La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz / Patricia Camarena Gallardo
COORDINADORES

COLECCIÓN PAIDEIA SIGLO XXI

La educación matemática en el siglo XXI

La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz / Patricia Camarena Gallardo
COORDINADORES

COLECCIÓN PAIDEIA SIGLO XXI

La educación matemática en el siglo XXI

Xicoténcatl Martínez Ruiz y Patricia Camarena Gallardo, coordinadores

Primera edición 2015

Av. Luis Enrique Erro s/n
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco,
Del. Gustavo A. Madero, C. P. 07738, México, D. F.

Libro formato pdf elaborado por:
Coordinación Editorial de la Secretaría Académica
Secretaría Académica, 1er. Piso,
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"
Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738

Diseño y formación: Quinta del Agua Ediciones, S.A. de C.V. Cuidado de la edición: Héctor Siever

ISBN: 978-607-414-497-0

Impreso en México / Printed in Mexico

Índice

Una nota de agradecimiento

Quiero agradecer a quienes de manera directa o indirecta han contribuido para objetivar este esfuerzo. Agradezco a todos los integrantes de la Coordinación Editorial de la Secretaría Académica, porque cada día aprendemos con nuestros equipos de trabajo las formas de renovación y esperanza que nos permiten seguir en esta gran institución; en especial, agradezco a Beatriz Arroyo Sánchez por su dedicación puntual al trabajo que nos ennoblece. También quiero reconocer y agradecer la labor de otras áreas de la Secretaría Académica que soportan cada esfuerzo editorial ofrecido en la colección *Paideia Siglo XXI*.

Algo más impulsó decisivamente mi ánimo en la última etapa de este proyecto. Fueron las palabras precisas y de gran aliento que en febrero de este año –similares a la función del *halĭtus* en el pensamiento medieval–, me transmitieron lo que se ha vuelto la ambrosía de las instituciones, cada vez más escasa y por ello más valiosa: la confianza. Dichas palabras provinieron de Iris Santacruz Fabila, a quien agradezco su inspiración para seguir y poder dejar este libro en las manos del lector.

Xicoténcatl Martínez Ruiz
Zacatenco, ciudad de México

Introducción
Matemática, futuro e imaginación

Xicoténcatl Martínez Ruiz

El proyecto y las intuiciones que dieron origen al libro *La educación matemática en el siglo XXI* tienen un primer antecedente en la preocupación de diversos países –mostrada entre 2012 y 2013– en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esa inquietud generó una serie de reflexiones publicadas en el número 62 de la revista *Innovación Educativa.* Al momento de su edición, una serie de interacciones con Patricia Camarena nutrieron tanto la intención de la revista como la posibilidad de indagar más sobre una especie de *eidos* –forma, modelo, idea en el sentido platónico– de la experiencia que hace al conocimiento matemático significativo, fascinante, preciso, crucial en el desarrollo de un país, e imprescindible en el entendimiento del ser humano y de la realidad. Para ello no había que buscar un *topos uranus*, sea el lugar donde Platón lo haya ubicado, sino únicamente reconocer cómo esa especie de *eidos* se presenta de manera diáfana en aquellos que han dedicado su vida a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y se han sumergido en la abstracción de la matemática teórica o aplicada.

Quienes logran animar con furor ininterrumpido –que nosotros balbuceantes llamamos pasión, *philia*– su inmersión en un conocimiento, *episteme*, que está en la raíz del conocimiento mismo y hemos referido históricamente como matemática, *mathemata*; son de quienes tenemos que escuchar y aprender cómo mejorar significativamente el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Su vida –la de quien es matemático- contiene una de las maravillas que han influenciado nuestra forma de entender el mundo; su fascinación es la fuente de donde emerge la posibilidad de asombro, la capacidad de sorprenderse ante algo, *thaumazein*, que puede atraer a un niño o joven de nuestro tiempo, despertando interés hacia la matemática. En esa capacidad de asombro radica una condición sencilla para dimensionar el valor de la educación matemática en el siglo XXI: la construcción de nuestra riqueza como especie está en nuestro entendimiento de la realidad, en la configuración milenaria del conocimiento en general, su abstracción y aplicación; así como el continuo ¿qué puede ser conocido? La matemática es imprescindible en ello. La gran tarea que hemos tenido históricamente como especie es cómo usamos esa riqueza del conocimiento, su abstracción y aplicación; hacia dónde nos dirige o queremos que nos dirija. En ese "cómo" inicia el dilema ético y ahí está latente la aparición del egocentrismo, capaz de guiar un bien común hacia la esfera de la apropiación individual.

Regreso a la sencilla idea de escuchar y aprender de quienes logran despertar en sus estudiantes la atracción por la matemática. Decía que no están lejos, no son intangibles, tampoco tienen que estar necesariamente galardonados con la medalla Fields; recorren nuestros pasillos y habitan las aulas y las bibliotecas todos los días, están aquí. Aunque son innumerables, mencionaré tres. Por ejemplo, en el nivel superior y posgrado, la doctora Patricia Camarena es un referente de inspiración y dedicación; ella se ha centrado en desarrollos teóricos de matemática en el contexto de las ciencias para atender y aportar mejoras en el aprendizaje de la matemática en jóvenes mexicanos del Instituto Politécnico Nacional. Sus contribuciones ahora trascienden los muros de nuestra institución.

Otra muestra, en el sistema mexicano de educación tecnológica, es la profesora Olga Xóchitl Martínez en el nivel medio superior federal. Su búsqueda continua de cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se ha enfocado a jóvenes provenientes de familias con situaciones sociales y económicas desfavorecidas; su esfuerzo conlleva, desde su raíz, la fascinación por la matemática, que al transmitirla en el aula despierta en los discentes un atisbo de lo que originó al pensamiento matemático. Algo así trasciende la condición social, económica e incluso familiar de un estudiante, ¿acaso no buscamos abatir la desigualdad mediante el conocimiento? El tercer ejemplo es el de aquellos matemáticos natos, inmersos en el asombro por las relaciones numéricas, las abstracciones y las posibilidades infinitas, quienes asumen la resolución de un problema matemático como una fuente de deleite estético (*aisthesis*) y placer del alma (Aristóteles). Tal es el caso del profesor Mario García, a quien en el Instituto Politécnico Nacional le ha llevado años transitar por mejores pedagogías para manifestar su admiración por la matemática y propagarla en jóvenes y adultos.

Futuro

La matemática es piedra angular en esa riqueza acumulada que nos configura como especie, su influencia en nuestro entendimiento del universo recorre la historia no sólo de la ciencia, sino su aplicación desde el año 3 500 a.C. en Babilonia y Egipto. Si pensamos esto para las próximas décadas, su nivel de relación e influjo directo en otras áreas del conocimiento no dejan duda de la importancia que tiene la educación matemática en el futuro de la ciencia para un país y de la manera en que ésta permea la vida. Stephen Hawking (2013, XV) lo expresa en cierta forma a través de una historia de los descubrimientos matemáticos: “Como ocurrió en el pasado, el desarrollo futuro de las matemáticas afectará sin duda, de forma directa o indirecta, a nuestra forma de vivir y pensar. Las maravillas del mundo antiguo, como las pirámides de Egipto, fueron físicas. Como ilustra este volumen, las mayores maravillas del mundo moderno se encuentran en nuestro propio entendimiento”.

Si el futuro de las matemáticas tiene un lugar imprescindible en nuestra forma de vida y pensamiento, entonces su atención y desarrollo en niños y jóvenes tiene que ocupar una seria reflexión en la política educativa de un país. Por ello, apostamos a la posibilidad de que los análisis de especialistas iberoamericanos en educación matemática puedan ser escuchados y considerados en las decisiones sobre educación, eso constituye uno de los propósitos de este libro.

La educación matemática en el siglo XXI es un libro de colaboración internacional que el lector puede explorar en su conjunto o por país de interés. Investigadores, matemáticos, científicos y docentes como Maria Salett Biembengut (Brasil), Fidel Oteiza Morra (Chile), Ángel Ruiz (Costa Rica), José Luis Lupiáñez, Luis Rico Rinero, Isidoro Segovia y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo (España), Patricia Camarena Gallardo, Manuel Santos Trigo, Mario García Juárez y Miguel Ángel Parra (México), Jesús Victoria Flores Salazar y Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre (Perú); Orlando Planchart Márquez (Puerto Rico) y Yolanda Serres (Venezuela); ofrecen un panorama crítico y propositivo de la educación matemática en trece capítulos en los que se mencionan los términos educación matemática o didáctica de la matemática, ambos hacen referencia al área del conocimiento que ha producido durante décadas estudios e investigaciones; todo ello provee los elementos para constituirse como área del conocimiento. Los investigadores que he mencionado han contribuido decisivamente a esa área del conocimiento. Debo decir que hoy el lector podrá encontrar estudios sobre la investigación en educación matemática, lo cual muestra elementos para un meta-análisis de los trabajos publicados en México (Ávila, 2013); la conciencia de esa investigación cumple con comunicar el estado del conocimiento de áreas disciplinares, en ellas la educación matemática tiene un lugar cuyas bases –en el caso mexicano– se remontan a los años 70.

Hay diversas problemáticas que recorren este libro y nos permiten tener una visión panorámica de coincidencias entre países y otros ejemplos de acciones de mejora pedagógica e iniciativas para el desarrollo del pensamiento matemático, de ellas podemos aprender, no únicamente de los resultados de pruebas estandarizadas (PISA de la OCDE, EXANI-I, EXCALE en México, entre otros). Si correlacionamos los resultados detallados de pruebas estandarizadas y estrategias que han funcionado, podemos encontrar algunas relaciones causales y, sobre todo, propuestas que permitan configurar un futuro menos desigual en las habilidades matemáticas requeridas por economías como las de los países participantes en este libro.

Imaginación

Llego a la última parte de esta introducción. Regreso a un cierre que no es otra cosa sino correlación y apertura a otras formas, quizás no convencionales, que pueden mejorar las habilidades matemáticas de niños y jóvenes contemporáneos. *La educación matemática en el siglo XXI* conlleva el propósito de romper aislamientos y ofrecer una muestra de colaboración internacional entre grupos de investigación iberoamericanos. Un estado del conocimiento de la educación matemática precede a esa ruptura del aislamiento, es decir, hay que conocer las debilidades y esfuerzos de nuestro sistema educativo y las necesidades particulares en el desempeño matemático, antes de elevarnos a compartir con otros sistemas las estrategias o aciertos. Si *La educación matemática en el siglo XXI* muestra un panorama general, un estado del conocimiento, también ofrece un comienzo para proponer y compartir estrategias.

Arribo, entonces, a la posibilidad de proponer y decir que este libro está asociado a otros dos proyectos editoriales, además del número 62 de la revista *Innovación Educativa*. El primero es el libro *¿El arte por el arte?: La influencia de la educación artística* (2014); en especial pienso en el capítulo 3, donde se ofrecen correlaciones entre las habilidades de la educación musical y la mejora en habilidades matemáticas. En los diversos casos que reporta la investigación contenida en *¿El arte por el arte?* se logran establecer las rutas de correlación con el pensamiento creativo y su impacto en la innovación tecnológica y el desarrollo humano; donde el desarrollo no convencional de habilidades matemáticas tiene un impacto relevante, aunque no causal, en todos los casos. El segundo proyecto editorial tiene por objetivo llevar a un público más amplio la primera versión en español de *Critical Maths for Innovative Societies.* Dicho libro explora, con base en la investigación de Mevarech y Kramarski, diversos resultados enfocados a *i)* las pedagogías metacognitivas, *ii)* el impacto que tiene la correlación de elementos cognitivos y emocionales con el aprendizaje de matemáticas y la solución de problemas; *iii)* ahí se refiere a la solución de problemas matemáticos, pero no únicamente donde interviene el pensamiento lógico-deductivo y la memorización, sino problemas que requieren "... habilidades matemáticas que no sólo incluyan la lógica y la deducción, sino también la intuición, el sentido de número y la inferencia. Las sociedades innovadoras requieren de esa creatividad presente en las matemáticas así como en otras áreas" (Mevarech y Kramarski, 2014: 23). *Critical Maths* también se enfoca a *iv)* analizar qué interviene en un estudiante cuando logra resolver lo que los autores llaman problemas complejos, no familiares y no rutinarios: *complex, unfamiliar and non-routine problems* (CUN, por sus siglas en inglés). ¿Acaso podemos considerar esos aspectos no rutinarios, ni familiares, más creativos, intuitivos e imaginativos para mejorar el desempeño en matemáticas de un niño o un joven?

La invitación se abre a un lector dispuesto a indagar posibilidades, una de ellas es repensar las formas en que introducimos a niños y jóvenes de nuestro tiempo en las fascinantes matemáticas, a un entendimiento del mundo que también se relaciona con la imaginación, la creatividad, la abstracción intelectual y lo sublime que Immanuel Kant llamó "sublime matemático" (*Crítica del Juicio*. Libro segundo, Analítica de lo sublime). Sólo pensemos, ¿cuánta imaginación debe tener un joven al resolver un problema matemático?, ¿acaso está en nuestra búsqueda de mejora educativa el pensar sobre ese pensar matemático más creativo, imaginativo y cercano a su origen? Busquemos formas para despertar el asombro por la capacidad creativa que se activa con la matemática y permite la innovación, indaguemos formas para renovar esa fascinación en el entendimiento que originó el pensamiento matemático; para ello ofrecemos desde el Instituto Politécnico Nacional un aporte modesto, pero es un buen comienzo: un grupo de cuatro productos editoriales –proyectados de 2013 a 2016– y uno de ellos es *La educación matemática en el siglo XXI*.

Referencias

Ávila, A. (2013). Sobre pasado, presente y futuro de la investigación en educación matemática en México. En *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México, 2002-2011: Matemáticas, Ciencias Naturales, Lenguaje y Lenguas Extranjeras.* México: ANUIES, COMIE.

Guha, N. (2013). Editorial. *Innovación Educativa*, *62*(12): 7-10.

Hanushek E. y Woessmann L. (2015). *Universal Basic Skills: What Countries Stand to Gain*. París: OCDE. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264234833-en

Kant, I. (1961). *Crítica del Juicio*. Buenos Aires: Editorial Losada.

Mevarech, Z. y B. Kramarski (2014). *Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies*, París: OCDE. Disponible en http://dx.doi.org/10.1787/9789264223561-en

Hawking, S. (2013). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Barcelona: Crítica.

Winner, E., Goldstein, T. y Vincent-Lancrin, S. (2014). ¿El arte por el arte?: La influencia de la educación artística. México, IPN. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264224902-es

Brasil

Educación matemática en Brasil: proyectos y propósitos

Maria Salett Biembengut
Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad
Católica de Río Grande del Sur

Contexto brasileño de la educación matemática: de la estructura y de las orientaciones

La educación brasileña,[1] según determina la Constitución Federal y la Ley de Directrices y Bases de la Educación (LDB), está organizada en dos niveles: educación básica y enseñanza superior. La educación básica se organiza en las siguientes modalidades: educación infantil (niños hasta cinco años), enseñanza fundamental (1º al 9º) y enseñanza media (10º al 12º). La enseñanza superior tiene dos modalidades: graduación y posgrado.

El Consejo Federal de Educación define las materias curriculares tanto para la educación básica cuanto para la graduación; sin embargo, el sector educativo de estados y municipios puede completar esa lista de materias curriculares, diversificadas de acuerdo con las necesidades de la región y las habilidades individuales de los estudiantes. La educación básica es obligatoria, y se caracteriza por formación general sobre conocimientos consolidados de las diversas áreas en sintonía con cuestiones contemporáneas.

En ese periodo de doce años que dura la educación básica, tanto en la enseñanza fundamental como en la media, la estructura curricular se divide en asignaturas y cada una, en general, es responsabilidad de un profesor. En la enseñanza media, por ejemplo, la LDB organiza las asignaturas en cuatro áreas: Lenguajes y códigos (Lengua portuguesa, Educación artística y Otros

[1] Brasil tiene una superficie aproximada de 8.5 millones de km^2 y una población del orden de 200 millones de habitantes, dividida en 26 estados y el Distrito Federal.

idiomas), Ciencias naturales (Física, Química, Biología); Matemáticas y sus tecnologías (Matemática y Tecnología) y Ciencias humanas (Historia, Geografía, Sociología y Filosofía). Eso implica que los profesores de cada gran área se reúnan para preparar las diversas actividades que puedan sustentar mejor el conocimiento y la formación de los jóvenes, quienes en pocos años actuarán profesionalmente. Sin embargo, este no es el caso para la mayoría de escuelas públicas brasileñas.

En esa organización curricular el propósito es desarrollar una enseñanza de los contenidos programáticos de forma interdisciplinar y contextualizada, a fin de que los estudiantes adquieran conocimiento y habilidad en aplicarlos –fuera de los límites escolares– en situaciones que enfrentarán en su vida cotidiana. El objetivo principal de la educación básica es desarrollar las potencialidades de los estudiantes para buscar, seleccionar y analizar información requerida en su desarrollo, y aprender a aplicar los conocimientos para crear o actuar en función del bien común.

En los últimos años de la educación básica, por ejemplo en las directrices curriculares específicas para Ciencias naturales (Biología, Física y Química) o Matemáticas y sus tecnologías, en la LDB se indica que cada profesor debe hacer un planeamiento y desarrollo del currículo en organigrama e integrar y articular los conocimientos de forma interdisciplinar. Además, se estipula que los métodos de enseñanza y de evaluación sean organizados de tal forma que, al final de la educación básica, el estudiante:

a. demuestre dominio de los principios científicos y tecnológicos que presiden la producción moderna;
b. comprendan ciencias, matemática y tecnología como construcciones humanas;
c. entiendan cómo se desarrolla por acumulación, continuidad o ruptura de paradigmas;
d. relacionen el desarrollo científico con la transformación de la sociedad, y
e. sepan identificar variables relevantes y seleccionar los procedimientos para producción, análisis e interpretación de resultados de procesos o experimentos científicos y tecnológicos.

Según Brasil (1996), la finalidad de esa área es el aprendizaje de concepciones científicas sobre el medio físico y natural, el desarrollo de estrategias de trabajo centradas en la solución de problemas, llevar al estudiante a comprender la producción de conocimientos, bienes y servicios. Si consideramos tal afirmación como referencia, ¿cómo se debe capacitar a los estudiantes de la educación básica para que puedan, por ejemplo, entender la relación entre las ciencias y las humanidades?

Para promover conocimiento científico en el estudiante de la educación básica es preciso reorganizar y articular las asignaturas. Eso muestra que la enseñanza de las asignaturas precisa estar entrelazadas para tornar el conocimiento dinámico. Asimismo es necesario que la enseñanza aporte al estudiante herramientas y medios que le faciliten diversos niveles de expresión, tanto lingüísticos como tecnológicos. Sin embargo, ¿cómo proporcionar esta formación requerida y propuesta en la LDB, si la estructura educacional vigente no ha contribuido al respecto?

Esas directrices que orientan la organización curricular no han logrado transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje en la mayoría de escuelas de educación básica. De hecho, la enseñanza permanece fragmentada, con currículo pautado en muchas asignaturas, sin tiempo suficiente para profundizar en sus contenidos; además, la responsabilidad de cada una de esas asignaturas recae sobre un profesor. Ello se debe a la poca disponibilidad de los docentes de asignaturas afines para reunirse y elaborar una propuesta que ofrezca al estudiante una mejor formación académica; aunque también podría mencionarse la formación inicial de los maestros.

A pesar de diversas críticas y de lo señalado en la LDB, en la mayoría de cursos para formación de profesores en Brasil el currículo[2] no sólo permanece dividido en asignaturas y sin establecer vínculos entre ellas; también se integra mediante planos rígidos y metodologías de enseñanza y de evaluación pautadas en una formación tradicional.[3] Excepto por algunas experiencias aisladas, las asignaturas específicas se enseñan al margen de cualquier vínculo con las cuestiones que deberán enfrentar estos futuros profesores en la educación básica; sólo en las asignaturas pedagógicas se presentan a los futuros docentes las tendencias actuales en cuanto a metodologías de enseñanza (Biembengut, 2014). Generalmente, las clases no van más allá de la transposición de contenidos, ejercicios y técnicas, e incluso de exposi-

[2] Se entiende por currículo el conjunto de contenidos y métodos de enseñanza y evaluación. El currículo prescribe las tendencias de la comunidad dirigente de una sociedad, un Estado o un país.

[3] Considera enseñanza tradicional a la forma de enseñanza y la estructura escolar vigente durante décadas.

ción de teoremas, y sus respectivas demostraciones, desprovistas de objetivos significativos.

Muchos maestros de esos cursos se formaron en la "estructura tradicional" de la "teoría a las aplicaciones" dentro de la propia matemática, y sin contar con una preparación suficiente para interpretar, solucionar, analizar y evaluar situaciones-problema; por tanto, en la enseñanza superior –a pesar del compendio de la asignatura– buena parte de ellos reproducen la enseñanza tradicional de la forma en que la recibieron. Ahora bien, incluso si suponemos que sea este el camino, ¿por qué la educación continúa con la misma estructura e idéntica práctica de "enseñanza", a pesar de las propuestas presentadas en documentos oficiales de educación, de las críticas vigentes vinculadas a la formación académica de los egresados de la mayoría de las escuelas, de las exigencias que advienen del mundo de este tercer milenio y, también, de las diversas investigaciones apuntando alternativas?

Para reflexionar sobre algunos aspectos presentes en la educación matemática en Brasil para este siglo XXI, subrayo las palabras de Émile Bréhier (1962: 688) sobre dos proposiciones aceptadas al final del siglo XIX, y que me permiten guiar las reflexiones en este texto:

1) Siempre que las cosas tengan una estructura o forma, ésta se debe a una unidad introducida en la multiplicidad; la unificación del múltiplo es una concepción de la inteligencia; las cosas en sí misma carecen de estructura o poseen una estructura que nos es desconocida.
2) En todo juicio de valor hay una satisfacción (o insatisfacción) de la sensibilidad humana, individual o colectiva, y tal juicio no hace más que expresar una relación entre nosotros o las cosas.

A fin de evitar que la reflexión se torne repetitiva, esta presentación se divide en cuatro partes: Principios de la educación matemática en Brasil; De los primeros impulsos a la educación matemática; Feria de Matemática-Programa de Enseñanza con Investigación en la Escuela, y Propuestas y posibilidades.

Con este acercamiento a Bréhier pretendo apoyar mi reflexión sobre el tema, e incluso anticipar alguna aserción inadecuada. Sin embargo, esta cavilación depende de cómo percibo el presente que llega de un tiempo pretérito, en medio de abundantes declaraciones y entendimientos. Por lo demás, toda percepción implica una carga subjetiva, lo cual aporta un juicio de valor a la interpretación de ese conocimiento. Eso quiere decir que pueden existir otros entendimientos e interpretaciones.

Principios de la educación matemática en Brasil

La educación escolar brasileña tiene sus raíces en el siglo XVI, en el periodo colonial portugués; primero con los jesuitas y después mediante la creación de una Clase de Fortificación a partir del siglo XVIII. Entre 1549 y 1759 los jesuitas dirigieron la enseñanza elemental y, también, un Curso Superior de Artes donde se enseñaba matemática (geometría plana, trigonometría plana y esférica), lógica, física, entre otras de interés para la Iglesia. A su vez, el Curso de Fortificación –ingeniería militar de la época– buscaba preparar a los estudiantes para ejercer las funciones de artilleros y fortificadores. La matemática de entonces, como sucedía en las escuelas europeas, no excedía los aspectos más elementales.

Los programas curriculares de los primeros cursos de ingeniería militar en Brasil estaban basados en programas de escuelas europeas. Debido a la colonización portuguesa, muchas de las obras adoptadas eran de autores franceses. En la enseñanza de la matemática, los libros de monsieur Belidor (Bernard Forest de Belidor), utilizados en los colegios de ingeniería militar de Francia y Portugal, fueron acogidos en las escuelas brasileñas y, más adelante, en las que de ellas se derivaron. Los institutos que usaban las obras de Belidor, por ejemplo el *Nouveau Cours de Mathématiques*, propiciaban una introducción a la ingeniería civil.

Al principio del siglo XIX fue creada la Academia Real Militar, donde se impartía una enseñanza de carácter militar entre 1812 y 1823, cuando decidió aceptar a civiles como estudiantes. Ese curso duraba siete años y su propósito consistía en formar ingenieros para fines militares y de construcción civil, además de formar matemáticos y profesionales de las otras áreas que componían las ciencias físicas y naturales. En los cuatro primeros años establecía una formación matemática de los futuros ingenieros; en consecuencia, el currículo de matemática para los cuatro primeros años del curso se componía de aritmética, álgebra, geometría euclidiana, geometría descriptiva, geometría analítica, trigonometría, trigonometría esférica y cálculo diferencial e integral, entre otros tópicos. Quizá por ello ese currículo de la Academia Real Militar se considera el primer curso de matemática superior en Brasil, aunque esté incorporado a la formación de ingenieros.

Para "garantizar un nivel mínimo de estudios, son especificados, en la carta de ley, los libros y tratados en que deberían basarse los profesores para la redacción obligatoria de los respectivos compendios", Castro (1955: 51). También fueron utilizadas las obras del suizo Leonhard Euler (1707-1783), junto con la de autores franceses como Étienne Bézout (1730-1783), Gaspard Monge (1746-1818), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Pierre Simon Laplace (1749-1827), Gaspard de Prony (1755-1839), Jean Baptiste J. Delambre (1749-1822) y Nicolas Louis de Lacaille (1713-1762), entre otras.

Según las fuentes, en Brasil no había personas suficientemente habilitadas, y tampoco material didáctico ni de laboratorio, para impartir de manera adecuada los contenidos del curso según establecía la legislación. Además, los candidatos a ser admitidos en la Academia, sabían leer mal y dominar las cuatro operaciones matemáticas. Todo eso dificultaba a los estudiantes del Brasil colonial comprender el cálculo infinitesimal y la geometría tal y como lo explicaban los más avanzados libros de la época. Según Pardal (1985: 71): "estudiar las Matemáticas Superiores, las Ciencias Naturales, la Mecánica, en Brasil de aquellos tiempos, era un acto heroico, que iba al estremecimiento de todas las tendencias, que no encontraba cualquier apoyo en la estructura económico-social dominante, que hería los hábitos de una cultura humanístico-literaria muy sedimentada."

Los pocos ingenieros que se formaban en la Academia Real Militar se destinaban a la enseñanza, más que a la función de ingeniero, según Vargas (1989). Muchos cambios tuvieron lugar en la Academia Real Militar hasta 1858, cuando pasó a denominarse Escuela Central, inducido por el poder económico. Ahí la enseñanza era esencialmente de matemáticas, ciencias físicas y naturales y doctrinas de la ingeniería civil. A partir de esta escuela fueron creadas otras de carácter civil, aun cuando mantuvieran los estatutos militares hasta la Proclamación de la República, en 1889.

En ese periodo inicial el programa de estudios incluía un curso general con duración de dos años, cursos especiales de ciencias físicas y naturales, ciencias físicas y matemática; cursos para ingenieros geógrafos (dos años), ingenieros civiles, ingenieros de minas, artes y manufacturas, con duración de tres años. Según Castro (1955: 61), "en el Curso de Ciencias Físicas y Matemática fueron creadas las asignaturas de mecánica celeste y física matemática y de complementos de matemática"; y donde los tópicos incluían series, funciones elípticas, cálculo diferencial integral, cálculo de variaciones, cálculo de probabilidades y matemática financiera. Otras modificaciones fueron establecidas entre 1929 y 1930, con miras a atender las necesidades e intereses vigentes, y conforme aumentaba el número de fábricas e industrias de diversos tipos.

Se considera un hecho que la demanda de nuevos cursos era (y continúa siendo) una consecuencia del propio desarrollo del país. Y a medida que se incrementaba el desarrollo económico de Brasil, los cambios de perspectiva de la sociedad brasileña repercutían, también, en las instituciones de enseñanza superior. Entre las modificaciones en la enseñanza introducidas en las escuelas de ingeniería figura la creación de las facultades de Filosofía, Ciencias y Letras, donde se asumía la enseñanza de asignaturas básicas: en primer lugar, matemática para los cursos de ingeniería, pero también cursos de biología, química, arquitectura y administración, entre otros. La primera Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras fue creada en 1934, en la Universidad de São Paulo (USP), y a partir de ella se crearon otras facultades en las diferentes universidades existentes en ese periodo. Este hecho propició una serie de modificaciones estructurales, pues si por un lado la matemática 'ganó espacio' para desarrollarse aún más en el área de investigación; por otro, durante años convergió la sección entre lo que se enseña *versus* lo que se utiliza.

Al final de la década de 1960 tuvo lugar una reestructuración en la enseñanza superior (reforma universitaria) –cuyos resultados nada satisfactorios se reflejan hasta nuestros días según Stemmer y Ferreira (1995). Entre las modificaciones realizadas al sistema universitario pueden señalarse la periodicidad semestral, el sistema de créditos y cursos de enseñanza superior en horario nocturno, ofrecidos principalmente por instituciones privadas.

Si esa reforma educativa motivó, por un lado, que miles de estudiantes realizaran estudios de enseñanza superior en las más diversas áreas, por otro lado, el programa curricular (contenidos, método y sistema evaluativo) debió ser adaptado toda vez que la mayoría de esos alumnos trabajaba en horario diurno y, muchas veces, se dirigían a la escuela directo del trabajo. Por mejor constancia de que se dispusiese, el tiempo restringido para entender los contenidos afectaba el desempeño de muchos de los estudiantes; en consecuencia, varios profesores se vieron en la necesidad de restringir esos contenidos para dar prioridad a lo que consideraban importante o adecuado.

A lo largo de los años, en esa enseñanza de la matemática por parte de la mayoría de profesores de educación superior se han privilegiado las técnicas y no las aplicaciones, con el consecuente abandono de conceptos e ideas fundamentales implícitos en ellos. En ese método de enseñanza de la matemática la "teoría" se restringe a presentar definiciones, propiedades y, en la secuencia, "reglas" de resolución, pero sin considerar un eslabón lógico entre ellas, con lo cual se ensancha la línea divisoria entre conocimiento teórico y práctico. Es un hecho que la opinión sobre esta forma de considerar la enseñanza de matemática no es unánime, y en particular cuando se trata de diferenciar entre conocer las definiciones y las técnicas y saber lo que esas definiciones representan –y, en consecuencia, permite comprender algo de la ciencia de la naturaleza, o de las ciencias en general.

Esa formación matemática obtenida por quienes se han tornado como profesores contribuyó, y aún coadyuva, a la necesidad de tener libros de texto para enseñar, reproduciendo muchas veces los mismos ejercicios y aplicaciones matemáticas –quién no recuerda las definiciones clásicas de algunos de esos libros– con la "intención" de ilustrar y/o hacer sentido para los estudiantes. No se objetan las obras, el formalismo de los libros o los ejemplos propuestos por los autores –muchos de la década de 1960–, sino su falta de relación concreta con el curso al que asisten los estudiantes de ingeniería, biología, arquitectura, formación de profesor de matemática, etc. Esto último, sin duda, ha ayudado a que muchos estudiantes y profesores continúen sin saber matemática.

Las consecuencias de esta estructura, la cual se deriva de otras que tienen su nacimiento en la época en que solían adoptarse libros de la Academia francesa del siglo XIX, pueden apreciarse en los resultados de la mayoría de estudiantes hasta nuestros días que no saben aplicar la teoría matemática en sus actividades profesionales. La ignoran y, más aún, ni siquiera la reconocen. Sin identificar cómo esta teoría mantiene los datos procedentes de un proceso práctico, cuando ese estudiante deba actuar profesionalmente tendrá que "empezar a aprender", y entonces surge un concepto como el de *retrabajo*, tan objetado en décadas recientes.

La enseñanza de matemática circunscrita a la forma abstracta, sin relación con conceptos fundamentales de la ciencia física, contribuye a que ese estudiante (y futuro profesional) no la conciba en sus futuras prácticas, sobre todo cuando requiera de ella. Precisamente esa dificultad que enfrenta la mayoría de estudiantes –desde los primeros años de educación básica hasta el final de la enseñanza superior– para aprender matemática, llevó a un grupo de profesores brasileños a cuestionar la forma de enseñanza practicada en las primeras décadas del siglo XX y, así, a proponer otras formas de generar el aprendizaje. Esos profesores hicieron posible que la educación matemática se transformara en un área de investigación en el ámbito de la educación brasileña.

Los primeros impulsos a la educación matemática

La formación de profesores de matemática para la educación básica –a la enseñanza fundamental y media asisten estudiantes de 11 a 17 años–, y de investigadores en las áreas de ciencias, literatura y arte tuvo su inicio en Brasil en la década de 1930, mediante la creación de las facultades de filosofía, ciencias y letras. Hasta ese periodo, la enseñanza de matemática era responsabilidad de ingenieros o de militares inscritos en los cursos de ingeniería.

Sin afán de menospreciar la actuación de esos profesores, ya en esa época había cierto desagrado por parte de estudiantes y docentes sobre *qué*, *cómo* y *por qué* estudiar matemática. Ello motivó la emergencia de una nueva generación de precursores de la educación matemática en Brasil, entre ellos Júlio César de Mello y Souza (*Malba Tahan*) y Euclides Roxo. Las obras de ambos autores contribuyeron a la formación de nuevas generaciones de educadores matemáticos, en especial a partir de la década de 1950.

De ese grupo de precursores me gustaría destacar a tres personas especiales para mí: Martha de Souza Dantas, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes y Ubiratan D'Ambrósio, pues realizaron una actividad incansable para el fortalecimiento de la educación matemática en Brasil. Entre los abundantes hechos y publicaciones destacan diversas actividades que estimularon la realización de eventos, como la formación de grupos de estudio e investigación, la creación de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática. En ese sentido, Martha de Souza Dantas de Salvador (BA) tuvo la iniciativa de realizar el Primer Congreso de Profesores de Matemática en 1955; Maria Laura de Río de Janeiro fue responsable de haber formado el Grupo de Estudio e Investigación, el cual tenía como referencia la realidad concreta de Brasil; mientras Ubiratan D'Ambrosio representó varias veces a Brasil en comités y programas internacionales, para lo cual llevó y trajo abundantes ideas.

No obstante, ese pequeño grupo de precursores se mostraron convencidos de que la enseñanza de matemática precisaba una revisión desde sus fundamentos; por tanto, además de participar activamente en eventos nacionales e internacionales, a partir de la década de 1960 proyectaron la formación de los primeros grupos de estudio e investigación en educación matemática. Resulta innegable que esos grupos estimularon la configuración de muchos otros núcleos similares en las más diversas regiones del país, con lo que pudo fortalecerse el movimiento por la educación matemática, mismo que se consolida a partir de la década de 1980, en especial mediante la creación de programas de posgrado en educación matemática; la fundación de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática (SBEM) en 1988, y el apoyo del gobierno federal para diversos proyectos.

Entre ellos destaca el Grupo de Estudios y Perfeccionamiento Docente Multidisciplinar (Gead), formado en 1983 y coordinado por los profesores Valdir Floriani y Vilmar Zermiani, integrado por profesores de matemática, ciencias económicas, educación y ciencias naturales (física, química y biología) de la Universidade Regional de Blumenau, y de algunas instituciones de enseñanza del estado de Santa Catarina. Es un grupo interdisciplinario volcado a la investigación, a la extensión y a la prestación de servicios en el área de la enseñanza de matemática y ciencias, o áreas afines.

En ese mismo año los profesores Floriani y Zermiani crearon además el Laboratorio de Matemática (LMF), a fin de emprender diversas acciones, proyectos relacionados con una mejor enseñanza de la matemática por medio de actividades extracurriculares. Entre las acciones del LMF destacan: *a)* Club de Matemática, activo entre 1988 y 1995; *b)* Informática educativa-Proyecto Logo, activo entre 1981 y 2002; *c)* Informática educativa para personas portadoras de necesidades especiales, que funcionó de 1996 a 2002, y *d)* Programa de la Feria de Matemática, el cual se mantiene activo desde 1985. En los tres primeros proyectos fueron atendidos miles de estudiantes de educación básica, además de que se realizaron materiales de apoyo didáctico para profesores. Tales actividades han sido llevadas y compartidas con la comunidad educacional y social por medio del Programa de la Feria de Matemática. Debido a la dimensión alcanzada, durante las últimas tres décadas ha sobresalido la Feria de Matemática-Programa de Enseñanza con Investigación en la Escuela.

La influencia de los estudios e investigación en educación matemática, las acciones emprendidas por parte de los grupos de investigación para la transformación de prácticas en la sala de aula, demandan tiempo. Una generación es lo mínimo que se puede esperar para que algunos cambios sean visibles, sobre todo en un país con la dimensión territorial de Brasil, donde además existen variaciones culturales, sociales y económicas, que si las tenemos en cuenta, puede señalarse la relevancia alcanzada en determinadas áreas de investigación, entre ellas etnomatemática, modelación matemática, tecnologías de información y comunicación.

La importancia en la implantación de esas líneas de trabajo en las prácticas de sala de aula ha aumentado, en buena parte debido a las Directrices Curriculares Nacionales (DCN). Se trata de estructuras compuestas de una serie de elementos basados en los resultados de esas investigaciones: cursos de formación de profesores (inicial y posgrado) que constaron en las materias curriculares de educación matemática; la celebración periódica del Congreso de Educación Matemática en los ámbitos regional, estatal, nacional e internacional; elaboración de libros didácticos con la perspectiva y orientación establecidas por la investigación. Si bien todavía estamos lejos de un ideal de educación matemática, la forma en que este movimiento gana fuerza es mediante la reflexión y la (re)estructuración de los cursos de formación de profesores y los apoyos gubernamentales, lo cual permite pensar que algunos cambios esenciales podrían empezar a notarse en la presente década.

Feria de Matemática-Programa de Enseñanza con Investigación en la Escuela

Los profesores Floriani y Zermiani idearon la Feria de Matemática como una derivación de la Feria de Ciencias, en tanto ésta es una *muestra* de proyectos de investigaciones desarrollados por estudiantes. Y como tales tienen su origen durante los primeros años del siglo XX, impulsadas por un grupo de profesores estadounidenses. En ese sentido, la *muestra* permitiría que los estudiantes que desarrollaron algún proyecto expusieron sus ideas; sin embargo, el objetivo principal consistía en incentivar a otros alumnos a querer tener proyectos de manera constante, y a seguir en ese camino. En Brasil, la I Feria Nacional de Ciencias tiene lugar a finales de la década de 1960, en la ciudad de Río de Janeiro (RJ), en la que fueron presentadas cerca de 1 500 producciones y asistieron alrededor de 4 000 estudiantes de todo el país. Esta reacción inicial estimula la realización de otras, e incluso de actividades similares, como la creación de clubes y olimpíadas de ciencias y de matemática en la mayoría de escuelas, ciudades y estados brasileños.

A partir de la idea de Feria de Ciencia, los profesores Floriani y Zermiani propusieron crear la Feria de Matemática en 1984. Con ello se trataba de crear un programa para incentivar el estudio y la investigación realizadas por estudiantes de educación básica (infantil, fundamental, media), educación especial y enseñanza superior, con la orientación de sus profesores y en los espacios y periodos escolares; pero también se pretendía difundir esos mismos estudios e investigaciones en la comunidad mediante una exposición o muestra. Tal proceso de difusión buscaba en realidad la socialización, en tanto se trataba de expresar los conocimientos y propuestas del alumnado en un lugar público y con fecha determinada de antemano, con el fin de exponer, transmitir y ceder a otros estudiantes –y a la comunidad– la esencia y el resultado de un aprendizaje fecundo.

El objetivo principal de esa feria consiste en desarrollar el potencial inherente de los estudiantes en la escuela, de tal modo que puedan perfeccionar sus conocimientos de manera continua, y que ese conocimiento les asegure una independencia personal, su propia existencia en el transcurrir de la vida. Aquí la escuela es entendida como espacio y estructura física, periodo lectivo, programa curricular y normas y reglas oficiales. Se trata de un programa educativo de carácter científico-cultural, que alía vivencias y experiencias, y cuyo resultado del estudio y/o investigación culmina en una muestra pública de estudiantes y profesores-orientadores; todo lo cual debe conjuntar integrantes de instituciones educativas públicas y privadas de relevancia para la comunidad interesada.

La importancia científica de este programa impacta cuando el estudiante decide convertirse en investigador, para lo cual participa en todas las etapas del estudio/investigación (elección del tema, objetivo, formulación del problema, procedimientos, cronograma, ejecución y análisis de los resultados) con el apoyo del profesor. Cada docente orientador busca envolverlos en el aprendizaje y en la investigación e instigar el espíritu científico. Así, los gestores –responsables por la organización y realización de las ferias del proceso al resultado– precisan tener el foco en la continuidad, en la promoción del conocimiento en beneficio de la sociedad.

El Programa de la Feria de Matemática culmina en un proceso iniciado a partir del interés de grupos de estudiantes, apoyados por sus respectivos profesores, en realizar investigaciones sobre algunos temas/asuntos en los espacios y períodos escolares; y cuyos resultados son presentados durante dos días en la exposición de la Feria de Matemática. Sin embargo, debe también mencionarse la adhesión de los familiares, el compromiso de la comunidad educativa y el apoyo de diversas instituciones de los gobiernos municipal, estatal y federal.

Este proceso tiene lugar en cada Escuela (pública y privada), y ocurre de la siguiente forma:

1) Los profesores, interesados en desarrollar sus prácticas pedagógicas con ese foco en el estudio/investigación, proponen temas de trabajo que puedan llevar a los estudiantes a interesarse y a comprometerse.
2) Los estudiantes, motivados en aprender, hacen saber los datos relativos al tema elegido; estudian los tópicos matemáticos, buscan comprender y formular los datos, y analizar la validez de los resultados; éstos se expresan por escrito y de manera oral en la exposición de la feria.
3) Los dirigentes se comprometen a otorgar apoyos a los profesores, y buscar la adhesión de los familiares.
4) Los dirigentes apoyan además la organización de la Feria de Matemática Escolar de manera que sea factible presentar los resultados de esos estudios o investigación.
5) La comunidad escolar (padres, profesores y gestores) se compromete a llevar a los grupos de estudiantes, cuyos estudios/investigación fueron elegidos, como elementos de relevancia en la respectiva Feria de Matemática.

Los estudios o investigaciones de los estudiantes son organizados en *modalidades* y *categorías*. La modalidad es un aspecto particular en que el estudio y/o investigación de los alumnos se divide en matemática aplicada y/o interrelación con otras asignaturas; materiales y/o juegos didácticos, y matemática pura. La categoría se fija en función del periodo escolar del estudiante: educación infantil (3 a 6 años), años iniciales de la enseñanza fundamental (6 a 10 años), años finales de la enseñanza fundamental (11 a 14 años), enseñanza media (15 a 17 años), educación especial (estudiantes en instituciones de educación especial) y enseñanza superior. En la exposición de la feria también pueden presentarse investigaciones realizadas por profesores y miembros de la comunidad interesada.

Los profesores y gestores relacionados con el Programa de la Feria de Matemática acompañan el proceso durante todo el año lectivo; de ese modo se evidencia el procedimiento pedagógico inferido en el programa de matemática de cada escuela, y se define la categoría y la modalidad en que la producción académica –el estudio y/o la investigación– pueda ser inscrita en la muestra de la Feria de Matemática.

En cada una de las escuelas se realiza una primera muestra o exposición; sin embargo, algunos de esos estudios o investigaciones, los más destacados de esta primera etapa, luego de un proceso de selección son llevados a otra muestra de la misma zona escolar. Los estudios relevantes siguen participando en las ferias y remontando las muestras en el ámbito escolar, municipal, regional, estatal y nacional. Esto es, cada una de las ferias alcanza su cumbre durante la exposición, cuando los grupos de estudiantes y sus profesores-orientadores exponen las producciones propias (estudios o investigaciones) a la comunidad. En una muestra estatal, por ejemplo, esos grupos pasaron por las respectivas ferias Escolares, municipales y regionales.

La feria de cada escuela conduce a una red de ferias de matemática: de la escuela, del municipio, de la región, del estado y la nacional. Esta red se compone de un conjunto de relaciones y comparte estudios o investigaciones entre estudiantes, profesores-orientadores, gestores de instituciones educativas, y envuelve una secuencia de acciones entrelazadas, dotada de procedimientos y estructura pre-definida. La esencia de la red de ferias de matemática se encuentra en el entrelazamiento de las ideas, de los resultados derivados de los estudios y experiencias de las clases regulares en el espacio escolar y, especialmente, de la comunión entre todos los involucrados, lo cual favorece, en particular, la educación matemática, y la educación en general.

Cabe resaltar que la Feria de Matemática no restringe la muestra al público, a la comunidad. En ese mismo sentido, esas muestras de las producciones (estudio o investigaciones) de los estudiantes no se encuentran alejadas de las actividades escolares, como algo preparado sólo para la exposición en la feria. Como programa de enseñanza con investigación, cada fase del proceso, tanto el desarrollo de estudios/investigaciones como el resultado y la muestra en la Feria de Matemática (en los diversos ámbitos) pasa por un sistema organizacional.

Durante la muestra en la Feria de Matemática, el intercambio estimula a grupos de estudiantes, profesores y comunidad escolar a seguir en ese proceso y, especialmente, contribuye para que sus pares transiten por esa misma vía de investigación. En ese espacio, a partir del área de matemática, se fortalece el valor de la educación, en particular de la importancia atribuida a la producción de conocimientos y, en consecuencia, de productos, técnicas y tecnologías.

En la organización en cada una de las etapas la cooperación de todos los involucrados es fundamental. En este proceso cooperativo algunos atributos son obligatorios: conocimiento, censos crítico y creativo, autonomía, socialización, interacción e integración. Se requiere el compromiso de cada uno por los demás, y de los demás para cada una de las personas involucradas: estudiante, profesor, dirigente, familiar. El principio general de la Feria de Matemática implica los tres sentidos de inicio, fundamento y conducta, toda vez que va más allá de los límites del ámbito académico al motivar y comprometer a los participantes –en especial a estudiantes y profesores– conocer más sobre su entorno, valorar las acciones de los involucrados e instigar a la comunidad escolar a fortalecer la educación.

Ente 1985 y 2014, mediante el Programa Red de Ferias de Matemática se promovieron alrededor de 400 muestras de Feria de Matemática, ya fuesen municipales, regionales, estatales o nacionales. Participaron de manera directa cerca de 35 000 estudiantes y profesores de educación básica, educación especial y enseñanza superior en la exposición de las producciones (estudios o investigaciones); además cerca de 200 000 personas de la comunidad visitaron las exposiciones de las ferias. Se destaca que el programa organizó, incluso, ferias de matemática especiales en cuatro congresos de educación matemática, realizados a escala nacional e internacional.

De los miles de estudios/investigaciones presentados en las ferias, parte importante se encuentra en la categoría de matemática aplicada *y*/o interrelación con otras asignaturas. Desde el inicio de la década de 1990 un porcentaje significativo de estudiantes investigadores busca utilizar el modelaje matemático. En un estudio realizado por Biembengut y Zermiani (2011) fueron identificados cerca de 500 estudios o investigaciones de modelaje en las últimas cinco muestras de las ferias estatales. Dado que en estas ferias las producciones representan alrededor de 10% de las realizadas a nivel escolar y regional, se puede suponer que son cerca de 5 000 muestras sólo en modelaje matemático. La calidad y la creatividad de los estudios o investigaciones a escala estatal expresan el desarrollo de los estudiantes y de los profesores.

Este Programa de la Feria de Matemática, que emergió a modo de tentativa para instigar una mejoría en el proceso enseñanza y aprendizaje de matemática, durante las pasadas tres décadas se transformó en uno de los marcos de la educación matemática del estado de Santa Catarina, con el objetivo de fortalecer los procesos educativos estatales. El reconocimiento y la consolidación del programa se deben, sin duda, a quienes colaboraron en todas las fases del proceso, y en particular a aquéllos que presentaron sugerencias o añadieron elementos para mejorar los procedimientos académicos.

Durante ese lapso de 30 años de actividades en las muestras de cada una de las ferias se ha logrado identificar a estudiantes con capacidad de expresar su conocimiento en el área de matemática en función de su nivel de escolarización. Y si bien no se ha podido establecer un seguimiento para saber cómo fueron los años subsecuentes de esos miles de estudiantes, de diversos grados escolares, que han participado en alguna de esas ferias, creemos que los gestores y profesores afiliados a ese programa han sembrado conocimiento en los límites de la estructura educativa.

A lo largo de esas tres décadas el Programa de la Feria de Matemática ha llevado a profesores, estudiantes, futuros profesores y gestores a plantear diversas cuestiones: ¿para qué?, ¿cuál es la finalidad?, ¿cuáles son las características de las producciones?, ¿cómo organizar una feria de matemática? Preguntas como estas han contribuido a establecer formas, caminos y directrices que, a su vez, implican nuevas cuestiones, puntualizaciones, críticas y propuestas, todo lo cual aporta un matiz peculiar a este movimiento por las ferias de matemática.

Como parte del actual Programa de la Feria de Matemática cabe destacar la realización de cursos, seminarios a nivel nacional y textos de carácter didáctico y científico. Se trata de un movimiento en el más amplio sentido de la palabra, pues ha generado un cambio en la concepción de la enseñanza, la matemática y la ciencia; un impulso de los participantes (profesores, estudiantes) para conocer y motivar a otros a aprender, y la evolución que se deriva de tal proceso.

Propuestas y posibilidades

El Programa de la Feria de Matemática ha sido uno de los más destacados en el área de la educación matemática en Brasil durante las pasadas tres décadas, y su potencial permite vislumbrar la educación en los próximos decenios de este siglo XXI. Los años ochenta marcaron la consolidación de un movimiento por la educación matemática en diversos países, proceso que se venía delineando desde principios del siglo pasado. En Brasil, la década de

1980 instigó la formación de grupos de estudios e investigación en distintas universidades del país, habida cuenta de las fuertes críticas planteadas en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde el nivel de educación básica.

Entonces se trataba de impulsar una educación para todos, y se consideraba que el aprendizaje de la matemática resultaría esencial para mejorar el currículum de las ciencias. Sin duda, estas ideas contribuyeron para que los profesores de todo el país dispusieran del impulso para realizar proyectos, entre otras propuestas educativas con lineamentos propios. Así, por ejemplo, el Programa de la Feria de Matemática tenía (y sigue teniendo) como finalidad principal promover enseñanza con investigación en los límites y en los tiempos escolares, y cuyas producciones resultantes pudieran ser presentadas en la muestra de la Feria de Matemática.

Ahora bien, por más que este programa se ponga de manifiesto en documentos oficiales, y sea defendido por investigadores en todo el país, en el estado de Santa Catarina ese propósito –enseñanza de matemática con investigación, realizada en los límites escolares– sólo ha podido realizarse con una parte mínima de los estudiantes de esa entidad federal. Incluso en nuestros días, practicar enseñanza con investigación en los límites escolares tiene poco sentido debido a la estructura educativa vigente, en la cual aún se manejan conocimientos oficialmente establecidos y divididos en asignaturas, y cada una es responsabilidad de un profesor; aún más: cada profesor obtuvo del mismo modo su formación en esta estructura estratificada.

Ese entendimiento impulsa a reflexionar sobre la siguiente cuestión: ¿por qué la educación brasileña continúa con el mismo sistema y la misma práctica de enseñanza a pesar de las propuestas avaladas en documentos oficiales, de las críticas vigentes, de las exigencias educativas que advienen del mundo en este tercer milenio?

Con base en la primera propuesta de Bréhier (1962), podría conjeturar que la *estructura* (constitución, organización) de la enseñanza de la matemática en Brasil, incluso en nuestros días, es consecuencia de concepciones de enseñanza (unidades) introducidas en la multiplicidad de ideas, valores, conocimientos generales y específicos de los profesores y gestores de los cursos de formación para maestros.

Las consecuencias de esta estructura se expresan en los resultados de la mayoría de estudiantes brasileños; esos resultados –bajo desempeño en las evaluaciones educativas (nacionales e internacionales) y en el campo profesional– indican que los estudiantes expresan un saber, pero no comprenden que cada teoría sigue leyes propias de esta realidad y, en consecuencia, tampoco entienden tal realidad sobre un adecuado lenguaje de matemática.

En el espacio escolar la experiencia fortuita del vivir se sistematiza tan sólo para adquirir conocimientos elementales, y preparar al alumno en función de la actuación profesional y social requerida. Y la adquisición de ese saber requiere espacio, tiempo y personal preparado para constituirse en un hecho de la educación formal; por lo demás, el conocimiento aumenta de manera constante, y lo que se puede enseñar en la escuela es ínfimo frente a lo que existe. Es en esos términos que pueden retomarse las cuestiones subrayadas al inicio: *a)* ¿cómo capacitar a los estudiantes de educación básica para que puedan, por ejemplo, conocer la relación entre las ciencias y las humanidades? *b)* ¿cómo proporcionar esta formación requerida, y propuesta en la LDB, si la estructura educacional vigente no ha contribuido para este objetivo?

Un posible camino sería mediante proyectos de programas de enseñanza e investigación que permitan a los profesores (de educación básica y de enseñanza superior) aprender para enseñar, de manera cotidiana y en sintonía con los cambios gestados en el sector educativo. En ese sentido, el Programa de la Feria de Matemática, por ejemplo, se revela con vivencia y, al mismo tiempo, ha logrado establecer nuevos objetivos, generar saberes sin limitarse a los contenidos de la asignatura y, en concreto, ha contribuido a la formación académica de una gran cantidad de estudiantes que asistieron a tomar ciencia en las muestras de las ferias (Biembengut y Zermiani, 2014). En consecuencia, la Feria de Matemática no sólo promueve conocimientos, combinando y (re)combinando experiencias, también constituye un camino para quienes buscan participar y/o tienen interés por conocer, ver y entender.

El valor de este y otros programas en el área de educación Matemática se encuentra no sólo en la posibilidad de contribuir en la formación académica de los estudiantes brasileños en los límites de la asignatura de matemática, sino además en servir como orientación para otras materias escolares de educación básica y de enseñanza superior. Lo anterior se consigue una vez que cada estudiante involucrado descubre, por medio de esta enseñanza con investigación, en *qué* quiere ser mejor y así, tener más conocimiento para llegar al punto que pretende. Y aun cuando esta investigación, realizada en los límites escolares sea una sola experiencia para el alumno, al menos puede valer como punto de partida y propiciar una especie de revelación sobre lo que espera conseguir.

Sabemos que se aprende en el hacer, y que la investigación académica contribuye para este 'aprender a hacer' y 'hacer para aprender'; es decir, se establece una cierta simbiosis e interacción continua entre las personas y el medio. Al final de la interacción, esencia del vivir, adquirimos, deducimos y diseminamos conocimientos. Con base en todo lo que se ha vivido, las experiencias y las observaciones realizadas pueden ser transformadas en un bien.

Por tanto, si esperamos mejorar los procesos de la educación vital por medio de la educación formal, aunque lleve mucho tiempo, resulta imprescindible motivar a los profesores, no sólo de matemática, a querer emprender proyectos que en verdad puedan generar conocimientos en los límites de las asignaturas; sobre todo que guíen a los estudiantes –tanto de educación infantil como de enseñanza superior– para descubrir algo que los impulse a saber más. Se trata de crear contextos que les permitan ver nuevas realidades ya presentes, pero que no se expresan por medio de la enseñanza irreflexiva y las trabas lineales del programa curricular. En otras palabras, saber originar conocimientos nuevos sobre cuestiones diversas que permitan ver otras realidades, quizá incapaces de ganar visibilidad significativa para mejorar los saberes en la forma de enseñanza que se mantiene vigente en la educación formal no sólo de Brasil.

Como dice Bréhier (1962), el presente aclara el pasado porque se perciben las consecuencias actuales de una época anterior. De acuerdo con la segunda proposición de Bréhier, ya citada, las consideraciones que expongo en este ensayo implican un *juicio de valor*: satisfacción en relación con los programas de extensión e investigación que buscan contribuir con la educación matemática en Brasil; e *insatisfacción* en cuanto a la enseñanza vigente en todos los niveles de la educación formal, a pesar de las críticas y documentos oficiales. Seguramente habrá otras interpretaciones realizadas por otros investigadores y de acuerdo con otro momento de la educación matemática: de la unidad introducida en la multiplicidad.

Referencias

Biembengut, M. S. (2014). *Modelagem no ensino*. Blumenau: Edifurb.

Biembengut, M. S. y Zermiani, V. J. (2014). *Feiras de Matemática: história das ideias e ideias da História*. Blumenau: Nova Letra Editora.

Brasil (1996), Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. LDB (Lei nº. 9.394).

Bréhier, E. (1962). *Historia de la filosofía.* Buenos Aires: Sudamericana.

Castro, F. M. O. (1955). *A matemática no Brasil.* São Paulo: Melhoramentos.

Pardal, P. (1985). *Brasil 1792. Inicio do ensino da engenharia civil e da Escola de Engenharia da UFRI,* Río de Janeiro: Fundação Emilio Odebrecht.

Stemmer, H. A. y Ferreira, R. S. (1985). *Engenharia civil 25 anos*. Florianópolis: Editora dos Autores.

Teles, P. C. S. (1993). *História da engenharia no Brasil*. Río de Janeiro: Clavero Editora.

Vargas, M. (1989). Os cem anos da Politécnica de São Paulo. En *Contribuições para a História da Engenharia no Brasil. Comemorativo do centenário da Escola Politécnica de São Paulo* (pp. 308-320). São Paulo: EDUSP.

Chile

Una visión acerca de la educación matemática en Chile: cómo caracterizar su presente, los principales hitos del proceso de llegar allí y cómo pensar el futuro

Fidel Oteiza Morra

Introducción

¿Cómo caracterizar la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en Chile? ¿Es posible, en pocas palabras, describir lo que a juicio de este autor, son los principales hitos, condiciones y fenómenos que podrían explicar ese presente? ¿Qué nos enseña esta búsqueda? La respuesta no es historia y sólo representa la visión de quien escribe. La respuesta es, por tanto, parcial y está signada por la experiencia de un educador que ha tenido la oportunidad de ser observador y actor en varios decenios del proceso que describe e interpreta. La respuesta es una oportunidad para explicitar los lentes con que se mira la educación y la educación matemática en Chile en un lapso de cerca de cincuenta años de experiencia. También, es la oportunidad de reflexionar y ofrecer a otros la posibilidad de explicitar su propia mirada. Eugene Meehan (1981), en su particular forma de hacer filosofía, dice "estamos en la realidad como el botero que rema de espalda al lugar al que se dirige y usa los signos y datos de lo que deja atrás para anticipar lo que viene", y agrega: "estamos en el presente, el futuro es opaco, sólo lo podemos anticipar usando los signos del pasado a la luz del presente [...] el pasado no existe sino en lo que queda de sus efectos y, todo lo que nos importa está en el futuro". ¿Qué nos enseña el camino recorrido, las expectativas cumplidas y las que no se dieron en realidad, los aciertos y los errores? Reflexionar, exponer nuestras visiones y compartirlas es una contribución de los actores de hoy a un futuro más rico en posibilidades para los niños, niñas y jóvenes que se inician en la aventura de aprender y de hacer matemática.

Luego de un breve esbozo de algunos de los descriptores más visibles del presente de la educación matemática en Chile, se hace una reseña de los hitos, situaciones, decisiones e intervenciones que, a juicio del autor, explican o hacen comprensible aspectos centrales de esa imagen de presente. En la medida que consideró pertinente, se mencionan experiencias específicas o bien puntos de vista personales, para dar las coordenadas desde las que se afirma o interpreta. Finalizar con una reflexión acerca de los principales desafíos que enfrenta hoy la educación y la educación matemática en el país.

Una mirada sin perspectiva

Es muy difícil hacer una interpretación del presente, tanto de lo que es como de cuál puede ser su impacto. Los hechos recientes, lo que está fresco en los titulares del periódico y se debate en los medios, se ven sin perspectiva. Pero estamos con los remos en la mano –nuevamente Eugene Meehan– y nuestras decisiones dependen de esas interpretaciones.

El país vive un momento de grandes expectativas de cambio en la educación. El debate es permanente y acalorado. Se propone una transformación en el formato mismo de la institucionalidad escolar que afecta a 90% de la población escolar. ¿Cómo se financia y quién administra los recursos que el Estado destina a la educación? Se trata de una pregunta que atañe el plano regulador de todo el sistema educativo. La cuestión no ha dejado indiferente a nadie.

Los jóvenes salieron a la calle y movilizaron al país hace ocho años con la consigna de "Educación gratuita y de calidad para todos". Se le llamó la "Revolución de los Pingüinos". En la agenda de hoy ese tema ha opacado todo otro aspecto de la reforma educativa que lleva algo más de veinte años de haberse puesto en marcha.

Algunos rasgos de la situación actual pueden ser los siguientes: el país tiene un sistema educativo de 1° a 12° grado, el cual incorpora a la gran mayoría de los niños, niñas y jóvenes en cada nivel de estudios. Muy cercano a cien por ciento en los primeros niveles y sobre 85% en los niveles terminales. La educación de tercer nivel ha crecido hasta llegar a un acceso cercano a 50% de cada cohorte educacional. La educación es obligatoria de 1° al 12° grado, lo que exige al Estado a proveerla, y a los padres a ponerla en práctica con sus hijos. La infraestructura escolar se ha renovado en una proporción bastante alta; en estos veinte años, los establecimientos educacionales han visto aumentar los recursos educativos, las bibliotecas y centros de recursos –y de manera especialmente cuidadosa a partir de la década de 1990 han sido dotados con herramientas digitales y conectividad a internet–; se ha generado una cantidad considerable de proyectos educativos focalizados en sectores pobres, niños con necesidades especiales, formación inicial y en servicio de docentes, capacitación en uso de los servicios digitales (Enlaces),[1] textos escolares, bibliotecas escolares, pasantías para docentes en diferentes centros de formación de varios países, entre otros proyectos diseñados y desarrollados por el Estado a través del Ministerio de Educación. Paralelamente, se generalizó la aplicación de un sistema de evaluación de los aprendizajes con cobertura nacional –el Simce[2]–, con pruebas en varios niveles del sistema y cuyos resultados han sido la base principal para conocer los logros del sistema en su conjunto, ya sea en las diferentes regiones o en los propios establecimientos. Desde finales de la década de 1990 se inició el desarrollo y la aplicación de estándares, primero en el nivel de aprendizaje y luego en el de formación inicial de docentes. El currículo nacional ha sido definido y redefinido en varias oportunidades, encontrándose en proceso una nueva revisión que ha significado cambios importantes.

Han sido más de veinte años de reforma sostenida, adoptada como "política de Estado"; la inversión en pensamiento, acciones y recursos fue enorme, y los efectos se notan en todas las partes del sistema educativo: infraestructura, currículo y recursos humanos.

Una de las respuestas a la "Revolución de los Pingüinos" fue la nueva Ley Orgánica Constitucional que comenzó a operar en los pasados cuatro años. De allí se desprende una nueva estructura para el currículo nacional, pues de ocho años de educación elemental y cuatro de educación secundaria pasa a una organización 6-4-2: seis años de educación elemental y seis de secundaria, dividida a su vez en cuatro años comunes y dos diferenciados. La estructura del Ministerio de Educación cambió, y en nuestros días se organizan dos nuevas agencias, la de aseguramiento de la calidad y la de supervisión.

Así pues, hoy el país experimenta, y es parte de, una profunda revisión de la estructura administrativa y técnica de la educación chilena. Muchos de

[1] Se denomina Enlaces al programa nacional que ha acompañado al sistema educativo, las escuelas y los docentes en la incorporación de las tecnologías de la información.

[2] El Sistema Nacional de Evaluación de Resultados de Aprendizaje fue fundado en 1988 con el objetivo de proveer de información relevante para su quehacer a los distintos actores del sistema educativo. Su principal propósito consiste en contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación.

los temas y problemas que han sido centrales en los anteriores procesos de reforma –el currículo, los recursos de aprendizaje, la formación inicial docente, hasta la infraestructura física– están en segundo lugar, en compás de espera frente a la envergadura de la revisión en curso.

En síntesis, una sociedad inquieta por la calidad de la educación, un Estado decidido a generar una nueva institucionalidad con el objeto de atacar la incapacidad del modelo actual para reducir la brecha entre los que tienen y los que no. El indicador más poderoso de esa falencia es el nivel de estratificación de los resultados obtenidos por establecimientos públicos y privados. Esta inquietud generalizada ha originado debates cuyo apasionamiento indica el nivel de compromiso de los actores con la educación. En la base de ese movimiento de reforma radica la existencia un sistema educativo que lenta pero consistentemente ha contribuido a elevar los niveles de escolaridad nacionales. En efecto, la inmensa mayoría de los adultos en el país admite que tiene más años de escuela, que sus padres, y que sus hijos tendrán más y mejor educación que ellos. Otro indicador importante es el incremento en el acceso al nivel terciario, y esto hace que muchos de los alumnos de las universidades e institutos profesionales sean primera generación en ese nivel.

¿Qué se puede observar en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática?
En la matemática escolar, las acciones mencionadas y las políticas que las inspiraron no sólo permitieron cambios profundos en el currículo nacional, además han tenido algún impacto en los programas de formación inicial docente, en los textos y otros recursos de aprendizaje; sin embargo, aunque poco cambió en la forma en que se organiza y se realiza la clase de matemática, se perciben algunos resultados positivos en las pruebas nacionales, y en Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) entre las pruebas internacionales.

En Chile, el currículo de matemática se acerca progresivamente a los estándares internacionales hoy observables. Ha experimentado influencias significativas de las prácticas de varios países y en particular de Australia, mediante un modelo para la formulación de estándares de aprendizaje conocido como los "mapas de progreso".[3] Estos mapas fueron objeto de una asistencia

[3] Los mapas de progreso son instrumentos para caracterizar los aprendizajes esperados por nivel de estudio, incluyendo las rúbricas para evaluar si un estudiante, en un nivel dado, está en el nivel, lo sobrepasa o tiene retraso. Fueron desarrollados para los cuatro ejes del currículo nacional: números, álgebra, geometría y probabilidad y estadística.

técnica específica contratada por el Ministerio de Educación. Otra influencia observable fue la de Japón, relativa a métodos de planificación en el nivel de la clase de matemática; la de Singapur se ha manifestado en varias formas, de manera particular en los textos de estudio y su puesta en acción en la sala de matemática. Además, los currículos de varios países, así como el llamado "núcleo común" (*common core*) de la experiencia en Estados Unidos, han sido objeto de análisis y han servido de orientaciones para el currículo nacional.

Dicho currículo está organizado en cuatro –y en los primeros grados en cinco– ejes que buscan continuidad y progresión adecuada desde el primer grado elemental hasta décimo segundo grado: números y operaciones, medición (de 1° a 6°), álgebra, geometría y probabilidad y estadística.

Para la realidad chilena es la primera vez que álgebra, probabilidad y estadística arrancan desde el primer año de educación elemental. Son también característicos de las propuestas vigentes, la comprensión profunda de la naturaleza y el desarrollo del concepto de número; una visión de la geometría desde diferentes marcos de referencia, la de Euclides, la de la geometría cartesiana y la vectorial; la noción de funciones acompaña el eje de álgebra desde el 7° hasta el 12° grado.

Los nuevos énfasis apuntan al desarrollo del pensamiento matemático, la resolución de problemas, la argumentación y la demostración; a los aprendizajes contextualizados y a la modelización; en didáctica se da énfasis a un enfoque de representaciones múltiples, al desarrollo de habilidades y al uso de las tecnologías de la información.

En relación con los aprendizajes cabría indagar sobre alguna señal de progreso en estos más de veinte años de reformas, y en ese sentido. la respuesta es cautamente positiva. La prueba que se aplica en el grado décimo, el antes mencionado Simce, mostró un avance de 10 puntos entre 2010 y 2012, usando datos censales. En las pruebas Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) y PISA, la propensión es positiva. En esta última prueba, Chile estuvo a la cabeza de los resultados entre países de América Latina, y tanto en lectura, matemática y ciencias mostró una "pendiente positiva" en el informe 2012.

Tal como reza el título de la presente sección, esta es una mirada sin la necesaria perspectiva. En efecto, la mayor parte de las propuestas de contenido matemático y de razonamiento matemático para el currículo nacional en que ha podido participar al autor –tales como la noción de función, probabilidad y estadística, la geometría desde diversas perspectivas, los vectores, el paso de las razones para hacer algo en un proceso matemático a la demostración, la búsqueda de regularidades y patrones, el cálculo mental, álgebra para niños, entre otros cambios significativos–, recién empiezan a encontrar su camino a la sala de clases. Ese proceso, el de la incorporación a las prácticas escolares de los referidos temas o énfasis, es otra fuente de aprendizaje e información acerca de cómo se genera y se pone en acción el currículo. De hecho, esta pregunta pasa directo a la sección de rezagados, donde se presentan algunos de los temas rebeldes, los no han sido tratados por el actual proceso de reforma, o los que han resistido a los esfuerzos por cambiarlos. Es la pregunta por la forma en que se genera y, sobre todo, se espera que se desarrolle el currículo. Lo anterior apunta a la distinción entre un currículo decretado a uno que ha sido fruto de la investigación y el desarrollo. Algo muy particular en esta clase de procesos, que necesariamente se extienden en el tiempo, es el hecho de que para poner en práctica un currículo y sus herramientas, primero debe someterse a sucesivos procedimientos de revisión y optimización.

Enseguida se expone una búsqueda de los hitos y posibles antecedentes de lo que vive el país hoy. ¿Una mirada con perspectiva puede ayudar a comprender el presente y anticipar o proyectarse en el futuro de la educación matemática de una sociedad?

Algunos hitos, en la búsqueda de hipótesis explicativas

La escuela influye en la vida y en el futuro de la sociedad; la sociedad, las decisiones que toma, las que no adopta y la forma en que se desenvuelve, influye en la escuela. ¿Cuáles son las decisiones o la falta de ellas, los eventos, los hitos que hicieron a la escuela del Chile de nuestros días? Si queremos interpretar el presente y generar un futuro mejor, tenemos que aprender de esa historia, pues "el conocimiento es la experiencia humana sistematizada" (Meehan, 1981). Lo que sigue es una selección hecha a la luz de una manera de pensar la educación. La misma forma de seleccionar y de expresar esos pasajes es una consecuencia, si no una expresión, de las hipótesis que el autor sostiene acerca de la realidad. A continuación, una cronología rápida.

Una primera constatación apunta a los orígenes de la nación. En efecto, se puede constatar una preocupación temprana por la cultura desde los primeros pasos de la República. En 1810, Juan Egaña le presentó al presidente de la Primera Junta de Gobierno un plan donde se mencionaba que "la obra de Chile debe ser un gran colegio de artes y ciencias, en donde se imparta una educación civil y moral capaz de darnos costumbre y carácter".[4] También está presente la obra de Andrés Bello (1781, 185), avecindado en Chile desde 1829; académico del Instituto Nacional, e impulsor para la creación de la Universidad de Chile (1842), de la que fue el primer rector. Domingo Faustino Sarmiento (1811, 1888) y su proyecto de una "educación pública, gratuita y laica". Luego está la Escuela Normal de Preceptores (1842), primera institución latinoamericana especializada en la formación de maestros. El hecho de que el presidente de la república, Manuel Montt, le encomendara estudiar los sistemas educativos de Europa y de Estados Unidos hace pensar en los procesos de reforma posteriores y los actuales.

Las escuelas normales se desarrollaron en todo el país y sólo dieron paso a la formación en centros universitarios a partir de la década de 1970. Que no han sido sustituidas de modo conveniente y que la formación inicial docente requiere una revisión profunda en un marco nuevo para esa "educación pública gratuita y laica", a la altura y en consonancia con el momento que vive el país, es una de las hipótesis que sostiene este autor al final del capítulo.

Un paso decisivo se dio en 1889, con la creación del Instituto Pedagógico. Las escuelas normales formaron profesores para la enseñanza elemental. El Instituto Pedagógico nació para hacer lo mismo en el nivel secundario. Se contrataron treinta profesores alemanes con nivel de doctor, de los cuales quince eran matemáticos. Hasta la década de 1960, la formación de profesores de matemática y el currículo nacional de matemática fue el que definieron estos profesionales. Textos de aritmética, álgebra y geometría, entre ellos los de Francisco Pröshle y Ricardo Pöenish, fueron "la definición operacional del currículo de matemática en las escuelas chilenas" (Rojas y Oteiza, 2014).

El "Estado docente" fue la política educacional desde mediados del siglo XIX hasta la década de 1960. "Gobernar es educar" fue una afirmación clave de la política del presidente de la república Pedro Aguirre Cerda (1938-1941). Una línea interesante para comprender el desarrollo de la educación matemática en Chile se refiere a la preocupación por la formación técnica. En 1905 se creó la Escuela de Artes y Oficios, y la Universidad Técnica

[4] Es notable que, en 1811, el mismo Egaña publica a petición del Congreso una *Exposición de los principios que consolidan el pacto social de los habitantes de Chile*, donde señala que "se establecerá en la república un Instituto Nacional para las ciencias, artes, oficios instrucción militar, religión, ejercicios que den actividad, vigor y salud, y cuanto pueda formar el carácter físico y moral del ciudadano".

del Estado en 1961. Nuevamente, en la base de esta modalidad de educación el país pidió la colaboración del Viejo Mundo, y esta vez fueron técnicos de varios países europeos, sobre todo de Italia. Ellos trajeron las bases para la formación de técnicos en ramas industriales como la metalurgia, la forja, el torno, la fresa y los procesos productivos. Su impronta marcó la ruta de una rama de la educación que atiende a cerca de la mitad de la población escolar en su nivel medio. Los profesores de matemática fueron principalmente ingenieros y le dieron un carácter a la matemática en el nivel superior, lo cual influyó de manera notable en la formación de los profesores de educación secundaria, en su mayoría preparados en matemática y en física.

El movimiento de la matemática moderna fue un hito con profundas consecuencias que se incubó en el periodo de posguerra: en los años cincuenta en el mundo y con impacto en Chile durante el decenio siguiente. En nuestro país coincide con la reforma de 1958, que tuvo múltiples "primeras veces" en la cultura educacional chilena. Conceptos como "currículum", "planeamiento", "modelo curricular" –el de R. Tayler, en este caso– "consulta nacional para la adopción de decisiones educativas", "orientación escolar", "decisiones con base en la investigación", entre otras, se pusieron en práctica y llegaron al sistema educativo y a las escuelas de educación. La sola descripción de esa reforma requiere de un espacio similar al de este capítulo. Un impacto que no puede dejar de mencionarse es el de la expansión del sistema educativo, del orden de 50% en pocos años, con las consecuencias propias en materia de infraestructura; de la calidad, que mostró una baja debido a la falta de profesores calificados y la imposibilidad de implementar un sistema eficaz en la gestión; y de la puesta en práctica de las innovaciones y supervisión del sistema expandido.

En la matemática escolar los cambios fueron marcados. Para comenzar, de un currículo escolar definido por tres textos –los mencionados en aritmética, álgebra y geometría, productos de la misión alemana de fines del siglo anterior, y por los profesores, principalmente egresados del ya mencionado Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile– se pasó a un currículo con planes y programas que seguían de cerca las propuestas del grupo Bourbaki y la interpretación hecha en Estados Unidos, llevada a América Latina por un equipo encabezado por Marshall Stone. Se pudo conocer a investigadores europeos y americanos; especialistas de los Irems[5] franceses

[5] Institutos de investigación y de actualización profesional para docentes en matemática, con participación de centros de investigación de alto nivel en Francia.

e innovadores como Zoltan Dienes apoyaron programas especiales para docentes y alumnos universitarios avanzados. Había una gran efervescencia en torno a la matemática y su enseñanza, y este autor no puede ser imparcial en ese tema. Coincidió con su iniciación como profesor en el nivel medio y esa experiencia fue determinante en todo el desarrollo posterior como profesional. Lo que pasó después forma parte de la misma historia que en el resto del mundo. La propuesta era más de lo que la sala de clases y la profesión podían hacer. Pocos años más tarde, la matemática en Chile adoptó el enfoque de *back to basics* dominante en Estados Unidos y la matemática moderna sólo dejó el recuerdo de "cuando se enseñaba conjuntos" a los niños y algunos signos reconocibles en textos y prácticas escolares: la noción de función, las inecuaciones, entre otros temas que estaban al margen de los currículos escolares hasta esa década. También existía un horror a los formalismos y a la demostración. Para un sesgo personal en la evaluación del periodo, se ofrece una nota al final del artículo.

Entonces vendría un *bajón* que se mantendría durante las décadas de 1970-1980, el miedo a la Escuela Nacional Unificada,[6] el fin de las escuelas normales en la formación inicial de profesores de educación elemental. En el campo específico de la matemática, ese periodo está marcado por el fin de la matemática moderna y el refugio en los esquemas conocidos (*back to basics*) y la puesta en marcha de las primeras pruebas nacionales.

Con el cambio de década tienen lugar la depresión de 1982 y la "salida de la Universidad" de la formación inicial docente; la regionalización de las sedes de las universidades estatales en esas regiones y la "municipalización": la descentralización de la administración de escuelas y liceos.

> Durante los años 80, Chile emprendió uno de los más formidables experimentos en materia de política educacional que se conozcan en el mundo: reformó a escala nacional su sistema escolar para orientar su funcionamiento por una lógica de mercado. La radicalidad de esta reforma, que en pocos años terminó con el sistema escolar basado en el Estado Docente –que el país había construido desde mediados del siglo XIX–, es asombroso (Bellei, 2010: 14-15).

[6] La Escuela Nacional Unificada fue un proyecto emblemático del gobierno de Salvador Allende, 1971-1973.

Impresiona la afirmación rotunda de Cristián Bellei: “uno de los más formidables experimentos”. Al observar la conmoción que provoca la reforma en curso, poner en la misma escena lo que sucedió en los años ochenta y lo que se busca hoy, confirma lo afirmado por Bellei: se trata de movilizar un cambio muy profundo.

La medida que decretó a la pedagogía como carrera no universitaria es también de esa época. El Instituto Pedagógico, de larga tradición y de enorme prestigio en el resto de América, fue separado de la Universidad de Chile. La medida afectó a las escuelas de educación de las universidades estatales. Muy particular es lo que sucedió con la Escuela de Educación de la Universidad Católica. En efecto, muchos pensamos que tomaría el lugar dejado por el Instituto Pedagógico. Allí actuó otro fenómeno: las verdaderas “placas tectónicas” que debilitan y hacen templar la profesión docente, la disputa sorda pero potente entre los campos profesionales que –idealmente y en algunos momentos de la historia del país así fue – deben concurrir para la formación acabada de un docente: científicos, las especialidades en ciencias, lengua y economía, entre otras, y las especialidades en educación. El Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile dejó de tener alumnos propios, lo cual debilitó en forma notable su influencia en los próximos decenios. Esa fue una decisión desde la cúpula intelectual que dirigió entonces esa casa de estudios. Muy diferente a lo que observamos hoy, una escuela de educación íntimamente relacionada con un centro de investigación de alto nivel, y un programa de doctorado reconocido y con varios años de producción.

Durante los años setenta y ochenta la investigación y la creación de innovaciones en educación se refugiaron en los ONG u otros espacios, varios de ellos al alero de la iglesia católica. El Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación (CIDE) y el Programa Interdisciplinario de Investigaciones en Educación (PIIE), entre otros, reunieron a investigadores y profesores inquietos, en ellos se incubó el proceso de reforma de los años noventa. La Sociedad Chilena de Educación Matemática se inició en ese periodo y su primera sesión se realizó el 22 de abril de 1982, en el campus de la Universidad de Santiago.

Las instituciones recién mencionadas demostraron tener un alto potencial de cambio. Al proyectarse al futuro, al cierre de este documento el autor reconoce los aportes germinales de esos centros de investigación y desarrollo, los primeros en la historia de la educación nacional, y lo que una organización profesional en torno a la educación matemática ofrece hoy al desarrollo de la investigación en el campo y a la formación inicial de profesores de matemática.

Durante los primeros años del gobierno democrático los cambios que necesitaba el sistema educativo fueron objeto de una política de mejoramiento. Las reformas se iniciaron en los años noventa y fueron sostenidas durante más de veinte años. Un fenómeno que se ha mantenido con poca variación, y presente en el origen de esas reformas, es la dura y plena constatación de que los indicadores de aprendizaje nacionales –las pruebas Simce, en particular–, no mostraban ni manifestaban los mejoramientos espera-dos. Si la escuela cambia lentamente, un sistema educativo tiene más inercia aún.

El currículo ha cambiado, se han distribuido textos, hay abundantes elementos de apoyo en los centros de recursos para el aprendizaje (CRA) de escuelas y liceos, Enlaces ha generalizado el uso de las tecnologías digitales en todos los establecimientos escolares del país, se han generado estándares para el aprendizaje y para los docentes (el Simce). La lista es larga, casi no hay aspecto de la escuela, o de la vida en su entorno, sin dejar de ser abordado por las sucesivas acciones de reforma.

Las condiciones y la vida en escuelas y liceos ya no es la misma. El impacto de esos veinte años cambió el escenario de la educación nacional, y puso las condiciones para una transformación aún más profunda que se gesta en nuestros días.

Acerca de los rezagados, de las tareas pendientes

El país ha sido parte y testigo de la reforma iniciada al comienzo de los años noventa. Ese mismo proceso, y el desarrollo social, económico y político del país, han generado nuevas demandas hasta en la base administrativa del sistema. El problema más complejo y con más consecuencias que afecta la educación nacional, la estratificación de los resultados, la falta de equidad en el acceso a la educación. Más abajo, en la puesta en práctica de la acción educadora, quedan problemas que, o han sido rebeldes a los intentos anteriores o no han sido abordados.

¿Cuáles son los temas rebeldes o que esperan atención? Estamos en un momento en que se movilizan las piezas más fuertes del sistema. Eso ha oscurecido el resto, o sea mucho. Lo que requiere atención nueva es variado y en todos los niveles del sistema. Van desde temas de la filosofía de base y el norte de los procesos de reforma a los recursos que se generan para apoyar los procesos de aprendizaje, pasando por las instituciones universitarias y la propia profesión de docente y las organizaciones profesionales.

Para comenzar, el modelo de educación que pueda ser el norte de las decisiones. En la década de 1980 se optó por un modelo de mercado, ¿cuál es al que queremos acercarnos hoy? La globalización, a través de las pruebas internacionales, hace converger las miradas en los sistemas educativos de Asia y de algunos países europeos. ¿Son esos nortes deseables? ¿Cuál es la escuela que queremos construir? ¿La misma pero con refuerzos? ¿Una que permita competir con los gigantes? ¿Una propia y con base en nuestra realidad?

En una conversación reciente con alumnos de pedagogía se planteó la tensión entre dos extremos posibles de un continuo de decisiones. En uno, la cultura, el conocimiento validado, lo que la sociedad selecciona como deseable; en otro, el potencial de cada niño, niña o joven que está en edad escolar. ¿Cuál polo prima? Las asignaturas, los textos, la cultura de evaluación generalizada, que "pone nota" sobre la base de la capacidad de los estudiantes de dar cuenta de lo conocido, son parte del primer extremo. La diferenciación según talentos o intereses pertenece al segundo. ¿Qué balance nos parece adecuado?

No responder esa pregunta es ignorar que nuestros alumnos "están mirando para otro lado", no "están ni ahí" con la escuela que les ofrecemos. Que al pedir "educación de calidad gratuita para todos" están solicitando también definir qué es "calidad" de la educación.

Una cultura educacional que pone a la evaluación por sobre el cultivo de talentos. En otra parte lo llamamos "selección *versus* cultivo de talentos". Las pruebas nacionales, las pruebas de ingreso a la educación superior, la evaluación docente, la esperanza puesta en los procesos de acreditación y de control de la calidad, hablan de una filosofía educacional. Una filosofía que mide la calidad por los productos y resultados *mensurables*. ¿Qué hay de las condiciones, de la vida que genera esos resultados, de los medios para lograrlos? Definitivo, el modelo educacional que queremos es un rezagado.

Podemos agregar otros. La forma en que se genera, se documenta, se transforma en recursos y se pone en práctica el currículo. Con mi colega Patricio Montero pusimos en la discusión educacional –desde los años setenta, y con mayor fuerza en los noventa– la necesidad de generar una *cultura de desarrollo curricular*. Estamos muy conscientes de que no hemos tenido éxito. El currículo, en esta visión, es fruto de un proceso formal de investigación y desarrollo, que en etapas sucesivas crea las condiciones, los recursos y, sobre todo, el conocimiento que hace a un currículo existir y optimizarse a partir de la información que genera el proceso.

La política actual en la definición del currículo, de la producción de textos y la o las formas en que éstos llegan a la sala de clases, es una política que requiere una revisión profunda. El desarrollo curricular es un rezagado más.

La falta de opciones para el estudiante chileno. Un único currículo nacional para todos y una forma de medir, también para todos, pone lo general y común por encima del potencial individual, las necesidades y las expectativas de cada estudiante. Esto se observa en la falta de una diferencia clara y de largo alcance en los últimos niveles de la educación secundaria, los grados 11° y 12°. En estos niveles estamos perdiendo mucha energía juvenil por insistir en que todos –y ahora estamos con educación obligatoria hasta 12° grado– tengan hasta trece asignaturas. ¿Es esa la forma de preparar a jóvenes de dieciséis años para su ingreso a la educación superior, al trabajo, a la vida? Muchos talentos, necesidades y aspiraciones diferentes llaman a opciones, a diferentes caminos. El país, al no responder a esas diferencias, está malgastando mucha energía juvenil, la que no ve, en lo que ofrece la escuela, el espacio para su expresión y crecimiento.

La profesionalización de la carrera de profesor y la calidad de la vida –profesional y personal– del docente, así como la posibilidad de proseguir estudios más allá del primer grado académico, es otro rezagado. También lo es la calidad desigual de los centros de formación inicial. La calidad de la vida de un profesional es determinante en el proceso de elección que hace un egresado de la educación secundaria. La calidad de la vida profesional y personal del docente es también un rezagado.

En estrecha relación con lo anterior se encuentra la falta de una organización profesional de los profesores de matemática. Entre los actores que se espera tengan peso en una sociedad que se complejiza y enriquece con los aportes de muchos y muchas visiones diferentes, se echa de menos la voz informada de los profesores y profesoras de matemática.

El impacto negativo de las evaluaciones de carácter nacional que por su naturaleza –pruebas estandarizadas y de selección múltiple, en su inmensa mayoría– tienden a constituirse en el "currículo observado" o real, reduciendo los aprendizajes a los niveles de conocimiento y aplicación.

Otro rezagado es la educación técnico profesional, que atiende a 46% de la matrícula en esos niveles. La aspiración de muchos hogares, de lograr que sus hijos se inserten en el espacio de trabajo con una profesión a su alcance, no ha encontrado una expresión adecuada en nuestra sociedad actual.

El uso limitado de las tecnologías de la información, de cara al potencial que tienen esas tecnologías para incorporar nuevas formas de trabajo en la sala de clases. Durante dos décadas el sistema Enlaces, el proyecto nacional para la incorporación de las tecnologías digitales en la educación chilena, ha adelantado en ese uso y ha preparado miles de docentes para incorporar esas tecnologías en sus prácticas. Queda mucho espacio por recorrer, lo hecho no es suficiente.

La falta de impacto y el desarrollo limitado de la investigación en educación y en educación matemática. Toda el área de la producción científica del país pide un nuevo impulso, una nueva conciencia que se traduzca en nuevas políticas en materia de ciencia, tecnología y de toda forma de investigación, producción de conocimiento y de los mecanismos que faciliten la relación entre esa área y la escuela, el sistema de educación nacional.

La necesidad de profesores altamente calificados que formen a los futuros profesores, es un rezagado. ¿Cuántas son las escuelas de educación del país? ¿Cuántos son los especialistas en didáctica de la matemática productivos, con estudios superiores en el área?

Y, en la sala de clases, la prevalencia casi absoluta de docentes que "cuentan el cuento de la Matemática" y preparan a sus estudiantes en vista de pruebas nacionales. Situación a la que es aplicable la crítica de Roberto Araya (2001: 75): "Quizás uno de los fracasos más patentes de nuestro sistema educacional actual [...] es que prácticamente ninguno de nuestros estudiantes queda con la idea de que la matemática es el lenguaje para describir fenómenos de este mundo, ni para crear juegos/metáforas que los representen".

La educación integral, aquella en la que además del cultivo del conocimiento se desarrollan valores, sentimientos y el cuerpo, es otro rezagado. ¿Cuál es la escuela que queremos? ¿Hacia qué utopía social estamos mirando? De modo más simple, más profundo: ¿nos estamos formulando las preguntas correctas?

Las preguntas, una vez formuladas, buscan activamente sus respuestas[7]

> El conocimiento es la experiencia humana sistematizada […] se le evalúa según su capacidad para resolver, explicar o al menos describir objetivos, necesidades o aspiraciones humanas (Mehan, 1981:4).

En este apartado se muestran las interpretaciones, las posibles hipótesis explicativas que sugiere la experiencia y los hitos del pasado seleccionados en esta oportunidad. Más adelante, y para terminar, se busca aplicar tal punto de vista, los temas que parecen como importantes a los ojos del autor en el horizonte cercano. La misma asignación de importancia y los enunciados son ya una forma peculiar de leer la realidad.

La primera constatación es muy simple y se aplica al momento presente. Si recordamos la afirmación de Cristián Bellei acerca de "[…] uno de los más formidables experimentos en materia de política educacional que se conozcan en el mundo […]", y lo superponemos al actual proceso de reforma, se esclarecen la efervescencia y la notable agitación pública frente a la propuesta del gobierno actual. También esta reforma es una cambio radical. Claro, se trata de modificar una medida que afectó las bases mismas del sistema. Surge de manera natural que todo el resto de las necesidades, e incluso provoca que las reformas que también parezcan requerir atención urgente sean opacadas y postergadas por el intento en marcha. Al leer con atención a Bellei se puede observar que ese "formidable experimento" cambió todo el esquema de base de la educación chilena a la luz de una política de mercado. Ello sustituyó, en pocos años, casi siglo y medio de la política del estado docente. Revertir el impacto de esa reforma requiere, también, de una energía formidable. Al ponerlo en esta perspectiva surge como algo imprescindible para lograr en este proceso, el concurso, el pensamiento y las capacidades de todos los actores que conforman la comunidad nacional.

Entre los rezagos se señaló, precisamente, el modelo educacional de base. ¿Hacia dónde dirigir los esfuerzos? Si penetramos la corteza formal del sistema, el financiamiento, la o las dependencias administrativas, nos encontramos con los supuestos de lo que es una escuela, una buena escuela. La

[7] Tomado libremente de *Pasos hacia una ecología de la mente*, de Gregory Bateson.

observación de la escuela actual, su funcionamiento y sus resultados, sugiere una segunda hipótesis. “El modelo de escuela –que nunca fue diseñado–[8] está en la fase en que los cambios o las mejoras son marginales y los costos para lograr esas mejoras son muy elevados”. Es decir, el modelo de escuela que conocemos estaría en una etapa de saturación por lo que es difícil lograr mejoras significativas. Aplicado al caso de Chile, podría significar, por ejemplo, que las escuelas públicas se acercaran a las privadas que demuestran mejores resultados. En otras palabras, habría un espacio para el crecimiento de la calidad, pero acotado por lo que consiguen algunas escuelas de élite, que a su vez tienen deficiencias y esperan mejoras.

¿Qué escuela para los niños, niñas y jóvenes de hoy? Ellos parecen estar “mirando hacia otra parte” y nosotros, los adultos, no hemos encontrado la respuesta.

Acerca de la formación inicial y la profesión docente

La profesión docente ha disminuido de manera notable su estatus en la sociedad chilena durante los pasados cincuenta años. En parte se explica por la expansión del sistema y la naturaleza del proceso de desarrollo que ha experimentado el país, de claro carácter economicista y centrado en la producción, no en el conocimiento, la ciencia. Muy lejos del ideal planteado por Egaña en 1810: “la obra de Chile debe ser un gran colegio de artes y ciencias, en donde se imparta una educación civil y moral capaz de darnos costumbre y carácter”. Mas podemos agregar la siguiente hipótesis explicativa:

La formación inicial docente no ha podido sustituir a las escuelas normales en la educación elemental; en el nivel de la educación secundaria, la ley que definió como “no universitaria” a las carreras de pedagogía, junto a la medida que terminó con el Instituto Pedagógico de la Universidad de Chile y las escuelas de educación asociadas a las sedes de esa misma universidad y de la Universidad Técnica del Estado, tuvo un efecto negativo en la profesión docente, que al día de hoy no ha dejado de afectar la calidad del sistema de educación nacional, en general, y a la profesión docente en particular.

Se puede agregar otra perspectiva. La carrera de profesor necesita profesionalizarse para tener un lugar y lograr lo que le es propio. Se trata de un complejo proceso social. En efecto, es reflejo y causa de una sociedad sin la

[8] Afirmación del marco de referencia del proyecto “School year 2000”, desarrollado en el estado de Florida con motivo de las preparaciones para el cambio de siglo.

necesaria complejidad, y en la cual diversos actores cumplen roles que completan, matizan, enriquecen las decisiones gruesas y significativas que, en una sociedad más simple, con menos energía interna, son asumidas por pocos actores, muchas veces sólo los empoderados por la autoridad política. En la medida que organizaciones culturales, científicas y profesionales adquieran conocimiento con base en la investigación y la creación de alto nivel; en la medida en que esos actores tengan peso en las decisiones que afectan a todos los ciudadanos, esas determinaciones tendrán mayor valor y los miembros de la sociedad –los profesores, por ejemplo– podrán tener un lugar relevante.

En esta construcción, y a la luz de la historia, la reconstrucción del rol del profesor en la sociedad arroja señales recientes promisorias. En el escenario de la matemática escolar en Chile hay nuevos actores que, con base en el conocimiento, buscan contribuir a una nueva generación de especialistas en el campo. En relación con la metáfora de las "placas tectónicas", que en nuestro caso son las matemáticas docta y escolar, es promisorio ver la convergencia de nuevos especialistas en ambos campos que, con base en el conocimiento, trabajan por una matemática de calidad para todos.

En la falta de alternativas curriculares, la misma formación de docentes, la no diferenciación en los últimos dos años de educación secundaria, la insuficiencia en la investigación en educación y el retraso en disponer de propuestas curriculares técnicamente desarrolladas y evaluadas, la mirada desde la historia sugiere una nueva pregunta.

A la búsqueda de hipótesis explicativas

Al regresar a las preguntas acerca del modelo de base de la escuela chilena y el profesor que la hace realidad, el autor tensionó algunas explicaciones acerca del modelo de escuela y del posible límite que tiene la clase, tal como muestra la observación de nuestra realidad. Comienza con una sorpresa y una fábula.

La sorpresa: "Parece una paradoja, la escuela, tal como la conocemos, no se basa ni en la didáctica ni en la psicología del aprendizaje ni en ningún otro conocimiento acerca de educación"(Oteiza, 2006). En los términos del ya mencionado *School Year 200*", del estado de Florida, "la Escuela nunca fue diseñada".

En efecto, si se busca los fundamentos que orientan el diseño "no diseñado" de la escuela, se encuentra una cantidad de razones de orden administrativo, financiero, pragmático o de la costumbre que son resultado de una larga tradición: "siempre se ha hecho así".

En efecto, ¿qué conocimiento didáctico, psicológico o pedagógico justifica el horario escolar, la distribución de los tiempos diarios, semanales y en periodos mayores? ¿O las asignaturas, el tipo de sala y las actividades permitidas? Se puede agregar a la pregunta otras prácticas habituales de la institución escolar y se llegará a la misma conclusión: se hace de ese modo por razones de orden administrativo y financiero, o se remite a las prácticas habituales en la materia.

¿Puede ser reformada la escuela? La pregunta tiene sentido si se observa cuál ha sido el destino de una cantidad enorme de "reformas" que agitaron las aguas de la institución escolar, para que a la larga "todo cambiase para seguir igual", para traicionar una vez más al autor de El gatopardo. La pregunta llevó al autor y a algunos de sus estudiantes graduados a buscar la axiomática, los "pilares conceptuales" en que descansa –en el completo sentido de la palabra– esa institución. A continuación, la fábula que resume la conclusión de esa búsqueda:

> Si los habitantes de un planeta que no tiene escuela –tal como la conocemos nosotros– le ofrecen un contrato para generar escuelas "tal como en la Tierra", usted sólo tiene que llevar cuatro ideas, ponerlas a funcionar y todo el resto se reproducirá por sí solo, como consecuencia de estos cuatro pilares de la escuela que conocemos. (Por escuela que conocemos nos referimos, nuevamente, a escuelas elementales, liceos o colegios secundarios, institutos y hasta universidades si no consideramos los programas de posgrado). Sólo cuatro ideas, sólo cuatro pilares bastan para que la escuela sea tal como es y quede instalada de forma que resista todo intento de reforma.

¿Cuáles son esas piedras angulares, cuál es la axiomática en la base del concepto de escuela?

La primera, el concepto de "grupo curso". Lo que supone es que un grupo de niños, jóvenes o personas en general son considerados como iguales, que aprenden al mismo tiempo y que tienen las mismas motivaciones, los mismos intereses y experimentan necesidades iguales.

La segunda es la sustitución de una situación de aprendizaje por "clases expositivas", eminentemente verbales y con muy poca participación del estudiante.

La tercera es el supuesto que el conocimiento viene en compartimentos estancos, sin comunicación entre sí, sin interacciones o interdependencias;

se refiere al poderoso e inamovible concepto de “asignatura”. Tanto en la realidad, como luego en lo que se desea en el alumno, el conocimiento está –y deseamos que esté– integrado.

La cuarta es la que hace sistema, la que aglutina aquello que las otras no hayan logrado: la reducción de la evaluación a la “calificación”. Entre más calificación sea la evaluación, menos de evaluación tendrá y será una variable que todo lo decide. Los puntajes de las pruebas nacionales e internacionales se asimilan bastante bien, logran una perfecta separación entre los procesos y el resultado, de modo que las podemos considerar la versión sistémica de la calificación en el cuaderno de clase.

Estas piedras fundacionales de la escuela son tan profundas que, si una acción considerada como reforma no cambia algunos de eses pilares, se puede afirmar que no es en realidad una reforma. En efecto, dados esos cuatro fundamentos, el resto se regenera, no hay cambio de base. Y a la inversa, la experiencia muestra que cualquier intento por modificar esos pilares se estrella con el sistema y es expulsado junto con los intentos de cambio.

Siguiendo con la fábula, se puede pensar que los arquitectos de ese planeta reinventarían las salas de clases como los paralelepípedos rectos rectangulares que conocemos; que los administradores reproducirían la práctica de contratar profesores que serían puestos frente a los estudiantes en esas salas. El libro de clases, y hasta las pruebas nacionales, podrían ser prácticas que apareciesen con el tiempo. Los corolarios de ello son múltiples.

Uno acerca de las reformas ya fue insinuado. Si una “reforma” no modifica uno o algunos de los cuatro pilares, entonces se reducirá, en su mejor expresión, a reformar los contenidos, nunca las prácticas o los logros más allá de lo alcanzable en una asignatura. Esto es, se podrá observar pizarras con diferentes contenidos, textos con esos mismos cambios y cuadernos de niños o jóvenes en los que se refleje la reforma. Las metodologías difícilmente cambiarán. Los docentes aducirán que no tienen tiempo. En realidad, sus tiempos también están medidos en cantidad de horas de clase. Incluso este es otro corolario: sus contratos serán establecidos sobre la base del número de horas de clase.

Lo que sucede con los recursos –incluidos los digitales– es consecuencia de lo mismo. Si usted lo piensa, una computadora no se compadece con una clase expositiva; es más, por medio de un buscador no obedece al concepto de asignatura. Se trata de una “máquina de producción”, no de un cuaderno pasivo. De hecho, la práctica señala que "molesta en la sala de clases" y por ello se le confina en laboratorios a los que difícilmente accede el docente.

Una reforma que pretenda modificar las prácticas escolares, cambiando el rol del que aprende y del que enseña, necesariamente debe lidiar con los "cuatro pilares" de la escuela.

Acerca de los aprendizajes matemáticos

En el marco de la escuela, tal como la conocemos, la unidad de análisis, el átomo indivisible, no es el aprendizaje, es la clase. Por ello, entre otras razones, lo que sabe la humanidad acerca de didáctica difícilmente llega a la sala de clases. La clase no fue diseñada para eso, difícilmente permite, y menos facilita, la exploración, la duda, el experimento, la interacción entre el aprendiz y el mundo.

Nuevamente Freire: "[…] nadie le enseña nada a nadie, todos (incluidos los estudiantes) aprendemos en interacción con el mundo […]". Si el "problema" del administrador escolar es encontrar y disponer de profesores para cada asignatura, en los horarios y condiciones que cubran todos los cursos y les expliques a sus estudiantes lo que deben aprender para obtener calificaciones adecuadas, lo natural es la "clase". Esto sugiere la siguiente hipótesis de análisis:

> Al contar acerca de la matemática, dando definiciones, enunciando y demostrando teoremas, explicando procedimientos y luego pidiéndoles a nuestros alumnos que apliquen esas ideas a problemas especialmente elegidos, se oculta parte importante del proceso de hacer matemática, de pensar, de duda, de buscar soluciones y el resultado es una versión aguada de la experiencia matemática. Sólo personas que ya tienen la motivación propia para aprender, aprenden (Oteiza, 2003 y 2007).

Otra forma de expresar la idea: el aprendizaje es el resultado de un proceso personal, único e intransferible que realiza quien aprende; el papel del docente es crear condiciones favorables para que ese proceso se dé, deseablemente, en todos los alumnos de los que es responsable. Se trata entonces de detonar en otros un proceso que sólo ellos pueden realizar. Es posible que "contar el cuento de la matemática" sea más una acción que adormece, esto es, que no sirve para detonar el interés.

Hay algo que falta entre el nivel en que se define la política y la sala de clases. En Oteiza y Montero (1995) se adelanta una hipótesis, que en los términos actuales se puede enunciar del modo siguiente: existe un vacío operativo y conceptual entre el nivel en que se formula la política pública y el currículo nacional y la sala de clases, en la que esas políticas y el currículo deberían ser puestos en práctica. Es operativo porque hay muchas acciones y mecanismos que no existen o no están diseñados de modo que puedan operar; y es conceptual porque ni quienes definen la política ni las instituciones que podrían actuar en este nivel tienen las nociones, los modelos y los procedimientos para conectar los niveles señalados.

¿Cuál es la autocrítica que debemos hacernos desde las universidades en cuanto al rol desempeñado en la política pública? Es un hecho que las universidades siempre han influido en ese dominio. ¿Podemos aceptar algunas falencias? En algunas áreas la contribución de la universidad no ha estado a la altura de las decisiones que le dan forma y sentido a la educación en la actualidad. La autoridad política, a través del Ministerio de Educación, no ha tenido ni el contrapeso ni el peso del conocimiento y la información de calidad y avanzada que las universidades podrían ofrecer. ¿Porqué las universidades han formado profesores generalistas para los ocho niveles de la educación básica? La única respuesta es que se acomodaron a la política y no investigaron, no miraron lo que se hacía en otras naciones, y durante más de treinta años los docentes que enseñan matemática en los niveles de quinto a octavo grados, lo cual requiere de una formación sólida, no la recibieron. Esto es, las universidades siguieron la política y no la revisaron críticamente para compensarla con los docentes que el sistema requiere. Algo semejante ha sucedido con los textos, los recursos y otras formas de plasmar el currículo.

Radica en la esencia de la universidad el estar a la vanguardia. La historia reciente nos muestra que eso está cambiando. Los ejemplos de lo que sucedió con Enlaces y las contribuciones de diversos centros universitarios a lo largo del país, la existencia de programas con nivel de doctorado en esa área, los aportes del doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso, así como el trabajo desarrollado por el Centro de Modelamiento de la Universidad de Chile, muestran que la investigación y el conocimiento avanzado contribuyen en el presente, pero más en el futuro cercano del sistema educativo. El proceso de reforma iniciado a principios de los años 90 ha potenciado a investigadores y centros de alta complejidad en las principales universidades del país. El potencial de lo que allí ha sucedido es enorme y apunta hacia una sociedad más compleja, con actores informados, con voz y con obra.

Hubo un momento en la historia del país que la matemática y la educación le ofrecía una plataforma fuerte a los profesores. ¿Puede una generación de especialistas en didáctica y en matemática que, actuando en forma coherente, puedan formar en Chile generaciones de docentes altamente profesionales? Hay signos de que la respuesta es positiva y que está actuando.

Es indispensable tornar complejo el pensamiento que orienta las decisiones en educación. Sólo con actores informados, con base en conocimiento validado por la investigación, transformado en realidades probadas mediante el proceso técnico que une la investigación y el desarrollo, se elevarán la calidad de esas decisiones, de las propuestas curriculares, de los textos y recursos y de cada componente del sistema educativo.

Lo observado muestra también la necesidad de revisar las metáforas de base, los supuestos en los que se ancla la formación inicial docente. Si Paulo Freire tiene razón, si "nadie le enseña nada a nadie, todos aprendemos en interacción con el mundo" (Freire, 1973), entonces un modelo de formación de docentes orientados a dar lecciones y a evaluar los resultados de ellas en sus alumnos no es suficiente ni adecuado. Para el autor, las interacciones con el mundo son la fuente principal de los aprendizajes significativos. De allí que ser capaz de diseñar y desarrollar mundos en los que sus alumnos puedan aprender aparece como una base más fuerte del pensamiento que oriente una escuela de educación. Por consiguiente, la formación de diseñadores, arquitectos con investigadores de campo, como en la antropología, serían quizá posibles metáforas orientadoras para la formación inicial docente. Otra escuela, otros profesionales y, naturalmente, otras vertientes de educación.

La escuela influye en la vida y en el futuro de la sociedad; a su vez, la sociedad, las decisiones que toma y la forma en que se desenvuelve, influye en la escuela. De manera recíproca la sociedad tiene su responsabilidad al potenciar la ciencia, la cultura y los actores que las cultiven y transformen en ofertas para todos. ¿Cuáles son las decisiones, los eventos, los hitos que hicieron a la escuela del Chile de hoy? ¿Cómo se proyecta esa historia en el camino que nos corresponde construir?

Para cerrar

> (…) *el problema del conocimiento, está claro, de alguna manera el individuo tiene que aprender a usar la experiencia pasada para tratar con el futuro, para satisfacer las necesidades y aspiraciones humanas con eficacia y eficiencia creciente* (…) (Meehan, 1981: 4).

Tal como se afirma en la introducción, esta no es historia, es simplemente un intento de observar el presente a la luz de algunos de los hitos más salientes del proceso que ha generado la escuela chilena de hoy. Es una visión personal totalmente signada por la experiencia de quien escribe. Es también una invitación a que visiones diferentes, con otras interpretaciones y otras energías, construyan en conjunto un pensamiento educativo con la fuerza de ofrecer mejores oportunidades de aprendizaje a los niños, niñas y jóvenes que así lo esperan.

El país tiene una larga y potente tradición educativa. Un esfuerzo sostenido durante doscientos años ha generado lo que somos ahora. Las enseñanzas de ese proceso nos ayudan a comprender y a generar mejores condiciones para un futuro deseable. Las circunstancias han cambiado profundamente, también son abismales los cambios y la variedad de nuevos actores. Nuevas situaciones y nuevos actores con profesionalismo, información y conocimiento hacen pensar en una sociedad mejor, más justa y con posibilidades para muchos.

Los logros a nivel de la sociedad en su conjunto son contundentes y mejoran en el tiempo, más personas acceden a la educación y llegan a niveles superiores de las que estudiaron sus padres. Si se observa una escuela individual o a la educación como sistema, hay mucho espacio para el crecimiento y la mejora.

Un desafío central para lograr educación de calidad para todos está en la existencia, capacidad y dedicación de los actores que hacen la educación, los centros de formación docentes, los programas para graduados, los centros de investigación y desarrollo, docentes de docentes, investigadores, sociedades científicas y profesionales y, naturalmente, los profesores. El desafío de las generaciones actualmente activas en la educación es el logro de una sociedad más compleja, con más y mejores actores construida con los aportes de diferentes filosofías, posturas, niveles e instituciones.

Hacer realidad lo que ha orientado las acciones de educadores, científicos y políticos durante doscientos años de historia, la declaración que le dio comienzo y naturaleza: “la obra de Chile debe ser un gran colegio de artes y ciencias, en donde se imparta una educación civil y moral capaz de darnos costumbre y carácter”.

Referencias

Araya, R. (2001). *Inteligencia matemática*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.

Bateson, G. (1972). *Pasos hacia una ecología de la mente*. Buenos Aires: Ediciones Carlos Lohlé.

Bellei, C. (2010). Evolución de las políticas educacionales en Chile (1980-2009). En A. Bilbao y Á. Salinas, *El libro abierto de la informática educativa. Lecciones y desafíos de la Red Enlaces*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido,* (8ª ed). Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Meehan, E. (1981). *Reasoned Argument in Social Science*. Londres: Greenwood Press.

Oteiza, F. (2006a). A mitad de camino en una reforma porfiada. XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Sociedad Chilena de Educación Matemática.

Oteiza, F. (2006b). Tienen impacto las TIC en los aprendizajes. Disponible en: www.educarchile.cl/ech/app/detalle?ID=193539

Oteiza, F. y Montero, P. (eds.) (1995). *Modelos curriculares para la educación media*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

Rojas, E. y Oteiza, F. (2014). Chile: The Context and Pedagogy of Mathematics Teaching and Learning. En H. Rosario, P. Scott y B. R. Vogeli (eds.), *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. Singapur: World Scientific.

Costa Rica

Costa Rica: una reforma radical en la educación matemática

Ángel Ruiz

Introducción

Si bien Costa Rica no muestra los indicadores educativos más deficientes de América Latina y el Caribe, posee elementos débiles o vulnerabilidades que fueron tomados en cuenta en la reforma de la educación matemática que se desarrolla en ese país. Uno de ellos es la *matefobia*: una reacción de rechazo a las matemáticas, que también ocurre en otras latitudes. Los rendimientos del país en las pruebas comparativas internacionales es deficiente; las capacidades cognitivas que desarrolla el sistema educativo son débiles para que sus egresados puedan participar apropiadamente en la sociedad del conocimiento, como señalé en otro lugar (Ruiz, 2013).

Los programas de estudio han tenido una cuota de responsabilidad en esta situación, pues: "Un currículo de Matemáticas escolares determina, en gran manera, lo que los estudiantes tienen oportunidad de aprender y lo que realmente aprenden" (NCTM, 2003: 15).

Entre 1964 y 1995 no se realizaron grandes transformaciones en los programas de matemáticas destinados a la educación del país (Ruiz, 1995a). Sus características se derivaron mucho de las orientaciones emanadas de la Reforma de las Matemáticas Modernas (New Math): programas "por contenidos" que tuvieron un poderoso efecto en la educación matemática del país y de toda la región latinoamericana, cuyas implicaciones perduraron durante décadas (Ruiz, 1990b; Ruiz, 1992; Ruiz y Barrantes, 1991a, 1991b, 1998; Ruiz, 2000).

En 1995 se diseñaron nuevos programas que adoptarían algunas modificaciones, aunque no de fondo, en 2001 y 2005 (MEP, 1995a, 1995b, 1995c, 1996, 2001a, 2001b, 2005a, 2005b). En sus fundamentos teóricos se declaró una intención constructivista, se propuso una contextualización, recursos heurísticos, procedimientos intuitivos y empíricos a la hora de introducir los conceptos y métodos matemáticos. Estos programas en su momento jugaron un papel positivo al plantear un alejamiento de enfoques conductistas (Ruiz, 1995). Pero estos programas no lograron materializar la mayoría de sus propósitos planteados de manera abstracta, además de que contenían graves debilidades.

Exhibían una fuerte inconsistencia entre lo enunciado en los fundamentos teóricos (declaración constructivista abstracta) y lo planteado realmente en la malla curricular (un enfoque conductista). Dichos programas no permitían desarrollar un enfoque integrador y constructivo de los contenidos y habilidades deseadas; tampoco ofrecían una estrategia para la acción de aula, no permitían sostener una orientación que potenciara la construcción de capacidades cognitivas superiores en los estudiantes o que promoviera una formación escolar atractiva para éstos.

Un cambio en los programas de matemáticas no era suficiente para responder adecuadamente a la situación crítica de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pero sí era necesario. Una primera hoja de ruta para la reforma había sido planteada por Ruiz (1997), pero no fue asumida por las autoridades educativas de ese momento.

En octubre de 2010, el ministro de Educación Pública de Costa Rica propuso a Ángel Ruiz que diseñara una reforma curricular en la enseñanza de las matemáticas escolares. Éste aceptó realizarla por medio de un equipo independiente al Ministerio de Educación Pública (MEP) compuesto por investigadores a título personal de las universidades públicas, con quien Ruiz había trabajado desde hacía muchos años y fortalecido con docentes en servicio de la educación primaria y secundaria . En agosto de 2011 esta comisión presentó una primera versión del currículo al Consejo Superior de Educación (CSE), organismo máximo de la educación de Costa Rica y responsable de aprobar planes de estudio. El CSE sometió la propuesta para su discusión a cuatro universidades públicas, de las que recibió cuestionamientos y recomendaciones diversas dentro de una atmósfera bastante politizada en la academia. Algunos gremios docentes también se manifestaron en contra. La comisión redactora elaboró una segunda versión del currículo, en la que tomó en cuenta una gran parte de las observaciones presentadas y sostuvo una fuerte batalla política para mostrar la pertinencia y calidad de la propuesta.

Todo esto ocurrió entre la segunda mitad de 2011 y los primeros meses de 2012. El 21 de mayo de 2012 el CSE aprobó la nueva propuesta curricular, con lo cual se iniciaba otra etapa en la educación matemática del país (MEP, 2012).

Los nuevos programas empezaron a implantarse en 2013 en un proceso gradual que tomará de cuatro a cinco años, y entre 2016 y 2017 toda la educación preuniversitaria de Costa Rica estará siguiendo este currículo. Desde 2011 este país ha invertido en procesos de capacitación y creación de recursos que apoyen la puesta en marcha. Más que un diseño curricular y su implementación, el proceso que se ha desarrollado debe verse como una profunda reforma de la enseñanza de las matemáticas en Costa Rica.

El nuevo currículo de las matemáticas escolares en Costa Rica

Enfoque principal

El enfoque principal de este currículo se consigna como "Resolución de problemas, con énfasis en contextos reales". Se trata de una estrategia pedagógica, no de un ajuste de contenidos (aumento o disminución), y su finalidad es transformar la acción de aula.

Esta resolución de problemas como estrategia para la construcción de aprendizajes propone una acción de aula sintetizada en cuatro momentos: presentación del problema, trabajo independiente por los estudiantes, contrastación y comunicación de estrategias seguidas en la fase independiente, y cierre o clausura de la lección. En cada momento el docente debe realizar tareas específicas; en las fuentes de esta propuesta se encuentran, entre otros: Ruiz (2000, 2011), NCTM (2003, 2010a), Freudenthal (1973, 1983, 1991), Brousseau (1998), Shimizu (2007, 2009); los fundamentos teóricos pueden verse en Ruiz (2013) y MEP (2012).

Capacidades cognoscitivas

El nuevo currículo asume la formación matemática escolar orientada a la construcción de capacidades de la ciudadanía en el uso de las matemáticas para su vida, ya sean sus contenidos o como destrezas intelectuales generadas con el aprendizaje de la asignatura. La naturaleza de las matemáticas que se adopta enfatiza su carácter sociohistórico, cultural y su asociación con la realidad física y social (Ruiz, 1987, 2000).

Como parte de esta orientación se utiliza por conveniencia la noción de "competencia" y la de "competencia matemática" enunciada en el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (PISA y OECD, respectivamente, por sus siglas en inglés) (OECD, 2003: 23; 2010: 4; Rico y Lupiáñez, 2008).

Como señala el programa: "[…] la *competencia matemática* se formula en relación con el uso de las Matemáticas para describir, comprender y actuar en diversos contextos de su realidad (personales, físicos, sociales, culturales)" (MEP, 2012: 23).

De entrada, el currículo se distancia de los enfoques "por contenidos", donde el fundamento de las decisiones curriculares lo brindan solamente las matemáticas (sus necesidades disciplinares), y resulta dominante el criterio de que en los programas siempre es mejor más matemáticas y de mayor nivel.

Este currículo busca el dominio de conocimientos y la generación de habilidades en torno a los mismos, pero también, y de una manera central, la construcción de capacidades transversales matemáticas que se alcanzan en el mediano y largo plazo: de razonamiento y argumentación, de representación, de comunicación, de resolución de problemas, de conexión. Estas capacidades se pueden llamar, si se quiere, "competencias". Las habilidades se diferencian entre específicas y generales, siempre asociadas a las áreas matemáticas. Las primeras, para desarrollar en periodos cortos de tiempo ("Para sumar números naturales menores que 100"), las segundas, en plazos mayores ("Para sumar números naturales"). Se busca generar estas habilidades a través de procesos graduales y, algo crucial, de manera integrada.

A pesar de la relevancia que se le da a las capacidades (habilidades, competencia), no se plantea la organización de sus planes de estudio específicos (malla curricular) por medio de competencias, ni la acción de aula (planeamiento, lección y evaluación), a partir de competencias generales transversales. No es un currículo "por competencias". La organización de la malla curricular se realiza mediante las áreas matemáticas (conocimientos y habilidades) que se asumen: números, geometría, medidas, relaciones y álgebra, estadística y probabilidad. Y el punto de partida para la acción que debe desarrollar el docente son las matemáticas.

Las capacidades generales que se busca lograr son objetivos centrales del currículo propuesto, cuya realización se plantea a través o a partir del desarrollo preciso de las habilidades. Es decir, se construyen en la mediación pedagógica: la acción del aula. Sin embargo, ésta no es cualquier intercesión:

invoca la resolución de problemas como estrategia pedagógica central, el desarrollo de acciones transversales y el trabajo con tareas colocadas en varios niveles de complejidad.

Procesos matemáticos y niveles de complejidad

A algunas de las acciones transversales se les llama "procesos matemáticos":

- *Razonar y argumentar.* El proceso se activa en todas las áreas de múltiples maneras: por ejemplo, en el estudio de regularidades y patrones, en la justificación de la congruencia de triángulos, la elección de una representación matemática y su manipulación y en la solución de ecuaciones, entre otros. La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y, por lo tanto, deben ocupar un lugar especial en la formación escolar.
- *Plantear y resolver problemas.* Hay algunos elementos que vale la pena subrayar. En primer lugar, que no todo problema permite conducir a ideas matemáticas aunque sea interesante o divertido, por eso la acción docente es decisiva para el diseño de problemas apropiados. En segundo lugar, en cada área matemática es posible realizar este proceso de distintas maneras, pero siempre de modo gradual. Las estrategias para la resolución de problemas deben ser introducidas no de forma abstracta, sino en las instancias específicas en los problemas escogidos: a veces será potenciar el uso de diagramas, otras el reconocimiento de patrones, o la prueba con la exhibición de casos, etc. También es necesario entrenar a los estudiantes en las diferentes etapas de la resolución de problemas como la comprensión de los mismos, el trazado de planes de acción y la evaluación o monitoreo de las acciones.
- *Comunicar.* Este proceso está asociado a una característica esencial de los quehaceres matemáticos: una idea matemática para ser "correcta" debe ser aceptada por una comunidad profesional de matemáticos. Existen reglas específicas para hacer esto, lo cual es importante de incluir en los programas escolares. El proceso sugiere la comunicación en distintos niveles y formas, desde las más simples como verbales o escritas, hasta gráficas, simbólicas y formales.
- *Conectar.* Es necesario tener una visión amplia de lo que este proceso supone en el medio educativo. Las conexiones se pueden desarrollar en muchos contextos: por ejemplo, dentro de cada área matemática

(como cuando se aplican los procedimientos y operaciones de los números naturales en los racionales o reales). Pero también entre las distintas áreas matemáticas y de manera general con otras materias. Las matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar diversos procesos transdisciplinarios que se deben cultivar desde los primeros años escolares. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces.
- *Representar.* Pretende fomentar el reconocimiento, la interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas y tabulares).

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada (MEP, 2012: 24-26).

Los procesos seleccionados trabajan de manera integrada y provocan gradualmente capacidades transversales, fortaleciendo a la vez la generación de las habilidades.

Otro medio para provocar el desarrollo de las capacidades cognitivas superiores y la competencia general en el aula es el trabajo de los problemas en diversos niveles de complejidad. El planeamiento, la gestión y el desarrollo de aula, lo mismo que la evaluación, deben tomar en cuenta los conocimientos, habilidades, procesos matemáticos y distintos niveles de complejidad. Los procesos seleccionados trabajan de manera integrada y provocan gradualmente capacidades transversales y fortalecen a la vez la generación de las habilidades.

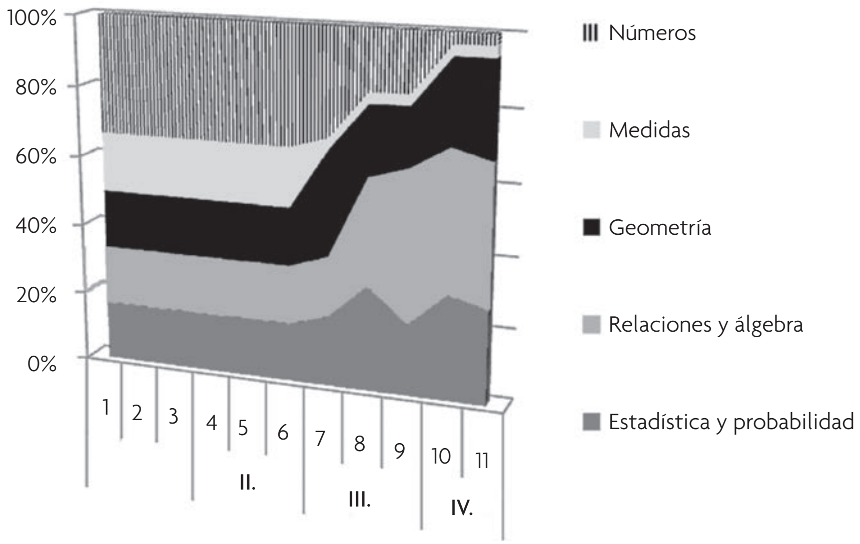
El currículo asume por conveniencia los tres niveles de complejidad: reproducción, conexión y reflexión, esencialmente como fueron conceptualizados por PISA en 2003 (OECD, 2003).

Organización del currículo

El currículo se diseñó con una integración vertical del primer grado escolar al último. La fundamentación teórica (filosófica y curricular) es la misma para todo el currículo, las áreas matemáticas son las mismas. Esta es una diferencia en relación con los programas anteriores. Se busca con ello no sólo el desarrollo de perspectivas estratégicas de las áreas, para poder seguir su desarrollo en toda la formación escolar, sino además contribuir a disminuir las brechas que han predominado entre la escuela primaria y la secundaria en Costa Rica (Ruiz, 2006).

Las áreas y el espacio (definido por el tiempo de dedicación) que se propone ocupar en cada año escolar se muestran en la siguiente gráfica.

Gráfica 1. Las áreas del currículo escolar de matemáticas en Costa Rica



Varias son las características (cuantitativas) que ya se pueden observar en esta propuesta:

- Números ocupa un espacio mayor en la educación primaria, luego disminuye en el tercer ciclo y se convierte en transversal en el diversificado.
- Geometría es constante en todos los años escolares.
- Medidas ocupa un lugar en primaria, luego se vuelve transversal. No desaparece en la secundaria, lo que sucedía antes, con lo que se perdían oportunidades valiosas para la contextualización.

- Relaciones y álgebra inicia desde el primer año escolar; el énfasis en los aspectos relacionales y no simbólicos da lugar a tópicos que estaban disgregados anteriormente, con lo cual se enfoca y potencia su papel en el currículo (ésta es otra ruptura con lo anterior).
- Estadística no se enseñaba en el ciclo diversificado y por eso su desarrollo en las aulas era inexistente, pues no se incluían sus temas en las pruebas nacionales de bachillerato. Era usual que los docentes dejaran estos tópicos para el final, y así no tener que revisarlos en el aula. Probabilidad no se veía en la secundaria, lo cual es otro cambio conveniente en cuanto a los contenidos.

Un énfasis pragmático en el currículo, consistente con la formación escolar que se propone, influye en la manera como se trata cada área (contenidos y enfoques).

Se ha dado un lugar relevante a probabilidad y estadística materias que ven todos los años escolares, precisamente porque es un área que aporta grandes posibilidades de realizar el enfoque principal: resolución de problemas con énfasis en contextos reales. También porque permite amplias conexiones con otras áreas matemáticas.

Números no se afirma aquí como dominio de sistemas formales, sino como recursos para el manejo de objetos y medios matemáticos hacia la modelización de la realidad física y social. Se apuesta a desarrollar el sentido numérico, la presencia de las presentaciones numéricas múltiples, el cálculo, la operatoria instrumental en los problemas, y la comprensión de los entes matemáticos que dan cuenta de la "cantidad" dentro de una perspectiva pragmática en sus fundamentos, aunque puedan tener niveles amplios de abstracción. En particular "Se busca robustecer un *sentido numérico*, mediante una apropiación del valor absoluto y relativo de los números; esto refiere, por ejemplo, al uso de los números para representar dimensiones o entidades de la realidad, a la estimación numérica de valores y de las operaciones aritméticas, a la 'razonabilidad' de cálculos" (MEP, 2012: 51). La representación múltiple de los números es un propósito importante.

El área de medidas se percibe como un campo al servicio de la contextualización activa propuesta y que refuerza el aprendizaje en las otras disciplinas. Su lugar en la conexión de situaciones es muy útil.

La geometría se aborda en varios sentidos: como conocimiento privilegiado tradicional para entrenar el razonamiento y la argumentación matemáticas, pero también como recurso formidable para trabajar los objetos espaciales y planos: la visualización espacial se introduce desde el primer año escolar. No se buscará en ningún momento usar geometría vectorial ni se pretenderá formalizar o profundizar excesivamente el trabajo matemático en tres dimensiones. El currículo anterior tuvo un enfoque totalmente "sintético". En el nuevo, desde el segundo ciclo escolar se introduce un tratamiento analítico mediante coordenadas (adaptadas a los sistemas numéricos que conocen los estudiantes). Este enfoque favorece las conexiones entre áreas matemáticas (como relaciones y álgebra), y ofrece múltiples posibilidades para percibir la potencia de la geometría en procesos de la vida cotidiana y profesional. Otra característica es la introducción de trasformaciones en el plano (simetrías, traslaciones, homotecias, reflexiones, rotaciones). Esto apela al movimiento de los objetos geométricos. El software de geometría dinámica se puede usar aquí de una manera natural, para evidenciar propiedades y objetos que serían muy difíciles de trabajar sin ese apoyo.

En relaciones y álgebra se potencia el pensamiento relacional; por ejemplo, en torno a las funciones. El arsenal simbólico y los objetos llamados tradicionalmente algebraicos (ecuaciones, fórmulas, variables, etc.) encuentran mayor significado si se trabajan en un ambiente de relaciones y funciones: "[…] un tratamiento 'funcional' de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo" (MEP, 2012: 54). Esta asociación: "entre funciones y álgebra permite darle coherencia a muchos contenidos que suelen estar dispersos en los planes de estudio usuales (*idem*). Un importante énfasis que se brinda a esta área es la modelización: usar el instrumental algebraico y funcional para identificar, usar y construir modelos sencillos de lo real: "Se podría decir que los procesos de cambio pueden ser modelados por las relaciones y funciones matemáticas, y éstas pueden tener distintas representaciones: gráficas, tabulares, simbólicas" (*idem*).

Ejes disciplinares

Se establecen cinco ejes (énfasis) curriculares: resolución de problemas, contextualización activa, potenciar actitudes y creencias positivas, uso inteligente de tecnologías y uso de historia de las matemáticas:

- Como eje curricular la "resolución de problemas" no pretende que sólo se entrenen estrategias o heurísticas para resolver problemas, sino sobre todo darle un sentido a la participación de los problemas en la organización de las lecciones, la construcción de aprendizajes y toda la práctica de aula.

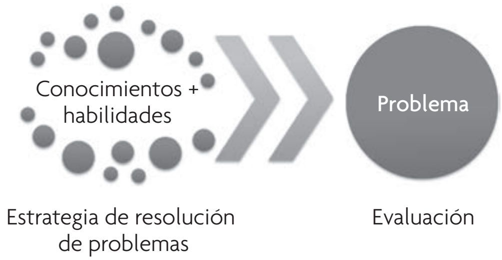
- La "contextualización activa" hace referencia al trabajo en contextos reales o que el estudiante asuma de esa manera. Se distancia del clásico enfoque de aquellas situaciones matemáticas revestidas de contexto de una manera artificial (problemas con palabras), y se monta sobre una manipulación de la información de la realidad circundante y en el uso de la modelización (empleo y construcción de modelos).
- Una fusión de los dos primeros ejes constituye el enfoque principal del currículo: la resolución de problemas con un énfasis especial en contextos reales. Este planteamiento busca potenciar una estrategia para la acción: construir aprendizajes por medio de problemas con hincapié en aquellos tomados de los diversos contextos reales. Implica la planificación, la gestión y el desarrollo en el aula y la evaluación. El énfasis curricular, debe insistirse, no está en los contenidos (conocimientos y habilidades) sino en la acción pedagógica.

Estos ejes buscan, por un lado, dar un orden de prioridades al currículo (una dirección), esencial para su implantación, con base en la identificación de las necesidades educativas del país por ausencia de su realización en el pasado y presente, o de dimensiones que el escenario histórico plantea de cara al futuro. Por otro lado, se pretende apoyar, potenciar e integrar diversas acciones que están dispersas en el currículo de manera inevitable. Todos estos ejes se instrumentalizan de forma precisa en la malla curricular.

Integración de habilidades
El programa señala que:

> Una de las orientaciones relevantes para el desarrollo de la acción de aula con este currículo refiere al manejo de los contenidos y las habilidades específicas. Las habilidades no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado. Por el contrario, lo conveniente es tratar de integrar las habilidades específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación. Por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades (MEP, 2012: 45).

Figura 1. Esquema de estrategia de integración de conocimientos y habilidades.



Este es un asunto crucial: rompe el esquema conductista de los "objetivos programados" al favorecer una gestión integrada de contenidos y acciones de aula. Es una consecuencia directa de asumir la resolución de problemas como enfoque (donde es natural que haya varias habilidades a la vez) y colocar el desarrollo de las habilidades como un propósito (las capacidades trabajan de manera integrada). Al mismo tiempo, posibilita la eficiencia en el manejo de los tiempos de lecciones en el calendario escolar, pues el docente podrá concentrar el desarrollo de sus clases, lo cual favorece un desahogo en su labor.

Ligado a lo anterior, con estos programas se busca que en el aula menos problemas se trabajen. En este sentido se propone menor amplitud y más profundidad. Con esta visión se introduce una mayor flexibilidad para modular la complejidad en función del tipo de alumno.

Vocación de apoyo al docente

Los conocimientos y habilidades se incluyen con base en la competencia matemática general que se desea generar, y que además se encuentran asociados de forma estrecha a las condiciones locales del país. Eso supuso eliminar temas incorporados por tradición en los currículos anteriores (por ejemplo, funciones trigonométricas).

El currículo facilita indicaciones generales sobre ejes curriculares, procesos y otros aspectos propuestos; sin embargo, una de las características especiales es la estructura de su malla curricular: un espacio donde se señala la naturaleza y los alcances de los contenidos que aparecen en las otras columnas. Se ofrecen aquí centenares de ejemplos de problemas, indicaciones para promover los procesos matemáticos, el uso de tecnología, de historia y para potenciar las actitudes y creencias positivas sobre las matemáticas. Se añaden también centenares de consejos sobre metodología y evaluación para cada área por ciclo educativo.

Figura 2. Ejemplo de la malla curricular.

<table>
<tr><th colspan="3">8° Año</th></tr>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th><th>Indicaciones puntuales</th></tr>
<tr>
<td>Números racionales
• Concepto de número racional
• Representaciones
• Relaciones de orden</td>
<td>1. Identificar números racionales en diversos contextos.</td>
<td>▲ Se pueden proponer problemas como el siguiente.
Aquí aparecen los precios de los combustibles.


PRECIOS NACIONALES (*)
LOCAL PRICES (*)
Precios en colones al consumidor en estaciones de servicio
Rigen a partir del 02 de Febrero del 2012
<table>
<tr><th>PRODUCTOS
PRODUCTS</th><th>PRECIO / litro sin imp. Único
cost / litre without tax</th><th>Imp. único
Tax</th><th>Margen Promedio de Estaciones de Servicio
Local Services stations Average Margin</th><th>Precio / litro total
Total Cost / litre</th></tr>
<tr><td>Gasolina Super
Super Gasoline</td><td>351,7460</td><td>213,0000</td><td>50,5548</td><td>615,0000</td></tr>
<tr><td>Gasolina Plus 91
Plus 91 Gasoline</td><td>346,3730</td><td>203,5000</td><td>50,5548</td><td>600,0000</td></tr>
<tr><td>Diesel 50
Diesel 50</td><td>403,7050</td><td>120,2500</td><td>50,5548</td><td>575,0000</td></tr>
</table>
Imagen tomada de:
http://www.recope.go.cr/info_clientes/precios_productos/
Si en la gasolinera pido que me vendan ₡10 000 en gasolina Plus 91, ¿cuántos litros me dan?
▲ Problemas como éste permiten introducir la necesidad de utilizar otros números diferentes a los enteros.</td>
</tr>
</table>

En la figura de arriba se muestra la estructura de la malla curricular, en la columna de indicaciones puntuales se ofrece una muestra de la contextualización activa que se propone como eje.

Estos aspectos aseguran una convergencia entre los fundamentos teóricos del currículo y la malla curricular, con una poderosa vocación de apoyo al docente en servicio.

El Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

El principal medio para implementar este currículo se ha dado con el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, elaborado por Ángel Ruiz con el acuerdo del ministro de Educación y presentado a la Fundación Costa Rica Estados Unidos para la Cooperación con el fin de obtener un apoyo económico sustancial. El proyecto ha tenido vigencia entre 2012 y 2015. El MEP brinda una contrapartida relevante en términos de docentes en servicio que trabajan directamente con el proyecto, y todos los aspectos implícitos de su logística.

Esto fue puesto en marcha por la misma comisión que redactó los programas nuevos, fortalecida por otros profesionales. Este equipo:

- Fue el responsable de redactar una segunda versión de la propuesta curricular.
- Diseñó un plan gradual para instalar durante tres años el nuevo currículo y una estrategia responsable, dada la profundidad de la reforma propuesta.
- Realiza desde 2012 "planes piloto" que permiten tomar el pulso a la implementación, así como ofrecer elementos para las acciones en esa dirección.
- Elabora múltiples documentos de apoyo para la implementación curricular.
- Desarrolla cursos bimodales de capacitación docente que integran sesiones presenciales y trabajo independiente con materiales colocados en una plataforma tecnológica; estos deben ser estudiados por los docentes y combinarse mediante sesiones en línea con prácticas de autoevaluación y exámenes.
- Construye cursos virtuales que buscan reforzar las poblaciones docentes que realizan los bimodales, así como acceder a nuevos segmentos educativos para ampliar los procesos de capacitación.

Para potenciar todos los procesos de capacitación y las diversas acciones de la reforma, el proyecto creó una comunidad virtual de educación matemática que integra más de un millar de docentes de primaria y secundaria, el cual se ha constituido en referencia de la reforma en la educación matemática en Costa Rica. Sus objetivos han tenido una gran fuerza sinérgica.

Plan de transición en la implantación

Debido a la profundidad de los cambios del nuevo currículo, que demandan ajustes de contenidos y enfoque, así como preparación docente, el proyecto incluye un plan de transición para implantar gradualmente los nuevos programas, entre ellos algunos transitorios que desarrolla el país para, de manera responsable, tener los programas establecidos completamente en 2016 en la educación formal académica (sólo faltando la educación técnica y la educación abierta para una disposición posterior):

- En 2013, tan sólo en el primer año lectivo se instalaron los nuevos programas en su totalidad: los años que van del segundo al octavo realizan un plan transitorio con base en los nuevos programas (Transición 1), del noveno al undécimo año un plan de transición con base en los contenidos del programa anterior (Transición 0). En todos los casos se buscó establecer el enfoque y la metodología que proponen los nuevos programas.
- En 2014, primero y segundo año asumen todo el currículo, de tercero a noveno año se realiza otra transición con base en los nuevos programas (Transición 2), de décimo a undécimo la base de contenidos son los programas viejos.
- En 2015, del primero al décimo estarán vigentes los nuevos programas, y sólo el undécimo año queda en una transición final con base en los antiguos esquemas. Para cada año el proyecto contempla planes específicos de transición y guías para la acción docente.

Planes piloto

El proyecto diseña planes piloto. Su propósito fue identificar las virtudes y debilidades que generaba la puesta en marcha curricular, para ofrecer recomendaciones a las autoridades ministeriales, docentes y asesores. En breve, para medir el pulso de la reforma. Cabe resaltar el rigor y calidad del trabajo realizado: incluye la elaboración y aplicación de instrumentos de percepción docente en diversos momentos, herramientas de observación de aula y entrevistas con asesores. Se aplican también técnicas de la investigación cualitativa como la validación de instrumentos y la triangulación de resultados. Y también se acude a la utilización de la plataforma Moodle para conducir, apoyar y administrar los programas piloto.

Capacitaciones bimodales

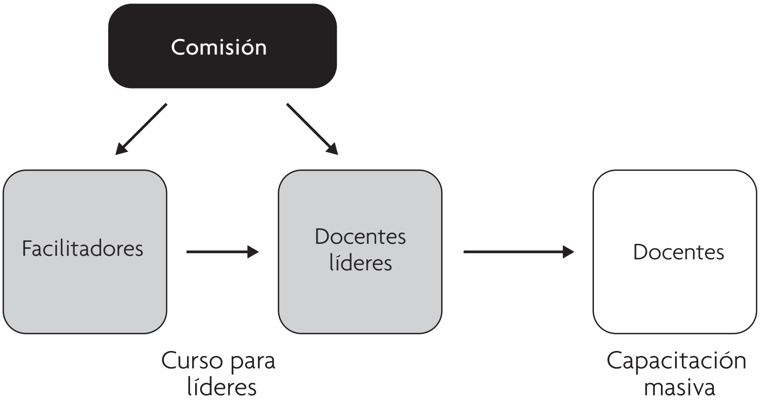
La estrategia procura materializar en el contexto local de Costa Rica lo que la investigación internacional ha aportado sobre la capacitación docente en sistemas educativos de alto rendimiento, como se ha consignado en el Informe Mackinsey (Barber & Mourshed, 2007), por ejemplo: usar como entrenadores a profesores en servicio de calidad, y proyectar tener su apoyo en cada escuela y aula. Esta orientación contrasta con enfoques de capacitación docente dominantes dentro de las comunidades universitarias del país. Existe una constatación: no son eficaces los esquemas con académicos universitarios que ofrecen cursos esporádicos a maestros de escuelas y colegios (normalmente distanciados de las realidades de aula) y que no ofrecen continuidad alguna a la preparación y acción de los docentes en servicio.

La estrategia propuesta fue la realización de cursos bimodales, compuestos de sesiones presenciales y además trabajo por medio de una plataforma tecnológica (se escogió Moodle por ser robusta y conocida en los medios locales). El contenido de los cursos correspondía al enfoque curricular, e incluso una reproducción en su estructura de la estrategia pedagógica propuesta en el nuevo currículo: la resolución de problemas con énfasis en contextos reales, con colocación inicial de situaciones de interés o problemas sobre los cuales desencadenar las acciones didácticas para concluir con la institucionalización de resultados.

Esto es importante resaltarlo: lo usual en ese país centroamericano eran capacitaciones sólo de contenidos matemáticos, lo cual reflejaba dos aspectos. Por un lado la incomprensión en los medios académicos (especialmente los universitarios) sobre la integración necesaria entre pedagogía y matemáticas, y por el otro las dificultades para plasmar cursos con una óptica diferente (orientados a la acción pedagógica específica de matemáticas en las aulas). Aunque los reformadores no han buscado sustituir lo que la preparación inicial universitaria debería haber aportado, resultaba inevitable diseñar las capacitaciones que de alguna manera compensen las debilidades formativas. Los cursos nuevos debían contener, a la vez y de manera integrada, contenidos matemáticos y estrategias pedagógicas idóneas.

Para poder "llegarle" a poblaciones masivas de docentes se ideó realizar cursos en dos fases esenciales. En la primera se daría el curso a docentes líderes y a los asesores pedagógicos regionales (y nacionales) del MEP. En la segunda etapa el curso se replicaría en poblaciones numerosas de docentes. Los cursos para líderes serían impartidos por facilitadores entrenados directamente por la comisión redactora de los programas, y con un control estrecho del proceso por parte de la misma. Los cursos masivos serían dados por los docentes líderes y los asesores regionales. El siguiente gráfico muestra cómo se concibió esta socialización-capacitación.

Figura 3. Esquema de capacitación en dos tiempos.



El trabajo en la plataforma ha tenido dos componentes: documentos de estudio en formato PDF, los cuales deben ser descargados y estudiados de manera independiente; y un trabajo en plataforma por cada docente, donde se realizan prácticas de autoevaluación y exámenes en línea.

El curso para docentes líderes de secundaria y asesores se denominó Grupo 80. Para docentes líderes en primaria Grupo 300. Los cursos masivos para docentes se llamaron Grupo 1400 (secundaria) y Grupo 6000 (primaria). El número en las denominaciones refería a la cantidad mínima de docentes que debía estar en cada proceso para poder capacitar a un aproximado de 7 400 docentes en el sistema educativo durante un año.

Cursos virtuales

El proyecto incluye como objetivo la realización de cursos virtuales, con base en los materiales elaborados para los cursos bimodales. No se trata de cursos donde tan sólo se cuelgan documentos en formato PDF, que se descargan y estudian para luego ser evaluados. Aquí la interactividad es clave: se trata de una estrategia cualitativamente distinta, que se refleja –entre otras cosas– en el uso de plataformas tecnológicas diferentes.

Su propósito es proporcionar más medios para que los docentes puedan capacitarse, repasar lo que se estudió en los bimodales o estudiar esos temas si no se tuvo la oportunidad de participar en los cursos y aprovechar las facilidades que ofrece Internet. Estos cursos virtuales pueden además ser usados por los funcionarios que brindan asesoría a nivel regional o nacional para realizar sesiones presenciales especiales con base en esos materiales. El modelo usado es el de los *Massive Open Online Courses* (MOOC), los cuales aun cuando se han desarrollado para la educación superior, constituye una forma dinámica y eficiente --por medio de videos y otros objetos didácticos-- para provocar la interacción y brindar capacitación docente.

Comunidad virtual

A principios de 2013 el proyecto diseñó y construyó una Comunidad Virtual de Educación Matemática (CVEM), la cual había sido incluida como objetivo del mismo. En este espacio virtual se tiene acceso a los programas, planes de transición y todos los documentos oficiales relacionados con la reforma, se ofrecen materiales usados en capacitaciones, se desarrollan foros, chats y blogs sobre los temas de la implantación curricular.

Figura 4. Imagen de la página de inicio de la Comunidad Virtual de Educación Matemática.

Sinergia
Los objetivos de este proyecto tienen una gran fuerza sinérgica. El plan de transición se basa en las características y desafíos que el nuevo currículo encierra. De igual manera, los planes piloto deben usar los programas específicos del plan de transición para su realización, además de subrayar las indicaciones y sugerencias que aparecen en los programas. Los cursos bimodales deben condensar el enfoque curricular y tomar en cuenta los resultados de los pilotos. Los cursos virtuales se construyen a partir de los bimodales y complementan las capacitaciones previas. La comunidad es, justamente, el medio que integra a docentes y profesionales para obtener información, conseguir documentos, interactuar, plantear interrogantes y generar una sensación de colectividad conectada por los propósitos de la reforma curricular.

Tecnologías de la comunicación
Un detalle relevante a ponderar sobre esta reforma es el uso intensivo de las tecnologías de la comunicación: cursos bimodales y planes piloto con plataforma Moodle, además de minicursos en línea, comunidades y cursos virtuales. El proyecto asume que esta utilización intensiva constituye una vía para potenciar la reforma curricular, lo cual permite interactuar con poblaciones más amplias (aumentando el impacto de las acciones), trabajar de una manera más flexible y eficiente que prescinde de muchas limitaciones impuestas por la distancia física, y construir objetos de capacitación escalables, que pueden ser evaluados de una manera precisa, colocándose en las perspectivas dominantes del escenario que vive el planeta. Esto cultiva una cultura del uso de tecnología en la educación nacional.

Proyecto y reforma
La reforma de la educación matemática en Costa Rica no es responsabilidad exclusiva de este proyecto, que se desarrollará en un plazo relativamente corto. Las diferentes instancias del MEP tienen un papel significativo que jugar: el Instituto de Desarrollo Profesional, los viceministerios, el Departamento de Evaluación de los Aprendizajes, el Departamento de Desarrollo Curricular, el Departamento de Gestión de la Calidad Educativa y asesorías pedagógicas regionales, entre otras. Sin embargo, las acciones de este proyecto han demostrado ser fundamentales para la implementación curricular.

El corazón del equipo humano que ha desarrollado esta reforma posee como referencia en los años recientes el Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática, el cual ha tenido un compromiso con el progreso de la disciplina que le ocupa.

Este grupo organiza eventos internacionales, simposios, congresos, edita artículos, revistas y libros que convergen plenamente y refuerzan las actividades formalmente estipuladas del proyecto. Por ejemplo, en agosto de 2012 se organizó en Costa Rica una Escuela Seminario Internacional para la Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática, con el patrocinio de la International Commission on Mathematical Instruction, la International Mathematical Union y el International Council for Science. Este evento fue una capacitación vigorosa ofrecida por expertos internacionales, donde pudo ser incorporado un importante contingente de asesores nacionales y regionales del MEP, lo cual benefició su preparación dentro de esa perspectiva del proyecto, así como favorecer el objetivo del Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de construir un liderazgo pedagógico. Otro ejemplo: el I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe, celebrado en República Dominicana en noviembre de 2013, fue un evento que ha servido también a los propósitos de esa reforma en Costa Rica.

Por lo demás, las acciones de miembros de esta comisión han atraído la atención de la comunidad internacional de educación matemática, lo que se ha reflejado en solidaridad y apoyos directos a la reforma en Costa Rica.

Perspectiva de la praxis

Una característica que muestra este proceso de reforma es lo que Ruiz (2013) llama una *perspectiva de la praxis*. Esto se manifiesta en varias dimensiones:

La implementación ilumina el diseño curricular

El diseño del currículo se realizó como parte de una estrategia global, donde la instalación era un elemento central orientador. No se trató de diseñar un programa *in vitro* que luego se buscaría implantar de alguna manera. El diseño del currículo estuvo determinado desde un principio por lo que se deseaba en la práctica, para la acción de aula. El texto curricular es una acción dentro de una perspectiva general de reforma que invoca procesos de capacitación, formación y múltiples recursos de apoyo al docente.

Una visión pragmática de la formación matemática escolar
El propósito final propuesto para la preparación matemática escolar consiste en robustecer su sentido pragmático: no plantea meramente la ampliación de contenidos o el dominio de las típicas destrezas del matemático. Esta nueva visión se expresa en la adopción de la idea de "competencia matemática" desarrollada en el marco teórico de PISA. Los ejes curriculares, otro ejemplo, muestran no sólo los ajustes o énfasis que se desean desarrollar en el escenario específico que vive Costa Rica, sino la vocación práctica que desea un fortalecimiento de mayores capacidades cognitivas para una mejor actuación en la vida.

Una filosofía de las matemáticas
En un plano aún más general, hay una valoración de las matemáticas como construcciones históricas y culturales con un peso fuerte del mundo empírico, físico y social, que sostiene la visión sobre las matemáticas escolares y la actitud teórica hacia el diseño curricular. Esta es una visión basada en los trabajos de Ruiz (1987, 1990a, 1990b, 1992, 1995a, 1995b, 1995c, 2000, 2001, 2003).

Utilización pragmática de los hallazgos de investigación y prácticas exitosas internacionales
Hay un uso autóctono y funcional de los elementos que se identifican en la investigación y la experiencia de la educación matemática internacional, etcétera.

Construcción de una teoría propia
No sólo no se ha adoptado un modelo externo (aunque fuera "tropicalizado"): se ha realizado una construcción intelectual propia, avanzando ideas sobre el diseño curricular y su implementación, una contribución a la investigación y experiencia internacional; estos resultados se dirigen a condiciones propias de un país periférico, en vías de desarrollo, lo que no ha sido foco de la investigación internacional en educación matemática.

Un equipo humano con experiencia y compromiso de acción
Se debe reconocer como elemento central que esta reforma ha contado con un equipo de personas con amplio conocimiento de la educación matemática internacional y de la realidad local. Los planteamientos fueron construidos

en una búsqueda de armonía entre lo que arroja la investigación y lo que moldea la experiencia de aula.

Una reforma inconclusa, no lineal y combinada

Los ritmos y estrategias para realizar una reforma en la educación matemática dentro de un país en desarrollo son especiales. En primer lugar, la profundidad y la intensidad de la reforma no son similares a las de otros países, en tanto las macro condiciones sociales y educativas han impuesto restricciones y limitaciones. Como ha sido en el caso de Costa Rica, las acciones reformadoras han debido de ser muchas y realizarse en tiempos perentorios. Esto condiciona los ritmos y las condiciones de la reforma. En la reforma, de manera simultánea y combinada se elabora y reelabora el currículo, se dan capacitaciones, se trabaja con tecnologías en diversos grados en distintos escenarios, se generan documentos y actividades de persuasión político-social, se enfrentan "cuellos de botella" institucionales, se organizan seminarios y eventos académicos nacionales e internacionales.

Dificultades, desafíos y perspectivas

Reacciones negativas iniciales y su evolución

Una de las primeras dificultades que debió enfrentar esta reforma fue la actitud negativa inicial de algunas dependencias de universidades públicas, algunos gremios de docentes y algunos sectores de la estructura del MEP. Ésta se dio en parte como reacción a que la propuesta fue elaborada por un equipo *independiente* de investigadores y docentes en servicio y no por un conjunto de funcionarios ministeriales; tampoco se dio participación directa de gremios, ni se trató de una comisión oficial seleccionada por las universidades. Esto despertó un "recelo", tanto en el MEP y sindicatos docentes como en las universidades.

La actitud negativa inicial se ha transformado con la aprobación de los programas. En cuanto a los gremios docentes, simplemente no volvieron a considerar el asunto. Funcionarios ministeriales que expresaron su reticencia al principio, se han ido sumando a las acciones de implementación.

En las universidades

Las universidades públicas, en diferentes grados, comprometen esfuerzos sintonizados con los nuevos programas (con cursos de capacitación o ajustes en programas de formación). El desafío es lograr que estas instituciones puedan identificar y comprender correctamente el significado de los cambios e ideas curriculares, realizar sus acciones de capacitación y orientar sus programas de formación inicial en convergencia con las necesidades que tiene la reforma. Esto tomará tiempo.

El reto general de las universidades lo recogen Alfaro, Alpízar, Morales, Ramírez y Salas (2013: 27): "Una de las carencias centrales de todos los programas iniciales de formación es la casi inexistente pedagogía específica de las matemáticas. Estos programas en mayor o menor grado son yuxtaposiciones de pedagogía general y matemáticas (en el caso del TEC solamente se añaden contenidos de computación)".

Para Ruiz, Barrantes y Gamboa (2009: 222):

> [...] en las instituciones estatales, los cursos de matemáticas no corresponden a las necesidades del educador matemático, están asociadas al tipo de matemáticas que debe recibir más bien el matemático puro (el investigador matemático). Esto se aprecia en los contenidos escogidos (en general son muchos y su lógica es la de las matemáticas), en la ausencia de contextualizaciones, vínculos con la pedagogía, en la forma de evaluar, etc. En las instituciones privadas: no solo no se aprecia una visión distinta de las matemáticas a la que existe en las estatales, sino que, además, la cantidad de matemáticas y sus métodos es más reducida.

Si bien en ambos tipos de institución el conocimiento pedagógico de las matemáticas ocupa un lugar débil, éste es más frágil en las universidades privadas estudiadas.

La preparación inicial de los docentes de primaria es muy endeble. Esto corresponde al modelo de enseñanza que contempla un docente por casi todas las materias, lo que ha supuesto una formación inicial generalista. Esto es común en varias latitudes. En algunos países se ha buscado especializar la acción de aula y la preparación de los educadores de primaria (por ejemplo, asociar matemáticas y ciencias y buscar potenciarlas) para mejorar su enseñanza; y también usar una preparación especializada en estas áreas para nutrir la docencia de toda una institución escolar (procurar que siempre haya especialistas que apoyen al resto de docentes de una escuela). Una de las lecciones internacionales muestra que al ofrecerse una formación de calidad en la secundaria y una preparación universitaria "buena", el docente de primaria –aunque sea formado de manera generalista– estará en condiciones de realizar una práctica de aula más eficaz. De nuevo, se vuelven centrales la pertinencia y calidad de los programas de formación inicial en las universidades. Lo que se resalta es el carácter holístico de las acciones que se deben considerar. Por ende, será un desafío poderoso transformar la acción escolar y mejorar la preparación inicial de los docentes en matemáticas.

Para los ritmos de esta reforma educativa será relevante que las universidades formadoras de docentes logren generar profesionales de calidad y sintonizados con los cambios que esta reforma ha introducido en las matemáticas escolares. No dependerá solamente de las universidades que en la legión de maestros en servicio haya cada día mejores profesionales, pero éstas tienen una primordial cuota de responsabilidad. Las limitaciones debidas a ideas o actitudes erróneas deberán dejar lugar a compromisos rigurosos con la calidad y la pertinencia de los profesores para las nuevas generaciones.

También está en manos de las universidades realizar una selección apropiada de los postulantes a docentes, lo que la experiencia internacional señala como el mecanismo más eficaz para potenciar la calidad de la docencia: mejor que la selección *a posteriori* (Barber y Mourshed, 2007: 19). Una combinación de ambas orientaciones está en la agenda, lo que sólo se podrá dar si se establece una alianza estratégica entre las universidades formadoras y el MEP.

Tanto para responder a las debilidades de la preparación inicial en las universidades públicas como en las privadas, será relevante que el Estado condicione el ingreso a su fuerza laboral (es el principal empleador) a la superación de pruebas de incorporación.

En los paradigmas educativos y culturales

Uno de los desafíos mayores es cambiar el anterior paradigma de acción pedagógica, un estilo de enseñanza de las matemáticas dominado por esquemas mecánicos, conductistas, al que han contribuido los currículos anteriores, la preparación ofrecida por las universidades y la inercia del pasado. Este no es un problema exclusivo de Costa Rica, afecta a muchos países. El cambio de estructura que proponen los nuevos programas requerirá no sólo de voluntad o una buena actitud, sino también de recursos didácticos y diversas acciones que deberán involucrar a varias entidades del país. No es posible pensar un mejor desarrollo de esta reforma si los instrumentos oficiales para administrar el planeamiento y la evaluación no convergen con la misma.

Otro desafío es potenciar una cultura del uso de las tecnologías de comunicación para coordinar y capacitar al docente. No solamente se trata de introducir en el aula las tecnologías (lo que ya es en sí un reto) y conectarse con las nuevas generaciones y con un escenario que incrementará su presencia, sino que estos medios sean incorporados en la preparación docente y en la discusión edificante de opciones para la acción de aula. Esto será difícil no sólo porque no ha existido la cobertura informática necesaria (aunque en Costa Rica se ha fortalecido notablemente en los últimos años), sino porque los docentes no han estado preparados para el uso de plataformas tecnológicas y un manejo tan intenso de la red y la tecnología.

La sensibilización de madres y padres de familia no está fuera del juego. Los cambios de enfoques pedagógicos podrán ser incomprendidos y generar un rechazo social. Por ejemplo, si un padre de familia no llega a comprender que el número de problemas que un estudiante trabajará en el aula ahora será menor, éstos se resolverán con mayor profundidad.

Condiciones docentes

Un desafío que trasciende la enseñanza de las matemáticas será mejorar las condiciones generales para la docencia de aula. Aquí está el tema del estatus del docente, que no es únicamente un asunto salarial. Está por ejemplo el tiempo de la jornada laboral, que el o la docente pueda destinar a la formación continua, planeación, estudio de las lecciones, tiempo para atender a madres y padres de familia. En Costa Rica hay un número inadecuado de horas contacto en el aula que no deja espacios a la superación profesional. Ruiz (2006: 182) ya resumía este desafío:

> […] en los países con mejores sistemas educativos del mundo existe una importante fracción de la jornada del educador que es destinada a actividades fuera del aula, ya sea en la institución o fuera de ella. Muchas de estas horas de trabajo se dedican a la planificación meticulosa de las clases, a la preparación, a la capacitación regular, a la investigación, etc. Esto nos parece fundamental […] El país debe explorar la forma de transformar esa estructura con base en definiciones precisas en cuanto a lo que se espera debe hacerse en cada fracción de la jornada del educador. Esto, por supuesto, involucra muchas dimensiones, entre ellas mayores recursos e infraestructura (se requiere, para empezar, de más educadores para atender la misma población). También un sistema de supervisión educativo

> relacionado íntimamente con el desempeño profesional. Es una de las principales acciones que debe asumir la educación nacional.

Si una profesión no es vista como competitiva en relación con el salario, estatus y condiciones laborales, será muy difícil atraer hacia ella a los mejores estudiantes. Es necesario un proceso de selección cuidadosa de postulantes a docentes, pero debe corresponder a esa competitividad profesional. No podrá generarse si el país permite que muchas universidades saquen al mercado laboral *profesores exprés* de baja preparación que pueden integrarse a la acción profesional sin dificultad alguna. La contratación de docentes debe ser rigurosa y exigente. Además, debe haber sistemas de certificación de la calidad profesional y un sistema de inspección apropiado. Lo ideal es que estos sistemas de inspección en el futuro no existan y que la acción individual de los docentes sea muy libre, mas para llegar a ese momento (como lo han hecho sistemas educativos de alto rendimiento en el mundo) se requiere pasar por otras etapas. Este es un desafío poderoso para el Estado y el país.

Ministerio de Educación Pública
La estructura piramidal y la persistencia de feudos administrativos en el MEP conspiran contra una reforma curricular. Por un lado, acciones e iniciativas descentralizadas son difíciles de desarrollar por los ritmos y tiempos que una estructura burocrática vertical debe invertir: todo se vuelve lento y engorroso. Y por el otro se da lo contrario: aun con la voluntad positiva de autoridades superiores ministeriales, se frenan las acciones en niveles nacionales y locales debido al accionar de funcionarios medios. En ocasiones por desconocimiento, en otras por rivalidad y celo “territorial”, por desacuerdo con las ideas de los programas o incluso para no invertir demasiado tiempo en las labores que demanda un nuevo currículo. Y es difícil cambiar la situación. En Costa Rica existe un sistema de servicio civil que asegura su puesto a los funcionarios estatales una vez obtenida su plaza en propiedad, sin mediar una comprobación de su eficacia o eficiencia laborales.

Comprensión del largo plazo de esta reforma
Un reto importante será lograr una comprensión nacional de los ritmos de una reforma tan profunda como esta. La implementación supone dificultades debidas a la inercia, temor al cambio, ajuste de expectativas de estudiantes,

docentes y administradores, falta de recursos apropiados. Durante un periodo de años se tendrá más bien una caída en las metas del proceso de cambio, para luego superar el nivel de partida con fuerza. Es lo que a veces se ha llamado *implementation dip* (Fullan, 2008).

Pese a que se pueden obtener localmente algunos importantes resultados en cuanto a motivación entre estudiantes y docentes, no se puede anticipar que mejoren en el corto plazo las promociones estudiantiles (por ejemplo en las pruebas nacionales al final de la educación secundaria). La experiencia internacional indica más bien lo contrario: un debilitamiento de las mismas en los primeros años.

La visión más acertada a cultivar sería que ante una reforma estratégica y profunda como ésta, el país debería invertir durante un periodo largo en su implementación y en la continuidad de las acciones que se desarrollan. No se debería vislumbrar tan sólo como un cambio en matemáticas, una asignatura más del currículo escolar, sino como una palanca apropiada para jalonar hacia delante toda la educación del país.

Conclusiones

Entre 2010 y 2015 se habrá realizado en Costa Rica un conjunto de acciones de reforma de la educación matemática que inevitablemente dejará una huella profunda. Se aprobó una reforma curricular radical, se desencadenaron procesos de formación continua y la construcción de recursos y medios de comunicación y proyección nunca antes vistos en la educación de este país. Las características específicas de estos cambios curriculares no pueden dejar de generar un gran impacto, pues se refieren no sólo a un ajuste de contenidos sino a la acción directa en las aulas, a la práctica educativa. Al ser una reforma integral para toda la educación primaria y secundaria, y especialmente en la primaria, impactará directamente los quehaceres en las otras asignaturas del currículo escolar. La presencia de tantos recursos de apoyo dentro de los mismos programas se vuelve un instrumento del cual alimentarse en la acción escolar, aunque no haya un proyecto o una comisión formal que inspire la reforma. La experiencia que se habrá sostenido por varios años, mediante el uso de plataformas tecnológicas y de Internet, en las capacitaciones docentes ha empezado a crear una cultura nueva, que si bien una política equivocada o mezquina podría debilitar, ya no se podrá abandonar en el país –todo apunta en el mundo a potenciar acciones educativas y trabajo con los profesionales de la docencia por medio de la tecnología.

La educación matemática en Costa Rica ya no es ni podrá ser la que existía hasta 2010, se quiera o no. La lucidez de un ministro para proponer una reforma en el currículo escolar de matemáticas y para escoger un equipo independiente de alto nivel en la educación matemática para llevarla a cabo, la presencia oficial de un currículo de vanguardia con parámetros internacionales, así como los avances en capacitación e implementación ya realizados, han trastocado para siempre la realidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en este país.

Bibliografía

Alfaro, A.L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez O. y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número especial, noviembre. Disponible en: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12225

Barber, M. & Mourshed, M. (2007). *How the World's Best-Performing School Systems Come Out On Top*, McKinsey & Company, Social Sector Office. Disponible en: http://www.mckinsey.com/clientservice/social_sector/our_practices/education/knowledge_highlights/best_performing_school.aspx

Brousseau, G. (1998). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishing.

Fullan, M. (2008). *The Six Secrets of Change*. Disponible en: http://www.michaelfullan.ca/images/handouts/2008SixSecretsofChangeKeynoteA4.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995a). *Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995b). *Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995c). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* Costa Rica: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1996). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001b). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005a). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005b). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas.* San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. San José: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2010a). *Making it Happen*. Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (trad. de Manuel Fernández Reyes). Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework-Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* París: OECD.

Organization for Economic Cooperation and Development (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Barcelona: Santillana Educación.

Organization for Economic Cooperation and Development (2010a). *PISA 2012 Mathematics Framework*. Disponible en: http://www.oecd.org/dataoecd/8/38/46961598.pdf el 6 de marzo de 2012.

Organization for Economic Cooperation and Development (2010b). *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do-Student Performance in Reading, Mathematics and Science* [Vol. I]. Disponible en: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/48852548.pdf

Rico, L. y Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruiz, A. (1985a). Implicaciones teórico-filosóficas del teorema de Gödel en el paradigma racionalista de la reflexión sobre las matemáticas. *Revista de Filosofía* de la Universidad de Costa Rica. XXIII, (58), diciembre.

Ruiz, A. (1985b). El factor "paradojas" y el factor "Gödel" en los fundamentos de la matemática. *Revista de Ciencia y Tecnología de la Universidad de Costa Rica* IX(12), 97108.

Ruiz, A. (1987). Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las Matemáticas Elementales. *Boletín de la Sociedade paranaense de matemática* VIII(1), junio.

Ruiz, A. (1988). El papel de la filosofía y la historia en la enseñanza de las matemáticas. Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa, marzo, Guatemala.

Ruiz, A. (1990a). *Matemáticas y filosofía. Estudios logicistas.* San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ruiz, A. (1990b). Matemáticas: una reconstrucción histórico-filosófica para una nueva enseñanza. En UNESCO. *Educación matemática en las Américas VII (Actas de la VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, República Dominicana, 12-16 de julio de 1987). Reeditado en *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 7, julio 2011.

Ruiz, A. (1992). Las matemáticas modernas en las Américas: filosofía de una reforma. *Educación matemática* (*Revista Iberoamericana de Educación Matemática*). 4(1).

Ruiz, A. (1995a). (Editor). *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción.* San José Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ruiz, A. (1995b). Fundamentos teóricos e históricos de la reforma de los programas de matemáticas en la primaria y secundaria costarricenses en 1995. En Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e investigadores en Matemática Educativa. La Habana, agosto de 1995.

Ruiz, A. (1995c). Constructivismo empírico y filosofía de las matemáticas. Comentario sobre ideas de Kitcher y Ernest. En *Memoria de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigadores en Matemática Educativa.* La Habana.

Ruiz, A. (1997). La educación matemática en Costa Rica. Un plan de emergencia. Manuscrito en archivo personal.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las matemáticas*. Heredia: Editorial de la Universidad Nacional. Disponible en: http://angelruizz.com.

Ruiz, A. (2001). Asuntos de método en la educación matemática. *Matemática, Educación e Internet* 2 (1), abril. Disponible en: http://www.itcr.ac.cr/revistamate

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*, San José: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia.

Ruiz, A. (2006). *Universalización de la educación secundaria y reforma educativa*, San José, Editorial de la Universidad de Costa Rica/Consejo Nacional de Rectores.

Ruiz, A. (2010). Conocimientos y currículo en la educación matemática. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6. Disponible en: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6925/6611

Ruiz, A. (2011). La lección de matemáticas a través de estudios internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*, Disponible en: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6950/6636.

Ruiz, A. (2013, julio). Reforma de la educación matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número especial,* Disponible en: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1186

Ruiz, A. y Barrantes, H. (1991a). La reforma matemática de la década de los sesenta en Costa Rica: aspectos ideológicos. En A. Ruiz (editor). *Ciencia y tecnología. Cuadernos del pasado y el futuro*. San José: Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia.

Ruiz, A. (1991b). Historia de la implantación de las matemáticas modernas en la educación costarricense. En A. Ruiz (editor): *Ciencia y tecnología. Cuadernos del pasado y el futuro,* San José: Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia.

Ruiz, A. (1998). *The History of the Inter American Committee of Mathematics Education* (edición bilingüe español e inglés). Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,.

Ruiz, A., Barrantes, H. y Gamboa, R. (2009). *Encrucijada en la enseñanza de las matemáticas: la formación de educadores.* Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Shimizu, Y. (2007). What Are the Characteristics of Japanese Lessons Emerged by the International Comparisons? En M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara y T. Miyakawa, *Japanese Lesson Study in Mathematics*, Singapur: World Publishing Co.

Shimizu, Y. (2009). Characterizing Exemplary Mathematics Instruction in Japanese Classrooms from the Learner's Perspective. *ZDM Mathematics Education* 41:311-318.

España

La educación matemática en España

José Luis Lupiáñez
Luis Rico Romero
Isidoro Segovia
Juan Francisco Ruiz-Hidalgo
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Granada

La educación matemática constituye en la actualidad un campo profesional y de indagación con repercusión y reconocimiento internacional. Para analizar la educación matemática en nuestro país identificaremos con claridad qué pretendemos abordar, cuál es nuestro objeto de estudio. La pluralidad de significados atribuidos a este campo de estudio y el uso de términos diferentes en distintos países para expresar esta misma idea, motivan la necesidad de concretar el significado del concepto.

Siguiendo a Rico, Castro y Sierra (2000: 353-354), consideramos tres sentidos diferentes para educación matemática. Estos sentidos aportan, singularmente, una herramienta analítica de reflexión y estudio y, en conjunto, un modo de considerar una ciencia clave en el desarrollo del ser humano y de la herencia cultural de las sociedades, que forma parte de la educación básica en todos los países.

En primer lugar, consideramos la educación matemática como el conjunto de conceptos, destrezas, competencias, convenciones, actitudes y valores matemáticos que se transmiten por medio del sistema escolar y cuya finalidad es organizar y estructurar el conocimiento matemático. Hablaremos en este caso de educación matemática escolar. En segundo lugar, identificamos educación matemática con la labor social que desarrolla un grupo de profesionales cualificados y que incluye la cualificación y la formación del profesorado, sobre la que también reflexionamos en el panorama español. En tercer lugar, consideramos la educación matemática como disciplina científica, a la que nos referiremos como didáctica de la matemática. Es en este ámbito en el que situamos la investigación, que también analizamos en este capítulo.

La caracterización de cada uno de estos sentidos en España requiere, en primer lugar, de la descripción de su contextualización y su desarrollo históricos, pues, en su mayor parte, los cambios educativos que se vienen sucediendo en nuestro país en los últimos años constituyen un claro reflejo de los cambios sociales, políticos, económicos y culturales de la sociedad española (Rico y Lupiáñez, 2008). En segundo lugar, precisa del análisis crítico de su estado actual, pues identificaremos así los principales logros alcanzados (Rico, 2013). En tercer lugar, también requiere la clarificación reflexiva de los retos que debe perseguir y que permite orientar las prioridades en la labor de los legisladores, los gestores educativos y la comunidad de educadores matemáticos, como mostramos en las conclusiones de este trabajo.

Este es el esquema conceptual con el que caracterizaremos la educación matemática en España. El capítulo se organiza en cuatro partes. La primera se centra en la educación matemática escolar, la segunda en la formación de profesores y la tercera en la investigación en didáctica de la matemática. Finalmente, en la cuarta, aportamos una serie de conclusiones que han surgido con motivo del trabajo realizado.

La educación matemática escolar

Las leyes educativas, que son parte importante en el desarrollo de cualquier país, han tratado de mejorar el funcionamiento del sistema educativo como servicio público accesible a todos los ciudadanos (Rico y Lupiáñez, 2008). Históricamente, cada reforma educativa que se ha implantado en España ha incorporado cambios con el propósito de que la escuela proporcione un entrenamiento intelectual, social y profesionalmente útil a los escolares y les prepare para participar de la cultura y formar parte la sociedad de cada momento (Castro-Rodríguez *et al.*, en prensa). Desde 1945 se han implantado cinco reformas educativas, cada una ha incorporado cambios e innovaciones y ha promovido un desarrollo curricular. Así, las reformas que comenzaron en 2006 (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) y la actual de 2013 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013), adaptan el currículo oficial de la educación obligatoria española a un sistema de enseñanza y aprendizaje basado en el desarrollo de competencias básicas.

Si queremos describir la situación actual de la educación matemática escolar en España, debemos analizar la formación competencial en esta área, y para ello recurrimos a dos fuentes de información principales. La primera es el Sistema Estatal de Indicadores de la Educación (SEIE), que recoge datos de los resultados de las evaluaciones nacionales de diagnóstico de los años 2009 y 2010. La segunda surge de los resultados de nuestros escolares en pruebas de evaluación llevadas a cabo por organismos internacionales en 2011 y 2012. En ambos casos los datos proceden de cada una de las dos etapas obligatorias del sistema educativo español: la educación primaria (de 6 a 12 años) y la educación secundaria obligatoria (de 12 a 16 años).

Resultados educativos en el sistema estatal de indicadores

El SEIE es una síntesis de los datos educativos relevantes en España en un determinado periodo. Su elaboración la inició el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE), creado en 1993 y entre cuyas funciones se estableció la de "elaborar un sistema estatal de indicadores que permita evaluar el grado de eficacia y eficiencia del sistema educativo" (Ministerio de Educación y Ciencia, 1993: 20373). El proyecto se basó "en la convicción de que los indicadores educativos son un instrumento indispensable para describir y conocer la realidad educativa de un país" (INEE, 2008).

En el año 2000 apareció la primera versión del SEIE, que contenía 30 indicadores, con datos bianuales. Posteriormente se han ido incorporando o eliminando indicadores para mejorar los inicialmente elaborados. Esta evolución se refleja en las versiones de 2002, 2004, 2006, 2007, 2009, 2010, 2011, 2012 y la última de 2014, en la que el sistema consta de 17 indicadores (INEE, 2014).

En la actualidad, el SEIE es elaborado por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). La información procede, principalmente, de las estadísticas educativas que genera la Subdirección General de Estadística y Estudios y, para los datos de estudios internacionales, de las bases de datos de dichos estudios.

Dentro del apartado de resultados educativos, los indicadores que vamos a considerar desde el punto de vista nacional proceden de las pruebas de evaluación de diagnóstico que se realizaron en España en 2009 (INEE, 2011b). Son los referentes a Competencias básicas en cuarto curso de primaria (8-9 años) y competencias básicas en segundo curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (13-14 años). Concretamente, los subindicadores relacionados con la matemática escolar se denominan Competencia Básica en Matemáticas.

Educación primaria. La primera evaluación diagnóstica realizada en España en 2009 evaluó cuatro de las ocho competencias básicas que contempla el sistema educativo español, entre ellas la competencia matemática. Los resultados se agruparon en cuatro tipos:

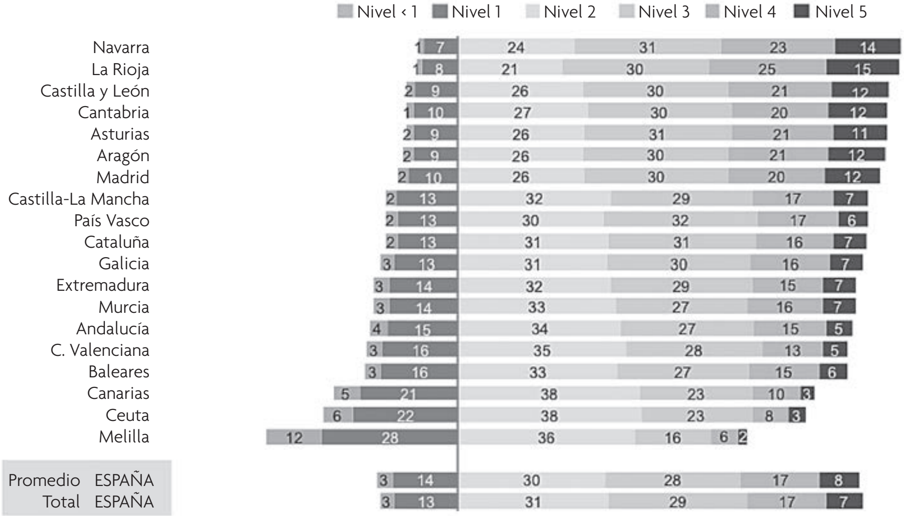
- Resultados globales, calculados en promedio, que proporcionaron información en el conjunto de España y en cada una de las Comunidades Autónomas.
- Variabilidad de los resultados globales.
- Niveles de rendimiento: para organizar las puntuaciones se establecieron cinco niveles de rendimiento: un primer nivel de adquisición de la competencia (bajo); tres niveles de adquisición de la competencia intermedios (intermedio bajo, intermedio central e intermedio alto); y un quinto nivel de adquisición de la competencia (alto). Estos niveles se describieron de acuerdo con los ítems en cada uno de ellos. Además, se incluyó un nivel inferior al primero para aquellos alumnos que no alcanzaron ese grado de competencia.
- Diferencias entre bloques de contenidos, que ofreció información valiosa sobre lo aprendido por los alumnos.

En esos resultados se pusieron de manifiesto el estado global de los estudiantes y los niveles de rendimiento. El promedio de los porcentajes de alumnos de cuarto de Educación Primaria (figura 1) en los niveles más bajos de rendimiento (nivel menor que 1 y nivel 1) fue de 17%; cuatro comunidades autónomas tuvieron porcentajes más altos que la media española de alumnado en estos niveles. El promedio de los porcentajes de alumnos en el nivel más alto de rendimiento (nivel 5) es de 8%; siete comunidades autónomas tuvieron un porcentaje de alumnos superior al promedio español en este nivel (INEE, 2010).

Por bloques de contenidos, (a) Números y operaciones y (b) Medida fueron los que peores resultados obtuvieron; y los mejores correspondieron a (a) Geometría y (b) Tratamiento de la información, azar y probabilidad, pues la mayoría de los ítems que componen esta dimensión fueron de dificultad baja (INEE, 2010).

Los resultados de los alumnos se relacionaron con factores como la titularidad de los centros, el índice socioeconómico y cultural de los alumnos y los centros, el nivel de estudios de los padres o el sexo. Por ejemplo, la titularidad del centro fue importante, puesto que los alumnos de los centros

Figura 1. Porcentajes de alumnos por niveles de rendimiento en competencia matemática en 4º de primaria, por comunidad autónoma (INEE, 2011b: 57).



privados tuvieron mejores resultados que quienes acuden a centros públicos (520 puntos los privados frente a 490 los públicos). Estos resultados se matizaron, e incluso se invirtieron, al hacerse correcciones referentes a los niveles social, económico y cultural de las familias y de los centros (501 puntos los privados frente a 505 los públicos). Otros factores que marcaron importantes diferencias fueron el nivel de estudios de los padres (los resultados crecen proporcionalmente al nivel de estudios de los padres); el número de libros de los que se dispone en casa (los alumnos que tienen entre 0 y 10 libros en casa obtienen un promedio de 445 puntos, frente a 531 puntos de promedio de los alumnos con más de 100 libros en casa); o la nacionalidad, puesto que los alumnos nacidos en España tuvieron resultados significativamente superiores a los no nativos (INEE, 2011b).

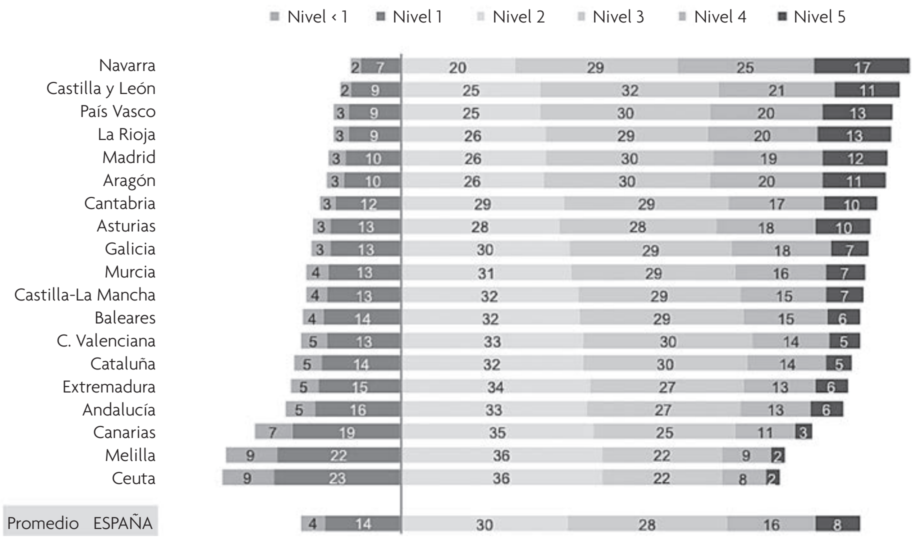
Educación Secundaria Obligatoria. La evaluación de diagnóstico de segundo curso de enseñanza secundaria se realizó en 2010. Los cinco niveles de rendimiento con que se categorizan los alumnos coincidieron con los establecidos para la Educación Primaria.

El promedio de los porcentajes de estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (figura 2) en los niveles más bajos de rendimiento (nivel menor que 1 y nivel 1) fue de 18%; cuatro comunidades autónomas tuvieron porcentajes más altos que la media española de alumnado en estos niveles. El promedio de los porcentajes de estudiantes en el nivel más alto de rendimiento (nivel 5) fue de 8%; ocho comunidades autónomas tuvieron un porcentaje de estudiantes superior al promedio español en este nivel (INEE, 2011a).

Las variables que mejor explicaron los resultados de los alumnos fueron coincidentes con las encontradas para la Educación Primaria. Con respecto a la titularidad de los centros, los alumnos de centros privados obtuvieron mejores resultados, aunque las diferencias se redujeron considerablemente y casi se igualaron al incluir correcciones referentes a los niveles sociales, económicos y culturales de los alumnos y de los centros. Otros factores significativos fueron el nivel de estudios de los padres, el número de libros en casa o su lugar de nacimiento (INEE, 2011b).

Las preguntas de contenidos comunes a todos los bloques fueron las más fáciles para el conjunto del alumnado. Los bloques que tuvieron un comportamiento similar fueron los de Estadística y probabilidad, Funciones y gráficas y Números. Los que mostraron tener mayor dificultad fueron Álgebra y Geometría.

Figura 2. Porcentajes de alumnos por niveles de rendimiento en competencia matemática en 2º de Secundaria, por comunidad autónoma (INEE, 2011b: 73).



Evaluación de la formación matemática escolar en pruebas internacionales
Los estudios internacionales de evaluación educativa también suministran información relevante para conocer un sistema educativo, y para orientar sus prioridades y necesidades de mejora. Con estos supuestos el sistema educativo español participó en dos proyectos internacionales de reconocido prestigio, que llevaron a cabo organismos diferentes, el estudio TIMSS y el proyecto PISA, cuyos resultados comentamos.

El estudio *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) (IEA, 2013) es una prueba de evaluación del rendimiento escolar en matemáticas y ciencias que llevó a cabo la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA, por sus siglas en inglés). Se aplicó junto con la prueba PIRLS, centrada en comprensión lectora. En España se aplicó por última vez en 2011 a niños del 4º curso de Educación Primaria (9-10 años). El *Programme for International Student Assessment* (PISA) (OCDE, 2013), lo desarrolló la Organización para la Cooperación y del Desarrollo Económicos y obtuvo información sobre el dominio de los ciudadanos de una comunidad en su uso de herramientas matemáticas en la vida cotidiana, estableciendo así indicadores de la calidad de su sistema educativo. Para llevar a cabo ese propósito el estudio se centró, entre otras cosas, en evaluar el desarrollo de la competencia matemática de aquellos escolares que cumplieron 15 años en ese curso. En España esta prueba se aplicó por última vez en 2012 para el área de matemáticas.

El INEE no pretendió establecer una correlación entre los resultados de ambos estudios, sino utilizarlos como fuentes de información coherentes sobre el SEIE. Aunque es posible identificar algunos elementos comunes entre ellos, su principal objeto de evaluación es diferente en ambos. El proyecto PISA hizo una evaluación de competencias básicas en los escolares, mientras el TIMSS evaluó aspectos conceptuales y procedimentales ligados al rendimiento alcanzado en el currículo de matemáticas. Sin embargo, los resultados obtenidos en ambos estudios fueron complementarios, en tanto se centraron en las dos etapas obligatorias del sistema educativo español, y, si bien con distinta orientación, ambos documentaron la formación matemática alcanzada por los estudiantes en esas etapas.

Educación Primaria. El estudio TIMSS 2011 sólo se aplicó en Educación Primariaen España. Fue la segunda vez después de su participación en 1995 con alumnos de séptimo y octavo cursos de Educación General Básica

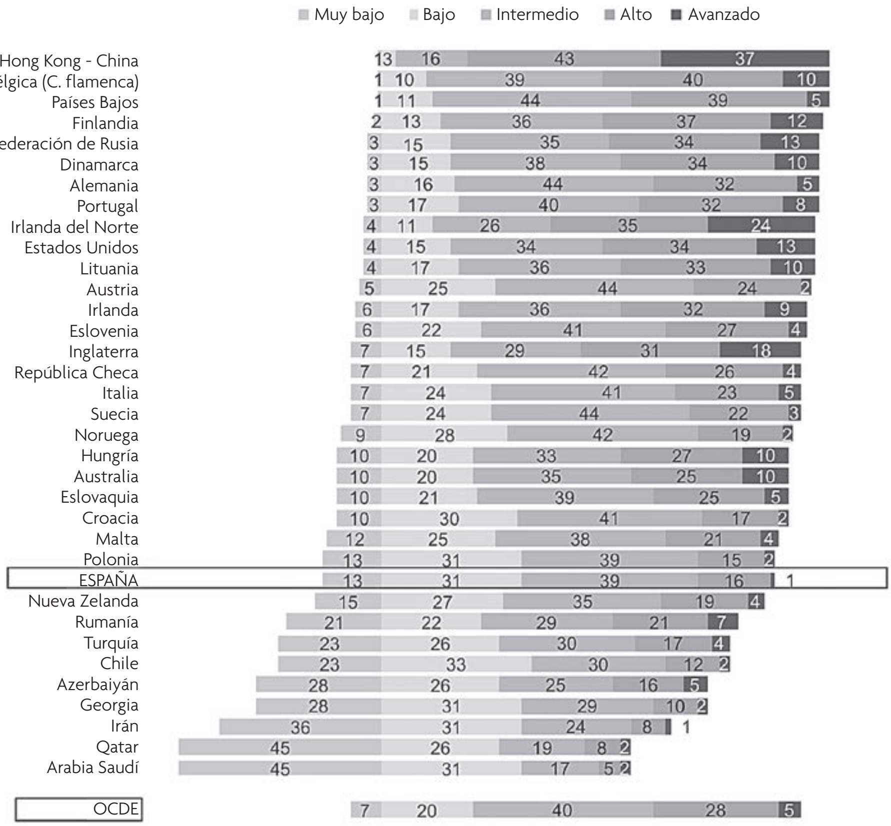
(12-14 años). En 2011 participaron casi 4 200 alumnos de cuarto de Educación Primaria (8-9 años), seleccionados entre las diferentes comunidades autónomas de modo proporcional a su población. Los resultados se organizaron mediante cuatro puntuaciones de referencia o puntos de anclaje, que fueron desde 400 puntos o menos para caracterizar alumnos con un rendimiento muy bajo, hasta quienes superaron 625 para identificar alumnos de rendimiento avanzado.

Globalmente, los alumnos españoles obtuvieron un promedio de 482 puntos. El 13% de los escolares mostraron un rendimiento muy bajo, 31% un rendimiento bajo, 39% uno intermedio, 16% un rendimiento alto y sólo 1% de los alumnos evidenciaron un rendimiento avanzado (figura 3). Cualitativamente, estos datos mostraron que 50% de los alumnos españoles de 8 y 9 años fue capaz, como mucho, de sumar y restar números enteros, de reconocer líneas paralelas y perpendiculares y otras formas geométricas comunes, y de leer y completar diagramas de barras y tablas básicos. En el otro extremo se situaron 17% que, como mínimo, fueron capaces de utilizar sus conocimientos sobre el sistema decimal de numeración, los números enteros o la simetría axial para resolver problemas.

Estos resultados se distanciaron significativamente del promedio de la OCDE, donde sólo se presentaron 7% con un nivel de rendimiento muy bajo y 11% en el nivel bajo, mientras que 40% se situó en el intermedio, 28% en el alto y 5% en el nivel avanzado. Algunas variables resultaron ser factores determinantes que contribuyeron a explicar estos resultados, por ejemplo las de tipo sociodemográfico. Así, se constató una diferencia significativa en los resultados de los alumnos (de hasta 83 puntos) según los estudios de los padres, de hasta 58 puntos según lo recursos de los hogares (ordenador, mesa de estudio, internet, etc.) y de hasta 73 puntos según el número de libros en casa. Por otro lado, la repetición de curso también influyó en los resultados.

Según bloques de conocimiento, la variabilidad en el caso español es poco destacable. Los mejores resultados se obtuvieron en el bloque de Números, 482 puntos, frente a 479 en el de Representación de datos y 476 en el de Formas y mediciones geométricas. Esto fue razonable, considerando el tiempo dedicado en España al bloque de Números en los primeros cursos de primaria y, además, coincidente con los países que obtuvieron un promedio global bajo. Algunos de esos resultados fueron similares a los obtenidos en una investigación con estudiantes de Educación Secundaria.

Figura 3. Porcentaje de alumnos por niveles de rendimiento en la prueba TIMSS 2011 en los países participantes (IEA, 2013: 50).



Educación Secundaria Obligatoria. España participó en el proyecto PISA de forma ininterrumpida desde su primera edición en el año 2000, incluyendo paulatinamente ampliaciones de muestra en determinadas comunidades autónomas del país. En la evaluación de 2012, centrada en matemáticas, participaron más de 25 000 estudiantes de 15 años (sobre una población de algo más de 373 000). Los resultados en esta área se sintetizan en una puntuación de 484, diez puntos por debajo del promedio de la OCDE y cinco puntos por debajo del promedio de la Unión Europea. Estos resultados, por lo general destacados de manera poco constructiva en los medios de comunicación españoles, no se distinguieron mucho de los obtenidos en la evaluaciones anteriores (tabla 1), pero sí admitieron varios matices que destacamos.

Tabla 1. Estudiantes españoles participantes y puntuación promedio en las evaluaciones PISA (Caraballo, Lupiáñez y Rico, 2015: 300).

AÑO	ALUMNOS PARTICIPANTES	PUNTUACIÓN MEDIA		
		LECTURA	MATEMÁTICAS	CIENCIAS
2000	6 214	493	476	491
2003	18 000	481	485	487
2006	20 000	461	480	488
2009	26 000	481	483	488
2012	25 313	488	484	496

En primer lugar, se identificaron de nuevo algunos factores similares a los descritos en el estudio TIMSS, con presencia muy significativa en los resultados de nuestro país. Entre ellos estuvo la titularidad de los centros, donde destacaron los privados, si bien esto quedó matizado por el nivel socioeconómico de las familias que tendieron a acumularse en esos centros. También influyeron la cantidad de alumnos repetidores y la brecha formativa que ellos establecen en España. Asimismo, la población de estudiantes inmigrantes también influyó: en promedio, obtuvieron 439 puntos por 492 de los estudiantes españoles. Otros factores que pusieron de manifiesto la importancia de la revisión y la reflexión cuidadosa de estos resultados, fueron la cantidad de libros en casa y la ocupación de los padres de los estudiantes.

Cuando nos centramos en desgranar el nivel de la competencia matemática de los estudiantes españoles en matemáticas, observamos que destacan por analizar las soluciones o los resultados matemáticos, y también cuando aclaran su sentido en el contexto de un problema. También sobresalen cuando valoran las soluciones o razonamientos matemáticos en relación con el contexto del problema, y si determinan la razonabilidad de los resultados y su sentido en un problema. En menor medida destacan cuando aplican razonamientos matemáticos, al realizar cálculos, en el empleo y manejo de expresiones algebraicas o cuando deben extraer información de gráficos y diagramas. Los resultados son más bajos al momento en que los estudiantes deben identificar situaciones en los que aplicarán y utilizarán las matemáticas, o cuando hay que hacer modelos matemáticos de problemas y fenómenos. De manera cuantitativa, 8% de los alumnos españoles que participaron en la evaluación PISA de 2012, alcanzaron los niveles superiores de rendimiento en matemáticas (12% en promedio en la OCDE), mientras 24% se situaron en los niveles inferiores (23% en promedio de la OCDE).

Por bloques de contenido, los estudiantes españoles destacaron por su conocimiento de los números y de las operaciones, así como por su uso práctico en una variedad de situaciones. El razonamiento cuantitativo, el cálculo mental y la estimación fueron también sobresalientes. El rendimiento disminuyó en la identificación de formas y estructuras geométricas y en el conocimiento y manejo de sus propiedades y relaciones, así como en el reconocimiento y la interpretación del azar y en la representación y tratamiento de datos. Finalmente, los resultados fueron inferiores en el trabajo con situaciones de estructura y cambio, al emplear relaciones funcionales y al crear, interpretar y traducir las representaciones simbólicas y gráficas de esas relaciones.

La formación de profesores

La formación de profesores de matemáticas en España se trata desde una doble perspectiva: la del profesorado de Educación Primaria, maestros, y la del profesorado de Educación Secundaria, etapa que incluye la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y la Educación Secundaria Posobligatoria o Bachillerato. Puede decirse que son dos tipos de formación muy diferentes que a lo largo de su historia han ido evolucionando, siempre separadas y diferenciadas.

La formación inicial de maestros

Hasta la normativa de los planes de formación de 2007 actuales, han sido dos los que le precedieron y que destacaremos: los planes de estudios de 1971 y los de 1991.

Plan de 1971: el profesorado de EGB. Se promovió a partir de la Ley General de Educación de 1970, en el marco de la cual las antiguas escuelas normales de magisterio se integraron en la universidad con la denominación de Escuelas Universitarias del Profesorado de EGB. La enseñanza obligatoria se llamó Educación General Básica (EGB), formó a los escolares de 6 a 14 años y se organizó en dos etapas: de primero a quinto curso y de sexto a octavo; el profesorado de EGB tuvo, entre otras especialidades, la de ciencias físico-naturales, cuya formación matemática alcanzó cierto nivel.

Este profesorado de la especialidad de ciencias impartió la docencia del área científica en la segunda etapa de EGB; las matemáticas de la primera etapa las impartieron maestros de las otras especialidades, filología y ciencias humanas, cuya formación matemática fue equiparable a la impartida en primer curso de la especialidad de ciencias (tabla 2). La formación matemática del profesorado en esta época estuvo basada en la teoría de conjuntos.

Tabla 2. Materias de matemáticas en la formación del profesorado de ciencias de EGB

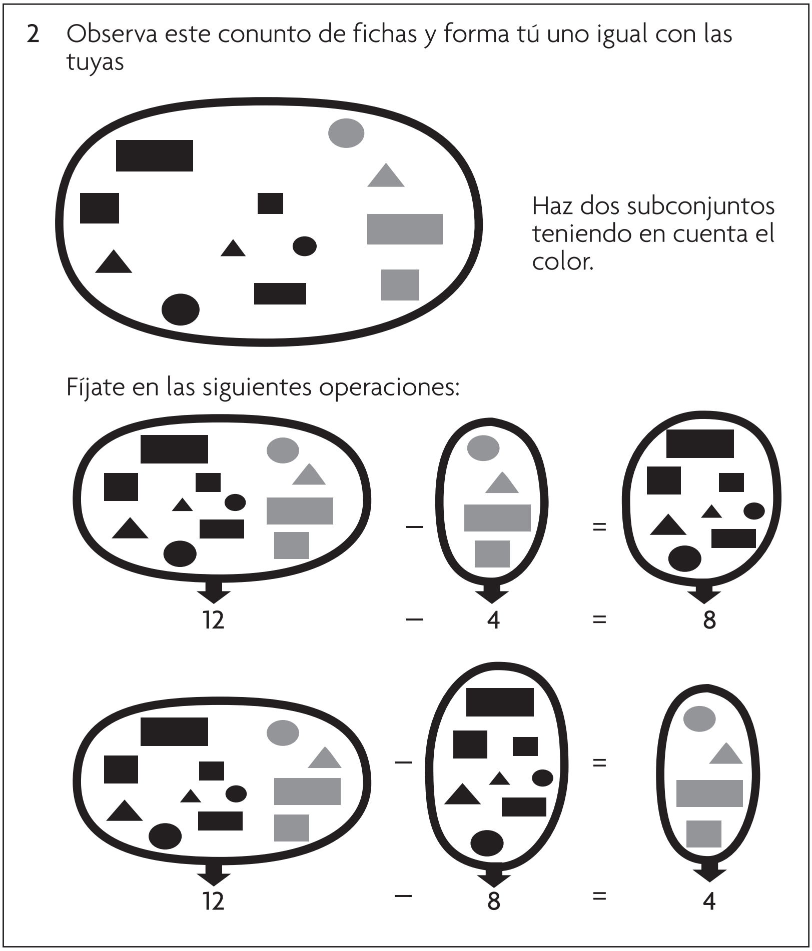
CURSO	ASIGNATURAS	CONTENIDOS
1º	Matemáticas I y II	Lógica, conjuntos *N*, *Z* y *Q*
2º	Matemáticas III y IV Didáctica de las matemáticas I	Análisis: *R*, funciones. Didáctica de las matemáticas
3º	Matemáticas V y VI	Álgebra, Geometría y Medida

Se debe decir que los maestros especialistas adquirieron un alto nivel en matemáticas que les fue muy necesario; por ejemplo, en octavo curso de la EGB se impartió la estructura de cuerpo para poner de manifiesto que el conjunto *Q* con la suma y el producto era un cuerpo conmutativo.

En general, la llamada matemática moderna impregnó los programas de matemáticas de la época en los niveles de formación obligatoria y en la formación del profesorado. Como puede verse en la figura 4, en los niveles más elementales también se impartieron conjuntos.

En resumen, en este plan los profesores de EGB recibieron, en general, una formación matemática desligada de la formación didáctica, que incluyó un alto nivel de formación matemática formal para los especialistas de formación pedagógica general, y un bajo nivel de formación en didáctica de la matemática.

Figura 4. Libro activo de matemática moderna (2º curso, 1970), Ed. Santillana.



Plan de 1991: los maestros de primaria. La promulgación en 1990 de la Ley para la Organización General del Sistema Educativo (LOGSE) coincidió con la supresión de la EGB como periodo de enseñanza obligatoria y fue sustituida por la Educación Primaria de 6 a 12 años y la Educación Secundaria obligatoria (ESO) de 13 a 16 años. Esta nueva regulación requirió del establecimiento de nuevos planes de estudios. La Ley de Reforma Universitaria (LRU) de 1983 fue el marco legal que promovió y reguló estos cambios. Como comentaremos más adelante, en este periodo muchas universidades realizaron la transformación de las anteriores escuelas universitarias del profesorado en facultades de ciencias de la educación o similar.

El Real Decreto 1440/1991, del 30 de agosto, estableció el título universitario oficial de maestro en sus diversas especialidades, y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. Así, se elaboraron los títulos de Maestro de Educación Primaria, junto con otras cinco especialidades, correspondientes a la etapa de formación de 6 a 12 años.

En este caso, la formación en matemáticas del maestro de la especialidad de Educación Primaria (maestro generalista) quedó reducida a una asignatura de nueve créditos sobre matemáticas y su didáctica en primer curso, asignatura troncal de la titulación. En segundo curso se impartió otra asignatura de 4.5 créditos, con distintos contenidos y denominaciones según las universidades; en la Universidad de Granada esa asignatura se denominó Currículo de matemáticas en Educación Primaria. Se produjo así una reducción de más del 70% en los créditos asignados a las matemáticas en la formación inicial de los maestros en relación con el plan de estudios anterior. Los profesores que cursaron el resto de las especialidades de Educación Primaria (Educación Musical, Educación Física y Lengua Extranjera) estudiaron una única asignatura de 4.5 créditos.

En teoría, fue el docente formado en la especialidad de Educación Primaria quien estuvo encargado de impartir la materia de matemáticas en los niveles de 1º a 6º de Primaria en esos años. Sin embargo, en la práctica, ya que los maestros especialistas eran, según la ley, a su vez profesores de primaria, la formación matemática de sus alumnos durante estos años estuvo bajo la responsabilidad de maestros con una formación matemática y didáctica deficitaria y testimonial. El nivel de las matemáticas recibido por los escolares se deterioró durante estos años, pues en muchos casos quedó a cargo de docentes formados en las otras especialidades de este plan de estudios, con conocimientos matemáticos escasos y deficientes.

Aún nos interrogamos ¿por qué estos planes de estudios tan deficitarios en áreas instrumentales como el caso de matemáticas? ¿Cómo fue posible que se estableciera una formación de maestros que requería conocimientos tan desiguales para la formación de un profesor de Educación Primaria, especialista en Educación Física con 100 créditos en esa disciplina y sólo 4.5 créditos de matemáticas para esa misma especialidad?

Los maestros que en estos momentos ocupan las aulas de Educación Primaria provienen de los planes de estudio de 1991. Fueron 20 las promociones de profesores las que se diplomaron con esta formación; la última de ellas en el curso 2010-2011. La mayoría de los docentes actualmente en ejercicio proceden de esas promociones y el impacto de su formación matemática y didáctica deficientes se mantendrá en la Educación Primaria durante 40 años.

La IEA llevó a cabo entre 2007 y 2009 el "Estudio de la formación y el desarrollo del profesorado en matemáticas" (TEDS-M, por sus siglas en inglés). En el proyecto se estudió el programa seguido por los futuros profesores de matemáticas de primaria que se formaron en el mencionado plan de estudios de 1991. El informe de resultados (IEA, 2012), puso de manifiesto que la formación de los maestros de primaria en España sobre conocimientos matemáticos y didácticos era significativamente inferior cuando se compara con otros (tablas 3 y 4).

Nos preguntamos cuáles serían los resultados del estudio TEDS-M si se hubieran considerado los docentes no especialistas en Educación Primaria que actualmente ejercen como profesores de matemáticas en primaria.

A pesar de todo esto, el reconocimiento que se dio al área de Didáctica de la matemática, que surgió con la LRU, permitió crear departamentos y supuso un gran respaldo para una labor progresiva en torno a la Didáctica de la matemática respecto a la investigación y la enseñanza, como se subraya en el apartado dedicado a la indagación en este mismo capítulo.

Tabla 3. Conocimientos matemáticos (MCK Scale[1]) de los futuros profesores de matemáticas de Educación Primaria en España.

PAÍSES	PUNTUACIÓN	% QUE SUPERA EL PUNTO DE REFERENCIA 1	% QUE SUPERA EL PUNTO DE REFERENCIA 2
China Taipei	623	99.4	93.2
Filipinas	440	60.7	6.3
Singapur	586	100	82.5
España	481	83.4	26.2
Suiza	548	97.2	70.6
EEUU	518	92.9	50.0

Fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

[1] MCK: Mathematical content knowledge (conocimiento del contenido matemático).

Tabla 4. Conocimientos didácticos (PCK Scale[2]).

PAÍSES	PUNTUACIÓN	% QUE NO SUPERA EL PUNTO DE REFERENCIA 1	% QUE NO SUPERA EL PUNTO DE REFERENCIA 2
China Taipei	592	23	77
Filipinas	457	94	6
Singapur	588	25	75
España	492	82	18
Suiza	539	56	44
EEUU	544	52	48

Fuente: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

El plan de estudios actual: los estudios de grado. Los actuales títulos debieron adaptarse al Espacio Europeo de Educación Superior iniciado en 1999 con la Declaración de Bolonia, que implicó cambios administrativos y metodológicos basados en el empleo del crédito ECTS (25 horas de trabajo del alumno universitario) como nueva unidad de medida, centrada en el trabajo del estudiante y en una formación dirigida a la adquisición de *competencias*.

En la Orden ECI/3857/2007 se establece la estructura de los títulos de grado universitarios oficiales, que habilitan para el ejercicio de la profesión de maestro en Educación Primaria (tabla 5).

Tabla 5. Estructura del plan de estudios del grado de Maestro de Primaria (2007)

TIPO DE FORMACIÓN	CRÉDITOS ECTS
Formación básica (Didáctica, pedagogía y psicología)	60
Formación didáctico-disciplinar	100
Prácticum y Trabajo Fin de grado	50
Optatividad y menciones	30

[2] PCK: Pedagogical content knowledge (conocimiento del contenido didáctico).

Cada universidad tuvo autonomía para la distribución en asignaturas de los créditos de la tabla anterior. En el caso del área de Didáctica de la matemática, los créditos establecidos fueron desde 12 hasta 24, siendo 18 la de mayor frecuencia. En la Universidad de Granada fueron 22 créditos, más otros seis de una optativa, distribuidos (tabla 6).

Tabla 6. Créditos en matemáticas y su didáctica para los maestros de primaria.

CURSO	ASIGNATURA	CRÉDITOS ECTS
1º	Bases matemáticas para la Educación Primaria	9
2º	Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria	6
3º	Currículo de matemáticas en Educación Primaria	7
4º	Competencias matemáticas en Educación Primaria (optativa en mención)	6

En resumen, la formación inicial de los maestros de primaria en contenidos matemáticos escolares y en Didáctica de la matemática ha mejorado mucho respecto de planes anteriores en gran parte de los centros que imparten este grado; desafortunadamente, esto no sucede en todas las universidades. También la masificación en los grupos de alumnos que cursan este tipo de estudios constituye un inconveniente considerable, que merma la calidad docente esperada en todas las áreas de conocimiento, incluida la Didáctica de la matemática.

La formación inicial del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria

Partiendo, como en el caso de la formación de maestros, de la Ley General de Educación de 1970 (LGE), la preparación del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria se desarrolló hasta el año 2010 fundamentalmente en las facultades de ciencias. Tanto en los planes que emanaron de la LGE como los que surgieron de la Ley de Reforma Universitaria de 1983 (LRU), el adiestramiento de los licenciados en matemáticas como futuros profesores de esa asignatura se llevó a cabo en cinco cursos, y se centró en conocimientos y contenidos estrictamente matemáticos, con escasa o nula relación con las matemáticas escolares de los niveles de secundaria. En varias universidades se impartió una rama o itinerario docente de metodología, en los que fue usual incluir entre una y tres materias relacionadas con la enseñanza de las matemáticas en los niveles de secundaria (Outerelo, 2009). Aquellos licenciados que se decantaron por la enseñanza debieron seguir el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP) cuyo programa incluyó asignaturas psicopedagógicas, un par de disciplinas específicas de Didáctica de la matemática, y un periodo de prácticas de enseñanza en centros docentes; en total las materias psicopedagógica y didácticas, según las autonomías, estuvo entre 6 y 10% del total del CAP. Rico (2004: 3) describió así la situación en estos años: "Nos encontramos con la inexistencia de un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria que sea algo más que un conjunto desarticulado de consideraciones pedagógicas, retóricas y generales."

El plan actual de formación de profesores de secundaria y bachillerato surgió de la adaptación de las titulaciones universitarias españolas al proceso de Bolonia, quedó organizado en una modalidad consecutiva de dos etapas: con una fase de formación teórica seguida de otra práctica. La primera fase, de 240 créditos, corresponde al título de grado y se centra en una preparación básica en contenidos y competencias disciplinares con especialización en matemáticas. La segunda etapa, orientada a los conocimientos y competencias profesionales docentes viene regulada por el R.D. 1834/2008, corresponde a un máster de 60 créditos e incluye materias generales psicopedagógicas y materias específicas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, junto con unas prácticas docentes y un trabajo de fin de máster de orientación profesional.

Se puede afirmar que ha habido un cambio sustancial de orientación desde los planes anteriores a los actuales: la formación psicopedagógica y didáctica del futuro profesor de matemáticas de secundaria abarca 60 créditos sobre un total de 300; es decir, constituye 20% de su adiestramiento, el cual se ha incrementado en un 14%.

Nos preguntamos si estos cambios serán suficientes para dar respuesta a las necesidades de formación profesional de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. Palarea (2011) señala como puntos débiles de este plan la gran heterogeneidad de su puesta en práctica a nivel estatal, la falta de coordinación entre los diferentes módulos y la insuficiente formación en Didáctica de la matemática de los expertos, específica sobre la formación de profesores de secundaria. Aunque con carácter residual, aún se mantiene como idea persistente que para ejercer como profesor es suficiente la formación matemática (Guerrero, 2006).

La formación continua y permanente del profesorado

La oferta es muy variada (De la Torre, Díaz Regueiro y Guerrero, 2006): centros de profesores (CEP), sociedades de profesores de matemáticas, entre ellas la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, sobre la que hablamos en la sección siguiente) y multiplicidad de libros y revistas dedicados a la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de formación es imprescindible dados los cambios en el currículo de matemáticas en todos los niveles. Sin embargo, como señalan esos mismos autores, existen muchos aspectos negativos en torno a esta preparación: no es obligatoria, no está bien estructurada y está fragmentada.

Otra cuestión importante asociada a esta formación es la perspectiva del profesorado sobre su necesidad y, por supuesto, cómo es considerada ésta por la administración educativa. El informe TALIS de 2013 (OCDE, 2014) pone de manifiesto que más de 90 % del profesorado de secundaria en España considera que la formación recibida es suficiente mientras que por otro lado la formación pedagógica y práctica está 20 puntos por debajo de la media de los países de la OCDE (pp. 21-22). También se señalan ciertas deficiencias en esta capacitación: incompatibilidad con el horario laboral, falta de incentivación por parte de la administración educativa, y coste y oferta poco adecuados a los intereses del profesorado (pp. 88-89).

La investigación en Didáctica de la matemática

En este apartado presentamos una parte relevante del trabajo de investigación en Didáctica de la matemática realizado en España desde la segunda mitad del siglo XX hasta los inicios del siglo XXI, con especial atención en las actividades realizadas en la Universidad de Granada por un grupo de trabajo del que los autores formamos parte. Mostramos así un resumen de la investigación realizada durante esos años hasta nuestros días.

Precursores

Pedro Puig Adam es prototipo del profesor español de matemáticas de mediados del siglo XX y de sus preocupaciones profesionales. En sus trabajos sobre Didáctica matemática, Puig Adam (1955, 1960) identificó y expresó con claridad algunos problemas didácticos derivados de la concepción de la propia matemática y de su enseñanza. “Enseñar”, “alumnos”, “profesores”, “método”, "valor formativo", "valor pragmático", son términos y conceptos que utiliza con precisión y rigor para destacar un predominio de los contenidos y de la instrucción en su visión y sus reflexiones. También utilizó otras ideas como "educación matemática", "evolución mental", "actividades psicológicas", "desarrollo intelectual", con las que expresó con no menos fuerza su valoración por el aprendizaje de los alumnos. A mediados del siglo pasado renació en España la Didáctica de la matemática como sistema de conocimientos, procedimientos y actitudes profesionales necesarios para el docente. Este modo de hacer y de pensar contribuyó, en su momento, a sistematizar los métodos de enseñanza de la matemática, los cuales, pese a todo, no fueron considerados como una disciplina ni tuvieron estatus académico en la universidad.

Durante la década de 1970 aconteció un ambicioso proyecto de reforma educativa, que se concretó mediante la Ley General de Educación (LGE, 1970) y otras normas derivadas. Las reformas decretadas afectaron en profundidad a la estructura del sistema educativo y tuvieron repercusiones importantes en el currículo de matemáticas para la educación obligatoria. También concernieron a los planes y programas de formación de profesores, generalistas y especialistas, de los distintos niveles educativos y a su planificación como titulaciones universitarias. Adicionalmente se crearon los institutos de ciencias de la educación (ICE), que institucionalizaron la promoción de investigaciones educativas en las universidades; también asumieron la competencia sobre la formación docente de los profesores universitarios (Beas, 2010). Los ICE estimularon, gestionaron y financiaron las incipientes investigaciones para dar respuesta a cuestiones surgidas de las reformas y los cambios educativos en curso. Se sucedieron así el establecimiento de infraestructuras, la dotación de medios, la propuesta de nuevos métodos y la actualización de criterios y técnicas para la evaluación de los aprendizajes escolares. En este contexto los profesores llevaron a cabo investigaciones educativas desde las universidades, entre las cuales recibieron especial atención las centradas en los cambios del currículo escolar (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011). A mediados de esta década, por motivo de los aspectos críticos surgidos en la puesta en práctica de la LGE, comenzaron a organizarse grupos de estudio e innovación que desarrollaron estos trabajos sistemáticamente. En el contexto de la reforma impulsada por la LGE en 1971, se presentó el "Proyecto Granada-Mats. Un análisis del programa escolar para el área de matemáticas" ante el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, del cual recibió aprobación. Este programa de investigación estudió el proceso de cambio curricular en matemáticas en el periodo de la educación obligatoria, derivado de la introducción en los programas escolares de los contenidos de la “matemática moderna”, recibió apoyo y fue financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, formó parte del IV Plan de Investigación (1974) y del V Plan de Investigación (1975) del Instituto Nacional de Ciencias de la Educación (INCIE).

Durante estos años las publicaciones sobre educación matemática experimentaron un incremento considerable, aumentando notablemente su visibilidad (Rico y Sierra, 1994).

Consolidación e institucionalización

En las décadas de 1980 y 1990 se produjeron cambios significativos, legales y normativos, que tuvieron como consecuencia una reorganización cabal de la deficiente estructura del sistema educativo universitario, así como, posteriormente, de la educación obligatoria y de la no universitaria, tal y como ya hemos sintetizado. El nuevo marco estableció la integración en la universidad de los programas para la formación inicial del profesorado de todos los niveles en las distintas disciplinas escolares, así como mayores incentivos para seguir los estudios que habilitaban para ejercer esas profesiones (Castro y Flores, 2012). Estos cambios facilitaron un desarrollo inicial de la Didáctica de la matemática en España.

La Ley de Reforma Universitaria (LRU, 1983) organizó las disciplinas mediante “áreas de conocimiento”, concebidas como “aquellos campos del saber caracterizados por la homogeneidad de su objeto de conocimiento, una común tradición histórica y la existencia de comunidades investigadoras nacionales e internacionales”. La estructuración del profesorado universitario durante estos años en áreas de conocimiento estuvo vinculada a su regulación académica en departamentos, los cuales establecieron su especialización docente mediante las disciplinas vinculadas al área e impulsaron la constitución de agendas y grupos de trabajo que desarrollaron la investigación en las áreas correspondientes.

En este marco se produjo el reconocimiento del área de Didáctica de la matemática en la universidad española, a mediados de los años 80. De acuerdo con la LRU, el objetivo de un departamento consistía en “organizar y desarrollar la investigación y la docencia propias de su respectiva área de conocimiento”. Esta regulación facilitó la constitución de grupos académicos especializados en Didáctica de la matemática, formados por profesores e investigadores especialistas en esa área, entre ellos el de la Universidad de Granada,[3] constituido en 1986. Estas unidades tuvieron implicaciones administrativas sobre evaluación, promoción y desarrollo académico, concursos, ayudas, acceso a programas y a fuentes de financiamiento para la investigación en el área.

La formación inicial en educación matemática para el profesorado de Educación Primaria quedó así incorporada en la estructura departamental a cargo de especialistas. Por el contrario, la preparación didáctica inicial para el profesor de matemáticas de secundaria no quedó bien resuelta y mantuvo el sistema anterior de capacitación profesional, obsoleto e inadecuado, durante estos años.

Los especialistas en Didáctica de la matemática participaron activamente en los grupos de innovación educativa y las sociedades de profesores que se constituyeron en estos años. Promovieron distintos encuentros y contribuyeron a la elaboración de diversos documentos en los que se discutieron, establecieron y aprobaron propuestas avanzadas de formación cada vez más elaboradas y que al final no se pudieron poner en práctica en la mayoría de las universidades. En esa misma década de 1980 se constituyó el Seminario sobre Currículo e Investigación en Educación Matemática en la Universidad de Granada. Este Seminario, con la colaboración de profesores en servicio, trabajó como grupo de investigación e innovación en la década de 1990. Sus publicaciones apoyaron y contribuyeron a los trabajos de campo para las tesis doctorales en curso. Con estas y otras iniciativas los profesores del área de Didáctica de la matemática buscaron un espacio en los movimientos de renovación del sistema educativo, hallando su identidad en la formación del profesorado de matemáticas y la mejora de la universidad (Rico, 2013).

Los modelos europeos y americano para la educación y para la investigación en Didáctica de la matemática marcaron referentes a los profesores del área. En 1987 tuvo lugar en Madrid el encuentro The Need for Research on Mathematical Education, promovido por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, que supuso un primer contacto entre la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) y la joven comunidad española de investigadores en educación matemática.

En 1988 se constituyó la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), cuya contribución a la promoción y mejora

[3] Ver página electrónica en http://www.ugr.es/~dpto_did/

de la enseñanza de la matemática, así como a la investigación en Didáctica de la matemática ha sido desde entonces continuada y relevante, singularmente por medio de *SUMA*, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, entre otras publicaciones editadas por la FESPM. La celebración en Sevilla, en 1996, de la octava edición del International Congress on Mathematical Education mostró la producción de la comunidad española de profesores, investigadores y expertos en educación matemática, y ayudó a establecer y consolidar relaciones con grupos afines de otros países.

Los estudios de posgrado especializados en Didáctica de la matemática comenzaron en España en 1988, con programas de doctorado en algunas universidades. Estos programas, junto con otros títulos de máster, mantuvo una oferta de formación específica de posgrado en las universidades españolas, de modo permanente en la Universidad de Granada. En la década de 1990 se defendieron las primeras tesis doctorales derivadas de esos programas y comenzó un trabajo continuado, sostenido por equipos estables de especialistas que configuraron grupos de investigación (Rico y Sierra, 2000).

En 1988 se inició el programa de doctorado en Didáctica de la matemática en la Universidad de Granada, bajo responsabilidad del correspondiente departamento. Con el fin de organizar su actividad, el departamento se estructuró en grupos de investigación. Destacó por su actividad el grupo Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico[4] (DDM-PN), que se incorporó en 1988 al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

En el periodo 1994-2000 se defienden once tesis doctorales en esta línea en la Universidad de Granada. Este trabajo contribuyó a forjar unas herramientas metodológicas y un marco teórico propios (Rico y Sierra, 2000; Rico 2013).

También se concursó en convocatorias públicas para financiar los trabajos de investigación del grupo DDM-PN y recibir apoyo para nuevos doctorandos. Entre las ayudas obtenidas destacó la concedida para el proyecto de Formación de Investigadores en Educación Matemática para América Latina (FIEMAL), aprobado dentro del Programa Alfa de la Unión Europea (1998-2000). Participaron las universidades de Módena (Italia), Nothingam (GB), San Carlos (Guatemala), Los Andes (Colombia), Cinvestav del IPN (México), Autónoma del Estado de Morelos (México), Valencia (España) y

[4] Ver página electrónica http://fqm193.ugr.es

Granada (España) y se becaron 16 estudiantes iberoamericanos para realizar sus estudios de doctorado durante tres años.

Como resultado de la experiencia docente y de la investigación realizada en Didáctica de la matemática, en 1987 la editorial Síntesis inició la publicación de la colección Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, con 34 monografías. La edición de esta colección fue un trabajo intelectual compartido, llevado a cabo por un equipo de 82 autores españoles, profesores de matemáticas y expertos en Didáctica de la matemática, quienes se propusieron un ambicioso programa de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, resultado de su práctica profesional y de su investigación. En 1997 la editorial Síntesis editó otra colección de monografías, continuación de la anterior, titulada Educación Matemática en Secundaria. Esta colección se centró en el currículo de matemáticas de secundaria y bachillerato, con 20 volúmenes y en su redacción participaron 59 autores. En 1995 la editorial Comares, a su vez, editó en la colección Mathema 12 tesis doctorales. La edición de estos y otros trabajos difundió y dio visibilidad a las investigaciones realizadas y mostró el nivel alcanzado en Didáctica de la matemática.

En 1996 se constituyó la Sociedad Española de Investigación en Didáctica de la matemática (SEIEM), que cuenta desde 2012 con una publicación seriada y que anualmente realiza encuentros con investigadores españoles, portugueses y latinoamericanos. Entre los objetivos de esta sociedad destacan (SEIEM, 1996: 4):

> Mantener un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en educación matemática, donde plantear cuestiones, transmitir e intercambiar resultados, profundizar en las elaboraciones teóricas, mejorar y validar los diseños metodológicos.
>
> Promover la constitución de grupos de investigación estables en educación matemática, con producción propia cualificada, que delimiten prioridades y aborden cuestiones de indagación específicas.

Varios organismos se refundaron. En 1996, la Real Sociedad Matemática Española (RSME). En 1998, el Comité Español para la International Mathematical Union (IMU), y en 1999, el Comité Español para la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática (CEMat), que conformaron distintas sociedades matemáticas y al que pertenece la SEIEM.

La actividad en Didáctica de la matemática del siglo XX culminó con la participación en las actividades organizadas con motivo del año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, coordinado por su Comité Español.

Es innecesaria una descripción detallada de todas las actividades recientes realizadas; no obstante, destacamos algunas que consideramos de especial interés. En 2003 se constituyó la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM), la cual edita la revista *UNIÓN* desde 2005. Desde septiembre de 2006, el Grupo DDM-PN de la Universidad de Granada edita trimestralmente *PNA*, revista de investigación en Didáctica de la matemática.[5] Esta revista ha recibido recientemente el sello ARCE de Calidad, tras ser evaluados por la Fundación Española de Ciencia y Tecnología (FECYT). Entre 2008 y 2012 este mismo grupo coordinó en España la investigación Teacher Education Study in Mathematics, dirigido por la IEA, al que ya nos hemos referido anteriormente en este capítulo.

Retos y realidades

A principios del nuevo siglo se promulgaron dos leyes educativas cruciales, la Ley Orgánica 4/2007 de Universidades, que modificó la Ley 6/2001, y la Ley Orgánica 2/2006, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 8/2013. La primera organizó las enseñanzas y títulos universitarios en tres ciclos: grado, máster y doctorado; enfatizó el papel de la investigación en la universidad y en la transferencia del conocimiento; y marcó las funciones de la investigación científica como fundamento de la docencia y herramienta para el desarrollo. La Ley de Educación instituyó la calidad y la equidad como principios indisociables de la educación, propuso medidas para mejorar la capacitación de los docentes, y proyectó objetivos compartidos con los países de la Unión Europea.

Calidad, equidad y mejora de la capacitación de los docentes son principios indisociables de estas dos leyes, que fueron pilares maestros de una nueva arquitectura para los programas de formación inicial del profesorado y atención a las necesidades del sistema educativo español. El R.D. 1393/2007 organizó las enseñanzas universitarias en tres ciclos, de los que los dos primeros respondieron a los requerimientos establecidos por la Ley 2/2001 para ejercer como profesor de Educación Primaria (artículos 92, 93 y 94) y como profesor de Educación Secundaria (artículos 100 y 101), respectivamente.

[5] Ver página electrónica http://www.pna.es/

La Orden ECI/3857/2007 reguló los módulos didáctico disciplinares para ejercer como maestro en Educación Primaria y las competencias profesionales correspondientes. A su vez, la Orden ECI/3858/2007 y el Real Decreto 1834/2008 marcaron los módulos y competencias de las especialidades docentes de los cuerpos de profesores de enseñanza secundaria. De este modo, los títulos universitarios se acomodaron con los requerimientos de calidad en la formación y en las competencias profesionales establecidos por la Ley de Educación; abordaron las dificultades y las contradicciones de la normativa previa y, al mismo tiempo, por su énfasis en las competencias profesionales, mejoraron los anteriores programas de formación del profesorado. Cambios en el sistema educativo y transformaciones normativas, de manera conjunta, respondieron a los cambios curriculares del sistema escolar y atendieron desde la universidad a las competencias profesionales de los profesores, como ya se ha descrito antes. En este nuevo marco, la responsabilidad de los expertos en Didáctica de la matemática que intervienen en la formación de profesores de primaria y de secundaria se incrementó de manera considerable.

Esta nueva y avanzada reglamentación necesitará de tiempo para su eficaz puesta en práctica requerirá de formadores expertos, con mayor y más profundo conocimiento sobre las matemáticas escolares, que sean eficientes y conecten sus conocimientos temáticos y didácticos. Requerirá de expertos con información y dominio de la pertinencia de los aprendizajes escolares esperados, sus limitaciones, las oportunidades y retos de aprendizaje y las condiciones para el diseño de tareas matemáticas escolares. Necesitará criterios validados para planificar secuencias de tareas, estrategias para mejorar la gestión del trabajo escolar en el aula, de diversos métodos, materiales y recursos, libros y documentos. Demandará equipos de trabajo en contacto regular con profesores de los niveles correspondientes.

Estos retos no disminuirán, sino más bien complementarán el compromiso con la formación de nuevos doctores y la continuidad en los trabajos de investigación en curso. Las obligaciones habituales no desaparecerán, antes exigirán mayor profundidad. En los 20 años transcurridos el grupo DDM-PN concluyó, defendió y aprobó 51 tesis doctorales. Su quehacer habitual continuó mediante la dirección de trabajos, orientación de investigadores noveles, participación en encuentros, redacción de proyectos, informes y documentos, preparación de cursos y conferencias, y evaluación de propuestas, junto con las tareas docentes usuales.

Conclusiones

Describir la situación actual y los retos abiertos para la educación matemática de un país no es tarea sencilla. Lo que hemos pretendido con este capítulo es destacar algunas de las facetas más relevantes, sus orígenes y sus perspectivas de futuro; y lo hemos hecho considerando tres sentidos de la educación matemática según los ámbitos de actuación y funciones que se consideren. El primero se refiere a la formación de los escolares en el sistema de la educación obligatoria y posobligatoria. El segundo se centra en la formación del profesorado y tiene lugar en las universidades y otros centros e instituciones de formación. El tercero se concreta en la investigación y en los marcos teóricos, conceptuales y empíricos que dan lugar a la disciplina Didáctica de la matemática junto con sus aplicaciones técnicas y prácticas. De las reflexiones incluidas en este capítulo podemos extraer algunas conclusiones para cada uno de estos sentidos, que expresan retos para el futuro sobre la educación matemática en nuestro país.

Hemos descrito la educación matemática escolar en España según varios indicadores y mediante los resultados de diferentes evaluaciones internacionales estandarizadas. De estas fuentes se desprende que nuestros estudiantes de primaria y secundaria destacan en determinados procedimientos matemáticos y adolecen de competencias en otros. También, que existen notables diferencias entre los alumnos con mayores dificultades y los más avanzados. Este hecho reclama que nuestro sistema educativo se preocupa por atender de modo sistemático y permanente a los estudiantes que manifiestan carencias desde edades tempranas. También demanda la necesaria atención hacia los alumnos de nivel avanzado, para aumentar su número y lograr que se sientan integrados en el entorno escolar. Como destaca el propio informe del estudio TIMSS, promover y conseguir altos grados de competencia permite mejorar la competitividad de todo el país, y para los propios alumnos supone la posibilidad de acceder a puestos laborales de mayor cualificación en virtud de sus logros (IEA, 2013).

La formación de profesores no es ajena a este hecho. Como hemos argumentado en este capítulo, cuando hablamos de la preparación del profesorado de matemáticas hay diferencias sustanciales y persistentes entre los docentes de primaria y los de secundaria. En el primer caso los maestros tienen una formación psicopedagógica general importante, pero una formación específica en matemáticas y en su didáctica que resultan insuficientes. A pesar de que estas carencias parecen superarse con los actuales diseños de los grados en algunas universidades españolas, en la mayor parte de ellas los cambios siguen siendo insuficientes y la formación resultante, inadecuada. Incluso en las universidades que incluyen mayor preparación específica, la masificación de estos estudios implica una merma en la calidad del adiestramiento de los futuros profesores, mismos que, además, tienden a manifestar una actitud negativa hacia las matemáticas. En el caso de los estudiantes para profesores de secundaria, su formación matemática está bien asentada pero resulta poco adecuada para la enseñanza, pues se aleja mucho de los contenidos matemáticos que conforman el currículo de la Educación Secundaria. Si bien la preparación específica en Didáctica de la matemática ha mejorado con la creación de un título de máster que imparte estudios específicos y obligatorios para dedicarse a la enseñanza, se siguen identificando carencias importantes. Aunque han transcurrido 10 años desde la siguiente reflexión, aún hay centros de formación para los que mantiene una inusitada vigencia (Recio y Rico, 2005: 33): "Mientras no se aborden de manera rigurosa los planes de formación (inicial, continua) de profesores de matemáticas, con su especificidad profesional, el fracaso escolar en secundaria estará garantizado".

Cuando se hicieron públicos los resultados de los estudiantes españoles en la evaluación de PISA sobre resolución de problemas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), Pablo Zoido, analista de la OCDE, señaló expresamente que la formación del profesorado es un factor clave que debería ser objeto de mayor impulso e inversión en nuestro país (Zoido, 2014).

El tercer sentido en que entendemos la educación matemática es como campo de investigación. Al comenzar el siglo XXI la ocupación del investigador en Didáctica de la matemática en España se configuró como una profesión con opciones reales de trabajo. Junto a su actividad investigadora y académica, los titulados con un máster y los doctores en Didáctica de la matemática pueden ejercer como técnicos expertos en la planificación y el diseño curricular, ser docentes especialistas en la formación profesional de los profesores de matemáticas o miembros de los equipos de evaluadores de la producción científica y de la calidad del sistema educativo español.

Muchas de estas ofertas profesionales se encuentran establecidas de manera detallada en las competencias de los planes de formación de los distintos estudios de posgrado que se diseñan y proponen a partir de 2007 por parte de las universidades españolas, ante todo orientados a la formación especializada de investigadores en Didáctica de la matemática. En todos ellos esta disciplina, sus fundamentos teóricos, sus campos de especialización, sus métodos propios, sus problemas y tareas, han conformado un cuerpo consolidado de conocimientos teóricos, técnicos y prácticos.

El investigador español en Didáctica de la matemática ha asumido la responsabilidad de contribuir y participar en una comunidad de expertos que trabaja para establecer conocimiento racionalmente fundado y empíricamente validado, con el cual enriquecer la alfabetización matemática de sus conciudadanos, y de manera especial aquellos en edad escolar. Asimismo, está comprometido con el desarrollo y logro de competencias profesionales de los docentes de matemáticas de educación primaria y secundaria.

La dimensión universal en el trabajo del investigador español en esta disciplina, su plena apertura e integración en la comunidad científica internacional de educadores matemáticos, la participación regular en proyectos de organismos intergubernamentales –como es el caso de los estudios comparativos y las evaluaciones internacionales–, son espacios por explorar. En concreto, el mundo iberoamericano es una comunidad en la cual es necesario incrementar las relaciones de cooperación. El Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, especialmente su grupo de investigación DDM-PN, ha venido trabajando de manera sistemática y regular en la mayor parte de los espacios enumerados en este capítulo, y sus miembros aspiran a mantener y mejorar su liderazgo en estos ámbitos. En España existen además otros centros vinculados a universidades, a grupos de investigación o a sociedades colegiadas que persiguen el mismo fin.

A escala global, hemos identificado logros, dificultades y retos de la educación matemática en España desde el punto de vista de alumnos, profesores e investigadores. Si bien queda mucho por avanzar y mejorar, queremos subrayar que muchos grupos están actualmente concienciados y centrados en líneas e iniciativas de trabajo para superar esas dificultades, en proceso de consolidación y superación constante. Es un compromiso de la comunidad española de educadores matemáticos el continuar esta labor, y desarrollar y establecer mecanismos que permitan seguir alcanzando nuevos retos.

Referencias

Beas, M. (2010). Formación del Magisterio y reformas educativas en España: 1960-1970. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 14(1). Disponible en: http://www.ugr.es/~recfpro/rev141COL3.pdf.

Caraballo, R., Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). PISA'S Influence on Thought and Action in Mathematics Education: Spain. En K. Stacey y R. Turner (eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience* (pp. 297-331). Berlin: Springer International Publishing.

Castro, E. y Flores, P. (2008). Spanish report on teacher education at primary level. En J. Schwille, L. Ingvarson y R. Holdgreve-Resendez (eds.), *TEDS-M Encyclopedia. A Guide to Teacher Education Context, Structure, and Quality Assurance in 17 Countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)* (pp. 209-226). Ann Arbor: Michigan State University.

Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Díez, A. (en prensa). Matemáticas escolares y cambio curricular (1945-2014). El caso de los números racionales. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*.

Guerrero, S. (2006). Formación del profesorado de matemáticas. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, *41*, 5-7.

IEA (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

IEA (2013). *PIRLS-TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. Informe español*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

INCE (2000). *Sistema estatal de indicadores de la educación. Síntesis*. Madrid: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

INEE (2008). *Indicadores educativos nacionales e internacionales. Apuntes del Instituto de Evaluación*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación.

INEE (2010). *Evaluación general de diagnóstico 2009. Educación primaria. Cuarto curso. Informe de resultados*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación.

INEE (2011a). *Evaluación general de diagnóstico 2010. Educación secundaria obligatoria. Segundo curso. Informe de resultados*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación.

INEE (2011b). *Sistema estatal de indicadores de la educación. Edición 2011*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación.

INEE (2012). *TEDS-M. Informe Español. Estudio Internacional sobre la Formación en matemáticas de los maestros.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

INEE (2014). *Sistema estatal de indicadores de la educación 2014*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Ministerio de Educación y Ciencia (1993). Real Decreto 928/1993, de 18 de junio, por el que se regula el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. En *Boletín Oficial del Estado*, 160, 6 de julio, 20372-20374.

Ministerio de Educación Nacional. Ley 14/1970 de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado,* 160, 6 de agosto, 12525-12546.

Ministerio de Educación y Ciencia. Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria. *Boletín Oficial del Estado*, 209, 1 de septiembre, 24034-24042.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. Ley Orgánica 8/2013 de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado,* 295, 97858-97921.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *PISA 2012 Resolución de problemas de la vida real. Resultados de matemáticas y lectura por ordenador*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Ministerio de Educación. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 106, 17158-17207.

Ministerio de Educación. Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley orgánica 6/2001, de 21 de diciembre de Universidades. *Boletín Oficial del Estado*, 89, 16241-16260.

OCDE (2014). *TALIS 2013. Estudio internacional de la enseñanza y el aprendizaje. Informe Español.* Madrid: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

OCDE (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de alumnos. Informe español*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa.

Outerelo, E. (2009). *Evolución histórica de la Licenciatura en Matemáticas (Exactas) en la Universidad Central*. Madrid: Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.

Palarea, M. (2011). Informe del Seminario: la formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados de infantil y primaria y el máster de secundaria. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 225-234.

Puig, Adam P. (1955). Decálogo de la didáctica matemática media. *Revista Gaceta Matemática,* VII(5-6).

Puig, Adam P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Recio, T. y Rico, L. (2005). El 'Informe PISA 2003' y las matemáticas. *El País*, lunes 24 de enero, 33.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 8(1), 1-15.

Rico, L. (2013). Antecedentes del análisis didáctico en educación matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp. 23-58). Granada: Comares.

Rico, L; Díez, A.; Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2010. *Educatio Siglo XXI*, 29(2), 139-172.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (eds.). *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI*. Huelva: Editorial Hergué.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). La didáctica de la matemática. En L. Rico y D. Madrid (eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Madrid: Editorial Síntesis.

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (1996). *Boletín de la SEIEM,* número 0. Disponible en: http://www.SEIEM.es/publicaciones/archivos-publicaciones/boletines/Boletin0.pdf.

Zoido, P. (2014). Evaluación por ordenador y resolución de problemas. Avance de PISA 2015. Conferencia presentada en el Congreso PISA 2012. Evaluación por ordenador y resolución de problemas. Madrid, 1 de abril.

México

Uso coordinado de tecnologías digitales y competencias esenciales en la educación matemática del siglo XXI[1]

Manuel Santos Trigo
Departamento de Matemática Educativa,
Cinvestav-ipn

El amplio desarrollo y disponibilidad de diversas tecnologías digitales plantean retos importantes a los sistemas de educación relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza se deben considerar en el aprendizaje. En este capítulo, se destaca la idea de problematizar los contenidos como un eje para organizar y estructurar el conocimiento y uso coordinado de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas. Se argumenta la necesidad de que los estudiantes desarrollen una cultura digital donde se valore el trabajo en equipo y la práctica de una reflexión matemática continua que los lleve a engancharse en procesos de resolución de problemas.

Introducción

El desarrollo constante y uso de tecnologías digitales permean muchas de las actividades que los individuos realizan en su quehacer cotidiano. Los dispositivos móviles, como las tabletas o los teléfonos inteligentes, son vehículos no sólo para interactuar entre individuos, sino también para buscar información en línea, comprar algún producto o para realizar una consulta médica. ¿Cuáles son los retos importantes que las instituciones deben afrontar para promo-

[1] Este capítulo corresponde a las actividades que se desarrollan en el proyecto “Fundamentos teóricos en el desarrollo y reconstrucción del conocimiento matemático en ambientes que promueven el empleo de varias herramientas digitales” financiado por el Conacyt-168543.

ver el aprendizaje de los estudiantes que considere los cambios culturales y sociales que se desarrollan en el contexto mundial? Hoy en día el uso de un dispositivo móvil abre oportunidades a particulares de obtener recursos al ofrecer servicios como rentar una habitación en su casa o compartir un vehículo. Schmidt y Cohen (2013) describen las maneras en que la tecnología incidirá en las actividades y tareas de los individuos en un futuro próximo. Afirman que una casa o apartamento será una orquesta con varios dispositivos digitales donde el individuo que la habita será el conductor. Ya sea con gestos o con el habla directa, ese individuo dará las instrucciones para controlar la temperatura, la humedad, las luces o la música del ambiente. El sistema central automatizado estará programado para enviar señales a los robots encargados de las tareas de limpieza y mantenimiento del lugar. Incluyendo un recordatorio al individuo sobre la despensa que se debe comprar y los lugares para adquirirla a mejor precio. Además, algún dispositivo le mostrará en un monitor, visible en la sala o la cocina, las actividades que el individuo tiene planeadas para el día o la semana. También tendrá información disponible sobre su presión sanguínea, lípidos o nivel de glucosa de manera inmediata; y en caso de tener un accidente, como tropezarse con un objeto al ir a la cocina, el individuo recurrir de inmediato a su teléfono para abrir la aplicación "Diagnóstico", que escanea el golpe y le indicará si existe fractura, qué hacer o con quién acudir en caso necesario. Al salir del apartamento, para llevarlo al trabajo u oficina lo esperará un auto sin conductor, que lo transportará al lugar de la reunión programada para ese día…

Este escenario resumido da cuenta del tipo de actividades que las tecnologías digitales pondrán realizar y que, en consecuencia, generarán una manera distinta de interactuar en la sociedad. Así, se vislumbra una transformación en las formas de realizar tareas rutinarias y una necesidad por ajustar las estructuras de las instituciones encargadas de la formación académica y cultural de los individuos. En términos generales, el uso sistemático y coordinado de diferentes tecnologías debe ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de pensar que resulten importantes en la formulación de preguntas y la resolución de problemas.

En este capítulo se identifican algunos principios alrededor de una propuesta que oriente la construcción del conocimiento de los estudiantes a partir el uso coordinado de herramientas digitales. Se destacan las formas de pensar, los conocimientos y habilidades que los alumnos deben desarrollar para estar en posición no sólo de construir una cultura amplia en disciplinas científicas, sino también identificar escenarios de aprendizaje donde la tecnología digital contribuya en la construcción de ese conocimiento. Así, la meta es que los estudiantes desarrollen competencias para resolver no sólo los problemas que se enfrentan en un ambiente escolar, sino aquéllos que aparecen fuera de la escuela.

Cambios en la educación matemática

Una sociedad con cambios notables y con desarrollos tecnológicos disponibles demanda ajustes significativos en los sistemas de educación. Por ejemplo, algunas instituciones reconocidas en el ámbito internacional han puesto en línea algunos programas y cursos que antes se impartían de manera presencial. Además, un estudiante ahora consulta fuentes en línea en su quehacer cotidiano cuando quiere resolver un problema o comprender algún concepto. ¿Qué acciones se deben considerar en la restructuración de un sistema educativo que incorpore de manera sistemática el empleo coordinado de tecnología digital en la formación del individuo? ¿Qué hacer para que los individuos participen en el diseño de tecnologías importantes para el desarrollo del conocimiento, producción de alimentos, equipos médicos y medios de transporte o comodidades? ¿Qué tipo de educación debe recibir un niño o individuo para que al término de sus estudios participe en la generación de conocimiento y tecnologías y en la resolución de problemas? Siempre conlleva un riesgo plantear conjeturas sobre qué será vital en la sociedad y en el ámbito laboral dentro de 16 años, cuando ese niño que hoy inicia su educación elemental obtenga el título de abogado o ingeniero; sin embargo, cabría preguntar si aún serán trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias; si habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras, o un álgebra con menos énfasis en las operaciones y cálculos algebraicos. ¿Seguirá siendo cardinal que el niño en la primaria haga planas y planas para aprender a escribir, o será mejor introducirlo en el uso de computadoras y tabletas que lo ayuden a desarrollar o presentar un argumento estructurado y comprender lo que lee? ¿Desaparecerá el modelo de enseñanza donde, en general, un profesor promueve actividades de aprendizaje en un ambiente controlado? ¿Deben considerarse ya escenarios de enseñanza donde el estudiante pueda por sí mismo diseñar un menú de aprendizaje, en el cual se incluya una interacción en línea con otros estudiantes y asesores? La discusión de estas preguntas implica analizar el tipo de conocimientos, habilidades y formas de pensar que la educación formal debe promover a través de las instituciones. Es decir, los sistemas de educación deben ser sensibles a los avances de la ciencia y la tecnología, en términos de ajustar constantemente los modelos de formación y promoción de la educación de los individuos. Los desarrollos tecnológicos demandan ajustes o cambios en los sistemas de educación acerca de los contenidos que los estudiantes deben aprender, y sobre las formas de organizar y estructurar los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes construyan esos contenidos. Hoy en día es muy común leer que empresas internacionales en distintos ramos contratan a su personal a partir de interrogarlos sobre cómo formularían una pregunta relacionada con el área de la empresa y sobre las posibles formas de responderla. Es decir, les interesa conocer la forma de pensar que manifiesten los individuos, así como las decisiones adoptadas en los procesos para representar y explorar diversos problemas. Resulta menos importante que los individuos muestren un dominio aislado de conocimientos disciplinarios.

En esta perspectiva, los estudiantes en su formación académica deben construir y desarrollar conocimiento, estrategias y habilidades necesarias que les permitan participar en los procesos de formulación e identificación de problemas y en la búsqueda de diferentes maneras de resolverlos. En los procesos de resolución, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales demanda que los estudiantes:

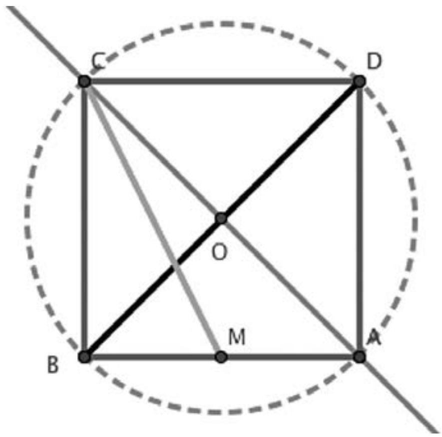
1. Busquen información relacionada con los temas de estudio en diferentes medios, lo cual incluye libros digitales y sitios e línea. En esta búsqueda los estudiantes deben utilizar métodos y estrategias que les permitan sintetizar, analizar y contrastar diferentes tipos de información.
2. Aprendan a trabajar en grupo o equipo, para aprender a escuchar otros puntos de vista, discutir y compartir ideas y soluciones.
3. Desarrollen constantemente nuevas herramientas que les permitan representar y explorar diversos problemas, incluyendo las representaciones dinámicas.
4. Desarrollen y practiquen diferentes maneras de planificar, monitorear y evaluar los procesos de resolución de problemas.
5. Representen y discutan resultados intermedios y finales que puedan ser accesibles a colegas y público en general.

6. Generen resultados que sean compartidos y utilizados por una comunidad amplia.
7. Se involucren en actividades que fomenten la creatividad en la resolución de problemas. Un aspecto fundamental en el desarrollo de las ciencia es buscar diferentes maneras de resolver un problema. La creatividad se desarrolla a partir de analizarlo desde caminos no convencionales, y los estudiantes deben siempre buscar métodos originales o formas novedosas de abordarlo.
8. Construyan y expresen valores y principios éticos. El conocimiento disciplinar se desarrolla dentro de una comunidad donde sus integrantes constantemente dialogan, escuchan y manifiestan respeto por las contribuciones e ideas de los demás. Así, el respeto a las diferencias y el desarrollo de responsabilidades civiles debe ser parte de la formación de todos.

Problematizar el conocimiento

Un aspecto central, el cual enmarca las formas de pensar que los estudiantes deben desarrollar y expresar en la comprensión de ideas matemáticas y la resolución de problemas, es concebir y conceptualizar a la disciplina como un conjunto de dilemas o preguntas que necesitan resolver con recursos, conceptos y estrategias matemáticas (Santos-Trigo, 2014a). Es decir, las situaciones o tareas matemáticas representan oportunidades para que el estudiante participe y se enganche en un proceso de cuestionamiento, de búsqueda de relaciones, de reflexión conceptual, más que sólo seguir y aplicar un conjunto de procedimientos. En este camino los estudiantes utilizan el conocimiento y las habilidades previamente construidas para discutir el sentido de los problemas, usar distintas representaciones para explorarlos, formular relaciones y conjeturas, buscar diversos argumentos para sustentarlas y, eventualmente, comunicar resultados. Por ejemplo, un objeto que se estudia desde la educación elemental es el cuadrado. ¿Cómo problematizar el estudio de esta figura?, ¿cómo pueden los estudiantes enfocar la atención hacia las propiedades de este objeto, de tal manera que sean una fuente para buscar relaciones entre sus atributos y elementos? En esta perspectiva, un estudiante puede comenzar preguntándose sobre las distintas maneras de construir un cuadrado a partir de conocer uno de sus lados o una de sus diagonales. La figura 1 muestra la construcción de un cuadrado girando 90° el segmento dado tres veces con respecto a uno de sus extremos. En la misma figura, el cuadrado se puede construir a partir de una de sus diagonales. En este caso se traza la mediatriz de BD, un círculo con centro O y radio OB, y las intersecciones del círculo con la mediatriz determinan los otros dos vértices del cuadrado.

Figura 1. Trazo de un cuadrado a partir de un lado dado o una diagonal.



En relación con la misma figura se puede plantear la siguiente pregunta: ¿se puede construir un cuadrado si conocemos uno de sus vértices (C) y el punto medio (M) de uno de sus lados, que no es contiguo al vértice dado? La figura 2 muestra un modelo dinámico que involucra inicialmente la generación de una familia de rectángulos con vértice en el punto A y M como punto medio de un lado no contiguo.

Con la ayuda de GeoGebra se determinan los lugares geométricos de los puntos N y C, respectivamente, y la intersección de estos representa el vértice C' del cuadrado que se pide construir. A partir del vértice C' y el punto medio M se construye el cuadrado C'B'AD' (figura 3).

Otra manera de construir el cuadrado involucra identificar relaciones a partir de asumir que el problema está resuelto. Con base en la figura 4 (asumiendo la solución) se identifican algunas relaciones que nos llevan a obtener la medida del ángulo QPM. Esto es, se observa que Q está en el círculo c

Figura 2. Trazo de una familia de rectángulos al mover el punto P alrededor de la circunferencia *c*.

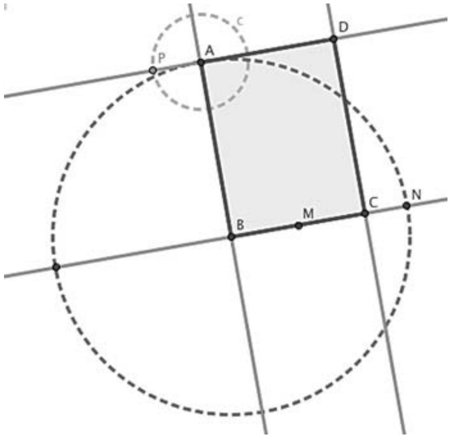
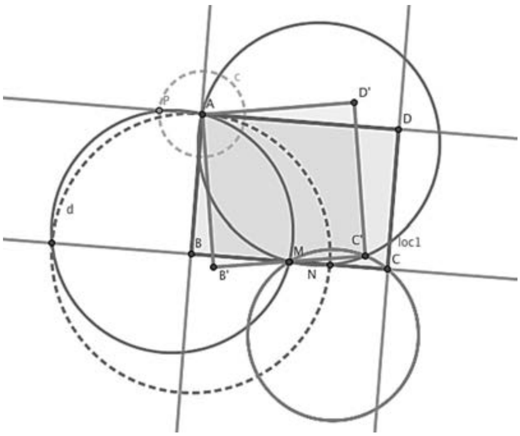


Figura 3. Construcción del cuadrado a partir de los lugares geométricos de los puntos C y N cuando se mueve el punto P sobre la circunferencia *c*.



y el ángulo PQM es recto, con un cateto *s* y otro *s*/2. Con esta información se tiene:

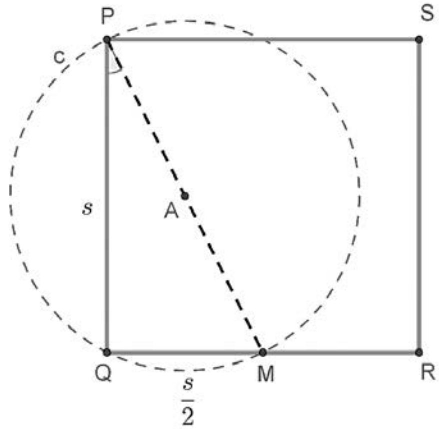
$$\tan(\angle QPM) = \frac{s/2}{S} = \frac{1}{2},$$

por tanto,

$$\angle QPM = \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

En consecuencia, para construir el cuadrado se identifica el punto medio del segmento PM, se traza el círculo de centro en A y radio AP, y se gira el segmento PM un ángulo de medida arctan(1/2). La intersección del segmento rotado con el círculo determina el vértice Q, y con esos datos se construye el cuadrado PQRS.

Figure 4. Búsqueda de relaciones para construir el cuadrado



En términos generales, las actividades y experiencias de los estudiantes se deben enfocar a la construcción de preguntas que demandan un argumento o justificación y *no* aquéllas que puedan responderse de manera positiva o negativa; ni mediante el mero uso de información cuantitativa. Las respuestas a estas últimas ya existen y pueden consultarse en Internet. En el ejemplo del cuadrado, el mismo objeto resulta una fuente de preguntas que se responden vía un argumento. ¿Por qué en la geometría del plano, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°? ¿Por qué los elefantes son más longevos que los seres humanos? O bien preguntas que impliquen la búsqueda de un método para representar un fenómeno o diseñar un instrumento: ¿cómo puedo utilizar el poder de las herramientas digitales (teléfonos inteligentes, internet, enciclopedias en línea, etc.) para aprender matemáticas, física o biología? ¿Cómo construir un artefacto o aplicación que pueda dar cuenta del ritmo cardiaco, la respiración y la química sanguínea de un individuo desde un teléfono móvil? ¿Puedo construir un cuadrado si conozco su centro y uno de sus vértices? Este tipo de preguntas conducen a la búsqueda de información, al planteamiento de algunas hipótesis o conjeturas y formas de probarlas o refutarlas.

La resolución de problemas y al aprendizaje de las matemáticas

Aprender matemáticas requiere problematizar o cuestionar tareas y situaciones, pensar distintas maneras de comprender o resolver un problema, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2014a). Implica que el estudiante desarrolle una disposición favorable hacia el estudio de la disciplina que le permita cuestionarse sobre las tareas propuestas, dar sentido a sus respuestas, explorar preguntas y desarrollar una comprensión matemática como parte de una comunidad de aprendizaje que valore y aprecie el trabajo individual y de colaboración. Es decir, aprender matemáticas requiere crear la necesidad de reflexionar de manera constante sobre el mismo proceso de construcción del conocimiento. Además, el proceso de resolver problemas o comprender un concepto matemático involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar y refinar sus ideas y métodos de solución.

En este periodo de análisis y reflexión acerca de los problemas que pueden guiar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento profundo de las matemáticas, se plantea la necesidad e importancia de centrar la atención en el uso de problemas no rutinarios para conseguir un aprendizaje robusto y más efectivo de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes. Se trata de problemas cognitivamente no triviales; es decir, el estudiante o el profesor no conocen de antemano un método de solución (Selden, Selden y Mason, 1994: 19).

Selden, Selden y Mason (1994) señalan que un grupo de estudiantes universitarios, que habían cursado satisfactoriamente un curso de Cálculo, mostraron serias dificultades al resolver problemas no rutinarios. Es decir, aun cuando los estudiantes habían estudiado recientemente los contenidos necesarios que les colocaban en disposición de resolver los problemas, la mayoría no identificó que los conceptos de Cálculo estudiados eran suficientes para responder las preguntas. Un ejemplo era el siguiente:

¿Tiene $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$ alguna raíz entre −1 y 0? ¿Por qué?

En este ejemplo bastaba con analizar la monotonía de la gráfica de la función asociada al polinomio en el intervalo [−1, 0). Al obtener la derivada de la función asociada, se observa que será mayor que cero en todo su dominio de existencia, y en particular en el intervalo considerado, lo cual indica que la función siempre es estrictamente creciente, y por ello al evaluarla en $x = -1$ el valor de la función en dicho punto será 1, y por tanto no corta el eje OX. Para seguir todo este razonamiento, no es suficiente conocer o disponer de una serie de recursos matemáticos, también se debe saber cuándo y cómo utilizarlos. ¿Cuál es el papel de los ejercicios o problemas rutinarios en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes? Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) proponen un marco sobre cómo transformar un ejercicio o problema rutinario en un conjunto de actividades que demandan una reflexión de carácter matemático por parte de los estudiantes. Así se destacan fases importantes, donde los alumnos plantean de modo constante preguntas relacionadas con la comprensión de los enunciados y conceptos, la búsqueda de información relacionada, el uso de tecnología digital, la búsqueda de diferentes métodos de solución y la comunicación de resultados. En particular, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales ofrece a los estudiantes distintas oportunidades para representar y explorar conceptos e ideas matemáticas desde varios ángulos o perspectivas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

I. Comprensión de un problema, concepto, definición o procedimiento matemático. ¿Qué objetos matemáticos están involucrados? ¿Cuáles son los conceptos o elementos claves? ¿Qué datos se proporcionan? ¿Cuál es la tarea o qué se pide? ¿Existe información suficiente o tiene sentido el enunciado?

¿Tiene sentido la pregunta o lo que se pide en el problema? ¿Las unidades que se utilizan en los datos son consistentes? ¿Se puede expresar el enunciado de otras maneras? ¿Cómo se plantea el enunciado de un problema?

a) El papel del contexto: ¿qué tipos de contexto? Matemático, realista, artificial.

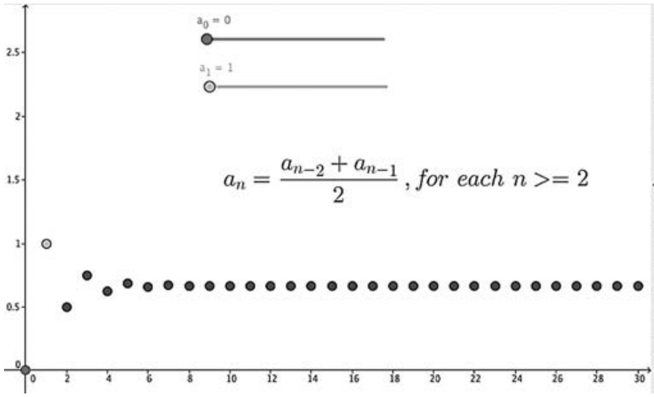
b) Formulación de problemas: oportunidades para que los mismos estudiantes propongan problemas o preguntas.

Uso de YouTube o alguna configuración dinámica. Por ejemplo, en la figura 5 se puede explorar el comportamiento de la sucesión

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$$

para distintos valores de $n \geq 2$ (http://www.geogebratube.org/student/m139246).

Figura 5. Modelo dinámico para explorar la sucesión a_n.



	A	B
1	0	0
2	1	1
3	2	0.5
4	3	0.75
5	4	0.625
6	5	0.6875
7	6	0.65625
8	7	0.671875
9	8	0.6640625
10	9	0.66796875
11	10	0.666015625
12	11	0.6669921875
13	12	0.6665039063
14	13	0.6667480469
15	14	0.6666259766
16	15	0.6666870117
17	16	0.6666564941
18	17	0.6666717529
19	18	0.6666641235
20	19	0.6666679382

Acciones. Leer el problema y discutir en pareja o grupos de tres el significado del enunciado. Utilizar alguna herramienta para hacer una representación geométrica del problema.

II. Ideas, conceptos, recursos asociados con el problema o tarea. ¿Qué información, teoremas, relaciones o resultados matemáticos se conocen sobre el tema?

¿Qué otros conceptos y relaciones se identifican cuando se construyen objetos auxiliares en la representación del problema? ¿Qué recursos en línea puedo consultar para buscar información sobre el o los temas involucrados? ¿Existe algún video donde se expliquen los conceptos?

Uso de enciclopedias en línea o sitios como Khan Academy.

Acciones. Hacer una lista de los términos y conceptos que aparecen en el enunciado. Compararla con la lista de otros estudiantes y buscar información en línea o libros de texto que permitan ampliar la lista inicial.

III. Un plan de solución y su implementación. ¿Cómo se puede utilizar o integrar la información y resultados relacionados con el problema en el diseño de un plan de solución? ¿Existen diferentes maneras de resolver el problema o explicar un concepto? ¿Se puede construir y explorar un acercamiento dinámico del problema?

¿Qué información se obtiene al relajar las condiciones del problema o considerar casos particulares? ¿Cómo se construye un modelo dinámico del problema? ¿Qué conjeturas se pueden visualizar?

¿Qué información o datos son importantes en la construcción de un modelo algebraico del problema? ¿Tiene sentido la solución que se obtiene del problema? ¿Cómo se fundamenta y comunica la solución del problema?

¿Todos los acercamientos sustentan la misma solución?

Uso de GeoGebra, WolframAlpha.

Acciones. Trabajo individual, en pareja o equipo en la creación de distintas estrategias para resolver el problema.

IV. Análisis y contrastación de los distintos caminos para resolver el problema. ¿Qué formas de razonamiento se involucraron? ¿Qué estrategias y recursos se utilizaron en cada uno de los acercamientos? ¿Qué conceptos se usaron en cada acercamiento o solución del problema? ¿Se utilizó toda la información dada al resolver el problema? ¿Cómo se sustentó la solución?

Acciones. Revisar y discutir en grupo las maneras de razonar que llevaron a la solución del problema. Identificar los conceptos y estrategias heurísticas importantes en el proceso de solución.

V. Extensión y formulación de nuevos problemas. ¿Se puede generalizar el problema? ¿Los métodos de solución se pueden aplicar a otras familias de problemas? ¿A partir de los conceptos involucrados, qué otros problemas se pueden formular?

a. Problemas que se resuelvan con el mismo método.
b. Proporcionar información o datos y de ahí plantear un problema.

Acciones. Discusión de la generalidad de los métodos de solución. Proponer una lista de nuevos problemas.

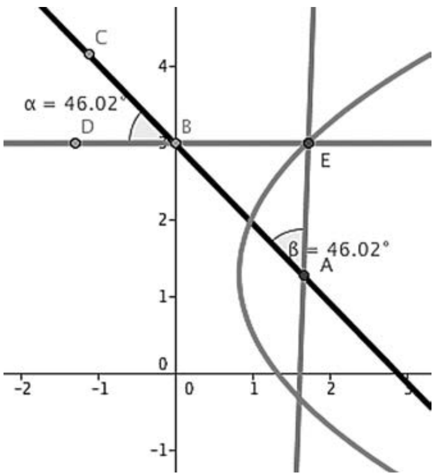
Las fases en la resolución de problemas involucran el uso coordinado de tecnología digital. Así, un aspecto esencial es el desarrollo de materiales que incorporen lectores de libros interactivos con audio, videos y animaciones útiles en la representación y exploración de los problemas. Roschelle *et al.* (2013: 36) afirma que "la meta en el diseño de los nuevos textos digitales debe ser guiar y promover una relación más activa entre el lector y el texto que le permita el desarrollo de habilidades y estrategias para engancharse productivamente en el estudio de ideas fundamentales de las matemáticas". De la misma manera, Camarena (2014) propone un modelo para el diseño de material interactivo que oriente a los estudiantes en la construcción de conocimiento matemático.

Competencia digital

Un tema insoslayable es que el Estado construya una infraestructura eficiente que permita a los individuos desarrollar una cultura digital amplia. Es decir, así como la alfabetización de todos los individuos se reconoce como una competencia que todos deben desarrollar –pues les permite construir, ampliar y utilizar habilidades cognitivas asociadas con la comprensión de lectura y aritmética básica en la resolución de problemas–, la *alfabetización* o cultura digital de todos los individuos resulta indispensable no sólo en los procesos de identificar dilemas o problemas disciplinarios, sino también en la búsqueda de información, representación, exploración, solución de problema y comunicación de resultados.

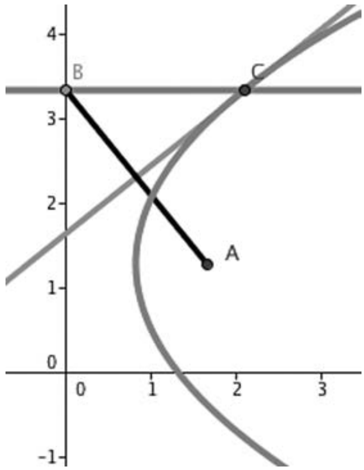
La competencia digital se refiere a que los estudiantes desarrollen recursos y habilidades en el uso de tecnología digital en la resolución de problemas. El término tecnología digital comprende aquellas con propósitos múltiples: pizarrones interactivos, el uso de Power Point, tecnologías para comunicación (Skype, Facebook, etc.) o Internet; pero también las diseñadas para realizar tareas matemáticas, como los sistemas de geometría dinámica (GeoGebra), WolframAlpha, o Sistemas de Álgebra Computacional. Ambos tipos de tecnología pueden contribuir en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Así, profesores y alumnos deben conocer el potencial de estas herramientas en los procesos de resolución de problemas. Mishra & Koehler (2006) afirman que los maestros de matemáticas deben analizar y discutir las transformaciones y cambios del contenido matemático como resultado de que los estudiantes usen de manera consistente la tecnología digital en sus experiencias de aprendizaje. En este contexto, Santos-Trigo y Ortega-Moreno (2013) presentan un modelo dinámico para un problema clásico presente en los cursos de geometría analítica: *¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y el eje Y?* El modelo ilustra la construcción de todas las cónicas a partir del movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica. Su construcción involucra representar el punto fijo A y seleccionar un punto B sobre el eje Y desde el cual se traza la perpendicular al mismo eje. También se traza la recta AB. La rectas AB y BE forman un ángulo DBC. Con la herramienta se rota la recta AB la medida del ángulo DBC alrededor el punto A. Esta recta interseca a la recta DB en E. Así el triángulo BEA es isósceles. El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola (figura 6).

Figura 6. El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola.



Otra manera de abordar este problema es trazando la mediatriz del segmento AB que interseca a la recta perpendicular al eje Y que pasa por B en el punto C. El lugar geométrico del punto C cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es la parábola (figura 7).

Figura 7. El lugar geométrico del punto C es un parábola.



Con la herramienta se puede construir un caso general donde se consideren la razón de la distancia de los puntos del lugar geométrico al punto fijo y a una recta cualquiera dada distinta de la unidad. La figura 8 muestra la construcción dinámica donde

$$\frac{d(SP)}{d(PM)} = k$$

En la representación y exploración dinámica del problema se observa que la construcción del modelo se basa en interpretar geométricamente el concepto de perpendicularidad y la razón constante que involucra las distancias entre un punto del lugar geométrico y el punto fijo, y la que existe entre ese punto del lugar y una recta fija. El arrastre y movimiento controlado de objetos dentro del modelo son estrategias esenciales en la búsqueda y detección de invariantes o patrones o relaciones. Además, el movimiento

Figura 8. Modelo dinámico que generaliza la construcción de las secciones cónicas.

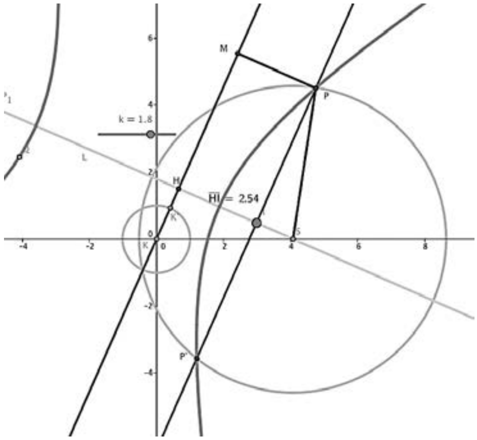
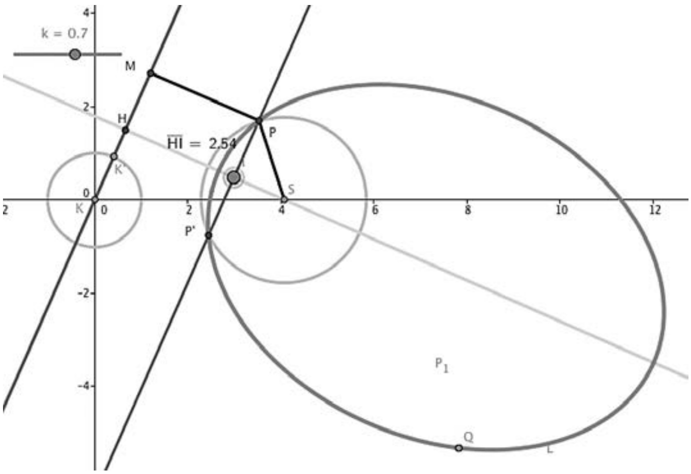


Figura 9. Para valores de k menores de 1 se obtienen elipses.



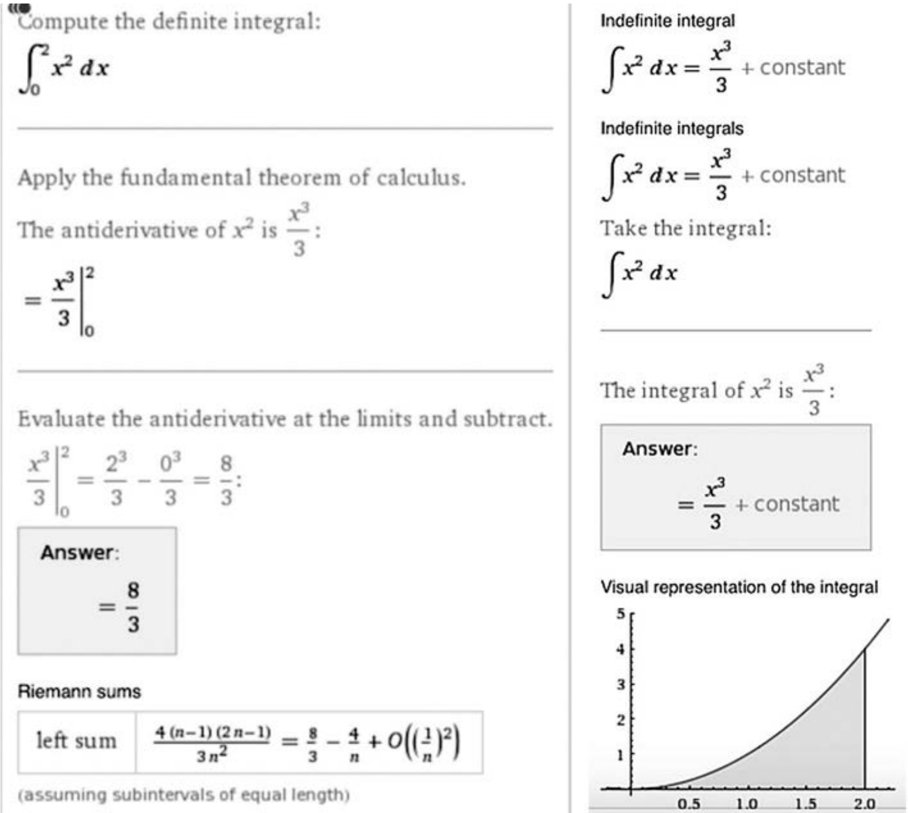
controlado ofrece al estudiante la oportunidad de explorar en tiempo real el comportamiento de algunos parámetros en forma visual o cuantificando atributos como longitudes de segmentos, medidas de ángulos o representaciones gráficas. El acercamiento y solución a este problema proporcionan información importante sobre los contenidos y formas de estructurar rutas para promover el aprendizaje de la geometría analítica (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). En este contexto, la competencia digital involucra que el profesor o individuo se apropie de la herramienta en el sentido de desarrollar experiencias que le permitan comprender los cambios que resultan en los contenidos, además de las estrategias que debe desarrollar el estudiante en la resolución de problemas. Santos-Trigo, Suaste y Figuerola (2015) afirman que el proceso de diseño de un artefacto o tecnología digital no termina cuando el producto sale de la empresa o taller que lo produce, incluye la consideración del proceso de apropiación del individuo o usuario que al interactuar con el artefacto construye esquemas cognitivos a fin de utilizarlo en la resolución de problemas.

Pensamiento o mente creativa

Es común ahora que muchas de las tareas que demandan la aplicación de un conocimiento o procedimiento rutinario sean realizadas por una herramienta o desarrollo digital. La figura 10 muestra lo que la aplicación Mathink de una tableta genera al escribir a mano la integral involucrada.

La existencia de herramientas digitales que pueden realizar cálculos y procedimientos matemáticos plantea la discusión de si los estudiantes deben seguir dedicando tiempo y atención al dominio de esas tareas. Se sugiere que los alumnos ahora pueden centrar la discusión en el significado de las ideas matemáticas involucrados en los procedimientos y resultados, y también buscar formas creativas de resolver los problemas. Gardner (2006) relaciona la mente creativa con la capacidad del individuo de descubrir, formular o clarificar nuevos problemas, preguntas o fenómenos. Afirma que un pensamiento creativo ocurre cuando un individuo o grupo genera un resultado o producto que la comunidad reconoce como innovador. Una mente creativa puede expresar representaciones múltiples de los problemas y desarrollar la tendencia de formular de manera constante preguntas y respuestas nuevas. Santos-Trigo (2014b) reconoce la importancia de que los estudiantes siempre busquen distintas maneras de resolver un problema. Ilustra, por ejemplo, seis formas de resolver el problema siguiente: "El fin de semana Pedro y María visitaron una granja donde se crían gallinas y cerdos. Pedro observó que en total había 19 cabezas, mientras María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en la granja?" Una solución creativa a este mismo problema involucra pensar que cada uno de los cerdos se sostenga con dos patas y las otras las mantenga al aire. Con esta condición, habrá 38 patas tocando el suelo ya que los cerdos al igual que las gallinas (19 en total)

Figura 10. Uso de Mathink en tareas matemáticas.



están sostenidos en dos patas. Esto significa que habrá 22 (60-38) patas en el aire y todas son de cerdos.

Comunicación y colaboración

La disponibilidad de diversas herramientas digitales resulta importante no sólo en la comunicación y discusión de resultados, sino también en la promoción de tareas de colaboración. Así el estudiante puede expresarse en forma oral, escrita, en videoconferencias, o en línea a través de los distintos medios de comunicación. Las redes sociales también pueden ser los medios para que los estudiantes compartan explicaciones de conceptos matemáticos o resuelvan problemas, y se pueden formar grupos con la intención de colaborar en la resolución de problemas. En este contexto, los participantes desarrollan habilidades para ser un miembro activo, escuchar a otros y reconocer las contribuciones de los demás.

Valores y principios éticos
El desarrollo notable de tecnologías digitales influye no sólo en las formas de producir y comunicar resultados o conocimiento disciplinar, sino además en el desarrollo personal y colectivo de los individuos. Los valores éticos resultan fundamentales para comprender y normar el funcionamiento de una sociedad con intereses individuales y colectivos diversos.

Conclusiones

En la presentación de las ideas de este capítulo se destaca que los desarrollos y la disponibilidad de diversas tecnologías digitales no están permeando únicamente las maneras de interactuar de los individuos, también afectan las formas de desarrollar, conocer y comprender conocimiento disciplinario. En este contexto surge la necesidad de incorporar el uso de la tecnología en las propuestas del currículum y en los escenarios de aprendizaje. Una idea o principio fundamental es que los estudiantes conceptualicen su aprendizaje en términos de dilemas y preguntas que ellos mismos formulan, exploran y responden vía el empleo sistemático de herramientas digitales. Así, el uso de estas diversas herramientas permite extender los razonamientos propiciados por el uso de lápiz y papel; y además ofrece a los estudiantes otras oportunidades para visualizar nuevas relaciones y plantear argumentos para sustentarlas. El alfabetismo o cultura digital resulta ser una de las competencias esenciales que los individuos deben adquirir, y que los profesores y alumnos deben mostrar en sus experiencias de aprendizaje. La apropiación de esta cultura digital involucra que el profesor y los estudiantes conozcan los cambios que produce el empleo de esas herramientas en los contenidos matemáticos y en la resolución de problemas. Por ejemplo, en el estudio de las secciones cónicas los modelos dinámicos muestran nuevas rutas para explorar sus propiedades y relaciones que extienden los razonamientos algebraicos. Algunos objetos o entes matemáticos, como la mediatriz y la excentricidad, resultan cruciales en la construcción de los modelos dinámicos. En la misma dirección, la búsqueda en línea de información relacionada con los temas en estudio demanda que los estudiantes desarrollen habilidades para seleccionar, discriminar, sintetizar e incorporarla en sus experiencias de aprendizaje. En este mismo sentido, los alumnos pueden usar videos en línea que contrasten o extiendan las explicaciones de conceptos que el profesor presenta en clase. En esta dirección se manifiesta la importancia de que los estudiantes trabajen en equipo e intercambien ideas de manera constante, y participen como miembros de una comunidad que valora la resolución de problemas. Por último, la comunicación e intervención de los estudiantes se debe enmarcar en el respeto a los demás y en la práctica de principios éticos, de modo que les permita reconocer y valorar las contribuciones individuales o grupales.

Referencias

Camarena, P. (2014). Un modelo para el diseño de material computacional interactivo. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, *69*, 3-16.

Gardner H. (2006). *Five Minds for the Future*. Boston: Harvard Business School Press.

Mishra, P. y Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017–1054.

Roschelle, J., Courey, S., Patton, C. y Murray, E. (2013). Dynabooks: Supporting teachers to engage all learners in key literacies. En C. Mouza y N. Lavigne (eds.). *Emerging Technologies for the Classroom, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies* (pp. 31-46). Nueva York: Springer Science+Business Media.

Santos-Trigo, M., Suaste, E. y Figuerola, P. (2015). Technology and tools appropriation in medical practices. En M. Khosrow-Pour (ed.), *Encyclopedia of Information Science and Technology* (3a. ed.) (pp. 5633-5640), Hershey: IGI Global.

Santos-Trigo, M. (2014a). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501), Nueva York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014). *Resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivo*s. México: Trillas.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 279-302.

Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, *19*(3), 260-279.

Santos-Trigo, M. y Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technology in learning environments. En L. Uden *et al.* (eds.). *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 61-71). Nueva York: Springer (Communication in Computer and Informacion Science, 446).

Santos-Trigo, M. y Ortega-Moreno, F. (2013). Digital technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *Int. J. Learning Technology*, *8*(2), 186-200.

Schmidt, E. y Cohen, J. (2013) (eBook version). *The New Digital Age. Reshaping the Future of People, Nations and Business*. Nueva York: Random House.

Selden, J., Selden, A. y Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp. 19-26). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

El aprendizaje de la geometría en el siglo XXI: tres teoremas básicos sobre la línea recta y su demostración

Mario García Juárez
Escuela Superior de Economía,
Instituto Politécnico Nacional

Las palabras que no van seguidas de hechos, no valen nada.

Demóstenes
http://vidayel tiempo.blogspot.mx/2012/04/demostenes-el-ultimo-democrata.html

Un poco más de persistencia, un poco más de esfuerzo, y lo que parecía un fracaso sin esperanza puede convertirse en un glorioso éxito.

Elbert Hubbard
http://metitaldia.com

Introducción

En este capítulo tendremos oportunidad de comprender cómo surgen tres importantes teoremas de la geometría analítica plana cartesiana. Éstos, al igual que muchos otros conceptos, por incomprensibles "razones de espacio" son expuestos brevemente, en muchos libros dedicados a la enseñanza de esta importante rama de la matemática, y con ello pierden buena parte de su poder, su importancia, su belleza y su simplicidad. Creemos que esta breve exposición también servirá para mostrar al educando que todo conocimiento matemático, por complejo que sea, tiene un origen que puede ser expuesto de manera sencilla y agradable al intelecto.

Forma normal de la ecuación de la recta

En el cuadro 1 que consta de 12 figuras vemos las posiciones básicas que una línea recta *L* puede tener en el plano *XY* (o sistema coordenado rectangular cartesiano).

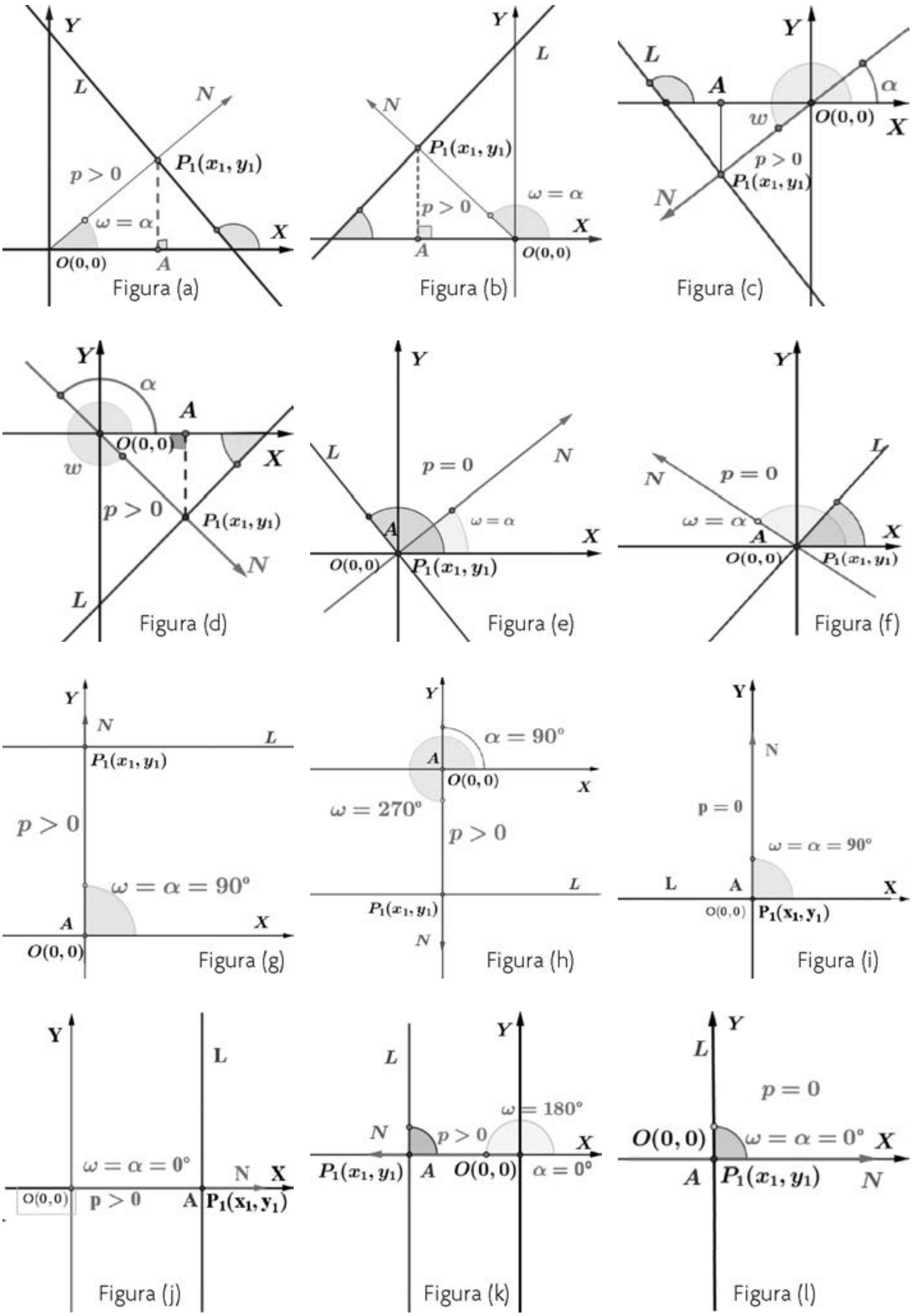
- En las figuras a), b), c) y d) la recta *L* no es paralela a ningún eje coordenado y tampoco pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).
- En las figuras e) y f) la recta *L* no es paralela a ningún eje coordenado pero pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).
- En las figuras g) y h) la recta *L* es paralela al eje *X*, pero no pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).
- En la figura i) la recta *L* coincide con el eje *X* y pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).
- En las figuras j) y k) la recta *L* es paralela al eje *Y*, pero no pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).
- En la figura l) la recta *L* coincide con el eje *Y* y pasa por el origen de coordenadas *O*(0,0).

Por el origen *O*(0,0) trazamos una recta *ON* perpendicular a la recta *L*. El sentido positivo de la línea recta *ON* está indicado con una punta de flecha. La recta *ON* se conoce como la *normal* de la línea recta *L*. La normal *ON* y la línea recta *L* se intersectan en un punto $P_1\left(x_1, y_1\right)$. Supondremos que el segmento de perpendicular OP_1 tiene una longitud positiva igual a $\overline{OP_1} = p$, como en las figuras a), b), c), d), g), h), j), k) o una longitud cero, es decir, $\overline{OP_1} = p = 0$, como en las figuras e), f), i), l).

De las figuras se desprende que la posición exacta del segmento dirigido OP_1, en el plano *XY*, está precisamente determinada por el ángulo *w*. Aquí, como en la trigonometría plana, supondremos que *w* es el ángulo (no negativo) que el segmento OP_1 engendra con la parte positiva del eje *X* cuando el segmento de recta OP_1 gira en torno del origen *O*(0,0), en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj. Es por esto que hemos supuesto que la longitud $\overline{OP_1} = p$ del segmento dirigido OP_1 siempre es no negativa. Además, notemos que el valor del ángulo *w*, en cualquier caso particular, satisface la desigualdad

$$0^0 \leq w < 360^0 \tag{1}$$

Cuadro 1. Posiciones básicas de la línea recta en el plano *XY*.



Ahora nos resulta claro que para cualquier par particular de valores de p y w, la línea recta L que podemos trazar por el punto $P_1(x_1, y_1)$, pero de manera perpendicular al segmento OP_1 está perfectamente determinada, es decir, cada pareja de valores p, w determina una y solo una línea recta L en el plano coordenado, perpendicular al segmento de recta dirigido OP_1 en su punto $P_1(x_1, y_1)$.

En lo que sigue determinaremos una ecuación especial de la línea recta L que se conoce como la "forma normal" de la ecuación de la línea recta. Para lograr esto con claridad, trataremos cada uno de los casos generales que nos muestran las figuras del cuadro 1. El lector debe tener siempre presente que emplearemos la convención de que el sentido positivo de la normal ON está indicado por la punta de flecha, y de que emplearemos las convenciones trigonométricas relacionadas con la formación del ángulo w. Empecemos, pues.

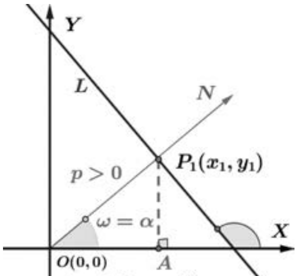


Figura (a)

En la figura a) vemos que el segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $0^0 < w < 90^0$, es decir, w es un ángulo positivo agudo, pero también w es el ángulo de inclinación α de la normal ON. De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}} = \frac{x_1}{p} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{y_1}{p}$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\operatorname{sen} w)$.

Notemos que la pendiente del segmento OP_1 (y de la normal *ON*), en este caso es

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} (> 0) \qquad (2)$$

Luego, como la línea recta *L* es perpendicular al segmento OP_1, tenemos que la pendiente de la recta *L* es

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} w} = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w} (< 0) \qquad (3)$$

Entonces, como ahora sabemos que *L* es una recta que pasa por el punto $P_1\left(p\cos w, p\operatorname{sen} w\right)$ y que (3) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta *L* es

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}\left(x - p\cos w\right) \qquad (4)$$

Si reducimos esta ecuación a su más simple expresión, primero suprimimos el denominador:

$$\operatorname{sen} w\left(y - p\operatorname{sen} w\right) = -\cos w\left(x - p\cos w\right)$$

y efectuamos los productos indicados:

$$y\operatorname{sen} w - p\operatorname{sen}^2 w = -x\cos w + p\cos^2 w$$

transponemos términos a la izquierda:

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p\cos^2 w - p\operatorname{sen}^2 w = 0$$

factorizamos:

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p\left(\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w\right) = 0$$

y, como $\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = 1$, tenemos que

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w - p(1) = 0$$

es decir, multiplicando encontramos:

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w - p = 0 \tag{5}$$

y esta ecuación es conocida como la *forma normal* de la ecuación de la recta L.

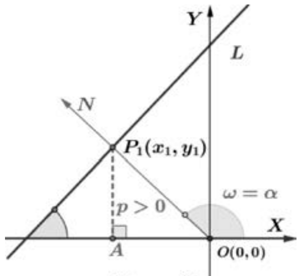


Figura (b)

En la figura b) vemos que el segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $90^0 < w < 180^0$, es decir, w es un ángulo positivo obtuso pero también w es el ángulo de inclinación α de la normal ON. De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}} = \frac{x_1}{p}(<0) \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{y_1}{p}(>0)$$

De aquí, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\,\mathrm{sen}w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\,\mathrm{sen}w)$.

Notemos que la pendiente del segmento OP_1 (y de la normal ON), en este caso es

$$\mathrm{tg}w = \frac{\mathrm{sen}w}{\cos w}(<0) \tag{6}$$

luego, como la recta L es perpendicular al segmento OP_1, tenemos que la pendiente de la recta L es

$$-\frac{1}{\text{tg}w}=-\frac{\cos w}{\text{sen}w}(>0) \tag{7}$$

entonces, como ahora sabemos que es L una recta que pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\text{sen}w)$ y que (7) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y-p\text{sen}w=-\frac{\cos w}{\text{sen}w}(x-p\cos w) \tag{4}$$

De manera similar a lo que hicimos con la ecuación (4) de la figura a), la ecuación (8), al ser reducida a su más simple expresión toma la forma

$$x\cos w+y\text{sen}w-p=0$$

la cual se conoce como la *forma normal* de la ecuación de la recta L.

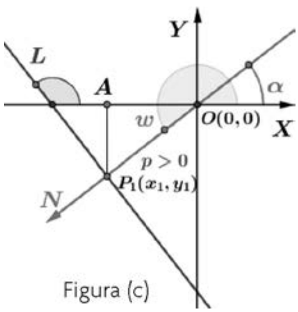


Figura (c)

En la figura c) vemos que el segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1}=p>0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $180^0<w<270^0$, pero el ángulo de inclinación del segmento OP_1 (y de la normal ON es $\alpha=w-180^0$ y éste satisface la desigualdad $0^0<(w-180^0)<90^0$. De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}} = \frac{x_1}{p}(<0) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{y_1}{p}(<0)$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\operatorname{sen} w)$.

Notemos que la pendiente del segmento OP_1 (y de la normal *ON*), en este caso es

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(w-180^0) &= \frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} 180^0}{1+(\operatorname{tg} w)(\operatorname{tg} 180^0)} = \frac{\operatorname{tg} w - 0}{1+(\operatorname{tg} w)(0)} \\ &= \operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w}(>0) \end{aligned} \tag{10}$$

luego, como la recta *L* es perpendicular al segmento OP_1, tenemos que la pendiente de la recta *L* es

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(w-180^0)} = -\frac{1+(\operatorname{tg} w)(\operatorname{tg} 180^0)}{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} 180^0} = -\frac{1+(\operatorname{tg} w)(0)}{\operatorname{tg} w - 0} = \\ = -\frac{1}{\operatorname{tg} w} = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(<0) \end{aligned} \tag{11}$$

Entonces, como ahora sabemos que *L* es una recta que pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\operatorname{sen} w)$ y que (11) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta *L* es

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(x - p\cos w) \tag{12}$$

De manera similar a lo que hicimos con la ecuación (4) de la figura a), la ecuación (12), al ser reducida a su más simple expresión, toma la forma

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0 \tag{13}$$

la cual se conoce como la *forma normal* de la ecuación de la recta *L*.

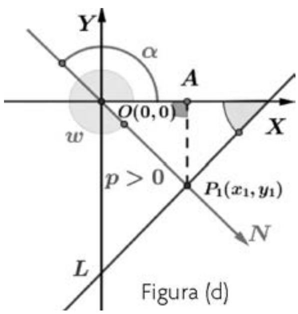


Figura (d)

En la figura d) vemos que el segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $270^0 < w < 360^0$, pero el ángulo de inclinación del segmento OP_1 (y de la normal ON) es $\alpha = w - 180^0$ y éste satisface la desigualdad $90^0 < \left(w - 180^0\right) < 180^0$. De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}} = \frac{x_1}{p}(>0) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{y_1}{p}(<0)$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $\left(p\cos w,\ p\operatorname{sen} w\right)$.

Notemos que la pendiente del segmento OP_1 (y de la normal ON), en este caso es

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(w - 180^0) &= \frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} 180^0}{1 + (\operatorname{tg} w)(\operatorname{tg} 180^0)} = \frac{\operatorname{tg} w - 0}{1 + (\operatorname{tg} w)(0)} \\ &= \operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w}(<0) \end{aligned} \tag{14}$$

luego, como la recta L es perpendicular al segmento OP_1, tenemos que la pendiente de la recta L es

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(w - 180^0)} &= -\frac{1 + (\operatorname{tg} w)(\operatorname{tg} 180^0)}{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} 180^0} = -\frac{1 + (\operatorname{tg} w)(0)}{\operatorname{tg} w - 0} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} w} = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(>0) \end{aligned} \tag{15}$$

Entonces, como ahora sabemos que L es una recta que pasa por el punto $P_1\left(p\cos w, p\text{sen}w\right)$ y que (15) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y - p\text{sen}w = -\frac{\cos w}{\text{sen}w}\left(x - p\cos w\right) \tag{16}$$

De manera similar a lo que hicimos con la ecuación (4) de la figura a), la ecuación (16), al ser reducida a su más simple expresión, toma la forma

$$x\cos w + y\,\text{sen}w - p = 0 \tag{17}$$

la cual se conoce como la *forma normal* de la ecuación de la recta L.

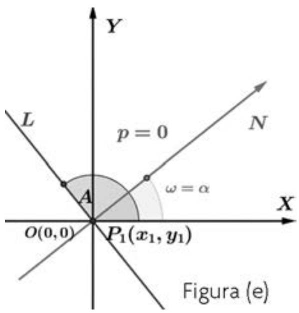


Figura (e)

En la figura e) vemos una línea recta L que pasa por el origen $O(0,0)$ y que no es paralela a ningún eje coordenado. El segmento dirigido OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p = 0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $0^0 < w < 90^0$ y este ángulo w coincide con el ángulo de inclinación α del propio segmento OP_1 (y de la normal ON). En este caso notamos que el punto $P_1\left(x_1, y_1\right)$ es el origen $O(0,0)$. La pendiente del segmento OP_1 (y de la normal ON) es

$$\text{tg}w = \left(\text{tg}\alpha\right) = \frac{\text{sen}w}{\cos w}(>0) \tag{18}$$

y como la línea recta L es perpendicular a la normal ON (y al segmento OP_1) en el punto $P_1\left(0,0\right)$, tenemos que la pendiente de la recta L es

$$-\frac{1}{\text{tg}w}=\left(-\frac{1}{\text{tg}\alpha}\right)=-\frac{\cos w}{\text{sen}w}(<0) \qquad (19)$$

Entonces, como ahora sabemos que la recta L pasa por el punto $P_1(0,0)$ y que (19) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y-0=-\frac{\cos w}{\text{sen}w}(x-0) \qquad (20)$$

y al reducir esta ecuación a su más simple expresión ella toma la forma

$$x\cos w+y\,\text{sen}w=0 \qquad (21)$$

la cual también, puesto que en este caso $p=0$, podemos escribirla como

$$x\cos w+y\,\text{sen}w-p=0 \qquad (22)$$

Así, pues, las ecuaciones (21) y (22) también están escritas en la *forma normal.*

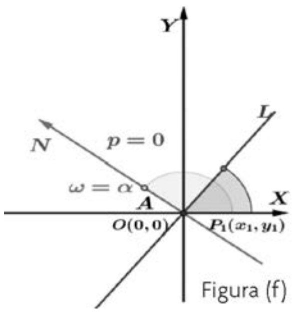


Figura (f)

En la figura f) vemos una línea recta L que pasa por el origen $O(0,0)$ y que no es paralela a ningún eje coordenado. El segmento dirigido OP_1, de longitud $\overline{OP_1}=p=0$, ha engendrado un ángulo w que satisface la desigualdad $90^0<w<180^0$ y este ángulo w coincide con el ángulo de inclinación α del propio segmento OP_1 (y de la normal ON). En este caso notamos que el punto $P_1(x_1,y_1)$ es el origen $O(0,0)$. La pendiente del segmento OP_1 (y de la normal ON) es

$$\mathrm{tg}w = (\mathrm{tg}\alpha) = \frac{\mathrm{sen}w}{\cos w}(<0) \tag{23}$$

y como la línea recta L es perpendicular a la normal ON (y al segmento OP_1) en el punto $P_1(0,0)$, tenemos que la pendiente de la recta L es

$$-\frac{1}{\mathrm{tg}w} = \left(-\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right) = -\frac{\cos w}{\mathrm{sen}w}(>0) \tag{24}$$

Entonces, como ahora sabemos que la recta L pasa por el punto $P_1(0,0)$ y que (24) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y - 0 = -\frac{\cos w}{\mathrm{sen}w}(x-0) \tag{25}$$

y al reducir esta ecuación a su más simple expresión ella toma la forma

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w = 0 \tag{26}$$

la cual también, puesto que en este caso $p = 0$, podemos escribirla como

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w - p = 0 \tag{27}$$

Así, pues, las ecuaciones (26) y (27) también están escritas en la *forma normal.*

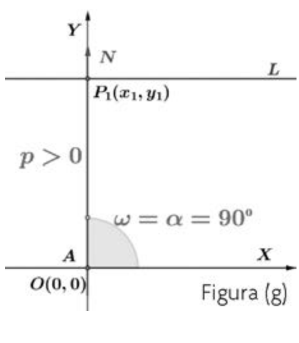


Figura (g)

En la figura g) vemos una línea recta L que no pasa por el origen $O(0,0)$ pero es paralela al eje X. El segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo $w = 90^0$ y este ángulo w coincide con el ángulo de inclinación α de la normal *ON* (y del segmento dirigido OP_1). Como en este caso $w = \alpha = 90^0$ es el ángulo de inclinación de OP_1, tenemos que la pendiente $\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} 90^0$ del segmento OP_1 (y de la normal *ON*) no está definida (es decir, no es ningún número real). Sin embargo, de la trigonometría, sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{0}{p}\right) = \frac{x_1}{p}(=0) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{p}{p}\right) = \frac{y_1}{p}(=1).$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\operatorname{sen} w)$. Como la recta *L* es paralela al eje *X*, su ángulo de inclinación es 0^0. Luego como la recta *L* es paralela al eje *X* y es perpendicular al segmento OP_1 (y a la normal *ON*) tenemos que su pendiente es

$$\operatorname{tg} 0^0 = -\frac{1}{\operatorname{tg} 90^0} = -\operatorname{ctg} 90^0 = -\operatorname{ctg} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w} = 0 \tag{28}$$

Entonces, como la recta *L* pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\operatorname{sen} w)$ y como (28) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta *L* es

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(x - p\cos w) \tag{29}$$

y al reducir esta ecuación a su más simple expresión ella toma la forma (ver ecuación (4) de la figura a)

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0 \tag{30}$$

que es la *forma normal* de la ecuación de la línea recta *L*.

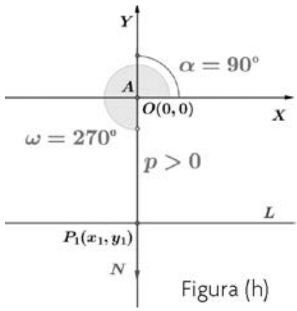


Figura (h)

En la figura h) vemos una línea recta L que no pasa por el origen $O(0,0)$ pero es paralela al eje X. El segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo $w = 270^0$ pero el ángulo de inclinación del segmento OP_1 (y de la normal ON) es $\alpha = 90^0$. Como en este caso $\alpha = 90^0$ es el ángulo de inclinación de OP_1, tenemos que la pendiente $\text{tg}\alpha = \text{tg}90^0$ del segmento OP_1 (y de la normal ON) no está definida (es decir, no es un número real). Sin embargo, de la trigonometría, sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{0}{p}=0\right)=\frac{x_1}{p} \quad \text{y} \quad \text{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{-p}{p}=-1\right)=\frac{y_1}{p}$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\,\text{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\,\text{sen} w)$. Como la recta L es paralela al eje X, su ángulo de inclinación es 0^0. Luego, como la recta L es paralela al eje X y perpendicular al segmento OP_1 (y a la normal ON) tenemos que su pendiente es

$$\text{tg}0^0 = -\frac{1}{\text{tg}90^0} = -\text{ctg}90^0 = -\text{ctg} w = -\frac{\cos w}{\text{sen} w} = 0 \tag{31}$$

Entonces, como la línea recta L pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\,\text{sen} w)$ y como (31) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y - p\,\text{sen} w = -\frac{\cos w}{\text{sen} w}(x - p\cos w) \tag{32}$$

Al reducir esta ecuación a su más simple expresión ella toma la forma (ver ecuación (4) de la figura a)

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}\,w - p = 0 \tag{33}$$

que es la *forma normal* de la ecuación de la línea recta *L*.

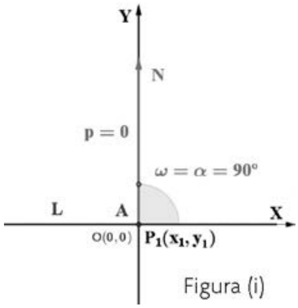


Figura (i)

En la figura i) vemos una línea recta *L* que coincide con el eje *X*, y evidentemente pasa por el origen *O*(0,0). El segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p = 0$, ha engendrado un ángulo $w = 90^0$ y este ángulo coincide con el ángulo de inclinación α de la normal *ON* (y del segmento OP_1). Como en este caso $w = \alpha = 90^0$ es el ángulo de inclinación de OP_1, tenemos que la pendiente $\mathrm{tg}w = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}90^o$ del segmento OP_1 (y de la normal *ON*) no está definida (es decir, no es ningún número real). En este caso notamos también que el punto $P_1(x_1, y_1)$ es el origen *O*(0,0). Como la recta *L* es el eje *X*, tenemos que su ángulo de inclinación es 0⁰. Luego como la pendiente de la recta *L* es

$$\mathrm{tg}0^0 = -\frac{1}{\mathrm{tg}90^0} = -\mathrm{ctg}90^0 = -\mathrm{ctg}w = -\frac{\cos w}{\mathrm{sen}w} = 0 \tag{34}$$

Entonces como la línea recta *L* pasa por el punto $P_1(0,0)$ y (34) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta *L* es

$$y - 0 = -\frac{\cos w}{\mathrm{sen}w}(x - 0) \tag{35}$$

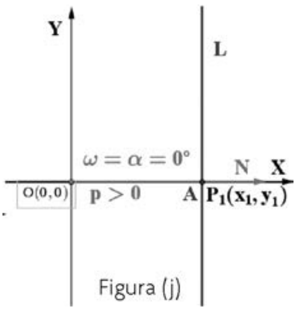
Al reducir esta ecuación a su más simple expresión, toma la forma

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w = 0 \qquad (36)$$

la cual también, puesto que en este caso $p = 0$, podemos escribirla como

$$x\cos w + y\,\mathrm{sen}w - p = 0 \qquad (37)$$

Así, pues, las ecuaciones (36) y (37) también están escritas en la *forma normal.*



En la figura j) vemos una línea recta L que no pasa por el origen $O(0,0)$ pero es perpendicular al eje X (y paralela al eje Y). El segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo $w = 0^0$ y este ángulo coincide con el ángulo de inclinación α de la normal ON (y del segmento OP_1). De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{p}{p}=1\right)=\frac{x_1}{p} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}}\left(=\frac{0}{p}=0\right)=\frac{y_1}{p}$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\,\mathrm{sen}w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\,\mathrm{sen}w)$. Como la recta L es perpendicular al eje X, su ángulo de inclinación es 90^0. Por esto la pendiente $\mathrm{tg}90^0$ de la recta L no está definida, es decir, $\mathrm{tg}90^0$ no es ningún número real. Sin embargo, como la pendiente del segmento OP_1 (y a la normal ON) es

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 0^0 = 0 = \frac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = 0 \tag{38}$$

y como la línea recta L es perpendicular al segmento OP_1, podemos decir, con cierta precaución, que la pendiente de la recta L es

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} w} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 0^0} = -\frac{1}{0} = -\frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w} \tag{39}$$

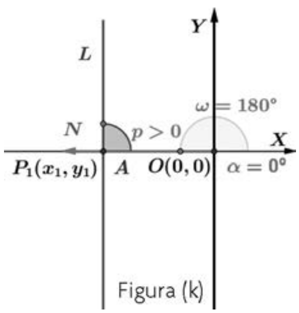
Entonces, como L es una recta que pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\operatorname{sen} w)$ y como (39) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(x - p\cos w) \tag{40}$$

Al reducir esta ecuación a su más simple expresión (como lo hicimos con la ecuación (4) de la figura a) encontramos que ella puede escribirse como sigue

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0 \tag{41}$$

que es la *forma normal* de la ecuación de la línea recta L.



En la figura k) vemos una línea recta L que no pasa por el origen $O(0,0)$ pero es perpendicular al eje X (y paralela al eje Y). El segmento OP_1, de longitud $\overline{OP_1} = p > 0$, ha engendrado un ángulo $w = 180^0$, pero el ángulo de inclinación de la normal ON (y del segmento dirigido OP_1) es $\alpha = 0^0$. De la trigonometría sabemos que

$$\cos w = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}}\left(= \frac{\overline{-OP_1}}{\overline{OP_1}} = \frac{-p}{p} = -1 \right) = \frac{x_1}{p} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} w = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{OP_1}}\left(= \frac{0}{p} = 0 \right) = \frac{y_1}{p}$$

Por esto, despejando, encontramos que

$$x_1 = p\cos w \quad \text{y} \quad y_1 = p\operatorname{sen} w$$

es decir, el punto P_1 también tiene las coordenadas $(p\cos w,\ p\operatorname{sen} w)$. Como la recta L es perpendicular al eje X, su ángulo de inclinación es 90^0. Por esto la pendiente $\operatorname{tg} 90^0$ de la recta L no está definida, es decir, $\operatorname{tg} 90^0$ no es ningún número real. Sin embargo, como la pendiente del segmento OP_1 (y a la normal ON) es

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 0^0 = 0 = \frac{\operatorname{sen} 0^0}{\cos 0^0} = \frac{0}{1} = \frac{0}{-1} = \frac{\operatorname{sen} 180^0}{\cos 180^0} = \frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} \tag{42}$$

y como la línea recta L es perpendicular al segmento OP_1, podemos decir, con cierta precaución, que la pendiente de la recta L es

$$-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 0^0} = -\frac{1}{0} = -\frac{\cos 0^0}{\sin 0^0} = -\frac{1}{0} = -\frac{-1}{0} = \frac{\cos 180^0}{\sin 180^0} = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w} \tag{43}$$

Entonces, como L es una recta que pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\operatorname{sen} w)$ y como (43) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y - p\operatorname{sen} w = -\frac{\cos w}{\operatorname{sen} w}(x - p\cos w) \tag{44}$$

Al reducir esta ecuación a su más simple expresión (como lo hicimos con la ecuación (4) de la figura a) encontramos que ella puede escribirse como sigue

$$x\cos w + y\operatorname{sen} w - p = 0 \tag{45}$$

que es la *forma normal* de la ecuación de la línea recta L.

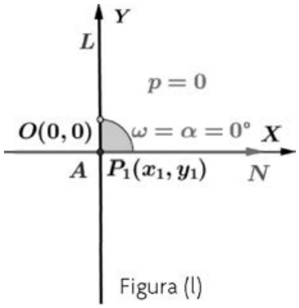


Figura (l)

En la figura l) vemos una línea recta L que coincide con el eje Y, y evidentemente pasa por el origen $O(0,0)$. El segmento dirigido OP_1, de longitud $\overline{OP_1}=p=0$, ha engendrado un ángulo $w=0^0$ que coincide con el ángulo de inclinación $\alpha=0^0$ del segmento OP_1 y de la normal ON. En este caso notamos que el punto $P_1(x_1,y_1)$ es el origen $O(0,0)$. Como la recta L es perpendicular al eje X, su ángulo de inclinación es 90^0 y la pendiente $\text{tg}90^0$ de la recta L no está definida, es decir, $\text{tg}90^0$ no es ningún número real. Sin embargo, como la pendiente del segmento OP_1 (y de la normal ON) es

$$\text{tg}\, w=\text{tg}\,\alpha=\text{tg}\,0^0=0=\frac{\sin 0^0}{\cos 0^0}=\frac{\text{sen} w}{\cos w} \tag{46}$$

y como la recta L es perpendicular al segmento OP_1, podemos decir, con cierta precaución, que la pendiente de L es

$$-\frac{1}{\text{tg}w}=-\frac{1}{\text{tg}\alpha}=-\frac{1}{\text{tg}0^0}=-\frac{1}{0}=-\frac{\cos 0^0}{\sin 0^0}=-\frac{\cos w}{\text{sen} w} \tag{47}$$

Entonces, como L es una recta que pasa por el punto $P_1(p\cos w, p\text{sen} w)$ y como (47) es su pendiente, resulta que la ecuación de la recta L es

$$y-0=-\frac{\cos w}{\text{sen} w}(x-0) \tag{48}$$

Al reducir esta ecuación a su más simple expresión (como lo hicimos con la ecuación (4) de la figura a) encontramos que ella puede escribirse como sigue

$$x\cos w+y\,\text{sen} w=0 \tag{49}$$

o también, puesto que aquí $p = 0$,

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0 \tag{50}$$

que es la *forma normal* de la ecuación de la línea recta L.

Las ecuaciones (5), (9), (13), (17), (22), (27), (30), (33), (37), (41), (45) y (50) obtenidas de este análisis son lo que nos permite formular el siguiente

Teorema 1

Si $p \geq 0$ es la longitud (euclideana) del segmento de recta OP_1 trazado perpendicularmente del punto $O(0,0)$ al punto $P_1(x_1, y_1)$ de una línea recta L y si $w < 360^0$ es el ángulo no negativo que el segmento OP_1 y la parte positiva del eje X forman, entonces

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0$$

es la ecuación en la forma normal de la línea recta L. (Consulte las notas para este Teorema 1).

Reducción de la ecuación general de una línea recta a su forma normal

Supongamos ahora que la ecuación en la forma general de una línea recta L_1 es

$$L_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0. \tag{1}$$

Sabemos que cualquiera que sea la posición que tenga la recta L_1 en el plano XY, su respectiva ecuación escrita en la *forma normal* tendrá que ser una ecuación como la siguiente

$$L_1 : x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0 \tag{2}$$

donde p denota la longitud (positiva o cero) del segmento dirigido que baja de manera perpendicular desde el origen $O(0,0)$ a la línea recta L_1, y w denota el ángulo (no negativo) trigonométrico que tal segmento dirigido engendra con la parte positiva del eje X.

Puesto que (1) y (2) realmente son ecuaciones diferentes (de primer grado en dos incógnitas) que corresponden a una misma línea recta L_1, podemos interpretar este hecho diciendo que (1) y (2) son las ecuaciones de dos líneas rectas coincidentes L_1 y L_2, respectivamente. Entonces, sabemos (Teorema 1) que los coeficientes y el término independiente de una cualquiera de estas ecuaciones deben ser directamente proporcionales a los coeficientes y el término independiente de la otra ecuación, respectivamente, es decir, deben verificarse las tres relaciones siguientes

$$\cos w = kA_1 \tag{3}$$
$$\operatorname{sen} w = kB_1 \tag{4}$$
$$-p = kC_1 \tag{5}$$

y donde $k \neq 0$ es la constante de proporcionalidad. Hemos elegido estas tres relaciones (y no otras) porque suponemos tener la ecuación (1), que deseamos transformar en la ecuación (2).

Observemos que al elevar al cuadrado ambos miembros de las igualdades (3) y (4) se obtienen

$$\cos^2 w = k^2 A_1^2 \tag{6}$$
$$\operatorname{sen}^2 w = k^2 B_1^2 \tag{7}$$

y al sumar miembro a miembro (6) y (7) resulta

$$\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = k^2 A_1^2 + k^2 B_1^2 \tag{8}$$

es decir, factorizando el segundo miembro,

$$\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = k^2 \left(A_1^2 + B_1^2\right) \tag{9}$$

de donde, puesto que $\cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w = 1$, cualquiera que sea el valor de w, obtenemos

$$1 = k^2 \left(A_1^2 + B_1^2\right) \tag{10}$$

Y si de aquí despejamos la constante k, encontramos que

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}}\text{, en donde } A_1^2 + B_1^2 > 0 \tag{11}$$

Si ahora sustituimos este valor especial de la constante k en cada una de las ecuaciones (3), (4) y (5), porque suponemos que los primeros miembros son cantidades reales desconocidas, obtendremos

$$\cos w = \frac{A_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}}\ ,\quad \operatorname{sen} w = \frac{B_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}}\ ,\quad -p = \frac{C_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}} \tag{12}$$

Estas tres expresiones son las relaciones buscadas que existen entre los coeficientes y el término independiente de las ecuaciones (1), en la forma general, y (2), en la forma normal, de una misma línea recta L_1.

Por tanto, se puede asegurar que la recta L_1, definida por la ecuación (1) en la forma general, tiene por ecuación en la forma normal a

$$L_1: \qquad \frac{A_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}}x + \frac{B_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{C_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}} \tag{13}$$

sin embargo, notemos que aún falta determinar el signo que debemos asignarle al radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ en (11) para obtener el ángulo con un valor único, tal y como debe ocurrir para cada posición particular de la recta L_1 en el plano XY. Veamos esto.

Notemos que cuando la línea recta L_1 no pasa por el origen $O(0,0)$, la constante p siempre es positiva. Entonces la constante $-p$ en el primer miembro de (5) siempre es negativa. Luego, puesto que (5) es una verdadera igualdad numérica, resulta que la constante $k \neq 0$ en (5), dada por la expresión (11), y el término independiente $C_1 \neq 0$ en (5), de la ecuación en la forma general (1), deben tener signos opuestos. En consecuencia, cuando la línea recta L_1 no pasa por el origen $O(0,0)$, el término independiente C_1 de su ecuación en la forma general (1) es diferente de cero y al radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$, en (11), le debemos asignar el signo contrario al signo que tenga $C_1 \neq 0$.

Por otra parte, cuando la línea recta L_1 si pasa por el origen $O(0,0)$ sabemos que $C_1 = 0$ y que la constante p siempre es cero. Entonces también la constante $-p$ siempre es cero y notamos que la relación (5) no es útil para determinar el signo del radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$, en (11). Sin embargo, notemos que en cualquiera de estos casos ocurre que el valor del ángulo w satisface la desigualdad

$$0^0 \leq w < 180^0 \tag{14}$$

(ver nota 3 del Teorema anterior) y, en consecuencia, para tales valores del ángulo w siempre se cumple la desigualdad

$$0 \leq \operatorname{sen} w \leq 1 \tag{15}$$

Es decir, $\operatorname{sen} w$ siempre es un número real no negativo. Siendo $\operatorname{sen} w = 0$ cuando $w = 0^0$, es decir, cuando la línea recta L_1 pasa por el origen $O(0,0)$ y es perpendicular al eje X, pero siendo $0 < \operatorname{sen} w (\leq 1)$ cuando $0^0 < w < 180^0$, es decir, cuando la línea recta L_1 pasa por el origen $O(0,0)$ y no es perpendicular al eje X.

Por lo tanto, cuando $C_1 = 0$ y $B_1 \neq 0$, la relación (4) nos indica (como $\operatorname{sen} w > 0$) que el radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$, en (11), y el coeficiente B_1, de la ecuación (1), deben tener el mismo signo. En consecuencia, cuando la línea recta L_1 pasa por el origen $O(0,0)$ y no es perpendicular al eje X, el término independiente $C_1 = 0$ y el coeficiente $B_1 \neq 0$. Entonces, en estos casos, al radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$ en (11) le debemos dar el mismo signo que tenga el coeficiente $B_1 \neq 0$.

Además, y para concluir, cuando la recta L_1 pasa por el origen $O(0,0)$ y es perpendicular al eje X, tenemos que $C_1 = 0$ y $B_1 = 0$. En este caso la relación (3) nos indica (como en (4) $\operatorname{sen} w = 0$) que el radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$, en (11), y el coeficiente A_1 de la ecuación (1) deben tener el mismo signo (pues aquí $\cos 0^0 = 1 > 0$). Entonces, en estos casos, al radical $\sqrt[2]{A_1^2 + B_1^2}$ de la constante $k \neq 0$ en (11) debemos asignarle el mismo signo que tenga el coeficiente $A_1 \neq 0$.

Los resultados del análisis anterior nos permiten formular el siguiente

Teorema 2

Si $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ es la ecuación en la forma general de una línea recta L_1 entonces esta ecuación se puede transformar en la ecuación en la forma normal, $x \cos w + y \operatorname{sen} w - p = 0$, de la misma línea recta L_1, con solo dividir cada término de la ecuación en la forma general por el radical $\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$, (en donde $A_1^2+B_1^2 \neq 0$). El signo que debe preceder a este radical se elige de acuerdo al siguiente criterio:

1. Si $C_1 \neq 0$ (porque L_1 no pasa por el origen), el radical $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tendrá signo contrario al signo de C_1.
2. Si $C_1 = 0$ pero $B_1 \neq 0$ (porque L_1 pasa por el origen y no es perpendicular al eje *X*), el radical $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tendrá mismo signo que tenga B_1.
3. Si $C_1 = 0$ y $B_1 = 0$ (porque L_1 pasa por el origen y es perpendicular al eje *X*), el radical $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tendrá mismo signo que tenga A_1.

(Consulte las notas para este Teorema 2)

Fórmula de la distancia de una línea recta a un punto

En el cuadro 1 vimos que una línea recta L_1 puede tener cualquiera de doce posiciones básicas diferentes en el plano *XY*. En ese cuadro 1 las figuras a), b), c), d), g), h), j), k) muestran que la línea recta L_1 no pasa por el origen *O*(0,0), pero las figuras e), f), i) y l) muestran que la línea recta sí pasa por el origen.

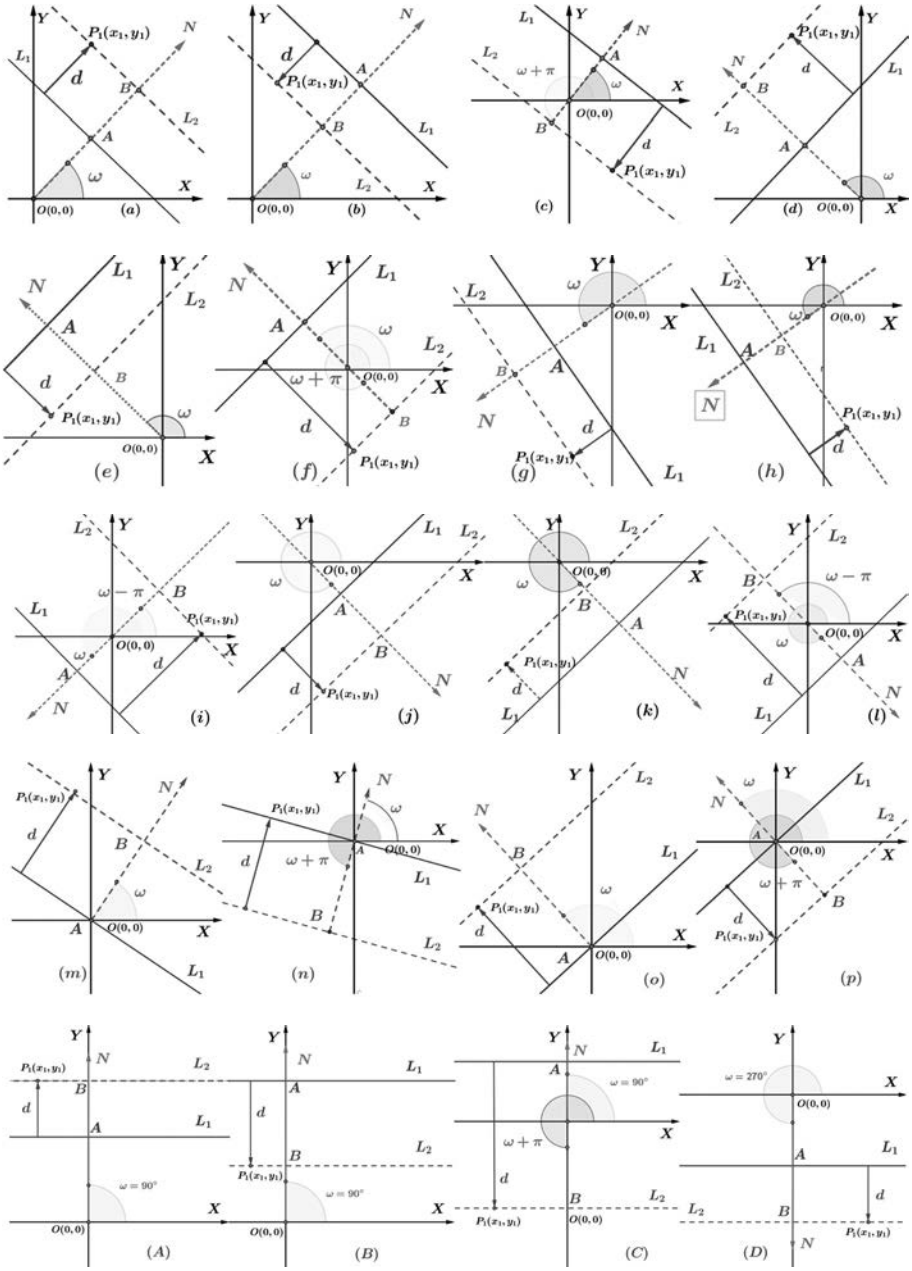
Ahora consideraremos un elemento más, un punto $P_1(x_1, y_1)$ del plano *XY* que *no* está sobre la línea recta L_1 y, además, es diferente del origen *O*(0,0).

La línea recta L_1, el origen *O*(0,0) y el punto $P_1(x_1, y_1)$ pueden tener una de las siguientes 32 posiciones relativas posibles en el plano *XY*, mostradas en las figuras del cuadro 2.

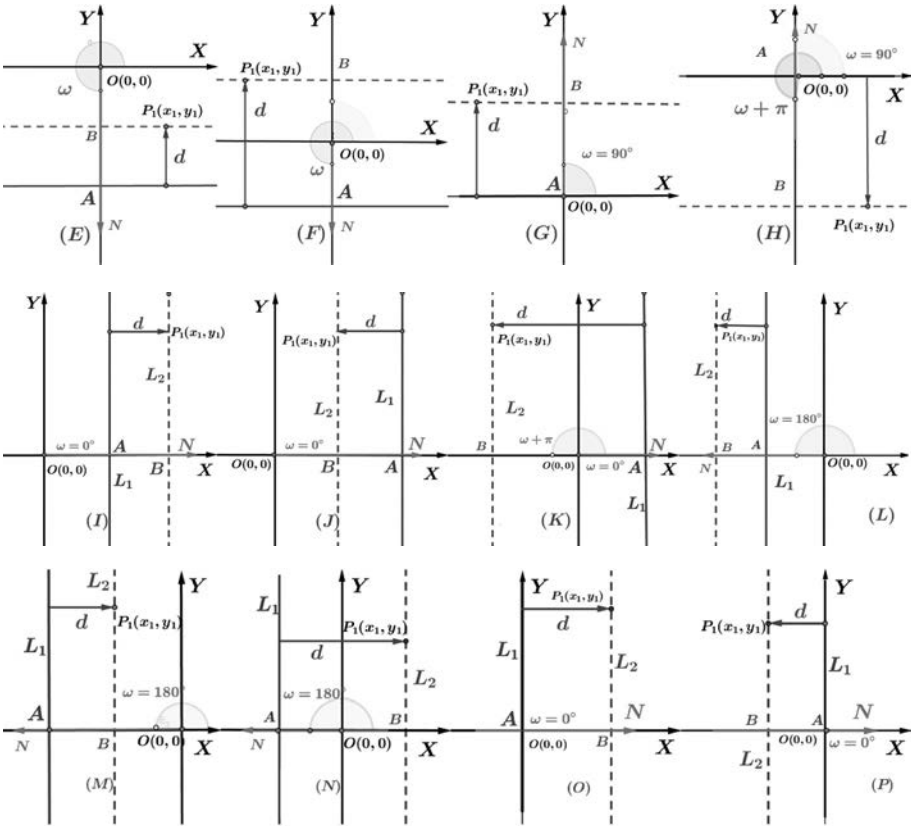
En cada una de estas figuras, por el punto $P_1(x_1, y_1)$ hemos trazado una línea recta L_2 paralela a recta L_1, y por el origen *O*(0,0) hemos trazado una línea recta (dirigida) *ON* perpendicular a las rectas paralelas L_1 y L_2, cuya dirección positiva está indicada por una punta de flecha. La recta *ON* se conoce como la normal a la línea recta L_1. La normal *ON* intersecta a la recta L_1 en el punto *A*, pero intersecta a recta L_2 en el punto *B*.

Suponemos que el segmento dirigido *OA* de perpendicular, tiene una longitud positiva *p*, es decir, $\overline{OA} = p > 0$, como indican las figuras a), b), c),d), e), f), g), h), i), j), k), l), A), B), C), D), E), F), I), J), K), L), M), N), o tiene una longitud cero, es decir, $\overline{OA} = p = 0$, como indican las figuras m), n), o), p), G), H), O), P).

Cuadro 2. 32 posiciones relativas posibles de una línea recta L_1, un punto $P_1(x_1,y_1)$ y el origen $O(0,0)$.



Cuadro 2 *(continuación)*. 32 posiciones relativas posibles de una línea recta L_1, un punto $P_1(x_1,y_1)$ y el origen $O(0,0)$.



El segmento dirigido *OB* tiene una longitud $\overline{OB}$ que será positiva o negativa, según si su dirección coincide con la dirección positiva de la normal *ON* o es opuesta a la dirección positiva de *ON*, respectivamente.

Si con *p'* denotamos la longitud positiva del segmento dirigido *OB* cuando la dirección de éste coincide con la dirección positiva de la normal *ON*, tendremos $\overline{OB} = p' > 0$, como en las figuras a), b), d), e), g), h), j), k), m), o), A), B), D), E), G), I), J), L), M), O), pero cuando la dirección del segmento dirigido *OB* es opuesta a la dirección positiva de la normal *ON*, tendremos $\overline{OB} = p' < 0$, como sucede en las figuras c), f), i), l), n), p), C), F), H), K), N), P).

De modo que $\overline{OA}$ siempre es un número real no negativo, pero $\overline{OB}$ siempre es un número real diferente de cero y $\left|\overline{OB}\right| = p' > 0$ es la distancia entre los puntos *O* y *B*. En cualquiera de estos 32 casos, la distancia entre los puntos *A* y *B* la denotamos por $d = \left|\overline{AB}\right|$.

Así, pues, en este análisis tenemos que

$$\overline{OA} = p \geq 0 \tag{1}$$

$$\left|\overline{OB}\right| = p' > 0 \tag{2}$$

$$\left|\overline{AB}\right| = d > 0 \tag{3}$$

ahora nos proponemos descubrir una fórmula que nos permita determinar la distancia $\left|\overline{AB}\right| = d$ que existe de la línea recta L_1 al punto $P_1\left(x_1, y_1\right)$.

Como *A*, *B* y *O* son tres puntos sobre la línea recta dirigida *ON*, sabemos que (cualquiera que sea su posición relativa sobre *ON*) satisfacen la relación fundamental

$$\overline{AB} = -\overline{OA} + \overline{OB} \tag{4}$$

Por tanto, teniendo presente (1), (2) y (4), tenemos, para cada una de las 32 posiciones indicadas en las 32 figuras del cuadro 2, que la longitud del segmento dirigido *AB* es, respectivamente:

a) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

b) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

c) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

d) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

e) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

f) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

g) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

h) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

i) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

j) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

k) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

l) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

m) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > (p = 0)$

n) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$ porque $-p' < (p = 0)$

o) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > (p = 0)$

p) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$ porque $-p' < (p = 0)$

A) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

B) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

C) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$ (5)

D) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

E) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

F) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

G) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > (p = 0)$

H) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$ porque $p' > (p = 0)$

I) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ $p' > p$

J) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

K) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

L) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > p$

M) $\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' < 0$ porque $p' < p$

N) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$

O) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p + p' > 0$ porque $p' > (p = 0)$

P) $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -p - p' < 0$ porque $p' > (p = 0)$

En el primer apartado se demostró que cualquiera que sea la posición de la línea recta L_1 en el plano *XY*, su ecuación en la forma normal es

$$L_1 : x\cos w + y\text{sen}w - p = 0 \tag{6}$$

donde $p \geq 0$ es la longitud del segmento dirigido *OA*, cuyo sentido coincide con el sentido positivo de la recta dirigida *ON*, y w es el ángulo trigonométrico (no negativo) generado por el segmento dirigido *OA*.

En consecuencia, con base en los argumentos que condujeron a obtener la ecuación (6) de la línea recta L_1, tenemos que la ecuación en la forma normal de la línea recta L_2, en los casos de las figuras a), b), d), e), g), h), j), k), m), o), A), B), D), E), G), I), J), L), M), O), donde la longitud del segmento dirigido *OB* es $\overline{OB} = p' > 0$ y w es el ángulo trigonométrico (no negativo) generado por el segmento dirigido *OB*, es

$$L_2 : x\cos w + y\,\text{sen}w - p' = 0 \tag{7}$$

En los casos de las restantes figuras c), f), i), l), n), p), C), F), H), K), N), P), el segmento dirigido *OB* tiene sentido opuesto al sentido positivo de la línea recta dirigida *ON*. Sin embargo, notemos que puede ser considerado como un segmento euclidiano, como se hace en la trigonometría plana, cuya longitud euclidiana es igual a $|\overline{OB}| = p' > 0$, y así cada una de las figuras c), f), i), l), n), p), C), F), H), K), N), P) muestra que el ángulo trigonométrico (no negativo) que el segmento (no dirigido) *OB* genera con la parte positiva del eje *X*, cuando el segmento *OB* gira en torno del origen *O*(0,0) en sentido contrario a las manecillas del reloj es, con respecto al ángulo w, respectivamente igual a

$$\begin{gathered} w+\pi,\ w+\pi,\ w-\pi,\ w-\pi,\ w+\pi,\ w+\pi,\ w+\pi, \\ w-\pi,\ w+\pi,\ w+\pi,\ w-\pi \text{ y } w+\pi \end{gathered} \tag{8}$$

Como para cada uno de estos ángulos la trigonometría plana nos dice que

$$\begin{aligned} \cos(\omega+\pi) &= \cos\omega\cdot\cos\pi - \sin\omega\cdot\text{sen}\pi = \\ &= (\cos\omega)(-1) - (\text{sen}\omega)(0) = -\cos\omega, \\ \text{sen}(\omega+\pi) &= \text{sen}\omega\cdot\cos\pi + \cos\omega\cdot\text{sen}\pi \\ &= (\text{sen}\omega)(-1) + (\cos\omega)(0) = -\text{sen}\omega \end{aligned} \tag{9}$$

y

$$\begin{aligned} \cos(\omega-\pi) &= \cos\omega\cdot\cos\pi+\sin\omega\cdot\operatorname{sen}\pi \\ &= (\cos\omega)(-1)+(\operatorname{sen}\omega)(0)=-\cos\omega, \\ \operatorname{sen}(\omega-\pi) &= \operatorname{sen}\omega\cdot\cos\pi-\cos\omega\cdot\operatorname{sen}\pi \\ &= (\operatorname{sen}\omega)(-1)-(\cos\omega)(0)=-\operatorname{sen}\omega \end{aligned} \tag{10}$$

resulta, con base en los mismos argumentos que nos condujeron a la ecuación (6) de la línea recta L_1, que la ecuación en la forma normal de la línea recta L_2 de las figuras c), f), n), p), C), H), K), P) es

$$L_2:\ x\cos(\omega+\pi)+y\operatorname{sen}(\omega+\pi)-\left|\overline{OB}\right|=0$$

es decir,

$$L_2:\ -x\cos w-y\operatorname{sen}w-p'=0 \tag{11}$$

En tanto, la ecuación normal de la recta L_2 de las figuras i), l), F), N) es

$$L_2:\ x\cos(\omega-\pi)+y\operatorname{sen}(\omega-\pi)-\left|\overline{OB}\right|=0$$

o sea

$$L_2:\ -x\cos w-y\operatorname{sen}w-p'=0 \tag{12}$$

Ahora bien, puesto que $P_1(x_1,y_1)$ es un punto de la recta L_2 (en cada una de las 32 figuras), sus coordenadas (x_1,y_1) satisfacen las ecuaciones (7), (11) y (12). Es decir, tenemos que

$$x_1\cos w+y_1\operatorname{sen}w-p'=0 \tag{13}$$

$$-x_1\cos w-y_1\operatorname{sen}w+p'=0 \tag{14}$$

son verdaderas igualdades numéricas.

De esta manera, para los casos de las figuras a), b), d), e), g), h), j), k), m), o), A), B), D), E), G), I), J), L), M), O), ahora sabemos (despejando de (13)) que la longitud del segmento dirigido *OB* es

$$\overline{OB}=p'=x_1\cos w+y_1\operatorname{sen}w\ (>0) \tag{15}$$

mientras para los casos de las figuras c), f), i), l), n), p), C), F), H), K), N), P), ahora sabemos (despejando de (14)) que la longitud del segmento *OB* dirigido es

$$\overline{OB} = -p' = x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w \ (< 0) \tag{16}$$

Por tanto, al sustituir el valor de la longitud del segmento dirigido *OB* dada en (15), en las relaciones en (5) correspondientes a las figuras a), b), d), e), g), h), j), k), m), o), A), B), D), E), G), I), J), L), M), O), encontramos que la respectiva longitud del segmento dirigido *AB* es

$$\overline{AB} = -p + \left(x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w\right),$$

es decir,

$$\overline{AB} = x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w - p \tag{17}$$

mientras al sustituir el valor de la longitud del segmento dirigido *OB*, dada por (16), en las relaciones en (5) correspondientes a las figuras c), f), i), l), n), p), C), F), H), K), N), P), encontramos que la respectiva longitud del segmento dirigido *AB* es

$$\overline{AB} = -p + \left(x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w\right)$$

es decir,

$$\overline{AB} = x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w - p \tag{18}$$

Es importante para el lector observar que si bien (17) y (18) son la misma expresión algebraica, sus significados son distintos porque (18) siempre denota una longitud negativa, mientras (17) denota una longitud que en las figuras a), d), g), j), m), o), A), D), G), I), L), O) es positiva, pero en las figuras b), e), h), k), B), E), J), M) es negativa. No obstante, de (17) y (18) tenemos que, en cualquier caso

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|x_1 \cos w + y_1 \operatorname{sen} w - p\right| \tag{19}$$

es la fórmula buscada, y nos permite determinar la distancia entre los puntos *A* y *B*. Además, como $P_1\left(x_1, y_1\right)$ es un punto de la recta L_2, se puede decir que (19) es la fórmula que nos permite conocer la distancia (euclideana) que existe de la línea recta al L_1 punto $P_1(x_1, y_1)$.

Por otra parte, con frecuencia la ecuación de una línea recta L es dada en la forma general

$$L : Ax + By + C = 0 \tag{20}$$

entonces, para determinar la distancia que existe entre la línea recta L y un punto $P_1(x_1, y_1)$ del plano *XY*, primero debemos transformar la ecuación (20) de la recta L a la forma normal. Esto último se logra haciendo uso del Teorema 2, de acuerdo con el cual la ecuación en la forma normal de la línea recta L es

$$L : \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt[2]{A^{2+}B^{2}}} = 0 \tag{21}$$

Por tanto, como (21) es la ecuación en la forma normal de la línea recta L, tenemos que la distancia d entre la línea L y el punto $P_1(x_1, y_1)$ del plano *XY* es, de acuerdo con nuestra fórmula (19),

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt[2]{A^{2+}B^{2}}} \right| \tag{22}$$

o también

$$d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + C \right|}{\sqrt[2]{A^{2+}B^{2}}} \tag{23}$$

y los resultados de este análisis nos permiten formular el siguiente

Teorema 3

Si $Ax + By + C = 0$ es la ecuación en la forma general de una línea recta L y si $P_1(x_1, y_1)$ es un punto dado del plano *XY*, entonces la distancia d que existe de la línea recta L a el punto P_1 puede obtenerse como el valor absoluto de sustituir las coordenadas (x_1, y_1) del punto P_1 por las variables x, y, respectivamente, en el primer miembro de la ecuación en la forma normal de la línea recta

$$L: \frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt[2]{A^{2+}B^2}} = 0$$

es decir,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt[2]{A^{2+}B^2}}$$

Notas al Teorema 1

1. Observemos que, en general, la línea recta L o no pasa por el origen $O(0,0)$, como en los casos de las figuras a), b), c), d), g), h), j), k) o pasa por el origen $O(0,0)$, como en los casos de las figuras e), f), i), l).
2. Cuando la línea recta L no pasa por el origen, como en los casos de las figuras a), b), c), d), g), h), j), k) siempre tenemos que $p > 0$, mientras el valor de w satisface la desigualdad $0^0 \leq w < 360^0$.

   En los casos de las figuras a), b), g), j), el ángulo w engendrado por el segmento dirigido OP_1 coincide con el ángulo de inclinación α del segmento OP_1. En los casos de las figuras c), d), h), k), el ángulo w engendrado por el segmento dirigido OP_1 no coincide con el ángulo de inclinación α del segmento OP_1.

   No obstante esta diferencia, $x\cos w + y\mathrm{sen} w - p = 0$ continúa siendo la ecuación en la forma normal de L.
3. Cuando la línea recta L pasa por el origen $O(0,0)$, como en los casos de las figuras e), f), i), l), siempre tenemos que $p = 0$, porque los puntos $O(0,0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ son el mismo punto, mientras el valor w satisface la desigualdad $0^0 \leq w < 180^0$ y en ninguno de estos casos el valor del ángulo w engendrado por el segmento dirigido OP_1 coincide con el valor del ángulo de inclinación α del segmento OP_1, además, la ecuación en la forma normal de la recta L continúa siendo $x\cos w + y\mathrm{sen} w - p = 0$, con $p = 0$.
4. El ángulo w engendrado por el segmento de recta dirigido OP_1 es el mismo ángulo positivo estudiado en la trigonometría elemental. En este análisis w también es el ángulo trigonométrico engendrado por la normal ON y el eje X. Sin embargo el ángulo α, aquí empleado, es el ángulo de inclinación de la línea recta ON, usado en la geometría analítica plana, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba del eje X.

Así, pues, w y α son conceptos distintos, pero sus diversos valores están estrechamente relacionados. En el caso de la figura e), por ejemplo, el segmento OP_1 no existe porque sus extremos son el mismo punto y su posible longitud es $\overline{OP_1} = p = 0$; sin embargo, haber asumido que OP_1 engendra el mismo ángulo w que el que engendra la normal ON no afecta en nada el análisis y se evita introducir excepciones. Todo lo que hemos hecho es emplear el principio matemático de que "toda cantidad puede ser sustituida por otra cantidad que sea igual a ella". De esta manera logramos la generalidad buscada sin afectar el significado principal.

Notas al Teorema 2

1. Teorema.
   Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las ecuaciones, en la forma general de dos líneas rectas L_1 y L_2, entonces las siguientes relaciones son condiciones necesarias y suficientes que deberán verificarse para que:

   a) L_1 y L_2 sean líneas rectas paralelas:
   $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

   b) L_1 y L_2 sean líneas rectas paralelas coincidentes:
   $A_1 = kA_2,\;\; B_1 = kB_2,\;\; C_1 = kC_2$

   c) L_1 y L_2 sean líneas rectas perpendiculares:
   $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

   d) L_1 y L_2 sean líneas rectas que se intersecten en un punto:
   $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$

2. Cuando una línea recta L_1, cuya ecuación en la forma general sea $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, no pase por el origen $O(0,0)$, esa línea recta L_1 podrá tener una posición particular, en el plano XY, de las mostradas en las figuras a), b), c), d), g), h), j), k) del apartado anterior. En cualquiera de estos casos, la ecuación en la forma normal de la recta L_1 será

$$L_1: \ \frac{A_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}x+\frac{B_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}+\frac{C_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}=0$$

donde $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tiene signo contrario al signo de $C_1 \neq 0$. En este caso no afecta si ocurre que $A_1 = 0$ o $B_1 = 0$ o si $A_1 \neq 0$ y $B_1 \neq 0$.

3. Cuando una línea recta L_1, cuya ecuación en la forma general sea $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, pase por el origen $O(0,0)$ pero no sea perpendicular al eje X, esa línea recta L_1 podrá tener en el plano XY una de las posiciones mostradas en las figuras e), f), i) del apartado anterior. En cualquiera de estos casos, la ecuación en la forma normal de la recta L_1 será

$$L_1: \ \frac{A_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}x+\frac{B_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}+\frac{C_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}=0$$

donde $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tiene el mismo signo que tiene $B_1 \neq 0$. En este caso no afecta que $C_1 = 0$, y $A_1 = 0$ o $A_1 \neq 0$.

4. Cuando una línea recta L_1, cuya ecuación en la forma general sea $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, pase por el origen $O(0,0)$ y sea perpendicular al eje X, esa línea recta L_1 sólo podrá tener en el plano XY la posición mostrada en la figura l) del segmento anterior. En este único caso la ecuación en la forma normal de la recta L_1 será

$$L_1: \ \frac{A_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}x+\frac{B_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}+\frac{C_1}{\pm\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}}=0$$

donde $\sqrt[2]{A_1^2+B_1^2}$ tiene el mismo signo que tiene $A_1 \neq 0$. En este caso no afecta que siempre ocurra que $B_1 = 0$ y $C_1 = 0$.

Conclusión

El enorme problema que existe entre la mayoría de estudiantes y su correspondiente nivel de aprendizaje de la matemática, permanecerá igual o peor, por lo menos en México, si los responsables de ese aprendizaje siguen sin entender que los alumnos deben ser persuadidos por cualquier medio de que vale la pena invertir esfuerzo y tiempo en intentar penetrar en lo más profundo de las áreas del conocimiento, donde sólo unos cuantos han logrado llegar con indiscutible éxito. Sólo llegando hasta el final se puede ser creativo, inventivo, productivo. Sin embargo, quienes decidan emprenden este largo y sinuoso camino tendrán que enfrentarse a múltiples problemas, entre ellos aprender otro idioma, pues a nadie, incluyendo las grandes editoriales y nuestras honorables instituciones educativas, le ha pasado por la cabeza la necesidad de traducir buenos libros al español, con los cuales podamos alcanzar ese aparentemente escurridizo objetivo. Mientras tanto, se debe aprovechar el tiempo y empezar con lo que se tenga a mano. No existe otro camino, no existe camino real para nadie, más que el arduo trabajo diario.

> Las palabras que no van seguidas de hechos, no valen nada.
>
> Esopo

> Un poco más de persistencia, un poco más de esfuerzo, y lo que parecía un fracaso sin esperanza puede convertirse en un glorioso éxito.
>
> Elbert Hubbard

Bibliografía

Efimov, N. (1969). *Curso breve de geometría analítica*. Moscú: Editorial Mir.

Lehmann, C. H. (1969). *Geometría analítica*. México: UTEHA.

Bajvalov, S. J., Ivannitskai, V. P. y Babushkin, L. I. (1964). *Geometría analítica* (primera parte). México: Subsecretaría de Enseñanza Técnica y Superior, IPN.

Moise, E. E. y Downs Jr., F. L. (1972). *Geometría. Serie Matemática moderna IV.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Baldor, J. A. (1980). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría.* México: Cultural Centroamericana.

Swokowski, E. W. (1969). *Álgebra universitaria*. México: CECSA.

Educación matemática en México: investigación y práctica docente

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional

Introducción

En el presente capítulo se aborda lo que ha sido la educación matemática en México, así como el futuro que se anticipa en esta área, y de manera específica en los niveles educativos medio superior y superior, también llamados nivel bachillerato y nivel universitario.

Es importante partir de la concepción que predomina en México respecto al término educación matemática, concebido a partir de dos vertientes: *a)* como las acciones educativas que se realizan para atender la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, la educación matemática como práctica docente en todos los niveles educativos; *b)* la educación matemática como un área de conocimiento conformada por las investigaciones que se realizan en esta temática, tanto para el bachillerato como para el nivel universitario. Por tanto, esas dos vertientes de la educación matemática generan la inclusión de dos secciones en este documento.

Cabe señalar que en México los investigadores pioneros del área son los doctores Eugenio Filloy Yagüe y Carlos Imaz Jahnke, quienes coincidían en que los estudios generalmente se enfocan en la educación y luego toman en cuenta a la matemática, siendo que la problemática del aprendizaje y la enseñanza de la matemática tienen que ver con la propia matemática. Mencionaban que desde la matemática misma debían hacerse estudios que fueran hacia la educación; de ahí que ambos la denominaran matemática educativa, y sentaran las directrices para los estudios que hoy se realizan en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Acciones educativas en matemáticas

Es claro que en el mundo globalizado en el que se encuentran inmersos todos los países se han roto barreras de todo tipo: ideológicas, culturales, científicas, tecnológicas o de valores; esto conlleva la necesidad de realizar modificaciones en las esferas políticas, sociales, culturales, económicas y educativas, entre otras. Es en este sentido que la educación ha impulsado cambios en los procesos educativos que van desde la política educativa y los modelos académicos, hasta transformaciones relacionadas con los procesos de aprendizaje y enseñanza. En particular, la educación matemática ha modificado la práctica docente en todos los niveles.

De hecho, la ruptura de fronteras en la perspectiva global mundializada ha impulsado que las políticas educativas proyectadas por los organismos internacionales sean escuchadas en muchos países y México es uno de ellos, como puede apreciarse en los siguientes apartados.

Para el caso concreto de este ensayo, los niveles medio superior y superior han experimentado cambios en la enseñanza de la matemática, los cuales tienden a tomar en cuenta, sobre todo, enfoques como la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades, que en ocasiones han sido denominadas competencias. También hay modificaciones en relación con actividades didácticas como el trabajo en equipo, el uso de mapas conceptuales y la aplicación de rúbricas para la evaluación.

Nivel medio superior

Es importante mencionar que en México la educación media superior (15 a 18 años de edad) tiene dos características: bachilleratos con carácter monovalente de tipo propedéutico para transitar hacia el nivel superior; y bachilleratos de carácter bivalente (propedéutico y terminal) que desembocan en carreras técnicas, pero con apertura para realizar estudios universitarios.

Cuando se trata de bachilleratos con características propedéuticas y terminales los enfoques en la enseñanza de la matemática son más evidentes. En ambos casos se pretende prepararlos para una mejor calidad de vida, contribuyendo así a la equidad social.

En México recién se ha establecido la educación media superior como obligatoria, con el propósito de apoyar una mejor preparación de los ciudadanos que deciden o no pueden continuar con una formación universitaria y se incorporan al mercado de trabajo, con lo cual pueden contribuir a la economía del país. Por ello se le da más peso al Acuerdo 442 –donde se establece un Sistema Nacional de Bachilleratos que contempla el enfoque por competencias–, de la Subsecretaría de Educación Media Superior, dependiente de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Lo anterior permite articular programas de estudio con diversas características, entre ellas *1)* las competencias genéricas, que comprenden una serie de desempeños terminales; *2)* competencias disciplinares básicas; *3)* competencias disciplinares extendidas, de carácter propedéutico, y *4)* competencias profesionales para el trabajo (SEMS, 2008). Los planteles incluidos en el Sistema Nacional de Bachilleratos son los que han acreditado un elevado nivel de calidad. Para ello se someten a una evaluación exhaustiva por parte del Consejo para la Evaluación de la Educación del Tipo Medio Superior (Copeems), organismo con independencia técnica creado para ese efecto (SEMS, 2014). Las competencias matemáticas que se pretende inculcar en este nivel educativo son que el alumno:

- Construya e interprete modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formule y resuelva problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- Explique e interprete los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contraste con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumente la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Analice las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifique, represente y contraste experimental o matemáticamente, las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Elija un enfoque determinista o aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumente su pertinencia.

- Interprete tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Es importante mencionar que para el logro del desarrollo de estas competencias del Sistema Nacional de Bachillerato se parte del conocimiento previo de los estudiantes, quienes tratan de responder a los estándares que son evaluados por medio del Programme for International Student Assessment o Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés).

Como es sabido, el PISA es un proyecto de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), que evalúa la formación de los alumnos cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, alrededor de los 15 años de edad. Las tres competencias examinadas por medio del PISA son las habilidades lectoras, matemáticas y de ciencias. Rico (2009) describe lo anterior al mencionar que dicho proyecto se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Y añade que tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales relevantes para el bienestar personal, social y económico.

Según el proyecto PISA, la competencia matemática implica la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados, y poder involucrarse con, y utilizar, las matemáticas. El concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas. Es, por tanto, un concepto que excede al mero conocimiento de la terminología y las operaciones matemáticas, e implica la capacidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana (OCDE, 2014).

Nivel superior

En referencia a las universidades, prácticamente cada una de ellas decide los enfoques, modelos y vertientes por los que ha de transitar. Sin embargo, se puede decir que la preocupación por formar cuadros de profesionistas capaces y competentes en relación con cualquier profesionista de otros países ha llevado a las universidades a tomar en cuenta las políticas educativas planteadas por organismos como la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) y la propia Subsecretaría de Educación Superior, que depende de la SEP de México. Lo mismo puede decirse acerca de las políticas internacionales auspiciadas que presentan organismos como la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés), la OCDE y el Banco Mundial (BM), encaminadas al fortalecimiento de los programas académicos ofrecidos por las instituciones de educación superior, y que, en términos generales, promueven una formación integral con calidad y pertinencia para los individuos de todas las naciones afiliadas (Ocampo *et al.*, 2011).

A continuación se comentan algunas de las políticas educativas generales del nivel superior en México descritas en Ocampo *et al.* (2011), texto donde se menciona que esos lineamientos han sido planteados por la SEP en función de las tendencias de educación superior a nivel mundial y de acuerdo a la realidad del país.

En una de esas políticas se menciona la necesidad de elevar la calidad de la educación para que los estudiantes cuenten con medios para acceder a un mayor bienestar y puedan contribuir al desarrollo nacional. Lo anterior implica establecer la evaluación como un medio para mejorar los programas académicos en todos los niveles, así como para introducir innovaciones en las prácticas pedagógicas.

En otra de las políticas se busca ampliar las oportunidades educativas para reducir desigualdades entre grupos sociales, cerrar brechas e impulsar la equidad. Para ello se considera indispensable fortalecer los programas académicos, modalidades educativas y mecanismos dirigidos a facilitar el acceso y brindar atención a diferentes grupos poblacionales.

En esas políticas educativas también se establece la importancia de impulsar el desarrollo y utilización de nuevas tecnologías en el sistema educativo, ampliar las capacidades de los estudiantes para una vida productiva y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento. Se enfatiza, en particular, el uso de las tecnologías de la información y comunicación para fomentar la construcción de conocimientos en los estudiantes; para la operación de redes de conocimiento y el desarrollo de proyectos interinstitucionales; y para impulsar la educación a distancia con criterios y estándares de calidad e innovación permanentes, con especial énfasis en la atención de regiones y grupos que carecen de acceso a servicios escolarizados.

Un elemento de suma importancia entre esas políticas obliga a ofrecer una educación integral que equilibre la formación de valores ciudadanos, el desarrollo de competencias para la actividad laboral y la adquisición de conocimientos. Lo anterior conlleva la necesidad de promover entre los estudiantes de las instituciones de educación superior el desarrollo de capacidades y competencias que permitan facilitar su desempeño en diferentes ámbitos de su vida.

Otro elemento indispensable es la política de ofrecer servicios educativos de calidad para formar personas con alto sentido de responsabilidad social, que participen de manera productiva en el mercado laboral. Aquí resulta imperativo fortalecer la pertinencia de los programas académicos de educación superior, así como la acreditación de las profesiones que se ofrecen.

En relación con lo anterior, las instituciones de educación superior giran alrededor de la acreditación de las profesiones a través de organismos nacionales creados para tal efecto. En México, los programas de licenciatura reconocidos por su calidad son evaluados por los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior (CIEES) y acreditados por el Consejo para la Acreditación de la Educación Superior (Copaes), donde se lleva a cabo la evaluación de forma interinstitucional por pares académicos.

Por último, cabe mencionar –como elementos que dan más énfasis a las políticas anteriores, pues algunos de éstos son complementarios a ellas– los objetivos generales que plantea el Programa Sectorial de Educación 2013-2018 de la SEP: *1)* asegurar la calidad de los aprendizajes en la educación básica y la formación integral de todos los grupos de la población; *2)* fortalecer la calidad y pertinencia de la educación media superior, superior y formación para el trabajo, a fin de que contribuyan al desarrollo de México; *3)* asegurar mayor cobertura, inclusión y equidad educativa entre todos los grupos de la población para la construcción de una sociedad más justa; *4)* fortalecer la práctica de actividades físicas y deportivas como un componente de la educación integral; *5)* promover y difundir el arte y la cultura como recursos formativos privilegiados para impulsar la educación integral; *6)* impulsar la educación científica y tecnológica como elemento indispensable para la transformación de México en una sociedad del conocimiento (SEP-PSE, 2013).

A partir de las políticas y los objetivos planteados, la educación matemática en el nivel superior tiende a modificarse con acciones que impulsan innovaciones en la práctica docente a través del uso de la tecnología como mediador en el aprendizaje y el diseño de cursos de matemáticas en línea. También busca incursionar en el desarrollo de competencias matemáticas; trata de trabajar con una matemática contextualizada para elevar la calidad de los programas académicos. Sin embargo, cabe mencionar que si bien estos lineamientos en materia de educación llegan a los sectores directivos y difícilmente son adoptados por la comunidad docente de matemáticas, se puede asegurar que son factores que están en el tintero.

Investigación en educación matemática

Para la investigación en educación matemática es importante decir que en México existe una asociación civil que agrupa a los investigadores "altamente calificados" de esa área de estudio, denominada Consejo Mexicano de Investigación Educativa A.C. (COMIE). Uno de sus objetivos es "proponer mecanismos que mejoren la difusión y los resultados de investigación"; por otro lado, entre las acciones que realiza destaca la de establecer cada diez años el estado del conocimiento sobre la investigación educativa en México; el último de los cuales tuvo lugar durante la década del inicio del siglo XXI.

Una investigación científica que incide en la educación se denomina investigación educativa. Esta incidencia se establece en dos niveles o escalas: macro y micro. A nivel macro se trata de un estudio que enfoca a la educación y a las instituciones educativas desde una visión que permite establecer las políticas y la gestión educativas y los modelos académicos, entre otros. Mientras que a escala micro la búsqueda aborda las pequeñas sociedades del ámbito educativo, como el ambiente de aprendizaje, los actores educativos, las didácticas disciplinarias y el currículo, por mencionar algunos factores. Con base en esta descripción, la investigación en educación matemática en México se entiende como investigación educativa interdisciplinaria.

Ahora se muestran algunos ejemplos de los niveles educativos abordados en este ensayo, a fin de evidenciar la tendencia que se ha venido siguiendo en la investigación en educación matemática durante los últimos veinte años. Para mayor información, el lector interesado puede recurrir a las referencias de los estados del conocimiento del COMIE en investigaciones educativas disciplinarias. El análisis para los estados del conocimiento se realiza mediante diversas publicaciones en el área de pedagogía y educación matemática (libros, capítulos de libros, tesis de maestría y doctorado, reportes técnicos de investigación de las instituciones de educación superior del país y ponencias de diversos eventos académicos); para el nivel medio superior ver los análisis elaborados por los doctores Armando Solares e Ivonne

Sandoval (2013) y el doctor Luis Manuel Aguayo Rendón (2003); para el nivel superior revisar los análisis de la doctora Patricia Camarena Gallardo (2003, 2013a).

Para mostrar la tendencia seguida en la investigación en educación matemática se recurre principalmente a las referencias del COMIE ya señaladas. El análisis se realiza en función de una de las ternas doradas de la educación, dada por el estudiante, el profesor y el contenido a ser enseñando y aprendido. Es importante mencionar que el tema de los recursos de apoyo didáctico tiene un peso muy importante; es más, es notorio el uso de una serie de recursos tecnológicos que de hecho han desplazado a cualquier otro tipo de material de apoyo didáctico, de ahí que se haya dedicado un capítulo del libro específicamente a las tecnologías de información y comunicación; sin embargo, ese tema no se abordará en este capítulo.

Las investigaciones en los niveles medio superior y superior

En el nivel medio superior la planta de profesores está formada por profesionistas de diversas áreas, quienes pueden impartir cursos de matemáticas si su profesión es "afín" a esta disciplina, aun cuando la gran mayoría no tiene formación docente. Como es sabido, para una persona que no ha sido preparada para la docencia, la participación en niveles educativos básicos le resulta más compleja. Esto ha provocado que los profesores traten de modificar su práctica de enseñanza con más énfasis que los maestros de niveles avanzados (universidad o posgrado), con lo cual se generan más estudios que en el nivel superior.

En México no hay una formación específica para la docencia en matemáticas en el nivel superior, a excepción de estudios sobre educación, los cuales constituyen la minoría del total de las profesiones, aun cuando en ciertas universidades privadas comienzan a identificarse licenciaturas con tendencia a formar profesores para el nivel universitario. En general, son los matemáticos quienes se dedican a impartir las clases de matemáticas en las universidades; incluso sin tener una formación para la docencia, ellos representan cerca del 20% del total de profesores en matemáticas entre las profesiones universitarias distintas a la educación; el resto de docentes de matemáticas son personas formados en la misma profesión donde laboran, o bien son egresados de profesiones afines a las que trabajan (Camarena, 2013b). Esta problemática provoca que sea en el nivel superior donde se realiza menos investigación en educación matemática en relación con otros niveles educativos; la mayoría son estudios o reportes de experiencias docentes, no investigaciones científicas. Se sabe que una investigación educativa de corte científico se caracteriza, entre otros elementos, por la fundamentación objetiva y rigor en el análisis de la información. En las investigaciones analizadas se observan procedimientos de diversos tipos: algunos estudios contienen fundamentaciones que van desde una teoría formal que da sustento al trabajo, hasta la incorporación de elementos teóricos que sus autores consideran coherentes pero que en realidad no se usan en el desarrollo del trabajo, tan sólo funcionan como adorno; otros carecen de cualquier tipo de fundamento y únicamente muestran el punto de vista del autor.

Entre las teorías y elementos teóricos más utilizados como fundamento de las investigaciones se localizan los registros de representación de Duval, las situaciones didácticas de Brousseau, los campos conceptuales de Vergnaud, las funciones cognitivas de Feuerstein y la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias de Camarena. A lo largo de esta exposición se observarán otros elementos utilizados como sustento de los estudios.

Se puede decir que la mayoría emplea una metodología general: diseño, aplicación y análisis, en ninguno de estos casos hay una metodología asociada al marco teórico en el que se fundamentan. El resto de las investigaciones pueden agruparse en dos vertientes: en la primera se identifican metodologías asociadas a fundamentaciones teóricas como la matemática en contexto o la ingeniería didáctica; la segunda corresponde a la resolución de problemas, cuya base son los trabajos de Schoenfeld y de Santos-Trigo, además de la metodología denominada Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (APOE). Ahora bien, en cuanto a los contenidos matemáticos abordados en esas investigaciones, el tema que lleva la delantera en bachillerato es el álgebra, mientras que para las universidades destaca el cálculo diferencial e integral con funciones de una variable real. En el nivel medio superior también se abordan otras materias, aunque sin tanta preferencia; uno de los temas menos trabajados es el de probabilidad. Para el nivel superior, los temas que ocupan el segundo lugar en importancia para los investigadores, y que distan por mucho del primero, son las ecuaciones diferenciales ordinarias y el álgebra lineal. La mayoría de los temas restantes han sido abordados en tan solo una o dos investigaciones.

Como elementos emergentes en las investigaciones de bachillerato pueden mencionarse los estudios críticos de los sistemas de evaluación masiva, entre ellos el examen PISA o el examen único de ingreso al bachillerato, ambos relativamente recientes en nuestro país.

Para el nivel superior llama la atención que un tema tan actual como el de las competencias matemáticas sólo sea de interés para un investigador, cuando se esperaría encontrar varios estudios sobre competencias matemáticas a manera de línea de investigación emergente.

Para la descripción de las investigaciones realizadas en ambos niveles educativos se tomaron en cuenta, sobre todo, las referencias sobre el estado del conocimiento del COMIE ya mencionadas.

El estudiante

A continuación se mencionan algunas investigaciones para el nivel bachillerato; en ellas se indaga sobre las diversas estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de problemas, y qué conocimiento o nociones matemáticas poseen. Más adelante, para el nivel universitario se puede decir que el propósito consiste en verificar si los alumnos poseen o no determinados conceptos, para lo cual se emplean distintas perspectivas; otras investigaciones tratan de diagnosticar problemas u obstáculos que enfrentan los estudiantes en diversas situaciones; otras más abordan el tipo de estrategias empleadas por los alumnos al resolver problemas y contextualizar las matemáticas.

Nivel medio superior. En la investigación de Santos-Trigo (1995), se identifica que los alumnos carecen de estrategias para la resolución de problemas y para verificar los resultados obtenidos o su proceso de resolución, y quizá por ello se inclinan a la aplicación directa de algún cálculo aritmético o fórmula algebraica. Mercado (2004), Sandoval (2005) y Salinas (2008) estudian la argumentación y la producción de conjeturas matemáticas de estudiantes que trabajan en ambientes geométricos; Mercado y Sandoval (2009) estudian algunos ambientes de geometría dinámica, mientras Salinas aborda el uso de papel, lápiz, regla y compás. Arteaga *et al.* (1999) analizan las interpretaciones y recursos matemáticos en diferentes problemas, y además observan que el uso de representaciones toma tiempo, lo cual deberá ser considerado por el profesor. Filloy y Rubio (1993) observan la actividad en clase de álgebra, y determinan que la mayoría de la población en estudio atribuye significados algebraicos cuando se trata de ambientes numéricos.

Nivel superior. A partir de algunos problemas Cooley *et al.* (2007) analizan el esquema en las gráficas del cálculo y muestran que los estudiantes poseen varios niveles de entendimiento. A su vez, Eudave (2007) busca determinar las concepciones de los alumnos sobre las nociones de estadística descriptiva, para lo cual analiza la forma en que contextualizan a la matemática en las carreras de estudio. Alatorre (1999) analiza los métodos de construcción del estudiante de acuerdo con el teorema de "acto", de la teoría cognitiva de los campos conceptuales de Vergnaud; encuentra algunas dificultades en la concepción del proceso combinatorio, y el hecho de que utilizan como estrategias las relaciones de equilibrio y la proporcionalidad como proceso central en la solución de problemas. Muro (2004), Muro *et al.* (2007) y Trejo *et al.* (2011) toman como punto de partida la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias y emplean los campos conceptuales de Vergnaud para el análisis cognitivo. Los trabajos de Muro *et al.* se enfocan en las series de Fourier en el contexto de transferencia de masa, mientras en Trejo *et al.* se consideran los sistemas de ecuaciones lineales en el contexto del balance de materia en eventos de mezclas químicas.

De León (1996) determina cómo los alumnos requieren de un marco de referencia para mirar la aleatoriedad, pues sólo con ello pueden apropiarse de tal concepto. Cuesta *et al.* (2010) diseñan estrategias didácticas y encuentran que los estudiantes no relacionan la representación gráfica con la verbal.

En cuanto a la contextualización de la matemática, Mochón y Godínez (1996) exploran algunos métodos utilizados por los estudiantes para modelar problemas de situaciones reales, encontrando que aplican procedimientos aritméticos de tipo lineal aun cuando los problemas son de carácter exponencial y típicos de ecuaciones diferenciales o en diferencias; concluyen que eso habla de la limitación de los alumnos para aplicar procedimientos diferenciales o algebraicos. Muro *et al.* (2002) llevan a cabo una investigación para determinar si los estudiantes pueden contextualizar la serie de Fourier con el proceso de transferencia de masa mediante la matemática en contexto; concluyen que los alumnos no pueden vincular estos conceptos debido a los obstáculos epistemológicos de las series trigonométricas: la suma de funciones senoidales, la periodicidad de las funciones y la convergencia de la serie. Por su parte, Balderas (2000) solicita a los alumnos imaginar y dibujar la trayectoria del agua que fluye constantemente en un tubo conectado al extremo de una pipa llena de agua; encuentra que las respuestas de los estudiantes a la razón de cambio están dadas en términos visuales, aunque pueden hacer uso de otros elementos.

Santos-Trigo y Rivera (2010) indagan en estudiantes de posgrado acerca del conocimiento matemático conceptual y sus aplicaciones, con el propósito de identificar y caracterizar el perfil de ingreso. Ursini y Trigueros (2006) se enfocan a examinar respecto al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes universitarios; muestran que conforme avanzan en sus estudios universitarios ese pensamiento se sigue desarrollando, pero sin lograr un desarrollo total en el quinto semestre universitario.

Hay otra serie de estudios en los que el objetivo es identificar si los estudiantes han aprendido después de diseñar una estrategia didáctica. Zúñiga (2004) aborda el método de mínimos cuadrados para la determinación de la recta de regresión en una colección de datos experimentales con funciones de dos variables en el contexto de la ingeniería; el estudio se sustenta en la teoría de la matemática en el entorno de las ciencias, y emplea la estrategia didáctica de la matemática en contexto; para los análisis cognitivos usa la teoría de Reuven Feuerstein. Hernández (1998) utiliza la metodología de la ingeniería didáctica para desarrollar situaciones de enseñanza-aprendizaje que incluyen el uso de la computadora y versan sobre ecuaciones diferenciales ordinarias; la intención es que el alumno pueda articular los acercamientos numérico, gráfico y algebraico; luego de tres semestres de aplicar estas situaciones didácticas se concluye que sí son posibles estos acercamientos cuando se trabaja con ellos desde el inicio del curso.

El profesor

En este apartado se abordan algunas investigaciones que versan sobre el profesor; en el nivel medio superior la investigación se enfoca a analizar las concepciones que poseen los docentes y los procesos de enseñanza más favorecidos; también se identifican las principales dificultades matemáticas entre los profesores, situación que se ha reportado de manera constante en todos los niveles educativos. En el nivel superior se indaga, sobre todo, acerca de las actitudes, los conocimientos y las estrategias didácticas empleadas por los maestros.

Nivel medio superior. La investigación de Rigo (1994) identifica que hay poco dominio sobre el concepto de continuidad, pues al trabajar con distintos registros de representación de una función caen en contradicciones, lo cual deja en claro que el concepto de función mencionado en Hitt (1995) no se considera estable. El concepto de eventos independientes es muy confuso para los profesores y, en consecuencia, caen en contradicciones cuando lo enseñan (Sánchez, 1996).

Solares y Sandoval (2013) identifican algunos trabajos en los que se analiza la práctica docente con el uso de la tecnología para estudiar escenarios didácticos basados en la resolución de problemas, como es el caso de Santos-Trigo (2008), quien en 2010 hace una propuesta de enseñanza con la resolución de problemas y uso de tecnología digital.

Nivel superior. Mediante ejercicios de desigualdades de forma geométrica y una calculadora graficadora, Rivera (1996) encuentra que los profesores no se adaptan de inmediato a la tecnología. Camarena (2004) indaga sobre las características de los "buenos maestros" que imparten clase en el nivel universitario, donde la matemática no es una meta por sí misma, y afirma que los "buenos maestros" son matemáticos de formación que imparten clases de matemáticas, y cuyo interés por el aprendizaje de sus alumnos es una característica fundamental. Oktac y Chargoy (2000) afirman que para tener la concepción de base de un espacio vectorial el individuo debe transitar por los diferentes modos del pensamiento que establece Sierpinska, se diseña una secuencia de actividades para averiguar si los profesores pueden transitar por esos modos de pensamiento, pero se verifica que no es así.

En otros estudios se expone a los docentes a situaciones particulares para provocar una reflexión sobre su práctica, a fin de que incorporen eventos contextualizados en su didáctica. En el tema de funciones continuas no diferenciables Santos-Trigo (1995) da seguimiento al desarrollo de un curso donde el profesor pretende incorporar la estrategia de resolución de problemas, con apoyo de Cabri Geometre, mas asegura que si bien el profesor fue instruido para esa tarea no tiene consistencia en la actividad, y concluye que al profesor le toma tiempo conceptualizar y aceptar cambios en su práctica docente cotidiana. Gibert *et al.* (2010) investigan la motivación de los profesores para un cambio en su práctica docente, para lo cual hacen vivir a los profesores la estrategia didáctica de la matemática en contexto para el caso de la distribución normal, encontrándose que se cumplen los indicadores de motivación para los maestros en estudio.

Entre las investigaciones que incluyen estrategias didácticas destaca la de Cervantes *et al.* (2008), quienes diseñan una técnica de enseñanza para el concepto de derivada con base en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias y con un enfoque hacia la modelación. Miranda (1996) toma en cuenta las ideas y problemas que dan origen a la transformada de Laplace y con ello construye una propuesta didáctica. Moreno (1999) se ocupa de analizar en situación escolar si un escenario físico geométrico simulado por computadora permite superar obstáculos epistemológicos como el principio de permanencia de Leibniz, y estudia si esta simulación apoya a la construcción en los estudiantes de la convergencia de nociones sobre series trigonométricas; se reporta que el escenario permitió la interacción de los marcos gráfico y algebraico y asociar nociones de convergencia, derivabilidad y discontinuidad.

Camarena (1995) lleva a cabo una investigación con la didáctica de la matemática en contexto: se imparte a los alumnos un curso de ecuaciones diferenciales lineales en el contexto de los circuitos eléctricos, y al siguiente semestre un curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas; luego se realiza el seguimiento de estos estudiantes a lo largo de los tres semestres posteriores a los cursos de experimentación, observándose que la forma de trabajar los cursos propios de la ingeniería es con destrezas matemáticas inherentes a la ingeniería, con seguridad de sí mismos y con mejores calificaciones en las asignaturas de la ingeniería que requerían de los temas estudiados, una situación inusual con los cursos tradicionales de matemáticas. Farfán y Lezama (2001) estudian el fenómeno que se presenta cuando una situación didáctica es puesta en diferentes escenarios y por distintos profesores; comentan la necesidad de conocer los elementos que intervienen para poder reproducir la misma circunstancia en cada caso y puedan establecerse comparaciones.

Los investigadores en la línea de resolución de problemas, entre los que destaca Santos-Trigo (2000), han realizado estudios que tratan de apoyar la práctica docente del profesor, y muestran los elementos teóricos que intervienen en la resolución de problemas, como la cognición, las creencias, la metacognición y las heurísticas. Santos-Trigo (1998) describe que una dificultad al incorporar la resolución de problemas en clase es construir problemas y las actividades instruccionales para su aplicación; el autor muestra una estrategia para la elaboración de problemas a partir de la visión retrospectiva planteada por Polya respecto a la solución de los problemas: que explícitamente el alumno se plantee preguntas y dilemas que generen una discusión abierta de argumentos y explicaciones que pongan en perspectiva sus conocimientos, o sea, que problematice su propio aprendizaje.

El contenido

Se abordan aquí algunas de las investigaciones que versan sobre el contenido a enseñar y a ser aprendido. En el nivel medio superior este tema es el que menos se ha investigado, pues la mayor cantidad de estudios corresponde al nivel superior. En este ámbito educativo los objetivos que con más frecuencia se persiguen están relacionados con la posibilidad de conocer cómo nacen determinados objetos matemáticos, pues conocer la génesis de los conceptos y objetos matemáticos ofrece elementos para el diseño de estrategias didácticas con contextos reales, evitando así presentar un conocimiento acabado.

Nivel medio superior. Entre las investigaciones de esta línea de trabajo se localiza la de Riestra (1998), quien analiza el papel que las *cantidades relativas* juegan en nociones fundamentales de aritmética, geometría y cálculo diferencial, vínculo que debe ser estudiado y conocido por los docentes. Moreno (1998) realiza un interesante trabajo de carácter histórico para determinar las diferentes concepciones epistemológicas del espacio geométrico.

Nivel superior. Waldegg (1993) analiza los pasajes en que Aristóteles discute la naturaleza del infinito matemático y su existencia o inexistencia, tras considerar que para ese filósofo los objetos matemáticos derivan por abstracción de los objetos sensibles; así resalta la posición realista empirista de la epistemología aristotélica. Camarena (2001) determina un constructo de orden epistemológico: menciona que cuando un contenido de saber está destinado a utilizarse en la ingeniería, sufre a partir de entonces un conjunto de adaptaciones que le permitan encajar en las aplicaciones para esa ingeniería, y se le llama *saber de aplicación*. Así, el saber didáctico se extrae del dominio escolar para insertarse en el ámbito de la ingeniería, convirtiéndose en saber de aplicación; al conjunto de las transformaciones que sufre un saber para pasar del saber a enseñar al saber de aplicación se le denomina *transposición contextualizada*. Considera interesante ver que así como existe la transposición didáctica –cuya intencionalidad es la de enseñanza y transforma el saber científico en saber a enseñar–, también existe la transposición contextualizada, cuya intencionalidad es de aplicación en la ingeniería y modifica este saber a enseñar a un saber de aplicación.

Cordero y Muñoz (1994) analizan el desarrollo epistemológico de la integral para determinar la simbiosis algoritmo y concepto. Mientras que Oktaç *et al*. (2007) estudian el contenido matemático de cuatro tesis de maestría en ingeniería a partir del pensamiento teórico y práctico de Sierpinska y la transposición contextualizada de Camarena; los investigadores encontraron que la contribución de la matemática se da principalmente por medio de la optimización. Muro *et al.* (2002) trabajan con el proceso metodológico de contextualización de la teoría de la matemática en el entorno de las ciencias, describen la vinculación de las series de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa e identifican cómo se reconceptualiza este fenómeno de la química con la ayuda de la matemática.

Cantoral y Castañeda (2001) llevan a cabo un estudio sobre el punto de inflexión, a partir de los trabajos de L'Hopital y Agnesi, y afirman que ambos incluyeron ejemplos de manera sistemática, con la intención de ampliar las explicaciones.

Ulín (2001) extiende el trabajo de Riestra mediante un análisis de textos antiguos sobre cálculo de una y varias variables, y determina la injerencia de las cantidades relativas en el origen de estos temas; concluye con la demostración del teorema fundamental de cálculo en términos de cantidades relativas. Rivera (1998) rescata la representatividad de polinomios en diversas variables, no negativos, como suma de cuadrados de polinomios, para contar con una versión que no sea tan sofisticada para los alumnos de carreras de matemáticas, pues la presentada casi siempre, la de Hilbert, se basa en curvas algebraicas que no les son accesibles. Camarena (2001) encuentra que las distribuciones de Schwartz no son el único sustento teórico para las funciones generalizadas; menciona, por ejemplo, los modelos infinitesimales y las sucesiones de Mikusinski, para concluir que hay cuatro posibles alternativas didácticas para impartir las funciones generalizadas, en particular la delta de Dirac, y todas ellas están correlacionadas con los sustentos teóricos de dichas funciones. La modelación matemática en ingeniería es abordada por Camarena (2009 y 2010), quien clasifica y caracteriza los modelos matemáticos; además determina los elementos cognitivos y habilidades del pensamiento presentes durante la modelación matemática. Por su lado, Mochón (1997) señala que los modelos matemáticos ayudan a entender mejor los fenómenos que describen, y desarrolla la intuición sobre su funcionamiento, además de servir para predecir lo que pasaría en la situación real.

Desde la perspectiva del desarrollo curricular, llama la atención que solamente una persona realiza investigación en esa área. Camarena (1999) despliega la metodología Dipcing para diseñar programas de estudio de matemáticas en profesiones universitarias, y que se compone de tres etapas: *a)* la central se aboca a analizar los contenidos matemáticos, explícitos e implícitos, en los cursos de la carrera en estudio; *b)* la precedente, a través de la cual se diagnostica el nivel de conocimientos de matemáticas que tienen los alumnos a su ingreso a la universidad; *c)* la consecuente, donde se encuesta a egresados sobre el uso que dan a la matemática en su labor profesional. Con Dipcing se define la vinculación curricular interna; la relación entre la matemática y los demás cursos de la ingeniería; la vinculación curricular matemática externa entre el nivel superior y el nivel medio superior, el nivel superior con el nivel de posgrado y el nivel superior con la industria.

Para cerrar este apartado, es importante mencionar la existencia de dos corrientes teóricas gestadas en México desde la década de 1980, además de otra postura desarrollada a principios del presente siglo. Una de las corrientes es el trabajo de Imaz, quien propone tratar en el salón de clases al cálculo y en general al análisis matemáticos desde el campo de los hiperreales como alternativa didáctica, ya que esto es más cercano a la realidad de los fenómenos que se tienen que matematizar. La segunda es la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, construida por Camarena desde 1982, la cual persigue una *matemática social* y mira al ambiente de aprendizaje como un sistema complejo de tipo social, económico, político, cultural y psicológico, donde intervienen las cinco fases de la teoría: curricular, cognitiva, didáctica, epistemológica y docente, todas interactuando entre sí. La postura desarrollada desde principios de la década pasada, es la que han llamado aproximación socio-epistemológica coordinada por Cantoral.

Imaz (1998) realiza un cambio en la estructura del análisis matemático, con la finalidad de presentar una matemática acorde a las necesidades de las ciencias que requieren cantidades infinitamente pequeñas para su modelado, y que la matemática tradicional no proporciona. Imaz (1996, 1998) indica que trabajar con los hiperreales hace que se retome el camino de los infinitos e infinitesimales; la matemática tomó en cuenta a los infinitesimales desde antes de Newton y Leibniz, mas los fue abandonando conforme se formalizó esta disciplina. Además, en los cursos de ísica se continúan utilizando las cantidades infinitesimales, sin importar que las asignaturas de matemáticas las ignoren.

La teoría de la matemática en el contexto de las ciencias reflexiona sobre la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, entre la matemática y las futuras situaciones profesionales y laborales del estudiante, así como entre la matemática y las actividades de la vida cotidiana, para llevar una matemática contextualizada al salón de clases (Camarena, 1984, 1999). Como teoría, en cada una de sus fases se incluye una metodología con fundamento teórico acorde a los paradigmas en que se sustenta; ahí se guían los pasos para el diseño curricular, se describe la didáctica de la matemática en contexto a seguir, se explica el funcionamiento cognitivo de los alumnos y se proporcionan elementos epistemológicos acerca de los saberes matemáticos vinculados a las actividades de los profesionistas, entre otros. Además incluye constructos teóricos como la transposición contextualizada, eventos contextualizados y una matemática con carácter social (Camarena, 2013c).

La aproximación socio-epistemológica incorpora cuatro componentes: la epistemológica, la sociocultural, la cognitiva y la de la transmisión del conocimiento por medio de la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003). En esta aproximación, Cantoral *et al.* (2006) consideran a la noción de práctica social en la construcción de conocimiento matemático como elemento central de la aproximación socio-epistemológica, y se define práctica social como el conjunto de acciones de medir, comparar, observar y predecir que guían el desarrollo de las actividades de aprendizaje de los estudiantes.

Conclusiones y futuro de la educación matemática

Es un deseo generalizado que la investigación educativa contribuya a resolver y mejorar la práctica docente; también que proponga transformaciones en la política educativa. Todo tipo de cambio educativo deberá ser fundamentado y habrá de contar con una evaluación que evidencie la necesidad del mismo. Es por ello que, teóricamente, la investigación educativa va de la mano con la actividad docente y con las modificaciones curriculares. En el caso de la educación matemática esta mancuerna se debe mantener para lograr avances significativos en esta área del conocimiento.

De acuerdo con lo señalado aquí, la práctica docente en educación matemática para nivel medio superior tiende a tomar en cuenta enfoques como la resolución de problemas; se trata de investigaciones que inciden en la dirección descrita, y que de hecho proponen la asociación entre la resolución de problemas y el uso de tecnología como mediadora en el aprendizaje.

De igual forma, hay una tendencia al trabajo en equipo en el aula y a la aplicación de rúbricas para la evaluación. Sin embargo, se carece de investigaciones que estudien estos aspectos, lo cual representa un área de oportunidad para los investigadores en educación matemática.

En relación con el nivel superior, las instituciones promulgan el uso de la tecnología como mediador en el aprendizaje y el diseño de cursos de matemáticas en línea, en particular para llegar a una mayor población. Además, con estos cursos el estudiante puede aprender a su propio ritmo vital y de compromisos laborales. Los investigadores en educación matemática han dado poca importancia a estos hechos, de ahí que falten líneas de trabajo o en esta dirección, sobre todo para incorporar de forma eficiente la tecnología al aula.

Otro punto importante en los lineamientos universitarios es el desarrollo de competencias matemáticas en función de lo indicado por la Secretaría de Educación Pública. Sin embargo, solamente una investigadora ha tomado en cuenta esta concepción para desarrollar su línea de trabajo sobre competencias matemáticas, por lo cual se identifica otra área para ser explorada por los investigadores en educación matemática.

En cuanto a la vinculación de la matemática con otras áreas del conocimiento, es decir, trabajar con una matemática contextualizada, es una temática que ha investigado Camarena desde 1982; se trata de un área que tiene bastantes investigaciones sustentadas en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. Es más, se identifica cómo se ha incrementado el número de investigaciones que aun cuando no emplean la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias, sí trabajan con una matemática contextualizada; dicho de otra forma, hay sensibilización por parte de los investigadores en educación matemática en el nivel superior por establecer la relación entre la matemática y otras ciencias. Sin embargo, emplear la matemática en contexto en la práctica docente representa un trabajo adicional para los profesores, en la medida en que esa teoría no ha sido incorporada de forma institucional en el sistema educativo. Las instancias responsables de impulsar esta acción requieren elaborar un programa específico que incluya estímulos y formación docente, entre otros, a fin de incorporar la didáctica del contexto en el nivel superior.

En cuanto a la investigación en educación matemática, lo aquí presentado no es exhaustivo, aun cuando sí se considera representativo de lo que acontece en esa línea de trabajo. Se observa que en el nivel medio superior el tema relacionado con los estudiantes cobra más fuerza, mientras en el nivel superior la investigación que gira sobre contenidos curriculares tiene más peso. Al margen de la insuficiencia en investigación ya mencionada, lo cierto es que hay huecos por llenar en la agenda de investigación.

Se han identificado deficiencias matemáticas en los docentes que son transmitidas a sus estudiantes, lo cual representa un elemento fundamental para investigar sobre el diseño de los programas de formación y actualización docente.

Se requieren trabajos de investigación para desarrollar, de manera fundamentada, materiales de apoyo didáctico a partir de la tecnología digital, además de diseñar cursos en línea o estudios en la modalidad virtual.

Las investigaciones en el nivel superior están dedicadas, en primer lugar, al tema de cálculo diferencial e integral de una variable real, situación que invita a los investigadores a abordar otros tópicos de este nivel educativo.

La mayoría de investigaciones son realizadas por más de un autor, situación que en primera instancia hace pensar que se trata de investigaciones conjuntas por colaboración entre instituciones. Después de indagar sobre el particular, se identifica que se trata del tesista y su asesor de tesis, y sólo algunos de esos trabajos corresponden a investigación interinstitucional; no se debe olvidar que la actual globalización demanda trabajo interinstitucional a escala internacional en todas las esferas de acción.

El futuro de la educación matemática en México, tanto para el bachillerato como para el nivel superior se infiere de las tendencias y deficiencias identificadas en las diversas investigaciones ya señaladas, así como de las políticas educativas vigentes en el país. Entre éstas se observan tres grandes temas que deberán ser abordados por instituciones, investigadores y docentes: *1)* la incorporación de la tecnología electrónica como mediadora del aprendizaje en el ambiente de clases; *2)* la inclusión de la estrategia didáctica de la matemática en contexto (la cual gira sobre la modelación matemática), con el propósito de que el estudiante le vea sentido a la matemática que estudia, para que se pueda motivar hacia su aprendizaje y con ello construya su conocimiento; *3)* las competencias matemáticas concebidas en función de lo establecido por la SEP, esto es: "Una competencia es la capacidad de movilizar recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones, con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas".

En los temas 1) y 2), uso de la tecnología electrónica y una matemática contextualizada, se han desarrollado algunas investigaciones –de manera particular en el nivel bachillerato– sobre el uso de la tecnología; y sobre la matemática en contexto en el nivel universitario. No obstante, se debe impulsar con más ímpetu la disposición política de las autoridades educativas, a fin de que estas investigaciones sean tomadas en cuenta en las prácticas docentes. En relación con el tema *3)*, las competencias matemáticas, éste representa un terreno fértil para la investigación en educación matemática, muy poco se ha trabajado en ese sentido. En consecuencia, la indagación deberá partir de la adecuada concepción del término competencias que habrá de tomarse en cuenta, pues al ser un concepto polisémico incluye diversas perspectivas, que van desde desarrollos simplistas y conductistas, hasta posturas constructivistas y humanísticas, como puede verse en la matemática social de Camarena (2013c).

En consecuencia, el futuro necesario e inmediato en materia de investigación en educación matemática en México deberá estará integrado por líneas de trabajo que permitan a los profesores incorporar en su práctica docente las políticas educativas gestionadas por el Estado.

Referencias

Aguayo, R. L. (2003). Investigaciones sobre el nivel medio superior. En Ángel D. López y Mota (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos*, I, *El campo de la educación matemática* (pp. 221-274. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa (La investigación educativa en México, 1992-2002).

Alatorre, S. (1999). Adults' intuitive answers to probability problems: a methodology. En F. Hitt y M. Santos (eds). *Proceedings of the 21Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 451-457). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, I.

Arteaga, C. y Santos-Trigo, M. (1999). Student´s understanding of graphical and symbolic representations of functions and its relationships. En Fernando Hitt y Manuel Santos (eds). *Proceedings of the 21Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematical Education* (pp. 524-529). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, II.

Balderas, C. P. (2000). Visualizing rates of change for water trajectory: case study with pre calculus and under graduate students. En M. L. Fernández (ed.). *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-NA)*. Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 98.

Camarena, G. P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. En *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México: IPN.

Camarena, G. P. (1995). La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales. Reporte de investigación. Núm. registro CGPI-IPN-20040434, México: ESIME-IPN.

Camarena, G. P. (1999). Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería. Reporte de investigación. Núm. registro CGPI-IPN-990413, ESIME-IPN.

Camarena, G. P. (2001). *Las funciones generalizadas en ingeniería: construcción de una alternativa didáctica.* México: ANUIES (Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigaciones).

Camarena, G. P. (2003). Investigación educativa en matemáticas del nivel superior. En Ángel D. López y Mota (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos*, I, *El campo de la educación matemática* (pp. 275-338). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa (La investigación educativa en México, 1992-2002).

Camarena, G. P. (2004). La formación de los profesores de las ciencias básicas en el nivel superior. *Científica*, 8(1), 35-45.

Camarena, G. P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En Morten Blomhøj y Susana Carreira (eds.). *Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics*. *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 117-131). Roskilde: Roskilde University (IMFUFA tekst, 461).

Camarena, G. P. (2010). La modelación matemática en la formación del ingeniero. Disponible en: *Mathématiques pour ingénieur et sciences humaines* http://www.m2real.org/spip.php?article152&lang=fr.

Camarena, G. P. (2013a). Investigaciones educativas en matemáticas en el nivel de educación superior. *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México* (pp. 95-110). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Estados del Conocimiento 2002-2011).

Camarena, G. P. (2013b). El conocimiento de las ciencias básicas en profesores de ingeniería. En A. Carrillo, Ha. Ontiveros y T. Ceceña (eds). *Formación docente: un análisis desde la práctica* (pp. 212-249). México: Red Durango de Investigadores Educativos, A. C.

Camarena, G. P. (2013c). A 30 años de la teoría educativa: matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 13(62), 17-44.

Cantoral, R. y Castañeda, A. (2001). Estudio didáctico del punto de inflexión, una aproximación socio-epistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 14, 370-377.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, S. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* número especial, pp. 83-102.

Cervantes, S. M. y Camarena, G. P. (2008). La derivada con la matemática en contexto y el enfoque hacia la modelación. *Científica*, 12(4), 167-173.

Cooey, L., Trigueros, Ma., Baker, B. (2007). Schema the matization a framework and an example. *Journal for Researching Mathematics Education*, 38(4), 370-392.

Cordero, F. y Muñoz, G. (1994). About symbiosis between notion and algorithm in integral calculus. En *Proceedings of 18 Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisboa: Universidade de Lisboa.

Cuesta, B. A., Deulofeu, P. J., Méndez S., M. A. (2010). Análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en estudiantes de economía. *Revista Educación Matemática*, 22(3), 5-21.

De León, S. J. (1996). Comprensión de la idea de ley de los grandes números en estudiantes del nivel superior. En *Memorias de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 503-508). San Juan: Universidad de Puerto Rico.

Eudave, M. D. (2007). El aprendizaje de la estadística en estudiantes universitarios de profesiones no matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 19(2), 41-66.

Farfán, R. y Lezama, J. (2001). Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (14), 546-551.

Filloy, E. y Rubio, G. (1993). Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic and algebra word problems. En H. Ichiei, S. Keiichi and L. Fou-Lai (eds.). *Proceedings of the Seventeenth International Conference of the Group of Mathematics Education* (pp. 154-161). Inakari: University of Tsukuba. 1.

Gibert, D. R. y Camarena, G. P. (2010). La motivación del docente ante la matemática en contexto. *Científica*, 14(3), 107-113.

Hernández, R. A. (1998). Una propuesta y un estudio experimental sobre la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 329-342). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real. *Educación Matemática*, 7(1), 63-75.

Imaz, J. C. (1996). Una alternativa teórica del cálculo. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 17-26.

Imaz, J. C. (1998). Breve teoría infinitesimalista de las ecuaciones diferenciales. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 363-367). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Mercado, M. (2004). *Del descubrimiento de resultados geométricos en un ambiente de geometría dinámica a la formulación de conjeturas y su prueba: un estudio con alumnos de bachillerato.* Tesis en matemática educativa, Cinvestav-IPN, México.

Miranda, M. E. (1996). Génesis y desarrollo de la transformada de Laplace. *Memorias de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 329-334). San Juan: Universidad de Puerto Rico.

Mochón, S. y Godínez, J. (1996). Un estudio sobre los métodos que utilizan los estudiantes universitarios para modelar situaciones reales. *Memorias de la X Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 305-310). San Juan: Universidad de Puerto Rico.

Mochón, S. (1997). Modelos matemáticos para todos los niveles. *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.42-45). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Moreno, A. T. (1999). Software tutorial para el curso de programación lineal en la especialidad de economía de la Escuela Superior de Ciencias Sociales. *Memorias del XV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas*, México: ANPM/ENSEM, 36.

Moreno, A. L. (1998). La construcción del espacio geométrico. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 157-171). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muro, U. C. R. y Camarena, G. P. (2002). La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa. *Científica*, 6(4), 159-163.

Muro, U. C. R. (2004). *Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa.* Tesis doctoral en ciencias en educación matemática. Cinsvestav-IPN, México.

Muro, U. C. R., Camarena, G. P. y Flores, R. C. (2007). Alcances de la teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(3), 401-419.

Ocampo, B. F., Camarena, G. P. y De Luna, R. (2011). Los desafíos de las instituciones de educación superior de México en la sociedad del conocimiento. *Revista Innovación Educativa*, 11(57), 207-213.

OCDE (2014). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve.* Recuperado en agosto del 2014 de http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

Oktaç, A. y Chargoy, E. R. (2000). Modos de pensamiento sintético y analítico, el caso de la base de un espacio vectorial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (13), 163-171.

Oktaç, A. y Romo, A. (2007). Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1), 117-143.

Rico Romero, L. (2009). Evaluación de competencias matemáticas, Proyecto PISA-OCDE 2003. En Encarnación Castro y Enrique de la Torre (eds.). *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, A Coruña: Universidad da Coruña, s/p.

Riestra, V. J. (1998). Las cantidades relativas y su relevancia en el cálculo. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 67-102). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rigo, M. (1994). Elementos históricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático. *Educación Matemática*, 6(1), 19-31.

Rivera, D. A. (1996). *Acerca de la relación entre el saber y los efectos de la tecnología, una investigación con profesores sobre sus actitudes y creencias*. Tesis de maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa. Cinvestav-IPN, México.

Rivera, F. A. (1998). Sobre la representabilidad de los polinomios en varias variables, no negativos, como sumas de cuadrados de polinomios. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 133-156). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Salinas, J. (2008) *Estudio sobre la identificación de propiedades y relaciones geométricas en ambientes de regla y compás y de geometría dinámica con estudiantes de bachillerato.* Tesis no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de evento independiente. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 389-404). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sandoval, I. (2005) *Estrategias argumentativas en la resolución de problemas geométricos en un ambiente dinámico*. Tesis no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21(1), 5-27.

Santos-Trigo, M. (1995). A college instructor's attempt to implement mathematical problem solving instruction. En Luciano Meira y David Carraher (eds.). *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 194-201). Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2.

Santos-Trigo, M. (1998). Problematizar el estudio de las matemáticas, un aspecto esencial en la organización del currículum y en el aprendizaje de los estudiantes. En F. Hitt (ed.). *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 425-443). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos-Trigo, M. (2000). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 31-46). México: Grupo Editorial Iberoamérica (Serie Didáctica, lecturas).

Santos-Trigo, M. (2008). On the Use of Technology to Represent and Explore Mathematical Objects or Problems Dynamically. *Mathematics and Computer Education*, 42 (2), 123-139.

Santos-Trigo, M. (2010). A Mathematical Problem Solving Approach to Identify and Explore Instructional Routes Based On the Use of Computational Tools. En J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, J. Hertzog, (eds.). *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 269-313). Hershey: IGI Global.

Santos-Trigo, M. y Rivera, A. (2010). Prospective mathematics education student´s answers to basic mathematical questions. *Far East Journal of Mathematical Education*, 4(2), 117-140.

SEMS (2008). Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad. *Diario Oficial*, 28 de noviembre. Disponible en http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_numero_442_establece_SNB.pdf

SEMS (2014). SNM-Sistema Nacional de Bachillerato. Recuperado de http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/sistema_nacional_de_bachillerato en agosto de 2014.

SEP-PSE (2013). Programa Sectorial de Educación 2013-2018. Secretaría de Educación Pública.

Solares, A. y Sandoval, I. (2013). Investigaciones sobre educación media superior. En: *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México* (pp. 77-93). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Estados del Conocimiento 2002-2011).

Trejo, T. E. y Camarena, G. P. (2011a). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Revista Educación Matemática*, 23(2), 65-90.

Ulín, J. C. (2001). *Un estudio del papel de las cantidades relativas en el origen y desarrollo de los conceptos fundamentales del cálculo*. Tesis doctoral en Ciencias con especialidad en matemática educativa. México: Cinvestav-IPN.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Revista Educación Matemática,* 18(3), 5-38.

Waldegg, G. (1993). El infinito en la obra aristotélica. *Revista Educación Matemática*, 5(3), 20-38.

Zúñiga, S. L. (2004). *Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del concepto de función de dos variables y la derivada parcial en el contexto de la ingeniería.* Tesis doctoral en ciencias en educación matemática. México: Cinvestav-IPN.

2036: una filosofía prospectiva de la educación matemática

Xicoténcatl Martínez Ruiz
Instituto Politécnico Nacional

Para Olga Xóchitl con profunda admiración y esperanza

¿Cuál es el panorama iberoamericano en educación matemática? ¿Cómo elevar el desempeño en matemáticas? ¿Existe alguna relación entre el desarrollo de la economía de países iberoamericanos y su desempeño en matemáticas? Estas preguntas buscan la reflexión y son un comienzo para el tema de este capítulo, cuyo propósito es ofrecer una serie de reflexiones para una filosofía de la educación matemática. El enfoque que matiza este capítulo es el de una filosofía prospectiva, es decir, una visión para las próximas décadas que permita identificar mediante los mecanismos actuales –como son estudios, evaluaciones, indicadores y estadísticas– la importancia del desempeño en matemática desde su posibilidad prospectiva.

El capítulo se divide en cuatro partes. La primera ofrece algunas razones al título de este apartado, un año en particular funciona como un horizonte de significado para la necesidad de una filosofía prospectiva. En la segunda parte la reflexión gira alrededor de la relación entre la educación matemática y el riesgo tecnológico, es decir, pensar el futuro y la dimensión de los riesgos implícitos del desarrollo tecnológico, sin olvidar el lugar que tiene una educación matemática más crítica en tal escenario. La tercera parte correlaciona diversos estudios con miras a la década de 2030, para mostrar otra reflexión clave hacia una filosofía de la educación matemática, a saber: la relación entre el desempeño matemático de niños y jóvenes y su impacto en el desarrollo económico para ese periodo. La cuarta parte es la posibilidad de una filosofía prospectiva de la educación matemática desde un referente humanístico y busca recuperar en el siglo XXI aquello que animó la sistematización del pensamiento matemático antiguo.

2036

El año 2036 tiene una doble acepción –significativa tanto para el enfoque de este apartado como de una filosofía prospectiva– y por ello da título a esta sección. Por una parte, la década de 2030 tiene una relevancia estadística para la historia contemporánea, si relacionamos los diversos estudios, informes y proyecciones; por ejemplo el tipo de estudios enfocados a la educación superior para las siguientes décadas, entre ellos *Higher Education to 2030* (OCDE, 2008). En esa década se calcula que las instituciones de educación superior de China y la India se convertirán en el polo que formará profesionistas, ingenieros y científicos. La población del planeta en 2036 se estima que llegará a más de ocho mil millones; la India será el país más poblado, seguido de China y Estados Unidos (US Census Bureau, 2015). El aumento de la población está relacionado con riesgos como crisis de alimentos, pérdida de biodiversidad, biología sintética e inclusive, para los países con elevado desarrollo tecnológico en inteligencia artificial, preocupaciones expresadas en manifiestos interinstitucionales como el *Policy Brief: Unprecedent Technological Risks* (Beckstead *et al.*, 2014: 5-8). En 2036, México será el décimo país más poblado del mundo, con un aproximado de 145 millones de habitantes; hoy ocupa el onceavo lugar (US Census Bureau 2036, 2015), por lo que para entonces presenciaremos el proceso de disolución de lo que hoy llamamos bono demográfico y la pirámide poblacional irá en descenso. Por otra parte, el país que conservará una de las tendencias más altas en natalidad será la India.

Otro caso relevante para este capítulo son los ejemplos de Japón y Corea del Sur. Aunque en 1995 Japón era el octavo país más poblado, con poco más de 125 millones, desde finales del siglo pasado enfrentó claras muestras en el descenso de la natalidad, y para 2036 ese efecto lo llevará al décimo quinto lugar, con una población de 117 millones de personas (US Census Bureau, 2015). Sin embargo, no es una sorpresa para el país asiático porque durante dos décadas ha venido construyendo las condiciones para enfrentar esta disminución de población joven; uno de sus enfoques enfatizó el desarrollo de su sistema educativo y el mejoramiento de innovaciones tecnológicas.

En 2015 Japón tiene los elementos para enfrentar retos del descenso de población joven que ha venido experimentando; el resultado, entre otros, es haberse convertido en uno de los países con más robots en el mundo: algunos cubren labores de cuidado de personas mayores; otros, como veremos adelante, están enfocados a la enseñanza. ¿Qué consecuencias podría tener este tipo de avances en el escenario futuro?

El caso de Corea del Sur también es relevante para esta reflexión, debido a que enfrenta la misma situación de descenso de población joven; su enfoque está en elevar el desempeño en matemáticas, ciencias y habilidades complejas de lectura. En 2015 Corea del Sur ocupa el lugar número 27 en población, 49 millones de habitantes, pero en 2036 se espera que ocupe el lugar 36. La disminución de población y la ausencia de recursos naturales, entre otros, ha llevado a Corea del Sur a pensar en su sistema educativo como la columna vertebral de su desarrollo económico, apostando a la inteligencia y al capital intelectual de sus habitantes. Hanushek y Woessmann (2015) relacionan el crecimiento del PIB con el binomio cobertura-calidad educativa; el aumento de la riqueza en Corea del Sur está íntimamente relacionado con el mejoramiento de su sistema educativo a largo plazo.

Por otra parte, 2036 es el año del centenario del Instituto Politécnico Nacional, y a dos décadas invoco la necesidad de repensar en nuestro contexto el sentido de una educación científica y tecnológica fuertemente impregnada por el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En esa necesidad de repensar lo que hoy puede configurar el futuro y los riesgos implícitos hay dos grandes condiciones: la generosidad y el autoexamen. La generosidad se refiere a la visión de trabajar para construir el futuro de una institución o de un país con una prospectiva humanística, es decir, la conciencia de trabajar para los otros seres humanos –que aún no conocemos y quizás nunca conoceremos– requiere el autoexamen, ejercicio filosófico imprescindible. El autoexamen se vuelve el ejercicio que guía la visión al futuro está imbuido de presente y reflexión generosa.

La matemática y el riesgo tecnológico: pensando el futuro

Ya en el siglo VII, en el Imperio Sasánida el prototipo del ajedrez –conocido con el término sánscrito *chaturaṅga*– implicaba un ejercicio estratégico y matemático. De ahí hasta el siglo X, donde ubicamos el *Versus de Scachis*, el texto europeo más antiguo sobre ajedrez, y si seguimos investigando los cambios en el juego éstos nos llevan al siglo XV, donde generalmente ubicamos el ajedrez moderno. Ya a finales del siglo pasado recordemos que uno de los prodigios fue Boris Kasparov, cuyo genio fue puesto a prueba por *Deep Blue*, la computadora que lo derrotó en 1997 (IBM 100, *Deep Blue*). ¿Cómo vencer a *Deep Blue*? Probablemente hoy diremos que mediante otra supercomputadora. Pero, ¿qué significó para la humanidad el desarrollo de un tipo de inteligencia artificial de este tipo?

Ese no es el único caso. En 2011, una computadora construida por IBM, llamada *Watson*, ganó el juego de *Jeopardy*; la máquina mostró un diseño de inteligencia artificial para manejo de datos y selección de respuestas. Llegamos a este punto con una cuestión simple: ¿serían *Deep Blue* o *Watson* buenos profesores de matemáticas, en el amplio sentido del término? Pensemos hipotéticamente que un equipo interdisciplinario trabajaría en llevar esas dos supercomputadoras a la práctica docente; eso involucraría a un grupo de matemáticos experimentados no sólo en matemática aplicada sino en su didáctica y, al mismo tiempo, especialistas en matemática educativa cuyo conocimiento de diversas investigaciones enfocadas a cómo enseñar permitiría programarlas adecuadamente. Lo anterior puede ser tomado como una hipótesis. Sin embargo, desde 2009 podemos mencionar el ejemplo de *Saya*, una robot cuya función fue ser profesora, diseñada por Hiroshi Kobayashi de la Universidad de Tokio (Crace, 2009). *Saya* enseña matemáticas a jóvenes de 13 años y está programada con seis diferentes tipos de emociones; pero no puede aprender, ella sólo enseña. En 2009 Saya era considerada una herramienta programada, diseñada en 2004 como robot recepcionista y reprogramada para ser profesora en 2009. Su éxito con los estudiantes fue el atractivo de ser un robot.

También debe llamarnos la atención la disposición de los estudiantes a quienes atendió Saya, es decir, ¿acaso estaban listos para tener un robot como profesora?, ¿qué lo hizo posible?, ¿acaso el lenguaje, el entorno socioeconómico, la exposición cotidiana a la tecnología? O bien, ¿una ausencia de perspectiva crítica ante un evento, pero con una sofisticada capacidad adaptativa a la tecnología? Aquí el lector de un libro como *La educación matemática en el siglo XXI* puede objetar la relevancia de estas preguntas en un escenario donde se debaten reformas educativas enfocadas a la evaluación docente, o la reprobación de alumnos en matemáticas, entre otros. La invitación en este capítulo es que sin dejar de considerar los debates y problemas actuales también nos ayudaría dimensionarlos en su relación con lo que acontece en el mundo, y en particular con una visión al futuro; pero no como un futuro inasible o irreal sino como algo que estamos construyendo ahora, en cada país, en cada red de investigación o estrategia pedagógica para mejorar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en nuestro contexto particular.

Desde la aparición de *Saya* en un salón de clases, y su controlador a distancia, hasta 2015 han transcurrido seis años, quizá comparado con la línea de tiempo desde un proto-ajedrez en la India en el siglo VII hasta Kasparov en 1997; seis años son muy pocos, pero en avance tecnológico, en inteligencia artificial y en tecnología de computadoras son bastantes. Por ello, ¿qué podemos esperar en un lapso de una o dos décadas? ¿Cómo será 2036, si los recientes avances y las proyecciones sobre inteligencia artificial fueran exitosos? ¿Acaso tendríamos una versión de *Saya* que no sólo enseñaría mecánicamente sino que aprendería, es decir, un robot con inteligencia –con las reservas que eso significa?

Si consideramos una versión de Saya en 2036 enseñando una de las disciplinas que menos subjetividad implica –como son las matemáticas– y si lo relacionamos con lo que Kant expresa en su Introducción a la *Critica de la razón pura* –en el sentido de que las proposiciones matemáticas siempre son *a priori* y nunca empíricas–, la relación es plausible y ello nos arroja a una reflexión profunda sobre el quehacer de una pedagogía de las matemáticas: ¿acaso su carácter *a priori* la hace susceptible de ser programable para un diseño de inteligencia digital, cuyo propósito sea el proceso de enseñanza-aprendizaje? Y si fuera el caso, ¿cómo resignificaría un robot el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas? Las preguntas previas pueden ser catalogadas como futuristas; sin embargo, lo que muestra el avance en inteligencia artificial y tecnología de computadoras en general exige revalorar algo que no es ciencia ficción.

De manera hipotética, consideremos ahora: ¿qué esperar si las proyecciones en inteligencia artificial logran su propósito, o si toda está inversión en tecnología, biología sintética, robótica, conocimiento del genoma humano, etc., en conjunto tienen éxito con sus proyecciones para las próximas décadas? Es probable que no hayamos dado la importancia necesaria a estas cuestiones, y por ello debemos pensarlas. No estoy afirmando que así será, sólo es una invitación a mirar una serie de evidencias interrelacionadas y con una visión prospectiva; tampoco es una afirmación contra el desarrollo tecnológico; por el contrario, es un llamado a su revalorización y a otra forma de pensar la innovación tecnológica en un contexto de prospectiva humanística y beneficio social; no de aniquilamiento ni de incremento de la desigualdad económica y social que se agudiza con el tiempo.

Agrego una preocupación más. Si todas esas inversiones y proyecciones logran sus objetivos, sabemos que no pertenecen a todos los países, sólo a unos cuantos, y en ellos sólo a compañías específicas; y de ahí ciertos países tienen sistemas educativos que están formando y formarán los recursos orientados a esas metas. Lo anterior evidencia otra relación: la desigualdad.

El desempeño, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde la formación básica hasta la educación superior, es de suma importancia en este escenario para las próximas décadas. La participación de los países y sus universidades podrían quedar limitadas –aun en la era de la conectividad global y el escenario de movilidad– para las próximas décadas (OCDE, 2008), por su nivel de interrelación y especialización para integrar equipos que desarrollen una inteligencia cercana a la de un ser humano. Y no sólo eso, si consideramos los proyectos internacionales como el mapa del genoma humano o el Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN), los investigadores participantes deben poseer las habilidades y el nivel requerido; observemos qué han llevado a sus países, y en concreto a sus universidades: es una interrelación, y muestra del tipo de proyectos de investigación y colaboración en las próximas décadas.

2030: EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y DESARROLLO ECONÓMICO

Un sistema educativo debe fomentar las habilidades matemáticas que requieren los proyectos internacionales. Su aplicación, desde un contexto laboral y su relación con la innovación y el desarrollo tecnológico, nos dará una idea de cómo impactará en el desempeño de un joven que curse la educación superior, o su nivel de investigación en el posgrado, y sus oportunidades de acceso al mercado laboral.

En otras palabras, la educación matemática, y en particular la investigación enfocada a mejorar su pedagogía, adecuada al tiempo en que vivimos, son herramientas para aproximarnos a los aspectos personales, ocupacionales, sociales y científicos de su vida (Hanushek y Woessmasnn, 2015: 24). El aprendizaje de las matemáticas en jóvenes estudiantes no es meramente un requisito curricular, sino una de las habilidades necesarias para el entendimiento y las interacciones cognitivas y laborales de las sociedades contemporáneas, en especial para el escenario de las próximas décadas (Hanushek y Woessmasnn, 2015).

De acuerdo con esta perspectiva, la evaluación entre 14 y 16 años resulta estratégica para un sistema educativo y provee datos clave de cómo los estudiantes responden a situaciones de la vida que involucran aplicaciones prácticas de las matemáticas y su relación con el desarrollo de las habilidades de pensamiento. La idea de alfabetización matemática es definida como la capacidad de un individuo de formular, utilizar e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye razonar de manera matemática y utilizar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas de esa disciplina para describir, explicar y pronosticar fenómenos. (OCDE, 2013: 25.)

La idea general es mostrar las habilidades básicas que serán requeridas para 2030, y su impacto en la economía, como se expone en el estudio *Universal Basic Skills* de Hanushek y Woessmasnn (2015). Ellos lo expresan como una relación indisoluble entre el crecimiento económico y las habilidades que los sistemas educativos deben cultivar ahora, pues repercutirán de manera decisiva en 2030. En pocas palabras, existe una relación indisoluble entre la calidad educativa y la economía de un país (Hanushek y Woessmasnn, 2015); en ese mismo estudio, así como en la presentación escrita por Andreas Schleicher y Qin Tang (2015: 5), se expresa en unas líneas el sentido de esa interrelación:

> Lo primero que los resultados muestran es que la calidad de la educación en un país es un poderoso indicador de la riqueza que los países producirán a largo plazo. O, dicho a la inversa, la producción económica que se pierde debido a las políticas y prácticas educativas pobres deja a muchos países en lo que equivale a un estado permanente de la recesión económica –y que puede ser más grande y más profunda que la que resultó de la crisis financiera a comienzos del milenio, de la cual muchos países todavía están luchando por salir.

Schleicher y Tang se refieren al análisis de Hanushek y Woessmasnn (2015) basado en los resultados de diversos datos económicos y de dos pruebas aplicadas a sistemas educativos (TERCE 2013 y PISA 2012 enfocadas a matemáticas) que permitieron realizar estimaciones para 76 países y considerando al grupo de población de 15 años. El cruce de información se enfocó en los datos entre matrícula y habilidades básicas que los estudiantes muestran en las evaluaciones, a fin de realizar una proyección entre calidad educativa y crecimiento económico para 2030. En ese grupo de habilidades básicas requeridas para ese año, y que repercuten en la mejora económica de un país, están las matemáticas. Como señalan Schleicher y Tang (2015:5): "la educación en un país es un poderoso indicador de la riqueza que los países producirán a largo plazo".

El desempeño en matemáticas es uno de los componentes esenciales que integra ese indicador de riqueza a mediano y largo plazo en un país como México, ¿por qué? Primeramente, y casi de manera obvia, por su impacto en ciencias, razonamiento y desarrollo tecnológico. Pero hay algo de mayor peso que también es una lección histórica aún más relevante para el futuro: que la riqueza perfilada para las próximas décadas reside en el conocimiento y las habilidades que un país cultive mediante sus sistemas educativos. Es decir, la riqueza natural que un país pueda tener en reserva no es garantía de resultados económicos benéficos, equitativos y sostenibles para la población en general. Ni para reducir la desigualdad económica y social. Schleicher y Tang (2015: 6) entienden estas relaciones como una de las alertas más significativas a considerar en un sistema educativo:

> Así que hay un mensaje importante para los países ricos en recursos naturales: la riqueza que se esconde en las habilidades no desarrolladas de su población es mucho mayor que lo que ahora cosechan mediante la extracción de la riqueza de los recursos nacionales. Y hay más: PISA muestra una relación significativamente negativa entre el dinero que los países obtienen de sus recursos naturales y los conocimientos y habilidades de su población escolar. Así que PISA y el petróleo no se mezclan fácilmente. Las excepciones, como Australia, Canadá y Noruega, que son países ricos en recursos naturales y que todavía marcan razonablemente bien en PISA, tienen todas las políticas prudentes establecidas para el ahorro de estas rentas de recursos, y no sólo para consumirlos.

Incluso la riqueza natural no será garantía de equidad económica en las próximas décadas sino un catalizador de la desigualdad, agudizado por la ausencia de un sistema educativo incluyente, que valore el conocimiento y habilidades adecuados para las próximas décadas, como expresan Hanushek y Woessmasnn (2015). Para un país –en el escenario de 2036– no es la riqueza natural por sí misma lo que representa mejores condiciones de vida y equidad en la distribución de la riqueza, sino el desarrollo de una inteligencia prospectiva y las habilidades latentes en la población de niños y jóvenes que hoy ocupan nuestras aulas. La desigualdad tendría todo para nutrirse si los países ricos en recursos naturales pierden de vista lo que se expresa en el pasaje citado, una riqueza mayor que esos recursos se encuentra en las habilidades no desarrolladas de la población.

Quiero subrayar que en esa riqueza no desarrollada, latente en niños y jóvenes, el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas tienen un lugar por demás relevante, debido a su asociación con el desarrollo tecnológico; pero éste no debe entenderse como la construcción de un riesgo a futuro sino más bien relacionarse con lo que Mevarech y Kramarski (2014) llaman *Critical Maths*, o la inversión en una educación matemática para las sociedades de la innovación. Algunos elementos básicos residen en una clara pedagogía metacognitiva, donde la educación matemática actúa como auto indagación y construye un pensamiento comprensivo de causas (Mevarech y Kramarski, 2014: 18); también nutre tanto un pensamiento que asocia experiencias previas como un razonamiento estratégico y reflexivo. Pero la propuesta se distingue por el enfoque en las habilidades socio-emocionales relacionadas con procesos cognitivos: “Current research in neurosciences has shown how cognitive and emotional systems are intertwined in the brain. Thus, improving children’s social-emotional skills can have an impact on their learning” (Mevarech y Kramarski, 2014: 18). Las “habilidades no desarrolladas” significan desigualdad de oportunidades. Esto se traduce en que las posibilidades de empleo son menores para quien no ha tenido acceso a la educación con estándares elevados de calidad, y sabemos que el desempleo acelera la desigualdad.

Con la información disponible, y los recientes debates animados por la obra de Thomas Piketty (2014) podemos dibujar un escenario posible para 2036 donde es inevitable el tema de la distribución de la riqueza, en especial la desigualdad. Una de las rupturas de ese patrón de inequidad reside en una educación que fomenta el desarrollo de la riqueza contenida en la inteligencia humana, y no únicamente pensarse como un país con reservas de hidrocarburos en el territorio; la tecnología de extracción y transformación, como sabemos, se mueve hacia una especialización mayor. El aprendizaje de matemáticas está en la base de esa especialización.

Si vemos el pasado, hay un ejemplo que puede ilustrar estas ideas, me refiero al caso del petróleo en México a mediados de la década de 1970.

Ese es un ejemplo de riqueza natural pero visión limitada al futuro. Está en nuestros libros de historia y nos da una lección para esbozar las próximas décadas. Así, la historia nos enseña sobre el futuro. La bonanza petrolera en México en los años 70 no fue modelo de inversión para reducir la dependencia tecnológica, tampoco se tradujo en una perspectiva de inversión en el desarrollo de una población con la educación y habilidades necesarias para el futuro, sino en el consumo de esa riqueza. El pasado es inamovible, pero lo que países como México deberán enfrentar –no sólo para 2030 sino para 2050 y hacia delante– sería la configuración de que la riqueza natural no asegura un crecimiento económico sostenido ni un mejor nivel de vida, sin el desarrollo de la riqueza latente en las capacidades básicas y de saberes especializados en la población.

La clave de ese desarrollo, la cual torna significativa e igualitaria la riqueza natural, reside en la educación que un país ofrece a sus habitantes; y entre las áreas del conocimiento imprescindibles para ese desarrollo están las matemáticas. Es por ello que el bajo desempeño en matemáticas de algunos sistemas educativos en el mundo, y sus variables regionales, deberán considerar aspectos que permitan redimensionar su aprendizaje y enseñanza en un marco de prospectiva y visión humanística.

Filosofía prospectiva de la educación matemática

La relación entre el desempeño en matemáticas y el desarrollo económico para las próximas décadas permite dar un lugar relevante a la educación matemática en lo que hoy llamamos economías que fomentan la innovación. La innovación en ciencia y tecnología también involucra la dimensión ética y elementos interconectados en el cerebro, como los sistemas cognitivos y emocionales (Mevarech y Kramarski, 2014: 16); aquí busco sugerir la posibilidad de recurrir a una forma crítica de aproximación a la educación matemática. Esta forma se refiere al desarrollo de capacidades de innovación, pensamiento crítico y creativo, comunicación y trabajo en equipo mediante lo que puede considerar la educación matemática. Es decir, pensemos el puente entre el desempeño en matemáticas de jóvenes entre 14 y 17 años y las habilidades que requerirán en 20 años; por ejemplo, para 2025 habrán concluido la educación terciaria y en 2030 estarán de cara a los retos mencionados en estas páginas.

La atención a diversas problemáticas que presentan tanto la enseñanza como el aprendizaje de la matemática en este momento sugiere abordar otros aspectos, a saber: ¿qué hay en el aprendizaje y la pedagogía de las matemáticas que hemos olvidado o no estamos atendiendo conforme a las necesidades de una población juvenil cuyos hábitos de aprendizaje han cambiado en las últimas dos décadas? Algunos de esos hábitos y sus logros están estrechamente vinculados con la economía de un país; se debe observar el caso de Singapur, tal cual se indica en el estudio de Hanushek y Woessman (2015), y cómo ese país ha mejorado su desempeño en matemáticas mediante un cambio en su pedagogía. Ese ejemplo puede ayudarnos a entender la relevancia en la economía de nuevas formas de enseñanza, debido a su impacto en la innovación y reducción de la dependencia tecnológica de un país:

> …the process of economic convergence is accelerated in countries with larger shares of high-performing students. Obvious cases are East Asian countries, such as Chinese Taipei, Singapore and Korea, all of which have particularly large shares of high performers, started from relatively low levels, and have shown outstanding growth. The interaction of the top-performing and basic-literacy shares in growth models appears to produce a complementarity between basic skills and top-level skills. In order to be able to implement the imitation and innovation strategies developed by the most-skilled workers, countries need a workforce with at least basic skills (Hanushek y Woessman, 2015: 77).

¿Qué permite lograr un alto desempeño en matemática? ¿Cómo vincular lo cognitivo y la dimensión emocional para mejorar el aprendizaje de la matemática? ¿Cómo lograr un mayor desempeño para solucionar, entender o analizar una situación de la vida mediante el conocimiento matemático? Considerar la manera en que un estudiante se apropia del conocimiento matemático requiere de un enfoque particular en el lenguaje y las situaciones cotidianas, laborales y en específico en la solución de problemas; todo esto configura los puentes entre el aprendizaje y la vida. Esto es un cambio radical en las necesidades educativas y lo que hoy da sentido a un sistema educativo, donde el enfoque está en un estudiante que construya con creatividad matemática, como expresan Mevarech y Kramarski (2014: 15).

> There is a broad consensus that in innovation-driven societies, teaching basic mathematics skills is necessary but insufficient. Schools have to guide students in solving complex, unfamiliar and non-routine (CUN) tasks, and foster greater mathematical creativity and better mathematics communication [...] Education researchers have examined how such tasks are executed. A wealth of research has indicated that metacognition –thinking about and regulating thinking– is the "engine" that starts, regulates and evaluates the cognitive processes.

Este enfoque envuelve contextos cotidianos interconectados y la solución de problemas; asimismo, indica la activación de habilidades para interpretar una situación y ofrecer una respuesta a un determinado problema, los casos que documentan:

> On the basis of these findings, various models have been developed to help students regulate their behaviour during the learning of mathematics. Among them are those developed by Polya, Schoenfeld, and Verschaffel, Improve, developed by Mevarech and Kramarski, and the Singapore Mathematics Curriculum. All these models provide techniques for training students to use some form or another of self-directed metacognitive questioning in maths problem solving. These models work best in a co-operative learning environment where students study in small groups, articulate their mathematical reasoning and describe their heuristics. In all of them, the teacher plays an important role in explicitly modelling the use of metacognition (Mevarech y Kramarski, 2014: 15).

Aunque está a la vista, es difícil expresar un enfoque así en unas cuantas líneas; sin embargo, una de las claves está en considerar cómo si la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ocurre de manera fragmentada del mundo, como un conocimiento no relacionado como base de otras disciplinas desarticuladas entre sí, también es común ahí un alejamiento de los aspectos vitales.

Si analizamos los resultados de PISA 2012, los reactivos en matemáticas fueron reformulados y construidos con situaciones cercanas al estudiante (OCDE, PISA *2012 Results: Excellence Through Equity*, 2013), aunque se utilizaron las mismas escalas de desempeño que en 2003. PISA 2012 tuvo un enfoque en tener datos sobre la igualdad de oportunidades, lo cual se contrasta con una preocupación tradicional en la calidad. Es ahí donde la desigualdad entre países se agudiza y han enfocado esfuerzos no sólo al acceso sino a la calidad, como es el caso de Singapur, Taipéi-China, Finlandia y Corea del Sur, y formular la siguiente pregunta: ¿cómo logramos hacer significativos los contenidos matemáticos para jóvenes?

Es ahí donde puede ser relevante indagar ¿qué hay en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas que hemos dejado de considerar? ¿Cómo se entrelazan el entendimiento de la realidad y el desarrollo del pensamiento con el conocimiento matemático? Cuando miramos el futuro de los estudiantes en un ambiente donde la información y el desarrollo tecnológico y su tratamiento tendrían que ir más allá de la acumulación y el uso mecánico, ahí tiene sentido la dimensión humanística y creativa del aprendizaje de las matemáticas, algo que subrayan Winner, Goldstein y Vincent-Lancrin (2014: 101):

> Con frecuencia se ha afirmado que la enseñanza musical mejora las habilidades matemáticas (James, 1993; Krumhansi, 2000; Nisbet, 1991; Shuter, 1968). Las discusiones acerca de las propiedades matemáticas de la música datan de la época de los descubrimientos de Pitágoras sobre los índices armónicos y continúan hasta nuestros días. Igor Stravinsky (1971) estableció que la música es "algo así como el pensamiento matemático y las relaciones matemáticas".

Esa relación entre el aprendizaje de las matemáticas y el cultivo de capacidades críticas que nos definen como seres humanos está presente en las diferentes culturas que valoraron el pensamiento matemático y lo hicieron parte integral de la vida, de la explicación del universo; y en algunos casos, como lo fue la *thyasa* pitagórica, esa valoración desarrolló una forma de vida que buscaba la integración del ser humano con su entorno por medio de la razón numérica (Aristóteles, *Metafísica*, Libro Alfa).

Esto lo vemos en la matemática de la India, que pudo concebir algo como el cero y cuyos antecedentes están en la noción de vacío (šûnya). Por ejemplo, el matemático Brahmagupta logró simbolizar esas nociones en el cero alrededor del siglo VII. En el caso del desarrollo de las matemáticas en la India, las diversas fórmulas se incorporaron mediante expresiones poéticas en sánscrito, cuya recitación generaba un estado de atención continua, similar a las habilidades cultivadas en la escuela de Pitágoras con los *acusmáticos* (Kirk y Raven, 1957), algo que ha sido expresado con otras palabras recientemente por Winner, Goldstein y Vincent-Lancrin (2014: 101):

> ¿Existe realmente una asociación entre la educación musical y el desempeño matemático? Y, en caso afirmativo, ¿existe alguna evidencia de un efecto causal de la educación musical en el desempeño matemático? [...] Vaughn (2000) meta-analizó 20 estudios de correlación para evaluar si los alumnos con formación musical superaban en matemáticas a los alumnos que no la tenían (listados en el cuadro 3.12).

Si bien hay una asociación entre habilidades que se desarrollan en la educación musical y tienen relación con las habilidades matemáticas, falta investigación para ubicar conexiones causales. Winner, Goldstein y Lancrin (2014: 104-105) detallan estudios de correlación donde niños que han tomado clases de música tienen mejor desempeño en matemáticas; aunque falta más investigación para tener conclusiones. Otro ejemplo relevante está en el análisis de Lee y Kim (2006), donde se ubican actividades musicales que integran matemáticas y su efecto en conceptos matemáticos de niños. Podemos seguir aludiendo a esas correlaciones entre aspectos humanístico-artísticos y el desarrollo de habilidades matemáticas; sin embargo el propósito es una sugerencia básica: lo que hemos olvidado está en el corazón mismo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas como ejercicio de vida y entendimiento de la realidad, tal cual fue activamente practicado por Pitágoras de Samos (570-495 a.C.) (Eggers y Julia, 1998). La forma de vida pitagórica fue más allá de la obviedad numérica o la memorización mecánica.

A modo de conclusión

Nuestro tiempo vive la especialización del conocimiento científico, algo configurado desde Platón y claramente intencionado en la filosofía aristotélica; entre sus efectos está la fragmentación del conocimiento de la realidad. La especialización, que fragmenta sin retornar a una visión interrelacionada de la realidad, condiciona de diversas maneras el modo en que entendemos la formación en matemáticas en los diferentes niveles educativos. ¿Acaso no habría un cambio si logramos desarrollar en niños y jóvenes una construcción integral del mundo mediante el pensamiento matemático?

Tanto el desarrollo tecnológico como sus riesgos representan la necesidad de mayor adaptabilidad y también de más oportunidades para un científico, matemático o tecnólogo, con una visión más humana y de los riesgos que estamos creando, como ha dicho Martin Rees (2014): "Many are concerned that it is 'running away' so fast that neither politicians nor the lay public can assimilate or cope with it". Una filosofía prospectiva de la educación matemática tendrá que considerar la complejidad de las preocupaciones que hoy tenemos, entre ellas el riesgo del desarrollo tecnológico, y su proyección al futuro. Una filosofía así busca recuperar las preguntas más básicas que originaron el conocimiento sistemático de las matemáticas, algunas insertas en el mundo griego antiguo; esa recuperación puede centrar su vigencia para nuestro siglo en la trascendencia de un conocimiento fragmentario con miras a lograr una comprensión íntegra de la realidad.

Referencias

Aristóteles (1994). *Metafísica*. Madrid: Gredos (Biblioteca Clásica Gredos).

Beckstead, N., Bostrom, N. *et al.* (2014). Policy Brief: Unprecedent Technological Risks. Disponible en: http://www.fhi.ox.ac.uk/wp-content/uploads/Unprecedented-Technological-Risks.pdf

Crace, J. 2009. Who Needs Teachers when You Could Have Bankers? Or Better Still, Robots?, *The Guardian,* viernes 13 de marzo. Disponible en: http://www.theguardian.com/education/mortarboard/2009/mar/13/robot-teacher-tokyo

Eggers, C. y Juliá, V. (1998). *Los filósofos presocráticos* (vol. I). Madrid: Gredos (Biblioteca Clásica Gredos).

Hanushek, E. y Woessmann, L. (2015). *Universal Basic Skills: What Countries Stand to Gain*, París: OCDE. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264234833-en

IBM 100. Icons of Progress. *Deep Blue*. Disponible en: http://www-03.ibm.com/ibm/history/ibm100/us/en/icons/deepblue/

Kant, E. (1979). *Crítica de la razón pura*, Buenos Aires: Losada.

Kirk, G.S. y Raven, J.E. (1957). *The Presocratic Philosophers: A Critical History with a Selection of Texts*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, Y. y Kim, S.J. (2006). The Effects of Integrated Activity with Music and Mathematics on Musical Ability and the Mathematical Concepts of Preschoolers. *The Journal of Korea Open Association for Early Childhood Education*, 11(2): 305-329.

Mevarech, Z. y Kramarski, B. (2014), *Critical Maths for Innovative Societies: The Role of Metacognitive Pedagogies*, París: OCDE. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264223561-en

OCDE (2008). *Higher Education to 2030, Volume 1, Demography*. París: OCDE. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264040663-en

OCDE (2013). *PISA 2012 Results: Excellence through Equity*: *Giving Every Student the Chance to Succeed* (Volume II), París: OCDE.

OCDE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, París, OCDE. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Rees, M. (2014). The World in 2050 and Beyond, *The New Statesman*, 26 de noviembre. Disponible en: http://www.newstatesman.com/sci-tech/2014/11/martin-rees-world-2050-and-beyond

Piketty, T. (2014). *El capital en el siglo XXI*, México: FCE.

United States Census Bureau (2015). The Country Ranking. Disponible en: http://www.census.gov/popclock/

Winner, E., Goldstein, T. y Vincent-Lancrin, S. (2014). *¿El arte por el arte?: La influencia de la educación artística*, México: OCDE/IPN. Disponible en: http://dx.doi.org/10.1787/9789264224902-es

La toma de decisiones durante una clase de matemáticas

Miguel Ángel Parra Álvarez
Instituto Politécnico Nacional

El maestro hace, piensa y siente

Dentro del aula suceden múltiples eventos, varios de ellos son simultáneos y ocurren de manera inmediata e inesperada; además, todas las actividades de profesores y alumnos son eventos de carácter público para los demás participantes, y existe la gran probabilidad de que las características de la enseñanza se hayan presentado en clases anteriores. De esta manera, multidimensionalidad, simultaneidad, inmediatez, no predictibilidad, publicidad e historia son complejidades (Doyle, 1986; en Coll, 1999) que dotan a las clases de particularidades propias y a las que el mismo docente contribuye con sus actos, ya sean planeados de antemano para alcanzar alguna meta establecida, o bien como producto de la reacción a comportamientos de los estudiantes. En ambos casos las acciones del profesor son producto de decisiones que toma para enfrentar a diversas situaciones, por ejemplo las estrategias implementadas para promover el aprendizaje, las resoluciones para promover la participación o para hacer frente a la mala conducta de los estudiantes.

Pero ¿qué lleva a un maestro a hacer lo que hace?, ¿por qué toma determinada decisión y no otra? En otras palabras, ¿qué subyace a la toma de decisiones de un docente dentro del aula? De manera específica, en la enseñanza de las matemáticas se han propuesto modelos para explicar estos cuestionamientos (Schoenfeld, 1998, Clark y Peterson, 1990), donde se reconoce que cada determinación se encuentra respaldada por el vínculo entre creencias y conocimientos; por lo demás, se ha admitido la importancia de las emociones y sus efectos sobre determinados hechos en la forma en que inician, su intensidad y duración (Grizb, 2007); es decir, las emociones influyen sobre la percepción, el pensamiento y el comportamiento de las personas (Schmidt-Atzert, 1985).

En este sentido, se acepta que las creencias, conocimientos y emociones juegan un papel principal en la toma de decisiones de los docentes, es decir, que lo que hace el profesor está determinado por lo que piensa y siente.

En este documento se presenta el análisis que se hizo de un maestro participante que impartió la clase de matemáticas en una secundaria al sur de la Ciudad de México. Para ello se realizaron observaciones en el aula y se grabaron las clases, se hicieron entrevistas antes de las observaciones y durante la exposición de los videos de su propia clase, mismos que fueron presentados al maestro. Para proteger el anonimato y confidencialidad del docente participante, su nombre fue cambiado en este documento. Para el análisis de las emociones expresadas se mostraron episodios de las clases a observadores, a quienes se les facilitó un instrumento para que posicionaran cambios en las reacciones del docente y se les entrevistó para indagar en la emoción identificada, si era el caso.

Como producto del análisis se presenta un modelo explicativo de la relación entre conocimientos, creencias y emociones en la toma de decisiones en la enseñanza de las matemáticas (Parra, 2010).

El maestro Omar tiene cerca de 30 años de experiencia como docente de matemáticas, de los cuales a su actual escuela había dedicado once. Realizó estudios de ingeniería en comunicaciones y electrónica, y ejerció como ingeniero civil durante 12 años. En cuanto a su actualización, el profesor reportó haber estudiado tres tipos de cursos: de desarrollo personal, varios relacionados con la enseñanza, y lecturas y talleres sobre la adolescencia –este último pareció ser de mayor importancia para él.

Lo que el maestro piensa

Las decisiones de los docentes en el aula tienen un fuerte componente cognitivo y son producto de la experiencia adquirida, así como de las reflexiones realizadas a lo largo de los años. Todo ello forma parte del pensamiento docente y como constructo es difícil de abordar debido a todos los constructos relacionados con la cognición. De hecho el pensamiento docente se entiende como

> un marco de referencia integrado por un cúmulo de teorías implícitas, representaciones, imágenes, suposiciones, nociones, ideas, intenciones, proyectos, supuestos, hipótesis, creencias, actitudes, intereses y valores susceptibles de influir en la elección de criterios para evaluar a los estudiantes y para tomar decisiones sobre qué, cuándo y cómo planear, actuar y evaluar los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Coll y Miras, 1993, en Monroy, 2000, p 283).

Como puede apreciarse, el constructo pensamiento docente es integrador y contempla a otros constructos, los cuales en sí mismos pueden ser parte de diversos estudios. Para el presente estudio sólo se retoman las creencias y los conocimientos como una expresión más pequeña del raciocinio, pero que a su vez cuentan con identidad propia.

Creencias y conocimientos

Para Putnam y Borko (2000) toda experiencia del docente se filtra por sus estructuras cognitivas, de tal manera que las experiencias se interpretan a la luz de su conocimiento y sus creencias; éste, a su vez, constituye un determinante que caracteriza a la enseñanza impartida, así como el contenido y la forma del aprendizaje que promueve (Putnam y Borko 2000).

Se reconoce una fuerte relación entre creencias y conocimientos, pero su distinción resulta difícil porque no es tan sencillo establecer las fronteras entre unas y otros (Pajares, 1992); prueba de ello es que algunas personas consideran a sus creencias como conocimientos (Pepin, 1999), y para otras ciertos conocimientos pueden presentarse como creencias (Clark y Peterson, 1990). Sin embargo, las creencias son más influyentes que el conocimiento en cuanto a determinar la forma en que las personas se organizan, desarrollan tareas y, en general, realizan diversos procesos cognitivos, por tal razón son fuertes predictores del comportamiento (Ernest, 1989; en Pajares, 1992). En la tabla 1 se muestran las diferencias entre creencias y conocimientos que diversos autores han encontrado de manera general (Thompson, 1992; Pajares, 1992; Putnam y Borko, 2000; Kane, Sandretto y Heath, 2002; Guzmán, 2005).

Tabla 1. Diferencia entre creencias y conocimientos.

CREENCIAS	CONOCIMIENTOS
Son independientes de su validez y pueden justificarse sin necesidad de consenso, lo que permite que las creencias sean disputables e inflexibles. Pueden incluso desafiar a la lógica.	Satisfacen una condición de verdad, hay consensos para juzgar su validez, están abiertos a la evaluación y a la crítica.
Se basan en evaluaciones y juicios.	Se basan en hechos objetivos.
Son heredadas culturalmente o por tradición, pero no se cuestionan o no se intenta comprobarlas.	Comenzaron como creencias que luego fueron cuestionadas por medio del pensamiento reflexivo.
Sus componentes afectivos y evaluativos son más fuertes.	Son emocionalmente neutrales.
Son más influyentes que el conocimiento en determinar cómo los individuos organizan y definen tareas y problemas, y predicen mejor el comportamiento.	Representan los esfuerzos para dar sentido a la experiencia, lo cual influye en el pensamiento del maestro y su toma de decisiones.
Tabla de elaboración propia.	

Creencias

En este documento se adoptó el término creencias no en un sentido peyorativo, como pudiera interpretarse en el lenguaje cotidiano, sino como producto de las experiencias de los profesores que pueden convertirse en conocimientos mediante un proceso reflexivo. Esta decisión resultó útil para distinguir el sistema de creencias del docente participante, pues a este constructo se le percibe como un término principal, delimitado y con su propia nomenclatura, diferenciada de otros constructos (Schomer, 2004).

En este sentido, se concibe a las creencias como los pensamientos que permiten a las personas comprender el mundo y son consideradas verdades (Richardson, 1996; en Hoffer y Pintrich, 1997); representan las experiencias de la gente (Schoenfeld, 1998) y, por tal razón, se conforman por elementos personales y culturales (Guzmán, 2005).

Las creencias estudiadas en maestros de matemáticas son básicamente las relacionadas con la naturaleza de la materia, en general, y los temas específicos corresponden a la naturaleza del proceso de aprendizaje y enseñanza (Schoenfeld, 1998); las creencias pueden categorizarse en dos conjuntos que forman el núcleo de las teorías epistemológicas (Hofer y Pintrich, 1997) para relacionar el conocimiento con la forma en que se adquiere. El estudio de las creencias ha llevado a considerarlas dentro de un sistema (Thompson, 1992; Schomer, 1994, 2004) donde coexisten una serie de creencias que, en conjunto, brindan elementos suficientes para representar la realidad y actuar en consecuencia en un determinado contexto (Pajares, 1992).

Conocimiento

En el tema del conocimiento se reconocen diversas categorías: desde el conocimiento del contenido –que a su vez se conforma por el conocimiento del contenido de la materia–, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento curricular (Shulman, 1986), hasta el conocimiento de propósitos educativos institucionales (Shulman, 1987). Para fines prácticos, aquí sólo se retoma el conocimiento disciplinar de las matemáticas desarrollado en las clases analizadas, y en este caso comprendió el dominio de procedimientos matemáticos, pues se ha encontrado que algunos maestros de matemáticas –tanto novatos como expertos– carecen de un conocimiento profundo de la materia (Putnam y Borko, 2000).

Así como las creencias, los conocimientos guían las decisiones adoptadas por los maestros durante su instrucción; un ejemplo de ello es un estudio de Putnam y Borko (2000) en el que encontraron una relación casi nula entre el conocimiento de la materia que tienen los docentes y el logro de sus estudiantes; pero en su lugar identificaron que los docentes que mostraban mayor conocimiento de su asignatura impartían una enseñanza más propicia para el aprendizaje, pues contribuían al desarrollo de la comprensión de conceptos matemáticos, proponían problemas matemáticos y promovían la participación de todos los alumnos de la clase, mientras que los profesores con menos conocimientos se centraban en la enseñanza de hechos y procedimientos rutinarios. Maestros con estas últimas características no poseen tanta confianza en sus conocimientos y habilidades (Schulman, 1987).

En un estudio con profesores de ciencias básicas y matemáticas que impartían clase en ingeniería, Camarena (2004) encontró que ciertos “errores disciplinarios” (imprecisiones en el conocimiento de las matemáticas) tienen alta correlación con la formación de origen del docente; es decir, los matemáticos que impartían matemáticas presentaban un mínimo de errores disciplinarios en comparación con aquellos profesores cuya formación no pertenecía a la materia que impartían.

Como puede observarse, existen docentes que enseñan matemáticas pero suelen tener un cierto grado de limitación en sus conocimientos matemáticos, los cuales sin duda generan deficiencias en el aprendizaje de la asignatura.

Lo que siente el maestro

En el ámbito educativo, el tema de las emociones ha sido quizá el menos investigado en comparación con los conocimientos y creencias, aunado a que la mayoría de estudios se han limitado a los alumnos. El estudio de las emociones se considera importante por cuanto regulan la relación de las personas con el mundo, y tienen diversos efectos sobre la iniciación, intensidad, y duración de determinadas conductas y acciones (Grizb, 2007); es decir, las emociones influyen sobre la percepción, el pensamiento y el comportamiento de las personas (Schmidt-Atzert, 1985).

A pesar de ser un tópico importante, el estudio de la emoción ha tenido ciertas dificultades de conceptualización, tipología y diagnóstico. La dificultad de su conceptualización ha llevado a utilizar algunos conceptos –como sentimiento y afecto– como equivalentes al término emoción (Schmidt- Atzert, 1985).

Las emociones son experiencias privadas e internas, pero tienen un aspecto externo en su manera de manifestarse en la conducta emocional: son sentimientos, sensaciones agradables o desagradables, actitudes sobre las cuales se formulan creencias de valor con el fin de interpretar situaciones (Calhoun y Solomon, 1989), y entre ellas se encuentran los afectos propios o los de otras personas (Gómez-Chacón, 2003). En el estudio de las emociones es posible encontrar diversos términos utilizados para designarla, entre ellos el estado de ánimo, los afectos, sentimientos y el humor. Sin embargo, los interesados en el estudio de las emociones han hecho distinciones en términos de su intensidad, de tal manera que el estado de ánimo, por ejemplo, se considera como un tendencia a sentirse de alguna manera –por ejemplo, sentirse bien o triste–, pero el estado de ánimo tiene mayor duración de la que podría tener una emoción, y por ello su intensidad suele ser leve (Calhoun y Solomón, 1989); por su parte, Grizb (2007) reconoce al humor con las mismas características que el estado de ánimo.

Dada la complejidad para reconocer a las emociones, se ha considerado acotarla a su expresión como conducta, a la cual se le conoce como respuesta afectiva o emocional (McLeod, 1992; Gómez-Chacón, 2002a, 2002b, 2003), o conductas intencionales (Calhoun y Solomon, 1989) que pueden explorarse desde los juicios valorativos al respecto de ellas (Hansberg, 1996). Un punto importante para el análisis de las emociones es la posibilidad de agruparlas en familias, en las que existen emociones principales y secundarias (Hansberg, 1996; Reeve, 2003). Por ejemplo, la ira es una emoción básica, pero también es una familia de emociones que incluye hostilidad, rabia, furia, coraje, irritación, resentimiento, envidia y frustración.

Si bien la recolección de datos es compleja en el estudio de las emociones, existen estudios con docentes que por medio de entrevistas y observaciones, han obtenido resultados al centrarse en las respuestas afectivas. Por ejemplo, en un estudio etnográfico realizado con maestros de matemáticas, Messina y Rodríguez (2006) realizaron una investigación en una secundaria para conocer las creencias y sentimientos de profesores respecto a alumnos con dificultades de aprendizaje. Las autoras reunieron una serie de sentimientos vinculados con las expectativas de los maestros, entre las que se encuentran la impotencia por no cumplir sus propias expectativas en el trato con alumnos; la molestia e incomodidad por el incumplimiento de los objetivos propuestos; o la frustración por la incapacidad de brindar apoyo a los alumnos, más preocupados por aprobar que por aprender.

Por su parte, Bibby (2002) realizó un estudio de la vergüenza con profesores de primaria, y mediante entrevistas exploró las historias personales en relación con las matemáticas, la experiencia de hacer matemáticas como adultos, y aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se utilizó también una serie de diez tarjetas que contenían problemas matemáticos y se les pidió que los ordenaran según la dificultad percibida, y se les solicitó resolver algunos ejercicios matemáticos delante de sus compañeros. Una de las principales reacciones que la autora encontró detrás de la vergüenza fue el miedo por la amenaza percibida. La forma en que los maestros hicieron frente a la vergüenza consistió en mantenerse alejados de la fuente de amenaza.

Finalmente, en una revisión teórica sobre la ansiedad matemática, Sirkka-Liisa y Gillian (s/f) encontraron que la ansiedad matemática corresponde a un sentimiento de tensión y ansiedad; en cuanto tal se presenta como una respuesta que interfiere con las actividades matemáticas, que son percibidas como una amenaza que se extiende al uso de las matemáticas en la vida cotidiana. Los autores encontraron que los sentimientos de ansiedad pueden llevar al pánico, la tensión, la impotencia, el miedo y la vergüenza, entre otros, además de provocar síntomas fisiológicos que pueden ir de la sudoración hasta la dificultad para respirar.

Las emociones y su relación con las creencias y los conocimientos

Como se ha expuesto, las creencias son de naturaleza cognitiva y se desarrollan en un periodo de tiempo relativamente largo, mientras las emociones involucran pocas valoraciones cognitivas y pueden aparecer o desaparecer muy rápido (McLeod, 1992). En este sentido, las emociones son experiencias privadas e internas, pero tienen un aspecto externo en su expresión en la conducta emocional (Calhoun y Solomon, 1989).

En principio es factible analizar las posibles relaciones entre los tres constructos. En primer lugar, a pesar de su naturaleza, las emociones y creencias comparten ciertas características cognitivas, de tal manera que las creencias son resultado de una emoción (Ernest, 1998; en Pajares, 1992). En segundo lugar, la relación más reconocida se establece entre conocimientos y creencias, mediante las cuales se interpretan las experiencias (Putnam y Borko, 2000); en tercer lugar, la relación entre conocimientos y emociones no es tan evidente, pues por un lado se reconoce que el conocimiento es emocionalmente neutral (Nespor, 1987; en Pajares, 1992) y, por el otro, la emoción opera, según el marco de referencia, de manera independiente al conocimiento (Nespor, 1987; en Pajares, 1992).

El sistema de creencias de un maestro de matemáticas

A partir de entrevistas respecto a las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, entre otros temas, así como de observaciones en el salón de clases y de exposiciones de las clases grabadas del maestro, se realizó un ejercicio de categorización y se obtuvo el siguiente sistema de creencias, que se utiliza para explicar tanto la clase del maestro Omar como las decisiones tomadas. Ese sistema tiene cinco categorías y cada una de ellas está integrada por de sus respectivas creencias (tabla 2).

Tabla 2. Sistema de creencias del maestro Omar.

CATEGORÍA	CREENCIAS
Las matemáticas son una ciencia cuya utilidad es escolar.	1. Las matemáticas son una ciencia que permite resolver problemas escolares. 2. El conocimiento matemático es escalonado. 3. Las matemáticas aprendidas en secundaria encuentran su aplicación en el bachillerato. 4. Las matemáticas a veces no son aplicables a algunas carreras, pero proporcionan habilidad mental.
La enseñanza centrada en ejercicios matemáticos asegura la adquisición del conocimiento.	5. La enseñanza por medio de ejercicios asegura la adquisición del conocimiento matemático. 6. La explicación de ejercicios permite el aprendizaje directo. 7. Las preguntas formuladas por el maestro atraen la atención de los alumnos y acentúan su conocimiento. 8. La enseñanza tiene por objetivo que los alumnos aprendan matemáticas, enfrenten bien el examen de admisión y sean eficientes en el bachillerato.
El maestro transmite el conocimiento.	9. El maestro transmite los conocimientos por medio de explicaciones. 10. El maestro puede hacer una clase relajada o estricta. Si el tema se considera importante, entonces se requiere de silencio absoluto, casi militar.
El aprendizaje de las matemáticas consiste en la adquisición de bases firmes.	11. Las matemáticas se aprenden de la ejercitación de los procedimientos. 12. La sola ejercitación (mecanización) no permite interpretar ni resolver problemas o ecuaciones. 13. El aprendizaje requiere de hacer operaciones mentales (habilidad mental) para que no sea solamente mecanizado. 14. Las bases firmes evitan tener problemas en matemáticas.
Los alumnos son dependientes, pero deben estar tranquilos.	15. Los alumnos son dependientes e inseguros. 16. Para que aprendan, los alumnos deben estar tranquilos y atentos a las explicaciones del maestro. 17. Los alumnos rechazan los problemas porque no han sido educados para resolverlos.
Tabla de elaboración propia	

La identificación del sistema de creencias permite, por un lado, explicar de manera general la razón por la que desarrolla la rutina de modo determinado y, por otro lado, dilucidar la razón por la que toma determinadas decisiones durante el desarrollo de sus clases en el aula. De manera general, la rutina desarrollada por el maestro se presenta en la tabla 3, donde la determinación de las etapas tuvieron como criterio el cambio de actividad durante la enseñanza (Schoenfeld, 1998).

Tabla 3. Etapas y rutinas de una clase de matemáticas del maestro Omar.

ETAPAS	RUTINAS
1. Actividades introductorias	El maestro realizó una serie de actividades en un tiempo breve. Entre éstas se encontraron el saludo a los alumnos, el nombre del tema, la exposición de los objetivos de la clase y la preparación de los ejercicios para la sesión. La etapa terminó cuando el maestro pidió la atención de todos y se dispuso a resolver el primer ejercicio en el pizarrón.
2. Explicación de ejercicios	Durante esta fase el maestro propuso, resolvió y explicó los ejercicios en el pizarrón llevando a cabo el siguiente ciclo: el profesor propuso uno o más ejercicios; algunas veces hizo una descripción del ejercicio, realizó el proceso de solución en voz alta, interrumpiéndose para hacer preguntas si requería respuestas de los alumnos. Al final hizo cuestionamientos para saber si los alumnos se habían quedado con dudas, para continuar de nuevo con el ciclo. Éste tuvo una variante en la clase dos, cuando el maestro permitió a un alumno que intentara resolver un ejercicio que finalmente fue terminado por el profesor.
3. Trabajo de los alumnos	Durante esta etapa el maestro propuso ejercicios para ser resueltos por los alumnos, algunos de ellos pasaron a resolverlos en el pizarrón, la mayoría trabajó de manera individual y algunos se explicaron entre sí. Mientras tanto, el maestro supervisó el trabajo de los alumnos e interactuó con ellos. Finalmente permaneció de pie revisando los ejercicios de los alumnos que se acercaron a él. A lo largo de esta etapa, algunos alumnos dejaron de trabajar y comenzaron a platicar con sus compañeros, e incluso se dirigieron a otros lugares.
4. Fin de clase	El maestro se despide de los alumnos.
Tabla de elaboración propia.	

El maestro enseña por medio de ejercicios porque así asegura que los alumnos aprendan matemáticas (creencia 5). El maestro transmite el conocimiento (creencia 9) y sus explicaciones son necesarias porque permiten el aprendizaje directo de los alumnos (creencia 6). Las explicaciones fueron acompañadas de preguntas, las cuales permiten ganar la atención de los alumnos y acentuar su conocimiento (creencia 7).

El maestro propuso ejercicios, porque los alumnos prefieren éstos a los problemas (creencia 18), para que sus estudiantes los resolvieran en su cuaderno y en el pizarrón, pues así practican los procedimientos (creencia 11).

Relación entre conocimientos, creencias y emociones en la toma de decisiones

Un aspecto importante para comprender la relación entre conocimientos, creencias y emociones es sin duda las expectativas del docente; sin embargo, las creencias marcan la pauta de las expectativas. Las creencias poseen de manera implícita las condiciones idóneas de las expectativas que tiene un maestro con respecto a cómo se debe desarrollar una clase; en consecuencia, si las condiciones son las esperadas, entonces sus decisiones estarán encaminadas a preservarlas hasta que decida cambiar de circunstancias. En contraste, si las condiciones no son las esperadas, entonces el maestro tomará las decisiones que considere pertinentes para modificar la situación hasta implantar las condiciones esperadas. Sin embargo, no todas las condiciones esperadas tienen el mismo estatus de prevalencia en las situaciones: algunas veces se presentan de forma general y otras de manera particular.

Las decisiones se toman para alcanzar ciertas metas, sean preestablecidas o emergentes. Las metas preestablecidas son generales y su objetivo es muy amplio, y pueden estar presentes a lo largo de todo el ciclo escolar o sólo durante las sesiones donde se enseña determinado tema; no obstante, existen otras metas no planeadas que tienen relevancia durante el desarrollo de la clase: son de índole particular y aparecen por lo general cuando el desarrollo de la clase se ve interrumpido o cuando un meta ha sido alcanzada. Las metas emergentes pretenden ser alcanzadas en un momento específico de la clase y pueden escapar de la planeación previa a la sesión, pero se alcanzan por medio de las rutinas de la enseñanza.

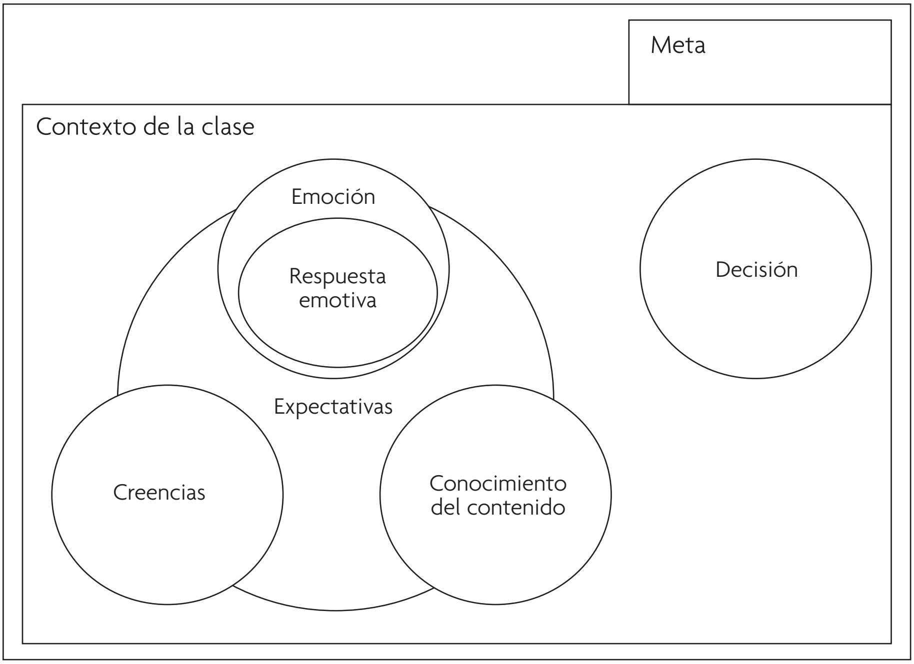
Las creencias poseen de manera implícita las condiciones en que ellas mismas operan y pueden ser expuestas de una manera general o particular. Una condición general se encuentra, por ejemplo, en la creencia 1 (Las matemáticas son una ciencia que permite resolver problemas escolares), la cual opera a lo largo de todas las clases.

Otras creencias son expuestas con condiciones particulares; por ejemplo, la creencia 16 (Para que aprendan, los alumnos deben estar tranquilos y atentos a las explicaciones del maestro) posee de manera implícita las condiciones esperadas: la tranquilidad o atención de los alumnos durante la explicación del maestro. Pero esta creencia deja de operar si carece de la condición que la dinamiza. Es decir, si el maestro no está explicando puede ser más tolerante al ruido que pudieran hacer los alumnos; por el contrario, si el maestro está explicando un procedimiento y los alumnos están intranquilos, entonces tomará decisiones para restablecer las condiciones necesarias para que los alumnos aprendan: el silencio casi militar (creencia 10).

Por su parte, las emociones se encuentran vinculadas con objetos, personas o situaciones y pueden ser expresadas mediante respuestas emotivas. En este caso, si la condición de una creencia o sistema de creencias no se cumplen, no solamente se dinamizan otras creencias del sistema que provocan la toma de decisiones para volver a una condición esperada, sino también se puede producir una emoción que cambiará cuando la condición sea la esperada por el maestro. De esta manera, las expectativas de los maestros es el área donde converge la relación entre creencias, conocimientos y emociones. En la figura 1 se muestra el modelo explicativo.

Los profesores tienen ciertas metas que pretenden alcanzar durante la enseñanza y sus decisiones se toman con base en el cumplimiento o incumplimiento de las metas. Si la clase se desarrolla conforme a sus expectativas, entonces las creencias y los conocimientos se encontrarán en equilibrio y las emociones pueden aparecer como neutrales por ser "leves" y el maestro puede decidir que la clase continúe igual, al menos hasta que se considere cambiar la dinámica porque la meta ya fue alcanzada. En contraste, si una situación no posee las condiciones esperadas por el maestro, se establece una meta emergente y puede suscitarse una emoción "fuerte" como el enojo, y entonces la decisión se encaminará a volver a la condición esperada. En este sentido, en el modelo las emociones aparecen en un círculo mayor que contiene las respuestas emotivas. Las emociones pueden ser difíciles de identificar o de nombrar, sin embargo su manifestación puede observarse o inferirse de la respuesta emotiva que tiene lugar como un cambio de comportamiento del maestro. El cambio de meta para restablecer las condiciones esperadas puede traer consigo un reacomodo en las creencias que hasta el momento habían estado operando, y puede suceder que las emociones de los maestros sean evidentes en función de si sus expectativas se ven cumplidas o no.

Figura 1. Elementos del modelo explicativo de la relación entre conocimientos, creencias y emociones.



Pero aun cuando se ha mencionado que se parte de la idea de que, en general, las creencias, conocimientos y emociones se encuentran relacionadas por medio de las expectativas del maestro, no todos los constructos se encuentran vinculados en un mismo nivel de importancia; es decir, esta relación no abarca a los tres constructos en una sola relación evidente de dinamización e importancia, sino que dos constructos aparecen fuertemente vinculados y el tercero puede estar ausente, o bien su operatividad puede estar disminuida.

Así se presentan relaciones diádicas fuertes en la relación creencias-conocimientos y creencias-emoción, donde las emociones –en el primer caso– y los conocimientos –en el segundo– pueden estar presentes pero en un segundo plano, disminuidas. Pero aún hace falta una díada, la compuesta por conocimientos-emociones y donde las creencias ocuparían un segundo plano; sin embargo tal situación no se encontró en esta experiencia ni en la revisión teórica, debido tal vez a que las creencias desempeñan en todo momento un papel protagónico en las decisiones de los maestros.

A continuación se presentan algunos episodios de clase de los maestros, con el fin de explicarlos a través del modelo presentado anteriormente.

Tabla 4. Episodio 1.

Descripción: el maestro explica el procedimiento de la multiplicación de fracciones y formula preguntas matemáticas cuando requiere un resultado.
Maestro: Bueno, hagamos este ejercicio. Si ustedes se dan cuenta, la novedad aquí es que tenemos fracciones y decimales. Hay dos formas de resolver esto: o pasamos las fracciones a decimales, o decimales a fracciones. Bueno, vamos a pasar los decimales a fracciones. Decimos ½ lo pasamos igual ¿como se lee éste en decimales? [Señala 0.2] *Alumnos:* Dos décimos. *M:* Dos décimos, lo pasamos a fracciones, ¿cómo se escribe dos décimos en fracciones? *A:* Dos sobre diez. *M:* Menos dos décimos por… cuando no existe un signo entre dos paréntesis ello indica multiplicación. Si tenemos 1/4 menos 9/10 ya están en fracciones los dos. Hagamos la operación de cada uno de los paréntesis.
Tabla de elaboración propia.

En el episodio 1 (tabla 4) se muestran las condiciones esperadas por el maestro, las cuales se encuentran implícitas en las creencias dinamizadas en ese momento: el silencio y atención de los alumnos durante la explicación del maestro. La meta es explicar el proceso de solución del ejercicio con la participación de los alumnos. En este caso las expectativas del maestro se ven cumplidas y la relación predominante entre sus conocimientos y sus creencias colocan al sistema en equilibrio, por tal razón se esperaría que la clase continúe con la dinámica normal, donde se podría suponer que la emoción es neutral o la respuesta emotiva es "leve", por ello aparece con líneas punteadas en la figura 2.

Sin embargo, las condiciones pueden cambiar y con ello la dinámica de la clase, lo cual genera un reacomodo en las creencias, conocimientos y emociones como se muestra en el episodio 2 (tabla 5).

En el episodio 2 el maestro espera que la mayoría de los alumnos contesten sus preguntas, pero la expectativa no se cumple; es decir, una de las condiciones esperadas no se cumple: la atención y silencio de los alumnos durante la explicación del maestro son provocadas por la generación de una

Figura 2. Relación fuertemente diádica entre creencias y conocimientos.

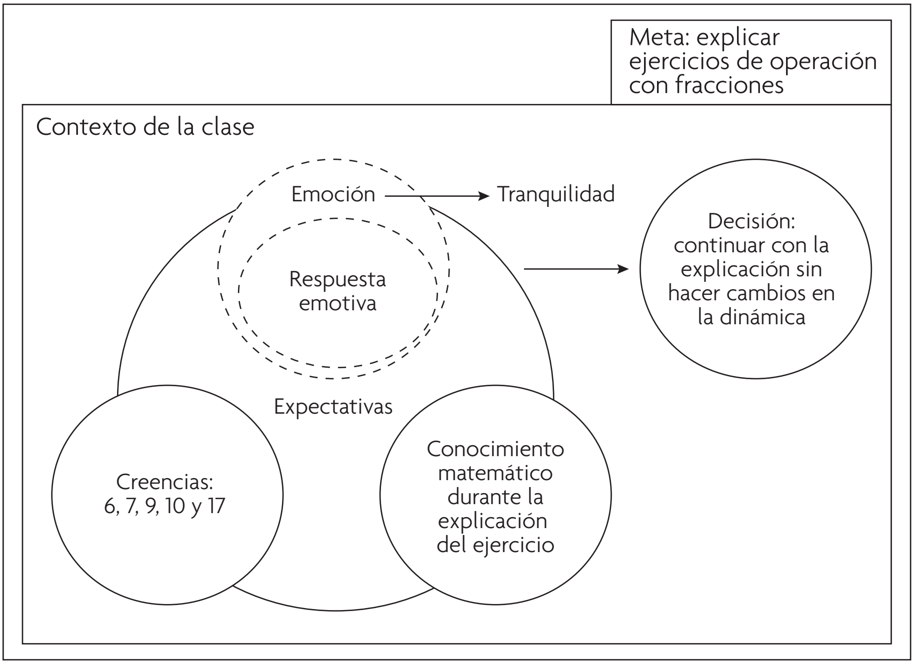


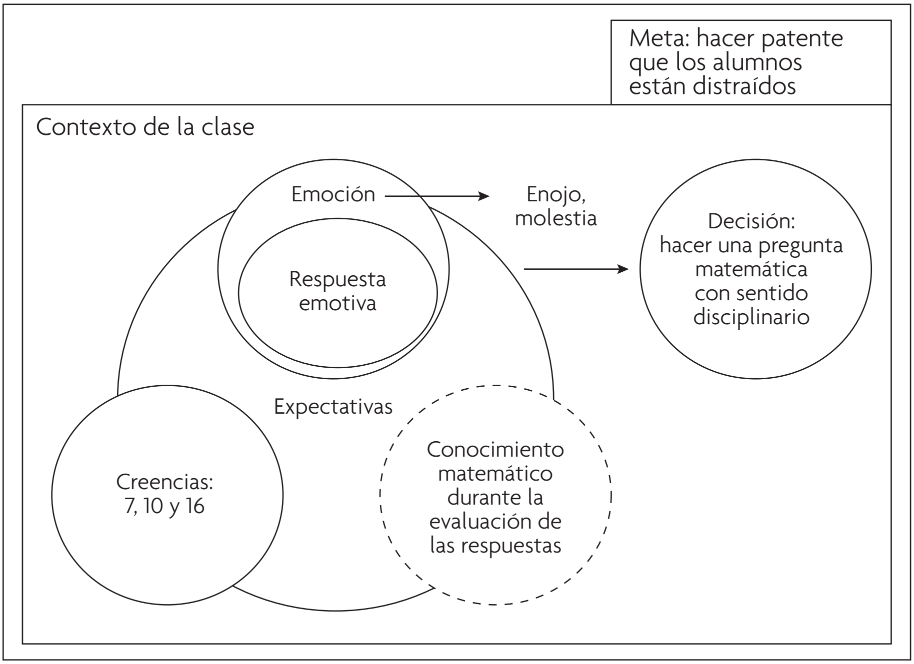
Tabla 5. Episodio 2.

Descripción: El maestro formula una pregunta con sentido disciplinario a un alumno y la respuesta es incorrecta.
M: ¿Común denominador del dos y del diez? ¿Cuál es el común denominador? *A:* [La respuesta es dicha por pocos alumnos a coro] Diez. *M:* Diez. [El maestro se detiene y buscando a alguien entre el grupo, le formula una pegunta] *M:* Sara, ¿Por qué el diez? *Sara:* No lo sé *Alumno 1:* Yo. *M:* ¿Por qué el diez? *S:* ¿Porque es número primo? *M:* Si te pones de pie te lo agradezco. *S:* ¿Porque es número primo? *M:* No. Para empezar, no es número primo y no es la razón, siéntate, gracias.
Tabla de elaboración propia.

meta emergente, situación que modifica un poco la dinámica de la clase. Cuando la expectativa no se ve cumplida genera una emoción de enojo o molestia, la cual surge como respuesta emotiva en la decisión de personalizar la pregunta y darle un sentido disciplinario. De esta manera, las creencias, emociones y conocimientos experimentan un reacomodo (figura 3) donde los conocimientos pasaron a segundo plano (por ello se representan con líneas punteadas), lo cual no significa que estén ausentes porque se manifestaron en la valoración de la respuesta de la alumna; sin embargo, la relación fuertemente diádica se estableció entre las emociones y creencias, donde las creencias 7, 10 y 16 cobraron mayor importancia.

El docente no reconoció emoción alguna y por ello se utilizó la opinión de siete observadores, a quienes se les expuso el fragmento en cuestión. La emoción de enojo fue reconocida por seis de los siete observadores, donde cinco de ellos coincidieron en que el maestro muestra cierta molestia o enojo: "en el rostro (…) refleja poco gusto por la clase" (observador 1), "le molesta la respuesta de la alumna" (observador 2), "estaba enojado (…) lo siento un

Figura 3. Relación fuertemente diádica entre creencias y emociones.



tanto agresivo con el alumno" (observador 4), "cuando una respuesta no es la que tú esperas (…) te enojas, como parece que ocurrió aquí, me parece que su reacción fue más hacia una molestia, porque la respuesta no era la adecuada" (observador 5), "creo que su estado emotivo no es, no debe ser muy bueno" (observador 6). El observador 7 también distinguió una respuesta emotiva, pero su argumento se relacionó con la inconsistencia existente entre el "gracias" que mencionó el maestro y su "lenguaje".

Una característica de las emociones es su breve duración y su intensidad variable; aunque no se tiene suficiente evidencia para aclarar la duración de la emoción ni el nivel de intensidad, sí es posible observar su emergencia cuando el maestro percibe un cambio en las condiciones esperadas y por ello toma ciertas decisiones para alcanzar la meta emergente (hacer patente la desatención de los alumnos). Sin embargo, era necesario llegar al equilibrio anterior, a la situación normal esperada (atención de los alumnos a la explicación del maestro y contestar correctamente y a coro las preguntas formuladas) y para ello era menester hacer algunos ajustes previos, pues la pregunta no había sido contestada correctamente, de ahí la necesidad de que la pregunta matemática dejara de tener un sentido disciplinario y adoptara un propósito matemático, además tenía que ser contestada correctamente, por tal razón el maestro plantea la pregunta a una alumna y ésta ofrece la respuesta correcta (tabla 6).

Tabla 6. Episodio 3.

Descripción: una alumna contesta correctamente a la pregunta del maestro.
[Una alumna levanta la mano para contestar la pregunta y el maestro le concede la palabra] *M:* Sí, Carolina. *Carolina:* [La alumna se pone de pie] porque es divisible entre el 2 y el 10. *M:* Porque es divisible entre 2 y entre 10, o sea, es el mínimo común múltiplo de 2 y 10.
Tabla de elaboración propia.

En este episodio el maestro Omar reconoció una respuesta emotiva de gusto (Me da gusto cuando los alumnos contestan bien). El conocimiento sigue en segundo plano, pero está presente en la valoración que el maestro hace de la respuesta de la alumna. Después de este episodio la clase continuó con la dinámica esperada, y se estableció una relación de equilibrio entre creencias y conocimientos con las emociones en segundo plano.

Las expectativas contenidas en las creencias, como ya se dijo, tienen una condición en que deben cumplirse, pero en otros momentos –cuando el maestro considera que la meta ya fue alcanzada y decide cambiar la dinámica de la clase– modifica también las condiciones y tiene lugar el reacomodo en las creencias. Por ejemplo, una vez que el docente terminó de explicar algunos ejercicios propuso otros para ser resueltos por los alumnos, quienes consultaban sus dudas ya sea con el maestro o con otros compañeros. La meta planteada por el maestro fue que los alumnos ejercitaran el procedimiento explicado. En ese punto el ruido en el aula fue mayor.

Para entonces las expectativas del maestro se cumplieron y el ruido fue tolerable porque su explicación ya no era necesaria y, por tanto, el silencio y atención de los alumnos dejaron de ser parte de las condiciones esperadas. Debido al cumplimiento de las expectativas la emoción reconocida es de gusto (agrado), no por el trabajo de los alumnos en sí, sino por el acercamiento del maestro con los alumnos. En este caso la relación fuertemente diádica se establece entre creencias y conocimientos mientras atiende las dudas en el lugar de cada alumno. Por momentos el maestro platica de otros temas con los alumnos, y la relación más fuerte se presenta entre creencias y emoción.

En este episodio el maestro reconoció una respuesta emotiva óptima y la nombró como gusto por la cercanía que tiene con los alumnos.

Conclusiones

El modelo utilizado para explicar la relación entre creencias, conocimientos y emociones y su manifestación en la toma de decisiones, distingue relaciones fuertes de tipo diádico entre dos constructos y concibe al tercero como presente en segundo término, minimizado. Las relaciones fuertemente diádicas se establecen entre conocimientos y creencias, y entre emociones y creencias, mientras el tercero se encuentra disminuido, de manera que en una relación fuertemente diádica entre creencias y conocimientos no puede asegurarse que la emoción esté fuera del evento, sino que su presencia es de intensidad "leve", como la tranquilidad. Esta relación se considera equilibrada, debido a que las condiciones esperadas por el maestro están dadas.

Por el contrario, una relación fuertemente diádica entre creencias y emociones está en desequilibrio cuando las condiciones esperadas por el maestro no están dadas y los conocimientos pueden hacerse patentes, aunque en segundo plano.

En conclusión, las expectativas de los maestros son el área que articula a las creencias, conocimientos y emociones en una situación específica durante la enseñanza de las matemáticas, donde su cumplimiento o incumplimiento generan cambios en la relación entre tales constructos y las decisiones se encaminan primero a hacer frente a una situación desequilibrante, para después buscar una situación donde las condiciones sean las esperadas. En las dos relaciones fuertemente diádicas las creencias adquieren una propiedad de omnipresencia, pues se encuentran presentes y en ningún caso aparecen disminuidas o en segundo plano; esto es, la relación fuertemente didáctica entre emociones y conocimientos no se manifestó.

Referencias

Bibby, T. (2002). "Shame: An Emotional Response to Doing Mathematics as an Adult and a Teacher". *British Educational Research Journal*, *28*(5) 705-721.

Calhoun, C., y Solomon, R. (1989). *¿Qué es una emoción? Lecturas clásicas de psicología filosófica*. México, Fondo de Cultura Económica.

Camarena, P. (2004). "La formación de los profesores de ciencias básicas en el nivel superior". *Científica*, *8*(1), 35-44.

Clark, Ch. y Peterson, P. (1990). Procesos de pensamiento de los docentes. En M. C. Wittrock (comp.). *La investigación de la enseñanza 3, profesores y alumnos* (pp. 443-539). Barcelona, Paidós.

Coll, C. (1999). La concepción constructivista como instrumento para el análisis de las prácticas educativas escolares. En: C. Coll (Coord). *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria* (pp. 15-44). Barcelona, ICE/Horsori.

Gómez-Chacón, I. (2003) "La tarea intelectual en matemáticas: afecto, meta-afecto, y los sistemas de creencias". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 225-247.

Gómez-Chacón, I. (2002a). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo (ed.) *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las matemáticas* (pp. 197-227). Huelva, Universidad de Huelva.

Gómez-Chacón, I. (2002b). Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas. Una perspectiva para el profesor. En L. C. Contreras y L. J. Blanco, *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente* (pp. 23-58). Cáceres, Universidad de Extremadura.

Grizb, G. (2007). *Bases cognitivas y conductuales de la motivación y emoción*. Madrid, Centro de Estudios Ramón Areces.

Hansberg, O. (1996) *La diversidad de las emociones*. México, Fondo de Cultura Económica.

Hofer, B., y Pintrich, P. (1997) "The Development of Epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning". *Review of Educational Research*, 67(1), 88-140.

Kane, R., Sandretto, S., y Heath, Ch. (2002). "Telling Half the Story: A Critical Review of Research on the Teaching Beliefs and Practices of University Academics". *Review of Educational Research*, *72*(2), 177-228.

McLeod, D. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En D. A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (575-596). Nueva York, Macmillan.

Messina, C., y Rodríguez, A. (2006), "Sentimientos, sistema de creencias y comportamiento didáctico: un estudio etnográfico." *Revista de Educación, 339*, 493-516.

Pajares, M. (1992). "Teacher's Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct". *Review of Educational Research*, *62*, 307-332.

Parra, A. (2010). *Relación entre creencias, conocimientos y emociones durante la toma de decisiones en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Tesis doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Pepin, B. (1999). "Epistemologies, Beliefs, and Conceptions of Mathematics Teaching and Learning: The Theory, and What is Manifested in Mathematics Teacher's Work in England, France and Germany". *TNTEE publications*, *2*,(1), 17-146.

Putnam, R., y Borko, H. (2000). El aprendizaje del profesor: implicaciones de las nuevas perspectivas de la cognición. En J. Bruce, T.G. Biddle, F. Ivor. *La enseñanza y los profesores 1* (219-309). Barcelona, Paidós.

Putnam, R. (1992). "Teaching the 'Hows' of Mathematics for Everyday Life: A Case Study of a Fifth Grade Teacher". *Elementary School Journal*, 93(2), 163-177.

Reeve, J. (2003). *Motivación y emoción*. México, McGraw Hill (3a. ed.).

Schmidt-Atzert, L. (1985). *Psicología de las emociones*. Barcelona, Herder.

Schoenfeld, A. (1988). "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of 'Well-Taught' Mathematics Courses". *Educational Psychologist*. 23(2), 145-166.

Schoenfeld, A. (1998). "Toward a Theory of Teaching-in-Context". Disponible en: http://www-gse.berkeley.edu/faculty/aschoenfeld/TeachInContext/teaching-in-context.html

Schomer, M. (1994). "Synthesizing Epistemological Belief Research: Tentative Understanding and Provocative Confusions". *Educational Psychology Review*, *6*(4) 293-319.

Schommer-Aikins, M. (2004). "Explaining the Epistemological Belief System: Introducing the Embedded Systematic Model and Coordinated Research Approach". *Educational Psychologist 39*(1), 19-29.

Shulman, L. (1986). "Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching". En *Educational Researcher, 17*(1), 4-14.

Shulman, L. (1987). "Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform". *Harvard Educational Review 57*(1).

Sirkka-Liisa M., y Gillian, K. (s.f). "Challenging Maths-Anxiety: An Intervention Model". Disponible en: http://www.icme-organisers.dk/tsg24/Documents/UusimakiKidman.doc

Thompson, A. (1992). "Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research". En D. A. Grows (ED). *Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127-147). Nueva York, Macmillan.

Perú

Educación matemática en el Perú: avances y perspectivas

Jesús Victoria Flores Salazar
Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre

Introducción

Compartimos la definición que presentan Rico, Sierra y Castro (2000) según la cual la educación matemática es un sistema de conocimientos, planes de formación, instituciones con finalidades formativas, de modo que todos ellos se relacionen con el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. También tomamos como referencia el modelo que presenta Higginson (1980) para la educación matemática, según el cual esta brinda elementos para comprender posturas tradicionales sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como las causas que han originado cambios curriculares en el pasado y la previsión de las transformaciones futuras, además de la modificación de concepciones sobre la investigación y sobre la formación de profesores.

Desde esa perspectiva, se exponen los recientes cambios introducidos en la estructura del sistema educativo peruano, en particular en relación con la educación matemática y se describe la influencia que ha tenido la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el desarrollo de la educación matemática en ese país.

De esa manera se brindarán elementos que permitirán conocer los orígenes de la educación matemática en el Perú, sus avances en los últimos años y los desafíos que se presentan en el siglo XXI.

El sistema educativo peruano

Desde 2006 el Perú cuenta con un Proyecto Educativo Nacional al 2021, elaborado por el Consejo Nacional de Educación, y que es un instrumento tanto para la formulación como para la ejecución de políticas públicas. Dicho documento incluye objetivos estratégicos, así como resultados esperados para cada uno de ellos.

De otro lado, como ente organizador se cuenta con el Ministerio de Educación del Perú (Minedu), organismo encargado de establecer la política educativa del país y normar la labor educativa, cuyos objetivos fundamentales son:

> Generar oportunidades y resultados educativos de igual calidad para todos; garantizar que estudiantes e instituciones educativas logren sus aprendizajes pertinentes y de calidad; lograr una educación superior de calidad como factor favorable para el desarrollo y la competitividad nacional, así como promover una sociedad que educa a sus ciudadanos y los compromete con su comunidad.(Perú, 2009: 45).

Entre las funciones de esta entidad se encuentra la elaboración y actualización del diseño curricular de la educación básica regular del sistema educativo peruano, que contempla el nivel inicial, primario y secundario. También se encarga de establecer programas nacionales dirigidos a la formación y capacitación de directores y profesores. Por otra parte, en relación con los modelos educativos sobre los cuales el Minedu ha realizado propuestas y cambios para el sistema educativo peruano, se observa que estos se han tomado de modelos provenientes de otros países. En especial, durante la última década se puede observar una fuerte influencia del modelo constructivista. Desde esa perspectiva se elaboró un currículo oficial, denominado Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, publicado inicialmente en 2006 y que tuvo una segunda edición en 2009, la cual se encuentra vigente. En ese documento se consideran competencias por ciclos, así como un conjunto de capacidades, conocimientos y actitudes acordes al desarrollo de los estudiantes y detalladas en el marco de cada competencia.

No obstante, en la práctica se encuentran evidencias de la presencia de un modelo conductista muy arraigado en los planes de formación de profesores, en particular en la preparación de maestros de nivel primario y de docentes de matemáticas de nivel secundario. En esa misma línea de pensamiento, Ramírez (2006) manifiesta que existen serias deficiencias en la formación académica de los estudiantes de la carrera de profesor de Educación Primaria, y como causa principal de este hecho señala los pocos o nulos conocimientos que poseen los docentes en formación sobre la resolución de problemas matemáticos. Esto hace que no puedan enfrentar con éxito la resolución de problemas matemáticos, Piscoya (2005).

Por otro lado, se cuenta con diversos textos escolares de matemáticas elaborados por editoriales privadas, utilizados en los centros educativos particulares y públicos del Perú, que afirman seguir las directrices del Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Sin embargo, dichos textos no han sido elaborados partir de un modelo de competencias; se ha encontrado que la forma en la que abordan los contenidos matemáticos se caracteriza por presentar inicialmente un bloque teórico o técnico, seguido de problemas de aplicación directa, sin una problematización inicial que justifique la introducción de la técnica. Además, los temas están desconectados unos de otros.

Ante la situación descrita, el Minedu realiza esfuerzos para proporcionar herramientas a los profesores de los niveles primario y secundario, de modo que logren cubrir los vacíos que presenta su formación. Estos se ven plasmados en documentos tales como "Rutas para el aprendizaje", "Materiales educativos" y "Orientaciones para la implementación de unidades didácticas y sesiones de aprendizaje".

Además, en los últimos años se han iniciado programas de perfeccionamiento docente a través de estudios de maestría en educación, en particular de maestrías de enseñanza de las matemáticas. Dichos programas son financiados con recursos públicos y las becas son asignadas a través de concursos de méritos a docentes de toda la nación.

Para complementar la descripción de la situación actual del sistema educativo peruano, cabe señalar que existe una entidad técnica denominada Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa (Sineace), cuya función es establecer los criterios, estándares y procesos de evaluación, acreditación y certificación que legitimen los niveles básicos de eficacia que deben ofrecer las instituciones educativas en el Perú. Dicho organismo viene trabajando durante los últimos años de manera coordinada con el Minedu y es responsable de la elaboración de estándares nacionales de aprendizaje para la educación básica. Así, desde el año 2013 se cuenta con los denominados "Mapas de progreso del aprendizaje" para las distintas competencias que se deben desarrollar en comunicación, matemática, ciencia y ciudadanía.

Como perspectiva a futuro, se tiene previsto articular de manera eficiente los distintos documentos elaborados y enmarcarlos dentro de un documento que ahora se encuentra en construcción, denominado *Marco curricular*, en el cual se describirán los aprendizajes fundamentales. De esta manera ese documento, junto con los "Mapas de progreso" y las "Rutas de aprendizaje", se constituirá en el sistema curricular orientador de los currículos regionales del Perú.

Educación matemática en el Perú: sus inicios

Fue a principios del siglo XIX que aparecieron personajes en el campo educativo peruano, tales como José A. Encinas y Manuel González Prada, entre otros, cuyo principal objetivo era la inclusión de la comunidad campesina rural del país en la educación (Ayzanoa, 2003: 65). Ellos entendían que la realización de los derechos y libertades del hombre debían darse a través de la educación y la cultura, así como la revalorización del maestro como eje central de todo proceso educativo.

En particular, en relación con la educación matemática, de acuerdo con Carranza (2007), en la década de 1960 los jóvenes José Tola Pasquel, Francisco Miró Quesada, Abel Fernández, Gerardo Ramos y José Reátegui crearon el Instituto para la Promoción de la Enseñanza de las Matemáticas (IPEM). Los objetivos de dicho instituto eran realizar cursos de perfeccionamiento de profesores de matemática de los diferentes niveles educativos, difundir conceptos e ideas didácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática; colaborar con la publicación de libros y auxiliar a los organismos nacionales para promover la enseñanza de las matemáticas.

Entre 1962 y 1968 el origen del IPEM estuvo asociado al del Instituto de Matemática de la Universidad de Ingeniería (IMUNI), dedicado a la investigación y a la formación de los líderes nacionales de la matemática. En ese grupo de investigadores preocupados por la educación matemática en el Perú destacó el Dr. César Carranza Saravia.

Debido a la fuerte influencia que recibieron los miembros del IMUNI del grupo Bourbaki, la concepción que primó entre sus integrantes fue la de la matemática moderna. Y esto vino acompañado de una concepción de la educación matemática basada en una preparación formalista, caracterizada por el énfasis en la teoría dando origen a las posturas teoricista y tecnicista, según la clasificación de Gascón (2001).

El IMUNI programó las actividades conocidas como Institutos de verano, desarrolladas en diferentes universidades con varias semanas de duración y dirigidas a profesores de matemática de educación secundaria de Lima y provincias. En ellos impartían clases magistrales matemáticos peruanos y de otros países de Latinoamérica, y se presentaban los conceptos considerados como soporte de la estructura matemática: lógica, teoría de conjuntos, álgebra, topología, funciones, etcétera.

Una muestra de la repercusión que tuvo el trabajo realizado por este grupo de matemáticos fue que al finalizar el Cuarto Instituto de Verano se elaboró un plan de desarrollo futuro para la educación matemática en Latinoamérica. Al respecto, Carranza (2007) afirma que dicha actividad fue el inicio de una verdadera reforma de la enseñanza de la matemática en el continente americano. En aquellos casos en que se contó con el apoyo gubernamental para llevarla a cabo, como ocurrió en Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Uruguay, hoy se pueden observar los frutos de dichos cambios.

Sin embargo, en el contexto peruano, una crisis política en la década de 1970 determinó la desaparición del IMUNI, lo cual dio origen a una nueva etapa en el desarrollo de las matemáticas y la educación matemática peruana. Ésta tuvo como nuevo escenario a la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

En la década de 1980 es en este centro de estudios donde se crea la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, única en su género en el país y que responde al modelo educativo adoptado por la PUCP, orientado a la formación integral del individuo; ese modelo ha sido organizado tomando en cuenta los tres componentes esenciales de la universidad: formación, investigación y responsabilidad social.

El plan de estudios de esta maestría ha conocido varios cambios, con base en la visión que, en su momento, tenían las personas que la dirigían. Inicialmente el plan de estudios estaba formado, casi en su totalidad, por un conjunto de cursos de matemáticas puras, con un nivel de exigencia igual o menor al que tenían los estudiantes de una maestría en matemáticas y sólo había un curso de investigación al final del mismo. Esto se correspondía con una visión de los matemáticos de la época, que consideraba como condición suficiente para ser un buen profesor de matemáticas el hecho de saber matemáticas. Y la justificación para este planteamiento se basó en que la formación de profesores que se brindaba en los institutos pedagógicos y en las facultades de educación de centros universitarios de la época se caracterizaba por brindar un gran número de cursos de pedagogía general, de psicología, y muy pocos de la disciplina matemáticas.

Sin embargo, en los últimos años se ha ido adoptando una visión antropológica de la matemática, de modo que esta se concibe como producto de la construcción humana, entendiendo que los ambientes de aprendizaje deben permitir desarrollar procesos de construcción, comunicación y validación de conocimientos matemáticos. Así, la última vez que se realizaron cambios importantes en el plan de estudios fue en el año 2006; a partir de esa fecha se adoptó una postura distinta sobre la didáctica de las matemáticas. Salazar y Gaita (2014: 86) explican que

> A diferencia de lo que se buscaba en el plan de estudios anterior, en donde el objetivo era sólo que los profesores adquirieran sólidos conocimientos matemáticos y en el que se adoptaba una postura euclidianista respecto al saber matemático, en el plan actual, se ha adoptado una postura constructivista respecto a la matemática y su enseñanza […] así, se propusieron como ejes fundamentales cursos de Matemáticas y espacios para que los estudiantes pudieran iniciarse en la investigación a través del estudio de marcos teóricos y metodológicos propios de la Educación Matemática. De esta manera, la maestría fue concebida como una maestría académica que buscaba generar conocimiento a partir del ya existente [...] Es así como, desde el año 2006, la maestría adoptó un nuevo rumbo y se empieza a tomar contacto con investigadores internacionales, artífices de esta nueva disciplina científica, para invitarlos a participar en algunas de las etapas del desarrollo de este renovado programa.

Esta postura se mantiene hasta la actualidad, con algunos ajustes realizados al interior de las asignaturas, pero sin que esto implique cambios de estructura. Actualmente el plan de estudios de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas tiene como fundamento una sólida formación disciplinar, que se complementa con la realización de investigaciones relevantes en el área de educación matemática. De esta manera, la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas se convierte en un punto de apoyo fundamental para la elaboración de propuestas para la enseñanza y la investigación de esa área.

Por otro lado, debemos señalar que uno de los principales responsables del desarrollo de la educación matemática en el Perú durante las últimas décadas ha sido el Dr. Uldarico Malaspina Jurado, fundador y director del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), con sede en la Pontificia Universidad Católica del Perú. El IREM es una red de institutos cuyos miembros son profesores de matemática de diferentes niveles educativos (primaria, secundaria y superior), y que trabajan tanto en la formación de maestros como en investigación en enseñanza de las matemáticas. En el caso del IREM-PUCP sus miembros son docentes-investigadores y exalumnos de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas.

El aporte del Dr. Malaspina se ha plasmado en diversas publicaciones sobre resolución y creación de problemas (2013a; 2013b); en trabajos de investigación que han culminado como tesis de Maestría en Enseñanza de la Matemática; y en la realización de actividades de difusión como los Coloquios Internacionales sobre la Enseñanza de la Matemática. En ellos han participado destacados investigadores del área, entre ellos como Michele Artigue, Raymond Duval, Bruno D'Amore, Juan D. Godino, Vicenç Font, Miguel R. Wilhelmi, Patricia Camarena, Saddo Ag Almoloud, Maria José Ferreira da Silva y Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. La mayoría han impartido clases en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, codirigido tesis de maestría y establecido grupos conjuntos de investigación.

Se hace necesario señalar que en el Perú también existe la Sociedad Peruana de Educación Matemática (Sopemat), una asociación formada por educadores de la especialidad de matemática de los diferentes niveles del sistema educativo peruano, y que propicia espacios para la reflexión y difunde proyectos de innovación e investigación en el área. Entre sus objetivos está contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación matemática en el Perú. Asimismo, esta sociedad es miembro de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática y participa en eventos nacionales e internacionales del área.

Investigación en educación matemática en el Perú

Por lo descrito, podemos decir que la educación matemática peruana está pasando por una nueva etapa, ya que ese país hoy cuenta con un equipo de docentes y estudiantes formados en educación matemática, con un gran potencial para desarrollar investigaciones en dicha área. Consideramos que tanto el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas como la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, representan espacios idóneos para la realización de investigaciones en educación matemática. Hasta el momento, en ambos centros se han considerado las siguientes áreas o líneas de investigación:

Uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría
Estudia la influencia del uso de la tecnología en la enseñanza de geometría en educación básica regular, así como el proceso de enseñanza y aprendizaje de temas de geometría con el uso de geometría dinámica (Cabri II plus, Cabri 3D, GeoGebra) en educación básica regular.

Algunos de los trabajos desarrollados en los últimos años en esta línea son los siguientes: La enseñanza de los sólidos geométricos basada en la teoría de Van Hiele con la incorporación de recursos informáticos para el primer año de educación secundaria (Beteta, 2009); Niveles de pensamiento alcanzados en situaciones didácticas relativas al concepto de semejanza de triángulos haciendo uso de la geometría dinámica (Gutiérrez, 2009); La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria (Fernández, 2013); La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería (Chumpitaz, 2013); Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria (García, 2014); El modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del GeoGebra (Santos, 2014), y Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos (Ríos, 2014).

Desarrollo del pensamiento numérico y algebráico
Estudia fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con las diferentes estructuras numéricas en la educación básica regular y fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con la variación: razones y proporciones, regla de tres simple, variación directa e inversamente proporcional, etc.; así como fenómenos de enseñanza y aprendizaje relacionados con pre-álgebra y álgebra.

Algunos de los trabajos realizados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios (Delgado, 2011); Análisis del tratamiento de álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización (Ricaldi, 2011); Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar Matemática Quinto grado de Educación Primaria (Carrillo, 2012); Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas (Neira, 2012); Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar (Morales, 2013); Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y la educación superior (Garcés, 2013), y Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes de primer año de secundaria (Medina, 2014).

Didáctica de la estadística y probabilidad

Contempla estudios sobre errores que presentan los alumnos de educación básica regular en relación con un determinado concepto estadístico o probabilístico, análisis de propuestas para la enseñanza de un determinado concepto estadístico o probabilístico, de modo que permitan el desarrollo del pensamiento inferencial o aleatorio.

Algunos de los trabajos realizados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior (Osorio, 2012); Significado de la Asimetría Estadística en los alumnos de Economía de la UNAC (Oviedo, 2013), y Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades (Sayritupac, 2014).

Análisis de organizaciones matemáticas y didácticas

Estudia el tratamiento de conceptos geométricos en textos de educación básica regular, concepciones erróneas de los estudiantes de ese mismo ciclo sobre el estudio de determinados conceptos geométricos y el diseño de propuestas para la enseñanza de un determinado concepto geométrico en la educación básica.

Algunos de los trabajos elaborados en los últimos años en esta línea son los siguientes: Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior (Carrillo, 2013); Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele (Maguiña, 2013), y Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario (Gonzales, 2014).

Creación y resolución de problemas
Se refiere al estudio de estrategias para estimular la creación de problemas que favorezcan el aprendizaje, se brindan aportes de la creación de problemas en el aula para el aprendizaje significativo de un tema específico de matemáticas de EBR; se analizan las concepciones de profesores (de primaria o secundaria) sobre la creación de problemas de matemáticas, y el efecto de talleres de creación de problemas de matemáticas en las actitudes de profesores en formación y en servicio hacia las matemáticas.

Algunos de los trabajos desarrollados en los últimos años en esta línea son los siguientes: La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas: una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas (Núñez, 2012); Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales (Azañero, 2013), y Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas (Figueroa, 2013).

Además de esas líneas de trabajo, se formaron grupos de investigación que ahora realizan diversos proyectos de investigación.

Grupos y proyectos de investigación

En el año 2011, por iniciativa de profesores-investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, se creó el grupo de estudios Tecnologías y Educación Matemática (TEM), que tiene como objetivo principal propiciar un espacio de discusión sobre la mediación de ambientes tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas; es decir, hacer sobre todo una reflexión teórica de algunos enfoques que cimentan el uso de la tecnología informática en la clase de matemáticas, y cómo el buen uso de ésta trae como resultado otra manera de enseñar y aprender la matemática.

En ese contexto se desarrollaron algunas actividades de formación de profesores y reflexiones teóricas, como el primer seminario taller en el que participaron maestros de nivel secundario de colegios públicos y particulares de Lima. Con este seminario se dio un primer paso para el fortalecimiento de la línea de investigación acerca del uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría.

Asimismo, en el seminario se reflexionó de manera específica sobre el uso de los ambientes de geometría dinámica como el GeoGebra, Cabri II y Cabri 3D, porque estos ambientes pueden tornar el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas –y de manera específica de la geometría– más dinámico, en tanto que disponen de diversas herramientas, funciones y recursos que permiten manipular representaciones de objetos geométricos (Salazar, 2011: 123). El seminario se realizó en dos etapas. En la primera se introdujeron algunas definiciones de tecnología y se hicieron actividades donde la tecnología informática puede facilitar o dificultar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la segunda etapa se presentaron diversas formas en que la tecnología informática puede ser utilizada desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas. Por fin se reflexionó sobre la importancia del buen uso de la tecnología informática en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Este seminario y otras actividades, por ejemplo los coloquios internacionales sobre enseñanza de las matemáticas –organizados cada dos años por el IREM-PUCP y la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, en los que participan investigadores, estudiantes de la maestría y profesores de los diferentes niveles educativos del país y del extranjero– son antecedentes para que en 2012 investigadores del IREM-PUCP pudieran crear el grupo de investigación sobre didáctica de las matemáticas (Dimat), que tiene entre sus objetivos: investigar los fenómenos didácticos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, tanto en la educación básica regular como en el nivel universitario; contribuir a la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica regular y en la educación superior; articular la investigación que se realiza en el grupo con la que se hace en las tesis de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas; analizar, desde una perspectiva teórica y práctica, cuestiones referentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuando se utilizan ambientes tecnológicos. Como se observa, la formación de los grupos TEM y Dimat resultó fundamental para el avance de investigaciones en el área.

Proyectos de investigación

Otro esfuerzo para fortalecer la investigación en educación matemática en el Perú son los proyectos de investigación que se llevan a cabo en el marco de las líneas de investigación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y del IREM-PUCP. Se presentan aquí algunos de ellos que se encuentran en pleno desarrollo.

En la línea de Didáctica de la estadística y la probabilidad, el proyecto "Logros de aprendizaje de los estudiantes del ciclo 4 y 6 de la educación básica regular en torno a los temas de estadística y probabilidad", se encuadra en el nivel del conocimiento en estadística y probabilidad de estudiantes de ciclo 4 (cuarto año de educación primaria; los estudiantes tienen entre 9 y 10 años), y tiene como perspectiva conocer si los conocimientos básicos en ambos campos son alcanzados por los estudiantes en los momentos esperados. Para ello se utilizan los Estándares de Aprendizaje Nacionales de la Educación Básica Regular del Perú, considerando en particular los Mapas de progreso del aprendizaje.

Otro proyecto de esta línea de investigación es: "Fortalecimiento de los conocimientos básicos en profesores de primaria en ejercicio, según los contenidos considerados en el mapa de progreso de Estadística y Probabilidad", que es la ampliación del proyecto anterior.

En cuanto a Creación y resolución de problemas, el proyecto trata sobre "La creación de problemas como competencia profesional del profesor de matemáticas: aportes para la formación de profesores". Tiene como objetivo proponer un marco teórico sobre la creación de problemas de matemáticas que pueda ser integrado en la formación de profesores.

Una de las consecuencias concretas de este proyecto, por ejemplo, es presentar al Ministerio de Educación del Perú resultados de la investigación para que sean útiles a la formación de profesores y, por ende, a la formación de los estudiantes de educación básica regular del Perú.

En cuanto a la línea de investigación sobre Uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría, existen proyectos de investigación de ámbito internacional. A continuación los presentamos brevemente.

"Enseñanza y aprendizaje de matemáticas en ambientes de geometría dinámica empleando el GeoGebra", desarrollado en el periodo 2013-2014, tuvo por objeto estudiar el efecto del uso de ambientes tecnológicos en el desarrollo de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello se propuso estrechar los vínculos ya existentes entre investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP e investigadores del grupo Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática (PEA-Mat) de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUC-SP).

En este proyecto se toma como antecedente el hecho de que en nuestros días se tiene evidencia (Salazar *et al.*, 2012a, 2012b y 2013; Silva *et al.* 2012), de que el uso adecuado de ambientes tecnológicos, especialmente de geometría dinámica GeoGebra, Cabri II y Cabri 3D, facilitan la visualización y la percepción de propiedades de los objetos matemáticos representados, y que con otros recursos podrían no ser evidentes.

De manera específica, en el proyecto se plantea como objetivo analizar, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, cuestiones relacionadas con la complejidad de la inserción del ambiente de geometría dinámica GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación básica regular y, en el nivel universitario, en el aprendizaje de conceptos geométricos y algebraicos. Se adoptaron como referencial teórico elementos de la teoría de registros de representación semiótica y aspectos relacionados con la visualización; también se consideran elementos de la teoría de situaciones didácticas y del enfoque instrumental. Como metodología de investigación se emplean aspectos de la ingeniería didáctica.

Se comunicaron los resultados obtenidos en el proyecto; es decir, mediante la publicación de tesis de maestría, así como de artículos que contienen los resultados de las investigaciones que se desprendan y cuyos autores sean profesores-investigadores y estudiantes. Además, los temas de investigación derivados de estos trabajos serán planteados como materia de futuras tesis de maestría. Así, se espera que este proyecto permita que estudiantes y profesores de la maestría fortalezcan su perfil de investigadores en esta línea.

El otro proyecto de la línea de investigación de uso de tecnologías trata de la interacción de investigadores de la PUCP y de la PUC-SP en investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ambientes tecnológicos. Se encuentra en pleno desarrollo.

Este proyecto se realiza de forma colaborativa entre los grupos de investigación Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática PEA-MAT y

Didáctica de las Matemáticas de ambas universidades, siendo el Dimat el que busca llevar a los profesores en formación inicial o continua al uso de ambientes tecnológicos y, especialmente, al empleo de ambientes de geometría dinámica. También espera que estos sirvan de instrumentos en la construcción de conjeturas y de resolución de problemas de matemática. Al igual que el proyecto anterior, aspectos de ingeniería didáctica de Artigue son utilizados como metodología de investigación. Además, se usarán entrevistas individuales e instrumentos diagnósticos; también serán ocupados cuestionarios semiestructurados, entrevistas y registro de producciones de los participantes, para identificar las concepciones de profesores de los dos países con relación con los conceptos matemáticos que se investiguen.

Luego, con el resultado del diagnóstico se definen los caminos para una propuesta y para el desarrollo de una formación continua de profesores, y a partir de ella se pretende que éstos construyan secuencias didácticas, las apliquen a sus estudiantes y analicen los resultados obtenidos.

Uso de la tecnología en la enseñanza y en el aprendizaje de geometría: algunas investigaciones

Además de los resultados de investigaciones de las tesis de maestría se han publicado artículos que enfatizan, sobre todo, el uso de ambientes de geometría dinámica –Cabri 3D y GeoGebra– en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría.

Estas investigaciones se justifican porque, según las Orientaciones para el Trabajo Pedagógico del Ministerio de Educación,

> […] la tecnología desempeña también un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Herramientas, como un programa informático de "Geometría dinámica", capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas. La visualización y el razonamiento espacial se enriquecen mediante la interacción con animaciones de ordenador y en otros contextos tecnológicos (Perú, 2007: 30).

Es así que, desde 2011, investigadores del IREM-PUCP e investigadores y estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas han publicado resultados de sus trabajos, en los que utilizaron ambientes e geometría dinámica como el Cabri 3D y el GeoGebra; en foros como el VI y VII Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, ICME 12, VI IberoCabri, VIII CIBEM y RELME 28, entre otros congresos internacionales. Se presentan a continuación algunas de estas investigaciones.

La investigación de Salazar, Gaita y Beteta (2013) se desarrolló con estudiantes de nivel universitario en un primer curso de matemática, igualmente con la ayuda del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D, y tuvo por finalidad iniciar el estudio de objetos elementales en la geometría analítica espacial. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de manipular representaciones de objetos matemáticos como el punto, la recta, el plano y la esfera.

Las herramientas y recursos que posee este software permitieron, por ejemplo, ubicar puntos dadas sus coordenadas, identificar ecuaciones de planos paralelos y perpendiculares, además de determinar posiciones relativas entre ellos; asociar las ecuaciones a sus representaciones y hacer deducciones sobre las formas y las ecuaciones de sus intersecciones. Para el diseño de las situaciones se tomaron en cuenta los niveles de pensamiento geométrico según el enfoque de Parzysz.

Los resultados de esta investigación revelaron que las situaciones en que se utilizó el ambiente de geometría dinámica favorecieron la evolución de los niveles de pensamiento geométrico entre los estudiantes universitarios.

En cuanto a la investigación de Santos y Gaita (2014), ésta tuvo por objetivo determinar los niveles de comprensión de la circunferencia alcanzados por estudiantes del segundo año de secundaria (alumnos de 12 años de edad), con base en el modelo Van Hiele, y tomando en cuenta el tipo de justificación que realizan de acuerdo con los procedimientos matemáticos desarrollados. Se presentan actividades que relacionan los elementos de la circunferencia y han sido diseñadas considerando el software GeoGebra como mediador. Se planteó identificar el efecto del recurso tecnológico en relación con la adquisición de un nivel de aprendizaje superior, según el modelo adoptado.

La investigación de García y Salazar (2014) nace de la problemática que existe en la enseñanza de la geometría y su poca profundización en los temas del área, como las transformaciones en el plano, para centrarse en el estudio de la noción de simetría axial mediada por el software GeoGebra. Se toma como marco teórico y metodológico el enfoque instrumental y aspectos de ingeniería didáctica, respectivamente. La investigación se realizó con estudiantes de 12 y 13 años de edad, quienes lograron utilizar algunas herramientas del software GeoGebra y reconocer las propiedades de una figura simétrica.

Por último, en la investigación de Masgo y Salazar (2014) se analiza una secuencia de actividades bajo el supuesto que el uso del software GeoGebra favorece el aprendizaje de la noción de semejanza de triángulos en estudiantes de Educación Básica Regular del Perú (14 y 15 años de edad). En las actividades que se desarrollaron en la investigación se deseaba determinar las fases por las que pueden transitar los estudiantes cuando construyen los criterios de semejanza de triángulos según la dialéctica herramienta-objeto de Douady. También se tomaron en cuenta aspectos básicos de la teoría de registros de representación semiótica de Duval. Además, se utilizaron aspectos de la ingeniería didáctica de Artigue como base metodológica. Como uno de los resultados se observó que los estudiantes fueron capaces de construir los criterios de semejanza de triángulos al movilizar sus conocimientos previos y lograron desarrollar la secuencia de actividades en la que utilizaron GeoGebra como herramienta tecnológica.

Reflexiones finales

La creación de grupos de estudio y de investigación en educación matemática, de líneas de investigación tanto del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas como de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, el desarrollo de proyectos de investigación que tienen como productos tesis de maestría y publicaciones en revistas, congresos internacionales, etc., permite afirmar que la investigación en educación matemática en el Perú está en pleno desarrollo y en proceso de consolidación.

Referencias

Ayzanoa, G. (2003). *Grandes Educadores Peruanos: libro dedicado a los maestros del Perú en su día*. Lima: Editorial del Ministerio de Educación del Perú.

Azañero, M. (2013). *Errores que presentan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de problemas con ecuaciones lineales.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Beteta, M. (2009). *La enseñanza de los sólidos geométricos basada en la teoría de Van Hiele con la incorporación de recursos informáticos para el primer año de educación secundaria.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Carranza, C. (2007). *Historia de la matemática peruana*. En: Ciclo de conferencias sobre Matemática y Física Educativa. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Carrillo, M. (2012*). Análisis de la organización matemática relacionada a las concepciones de fracción que se presenta en el texto escolar matemática quinto grado de educación primaria.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Chumpitaz, D. (2013). *La* génesis *instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Delgado, A. (2011). *Un estudio, desde el enfoque lógico semiótico, de las dificultades de alumnos de tercer año de secundaria en relación a los polinomios.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Fernández, M. (2013). *La representación del cubo y el Cabri 3D: un estudio con alumnos del primer grado de educación secundaria.* Tesis de maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Figueroa, R. (2013). *Resolución de Problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto* año de *secundaria desde la teoría de situaciones didácticas*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Garcés, W. (2013). *Análisis didáctico como herramienta para determinar el grado de idoneidad de las tareas sobre ecuaciones lineales entre la educación secundaria y la educación superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

García, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

García, D. y Salazar, J. V. F. (2014). *La instrumentación de la simetría axial mediada por el GeoGebra*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 129-160.

Gonzales, C. (2014). *Una praxeología matemática de proporción en un texto universitario*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Gutiérrez, W. (2009). *Niveles de pensamiento alcanzados en situaciones didácticas relativas al concepto de semejanza de triángulos haciendo uso de la geometría dinámica.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Higginson, W. (1980). *On the foundations of Mathematics Education. For the Learning of Mathematics* 1(2), 3-7.

Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros Basada en el modelo Van Hiele.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. (2013a). Creación de problemas. Un caso con probabilidades. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 33, 119-124.

Malaspina, U. (2013b). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 41-49.

Masgo, L. y Salazar, J. V. F. (2014). *Semejanza de triángulos mediada por el GeoGebra.* XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.

Medina, F. (2014). *Análisis de la organización matemática referida a los números enteros presente en libros de texto y su relación con las dificultades presentadas por los estudiantes de primer año de secundaria*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ministerio de Educación (2007). *Orientaciones para el trabajo pedagógico*. Lima: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2009). *Diseño curricular nacional de la educación básica regular*. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/

Morales, Z. (2013). *Análisis de las transformaciones de las representaciones semióticas en el estudio de la función logarítmica en la educación escolar*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de ciencias administrativas*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Núñez, N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Osorio, A. (2012). *Análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Oviedo, S. (2013). *Significado de la asimetría estadística en los alumnos de economía de la UNAC.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Piscoya, L. H. (2005). *Cuánto saben nuestros maestros. Una entrada a los diez problemas cardinales de la educación peruana*. Lima: Fondo Editorial de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Ramírez, T. (2006). *Cómo hacer un proyecto de investigación.* Caracas: Editorial Júpiter.

Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento de álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (eds.). *Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las* áreas *curriculares*. Madrid: Síntesis.

Ríos, J. C. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.* Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Sayritupac, J. (2014). *Significados de las medidas de tendencia central. Un estudio con alumnos universitarios de carreras de humanidades*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Salazar, J. V. F. y Gaita, R. C. (2014). Situación actual de la educación matemática en el Perú. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura* 9(15), 82-95.

Salazar, J. V. F. y Almeida, T. C. S. (2011). *Geometria dinâmica: um caminho para o estudo de Geometria*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recife, Brasil.

Salazar, J. V. F.; Malaspina, U.; Gaita, R. C. y Ugarte, F. (2012a). *Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis*. En: 12th International Congress on Mathematical Education. Seúl.

Salazar, J. V. F.; Gaita, R. C.; Malaspina, U. y Ugarte, F. (2012b). *The Use of Technology and Teacher Training: An Alternative for the Teaching of Spatial Geometry.* 12th International Congress on Mathematical Education. Seúl.

Salazar, J. V. F.; Chumpitaz, L. D. (2013). *Génesis instrumental: un estudio del proceso de instrumentalización de la función definida por tramos*. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Uruguay: Montevideo.

Salazar, J.V. F.; Gaita, R. C. y Beteta, M. (2013). *Introducción a la Geometría Analítica Espacial con Cabri 3D.* VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Perú: Lima.

Santos, E. (2014). *El modelo Van Hiele para el aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del GeoGebra*. Tesis de maestría. Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Santos, E. y Gaita, R. C. (2014). *Niveles de comprensión del concepto circunferencia mediado por el GeoGebra*. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-RELME. Colombia: Barranquilla.

Silva, M. J. y Salazar, J. V. F. (2012). *Cabri 3D na sala de aula*. VI Congreso Iberoamericano de Cabri. Perú: Lima.

Puerto Rico

Una aproximación a la matemática educativa en Puerto Rico

Orlando Planchart Márquez
Universidad Interamericana de Puerto Rico

Introducción

En la segunda década del siglo XXI, en pleno mundo global, donde la comunicación asociada con la tecnología se ha incrementado de manera exponencial en la educación, este estudio se propone caracterizar la matemática educativa en Puerto Rico, tanto en sus fortalezas como en sus debilidades.

La matemática educativa, como campo teórico-práctico, adquiere cada día mayor fortaleza en algunos países de Latinoamérica. Esta especialidad, que se ha desarrollado a lo largo de cuatro décadas, adquiere un perfil cada vez más definido y mayor alcance, lo cual se evidencia mediante las publicaciones en distintas áreas de la matemática educativa que han realizado profesores-investigadores de instituciones universitarias y centros de investigación. Ese proceso creativo se ha nutrido de una estructura dialéctica integrada por el conocimiento, la teoría y la práctica de los colegas e investigadores de Latinoamérica, Europa y otras partes del mundo. El trabajo expresa la posición y conocimiento del autor, quien tiene el aval de veinticinco años de docencia universitaria en matemática en Puerto Rico, algunos en la preparación de maestros; así, con el propósito de indagar los entornos fundamentales de la matemática educativa en nuestro país, el texto se divide en seis apartados:

Primero se trata de obtener respuestas a una serie de interrogantes planteadas –por medio de entrevistas– a profesores-investigadores que han trabajado en instituciones educativas de diferentes niveles: bachillerato, universidad y posgrado, y que a lo largo de su trayectoria en la enseñanza han demostrado en la práctica una voluntad por mejorar la educación matemática. Fueron entrevistados: la doctora Ana Helvia Quintero, el doctor Omar Hernández y Joaquín Padovani. Luego se trata de inferir, a través de títulos y temáticas de tesis y proyectos de posgrado, las líneas de investigación que prevalecen en instituciones que ofrecen estudios de maestría y doctorado.

En el tercer apartado se incluye en el espectro de la matemática educativa los diversos espacios de discusión: congresos, seminarios, encuentros, libros y revistas. A continuación se busca diferenciar entre el papel que hoy tienen las universidades en la formación de los maestros de matemáticas, y el que podrían tener a mediano plazo.

El quinto apartado se dedica a determinar los niveles de acercamiento de los docentes de matemática en Puerto Rico a los enfoques educativos que se desarrollan en otros países. Por último, se señalan las conclusiones a las que condujo este estudio.

Las interrogantes y temáticas formuladas y discutidas son las siguientes: ¿Cómo se puede caracterizar la matemática educativa o la educación matemática en Puerto Rico? ¿Cuál es la visión que se tiene de la matemática educativa en Puerto Rico? ¿Cuáles líneas de investigación en este campo dominan en Puerto Rico? ¿Cuál es la vinculación o acercamiento de los docentes de matemática de Puerto Rico con los enfoques y teorías educativas que se desarrollan en otros países de América? ¿Cómo se forman los maestros y profesores de matemática en Puerto Rico? ¿Hay instituciones que se encargan de este proceso de una manera estructural y sistemática?

La educación matemática en Puerto Rico

A principios del siglo pasado surge oficialmente la educación en matemática, y durante décadas experimentó diversos enfoques. En su Marco curricular (2003), el Departamento de Educación de Puerto Rico expone una sinopsis del desarrollo de la matemática desde principios del siglo XX, y señala el énfasis de cada periodo en el área de la matemática. Entre 1900 y 1930 (la dominación estadounidense se inició en 1899) se subrayó la enseñanza de conceptos y destrezas de la aritmética; de 1940 a 1950 se privilegió lo puramente social de la matemática; entre 1960 y 1970 se enfatizó la significación para facilitar la comprensión y el entendimiento de las matemáticas (matemática moderna); en la década siguiente se destacó el desarrollo de destrezas básicas fundamentales; en la década 1980-1990 el énfasis fue para la solución de problemas pertinentes y el desarrollo del pensamiento, y en la última década del siglo pasado se enfatizó la solución de problemas (Rosario, Héctor, *et al.*, 2014).

El Departamento de Educación Pública de Puerto Rico (DE) delinea las políticas para educación en matemática desde prescolar, elemental (grados K 1-6), secundaria (grados de 7-9) y superior (grados10-12); sin embargo, no asume directamente lineamientos para la educación de carácter privado. Por su parte, las instituciones universitarias responden al Consejo de Educación de Puerto Rico (CEP). Para determinar el aprovechamiento de los estudiantes se implementan dos tipos de exámenes internos: *1)* las Pruebas Puertorriqueñas de Aprovechamiento Académico (PPAA), diseñadas para evaluar a los estudiantes en las materias de inglés como segundo idioma, matemáticas, español y ciencias (se aplican en los grados 3ro., 4to., 5to., 6to., 7mo., 8vo. y 11mo.); *2)* las Pruebas Puertorriqueñas Evaluación Alterna (PPEA), dirigidas a los estudiantes identificados con impedimentos de conocimiento significativos en relación con el progreso en su desarrollo (Departamento de Educación de Puerto Rico, 2003). A partir de 2012 se añadió una evaluación con estándares internacionales: las pruebas del Programme for International Student Assessment (PISA).

Los resultados de las pruebas suministradas a estudiantes de educación pre-universitaria muestran bajo rendimiento en general, tanto en las PPAA como en los resultados de las pruebas PISA (esta última en 2014). El bajo nivel de preparación ha suscitado preocupaciones, críticas y sugerencias para superarlas. Respecto de esta problemática, Quintero (2014) planteó que: "bajo la filosofía del DE se desarrolla la organización administrativa. El secretario y su equipo desarrollan la política educativa e instruyen, a través de cartas circulares, las directrices a seguir en los distintos niveles del sistema. Como parte de este proceso se ofrecen talleres y seminarios para el desarrollo profesional dirigidos mayormente a 'adiestrar' a los maestros en las estrategias de enseñanza [...] Al analizar los resultados de este proceso vemos que en términos generales la enseñanza no ha mejorado". También se pregunta: "¿Por qué a pesar del esfuerzo, a veces heroico, de maestros con gran compromiso, a pesar de la colaboración de las universidades con las escuelas a través de los proyectos financiados por millones de dólares federales, no vemos mejoras significativas?"

Por su parte, Padovani planteó:

> La educación matemática se ve muy bien en los documentos que preparan el DE y algunas universidades. Sin embargo, estos no "llegan" al maestro porque no se da el seguimiento efectivo. El maestro, en vez de seguir esas pautas que le dictan, permanece con viejos moldes y mucha rigidez; no se mueve en la educación como lo están haciendo en otros países de Latinoamérica, y esto sucede en todos lo niveles. La responsabilidad de DE es formar estudiantes a los que les den unas destrezas, pero no lo hacen dentro de un marco social, como lo señalan algunas teorías educativas. Por ejemplo: la socio-epistemología. Yo no puedo enseñar para hacer de los estudiantes unos matemáticos, unos ingenieros, yo enseño la matemática para la vida, para una matemática que se pueda aplicar en su contexto social. Actualmente, no se practica una matemática con una visión que mueva el país.

Hernández precisó:

> Se podría analizar, desde las escuelas de formación de maestros, o desde el aspecto de la práctica, lo que sucede en las escuelas. Los requisitos que el DE (que es el que más contrata maestros) impone normas que a la larga y a la postre todos se dejan llevar por estas. El DE es el organismo que regula todo y se considera exclusivo en la educación en Puerto Rico, excluyendo a otros sistemas que son bastante fuertes en la Isla. Por ejemplo: las escuelas católicas, las escuelas de denominaciones diferentes, las escuelas privadas, que no son seculares, etcétera.

Refiriéndose al papel que el maestro debe asumir como investigador, Hernández propone:

Es importante que el maestro reflexiones sobre su clase y acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Son muchos los profesores que hacen esa reflexión sobre sus prácticas; lo que sucede es que se escribe muy poco sobre los resultados. Tampoco se piensa sistemáticamente sino, más bien, para ellos son situaciones puntuales. Le preocupa mucho a los maestros: ¿por qué mis estudiantes no aprenden? Pero, a lo mejor, no reflexionan sistemáticamente. Eso me recuerda a la palabra teoría cuando dicen "mi teoría es que [...]" Entonces, una teoría es como una consideración, pero sin fundamento en la reflexión de la praxis, sino más bien tratando de adivinar qué fue lo que pasó.

Líneas de investigación en educación en matemática

El desarrollo de la matemática educativa se ha fortalecido, en gran medida, por los resultados y las publicaciones de investigaciones realizadas por profesores y estudiantes de maestría y doctorado. Las más frecuentes son las tesis, requisito de investigación que las universidades piden a sus estudiantes (en Puerto Rico el bachillerato, equivalente a licenciatura y no se exige tesis; en maestría la tesis es una opción, y en la Universidad de Puerto Rico en Río Piedras fue requisito hasta 2013; en doctorado es obligatorio). Para el presente artículo se recabó información sobre proyectos, tesis y tesinas realizadas en cuatro universidades portorriqueñas que ofrecen programas de posgrado, lo cual confirma lo expresado por los expertos e investigadores entrevistados. Sin embargo, podría conjeturarse que las líneas de producción e investigación que se desarrollan a nivel universitario no han estado muy bien definidas.

Hernández (2014) realizó un *Análisis de los títulos de las tesis, proyectos y disertaciones del Departamento de Estudios Graduados con temas de educación matemática* en la Universidad de Puerto Rico en Río Piedras. Revisó cien títulos de tesis producidas entre 1980 y 2013, lo cual le permitió determinar el objeto de estudio, los participantes, el método y los contenidos matemáticos. En este trabajo se establece que "Entre 1982 y 1986, los objetos de estudio, principalmente, eran los instrumentos de enseñanza tradicionales como el libro de texto, o los emergentes como las calculadoras o las computadoras". También se señala en el documento: "A partir de 1986 se incrementa el número de trabajos que tenían como propósito determinar la efectividad de diversas estrategias educativas en el aprovechamiento y la actitud de los estudiantes". Se considera que "La idea de 'efectividad' se puso de manifiesto en tesis sobre el uso de las calculadoras, las computadoras, los cursos preparatorios, los manipulativos, los laboratorios de matemáticas, las asignaciones y los modelos de instrucción". También señaló: "Desde 1986 se incrementan las investigaciones donde se utilizan los métodos cuantitativos". Según el mismo autor: "Desde 1997 empieza a disminuir la cantidad de estudios cuantitativos y se incrementa el número de estudios descriptivos con metodología cualitativa". Más adelante señala que entre los objetos de estudio se encuentran los procesos de implantación de alguna estrategia de enseñanza o aprendizaje, la solución de problemas, las creencias de los maestros, los procesos de pensamiento de los estudiantes, el uso de tecnología emergente para la enseñanza y la transferencia de aprendizaje al salón de clase de lo aprendido en un programa de desarrollo profesional de maestros.

Por otro lado, se obtuvo la información de siete tesis doctorales en la especialidad de Educación en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Puerto Rico entre 2006 y 2014. De acuerdo con los títulos de las mismas, se observó que lo que prevaleció en las investigaciones fue estudiar los efectos de enfoque metodológicos, competencias o la relación que guardan estrategias de enseñanza u objetos de estudio. Los niveles de escolaridad en los cuales se hicieron estos estudios quedaron distribuidos así: cuatro trabajos en primaria y secundaria, dos en universitaria y uno de maestro. Los temas tratados fueron álgebra y geometría básica, con predominio de una metodología cuantitativa. Asimismo, se identificaron en la Universidad Interamericana de Puerto Rico en Ponce siete tesis de maestría en el Programa de Graduados Maestría en Currículo y Enseñanza en Matemáticas.[1] En la Caribbean University de Ponce se revisaron los títulos de 18 tesis (1999-2009) de la maestría de Artes en Educación en Currículo, Especialidad Matemática. Entre las 25 tesis sólo se halló un estudio que incluyó metodología cualitativa. Tres trabajos se enfocaron en diseños instruccionales. Los títulos de las tesis están inclinados al tipo de estudio que mide la efectividad y la comparación de estrategias (ejemplo: aplicación de la calculadora, módulos en laboratorios, solución de problemas, test actitudinales, aprovechamiento académico). La mayoría se realizaron en escuelas (tres en primaria; doce en secundaria y seis en superior). Los contenidos matemáticos que fueron tomados como objeto de estudio fueron: cinco tesis en geometría, cuatro tesis en álgebra y una en trigonometría.

Con respecto a las líneas de investigación que se llevan a cabo en la educación superior universitaria de Puerto Rico, Hernández explicó que contaban con un equipo de investigación en la Universidad de Puerto Rico, con líneas de investigación en historia de la matemática y el sentido numérico. Señaló:

> Tenemos un equipo de trabajo que se compone del Dr. Jorge López, la Dra. Ana Helvia Quintero y este servidor. Hemos procurado, primero, un acercamiento con Latinoamérica, especialmente con México y Colombia, para atender el asunto de la internacionalización de la educación mate-

[1] Es importante mencionar que hay programas de maestría en Educación matemática en otras universidades. En la Universidad Interamericana en San Germán se imparte una maestría en Matemática aplicada y hacen aportaciones en educación matemática.

> mática. Básicamente, estamos trabajando dos aspectos que es el sentido numérico y el estudio de la historia de la matemática, pero con un énfasis de cómo va ser útil en la didáctica de la matemática. Además de esas dos líneas, trabajamos en la atención a los estudiantes; allí, hay labores que tienen muchos méritos, pues son unos trabajos de disertación, los cuales considero de muy buen nivel.

A su vez, J. Padovani, se manifestó en torno a las líneas de investigación que dominan en la matemática educativa en Puerto Rico:

> Hay una repetición de la investigación de matemática en Puerto Rico, casi siempre son los mismo temas: resolución de problemas, calculadora gráfica, etc. Las investigaciones que están haciendo son de ese tipo; aquí no se fomenta la investigación en el salón de clases. Opino que si el maestro tuviera la mentalidad de investigar (y no solamente dedicarse a enseñar unos conceptos y unas destrezas), me fijaría en por qué mis estudiantes no aprenden, y vería qué puedo hacer para que mejoren […] El Departamento de Educación debería entender que el eje alrededor del cual se tiene que mover la educación es alrededor del estudiante. ¿Lo estamos haciendo? El de considera que es primordial que la enseñanza esté dirigida a la resolución de problemas, y pone de ejemplo a Finlandia, Singapur y a Japón, pero ¿se está haciendo lo que ellos hacen? ¿O simplemente escribir ahí que la enseñanza debe estar dirigida a la resolución de problemas? Pero si no lo enmarcamos en lo social y lo práctico, no vamos a lograr estos objetivos.

Papel de las universidades en la formación de maestros y profesores

Según Báez Dávila, director ejecutivo interino del Consejo de Educación (CE) de Puerto Rico indicó que en ese país hay 54 instituciones de educación superior, de las cuales 47 son locales y siete son externas. La oferta académica local es de 789 grados asociados, 1 345 bachilleratos, 759 maestrías y 105 doctorados. Para el periodo 2011-2012 había cerca de 250 000 estudiantes universitarios (Consejo de Educación de Puerto Rico, 2014).

Puerto Rico cuenta con tres universidades públicas: la Universidad de Puerto Rico, compuesta por once unidades académicas; el Conservatorio de Música de Puerto Rico y el Colegio Universitario de San Juan. Entre las universidades privadas destacan la Universidad Interamericana de Puerto Rico (con once unidades), la Pontificia Universidad Católica (tres unidades), el sistema Universitario Ana G. Méndez (incluye la Universidad del Turabo, Universidad Metropolitana, Universidad del Este y la Universidad Ana G. Méndez-Campus Virtual), la Universidad Sagrado Corazón y la Caribbean University (cuatro recintos), entre otras. Sin dejar de mencionar que en los últimos años se desarrollan programas virtuales conectados a universidades del exterior. El número de unidades universitarias estarían cerca de un centenar de centros de educación superior, entre universidades y colegios universitarios. Se constata una proporción alta de institutos universitarios por habitante, en tanto se dispone de cien instituciones para una población de casi 3.8 millones de personas, según el censo de población de 2010. Por ejemplo, un municipio de 40 000 habitantes cuenta con seis centros universitarios.

Viviana Abreu participó en el *Informe de Educación Superior*. *Acciones hacia una transformación en la educación universitaria* y explicó cómo se segmenta el modelo educativo: "El sistema universitario está integrado al sistema universitario estadounidense y, además, sigue el modelo en términos académicos y administrativos. Por ejemplo, tanto en Puerto Rico como en Estados Unidos se ofrecen los mismos grados académicos: grado asociado, bachillerato, maestría y doctorado. De igual forma, la máxima autoridad de la universidad puertorriqueña y de Estados Unidos es un presidente y no un rector" (Rodríguez García, 2010).

En diferentes universidades de Puerto Rico ofrecen programas de bachillerato en educación con especialidad en matemáticas. Algunas de estas cuentan con programas de maestría y doctorado (Maestría en Educación en Currículo y Enseñanza en Matemática, y Doctorado en Educación con especialidad en Currículo y Enseñanza o en Instrucción), donde los maestros obtienen sus grados académicos. El Departamento de Educación, a través de propuestas federales, prepara a los maestros en talleres que se realizan los fines de semana y obtienen créditos académicos. Con frecuencia los profesores universitarios se encargan de impartir esos talleres, organizados a partir del DE, o de los que se generan de las propuestas federales escritas por docentes.

Respecto del papel de las universidades, Hernández puntualizó:

> En Puerto Rico hay dos sistemas grandes de formación de maestros: uno público y otro privado. El sector público trata de atender esta formación

> de maestros para todas las poblaciones. Las exigencias del sector público son diferentes a las del sector privado. Hay que reconocer que el principal lugar donde van a trabajar los maestros es el DE, y éste, al ser el mayor empleador, impone las normas de cómo se van a formar los maestros. Básicamente, para ser certificado y poder trabajar con el DE deben cumplirse ciertos requisitos, los cuales están determinados por la gerencia. Cualquier universidad que eduque a los maestros, con esos requisitos que podemos considerar mínimos, puede tener un Programa de Maestros, el cual se han extendido a través de todas las universidades. Casi todas tienen programas de formación de maestros con un rango de calidad demasiado amplio.

Añadió: "La situación, interesante y preocupante, es que la buena calidad se encuentra en el sistema público, pero es el que forma menos maestros. Es el único que puede garantizar que 98% de sus egresados van a aprobar las Pruebas de Certificación de Maestros (PCMAS) y con un puntaje alto". Luego distinguió entre universidades y certificación de los maestros:

Por lo menos podemos mencionar tres categorías de instituciones: la universidad pública, los que tratan de emularla y hacen un trabajo digno que se puede rescatar. Otras ni siquiera tratan de copiar, sencillamente hacen lo que les parece, lo cual se reflejará en la calidad. El DE ha tratado de mejorar esta situación pero existen diversos problemas estructurales y no le pueden retirar la licencia a una institución, pues se crearía un efecto dominó. Dicho esto añado una situación interesante para Puerto Rico. Me refiero a las certificaciones de maestros por otras vías que no son el estudio formal. Un maestro formado en otra disciplina puede lograr una certificación a través de medios alternos de desarrollo profesional, y puede terminar enseñando matemática sin tener una preparación. Respecto de la calidad de la maestría, uno ya no se sorprende cuando ofrecen maestrías en un año, y no sólo las ofrecen, sino que los estudiantes se las *ganan* en un año.

A su vez, Quintero planteó de manera crítica el papel de las universidades: "A las mismas universidades les hace falta mirar la matemática como un proceso de invención y de análisis; es necesario pensar en la matemática educativa. A los estudiantes les estamos enseñando en forma algorítmica los cursos de matemáticas. No veo mucha investigación, tampoco en la educación matemática".

Al abordar el tema de la formación de los educadores y de las instituciones responsables de este proceso de manera estructural y sistemática, Padovani aseguró:

> Los maestros en Puerto Rico se forman partiendo de una pedagogía estructurada en Estados Unidos, no hecha para los puertorriqueños. Los profesores de buena fe tratan de adaptar esos conocimientos pedagógicos en Puerto Rico, pero no es lo mismo. Otra situación desfavorable es que el estudiante que participa en el Programa de Matemática comparte el curso de pedagogía con estudiantes de ciencia, de español o de inglés y se quejan mucho, con razón. Luego les imparten un seminario, pero a veces en ellos hay estudiantes de diferentes programas. El problema es que quien va a enseñar matemática desarrolla unos conceptos, pero cuando va al componente de educación, quien le enseña es un especialista en pedagogía que no siempre domina los conceptos matemáticos. Tiene que haber un balance entre lo conceptual y la manera de enseñar. En Puerto Rico no hay instituciones que preparen para educación matemática *per se*, sino que lo hacen dentro del programa de pedagogía utilizado por las universidades, y es en forma general.

La prueba PISA

El informe de las pruebas PISA, aplicadas a los estudiantes en el año 2012 (Ying Chan, J., *et al.*, 2014), generó preocupación en los círculos educativos del país:

> El estudio PISA es un programa cooperativo, de carácter cíclico, con un sistema internacional de gestión y control, en el que intervienen organismos vinculados con la OCDE, consorcios educativos y grupos internacionales de expertos. Este programa, el cual se propone generar indicadores de los logros en educación, se lleva a cabo mediante una evaluación internacional. La información procede de los resultados obtenidos en pruebas estandarizadas de papel y lápiz y que proporcionan los estudiantes de 15 años. Las pruebas son comunes, siguen procedimientos de aplicación comunes y se llevan a cabo por evaluadores externos (Rico Romero, 2004).

Vale la pena resaltar que Puerto Rico participó hace dos años en una prueba internacional de alta categoría, en la cual participaron 65 países.

> Un total de 1 668 estudiantes de 15 años participaron de la prueba que fue administrada en el 2012, aunque los resultados se los entregaron este año

> al DE. La agencia proveyó a la organización privada que administra PISA el listado de las escuelas públicas y privadas del país, y fueron ellos quienes de 'manera aleatoria' escogieron a los 1 668 estudiantes que participaron. Puerto Rico obtuvo una puntuación de 379 en matemáticas, mientras el promedio para Latinoamérica fue de 397 y la puntuación de Estados Unidos fue de 478. (Ruiz Kuilan, 2014).

En comparación con otros países del continente americano, si bien los resultados no son tan satisfactorios, tampoco revelan rendimientos muy bajos. Someterse a estas evaluaciones podría motivar la preparación educativa en retos futuros.

Acerca de las pruebas PISA, la doctora Quintero explicó: "Ningún estudiante, de los que presentaron las pruebas PISA, estuvo sobre el nivel tres. El nivel tres se concentra en algoritmos; en el nivel seis se analizan problemas complejos, los nuestros siguen procedimientos, no analizan. Por tanto, ahora más que nunca, hace falta el tipo de material creado a partir de la experiencia de matemática en contexto de Puerto Rico *(*MeCPR*)*. Nosotros, en los centros regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM) tratamos de promover que en la matemática tiene que haber análisis, creatividad, romper la cuestión meramente algorítmica".

Padovani mostró su inquietud por los resultados de esas misma prueba: "Me preocupa que luego de aplicarse las pruebas PISA, o las del *College Board*, siempre dicen que se está investigando por qué los estudiantes están saliendo cada vez peor en cada una de las pruebas. Esa es una interrogante que yo tengo. El departamento discute una que otra cosa y no da una respuesta acorde con la situación".

Relación de la educación matemática con Estados Unidos y otros países de América Latina

La relación que mantienen las universidades de Puerto Rico con universidades del exterior, y de manera específica con Latinoamérica, no es muy estrecha. Sin embargo, existen algunas iniciativas generadas en la Universidad de Puerto Rico. En este sentido, Quintero señaló: "Nosotros [el grupo afiliado a los CRAIM] personalmente hemos tenido relación con Holanda y Barcelona (en Barcelona se trabajaba en matemática en contexto) participamos en muchos congresos en Latinoamérica, fuimos a México y a Guatemala, y ha habido algo de relación con Brasil. El trabajo mayor ha sido con Barcelona y Holanda".

Ahora bien, los vínculos establecidos con universidades latinoamericanas son muy pocos. Si bien se han firmado acuerdos interinstitucionales, en la mayoría de los casos no se intercambia profesorado, ni se comparten investigaciones. Resulta escasa la presencia del profesorado universitario en los eventos académicos de Latinoamérica. Un ejemplo de ello es la ausencia de la delegación portorriqueña en los recientes congresos de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme). También puede constatarse que en la secciones de referencias bibliográficas de libros y tesis escasean los nombres de investigadores latinoamericanos.

Respecto del intercambio académico entre países de América Latina, Estados Unidos y Europa, Hernández señaló:

> En el acercamiento a otros países se ha buscado incorporar los avances destacados en Latinoamérica y en Europa, los cuales son poco conocidos en Puerto Rico. Por tradición, se ha mirado más hacia Estados Unidos, se ha tomado como referente la educación estadounidense, pero ya se ha notado su poca pertinencia (inclusive, diversos autores de ese país critican el tipo de investigación que realizan ahí). Muchas de las investigaciones son financiadas por instituciones que tienen intereses muy particulares, y esto no permite el avance de la teorización. Jeremy Kilpatrick, uno de los estudiosos de la matemática educativa en Estados Unidos, menciona ese punto como un problema de la investigación [en matemática educativa].

Padovani, fue más enfático con respecto a ese tema:

> Yo digo que hay que mirar al Sur. En esta década los países latinoamericanos ya han adquirido una visión acorde con la enseñanza, donde se han incorporado teorías como la "socio-epistemología", la cual se discute mucho en Europa y Latinoamérica. Ya no se enseña la matemática de forma rígida. La matemática educativa no se puede limitar solamente al contacto de profesor y estudiante. Tiene que ir más allá. No puede limitarse a enseñar solo unos conceptos y unas destrezas. Hay que investigar en el aula; eso es muy importante.

> Puerto Rico tiene que mirar más al Sur. Aquí se mira más hacia Estados Unidos; los mismo educadores de allí se han dado cuenta que nosotros no podemos tener una fotocopia del sistema americano; nosotros tenemos otra idiosincrasia. Ellos ayudan a una serie de cosas y están haciendo unas prácticas buenas, pero ¿lo que están haciendo allá es bueno para nosotros? Ellos trabajan más en lo pragmático y comercializan todo. Por ejemplo: el curso de Precálculo surge como algo económico porque varios de los que escriben libros pueden vender esos materiales. El Precálculo es una asignatura que, se supone, debería impartirse en el nivel de escuela superior, para que el estudiante pueda empezar la universidad con las primeras nociones de cálculo. Observo también que no se profundiza en las demostraciones: en los cursos se da una demostración y no saben ni cómo iniciarla.

Eventos y revistas de matemática educativa

Para conocer el alcance que ha tenido la matemática educativa y su respectiva producción académica en Puerto Rico, es necesario mencionar los congresos, seminarios y demás foros relacionados con la enseñanza de la matemática que se realizan de manera periódica. También hace falta identificar las publicaciones donde se presentan los trabajos de investigación desarrollados por los profesores, investigadores y estudiantes de maestría y doctorado de los diferentes centros educativos.

En primer lugar se debe hacer referencia a la contribución que hicieron las convenciones anuales de Asociación Puertorriqueña de Maestros de Matemáticas. Los miembros de esta organización educativa realizaban una convención en el mes marzo, lo cual tuvo lugar durante 45 años, y la última de esas reuniones se verificó en 2005. La asistencia de maestros de matemáticas de escuelas públicas y privadas, así como delegaciones de profesores de las diferentes universidades estatales y del sector privado, era numerosa. En esos encuentros la participación de los maestros de educación básica, como oyentes y responsables de impartir conferencias se daba en menor número que los profesores universitarios. Incluso llegó a constituirse como capítulo de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Así lo resalta Padovani al afirmar que: "Se rendía un informe de lo que se hacía. La asamblea movilizaba mucha gente. A la Asociación le preocupó que Puerto Rico no tuviera una filosofía escrita para la enseñanza de la matemática".

En segundo lugar cabe mencionar el Seminario de Investigación Matemática (Sidim) impartido en el Colegio de Mayagüez de la Universidad de Puerto Rico, por iniciativa de los mismos profesores de esa institución educativa. Se enfoca en el área de la matemática pura, y con tal propósito se organiza un foro anual a fin de que investigadores, maestros y estudiantes universitarios puedan compartir sus tareas más recientes en las matemáticas y ciencias de las computación. En el transcurso de sus eventos le agregaron el componente de la educación en matemática, donde se tiene la oportunidad de presentar trabajos en ese campo de investigación. El Sidim realiza cada año un congreso en algunas de las universidades de Puerto Rico, al que asisten investigadores de diversas naciones.

En tercer lugar, Puerto Rico cuenta con el Congreso de Educación y Pensamiento Crítico, reconocido a nivel internacional como uno de los más importantes eventos educativos de Latinoamérica. Durante más de una década han asistido y/o impartido ponencias, conferencias magistrales y talleres decenas de profesores e investigadores educadores en matemática, preocupados por promover la reflexión crítica y creativa en la formación de docentes con nuevas ideas y estrategias educativas.

También se debe reconocer el Congreso de Investigación en la Universidad de Puerto Rico en Río Piedras. Se origina en 1987 por iniciativa de varios profesores del Departamento de Estudios Graduados y el Centro de Investigaciones Educativas de la Facultad de Educación. A través de los años el congreso se ha convertido en una de las actividades medulares de ese centro, y ha continuado expandiendo su alcance al entorno educativo nacional. Además de proveer un foro para las investigaciones que se realizan en Puerto Rico, el Congreso es un espacio para el intercambio de ideas con invitados de Latinoamérica, Estados Unidos y Europa.

En cuanto a las publicaciones, se pueden mencionar: *Arista*, de la cual se realizaron dos ediciones y luego dio lugar a su nueva versión, *Arista Virtual*; *Cuaderno de Investigación en la Educación* de la Universidad de Puerto Rico, con amplio contenido en materia de educación, donde tienen cabida temas de matemática educativa; la *Revista de Investigación 360°*, publicada por la Universidad Interamericana de Ponce. No se han identificado otras revistas impresas o digitales en el área de educación en matemática; sin embargo en los últimos años han surgido diversos blogs y páginas web con enfoques educativos, algunos de los cuales incluyen temas y referencias a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

A manera de conclusión

Desde el inicio se señaló el carácter introductorio de este artículo, en el cual buscaba presentar una especie de panorama y una invitación para profundizar cada una de las áreas analizadas. En este apartado de conclusiones no deben perderse de vista diversos factores que provocan algunos de los problemas detectados; me refiero a los factores de carácter social, político y económico; a los aspectos curriculares, la dependencia política y académica-administrativa, que sin duda se vinculan a la formación del docente y al aprendizaje de los estudiantes.

La aplicación y pruebas estandarizadas de desempeño educativo en Puerto Rico, como los de PISA en 2012; las aplicaciones de las pruebas nacionales y otras evaluaciones comparativas como la Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP), que consiste en una serie de pruebas estandarizadas, ponen al país ante un reto. Éstas develan el estado de la educación matemática que requiere de intervenciones y revisiones profundas del aparato educativo. Es necesario explorar nuevas alternativas, lo cual implica enormes esfuerzos en los componentes políticos de Estado y esfuerzos conceptuales en materia de educación e investigación. Existen experiencias en diferentes países que pueden ser de mucha utilidad para superar esos retos.

Referencias

Consejo de Educación de Puerto Rico (2014). Panorama del Sector Educativo en Puerto Rico. Disponible en: http://www2.pr.gov/agencias/cepr/inicio/publicaciones/Documents/Presentaciones%20CEPR/Panorama%20del%20Sector%20Educativo%20en%20Puerto%20Rico%20Jaime%20Calderon%20Soto%20PhD%20 2014%20CEPR.pdf

Departamento de Educación de Puerto Rico (2003). *Marco Curricular del Programa de Matemáticas*. Disponibe en: http://educon.uprm.edu/formularios/marcos-curriculares/marco-matematicas.pdf

Hernández Rodríguez, O. (2014). Análisis de los títulos de las tesis, proyectos y disertaciones del Departamento de Estudios Graduados con temas de educación matemática. En N. Lucca Irizarry (ed.), *Los primeros 50 años del Departamento de Estudios Graduados de la Facultad de Educación de la Universidad de Puerto Rico* (pp. 59-74). San Juan, Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico.

Quintero, A. H. (2014). *Hacia un plan educacional de Puerto Rico*: *retos y posibilidades*. San Juan, PR: Publicaciones Puertorriqueñas. Rico Romero, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1).

Rosario, H., McGee, D., López, J. M., Quintero, A. H. y Hernández, O. A. (2014). Puerto Rico: The Forging of a National Identity in Mathematics Education. En Héctor Rosario, Patrick Scott y Bruce Vogeli (eds.). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. Singapur: World Scientific, 381-404.

Ruiz Kuilan, G. (2014). Pruebas internacionales revelan que los conocimientos de los estudiantes son inferiores a los de países subdesarrollados y a Estados Unidos. Disponible en: Elnuevodia.com, edición del 24 de septiembre de 2014.

Universia Puerto Rico (2010). ¿Cuánto contribuye la educación superior en Puerto Rico a la educación de hispanos en EEUU? Disponible en: http://noticias.universia.pr/en-portada/noticia/2010/06/16/271914/contribuye-educacion-superior-puerto-rico-educacion-hispanos-eeuu.html

Ying Chan, J., Lemanky, N., Perkins, R., Kastberg, D. y Roey, S. (2014). PISA 2012. Performance of Puerto Rico 15-Year-Old Students in Mathematics, Science, and Reading Literacy in an International Context (draft). Disponible en: http://abrepr.org/sites/default/files/PISA%20Draft.pdf

Venezuela

Perspectivas de la educación matemática en Venezuela para el siglo XXI

Yolanda Serres

Introducción

La educación matemática es una disciplina científica joven: en Venezuela hace poco más de medio siglo que se ha gestado un movimiento hacia su estudio, el cual tiende más hacia el uso de las metodologías con que se abordan las ciencias sociales que a las usuales para el estudio de las ciencias fácticas y las propias matemáticas, pues el carácter social de la educación es innegable. La educación matemática estudia los aprendizajes y la enseñanza de las matemáticas en sociedades con características particulares, bajo condiciones sociales que forman parte de los objetos de estudio de la disciplina. Bajo esta perspectiva, también interesa a una ciencia social plantear e intentar resolver problemas sociales que, en el caso de la educación matemática, impacten el sistema educativo de un país.

De manera que este ensayo tratará sobre qué se ha investigado en Venezuela y cómo han impactado estos estudios en el sistema educativo venezolano, para esbozar una perspectiva de la disciplina en el siglo XXI. Cabe destacar que la mayoría de ellos han sido hechos por docentes universitarios en centros o grupos de investigación, o bien de manera individual. Algunos comenzaron como tesis, para luego conformarse como líneas de investigación, a saber:

1. Educación matemática crítica.
2. Análisis de libros de texto.
3. Formación docente.

4. Uso de las tecnologías de información y comunicación en la educación matemática.
5. Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS).
6. Historia social de la educación matemática.
7. Dominio afectivo en la educación matemática.
8. Educación matemática en la educación especial.
9. Modelación matemática.
10. Educación matemática realista.

A continuación detallaremos lo que ha sido el desarrollo de cada una de estas líneas de investigación en lo que va del presente siglo.

Una visión de la educación matemática crítica venezolana

La educación matemática crítica ha sido estudiada principalmente por el Grupo de Investigación y Difusión de las Matemáticas (Gidem), creado en la Universidad Central de Venezuela (UCV) a finales del siglo pasado, siendo su mayor aporte servir de fundamento pedagógico a los libros de matemática de la Colección Bicentenario, editados y distribuidos gratuitamente en las escuelas públicas por el Ministerio del Poder Popular para la Educación (MPPE) desde 2012 en el nivel de educación primaria, y desde 2013 en educación secundaria. A partir de 2014 este grupo también apoya el Programa Nacional de Formación de Docentes de Educación Secundaria, cuyo soporte de trabajo son estos libros de texto, cuyo principio pedagógico rector es la formación de la ciudadanía.

Para el Gidem hay que pasar del triángulo didáctico a un modelo didáctico complejo que desarrolle el aprendizaje y la enseñanza (Mora, 2005) orientado por la realidad, el trabajo y la investigación; deberá tener en consideración otros lugares de aprendizaje, el desarrollo de la matemática realista crítica, teorías recientes sobre el aprendizaje y la enseñanza, y los avances de la neurodidáctica; además deberá inclinarse por la construcción de una concepción crítica y liberadora de la educación, vinculada con las contradicciones reales y las experiencias concretas de los docentes en servicio. Algunos de los principios de la educación matemática crítica en la sociedad venezolana son los siguientes (Mora, 2005; Serrano, 2009):

1. Los contenidos a desarrollar son matemáticos e interdisciplinarios, pues se vincula la matemática escolar con la realidad y con otras disciplinas del conocimiento.
2. Las comunidades de aprendizaje son escolares y extraescolares. El aula de matemáticas es un ambiente de investigación, donde se crean grupos de discusión multidisciplinares.
3. La comunicación es una fuente para la discusión de ideas, para la participación, la crítica y la actividad del grupo. Es necesaria la participación activa del estudiante para abordar la complejidad cultural y social.
4. Las matemáticas son concebidas desde una visión sociocultural y abordan temas que atienden las necesidades reales de una comunidad, así como el entorno regional, nacional y mundial, donde las matemáticas juegan un papel importante para su comprensión.

A partir de estos principios el estudio de la matemática trasciende los conceptos, procesos y resultados de la matemática para ir hacia los usos de la matemática por otras disciplinas, así como su real vinculación con la cotidianidad; en tal sentido es fundamental que el docente tenga una actitud crítica, conciencia, conocimientos y cultura general para trabajar la matemática en su relación con el resto de las disciplinas, tanto de las ciencias básicas como de las ciencias sociales; entre los estudiantes es deseable el interés y las actitudes para apropiarse de la matemática como herramienta que permite analizar situaciones y tomar decisiones basadas en el conocimiento. Por ejemplo, la actividad sociomatemática de un joven venezolano debe producir aprendizajes para entender la sociedad consumista que se quiere superar, para tener conciencia ambiental y salvar la especie humana, para lograr la soberanía política y económica que orienta el Plan de la Patria (Ministerio del Poder Popular de Planificación, 2012). Por otra parte, las universidades formadoras de docentes también deben repensar su currículo para que sus estudiantes vinculen la matemática con la realidad y sirva de instrumento en la toma de decisiones; de esta forma se dejará de escuchar la frecuente frase *la matemática está en todo*, pero a la hora de planificar actividades de aprendizaje las mismas carecen de significado y poco o nada tienen que ver con la realidad de los estudiantes, los docentes y la comunidad donde se desarrolla la educación matemática.

La educación matemática en Venezuela según los libros de texto

El mayor exponente nacional del estudio de los libros de texto ha sido el investigador Walter Beyer (2009), cuya tesis sobre el "Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969" abrió un camino para estas investigaciones en el país, siendo seguidoras de esta línea sus tesistas Wendy Bolívar (2007), con su trabajo de grado "Análisis de textos primarios: la obra de Boris Bossio Vivas", y Mariana Ramírez (2011), quien abordó la obra de Bruño en su trabajo de grado sobre el "Análisis histórico de libros de texto de matemáticas: la enseñanza de la aritmética en Venezuela a través de los libros de Bruño". En nuestros días, Beyer desarrolla una investigación sobre la obra de Aurelio Baldor, autor del libro más popular sobre álgebra, que responde a una perspectiva pedagógica tradicional, algorítmica y mecanicista que nada tiene que ver con las perspectivas actuales de formar a los jóvenes para la ciudadanía, ni cumple con uno de los objetivos más importantes de la educación matemática como es desarrollar la capacidad de resolver problemas, y mucho menos utilizando las TICs.

En su trabajo, Beyer logró catalogar y analizar la producción de obras didácticas de matemáticas elementales producidas en Venezuela entre 1826, cuando se publica la primera obra en el país, y 1969, año en que se introduce la matemática moderna. Esto lo hace estableciendo los contextos de la producción y caracterizando la evolución de la educación matemática en periodos. Construye inventarios de las obras, uno para las producidas en el país y otro para las extranjeras. Los contextos más importantes que logra caracterizar, en nuestra opinión, son los del currículum y de las matemáticas escolares, así como el de las distintas corrientes de pensamiento.

Para Beyer (2009) la primera obra didáctica de matemáticas, nacional o nacionalizada, previa a la reedición en Caracas, es *Lecciones de Aritmética* de Lucas María Romero y Serrano. El inventario –construido entre textos nacionales y nacionalizados– contiene 245 obras, con bastante exactitud lo editado en el siglo XIX y con un poco menos de precisión lo concerniente al siglo XX. Aquí el investigador diferencia cinco épocas. Para el inventario de autores extranjeros se tienen 137 obras, incluyendo un lote que llegó en la época de la colonia e incorporando aquellas de nivel universitario.

En su mayoría estas obras eran copia, paráfrasis o extracto de algunas ya existentes, privando la idea de que había que emular las obras elaboradas en otros países, negando el pensamiento libertario de Simón Rodríguez, maestro de Bolívar, en su principio de "inventamos o erramos", y respondiendo a un servilismo cultural (Beyer, 2009).

También señala Beyer que la introducción de nuevos métodos y concepciones educativas es pobre en el periodo de estudio, debido a la escasez de docentes y a su baja formación. En cuanto a la relación de la matemática con la realidad, dice que en la mayoría de las obras analizadas (independientemente del origen) se presentaban situaciones ficticias y lo que denomina "problemas vestidos", pues el contexto de los problemas obedecía a una realidad ficticia, con datos y situaciones irreales; igualmente cuando se trataba de nacionalizar una obra extranjera se hacían retoques cambiando las unidades monetarias u otros datos que convertían una situación real en un "problema vestido".

En esta misma línea, Ramírez (2011) estudió la obra de Bruño, seudónimo institucional adoptado por los Hermanos de las Escuelas Cristianas (HEC), autor de diversas obras escolares producidas tanto en Francia como en otros países, y empleado en la enseñanza de las matemáticas escolares en Venezuela; el presente estudio se restringe al periodo 1900-1969, complementando así la investigación de Beyer en 2009. Este estudio encuentra que la obra de Bruño es utilizada en Venezuela desde un año antes de la llegada de los HEC en 1913, empleándose para la enseñanza de la aritmética, el álgebra y la geometría; aunque la misma incluye todas las áreas de la matemática y ofrece manuales para los distintos niveles académicos. En 1946 parte de esta obra es editada en Venezuela, gozando de aprobación oficial para su uso en la enseñanza pública de cursos elementales, medio y superior. También se encontraron ediciones de esta obra provenientes de Argentina, Colombia, México y España.

Los contenidos de los libros de aritmética, los que específicamente se analizan en este estudio, tienen un nivel más alto y extenso con respecto a los de los programas oficiales de la época (programas de 1926, 1940 y 1944); algunas de sus características coinciden con las de los programas, como la enseñanza cíclica, el énfasis en el cálculo mental y la discriminación por casos. Según este estudio, las características más resaltantes de la matemática escolar en Venezuela durante buena parte del siglo XX son: *1)* presencia de enseñanza concéntrica o cíclica. *2)* Insistencia en la resolución de abundantes ejercicios y problemas. *3)* Presentación de algunos tópicos discriminados por casos. *4)* Intentos por vincular algunos temas con la realidad, aunque la mayoría de las veces se cae en el uso de elementos que la simulan, lo cual en el caso de los problemas conduce a lo que Beyer considera "problemas vestidos". *5)* Presencia de propuestas didácticas que insistían en el cálculo mental. *6)* Escasa presencia de la geometría. *7)* Estructuración de la enseñanza pasando de lo particular a lo general y de lo concreto a lo abstracto. *8)* Matemática centrada en la aritmética (Ramírez, 2011).

La formación del docente de matemática en Venezuela

Venezuela participó en el CANP 2012, la escuela seminario internacional Construcción de Capacidades en Matemáticas y Educación Matemática, organizado por la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) y celebrado en Costa Rica, donde un equipo de docentes de tres universidades nacionales desarrollaron un informe sobre la formación inicial y continua de los maestros de matemática en el país. El resultado más importante del CANP Costa Rica 2012 fue la fundación de la Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe, que busca potenciar las capacidades en las matemáticas y la educación matemática en la región (http:/redumatematicacyc.net). La red inicia su trabajo con el apoyo de varias organizaciones internacionales y ya cuenta con el respaldo de diversas sociedades de educadores matemáticos de la región, entre ellas el Comité Interamericano de Educación Matemática (Ciaem).

En el informe sobre formación inicial y continua del docente de matemática en Venezuela (León *et al.*, 2013) se plantea que existen fortalezas y debilidades en la formación, y que entre las primeras se tiene:

1. Formulación de políticas públicas sobre formación docente: actualmente están en ejecución por parte del Estado venezolano proyectos como el Canaima, además de Leer y Libres –creados para la dotación de computadores y textos escolares para educación primaria y media, respectivamente–; ambos financiados, desarrollados e implementados a través de diversos organismos oficiales; se trata de proyectos que deberán repercutir en el desempeño de los docentes y de los estudiantes.
2. Existencia de estudios de posgrado a nivel de especialización y maestría en Educación Matemática y unidades de investigación, así como un doctorado reciente en el área.
3. Existencia de organizaciones que agrupan a los docentes de matemáticas, como la Asovemat, que realizan un sostenido esfuerzo para

superar la problemática de la formación docente en el país mediante un trabajo continuo a escala regional y nacional.

4. El reconocimiento por parte del Estado de la necesidad de investigar acerca de la formación docente. La existencia de normas legales y programas como la Ley Orgánica de Ciencia, Tecnología e Innovación y el Programa de Estímulo a la Innovación e Investigación, mediante los cuales es posible la financiación de investigaciones y proyectos, particularmente en el área de formación docente.

Las debilidades identificadas en la formación del docente en Matemáticas son:

1. Poca relación entre el Estado y las instituciones de formación docente: existe una marcada desvinculación entre los entes normativos y planificadores del Estado venezolano y las instituciones formadoras de profesores, llegando en ocasiones incluso a haber confrontaciones entre estas instancias; en especial, es ya tradicional la marcada falta de sincronía entre los cambios curriculares, promovidos por los entes gubernamentales e implantados en los niveles primario y medio de la educación, y las modificaciones curriculares gestadas en las instituciones formadoras de docentes.
2. Estructura curricular de los programas de formación docente: los currículos para la formación de docentes especialistas en matemáticas, en su gran mayoría, datan de mediados de la década de 1990, y han quedado a la zaga con respecto a los conocimientos actuales e investigaciones en educación matemática.
3. Condiciones laborales: el nivel salarial del docente en ejercicio lo obliga a saturarse de horas de clase y dispone de escaso tiempo para dedicarlo a su formación continua, por ello es fundamental incentivarlo para la realización de cursos de mejoramiento y/o postgrados mediante la posibilidad de cambiar su clasificación y así tener un mayor salario.
4. Déficit de docentes de matemáticas: se conoce la existencia de un profundo déficit de docentes en el área para el nivel medio de la educación; sin embargo, se ha constatado la carencia de estadísticas nacionales confiables que permitan determinar de manera cuantitativa las necesidades en materia de formación docente más allá de lo publicado

> en la prensa venezolana. Esta situación tiende a agravarse, ya que la matrícula estudiantil en las carreras de formación del profesorado para la enseñanza media tiende a disminuir.

En este contexto, las principales amenazas provienen de la posibilidad de que muchos de los problemas actuales aumenten de magnitud si no se toman a tiempo los correctivos necesarios. Además, como los problemas no sólo son de orden cuantitativo, se corre el peligro de que se mejoren las cifras mas no la calidad de la formación docente, o incluso que esta carencia se agudice si no se toman las acciones idóneas.

Luego de considerar las fortalezas y debilidades en la formación del docente de matemática, *León et al*. (2013) concluyen que entre los principales desafíos para la comunidad de educadores matemáticos en Venezuela destacan: *a)* recolectar estadísticas confiables para hacer un diagnóstico más acertado acerca del déficit de docentes y otros parámetros; *b)* determinar con precisión las carencias en la formación actual de los docentes venezolanos; *c)* estimular la incorporación de más bachilleres al estudio de carreras docentes, particularmente la del profesorado para la enseñanza media; *d)* promover una renovación profunda de los currículos de formación docente, de modo que contengan un adecuado componente de didáctica de las matemáticas y cónsono con las labores a desempeñar por parte de los egresados, además de que ese currículo esté integrado de manera armónica entre sus diversos componentes; *e)* promover mecanismos eficientes para la formación continua del profesorado; *f)* contribuir a disminuir el desfase entre las reformas educativas y los cambios necesarios en la formación docente, y *g)* producir materiales adecuados que contribuyan al mejoramiento de la formación docente e incorporar al profesorado a proyectos de investigación, innovación y elaboración de materiales didácticos.

El uso de las tecnologías de información y comunicación en la educación matemática venezolana

En la Universidad del Zulia existe el Grupo de Tecnologías en Educación Matemática (TEM), el cual desarrolla actividades de aprendizaje mediante el uso del software libre GeoGebra, además de impulsar la creación de clubes GeoGebra en los liceos públicos de cinco municipios del estado de Zulia, y con miras de extenderlo a todo el país.

Como se puede ver en su página web [http://www.aprenderenred.com.ve], este grupo ofrece talleres y conversatorios orientados a la reflexión, elaboración y validación de recursos didácticos mediante la tecnología y el software libre GeoGebra, con miras a impactar las prácticas docentes en los niveles de educación primaria y media con base en el trabajo con objetos matemáticos contenidos en los programas oficiales. Por ahora ofrecen talleres sobre construcción de figuras geométricas y enseñanza de las funciones del programa GeoGebra.

Desde 2012 el Grupo TEM ha diseñado secuencias de análisis de las transformaciones geométricas de diferentes funciones apoyadas en el uso del GeoGebra, con el propósito de discutir la integración de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas con los docentes en servicio, y buscar una mejor comprensión del tópico en relación directa con el uso de la tecnología.

Para la función afín han analizado los efectos provocados por la variación de los parámetros de aquélla sobre su representación gráfica, los cambios en la pendiente y la traslación que experimentan las familias de rectas mediante la herramienta "deslizador" en GeoGebra (Cervantes *et al.*, 2012).

El análisis de las funciones cuadráticas incluye los efectos experimentados por las familias de parábolas al deformarse, trasladarse y reflejarse, lo cual GeoGebra permite visualizar e identificar al relacionar los cambios experimentados por las parábolas, también mediante la herramienta "deslizador" , y de esta manera poder llevar a cabo el análisis (Gutiérrez *et al.*, 2012).

En el caso de la función exponencial natural, la secuencia analiza las transformaciones geométricas denominadas deformación y reflexión, experimentadas por la curva al variar el parámetro a en la expresión $f(x)=e^{ax}$ (Castillo *et al.*, 2013).

La implementación de estas secuencias ha mejorado el razonamiento matemático de los docentes, colocándolos en condiciones más favorables para promover aprendizajes significativos en sus estudiantes.

Otros de los recursos que ha desarrollado este grupo mediante GeoGebra y relacionados con la trigonometría son los siguientes:

- La creación del círculo trigonométrico para estudiar las razones trigonométricas, el cual analiza en particular los signos de las razones seno, coseno y tangente, con lo cual se dota de sentido las reglas prácticas memorizadas por la mayoría de los estudiantes y que aparecen en los libros; además permite al estudiante identificar los ángulos

para los cuales la tangente es una indeterminación (Díaz y Prieto, en prensa).
- Un recurso para estudiar la secante y la cosecante a través de la relación de proporcionalidad inversa, el cual resulta de más difícil comprensión en un entorno estático. Con la creación de este recurso se relacionaron los conceptos de razones trigonométricas y de inversión en el plano, lo cual facilita la comprensión de las características de la secante y cosecante de un ángulo (Montero *et al.*, en prensa).

Se espera que el trabajo del grupo TEM sirva de base para generar conocimientos sobre cómo aprenden los docentes en servicio y cómo transforman sus prácticas mediante el uso de una tecnología que estimula el desarrollo del razonamiento matemático. También se prevé, a largo plazo, que los docentes de la Universidad de Zulia nucleados en torno del grupo –quienes ya han modificado sus prácticas docentes en la universidad al incluir el uso de tecnologías en sus clases–, impacten el currículo de la formación inicial de los docentes que egresarán de esa universidad. Un primer impacto está presente en sus propias prácticas; sin embargo, sería deseable que también pudiera apreciarse en los programas de estudio y en los materiales instruccionales con que se forman los profesores en dicha institución universitaria. Sería muy positivo que ese ejemplo se siguiera en otras universidades, en particular la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), principal formadora de maestros en Venezuela, a través de los cursos impartidos por el Grupo TEM en diversos eventos de educación matemática realizados a nivel estatal y nacional.

Las líneas de trabajo del Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM)

El NIEM del Instituto Pedagógico de Maracay (Ipmar), institución asociada a la UPEL, fue creado en 2003, y sus investigadores e investigadoras han desarrollado varias líneas de trabajo (Arrieche, 2007), entre las que destacan:

1. Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de las matemáticas.
2. Historia social de la educación matemática.
3. Dominio afectivo en educación matemática.

Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de las matemáticas

Es una línea dirigida por Mario Arrieche, cuya base son las nociones teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática de Godino, quien a su vez adopta la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos del conocimiento matemático para tratar de articular en un sistema coherente las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a partir de la adopción de nociones semióticas como enfoque integrador. Desde 2002, Arrieche ha dirigido numerosos trabajos bajo esta línea, entre ellos los de Martínez (2009, 2012) sobre configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado.

Historia social de la educación matemática

Es la línea de investigación dirigida por Fredy González; quien junto con Malizia (2013) ha estudiado el desarrollo de la disciplina a través de los programas de posgrado; así, de 1974 a la fecha se han abierto en total 21 posgrados que abarcan los tres niveles: especialización, maestría y doctorado. Los estudios se realizan en ocho sedes donde se practica la enseñanza de las matemáticas; ocho programas orientados hacia la matemática como ciencia exacta; dos especializaciones en didáctica de las matemáticas y dos en educación matemática, lo cual abarca, de hecho, casi toda la geografía nacional. Todos los programas son ofrecidos por instituciones públicas de educación superior, con excepción de una especialización. Existe una cierta variedad en la denominación que podría indicar carencia de identidad, pues no se asume el nombre de educación matemática con la excepción de dos programas. Por otra parte, estos investigadores encontraron que existen diez líneas de investigación cuyos nombres específicos mencionan la educación matemática, impulsando dentro de ella investigaciones relacionadas con ambientes y recursos didácticos, concepciones epistemológicas, perspectivas de la neurociencia, evaluación de los aprendizajes, axiología, tecnología e historia.

Dominio afectivo en educación matemática (DAEM)

Es una línea propuesta por Oswaldo Martínez (2007), que ha producido un conjunto de trabajos donde se aborda el efecto de creencias, sentimientos, emociones y actitudes hacia la matemática para el éxito o fracaso de los estudiantes o de sus maestros en el desarrollo de los procesos de enseñanza, aprendizaje o evaluación de los conocimientos matemáticos; por ejemplo, se ha hecho una caracterización y aplicación de los juegos didácticos en el currículo de matemáticas. Además, en el marco de este trabajo se diseñan manuales sustentados en la "matemágica", definida por Martínez como actividades lúdicas conformadas por una secuencia de actuaciones concatenadas y que permiten enseñar conocimientos matemáticos de manera dinámica y activa, mediante situaciones de carácter asombroso, sorprendente o maravilloso.

Y recientemente se ha iniciado un trabajo sobre educación especial encabezado por Angélica Martínez y Hugo Parra, del Ipmar y de la Universidad de Zulia, respectivamente, cuyo objetivo es dar a conocer los aportes de la educación matemática a la atención de las personas con necesidades educativas especiales y/o personas con discapacidad; gracias a este trabajo la Asociación Venezolana de Educación Matemática (Asovemat) organiza el Segundo Encuentro de Educación Matemática y Educación Especial en Venezuela, a celebrarse este año. En ese encuentro se resaltará la necesidad de la creación de cursos dirigidos a docentes de matemática para la atención a la diversidad, considerando las potencialidades individuales de los estudiantes de manera que éstas se desarrollen al máximo; también se propiciará el uso de recursos didácticos asociados a las TIC, en la enseñanza de la matemática, entre otros aspectos (Asovemat, 2014).

Otro hecho destacado para la educación matemática venezolana, y que tuvo lugar en el Ipmar es la apertura del primer doctorado específico en Educación Matemática del país, sueño de toda la comunidad nacional de educadores matemáticos y consolidado gracias al esfuerzo del colega Fredy González (Beyer, 2010). La primera cohorte de este doctorado cuenta con 10 inscritos procedentes de varias ciudades del país, quienes comenzaron estudios formales en 2014.

El perfil de egreso de este doctorado plantea que quienes culminen dispongan de la capacidad para (González, 2014):

1. Evaluar e investigar problemáticas vinculadas con los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, aportando con ello resultados teóricos o empíricos, inéditos, originales y/o novedosos que coadyuven al desarrollo de la educación matemática como disciplina científica.

2. Proponer y validar innovaciones didácticas con mediación tecnológica que hagan viable la superación de los problemas confrontados en las aulas de clase de matemáticas en los diversos niveles de la educación venezolana, tomando en cuenta los contextos económico, social, histórico, cultural y político del país.
3. Trabajar en forma autónoma e interdependiente en la generación de nuevos conocimientos en el campo de la educación matemática.
4. Proponer teorías y modelos que describan, expliquen y mejoren la realidad de la organización y funcionamiento de la educación matemática como disciplina científica en Venezuela.

Modelación matemática

En Venezuela, la modelación matemática como estrategia de enseñanza ha sido estudiada principalmente por José Ortiz (2002), en su tesis sobre "Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación", en la cual abordó las competencias didácticas utilizadas por los docentes en su formación inicial para diseñar actividades didácticas y sus actitudes hacia un programa de formación denominado Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal (MCA). En esa línea de trabajo lo siguieron sus tesistas Ángela Mora (2014), con "Modelización, recursos tecnológicos y planificación de la enseñanza en la formación inicial de profesores de matemática", quien estudió la integración de la modelización y los recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática en el contexto de la Universidad de Los Andes, Táchira. A su vez, Arnaldo Mendible estudia la modelización matemática en la formación de ingenieros. Mendible y Ortiz (2007) abordaron la importancia del contexto en la modelización matemática en el área de ingeniería. Ellos plantean que el proceso de modelización posee dos sentidos: de la realidad al modelo y viceversa; y que la adecuación del proceso viene dada por la descripción, explicación y predicción del fenómeno real que se modela. Asimismo han definido que la contextualización ocurre en dos momentos, llamados contextualización previa y contextualización posterior; en esta última resaltan el uso de las aplicaciones con fines didácticos, pues toda vez que el modelo existe se usa para corroborar datos, de ahí la importancia de la adecuada contextualización por parte del docente para expresar la situación problemática asociada al modelo. Por último, plantean que un buen modelo, producto del diseño, está acompañado de la situación que lo generó, del contexto específico; resaltando también la importancia de una actitud crítica en la enseñanza de la matemática que permita abordar una realidad compleja.

De manera que para trabajar con la modelización matemática como estrategia de enseñanza también es necesario un docente con una actitud crítica, que pueda hacer contextualizaciones adecuadas a la realidad compleja, lo cual requiere de conocimientos y de cultura que van más allá de las aulas universitarias formadoras de docentes.

Educación matemática y realidad en Venezuela

La educación matemática realista es otro tema de interés para los investigadores venezolanos, lo cual se refleja en los trabajos de Martín Andonegui y de Ana Cecilia Rojas; esta última impartió la conferencia inaugural del último Congreso Venezolano de Educación Matemática (Covem) en 2013, titulada “La matemática en la vida y la matemática escolar”, producto de su tesis. A su vez, y con este mismo enfoque, Andonegui desarrolló en 2006 una serie de libros de texto de primaria para las escuelas Fe y Alegría (http://www.feyalegria.org/es). La serie se tituló “Desarrollo del pensamiento matemático” y los libros versaron sobres temas como divisibilidad, fracciones, razones y proporciones. En ellos se pueden encontrar situaciones referidas a deportes, geografía, sistemas de transporte colectivo, alimentación, precios y costos de bienes y servicios, así como aspectos de historia de las matemáticas. Andonegui (2004) señala que la educación matemática tiene un carácter interdisciplinario, necesario para atender la complejidad de las situaciones reales y contribuir con la formación de la ciudadanía.

En su conferencia para el VIII Covem, Rojas comparó la matemática en la vida con la matemática escolar, y subrayó la necesidad de modificar los programas para enfatizar los usos del conocimiento matemático en la escuela y fuera de ella, así como la necesidad de transformar la preparación de los docentes del área hacia una visión más amplia del quehacer matemático y científico en general, y con una mayor capacidad de innovación y creatividad. Con tales herramientas la investigadora espera que la educación matemática permita mejorar la calidad de vida (Rojas, en prensa).

Sobre esta temática también existen en Venezuela las colecciones de fascículos de difusión de las matemáticas distribuidos los domingos en un diario de circulación nacional, entre 2004 y 2006, cuyos títulos fueron *Matemática para todos* (2004), dirigido a la escuela primaria y compuesto por 13 fascículos; *El mundo de la matemática* (2004), dirigida a la escuela secundaria y conformada por 23 fascículos; *Matemática Maravillosa* (2006), dirigida a estudiantes de los últimos años de bachillerato, educación técnica y preuniversitaria, compuesta por 30 fascículos. Todos fueron escritos por especialistas de distintas universidades y financiados por una empresa privada; todavía pueden conseguirse las colecciones en carpetas bajo el mismo nombre, como material de apoyo para los docentes. La colección *Matemática para todos* incluye temas de geometría, medidas, números y gráficos, probabilidad y estadística; *El mundo de la matemática* abarca temas como sucesiones y modelos matemáticos, álgebra, estadística y gráficos, y además pueden encontrarse aplicaciones para ciencias, tecnología, ingeniería, economía, arte y música (Fundación Polar, 2004b); *Matemática Maravillosa* vincula la matemática con las artes, la arquitectura y la ingeniería. Estas colecciones se caracterizan por presentar los temas de una forma sencilla y atractiva, pues utilizan recursos gráficos para ilustrar los conceptos y procedimientos, además de ponerlos en relación con la vida cotidiana y conectarlos con otras áreas del saber, como la física, la química, la geografía y la economía (Fundación Polar, 2006).

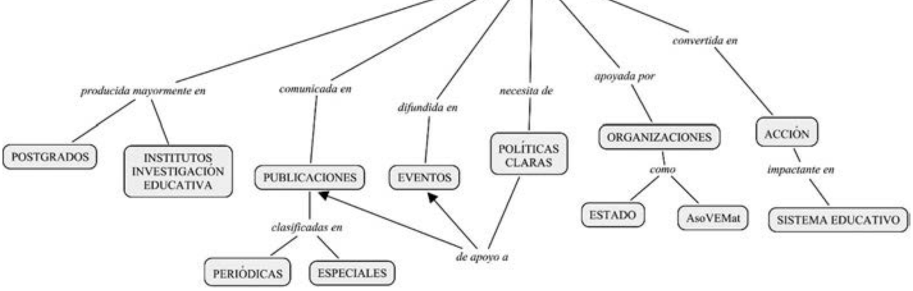
Conclusiones

La educación matemática venezolana en el siglo XXI tiene muchos retos, ya sea en su desarrollo teórico y aportes a la disciplina, o en relación con la práctica y su organización en tanto comunidad científica. Así, los contextos prioritarios para investigar en Venezuela están relacionados con la educación media general, formación inicial y continua de los docentes de matemática, y de formación para ingenieros y técnicos superiores. Para ello deben utilizarse las nuevas tendencias de investigación en didáctica de las matemáticas, e incluso en algunos temas precisos: *1)* aspectos epistemológicos de los objetos matemáticos puestos en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática; *2)* conocimiento matemático y didáctico del docente; *3)* análisis cognitivo y didáctico de los objetos matemáticos; *4)* currículo de matemáticas; *5)* evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; *6)* uso de software educativo y calculadora graficadora; *7)* análisis semiótico y didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas y de los libros de textos (Arrieche, 2007); estos materiales pueden aportar al avance teórico de la disciplina visto desde la puesta en práctica.

En relación con el avance de la comunidad científica en educación matemática, su desarrollo debería sustentarse en la investigación, los estudios de posgrado, las publicaciones, los eventos y las organizaciones. Estos cinco componentes deberían funcionar de manera sistémica, a partir de una dinámica e interacción que les permita fortalecerse de manera recíproca (Beyer, 2013); de ahí que puedan plantearse los escenarios mostrados en la Tabla 1 para la educación matemática en Venezuela.

Otro componente necesario para lograr un desarrollo autónomo de la disciplina, y así lo propone Beyer (2013), consiste en incentivar que la investigación se transforme en investigación-acción; es decir, que deje de ser pasiva y, más allá de difundirse en publicaciones especiales y en eventos, se convierta en palanca de acción para las políticas educativas de los ministerios y entes encargados de la educación en el país. La creación de una red de investigación como la propuesta por Beyer, en colaboración entre universidades, el Estado y la Asovemat, es un sueño de vieja data que sería necesario aterrizar en acciones específicas, mediante un plan de trabajo concreto que integre las actividades de los grupos de investigación y de los investigadores independientes, como se indica en la Figura 1.

Figura 1.



Fuente: elaboración propia, con el uso del software Cmap.

Tabla 1. Escenarios de la educación matemática en Venezuela (Beyer, 2013).

ESCENARIOS	CARACTERÍSTICAS
Pesimista, de persistir –y aún acrecentarse– muchas de las debilidades presentes en el desarrollo de la comunidad.	Mantenimiento o incremento de la brecha entre los avances cuantitativos y los cualitativos. Prevalecimiento del *statu quo* de muchas de las maestrías, de no formarse una generación de relevo. Continuación de la ausencia de un órgano regular de difusión propio de la comunidad. Prevalencia del trabajo individual de los investigadores. Ausencia de una interrelación orgánica entre los diferentes grupos de investigación existentes. Falta de atención a las necesidades del ámbito escolar en los aspectos de currículum, formación docente y elaboración de materiales didácticos acordes con las necesidades.
Mantenimiento del *statu quo*, avance en términos cuantitativos, sin consolidación en el orden cualitativo.	Crecimiento con falta de consolidación. Se entiende por avances cualitativos no sólo aquellos que pueden apreciarse en términos de productos de investigación o en la calidad de los posgrados, sino aquellos mediante los cuales los educadores matemáticos, más allá de ser reconocidos dentro del ámbito académico nacional o internacional, formen una verdadera red nacional de investigadores e incidan, de manera determinante, en la realidad educativa del país. Sería una especie de “estado estacionario”.
Desarrollo autónomo y apoyado lo más posible en las fuerzas internas, para que ello revierta en consolidación.	Redimensionamiento de la Asovemat, con sólida y activa presencia de docentes de educación primaria y secundaria. Una política de la Asociación que garantice la salida regular de la revista *Enseñanza de la Matemática*. Reactivar la edición de los boletines; además de una política nacional de organización de eventos. En el campo de la investigación, urge establecer una estructura organizativa que vaya más allá de la que poseen las universidades e institutos similares. Establecer una sólida red de investigación que mantuviese un estrecho nexo con la redefinición de buena parte de las maestrías existentes, además de servir para afianzar las nacientes experiencias en estudios a nivel doctoral.

Fuente: elaboración propia.

Referencias

Andonegui, M. (2004). Interdisciplinariedad y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. *Educere* 8(26), 301-308. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35602602

Arrieche, M. (2007). ¿Qué se investiga en educación matemática? Perspectiva de un investigador en desarrollo. *Paradigma* XXVIII(2), 227-243.

Asovemat (2014). Tríptico del II Encuentro Nacional de Educación Matemática y Educación Especial. Maturín, Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Beyer, W. (2009). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969*. (Tesis doctoral no publicada.) Caracas: Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación.

Beyer, W. (2010). Senderos, caminos y encrucijadas de las matemáticas y de la educación matemática en Venezuela. *Revista UNION*, 23, 15-44.

Castillo, L., Gutiérrez, R., Prieto, J. (2013). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x)=e^{ax}$ usando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2(2),81- 92.

Cervantes, A., Prieto, J., Luque, R., López, N. (2012). Relaciones entre la variación de parámetros y los efectos geométricos en la función afín: una propuesta de análisis con GeoGebra. Comunicación Breve. *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*. Montevideo.

Ministerio del Poder Popular de Planificación. República Bolivariana de Venezuela. (2012). *Programa de la Patria. Insumo para el debate*. Disponible en http://www.mppp.gob.ve/wp-content/uploads/2013/11/Plan-de-la-Nacion-2013-2019.pdf

Díaz, S. y Prieto, J. (en prensa). El análisis de los signos de las razones trigonométricas con tecnología. Una manera de trascender las reglas prácticas. *Memorias del VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática*. Santa Ana de Coro.

Fundación Polar. (2004a) *Matemática para todos*. Caracas.

Fundación Polar. (2004b) *El mundo de la matemática*. Caracas.

Fundación Polar. (2006) *Matemática Maravillosa*. Caracas.

González, F. (2014). Historia social de la educación matemática en Iberoamérica: notas históricas acerca del doctorado en educación matemática de Venezuela. *Revista UNION*, 39, 171-184.

Gutiérrez, R., Prieto, J., Araujo, Y. (2012). Una secuencia para analizar los efectos geométricos relacionados con la función cuadrática utilizando GeoGebra. Comunicación Breve. *Conferencia Latinoamericana de GeoGebra*. Montevideo.

León, N., Beyer, W., Serres, Y. e Iglesias, M. (2013). Informe sobre la formación inicial y continua del docente de Matemática: Venezuela. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 8, Número especial, noviembre. Disponible en: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1281

Malizia, S., González, F. (2013). Factores condicionantes del desarrollo de la Educación Matemática como campo científico en Venezuela: 1975-2007. *Revista UNION* 36, 165-177.

Martínez, A. (2009) Configuraciones epistémicas hindu-árabes de la ecuación de segundo grado. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1237-1244. México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez, A. (2012) Configuraciones epistémicas de la ecuación de segundo grado en la antigua civilización china. En Flores, R. (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 85-94.

Martínez, O. (2007). Semblanza de la línea de investigación Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma* XXVIII(1), 237-252.

Mendible, A., Ortiz, J. (2007). Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. *Enseñanza de la Matemática* 12-16. Número extraordinario, 133-150.

Montero, J., Wettel, L., Prieto, J. (en prensa). El estudio de la secante y cosecante de un ángulo por medio de la inversión: una propuesta de interpretación geométrica con GeoGebra. *Memorias del VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática*. Santa Ana de Coro.

Mora, C. D. (2005). Didáctica crítica y educación crítica de las matemáticas. En Mora, C.D. (ed.). *Didáctica crítica, Educación crítica de las matemáticas y etnomatemáticas. Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina.* La Paz: Campo Iris.

Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Evaluación de un programa de formación*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. Disponibe en: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalles/5500/

Ramírez, M. (2011). *Análisis histórico de libros de texto de matemáticas: la enseñanza de la aritmética en Venezuela a través de los libros de Bruño*. (Trabajo Especial de Grado no publicado.) Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas.

Rojas, A. (en prensa). La matemática en la vida y la matemática escolar. Conferencia Central. *Memorias* del *VIII Congreso Venezolano de Educación Matemática*. Santa Ana de Coro.

Serrano, W. (2009). *La educación matemática crítica en el contexto de la sociedad venezolana: hacia su filosofía y praxis*. (Tesis doctoral no publicada). Caracas: Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación.

Serres, Y. (2004). Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 7(1), 79-108.

Conclusiones

La educación matemática en el siglo XXI: Conclusiones del presente y futuro

Patricia Camarena Gallardo
Instituto Politécnico Nacional, México

Introducción

En el presente capítulo, y tomando en cuenta lo abordado por los investigadores de cada país, se consigna lo más relevante sobre el impacto de la educación matemática y su futuro en el siglo XXI. De entrada se puede decir que, a grandes rasgos, en los anteriores apartados se ha descrito lo que se entiende por educación matemática en cada nación; desde luego, cada arista de este concepto se aborda con diferentes ponderaciones con base en la visión de los autores, y en la medida en que son representantes de cada país por su contribución al desarrollo científico de esta área del conocimiento: la educación matemática.

La mirada sobre la educación matemática incluye desde el origen de los cursos en matemáticas, es decir, desde la época de la conquista como el caso del capítulo dedicado a Brasil –donde se describen los inicios de la educación en ese país–, y en particular, en las escuelas de ingeniería donde se impartían cursos de matemáticas con gran injerencia de los portugueses y de la literatura en francés.

Otra vertiente sobre la educación matemática es cómo se vive la matemática en el sistema educativo de cada país. También se aborda cómo es la formación de los docentes de matemáticas, elemento introducido con diferente intensidad por los autores. Además se incide en la investigación en educación matemática, es decir, cómo se genera y qué temáticas se tratan, con lo cual se caracteriza la educación matemática como una disciplina científica. En la parte final del capítulo se exponen los retos para cada una de esas temáticas, así como la agenda pendiente en el estudio sobre educación matemática, con el propósito de ofrecer una perspectiva acerca del futuro de esta ciencia.

Impulso a la educación matemática

Además de las revisiones globales que se abordan en el presente capítulo, es importante mencionar algunos investigadores e investigadoras que han sido los pilares para impulsar la educación matemática como área científica. En Brasil, María Salett menciona a Julio César de Mello y Euclides Roxo como los precursores de la educación matemática en ese país; también a Martha de Souza Dantas, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes y Ubiratan D'Ambrósio, quienes han fortalecido la educación matemática brasileña desde la década de 1960, cuando iniciaron la formación de los primeros grupos de estudio e investigación en dicha área de conocimiento.

En México, los pioneros iniciadores de esta disciplina científica son Eugenio Filloy Yagüe y Carlos Imaz Jahnke, pues trazaron las directrices y coordinaron las investigaciones en educación matemática que se realizan en el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México (Cinvestav-IPN) desde 1970, y donde más tarde se abrió el posgrado en el área de educación matemática (Filloy, 2006).

Los autores del capítulo sobre educación matemática en España, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz citan a Pedro Puig Adam como el primer promotor de la didáctica matemática como sistema de conocimientos, procedimientos y actitudes profesionales necesarios para el docente a mediados del siglo XX.

Por su parte, Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita se refieren a Uldarico Malaspina Jurado como uno de los principales responsables del desarrollo de la educación matemática en Perú durante las últimas décadas, en tanto fundador y director del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM, por sus siglas en francés: Institut de Recherche sour l'Enseignement des Mathematiques) con sede en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP).

Es menester decir que al término educación matemática como área de conocimiento se le conoce en España como didáctica de la matemática y en México como matemática educativa, aunque este último término no está generalizado en todo el territorio nacional.

Otro factor importante para el impulso y fortalecimiento de la educación matemática son las agrupaciones nacionales e internacionales de investigadores y docentes en matemáticas constituidos a lo largo del tiempo, y que hoy en día impulsan de manera significativa la educación matemática no sólo en cada país, sino a escala internacional, entre ellos el Comité Interamericano de Educación Matemática (Ciaem), creado en 1961, o la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI).

La educación matemática en el sistema educativo

En relación con la educación matemática en los sistemas educativos, es interesante observar la gran cantidad de coincidencias identificadas en cada texto escrito para el presente libro. Entre los elementos comunes a todos los países se observa que los responsables del diseño curricular y la postura pedagógica en la educación básica son los respectivos gobiernos, con poca injerencia de los investigadores en educación matemática. Mientras en los niveles universitarios la situación es diversa; en el caso de México cada institución define sus modelos académicos, planes y programas de estudio. En Puerto Rico, según comenta Orlando Planchart, el Departamento de Educación Pública del país delinea las políticas para educación en matemática para nivel preescolar, elemental, secundaria y medio superior (bachillerato).

Sistemas masivos de evaluación en matemáticas

Desde la cúpula gubernamental de los diferentes países, la urgencia por una mejor formación ciudadana desde edades tempranas genera sistemas masivos de evaluación nacional y se permite la entrada de exámenes internacionales. Es el caso de las pruebas diseñadas por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y conocidas como PISA, *Programme for International Student Assessment*, con lo cual se ponen sobre la mesa estándares globales para evaluar la educación y donde el foco de atención en nuestra disciplina está en el uso de herramientas matemáticas para la vida cotidiana. Cuando se habla del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) un referente obligado son los estudios que ha realizado el doctor Luis Rico Romero, cuyos aportes y críticas permiten valorar este programa.

En el caso de España, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz detallan con más precisión el impacto de evaluaciones internacionales, y describen que los resultados de estas pruebas arrojan que los estudiantes de primaria y secundaria de ese país destacan en determinados procedimientos matemáticos y adolecen de competencia en otros; asimismo, que existen notables diferencias entre los alumnos con mayores dificultades y los más avanzados, concluyendo que los primeros deben ser atendidos y los segundos deben ser ayudados para sentirse integrados en el entorno escolar.

Injerencia de los educadores matemáticos en el sistema educativo
Esta urgencia y necesidad por preparar a los estudiantes para una mejor calidad de vida da origen a cambios en los modelos educativos para la educación básica en diversas naciones. Cabe mencionar que en países como España, Costa Rica y México se trabaja con el concepto de competencias.

En el caso de la educación matemática, actualmente, hay injerencia en asesorías a los gobiernos, pero pocos son aquellos en que el diseño o coordinación de proyectos macro se a otorgado a educadores matemáticos. En este sentido, un caso especial es Costa Rica, donde un grupo de investigadores en educación matemática –coordinado por el doctor Ángel Ruiz Zúñiga– diseña e implementa el Proyecto de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, el cual se aprueba en 2012 e incide en un nuevo currículo de matemáticas para la educación primaria y secundaria. Se trata de un cambio radical desde el currículo, la didáctica y la preparación de los profesores. El nuevo currículo asume como enfoque principal la construcción de capacidades cognitivas superiores por medio de la resolución de problemas, con especial énfasis en contextos reales. En esta interesante propuesta se identifican resultados y posturas pedagógicas de las investigaciones en educación matemática, situación que hace más rica, sólida e interesante la propuesta. Ángel Ruiz menciona que debido a la profundidad en los cambios del nuevo currículo y la preparación docente, el proyecto cuenta con un plan de transición para una implementación gradual de los nuevos programas de estudio.

Por su lado, Fidel Oteiza declara que la Sociedad Chilena de Educación Matemática incubó el proceso de reforma educativa de Chile desde la década de 1990.

Apoyo tangencial de los educadores matemáticos al sistema educativo
Como los investigadores educativos en matemáticas pocas veces tienen injerencia en los modelos educativos del país, entonces abordan proyectos

específicos con los cuales puedan incidir de forma tangencial en los estudiantes. Un ejemplo muy interesante al respecto es Brasil, y en ese sentido María Salett detalla que para mejorar la enseñanza de matemáticas se realizan actividades extracurriculares, entre las que se encuentra el Programa de la Feria de Matemática, iniciado en 1985. De hecho, este programa funciona porque la docencia toma un vuelco hacia la pareja docencia-investigación, la cual se refleja en las llamadas Ferias. La Feria de cada escuela conduce a una Red de Ferias de Matemáticas configurada a través de las ferias de la escuela, del municipio, de la región, del estado y la nacional. Con ellas se pretende apoyar la enseñanza y el aprendizaje de matemática, así como la alfabetización científica, ya que ahí se exponen los proyectos de investigación desarrollados por los estudiantes. La autora del capítulo sobre Brasil comenta que este proceso ha involucrado a muchos actores, pero no ha sido suficiente ante la dimensión geográfica del país.

Un elemento a resaltar es que la Red de Ferias de Matemáticas fortalece el aprendizaje de esta ciencia y combate la fobia a la matemática, según afirma María Salett. De hecho, es conocido el fenómeno sobre la aversión latente hacia esta disciplina en prácticamente todos los países del mundo. Ángel Ruiz de Costa Rica la denomina *matefobia*, y la autora de estas líneas considera la matemática como la pastilla amarga que los estudiantes tienen que tragar.

Política educativa del país y el ambiente de aprendizaje

También es necesario mencionar que se identifica una queja por parte de los autores respecto de que hay buenas intenciones de los gobiernos para tener una educación de frontera en el área de la matemática; sin embargo, el problema es que los lineamientos de los sistemas educativos no siempre llegan hasta el ambiente de aprendizaje. Esta situación se genera por múltiples razones: los docentes desconocen las normas; no hay elementos claros de cómo incorporarlas en el ambiente de aprendizaje; los profesores carecen de la formación adecuada para ejercer estos lineamientos en el salón de clases (ambiente de aprendizaje), e incluso ver que los cambios pedagógicos solicitados requieren de esfuerzo adicional por parte del maestro de educación básica, quien no dispone de tiempo, ni de la remuneración para el trabajo adicional que debe realizar para implementar los cambios.

Al respecto, Fidel Oteiza afirma que en Chile existe un vacío operativo y conceptual entre el nivel en que se formula la política pública, el currículo nacional y la sala de clases donde esas políticas y el currículo deberían ser puestos en práctica. A su vez, Yolanda Serres declara que en Venezuela el bajo salario del docente del nivel básico lo obliga a saturarse de horas de clase, de ahí que escasamente disponga de tiempo para dedicar a su formación continua. En Costa Rica hay un número inadecuado de horas contacto en el aula, lo cual deja pocos espacios a la superación profesional, asegura Ángel Ruiz. En Puerto Rico, según afirma Orlando Planchart, la educación matemática se ve muy bien en los documentos que prepara el Departamento de Educación Pública; sin embargo, éstos no llegan al maestro porque no se da el seguimiento efectivo; en lugar de seguir esas pautas que le dictan, el docente permanece con viejos moldes y mucha rigidez. Ángel Ruiz identifica que los programas de estudio de Costa Rica para el periodo 2001-2005 tenían una fuerte inconsistencia entre lo enunciado en los fundamentos teóricos y lo planteado realmente en la malla curricular, y por ello carecían de una estrategia para la acción de aula. Por su lado, María Salett menciona que los documentos oficiales de Brasil dictan que la enseñanza sea de forma interdisciplinar y contextualizada, a fin de que los estudiantes adquieran conocimiento y habilidad en aplicarlos fuera de los límites escolares; no obstante, eso ha quedado sólo en papel porque no hay cambios en la enseñanza y el aprendizaje de la mayoría de las escuelas de educación básica; entre las causas se encuentra la poca disponibilidad de los profesores, tal vez por falta de costumbre o por la formación inicial de que disponen. La autora de estas conclusiones piensa que los lineamientos de la Secretaría de Educación Pública de México están acordes a la política educativa internacional para el nivel superior; pero, cuando esos lineamientos llegan al sector directivo de las instituciones de educación superior difícilmente son adoptados por la comunidad docente de matemáticas.

Influencia de otros países en el sistema educativo

Un factor que ha venido a reforzar los proyectos académicos en sistemas educativos es la influencia de las experiencias de otros países, situación que es analizada ampliamente por Fidel Oteiza. Afirma que Chile ha advertido influencias significativas de las experiencias de varios países, en particular de Australia, mediante un modelo para la formulación de estándares de aprendizaje denominados Mapas de Progreso; los métodos de planificación de la clase de matemática tienen la influencia de Japón; mientras algunos textos de estudio se deben a Singapur. El autor del capítulo sobre Chile menciona que tales influencias han permitido que el currículo de matemática de ese país se acerque de manera gradual a los estándares internacionales. Por su lado, Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita detallan que en modelos educativos del Perú en los que se han realizado cambios, se pudo identificar que esas modificaciones han sido tomadas de sistemas originales de otros países.

Es importante hacer hincapié en que estas influencias no siempre han resultado ser todo lo positivo que se esperaba de ellas, y a la distancia se han detectado problemáticas originadas por ellas. Tal es el ejemplo de la introducción de la *matemática formal* desde los niveles básicos, que en algunos casos fue denominada *matemática moderna*. Este fenómeno, que empezó a implantarse en el sistema educativo de muchos países entre las décadas de 1960 y 1970, cobra especial importancia porque deja de lado la vinculación de la matemática con problemas de la vida real, un factor que en nuestros días es valorado sobremanera por los modelos constructivistas. Una secuela que ha dejado el cambio a una matemática formal es que sigue vigente hasta el día de hoy y no se ha podido erradicar, a decir de algunos autores. Mas cabe señalar que el hecho de decir que sigue vigente es una expresión de tipo estadístico, pues en la mayoría de casos así es, lo cual también implica la existencia de profesores entusiastas, que han estado haciendo su mejor esfuerzo para realizar cambios en su práctica docente –y eso incluye incorporar algunos resultados de investigaciones en educación matemática y tratar de seguir los lineamientos actuales de la política educativa de su país.

Enfoques deseados para la matemática en el sistema educativo

Por otro lado, es importante mencionar que existe un sentir común respecto de los enfoques que deben persistir en matemáticas para la educación básica. Fidel Oteiza afirma que en Chile los nuevos lineamientos apuntan al desarrollo del pensamiento matemático, la resolución de problemas, la argumentación y la demostración, los aprendizajes contextualizados, la modelización y el uso de las tecnologías de la información. Para el caso de Costa Rica, Ángel Ruiz enfatiza sobre la construcción de capacidades cognitivas superiores, donde el aprendizaje debe centrarse en el uso de las matemáticas para describir, comprender y actuar en diversos contextos de su realidad, ya sean personales, físicos, sociales o culturales. Para María Salett, el foco principal de la educación básica en Brasil consiste en desarrollar las potencialidades de los estudiantes para buscar, seleccionar y analizar información requerida para su preparación, y aprender a aplicar los conocimientos para crear o actuar en función del bien común.

Por otro lado, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz comentan que en España cada una de las reformas educativas implementadas ha incorporado cambios con el propósito de que la escuela proporcione un entrenamiento intelectual, social y profesionalmente útil para los escolares, de tal modo que les prepare para participar de la cultura y formar parte la sociedad de cada momento.

Yolanda Serres y Patricia Camarena, entre otros, consideran la importancia de la modelación matemática, en tanto que permite al estudiante actuar sobre contextos reales, y que actualmente se trabaja en ese tema. Resulta innegable que una matemática contextualizada, el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de un pensamiento matemático y el uso de la tecnología como mediadora del aprendizaje son factores imprescindibles no sólo para la educación básica, sino para toda la educación del ser humano, elemento señalado por la mayor parte de los autores de este libro, ya sea de forma explícita o implícita.

La tecnología en el sistema educativo

El tema de la incorporación de la tecnología digital como mediadora del aprendizaje toma especial énfasis en el siglo XXI, pues dichos recursos han desplazado a prácticamente cualquier otro tipo de material de apoyo didáctico. Cabe aclarar que nos referimos a tecnología electrónica, y no a la tecnología educativa vigente hasta la década de 1970.

La importancia de ese tema para el ámbito educativo ha llevado incorporar en este libro un capítulo dedicado a la tecnología y su uso en la enseñanza de las matemáticas. El ensayo fue escrito por el doctor Luz Manuel Santos-Trigo, la persona con más reconocimiento en educación matemática ante el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México. El investigador induce a reflexiones profundas sobre el tema: "La existencia de herramientas digitales que pueden realizar cálculos y procedimientos matemáticos plantea la discusión de si los estudiantes deben seguir dedicándole tiempo y atención al dominio de esas tareas. Se sugiere que los estudiantes ahora se puedan centrar en la discusión del significado de las ideas matemáticas involucradas en los procedimientos y resultados y también buscar formas creativas de resolver los problemas".

Manuel Santos-Trigo afirma que la tecnología no solamente permea las maneras de interactuar de los individuos, también es una herramienta que faculta a la persona para desarrollar, comprender y usar el conocimiento disciplinario. En consecuencia, el mismo proceso de desarrollo tecnológico en la sociedad contemporánea demanda necesariamente ajustes significativos en los sistemas de educación. Además, considera imprescindible resaltar que la apropiación de la cultura digital debe motivar que tanto el profesor como los estudiantes sean conscientes de los cambios generados por el empleo de las herramientas tecnológicas.

Por otro lado, es conocido el hecho de que la tecnología digital permite al estudiante aprender a su propio ritmo y en función del tiempo disponible, ya que puede avanzar como desee y retroceder cuando lo necesite. El uso de la tecnología como mediadora del aprendizaje requiere de la preparación de los docentes para saber cómo y cuándo emplear diversas herramientas. Dicho de otra forma, el uso de la tecnología en el ambiente de aprendizaje es un reto vigente y constituye una oportunidad para la agenda de investigación en educación matemática. Las entidades internacionales como la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), o bien la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), han destacado la necesidad de incorporar la tecnología en el sistema educativo de cada país.

Los gobiernos y las instancias oficiales de educación de cada país, en general, son sensibles a esta incorporación de la tecnología, lo cual ha llevado al diseño de programas específicos para incluir el uso de computadoras y software en las actividades de enseñanza.

La introducción de esa tecnología en el nivel básico se establece en México a partir de 2006, mediante el Programa Enciclomedia, una estrategia educativa basada en la digitalización de libros de texto vinculados a diversos recursos y materiales multimedia, con miras a generar procesos formativos de mayor calidad; para ello se utilizan e integran materiales de los libros de texto gratuitos y se les vincula con imágenes, mapas, recorridos virtuales, videos, audios, y actividades interactivas que complementan los contenidos de las lecciones (SEP, 2011).

En el caso de Chile, Fidel Oteiza detalla que el proyecto nacional para la incorporación de tecnologías digitales en la educación ha preparado a miles de docentes para agregar esas herramientas en sus prácticas, pero eso no es suficiente y queda mucho espacio por recorrer. Para el caso de Venezuela, Yolanda Serres señala que el Grupo de Tecnologías en Educación Matemática de la Universidad del Zulia, desde 2012 ha diseñado secuencias de análisis de las transformaciones geométricas de diferentes funciones apoyadas con el uso del software GeoGebra, con el propósito de discutir la integración de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas con los docentes en servicio, y buscar una mejor comprensión del tópico en relación directa con el uso de la tecnología.

Por su lado, Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita discurren sobre el hecho de que en 2011 –como parte del programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú– se creó un grupo de trabajo sobre tecnologías y educación matemática, el cual tiene como objetivo principal propiciar un espacio de discusión sobre la mediación de ambientes tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas; es decir, una reflexión teórica de algunos enfoques que cimentan el uso de la tecnología informática en la clase de matemáticas, y cómo el buen uso de ella trae como resultado otra manera de enseñar y aprender matemática. En particular, el grupo estudia la influencia del uso de la tecnología en la educación básica en relación con temas de geometría, mediante el uso de programas de geometría dinámica como Cabri y GeoGebra. Ángel Ruiz enfatiza sobre el uso de plataformas tecnológicas educativas para la actualización de docentes, un aspecto que no puede dejarse de lado entre los usos de la tecnología en el siglo XXI; la reforma en el currículo escolar de matemáticas en Costa Rica, al igual que cualquier reforma educativa, ha requerido de la preparación de los docentes, y la actualización mediante cursos virtuales ha sido el camino idóneo para tal efecto.

La formación docente en matemáticas

Aunado a las acciones de transformación de la educación matemática en los sistemas educativos, se debe destacar el tema de la formación de los docentes, de lo contrario los cambios realizados en la educación, en cualquier sentido, no podrán tener el éxito deseado y el fracaso será inminente, un factor que se analiza a continuación.

Diferencias en la formación docente en matemáticas

La formación docente en matemáticas se identifica de manera diferenciada entre el nivel elemental, la educación media y el nivel universitario. En España, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz describen que los maestros de primaria tienen una preparación psicopedagógica general importante, y si bien se les da una formación específica en matemáticas y didáctica, éstas resultan insuficientes, mientras los profesores de secundaria cuentan con un adistramiento matemático bien asentado, mas poco adecuado para la enseñanza.

En el capítulo dedicado a México, se menciona que en el nivel medio superior la planta docente está formada por profesionistas de diversas áreas que imparten cursos de matemáticas si su profesión es "afín" a la materia, pero la gran mayoría no tiene formación para la docencia. Para la educación de nivel superior los matemáticos "puros" constituyen cerca de 20% del total de docentes responsables de impartir las clases de matemáticas en las profesiones no matemáticas de las universidades, sin tener una formación para la docencia; el resto de los docentes de matemáticas son personas formadas en la misma profesión en que laboran o egresados de licenciaturas afines a las que trabajan; es decir, carecen de formación didáctica matemática.

Carencias en los docentes de matemáticas

Un elemento de preocupación común son las carencias identificadas respecto de la formación docente y su impacto en la actividad de enseñanza. Así, Yolanda Serres discurre sobre los currículos para la formación de docentes en matemática en Venezuela, que en su gran mayoría datan de mediados de la década de 1990 y han quedado a la zaga en relación a los conocimientos actuales y las recientes investigaciones en educación matemática. A su vez, Fidel Oteiza escribe que las políticas educativas actuales en Chile han permitido cambios profundos en el currículo nacional y, además, han tenido cierto impacto en los programas de formación inicial docente; sin embargo, han generado poco cambio en la manera en que se organiza y se realiza la clase de matemáticas.

Por su lado, Patricia Camarena identifica que los docentes transmiten sus deficiencias a sus estudiantes, lo cual constituye un elemento fundamental para investigaciones sobre el diseño de los programas de formación y actualización docente para México. Para Puerto Rico, Orlando Planchart destaca la ausencia de instituciones que preparen para impartir educación matemática *per se*, y que ello tiene lugar dentro del programa de pedagogía de las universidades, con una formación general, y luego los estudiantes lo adaptan a la asignatura correspondiente.

En el caso de España, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz declaran que la formación específica en didáctica de la matemática ha mejorado con la creación de una maestría impartida con miras a dedicarse a la enseñanza; sin embargo, aún se identifican vacíos importantes; además, la formación del profesorado de matemáticas en educación secundaria se desarrolló hasta 2010 fundamentalmente en las facultades de ciencias. Las colegas de Perú, Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita, indican que en la práctica se encuentran evidencias de la presencia de un modelo conductista muy arraigado en los planes de formación de profesores, y en particular en la formación de maestros de nivel primario y para matemáticas de nivel secundario; también mencionan que las deficiencias docentes han cambiado en los últimos años, mediante la implantación de programas de perfeccionamiento docente y estudios de maestría en educación, en particular de maestrías en enseñanza de las matemáticas.

Por su lado, Ángel Ruiz no habla de insuficiencias, sino describe con entusiasmo cómo el Programa de Reforma Educativa en Matemáticas de Costa Rica ha implementado la actualización de los docentes a través de una capacitación bimodal, donde los cursos son semi-presenciales. Es decir, compuestos de sesiones presenciales y trabajo realizado por medio de una plataforma tecnológica educativa; también menciona que la capacitación bimodal se ha transformado en virtual, y que esa experiencia ha empezado a crear una cultura nueva en la forma de actualizar a los maestros en ejercicio de la docencia.

Pero además de las deficiencias identificadas para los docentes, hay dos elementos que es necesario mencionar. El primero vino a desvirtuar la enseñanza de la matemática para quienes no serían profesionales de la matemática; esto es, la introducción de la *matemática formal* también tuvo consecuencias en los programas de formación docente. Para Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz la enseñanza de un alto nivel de formación matemática formal en los programas de formación docente impulsa una educación matemática desligada de la formación didáctica en matemáticas. A su vez, María Salett considera que tal situación de la matemática formal durante la década de 1960 produjo un método de enseñanza basado en una teoría que se limita a presentar definiciones, propiedades y reglas sin relación mutua, y así extiende la línea divisoria entre conocimiento teórico y práctico.

El segundo elemento se refiere a la calidad de vida del docente como profesional de la enseñanza. No se puede perder de vista la situación social, psicológica y económica de los profesores; es decir, el reconocimiento de la profesionalización de la carrera de maestro y, en consecuencia, su calidad de la vida. Este factor es analizado a profundidad por Fidel Oteiza, pues a partir de una interesante postura filosófica crítica asegura que, durante la década de 1980, el hecho de haber decretado en Chile que la pedagogía no se consideraba carrera universitaria tuvo un efecto negativo en la profesión docente, y hasta el día de hoy no ha dejado de afectar la calidad del sistema de educación nacional en general, y a la profesión docente en particular. Enfatiza que se trata de una situación muy distinta a lo que se observa en nuestros días, donde una institución dedicada a las acciones formativas se encuentra íntimamente relacionada con algún centro de investigación de alto nivel y con un reconocido programa de estudios doctorales, con varios años de producción académica.

Apertura del posgrado en educación matemática

Ante la preocupación provocada por procesos de una formación "deficiente" entre los profesionales de la enseñanza, se vislumbra una luz con la apertura de programas de investigación y posgrados en el área de educación matemática. Los estudios de maestría en Didáctica de la Matemática empezaron a impartirse en España en 1988, y en ese mismo año dio inicio el programa de doctorado en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. En México, en 1975 se inicia la maestría y en 1992 el doctorado en Educación Matemática del Cinvestav-IPN. En Venezuela también se cuenta con estudios de postgrado a nivel de especialización y maestría en Educación Matemática, así como un doctorado en esa área, el cual inició sus actividades en 2014. En Perú, la maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú fue creada en 1980, y en esa misma década fueron iniciados los programas de posgrado en Educación Matemática en universidades de Brasil.

La investigación en educación matemática

La investigación en educación matemática ha venido a dar cuerpo a está área, caracterizándola como disciplina científica. Esta ciencia, aunque ha contado con algunas investigaciones desde el siglo XIX, sólo hasta la década de 1980 se le caracteriza como un área más de conocimiento, cuyas líneas de investigación se dibujan en cada país de acuerdo con sus necesidades, intereses y programas de posgrado en la disciplina. La creación de estudios de posgrado en educación matemática conlleva el ingrediente de la investigación, lo que habilita a los docentes a incursionar en estudios para apoyar de forma objetiva su práctica docente.

La educación matemática como disciplina científica
María Salett afirma que en la década de 1960 se inicia en Brasil la formación de grupos de investigación en educación matemática, área que logra consolidarse dos décadas después, en especial mediante la creación de programas de posgrado en educación matemática. Por su lado, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz señalan que si bien desde mediados del siglo XX se inician las investigaciones en didáctica de la matemática, es hasta mediados de la década de 1980 que se reconoció esa área de trabajo como disciplina científica en la universidad española.

En tanto área científica, la educación matemática permite orientar y diseñar de forma metodológica el currículo de matemáticas para todos los niveles del sistema educativo: tanto los planes y programas de estudio de la formación inicial y continua, como el posgrado de los profesores de matemáticas de cualquier nivel educativo y cualquier profesión. La educación matemática guía la práctica docente en matemáticas a través de propuestas didácticas, de la reflexión constante sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza, de un catálogo de investigaciones sobre los contenidos curriculares de matemáticas, pero también respecto de procesos metodológicos para el diseño y uso de tecnología como mediadora del aprendizaje de la matemática.

De esta forma inicia el reconocimiento de la sociedad hacia los educadores matemáticos como profesionales de la docencia, lo que puede identificarse mediante anuncios en los periódicos que demandan específicamente los servicios de educadores matemáticos. En ese sentido cabe señalar que, para el caso de España, los colegas Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz mencionan que a principios del nuevo siglo se consolida la presencia del investigador en didáctica de la matemática como una profesión con opciones reales de trabajo.

Este reconocimiento de la educación matemática como disciplina científica conlleva una gran responsabilidad del gremio de los educadores matemáticos, ya que su injerencia en el sistema educativo de cada país es un privilegio, un compromiso y una responsabilidad que no se puede dejar de lado; la tarea es mucha y los retos se amplifican desde esta perspectiva. En relación con ello, estos mismos académicos aseguran que el investigador español en didáctica de la matemática ha asumido la labor de contribuir y participar en una comunidad de expertos que trabaja para establecer conocimiento racionalmente fundado y empíricamente validado, con el que se enriquece la alfabetización matemática de sus conciudadanos, y ante todo aquellos en edad escolar. También está comprometido con el desarrollo y logro de competencias profesionales de los docentes de matemáticas para los niveles de primaria y secundaria.

La investigación en educación matemática como apoyo al sistema educativo

En el presente siglo es más evidente la contribución de la investigación en educación matemática a las labores educativas en diversos países. María Salett considera que, a partir de la consolidación de la educación matemática en la década de 1980, las investigaciones de esa área de conocimiento han tenido incidencia en las Directrices Curriculares Nacionales de Brasil, en los cursos de formación de profesores de educación matemática, y en los libros de texto y apoyo didáctico. A su vez, el macro Proyecto de Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, coordinado por Ángel Ruiz, es producto de investigaciones en el área de educación matemática.

En Perú –a decir de Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita–, desde 2011 el Grupo de Investigación en Tecnologías y Educación Matemática incide en los docentes de educación básica y secundaria. Mientras en Chile, Fidel Oteiza destaca los aportes del doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad Católica de Valparaíso y el trabajo desarrollado en el Centro de Modelamiento de la Universidad de Chile, como ejemplos de que la investigación contribuye en el presente, pero más en el futuro, al sistema educativo del país; sin embargo, los investigadores requieren de un nuevo impulso, una nueva conciencia que se traduzca en políticas de ciencia y tecnología que faciliten la relación entre esa área y la escuela, y en general al sistema nacional de educación. En Venezuela, los grupos de investigación sobre tecnologías en educación matemática desarrollan actividades de aprendizaje a partir del software libre GeoGebra, con miras a impactar las prácticas docentes en los niveles de educación primaria y educación media, declara Yolanda Serres.

Las líneas de investigación en educación matemática

En España, Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz indican que las áreas de investigación con más atención son las centradas en los cambios del currículo escolar, la didáctica de la matemática, el pensamiento numérico y la formación docente; además, la investigación en didáctica de la matemática posee fundamentos teóricos, campos de especialización, métodos propios, problemas y tareas, las cuales han conformado un cuerpo consolidado de conocimientos teóricos, técnicos y prácticos.

La investigación en educación matemática es un tema que se aborda con más detalle en el capítulo dedicado a México. Se describe el tipo de investigaciones que se han realizado durante los pasados 20 años en relación con los niveles medio superior (bachillerato) y superior (universitario). Así, las investigaciones en educación matemática se fundamentan en teorías como los registros semióticos de representación de Duval, las situaciones didácticas de Brousseau, los campos conceptuales de Vergnaud, las funciones cognitivas de Feuerstein, y la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias de Camarena. En cuanto a las metodologías de investigación más utilizadas, destaca una general que comprende e diseño, aplicación y análisis, además de otras asociadas a fundamentaciones teóricas, como la matemática en contexto y la ingeniería didáctica. Otro punto interesante, como elemento emergente en las investigaciones de bachillerato, corresponde a los estudios críticos de los sistemas de evaluación masiva: el examen PISA o el examen único de ingreso al bachillerato; en el nivel universitario destacan las investigaciones sobre competencias matemáticas.

María Salett señala que, debido a las variaciones culturales, sociales y económicas de Brasil, se destacan tres áreas de investigación: etnomatemática, modelación matemática y tecnologías de información y comunicación. Yolanda Serres afirma que en Venezuela se trabajan diez áreas de investigación en educación matemática, y entre ellas destacan educación matemática crítica, formación docente, uso de las tecnologías de la información y la comunicación, y modelación matemática.

En relación con Puerto Rico, Orlando Planchart destaca que las temáticas de investigación que más se trabajan son la historia de la matemática y el sentido numérico, así como resolución de problemas y uso de la calculadora gráfica. Mientras en el caso de Perú, Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita indican que entre las áreas de investigación con más impacto están el uso de la tecnología en la enseñanza y en aprendizaje de geometría, desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, didáctica de la matemática y resolución de problemas. Por otro lado, las dos autoras mencionan que la investigación en educación matemática en ese país andino se encuentra en pleno desarrollo y en vías de consolidarse.

Futuro de la educación matemática: retos

Al considerar que las aristas de la educación matemática tratadas en el presente libro corresponden a la educación matemática en el sistema educativo, la formación de los docentes y la investigación en educación matemática, parece pertinente abordar aquí las reflexiones y el futuro de esos tres rubros.

Reflexiones y retos de la educación matemática en el sistema educativo

A partir del nuevo siglo se ha logrado identificar, debido a la aceptación social de los educadores matemáticos, que los gobiernos de diferentes países permiten la participación de esos nuevos profesionales en el diseño e implementación de modelos educativos para el nivel básico. La preocupación manifestada por algunos de los autores de este libro es cómo contribuir a la formación de los niños, de tal manera que la matemática esté impregnada en su ser y el desarrollo de un pensamiento matemático represente un apoyo para su vida diaria y futura. Esta pregunta, y las reflexiones sobre ella, generan otras más y constituyen, precisamente, los retos para la educación matemática en el sistema educativo para el siglo XXI.

Entre los retos más importantes destacan los planteados por Fidel Oteiza, quien señala el hecho de que contar con un solo currículo nacional y una forma de medir para todos, pone lo general y común por encima del potencial individual, las necesidades y las expectativas de cada estudiante. Tal situación permite preguntar si se trata de un factor ideal, o bien si es necesario diseñar un currículo flexible para enfrentar esas generalidades.

La reflexión de Ángel Ruiz acerca de los desafíos mayores en el sistema educativo atañe a cómo cambiar el paradigma de la enseñanza tradicional de las matemáticas que funciona a partir de esquemas mecánicos y conductistas impartidos por profesores formados para ello. Por su parte, Manuel Santos-Trigo considera que los sistemas de educación deben ser sensibles a los avances de la ciencia y la tecnología, en términos de ajustar constantemente los modelos de formación y promoción de la educación de los individuos.

Una reflexión que cabe destacar se relaciona con la formación integral de los estudiantes; es decir, pensar en ello genera cuestionamientos acerca de si los aprendizajes a nivel de conocimiento y aplicación son suficientes para lograr una formación integral, o si se requieren otros que permitan al alumno moverse en todas las esferas de su vida como una persona que puede resolver problemas reales donde la matemática no está explícita, sino que puede ser analítica, crítica y creativa (Camarena, 2013). En tal sentido, la autora de estas conclusiones señala que la estrategia didáctica de la matemática en contexto apoya la formación integral del estudiante a través de la matemática social, en tanto permite desarrollar conocimientos, habilidades, actitudes y valores en los alumnos. A su vez, María Salett menciona que un posible camino podría darse a partir de proyectos y programas de enseñanza e investigación, como el Programa de Ferias de Matemáticas. Si las propuestas de Camarena y Salett se llevaran a cabo desde la educación básica, los estudiantes universitarios tendrían menos problemas en el aprendizaje de la matemática y podrían incursionar en la modelación matemática sin tantos tropiezos, a fin de consolidar una formación integral.

Cabe mencionar que las preocupaciones de los autores están centradas sobre todo en el nivel básico, y poco se ha abordado el nivel superior o universitario. La autora de este capítulo destaca la existencia de una teoría educativa para nivel superior: "la matemática en el contexto de las ciencias" es parte de la línea de investigación de matemática social, y se realiza en los grados educativos anteriores sólo a nivel de investigación. Por otra parte, la didáctica de la matemática en contexto de la teoría no ha sido incorporada al sistema educativo de forma institucional, entre otras razones porque demanda más trabajo y preparación por parte de los docentes.

Retos en la formación del profesor de matemáticas

Fidel Oteiza declara que el reto de lograr una buena educación en una sociedad cada vez más compleja, como la nuestra, requiere de la existencia, capacidad y dedicación de los actores que hacen la educación, y de una formación actualizada y de calidad. Por su lado, Ángel Ruiz asegura que una mejora en el sistema educativo implica la necesidad de mejoras en las condiciones generales para la docencia de aula; es decir, el estatus del docente no es únicamente un asunto salarial, también se debe tomar en cuenta un tiempo de la jornada donde el profesor pueda incluir su formación continua, agenda y preparación de las lecciones, y lapsos necesarios para atender a los estudiantes fuera de clases. El mismo investigador añade que en los países con mejores sistemas educativos del mundo existe una importante fracción de la jornada del educador destinada a actividades fuera del aula, ya sea en la institución o fuera de ella; muchas de esas horas de trabajo se dedican a la planificación meticulosa de las clases, la capacitación regular y la investigación. Es más, si una profesión no es vista como competitiva: salario, estatus y condiciones laborales, será muy difícil atraer hacia ella a los mejores estudiantes. Como dice el propio Fidel Oteiza, la calidad de la vida profesional y personal del docente es un elemento rezagado del problema general de la educación matemática.

Otro reto es el identificado por Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz, y se refiere a que en el siglo XXI se requiere de expertos con información y dominio sobre la pertinencia de los aprendizajes escolares esperados, sus limitaciones, las oportunidades y retos de aprendizaje, y sobre las condiciones para el diseño de tareas matemáticas escolares. Para ello resultará imprescindible disponer de criterios validados a fin de planificar secuencias de tareas, estrategias para mejorar la gestión del trabajo escolar en el aula, diversos métodos, materiales, recursos y libros. De hecho, se requerirán formadores expertos, con mayor y más profundo conocimiento sobre las matemáticas escolares, que sean eficientes y conecten su conocimiento sobre los contenidos con su habilidad didáctica.

Como se mencionó en el capítulo sobre México, Fidel Oteiza identifica deficiencias matemáticas en los maestros que son transmitidas a sus estudiantes, lo cual constituye un reto para investigadores en relación con el diseño de los programas de formación y actualización docente. Aunado a lo anterior, si se ubica cuántas son las escuelas de educación matemática, cuántos son los especialistas productivos en esa misma área de conocimiento y con estudios superiores, podría decirse que hay necesidad de profesores altamente calificados para formar a los futuros docentes en matemáticas, y para trabajar en la convergencia de la matemática docta y la matemática escolar.

Por otro lado está el cuestionamiento sobre cómo desarrollar una cultura de actualización docente desde todos los ámbitos de competencia de la actividad de enseñanza; y en el caso particular de la segunda década del siglo XXI, un reto con más ponderación es el uso de la tecnología como mediadora de los aprendizajes o como herramienta para desarrollar ambientes de aprendizaje. Manuel Santos-Trigo dice que el uso de la tecnología en el aula requiere de la actualización de los docentes en temáticas que van desde el conocimiento de nuevas tecnologías hasta el diseño de actividades de aprendizaje con el uso de tecnologías de información y comunicación.

Agenda pendiente en investigación en educación matemática

Se ha señalado la necesidad de contar con investigaciones que apoyen el diseño de modelos educativos para el sistema educativo de diferentes países, así como el fortalecimiento de la práctica docente; esta necesidad de formar y actualizar a docentes flexibles en relación con los cambios científicos y tecnológicos de nuestros días es un reto y una oportunidad, y por ello se ubica en la agenda de temas pendientes de investigación en educación matemática.

Algunos autores de este libro han comentado la importancia y necesidad de que el docente utilice en el ambiente de aprendizaje el resultado de investigaciones realizadas en el área de educación matemática; sin embargo, también resulta imprescindible que el profesor realice investigación en el aula. Esto es abordado por Luis Rico, José Luis Lupiáñez, Isidoro Segovia y Juan Ruiz, quienes señalan que a partir del nuevo siglo se promulgaron dos leyes educativas en España, en las que se enfatizan las funciones de la investigación científica como fundamento de la docencia y herramienta para el desarrollo. Por otro lado, es sabido que el proceso metodológico denominado investigación-acción es una metodología que permite modificar en la misma acción didáctica los procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera sistemática y consciente; por lo cual debería ser parte de la formación y actualización docente.

Entre las diversas áreas de investigación en educación matemática unas tienen más peso que otras, en función de las expectativas y necesidades de los países. De igual forma, en determinados países se trabajan líneas de investigación que en otros son tomadas en cuenta de forma colateral. Por ejemplo, Yolanda Serres, declara que en Venezuela los elementos de la educación matemática que requieren de más atención para investigarse son aspectos epistemológicos de los objetos matemáticos, los conocimientos en matemáticas –y su didáctica– necesarios para la formación docente, el currículo y la evaluación de matemáticas, y el uso de la tecnología. La misma autora señala que los contextos prioritarios a ser investigados en Venezuela atañen a la educación media general, la formación continua de los docentes de matemática, y los de formación de ingenieros y técnicos superiores.

En el capítulo sobre México se menciona que los investigadores en educación matemática para los niveles medio superior y universitario tienen diferentes preferencias. En bachillerato el tema relacionado con los estudiantes cobra más fuerza, mientras en el nivel superior se le da mayor peso a las investigaciones sobre contenidos curriculares. Esto permite identificar áreas de oportunidad para la investigación en estos ciclos de estudio en México. Otra punto que requiere atención, a juzgar por la poca cantidad de estudios realizados, son investigaciones para desarrollar materiales de apoyo didáctico mediante el uso de tecnología digital, así como diseñar cursos en línea o estudios en la modalidad virtual. Asimismo, en esos mismos niveles educativos faltan investigaciones que ayuden a los profesores a incorporar en su práctica docente las políticas educativas del país.

Orlando Planchart menciona que las pruebas estandarizadas, a escala nacional e internacional, sobre los aprendizajes ponen a Puerto Rico ante un reto; en particular, son necesarias investigaciones en educación matemática que ayuden a enfrentar los rezagos identificados mediante esas evaluaciones de conjunto.

Para Brasil y Perú, María Salett, y Jesús Victoria Flores y Cecilia Gaita, respectivamente, describen la necesidad de realizar investigación para mejorar los sistemas educativos, desde la práctica docente hasta la formación de los profesores de matemáticas.

La agenda pendiente varía en función de cada país; sin embargo, de los capítulos insertos en el libro se puede mencionar –de modo general y en lo relativo a la educación matemática–, a partir de las preocupaciones, problemas y retos comunes para la mayoría de los países, que algunos temas han sido abordados de manera muy pobre, al igual que las áreas consideradas temas emergentes. Entre estos destacan, para todos los niveles educativos, investigaciones sobre una formación docente que permita al profesor tener apertura a los cambios en materia de ciencia y tecnología; cómo incorporar de forma eficiente la tecnología en el aula, y cómo desarrollar competencias para la vida, el trabajo y la profesión. En particular, para el nivel universitario se requiere investigación para evaluar los aprendizajes para que sean justos y realmente reflejen el aprendizaje del alumno.

Finalmente, en el capítulo "El aprendizaje de la geometría en el siglo XXI", Mario García Juárez, del Instituto Politécnico Nacional, presenta un caso concreto de cómo la preocupación por la didáctica de la matemática –y en particular de la geometría– busca mostrar mediante tres ejemplos que el origen de la geometría puede ser expuesto de manera asequible y clara. Este es un factor que no deberíamos olvidar, pues se encuentra muy relacionado con el enfoque de la didáctica de la matemática o matemática educativa.

Reflexiones finales

Otro factor ya analizado por algunos autores es la importancia y necesidad de establecer vínculos académicos entre grupos de investigación; es un hecho que los estudios aislados no son tan fructíferos como los realizados entre grupos de diferentes países. En nuestros días las redes de investigadores permiten potenciar los trabajos en ese sentido. También es necesario impulsar los medios para difundir el resultado de esas investigaciones. El área de educación matemática, a escala global, es una disciplina situada entre las que tienen menor número de revistas indexadas tanto en el International Scientific Indexing (ISI) como en el *Journal Citations Reports* (JCR). En consecuencia, Yolanda Serres expresa la necesidad de que los educadores en matemáticas, más allá de ser reconocidos en el ámbito académico nacional o internacional, formen una verdadera red nacional de investigadores y traten de incidir de manera determinante en la realidad educativa del país.

Para cerrar este apartado queremos presentar un elemento que lleva a la necesidad de un análisis profundo, no sólo en el ámbito de la educación matemática, sino de la educación en general, y es la reflexión de Fidel Oteiza:

Parece una paradoja, la escuela tal como la conocemos no se basa en la didáctica ni en la psicología del aprendizaje, ni en ningún otro conocimiento acerca de educación. Sorpresa: "la escuela nunca fue diseñada". En efecto, si se buscan los fundamentos que orientan el diseño "no diseñado" de la escuela, se encuentra una cantidad de razones de orden administrativo, financiero, pragmático o de costumbres, que son resultado de una larga tradición: "siempre se ha hecho así".

Bibliografía

Camarena, G.P. 2013. A 30 años de la teoría educativa "Matemática en el contexto de las ciencias". *Revista Innovación Educativa 13*(62): 17-44.

CIAEM, Comité Interamericano de Educación Matemática. S.f. Disponible en: http://www.ciaem-iacme.org

Filloy, Y. E. 2006. *Matemática educativa: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. México, Santillana.

ICMI. International Commission on Mathematical Instruction. S.f. Disponible en: http://www.mathunion.org/ICMI/

ISI, International Scientific Indexing. S.f. Disponible en: http://isindexing.com/isi

JCR, Journal Citations Reports of Thomson Reuters Web of Science. S.f. Disponible en: http://www.thomsonscientific.com/

OCDE. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. S.f. Disponible en: http://www.oecd.org

SEP, Secretaría de Educación Pública. 2011. *Estado del arte de los materiales educativos digitalizados*. México, Universidad Pedagógica Nacional / SEP.

UNESCO. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. S.f. Disponible en: http://portal.unesco.org/

Acerca de los autores

Patricia Camarena Gallardo es matemática con maestría y doctorado en ciencias en el área de educación matemática. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Conacyt de México; miembro del Consejo Mexicano de Investigación Educativa, de la Academia Mexicana de Ciencias, de la Academia de Ingeniería de México y del Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior. Es coordinadora de la Red Internacional de Investigación MaCoCiencias. Sus líneas de investigación son: didáctica de las ciencias, la tecnología electrónica en la educación, educación en ingeniería, y matemáticas aplicadas a la ingeniería. Ha sido directora de múltiples proyectos de investigación que ha generado la teoría educativa –entre ellos la matemática en el contexto de las ciencias–, además de haber creado la línea de investigación denominada matemática social. Es autora de varios libros y artículos de investigación para revistas nacionales e internacionales. Obtuvo el premio ANUIES 2000 en el rubro de mejor tesis de doctorado.

Jesús Victoria Flores Salazar. Doctora en Educación Matemática por la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil. Profesora del Departamento de Ciencias, sección Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica del Perú; se desempeña como profesora y directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en ese misma universidad. Participa en dos grupos de investigación: sobre didáctica de las matemáticas en el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas; y el de proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas en la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo. Sus áreas de interés son didáctica de las matemáticas, tecnología y educación matemática, desarrollo del pensamiento geométrico y formación de profesores.

Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre es doctora en didáctica de las matemáticas por la Universidad de Valladolid. Profesora del Departamento de Ciencias, sección Matemáticas, y de la maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Responsable del plan de estudios de la maestría en enseñanza de la matemática y de los cursos relacionados con la investigación en el campo de la didáctica de la matemática. Miembro del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú. Áreas de interés: didáctica de las matemáticas, epistemología e historia de la matemática, análisis curricular y formación de profesores de matemáticas.

Mario García Juárez estudió matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional (IPN). Su línea de investigación se ha enfocado a la didáctica del álgebra, y en especial los trabajos de J. A. Baldor y Charles H. Lehmann. Ha sido jefe de la Biblioteca del Posgrado de la Escuela Superior de Economía (ESE) del IPN y subcoordinador administrativo en el posgrado de la misma ESE. En julio de 1989 recibió el Diploma de Eficiencia y Eficacia, otorgado por reconocidos y meritorios servicios prestados al IPN. Es coordinador de la Biblioteca del Posgrado de la ESE IPN, y su interés se enfoca en divulgar sus resultados de investigaciones sobre cuestiones matemáticas de gran trascendencia en la formación integral de los educandos.

José Luis Lupiáñez es profesor titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Sus líneas prioritarias de investigación son la formación de profesores de matemáticas, la noción de competencia, y el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas, en los que reúne varios artículos y contribuciones a congresos y seminarios nacionales e internacionales. Participa en varios proyectos de investigación relacionados con la formación de profesores, y actualmente coordina el grupo de investigación sobre pensamiento numérico y algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Xicoténcatl Martínez Ruiz es doctor en filosofía por la Universidad de Lancaster; tiene la maestría en estudios de Asia, con especialidad en sánscrito, por El Colegio de México, y en filosofía por la UNAM. Fue investigador visitante en la Universidad de Madrás y en el Instituto Francés de Extremo Oriente en Pondicherry. Realizó estancias de estudio e investigación en Bazzano, en Maharashtra y en el Centre international d'études pedagogiques (CIEP) de Sèvres. Ha impartido conferencias en tres continentes. Fue profesor visitante en El Colegio de México y el Instituto de Investigaciones Dr. José María Luis Mora. Dirigió el proyecto Casa de Cultura de India en México, fundado por Octavio Paz. Es coordinador editorial en la Secretaría Académica del Instituto Politécnico Nacional, y editor responsable de la revista *Innovación Educativa*. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores del Conacyt-México; ha recibido distinciones del Indian Council for Cultural Relations (ICCR)-Embajada de la India en Argentina, así como el Mexico-Award de Lancaster. Entre sus publicaciones se encuentran artículos, capítulos de libros, traducciones del sánscrito al inglés y al español, libros y reseñas, enfocadas a la filosofía de la educación, filosofía comparada y prospectiva humanística.

Fidel Oteiza Morra es Asesor de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación de Chile en el área de educación matemática. Estudió la maestría en Educación Matemática (1970) y el doctorado en Currículo e Instrucción (1976) en la Universidad del Estado de Pennsylvania; desde 1966 ha sido profesor de matemática y física en la Universidad Católica de Chile. Sus áreas de interés profesional son educación matemática, matemática con tecnologías digitales, desarrollo curricular, formación inicial docente y uso de las tecnologías de la información en educación. En particular, el uso de las tecnologías digitales en la facilitación del aprendizaje matemático; investigaciones acerca de los factores que inciden en la formación del pensamiento matemático efectivo; diseño, desarrollo y evaluación de sistemas de aprendizaje; diseño de políticas públicas para la implantación del uso de computadores en la educación; formación en matemática, formación inicial de profesores y el desarrollo del currículum. Durante la última década fue titular de la Comisión del Ministerio de Educación responsable del Currículo Nacional de Matemática de Chile, de la que ahora es asesor.

Miguel Ángel Parra Álvarez es licenciado en Psicología social por la Universidad Autónoma Metropolitana; estudió la maestría y el doctorado en Psicología en la Universidad Nacional Autónoma de México. Ha impartido la docencia en escuelas de nivel básico, medio superior y en posgrado. Tiene experiencia en la formación de profesores en diversos niveles educativos. Participó en la Comisión de Apoyo a la Subsecretaría de Educación Media Superior para elaborar los manuales e instrumentos de evaluación para los planteles que solicitan ingresar al Sistema Nacional del Bachillerato. Se ha desempeñado como subdirector de Planeación y Evaluación en la Dirección General del Bachillerato. Actualmente es director de Innovación e Investigación Educativa en la Coordinación General de Formación e Innovación Educativa del Instituto Politécnico Nacional.

Orlando Planchart Márquez es profesor en el Departamento de Ciencias y Tecnología de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de Ponce. Estudió la licenciatura en educación matemática en la Universidad de Oriente, Venezuela; la maestría en ciencias, especialidad de matemática educativa, en el Cinvestav-IPN; y el doctorado en matemática educativa en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Ha publicado artículos sobre la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, además de impartir conferencias en Puerto Rico y otros países del Caribe. Ha publicado libros de creación literaria –dos de ellos dirigidos a niños– sobre temas relacionados con las matemáticas.

Luis Rico Romero es doctor en matemáticas y catedrático universitario en didáctica de la matemática. Su actividad profesional es la investigación y la formación de profesores de matemáticas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Es autor de 43 libros universitarios y 80 capítulos de libro. Ha sido editor de tres colecciones de monografías especializadas en educación matemática, con 68 volúmenes. Es autor o coautor de 145 artículos científicos en revistas españolas e internacionales indexadas. Su trayectoria como investigador inicia en 1970. Ha participado en 55 proyectos de investigación, evaluados en concurso público, de los cuales ha sido investigador principal en 41. Desde 1988 coordina el Grupo Interuniversitario de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento numérico, dentro del Plan Andaluz de Investigación. Ha dirigido 23 tesis doctorales en las líneas de diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas; pensamiento numérico y formación del profesorado de matemáticas. Es miembro de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada desde 1999. Es director de *PNA*, revista de investigación en didáctica de la matemática.

Ángel Ruiz Zúñiga. Matemático, filósofo y educador nacido en San José, Costa Rica. Su vida profesional incluye varios temas: historia y filosofía de las matemáticas, educación matemática, filosofía política y desarrollo social, sociología e historia de las ciencias y la tecnología, la educación superior, y la paz mundial y el progreso humano. Tiene más de 250 publicaciones académicas (entre ellas más de 35 libros); investigador, expositor, organizador, consultor, asesor en asuntos científicos, académicos, universitarios y políticos dentro y fuera de Costa Rica. Es presidente del Comité Interamericano de Educación Matemática (2007-2015), vicepresidente de la International Commission on Mathematical Instruction (2010-2016), miembro de la Commission for Developing Countries de la International Mathematical Union (2010-2018) y director general de la Red de Educación Matemática de América Central y el Caribe (2013-2017). Fungió como director de la reforma curricular de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria de Costa Rica (aprobada en 2012 por las autoridades educativas de ese país) y de su implementación para el periodo 2012-2016.

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo es profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Tras una larga experiencia como profesor de matemáticas de enseñanza secundaria, imparte clase de matemáticas a futuros maestros de educación primaria e infantil, además de ser profesor de la maestría en Didáctica de la Matemática. Compagina su actividad docente con la investigación, centrándose especialmente en la didáctica del análisis, tópico con el que ha participado en numerosos congresos nacionales e internacionales y ha publicado diversos artículos.

Maria Salett Biembengut es matemática, con maestría en educación matemática, doctorado en ingeniería y pos-doctorado en educación por las universidades de São Paulo y Nuevo México. Entre 1990 y 2010 fue profesora e investigadora en el Departamento de Matemáticas y Posgrado en Educación y Ciencias de la Universidad Regional de Blumenau. Desde 2010 colabora en la Pontificia Universidad Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), en la Facultad de Matemáticas y el Programa de Posgrado en Educación en Ciencias y Matemáticas. Fue profesora visitante en las universidades de Salamanca, Nuevo México y Columbia, así como en las universidades tecnológicas de Dresde, Lappeenranta y Tampere. Es autora de artículos en revistas especializadas y actas de congresos, siete libros y 20 capítulos de libros. Fue presidenta de la Sociedad Brasileña de Educación Matemática y del Comité Interamericano de Educación Matemática (Ciaem); está afiliada a la International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications, y es fundadora del Centro de Referencia de Modelización Matemática en la Enseñanza (Cremm).

Manuel Santos Trigo es investigador titular en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). Realizó sus estudios en física y matemáticas en el IPN, México, y de doctorado en educación matemática en la Universidad de British Columbia, Canadá, además de una estancia posdoctoral en la Universidad de Berkeley, California. Ha sido profesor invitado en varias universidades en Canadá, Estados Unidos, Francia y España. Ha sido investigador principal en varios proyectos académicos con financiamiento de distintas agencias. Su área de investigación se relaciona con el análisis de los procesos para resolución de problemas que manifiestan profesores y estudiantes en la construcción o desarrollo del pensamiento matemático; analizar las formas de razonamiento construidas o desarrolladas con el uso sistemático de herramientas digitales. Ha dirigido trece tesis de doctorado y 20 de maestría en el área de educación matemática. Ha publicado en revistas y capítulos de libros de la especialidad, así como textos en el área de resolución de problemas.

Isidoro Segovia Alex es profesor titular en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Estudió la licenciatura en matemáticas, un diplomado en estadística y un doctorado en matemáticas, con especialidad en didáctica de la matemática. Ha dirigido varias tesis doctorales en didáctica de la matemática relacionadas con la estimación en cálculo y medida, el talento matemático y la historia de la educación matemática. Ha participado en varios proyectos de investigación relacionados con el pensamiento numérico y la resolución de problemas matemáticos. Otra línea de trabajo prioritaria es la historia de la educación matemática. Participa habitualmente en congresos relacionados con sus trabajos de investigación y tiene numerosas publicaciones en diferentes revistas de su área de conocimiento. También ha publicado libros y artículos de carácter profesional.

Yolanda Serres Voisin es investigadora en el Departamento de Educación-Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (UCV).

Estudió la licenciatura en educación, orientada a matemáticas, en la UCV; es maestra en psicología cognitiva, y doctora en matemática educativa por el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del IPN. Ha desempeñado diferentes tareas en la Asociación Venezolana de Educación Matemática (AsoVEMat), entre ellas la de coeditora de la revista oficial de la asociación: *Enseñanza de la Matemática*. Es secretaria de la Junta Directiva Nacional para el periodo 2013-2016; está afiliada al Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), y desempeña diferentes tareas como parte de su Comisión Académica; es fundadora de la Red de Educación Matemática de Centroamérica y el Caribe (Redulac).

Acerca de los profesores entrevistados

Ana Helvia Quintero. Es profesora de matemáticas en la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras. Obtuvo su bachillerato en matemáticas de la Universidad de Puerto Rico, su maestría en la Universidad de California en Berkeley y su doctorado en el Massachussetts Institute of Technology (MIT). Tiene múltiples publicaciones, libros y artículos, sobre la enseñanza y el aprendizaje. También ha ofrecido conferencias sobre estos temas, en Puerto Rico, Estados Unidos y varios países de Latinoamérica.

Omar Hernández Rodríguez. Es profesor en la Universidad de Puerto Rico, Río Piedras. Obtuvo la Licenciatura en Matemáticas (Universidad Pedagógica Nacional de Colombia); la Maestría en Matemática Aplicada (Universidad de Purdue, Estados Unidos); y el Doctorado en Currículo y Enseñanza de las Matemáticas (Universidad de Puerto Rico). Ha sido director de propuestas y proyectos interdisciplinarios para mejorar el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias en Puerto Rico. Ha publicado y presentado trabajos de investigación sobre educación en matemáticas en innumerables eventos internacionales.

Joaquín Padovani. Profesor del Departamento de Matemáticas y Ciencias Aplicadas de la Universidad Interamericana de Puerto Rico, Recinto de San Germán. Ha participado en múltiples conferencias como ponente en ese país y en congresos internacionales.

La educación matemática en el siglo XXI
Coordinación Editorial de la Secretaría Académica
Secretaría Académica, 1er. piso,
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos"
Zacatenco, Del. Gustavo A. Madero, C.P. 07738
Se utilizaron tipos Adobe Carslon Pro y Agenda.
30 de septiembre de 2015.