyendo estas expresiones en la igualdad dada por el Lema 3.1 y multiplicando por $e^{-ag(t)}$ se obtiene

$$e^{-ag(t)} D^n(e^{ag(t)}) = \sum_{k=1}^{n} a^k l_{n,k}(D^1 g, \ldots, D^n g).$$

□

TEOREMA 3.3.

*Si $n \in \mathbb{N}$, si $g$ es una función en la que las derivadas hasta orden $n$ están bien definidas en $t \in \mathbb{R}$, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$*

$$e^{-ag(t)} D^n(e^{ag(t)}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sum_{j_1+\ldots+j_k=n; j_i \geq 1} \binom{n}{j_1, \ldots, j_k} D^{j_1} g(t) \cdots D^{j_k} g(t).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea

$$B_n(t) = e^{-ag(t)} D^n e^{ag(t)}.$$

Para simplificar usaremos la siguiente notación

$$g_n = D^n g.$$

Para $n \geq 1$ aplicando la fórmula de Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} B_n(t) &= e^{-ag(t)} D^{n-1}(a g_1(t) e^{ag(t)}) \\ &= a e^{-ag(t)} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) D^{n-k-1} e^{ag(t)} \\ &= a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) B_{n-k-1}(t). \end{aligned}$$

De donde

$$B_n(t) = a \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1}(t) B_{n-k-1}(t). \tag{3.2}$$

A continuación se piensa en $t$ como un valor fijo, para simplificar la notación escribamos

$$B_n = B_n(t),$$

$$g_n = g_n(t).$$

Sea $v_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ la función dada por

$$v_n(x) = x^n.$$

Se definen dos funcionales lineales $L$ y $M$ en $P$ mediante

$$\begin{aligned} \langle L|v_n\rangle &= B_n \\ \langle M|v_n\rangle &= g_n. \end{aligned}$$

Note que

$$\langle L|v_0\rangle = B_0 = 1,$$

$$\langle M|v_0\rangle = g_0 = g.$$

Para cada entero no negativo $k$ se define el funcional lineal $A^k$ por

$$\langle A^k|v_n\rangle = n!\delta_{n,k}$$

para todo $n \geq 0$, donde $\delta_{n,k}$ es la función delta de Kronecker, ver ecuación (2.5).

Por el Teorema 2.6 se tiene que

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} A^k \qquad \text{y} \qquad M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k}{k!} A^k.$$

Usando las definiciones de $L$ y $M$, la ecuación (3.2) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \langle L|v_n\rangle &= B_n \\ &= a\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} g_{k+1} B_{n-1-k} \\ &= a\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \langle M|v_{k+1}\rangle \langle L|v_{n-1-k}\rangle \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.7

$$\langle M'|v_k\rangle = \langle M|v_{k+1}\rangle.$$

Además de la fórmula del producto de dos funcionales (2.11) se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \langle M'|v_k\rangle \langle L|v_{n-1-k}\rangle = \langle M'L|v_{n-1}\rangle,$$

Por lo tanto

$$\langle L|v_n\rangle = a\langle M'L|v_{n-1}\rangle.$$

Usando el Lema 2.7 se obtiene que

$$\langle L'|v_{n-1}\rangle = \langle L|v_n\rangle,$$

De donde

$$\langle L'|v_{n-1}\rangle = a\langle M'L|v_{n-1}\rangle.$$

Como $n \geq 1$ es un número natural arbitrario, se concluye que

$$L' = aM'L.$$

Esta ecuación diferencial formal es fácil de resolver, separando las variables

$$\frac{L'}{L} = aM'$$
$$\int \frac{L'}{L} = \int aM',$$

tomando exponencial a ambos miembros de la igualdad y usando que $L > 0$, ya que $\langle L|1\rangle = B_0 = 1 > 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \ln|L| &= aM + d \\ L &= e^{aM+d}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $d$ es una constante.

Claramente el funcional lineal

$$F(A) = e^{a(M-g_0)},$$

satisface (3.3) y si $G(A)$ también satisface (3.3) entonces la derivada de $\frac{F(A)}{G(A)}$ es igual a cero y por consecuente, es una constante. Por lo tanto, todas las soluciones son de la forma

$$L = ce^{a(M-g_0)},$$

donde $c$ es una constante.

Para determinar el valor de $c$ se considera la condición inicial

$$1 = B_0 = \langle L|1\rangle = \langle ce^{a(M-g_0)}|1\rangle = \langle ce^{a(M-g_0)}|x^0\rangle = c,$$

donde se usó (2.4). Entonces

$$L = e^{a(M-g_0)}.$$

Así

$$\begin{aligned} B_n &= \langle L|v_n\rangle \\ &= \langle e^{a(M-g_0)}|v_n\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\langle (M-g_0)^k|v_n\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{j_1+\ldots+j_k=n} \binom{n}{j_1,\ldots,j_k} \langle M-g_0|v_{j_1}\rangle \cdots \langle M-g_0|v_{j_k}\rangle \end{aligned}$$

donde se hace uso de la función exponencial en términos de series de Taylor, $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ y se usa (2.12).

Como

$$M - g_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k!} A^k$$

por el Teorema 2.6 se tiene que

$$\langle M - g_0|v_n\rangle = \begin{cases} g_n, & \text{si } n \geq 1; \\ 0, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Luego

$$\langle M-g_0|v_{j_1}\rangle = g_{j_1}, \ldots, \langle M-g_0|v_{j_k}\rangle = g_{j_k}.$$

De donde

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sum_{j_1+\ldots+j_k=n; j_i\geq 1} \binom{n}{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1}\cdots g_{j_k},$$

□

LEMA 3.4.

*Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$, para $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\underbrace{\sum_{j_1+\ldots+j_k=n; j_i \geq 1} \left(\frac{c_{j_1}}{j_1!}\right) \cdots \left(\frac{c_{j_k}}{j_k!}\right)}_{S_a} = \underbrace{\sum_{k_1,\ldots,k_n \in \Phi_k} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} \left(\frac{c_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{c_n}{n!}\right)^{k_n}}_{S_b} \tag{3.4}$$

*donde $\Phi_k$ es el conjunto de todos los $k_1, \ldots, k_n$ para los cuales*

$$k = k_1 + \cdots + k_n.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $k_1$ el número de veces que aparece $c_1$, sea $k_2$ el número de veces que aparece $c_2$ y así sucesivamente hasta considerar $k_n$ igual al número de veces que aparece $c_n$.

Luego $c_{j_1} \ldots c_{j_k} = c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n}$. Además se tiene que $\{j_1, \ldots, j_k\}$ es un conjunto con $k$ elementos, luego $k = k_1 + \cdots + k_n$.

El coeficiente multinomial es el número de formas en que se puede elegir $x_1$ de $k_1$ de los $k$ valores, $x_2$ de $k_2$ de los $k - k_1$ valores restantes, $x_3$ de $k_3$ de los $k - k_1 - k_2$ valores restantes y así sucesivamente hasta $x_i$ de $k_i$ de los $k - k_1 - \ldots - k_{i-1} = k_i$ valores restantes. Este es el coeficiente multinomial (ver ecuación 2.3) y está dado por

$$\binom{k}{k_1, \cdots, k_n} = \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!}.$$

Luego

$$\left(\frac{c_{j_1}}{j_1!}\right) \cdots \left(\frac{c_{j_k}}{j_k!}\right) = \binom{k}{k_1, \cdots, k_n} \left(\frac{c_1}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{c_n}{n!}\right)^{k_n}.$$

□

Con la intención de aclarar un poco la demostración anterior presentamos el caso $n = 3$.

Para $n = 3$, con $k = 1, 2$. Se tienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} j_1 + \ldots + j_k &= 3 \quad (j_i \geq 1) \\ k_1 + k_2 + k_3 &= k. \end{aligned}$$

A continuación se presentará el caso $n = 3$, $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$ y $k = 1$, donde se tienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} j_1 &= 3 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 1 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$S_a = \frac{c_3}{3!} \quad \text{y} \quad S_b = \frac{c_3}{3!},$$

y se verifica la igualdad. Caso $n = 3$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 0$ y $k = 2$, donde las condiciones son las siguientes

$$\begin{aligned} j_1 + j_2 &= 3 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 2 \end{aligned}$$

de donde

$$S_a = \frac{c_1}{1!} + \frac{c_2}{2!} \quad \text{y} \quad S_b = \frac{c_1}{1!} + \frac{c_2}{2!},$$

y se cumple la igualdad.

Ya se está en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal de este trabajo de grado, el cual consiste en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.5.

*Si $n \in \mathbb{N}$, si $f$ y $g$ son funciones en las que las derivadas hasta orden $n$ están bien definidas en $t \in \mathbb{R}$, entonces*

$$D^n(f_\circ g)(t) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \in \Phi} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} (D^k f)(g(t)) \left(\frac{Dg(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{D^n g(t)}{n!}\right)^{k_n},$$

*donde $\Phi$ es el conjunto de todos los $k_1, \ldots, k_n$ para los cuales*

$$k = k_1 + \cdots + k_n \quad y \quad k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sean $n \geq 1$ y $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, sea

$$B_n(t) = e^{-ag(t)} D^n e^{ag(t)}.$$

Al igual que antes, para simplificar usaremos la siguiente notación

$$g_n = D^n g.$$

En el Lema 3.2 y el Teorema 3.3 se obtuvieron dos expresiones para $B_n$. Igualando los coeficientes de $a^k$ en estas dos expresiones y usando la definición del coeficiente multinomial se tiene que

$$\begin{aligned} l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n) &= \frac{1}{k!}\sum_{j_1+\ldots+j_k=n; j_i\geq 1}\binom{n}{j_1,\ldots,j_k} g_{j_1}\cdots g_{j_k} \\ &= \frac{n!}{k!}\sum_{j_1+\ldots+j_k=n; j_i\geq 1}\left(\frac{g_{j_1}}{j_1!}\right)\cdots\left(\frac{g_{j_k}}{j_k!}\right). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.4 sigue que

$$l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n) = \frac{n!}{k!}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\Phi_k}\binom{k}{k_1,\ldots,k_n}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}$$

donde $\Phi_k$ es el conjunto de todos los $k_1,\ldots,k_n$ para los cuales

$$k = k_1+\cdots+k_n.$$

Por el Lema 3.1

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{k=1}^{n} f_k\, l_{n,k}(g_1,\ldots,g_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{n!}{k!}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\Phi_k}\binom{k}{k_1,\ldots,k_n}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{n!}{k!}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\Phi_k}\frac{k!}{k_1!,\ldots,k_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{k_1,\ldots,k_n\in\Phi_k}\frac{n!}{k_1!,\ldots,k_n!} f_k\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}. \end{aligned}$$

Luego (ver Observación 3.6)

$$h_n = \sum_{k_1,\ldots,k_n\in\Phi}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!} f_k\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n}.$$

Esta es la fórmula deseada y por consecuencia, la prueba se ha completado.

□

OBSERVACIÓN 3.6. En matemáticas discretas, una partición de un entero positivo $n$ es una forma de descomponer $n$ como suma de enteros positivos. Dos sumas se considerarán iguales si solo difieren en el orden de los sumandos.

Las particiones de un número $n$ corresponden al conjunto de las soluciones $(k_1,k_2,...,k_n)$ de la ecuación diofántica

$$1k_1+2k_2+3k_3+\ldots+nk_n = n.$$

Por ejemplo, las cinco particiones de 4 serían:

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

y corresponden a las soluciones de

$$1k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 4$$

dadas por

$$\begin{aligned}
(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (4, 0, 0, 0),\\
(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (2, 1, 0, 0),\\
(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (0, 2, 0, 0),\\
(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (0, 0, 0, 1),\\
(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (1, 0, 1, 0).
\end{aligned}$$

Y las once particiones de 6 son:

$$\begin{aligned}
6 &= 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1\\
&= 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.
\end{aligned}$$

Veamos un ejemplo de aplicación de la fórmula de Faà Di Bruno para la $n$-ésima derivada de la composición de dos funciones $f_\circ g$.

Sea $f(t) = e^t$ y $g(t) = t^2$, entonces

$$f_\circ g(t) = e^{t^2}.$$

Por ejemplo, cuando $n = 2$, se tienen dos soluciones provenientes de la condición $k_1+2k_2 = 2$. Podemos tener $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, luego por la condición $k_1 + k_2 = k$, se tiene que $k = 1$, de donde se obtiene el término

$$\frac{2!}{0!\ 1!} D^1 f(t^2) \frac{D^2 t^2}{2!}.$$

El otro caso que se tiene es $k_1 = 2$ y $k_2 = 0$, caso en que $k = 2$, de donde se obtiene el término

$$\frac{2!}{2!\ 0!} D^2 f(t^2) \left(\frac{D^1 t^2}{1!}\right)^2.$$

Por lo tanto, la fórmula de Faà Di Bruno nos dice que

$$\begin{aligned} D^2(f_\circ g)(t) &= \frac{2!}{0!\ 1!} D^1 f(t^2) \frac{D^2 t^2}{2!} + \frac{2!}{2!\ 0!} D^2 f(t^2) \left( \frac{D^1 t^2}{1!} \right)^2 \\ &= 2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2}. \end{aligned}$$

# Bibliografía


1. L. F. A. ARBOGAST, *Du calcul des derivations.* Strasbourg: Levrault. 1800. Citado en la(s) página(s): v
2. E. T. BELL, *Postulational basis for the umbral calculus*, Amer. J. Math, 62 (1940) 717 − 724. Citado en la(s) página(s): v
3. J. CIGLER, *Some remarks on Rota´s umbral calculus*, Proc. Koninklyke Nederlandse Akad. van Wetenschappen, Amsterdam, Ser. A, 81 (1978). Citado en la(s) página(s): vi
4. L. COMTET, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Boston, 1974, pp. 137 − 139. Citado en la(s) página(s): v
5. A. D. D. CRAIK, *Prehistory of Faà di Bruno´s Formula.* American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America)112 (2), pp. 217 − 234, (2005). Citado en la(s) página(s): v
6. A. GARSIA, *An exposé of the Mullin-Rota theory of polynomials of binomial type, J. Linear and Multilinear Algebra*, 1 (1973) 47 − 65. Citado en la(s) página(s): v, vi
7. A. GARSIA, S. A. JONI, *A new expression for umbral operators and power series inversion*, Proc. Amer. Math. Soc., 64 (1977) 179 − 185. Citado en la(s) página(s): v, vi
8. A. JONI, *Lagrange inversion in higher dimensions and umbral operators, J. Linear and Multi-linear Algebra*, 6 (1978) 111 − 121. Citado en la(s) página(s): vi
9. C. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, 1965, p. 33. Citado en la(s) página(s): v
10. R. MULLIN, G. C. ROTA, *Theory of binomial enumeration, in Graph Theory and Its Applications*, Academic Press, 1970. Citado en la(s) página(s): v, vi
11. M. RAZPET, *An Application of the Umbral Calculus*, Journal of mathematical Análisis and Applications 149, 1-16, University of Ljubljana, Yugoslavia, (1990). Citado en la(s) página(s): 11
12. J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, 1958, pp. 35 − 37. Citado en la(s) página(s): v
13. S. M. ROMAN, *The algebra of formal series*, Advances in Math., 31 (1979) 309 − 329; addendum required-page missing. Citado en la(s) página(s): v, vi
14. S. M. ROMAN, *The algebra of formal series II: Sheffer sequences*, J. Math. Anal. Appl. 74, (1980), 120-143. Citado en la(s) página(s): v, vi
15. S. M. ROMAN, *The algebra of formal series III: Several variables*, J. Approx. Theory, 26 (1979) 340−341. Citado en la(s) página(s): v

16. S. ROMAN, *The fórmula of Faà Di Bruno*. American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America) 87(10), pp. 805 – 809, (1980). Citado en la(s) página(s): v, 15

17. S. M. ROMAN, *Polynomials, power series and interpolation*, J. Math. Anal. Appl. 80, 333-371 (1981). Citado en la(s) página(s): 11

18. S. M. ROMAN, G. C. ROTA, *The Umbral Calculus*, Advances in Math., 27 (1978) 95 – 188. Citado en la(s) página(s): v, 10

19. E. W. WEISSTEIN, Umbral Calculus. http://mathworld.wolfram.com/UmbralCalculus.html.9 Citado en la(s) página(s): vi