

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

### **DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA EL CÁLCULO DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERAS**

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por la Br. Ramírez Z., Lucy M.  
para optar al Título de  
Ingeniero Electricista

Caracas, 2010

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

### **DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA EL CÁLCULO DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERAS**

Prof. Guía: Ing. Wilmer Malpica

Presentado ante la ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
por la Br. Ramírez Z., Lucy M.  
para optar al Título de  
Ingeniero Electricista

Caracas, 2010


## CONSTANCIA DE APROBACIÓN

Caracas, 04 de noviembre de 2010

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Eléctrica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el Bachiller Lucy M., Ramírez Z., titulado:

### **“DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA EL CÁLCULO DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERAS”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Electricista en la mención de Potencia, y sin que ello signifique que se hacen solidarios con las ideas expuestas por el autor, lo declaran APROBADO.

  
Prof. José Mora  
Jurado

  
Prof. Julian Pérez  
Jurado

  
Prof. Wilmer Málpica  
Prof. Guía

## DEDICATORIA

A mi niña bonita.  
Por ser mi luz y mi inspiración.  
Te amo.

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme después de tanto esfuerzo culminar esta meta con éxito.

A Maribeth de los Ángeles, por tu inmensa paciencia, por iluminar mis días grises con tu hermosa sonrisa. Espero poder enseñarte a luchar por lo que desees, pero sobretodo a nunca dejar de sonreír. Eres la luz de mis ojos, gracias por existir.

A mi Madre, por enseñarme a no rendirme y buscar siempre la excelencia. A mi Padre, por enseñarme la importancia de los valores. A ambos, gracias por el gran apoyo y todas las enseñanzas que hicieron de mí la persona que soy. Los amo.

A Nano, por llenar mi vida de risas y enseñarme que la vida tiene otros puntos de vista. Te quiero mucho hermano.

A Lita, por el amor e incondicionalidad que has tenido siempre conmigo. Te adoro.

A Lito, por el amor y el apoyo que me brindaste mientras estuviste conmigo, y por ser ahora mi ángel guardián. Siempre estarás en mi corazón.

A José Ángel, por todo el apoyo incondicional que me brindaste mientras estuvimos juntos, e incluso después. Ahora nos toca apoyar juntos a Mary a lograr sus propias metas. De corazón, gracias.

A Tío Luis, por el gran apoyo que me has brindado a lo largo de la carrera y de toda mi vida. Y a toda mi familia, por ser la base y el apoyo fundamental de mi vida, gracias por permitirme contar siempre con ustedes.

A la familia Chitty, por dejarme entrar en sus vidas y en su hogar. Gracias por el cariño y el apoyo.

A Mila, por ser una amiga, compañera, confidente y una hermana en la escuela y ahora fuera de ella. Gracias por toda la ayuda, enseñanzas y por siempre creer en mí.

A mis amigos Vicente, Francisco, Douglas, Manuel, Balmore, Daniel, Victor, Alexandra, Luis, Andrés, Reina, Doraly, Coralina, Julio, Yulimar, Miguel, Byron, Albex, Vanessa, Juana, Leonardo, Claudia, David, Fernando, Anibal, Simon y todos los que me acompañaron en la carrera y me ayudaron a avanzar un paso más. Gracias por las enseñanzas, risas, lágrimas y por todos los momentos compartidos.

Al Prof. Wilmer Malpica, por brindarme la ayuda y los conocimientos necesarios para alcanzar esta meta. Gracias por el gran apoyo y la confianza.

A Belkys, Ligia y María Auxiadora, por ser motivos de esperanza para mí y para todos los estudiantes, ustedes son el apoyo y la guía que necesitamos para seguir adelante. Gracias por las palabras de aliento y por la ayuda en los momentos difíciles.

A los profesores, que entregan día a día lo mejor de sí para formarnos como profesionales y mejores personas. Gracias a los que me ayudaron a superar obstáculos, pero principalmente a los que me enseñaron cómo hacerlo por mí misma.

Al Grupo Vepica, especialmente a los Ingenieros Victor Viloría, Luis Cano, Orlando Castillo y Samalia Colón, gracias por el apoyo que me brindaron para lograr concluir con éxito la última etapa de mi carrera.

Muchas Gracias,  
Lucy M.

**Ramírez Z., Lucy M.**

**DESARROLLO DE UN SOFTWARE PARA EL CÁLCULO DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE FRONTERAS**

**Prof. Guía: Ing. Wilmer Malpica. Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Ingeniero Electricista. Opción: Potencia. 59 h + anexos**

**Palabras Claves:** Puesta a tierra; Cálculo de puesta a tierra; Programa para el cálculo de puesta a tierra; Elementos de frontera; Resistencia de puesta a tierra; Curvas de isopotencial; Software para el cálculo de puesta a tierra.

**Resumen.** Plantea el desarrollo de un Software que permite realizar el cálculo de la Resistencia de un Sistema de Puesta a Tierra y las curvas de isopotencial del suelo para dicho sistema. Para el desarrollo del Software, se utilizó como base teórica el método analítico combinado con uno numérico, donde se realizó el desarrollo de las ecuaciones de Maxwell, trabajando la función de Green como parte de la solución del Laplaciano. Por otra parte, la programación del software está basada en el lenguaje de Matlab, y para utilizar el mismo, se debe realizar, primeramente el diseño del Sistema de Puesta a Tierra que se desea calcular, y finalmente se ingresan al programa las características de dicho diseño, así como las del terreno donde se instalará el Sistema de Puesta a Tierra. Dentro de las características que se deben suministrar al programa sobre el diseño del Sistema de Puesta a Tierra, se encuentran la longitud de los conductores o electrodos, el calibre, la posición y el sentido de los mismos. Para validar el Software, se realizaron cálculos con el Método publicado en la norma IEEE 80-2000, así como también se utilizaron algunas expresiones analíticas desarrolladas por otros autores.

## ÍNDICE GENERAL

CONSTANCIA DE APROBACIÓN -----	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
DEDICATORIA -----	III
AGRADECIMIENTOS -----	IV
RESUMEN-----	V
ÍNDICE GENERAL -----	VI
ÍNDICE DE TABLAS -----	IX
ÍNDICE DE FIGURAS-----	X
SIMBOLOGÍA-----	XII
INTRODUCCIÓN-----	1
CAPÍTULO I-----	3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA -----	3
OBJETIVO GENERAL -----	4
OBJETIVOS ESPECÍFICOS -----	4
METODOLOGÍA -----	5
CAPÍTULO II-----	6
MARCO TEÓRICO-----	6
2.1.Definiciones-----	6
2.1.1. Falla a tierra -----	6
2.1.2.Corriente de falla: -----	6
2.1.3. Sistema de Puesta A Tierra (SPAT): -----	7

2.1.4. Tensión de Toque -----	7
2.1.5. Tensión de Paso -----	7
2.1.6. Divergencia de un Campo Vectorial -----	7
2.1.7. Rotacional de un Campo Vectorial -----	8
2.1.8. Nodo -----	8
2.2. Sistemas de Puesta A Tierra: -----	9
2.2.1. Objetivos de un sistema de puesta a tierra: [COORDINACIÓN DE EXTENSIÓN, 2010] -----	9
2.2.2. Métodos para el cálculo de un sistema de puesta a tierra -----	10
2.2.2.1. Ventajas y desventajas de cada método -----	11
2.2.3. Efecto de las corrientes en el cuerpo humano -----	12
2.2.4. Ecuaciones de Maxwell -----	13
2.2.5. Cálculo de la Resistencia -----	22
<b>CAPÍTULO III</b> -----	25
SELECCIÓN DEL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN -----	25
MANUAL DE USO DEL SOFTWARE -----	26
3.1. Primera Parte: Diseño del Sistema de Puesta a Tierra (SPAT). -----	26
Paso 1: Diseñar el Sistema de Puesta a Tierra. -----	26
Paso 2: Enumerar los nodos del SPAT diseñado en el PASO 1. -----	26
Paso 3: Definir un Sistema de Coordenadas -----	28
3.2. Segunda Parte: Interacción con el Programa, ingreso de datos -----	29
Paso 4: Abrir el Programa -----	29
Paso 5: Indicar la cantidad de nodos -----	30
Paso 6: Ingresar las características del SPAT -----	31



<b>CAPÍTULO IV</b> -----	41
RESULTADOS DEL SOFTWARE -----	41
4. 1 Electrodo vertical -----	41
4.1. 1 PAT -----	41
4.1.1. 1 Sin particionar el electrodo-----	41
4.1.1. 2 Particionando el electrodo en 10 dipolos -----	43
4.1.2 Dwight-----	45
4. 2 Electrodo vertical con uno horizontal-----	46
4.2.1 PAT-----	46
4.2.1. 1 Sin particionar el electrodo-----	47
4.2.1. 2 Particionando el electrodo en 10 dipolos-----	50
4.2. 2 Dwight-----	54
4.3 Malla -----	55
4.3. 1 PAT -----	55
4.3. 2 MÉTODO IEEE-----	64
CONCLUSIONES-----	67
RECOMENDACIONES-----	69
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS-----	70
BIBLIOGRAFÍA -----	71
ANEXOS -----	72

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 2. 1</b> Tabla de los métodos de cálculo de sistemas de puesta a tierra. -----	11
<b>Tabla 2. 2</b> Efecto de la Corriente en el Cuerpo Humano según su Magnitud.-----	12
<b>Tabla 2. 3</b> Tiempo Necesario para que el Paso de Corriente Produzca Fibrilación Ventricular Según su Magnitud-----	13

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 2. 1</b>	Esquema de los Métodos para el cálculo de un SPAT-----	10
<b>Figura 2. 2</b>	Electrodo de PAT, de longitud l, radio r y su imagen.-----	17
<b>Figura 2. 3</b>	Sistema de Coordenadas de Referencia. -----	18
<b>Figura 3. 1</b>	Modelo del diseño de un SPAT -----	26
<b>Figura 3. 2</b>	Enumeración del primer nodo-----	27
<b>Figura 3. 3</b>	Orden de enumeración de los nodos del diseño del SPAT: (a) Enumeración de la capa intermedia. (b) Enumeración de la capa inferior. (c) Enumeración de la capa superior -----	28
<b>Figura 3. 4</b>	Determinación del eje de coordenadas a utilizar -----	29
<b>Figura 3. 5</b>	Primera salida del programa al ejecutarlo -----	30
<b>Figura 3. 6</b>	Ingresando el número de nodos -----	31
<b>Figura 3. 7</b>	Seleccionando un conductor. -----	32
<b>Figura 3. 8</b>	Seleccionando el calibre -----	33
<b>Figura 3. 9</b>	Especificando la longitud del conductor. -----	34
<b>Figura 3. 10</b>	Indicando la dirección. -----	35
<b>Figura 3. 11</b>	Estableciendo el signo -----	36
<b>Figura 3. 12</b>	Especificando conexiones entre los nodos-----	37
<b>Figura 3. 13</b>	Caracterizando el segundo conductor -----	37
<b>Figura 3. 14</b>	Ingresando la dirección del conductor-----	38
<b>Figura 3. 15</b>	Caracterizando el conductor entre los nodos 2 y 5 -----	39
<b>Figura 3. 16</b>	Caracterizando el resto de los conductores. -----	39
<b>Figura 4. 1</b>	Electrodo vertical-----	41
<b>Figura 4. 2</b>	Curvas isopotenciales con un electrodo vertical en (0,0)-----	43
<b>Figura 4. 3</b>	Curvas de isopotencial para un electrodo vertical particionado en 10 dipolos.-----	45
<b>Figura 4. 4</b>	Electrodos horizontales defasados en ángulo recto-----	46

**Figura 4. 5** Curvas de isopotencial con dos electrodos horizontales desfasados en ángulo recto.-----50

**Figura 4. 6** Curvas de isopotencial para dos conductores horizontales particionados en 10 dipolos desfasados en ángulo recto-----53

## SIMBOLOGÍA

$x, y, z$	Coordenadas de la superficie del electrodo o conductor donde se calcula la tensión
$x', y', z'$	Coordenadas del electrodo o conductor donde se encuentra la carga
$\lambda$	Densidad lineal de carga
$\rho$	Densidad volumétrica de carga
$V$	Tensión
$\bar{V}$	Tensión promedio
$q$	Carga
$C$	Capacitancia
$\varepsilon$	Permitividad
$R$	Resistencia

## INTRODUCCIÓN

Cuando circulan corrientes por tierra, bien sean causadas por una falla del sistema eléctrico o por una descarga atmosférica, el potencial del suelo se eleva produciendo tensiones de paso y de toque que pueden ser perjudiciales tanto para los seres vivos, como para equipos eléctricos debido a los potenciales transferidos.

Por lo tanto, un buen diseño de un sistema de puesta a tierra puede limitar estas elevaciones de tensión, a niveles que puedan ser tolerados tanto por los equipos eléctricos como por los seres vivos.

En base a lo antes mencionado, esta investigación tiene como finalidad la realización de un programa que permita calcular la resistencia de un Sistema de Puesta a Tierra (SPAT), comprobando de esta manera si el diseño se encuentra dentro de los lineamientos requeridos.

El estudio se desarrolla en cuatro capítulos: en el Capítulo I se introduce el planteamiento del problema, se enumeran los objetivos tanto general como específicos y se planifica una metodología a seguir para el alcance de los mismos.

Seguidamente en el Capítulo II, se desarrolla el marco teórico que tiene como finalidad definir brevemente los conceptos necesarios para la comprensión de la investigación.

En el Capítulo III, se explican los criterios de selección del lenguaje de programación y se desarrolla un manual práctico sobre el manejo y el funcionamiento del software desarrollado en la investigación.

Por último en el Capítulo IV, se valida el programa comparando los resultados del mismo con resultados emitidos por otros programas o por expresiones analíticas desarrolladas por otros autores.

# CAPÍTULO I

En este primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, los objetivos del trabajo tanto el general como los específicos y la metodología utilizada.

## 1.1. Planteamiento del problema

En tal sentido, se plantea como Trabajo Especial de Grado el desarrollo de un software para el cálculo de la resistencia y los potenciales en el terreno para un sistema de puesta a tierra, suponiendo un régimen estacionario del campo electromagnético, es decir, que ni el campo eléctrico ni el campo magnético son variables en el tiempo.

Muchas de las metodologías de cálculo de sistemas de puesta a tierra se desarrollan con base a esta condición, que a pesar de no ser cierta para un sistema que opera en corriente alterna, arroja resultados muy aceptables para estudios de cortocircuito y en ciertos casos, para estudios de sobretensiones.

La ventaja de suponer un régimen estacionario obedece a que la solución numérica del campo es relativamente sencilla en comparación con la solución que se requiere si se supone que el campo es variable en el tiempo, como ocurre con un fenómeno de propagación de ondas para el campo electromagnético.



## 1.2. Objetivo general

Realizar un software para calcular sistemas de puesta a tierra por el método de los elementos de fronteras.

## 1.3. Objetivos específicos

- Estudiar las ecuaciones diferenciales para el potencial eléctrico suponiendo que el campo eléctrico es estacionario y su solución es a través de las funciones de Green.
- Estudiar el método de los elementos de fronteras.
- Escoger el lenguaje para la programación del método de los elementos de fronteras.
- Programar el método de los elementos de fronteras para calcular la resistencia de puesta a tierra y los potenciales del suelo de un sistema de puesta a tierra.
- Realizar un programa para elaborar las curvas de isopotencial del suelo.
- Validar el programa.

## 1.4. Metodología

Para el desarrollo de la metodología de la investigación se ejecutaron una serie de pasos, mencionados a continuación.

- Se realizó un repaso de las ecuaciones de Maxwell en régimen estático, incluyendo el cálculo del campo eléctrico producido por una carga puntual y por una distribución volumétrica de carga, el cálculo del potencial escalar  $V$  en un medio con pérdidas, la función de Green para un medio infinito y homogéneo, la ecuación de Laplace para el potencial escalar en un medio con pérdidas y el estudio de las condiciones de fronteras entre dos medios con diferentes conductividades.
- Se estudió la metodología desarrollada por Dwight, Schwarz y Rüdemberg, para calcular analíticamente la resistencia en electrodos de puesta a tierra.
- Se investigó sobre el método de los elementos de frontera, para calcular el potencial en cualquier punto del suelo, a causa de la inyección de corrientes a través del sistema de puesta a tierra.
- Se seleccionó el lenguaje de programación que se va a emplear para elaborar el software para cálculo de sistemas de puesta a tierra.
- Se programó el método de los elementos de frontera.
- Se verificó el programa y se realizaron varios ejemplos.
- Se elaboró el informe final.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan, en primer lugar, definiciones básicas para la comprensión del contenido del informe. En segundo lugar, se aborda el tema de los sistemas de puesta a tierra. Luego se presentan los efectos de la corriente sobre el cuerpo humano, como importancia de un buen diseño de un sistema de puesta a tierra. Finalmente se desarrollan las ecuaciones de maxwell para calcular la resistencia de puesta a tierra.

#### 2.1. Definiciones

##### 2.1.1. Falla a Tierra:

“Es una conexión no intencional entre el conductor activo de un circuito eléctrico y los conductores que normalmente no conducen corriente, las envolventes metálicas, canalizaciones metálicas, equipo metálico o la tierra”. [FONDONORMA, 2004]

##### 2.1.2. Corriente de Falla:

Se define como el flujo de corriente que existe en el sistema durante una falla, bien sea por un cortocircuito o una descarga atmosférica. [Trane, 2010]

### **2.1.3. Sistema de Puesta a Tierra (SPAT):**

Esta formado por un electródo o grupo de electródos enterrados en el suelo, que tienen como finalidad drenar a la tierra corrientes de falla, protegiendo de esta manera a los equipos. [Coordinación de extensión, 2010]

### **2.1.4. Tensión de Toque:**

Se define como la diferencia de potencial en que se encuentra una persona cuando toca una estructura metática mientras está pasando una corriente de falla. [IEEE Std 80, 1986]

### **2.1.5. Tensión de Paso**

Se define como la diferencia de potencial entre los dos pies de una persona, cuando está pasando por el suelo una corriente de falla. [IEEE Std 80, 1986]

### **2.1.6. Divergencia de un Campo Vectorial**

“La divergencia de un campo vectorial  $F$ , que se abrevia  $\text{div } F$ , se define como el límite del flujo neto hacia afuera de  $F$ ,  $\oint_S F \cdot dS$ , por volumen unitario, conforme el volumen  $\Delta v$  encerrado por la superficie  $S$  tiende a cero”. [Johnk, 1996]

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2.1)$$

Donde  $\Delta V$  es un elemento de volumen

### 2.1.7. Rotacional de un Campo Vectorial

“Se dice que los campos no conservativos poseen una circulación alrededor de trayectorias cerradas de integración. Siempre que se toma la integración cerrada de línea de un campo, alrededor de un camino cerrado pequeño (que tiende a desvanecerse) y que el resultado se expresa como una relación al área pequeña encerrada, se puede expresar esa circulación por área unitaria como un vector conocido como el rotacional del campo en la vecindad de un punto  $\operatorname{rot} F \equiv \nabla \times F$ . Se sigue que el rotacional de un campo conservativo es cero donde quiera; también se conoce como campo irrotacional”. [Johnk, 1996]

### 2.1.8. Nodo:

Unión de dos o más conductores o electrodos.

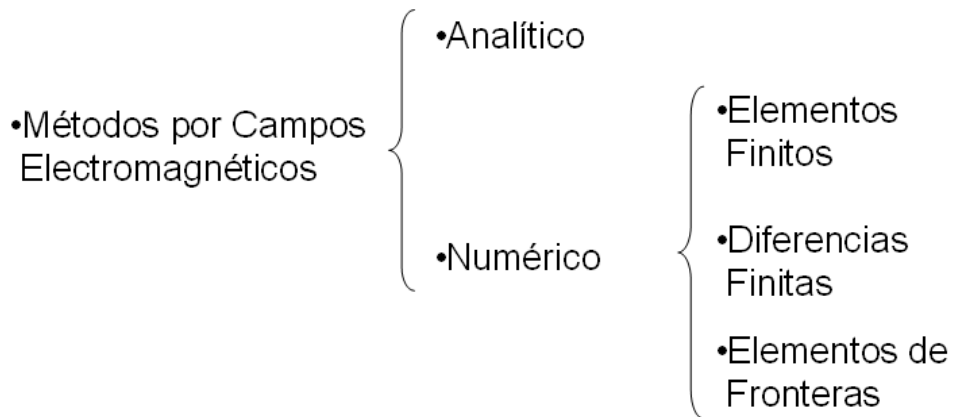
## **2.2. Sistemas de Puesta a Tierra:**

### **2.2.1. Objetivos de un sistema de puesta a tierra: [Coordinación de Extensión, 2010]**

- Drenar o derivar a la tierra las corrientes de falla y acumulación de cargas electrostáticas.
- Minimizar el gradiente de potencial a tierra y sus tensiones asociadas, tales como tensiones de toque y de paso.
- Completar la protección externa contra descargas atmosféricas del edificio o instalación, ofreciéndole un trayecto inmediato y efectivo a la intensidad de corriente del rayo.
- Mantener un potencial de referencia para la adecuada operación de instrumentos y equipos.
- Cumplir los requerimientos exigidos por los fabricantes de los equipos y normas internacionales o especificaciones de las empresas especializadas.

## 2.2.2. Métodos para el cálculo de un sistema de puesta a tierra

- Método IEEE.



**Figura 2. 1** Esquema de los Métodos para el cálculo de un SPAT

En el esquema de la figura 2.1, se observan los distintos métodos que se pueden utilizar para el cálculo de un sistema de puesta a tierra.

El Método IEEE se basa en aplicar la fórmula de Schwarz [IEEE,], esto lo convierte en un método muy simple de utilizar.

El Método por Campos Electromagnéticos se divide en dos grupos, los métodos analíticos y numéricos.

Para los primeros no existe solución exacta, sólo aproximaciones.

Y los métodos numéricos, que a su vez se subdividen en tres: los elementos finitos, las diferencias finitas y los elementos de frontera.

En los dos primeros se divide el volumen en pequeños prismas y se calcula el campo en cada uno de ellos. Pero como el medio es infinito, para poder realizarse el cálculo se debe acotar el mismo, lo que lo convierte en una aproximación.

Y por último se tiene el método de los elementos de fronteras que es el que se estudia en este trabajo. El mismo consiste en particionar el electrodo de tierra, lo cual permite decir que éste sí representa un método que requiere menos memoria de almacenamiento y que emplea las funciones de Green para un medio semi infinito.

### 2.2.2.1. Ventajas y desventajas de cada método

Las ventajas y desventajas de los métodos mencionados en el punto anterior, se ven reflejadas a continuación en la tabla 2.1.

**Tabla 2. 1 Tabla de los métodos de cálculo de sistemas de puesta a tierra.**

Método	IEEE	Método por Campos Electromagnéticos	
		Analítico	Numérico
<b>Ventajas</b>	El Cálculo es muy sencillo	Se tiene una expresión matemática para calcular la Resistencia de Puesta a Tierra	Se puede aplicar a cualquier configuración de electrodos.
<b>Desventajas</b>	No se pueden obtener las curvas isotenciales del terreno	Generalmente estas expresiones matemáticas estan basadas en determinada configuración de electrodos y que además son muy básicas y obtenidas de numerosas aproximaciones	Se requiere de un computador
	Para ciertas condiciones el método podría resultar ser inexacto		
	No se puede aplicar en cuadrículas asimétricas		



### 2.2.3. Efecto de las corrientes en el cuerpo humano

De acuerdo a estudios realizados, se ha determinado que el cuerpo puede tolerar corrientes de frecuencias de 25Hz y de valores entre 3000Hz en adelante. En cuanto a magnitud, se considera el umbral de percepción a un valor de corriente de aproximadamente 1mA. Los efectos de la corriente en el cuerpo humano según su magnitud se pueden observar en la tabla 2.2. [Coordinación de Extensión, 2010]

**Tabla 2. 2 Efecto de la Corriente en el Cuerpo Humano según su Magnitud.**

Magnitud	Efecto
1 a 3 mA	No produce peligro alguno y su contacto puede ser mantenido.
9 a 25 mA	Se empieza a producir pérdida del control muscular.
60 a 100 mA	Las contracciones musculares pueden producir problemas respiratorios y puede producir fibrilación ventricular (f.v.).
75 a 3000 mA	Pueden ocasionar parálisis total de respiración y f.v. irreversible.
Mayores a 3A	Pueden producir f.v. y grandes quemaduras.

Por otra parte, los valores aproximados de corriente y el tiempo necesario para que se produzca fibrilación ventricular se pueden observar en la tabla 2.3.

**Tabla 2. 3 Tiempo Necesario para que el Paso de Corriente Produzca Fibrilación Ventricular Según su Magnitud**

Magnitud	Tiempo de duración
15mA	2 minutos
20mA	1 minuto
30mA	35 segundos
100mA	3 segundos
500mA	0,1 segundo
1A	0,03 segundo

#### 2.2.4. Ecuaciones de Maxwell

A continuación se presentan las ecuaciones de Maxwell para campos variantes en el tiempo [Johnk, 1996]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ Ley de Faraday en forma diferencial} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ Ley de Ampere} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \text{ Ley de Gauss} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ Ley de Gauss para campos magnéticos} \quad (2.4)$$

Las cuales en régimen estacionario quedan de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

Ahora, sustituyendo  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  y  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  en (2.6) y (2.7) quedan:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\mu} \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.12)$$

Donde  $\vec{E}$  es el vector campo eléctrico,  $\vec{B}$  es el vector campo magnético,  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga en la tierra o en el suelo,  $\varepsilon$  es la permitividad del suelo y  $\vec{J}$  es el vector densidad de corriente en el suelo.

De esta manera se puede observar que se las ecuaciones se desacoplan, es decir, se pierde la dependencia simultánea del campo eléctrico y el campo magnético en la misma ecuación, y gracias a esto se pueden clasificar las ecuaciones (2.9) y

(2.11) como electrostática ya que dependen sólo del campo eléctrico y las ecuaciones (2.10) y (2.12) como magnetostática, las cuales dependen sólo del campo magnético.

Para efectos de este trabajo, sólo se utilizarán las ecuaciones de electrostática (2.9) y (2.11), es decir, se trabajará sólo con el campo eléctrico.

Ahora bien, asumiendo que la densidad de carga en la tierra es nula,  $\rho = 0$ , la ecuación (2.11) pasa a ser la siguiente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.13)$$

Por propiedad de la divergencia se tiene que:

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \nabla^2 V = 0 \quad (2.14)$$

Aplicando la propiedad en la ecuación (2.13),

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.15)$$

Se puede decir entonces que el campo eléctrico es igual a la divergencia de una función potencial, y además de (2.9) se tiene que el rotacional de la divergencia de la función potencial es igual a cero:

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad (2.16)$$

Para encontrar ahora una solución de la función potencial, se puede resolver la ecuación (2.14), la cual es conocida como la función Laplaciano, desarrollada como derivadas parciales en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (2.17)$$

Cuya solución se puede obtener con la ayuda de las funciones de Green.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int_{Vol'} G(x, x', y, y', z, z') * \rho(x', y', z') \partial Vol' \quad (2.18)$$

Donde (2.19) representa la función de Green.

$$G(x, x', y, y', z, z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (2.19)$$

Donde  $(x', y', z')$  representan las coordenadas del electrodo o conductor donde se encuentra la carga y  $(x, y, z)$  representan las coordenadas de la superficie del electrodo o conductor donde se calcula la tensión.

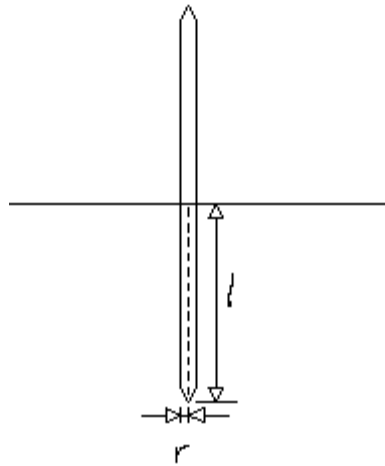
Sustituyendo (2.19) en (2.18) queda:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{Vol'} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \partial Vol' \quad (2.20)$$

La cual es válida en un medio infinitamente homogéneo, donde  $\rho(x', y', z')$  es una densidad volumétrica de carga.

Por considerarse el suelo un medio semi infinito, para que la ecuación (2.20) sea válida, se crea la imagen del conductor en el aire, convirtiendo ahora el suelo y el aire en un medio homogéneo.

Ahora adaptándola al estudio de un sistema de puesta a tierra, la solución (2.18) se aplica al electrodo mostrado en la fig. 2.2, y en este caso, se considera una distribución lineal de carga  $\lambda$ , y que además la misma es constante.

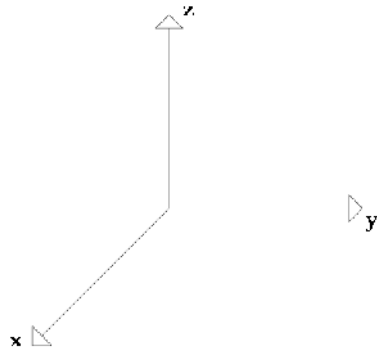


**Figura 2. 2** Electrodo de PAT, de longitud  $l$ , radio  $r$  y su imagen.

Entonces, el potencial viene dado por la siguiente ecuación:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-l}^l \frac{\lambda}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dz' \quad (2.21)$$

Y si además se tiene que se integrará sólo sobre el electrodo, tomando como eje de coordenadas el presentado en la fig. 2.3, se tiene que  $x' = y' = 0$ , por lo tanto, tomando en cuenta la imagen de la jabalina en el aire, la ecuación (2.21) pasa a ser la siguiente:



**Figura 2. 3** Sistema de Coordenadas de Referencia.

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-l}^l \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} \partial z' \quad (2.22)$$

Realizando un cambio a coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (2.23)$$

Sustituyendo (2.21) en (2.20), y tomando en cuenta que se considera la densidad constante, lo cual es una aproximación queda:

$$V(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{-l}^l \frac{\partial z'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (2.24)$$

Resolviendo la integral se tiene que la solución indefinida esta dada por la ecuación (2.25)

$$V(r, z) = \ln(\sqrt{(z - z')^2 + r^2} - (z - z')) \quad (2.25)$$

Aplicando (2.25) en (2.24), es decir, evaluando en el intervalo  $(-l, l)$ , se tiene:

$$V(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[ \ln(\sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l)) - \ln(\sqrt{(z+l)^2 + r^2} - (z+l)) \right] \quad (2.26)$$

$$V(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left[ \frac{\sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l)}{\sqrt{(z+l)^2 + r^2} - (z+l)} \right] \quad (2.27)$$

O también:

$$V(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left[ \frac{\left( \sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l) \right) \left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l) \right)}{\left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} - (z+l) \right) \left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l) \right)} \right] \quad (2.28)$$

$$V(r, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left[ \frac{\left( \sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l) \right) \left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l) \right)}{r^2} \right] \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.27) y (2.29) son equivalentes, y las mismas permiten calcular el potencial en cualquier punto del suelo en coordenadas cilíndricas  $(r, z)$ .

Sin embargo, utilizando las ecuaciones (2.27) y (2.29), el potencial sobre la superficie de la jabalina no es un valor constante para el radio de conductor  $r$  y para  $l \geq z \geq 0$ . Esto se debe a que se asumió una densidad lineal de carga constante, lo cual no es cierto.

Entonces, para resolver esta inconsistencia el potencial de la jabalina se toma como el valor promedio del potencial:



$$\bar{V} = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 V(r, z) \partial z \quad (2.30)$$

Donde r es el radio de la jabalina.

Sustituyendo (2.29) en (2.30), se tiene:

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi l \epsilon} \int_{-l}^0 \frac{\left( \sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l) \right) \left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l) \right)}{r^2} \partial z \quad (2.31)$$

Siendo (2.32) la solución indefinida de la integral

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi l \epsilon} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{(z-l)^2 + r^2} - (z-l)}{r} \right) + \ln \left( \sqrt{(z-l)^2 + r^2} + (z-l) \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{(z+l)^2 + r^2} + (z+l)}{r} \right) + \ln \left( \sqrt{(z+l)^2 + r^2} - (z+l) \right) \right] \quad (2.32)$$

Aplicando (2.32) en (2.31) se obtiene el potencial promedio dado en la ecuación siguiente:

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon} \left[ -\ln \left( \frac{\left( \sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l \right)^2}{r^2} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.33)$$

Donde r es el radio de la jabalina.

Luego, desarrollando matemáticamente la ecuación (2.33) se tiene:

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[ 2 \ln \left( \frac{r}{\left( \sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l \right)} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.34)$$

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[ 2 \ln \left( \frac{r * \left( \sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l \right)}{\left( \sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l \right) * \left( \sqrt{(2l)^2 + r^2} + 2l \right)} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.35)$$

$$\bar{V} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[ 2 \ln \left( \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + 2l}{r} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.36)$$

Como  $\lambda$  es la densidad lineal de carga, entonces la densidad lineal de carga en la jabalina será:

$$q = \lambda l \quad (2.37)$$

Que es equivalente a:

$$\lambda = \frac{q}{l} \quad (2.38)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.36) se obtiene (2.39)

$$\bar{V} = \frac{q}{4\pi\epsilon l} \left[ 2 \ln \left( \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + 2l}{r} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.39)$$

De la cual se obtiene el inverso de la capacitancia de la jabalina representada en la siguiente ecuación:

$$\frac{\bar{V}}{q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\epsilon l} \left[ 2 \ln \left( \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + 2l}{r} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.40)$$

### 2.2.5. Cálculo de la Resistencia

Para el caso de la jabalina se cumple que:

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (2.41)$$

Donde  $\sigma$  es la resistividad de la tierra, G el inverso de la resistencia y C la capacitancia. Entonces de (2.41), se obtiene G

$$G = \frac{\sigma}{\epsilon} * C \quad (2.42)$$

Invirtiendo la conductividad G se obtiene la resistencia del electrodo.

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\epsilon}{\sigma} * \frac{1}{C} \quad (2.43)$$

Sustituyendo (2.40) en (2.43) se obtiene la resistencia:

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma l} \left[ 2 \ln \left( \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + 2l}{r} \right) - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} + \frac{r}{l} \right] \quad (2.44)$$

Si  $l \gg r$  entonces R se aproxima a lo siguiente:

$$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma l} \left[ \ln \left( \frac{4l}{r} \right) - 1 \right] \quad (2.45)$$

Las ecuaciones escritas anteriormente sirven para calcular la resistencia de un electrodo o conductor tanto mutua como propia. La propia se consigue integrando la función planteada sobre la superficie del electrodo, y la mutua integrando sobre la superficie del otro electrodo. De esta manera se crea una matriz de resistencias de orden igual a la cantidad de electrodos de la malla.

Considerando la siguiente ecuación.

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \quad (2.46)$$

Se crea un sistema de ecuaciones expresado matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Y luego se invierte la matriz resistencia

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Suponiendo que se aplica una tensión de prueba conocida, se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtienen los valores de corriente aportados por cada electrodo.

Luego, tomando en cuenta la Ley de Ohm  $R = \frac{V}{I}$ , y sumando todas las corrientes obtenidas, se tiene la resistencia de PAT:

$$R_{TIERRA} = \frac{1}{I_1 + I_2} \quad (2.49)$$

Ya que la densidad de carga no es constante en todo el electrodo, para mejorar el cálculo se divide el mismo, calculando cada dipolo (o partición) como un electrodo independiente. Ésto trae como consecuencia un resultado más preciso a medida que la longitud del dipolo sea menor.

## CAPÍTULO III

### SELECCIÓN DEL LENGUAJE DE PROGRAMACIÓN

En un principio se tenían conocimientos básicos de dos lenguajes de programación, Visual Basic y Matlab. Por esta razón la selección del mismo estuvo basada en los siguientes aspectos:

Para resolver integrales con Visual Basic se requiere generar un ciclo para programar algún método de integración numérica como por ejemplo la Regla del Trapecio o de Simpson, mientras que matlab presenta comandos que permiten integrar funciones directamente.

Se puede decir que Matlab por ser un programa más matemático presenta mayores ventajas que Visual Basic cuando se desean resolver ecuaciones matemáticas complejas y cuando se trabaja con matrices.

Por otra parte Matlab ofrece una gran variedad de comandos para realizar gráficas de funciones, dentro de las cuales se encuentra contour, que permite realizar las curvas de isopotencial del suelo con sólo indicar la función del potencial.

En la Escuela de Ingeniería Eléctrica se manejan los programas Matlab y Scilab en varias materias, lo cual facilita conseguir ayuda para solventar problemas generados en el desarrollo del código.

## MANUAL DE USO DEL SOFTWARE

En este capítulo se presenta un manual que explica paso a paso cómo utilizar el software para el cálculo de Sistemas de Puesta a Tierra “PAT”.

### 3.1. Primera Parte: Diseño del Sistema de Puesta a Tierra (SPAT).

#### Paso 1: Diseñar el Sistema de Puesta a Tierra.

Para comenzar, se debe realizar el diseño del SPAT que se desea calcular, tomando en cuenta que el programa presenta una limitación de un máximo de 4 conexiones por nodo. Un ejemplo puede observarse en la figura 3.1 a continuación:

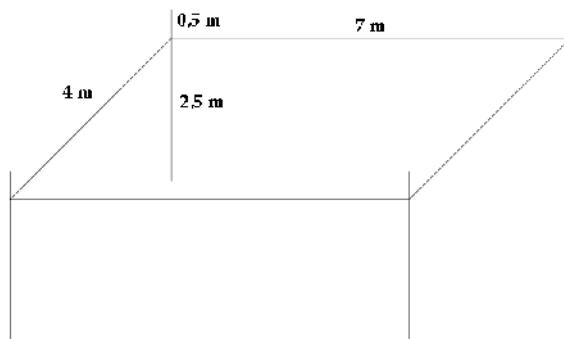
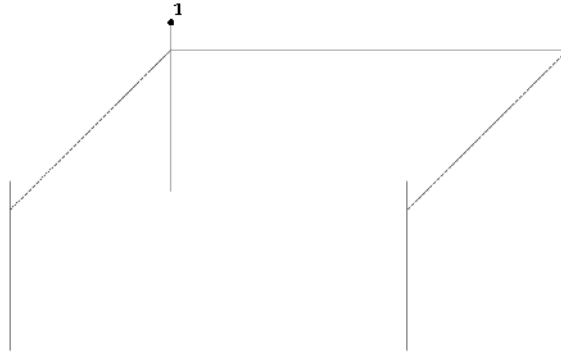


Figura 3. 1 Modelo del diseño de un SPAT

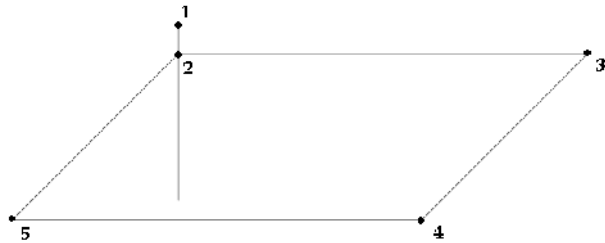
#### Paso 2: Enumerar los nodos del SPAT diseñado en el Paso 1.

La enumeración debe comenzar por el punto en el que la malla de PAT se conecta con la edificación o equipos a proteger, siendo este entonces el nodo 1 como se observa en la figura 3.2.



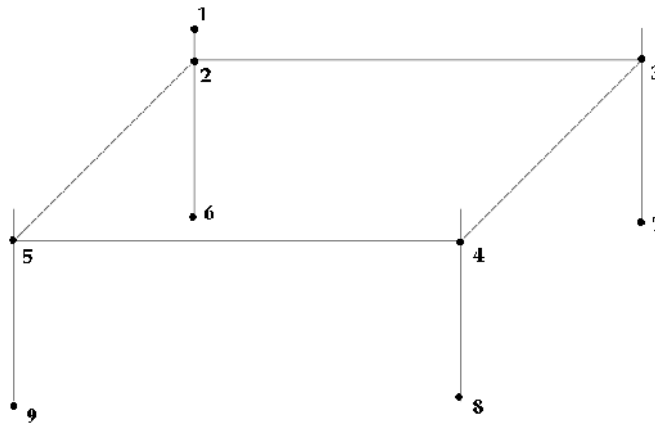
**Figura 3. 2** Enumeración del primer nodo

Seguidamente, se enumeran los nodos inferiores, por niveles, numerando cada nivel en su totalidad antes de pasar al siguiente, y por último los nodos superiores, tal como se presenta en la figura 3.3:

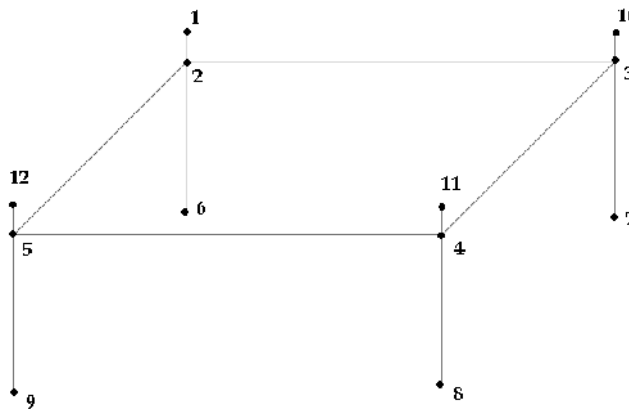


(a)





(b)

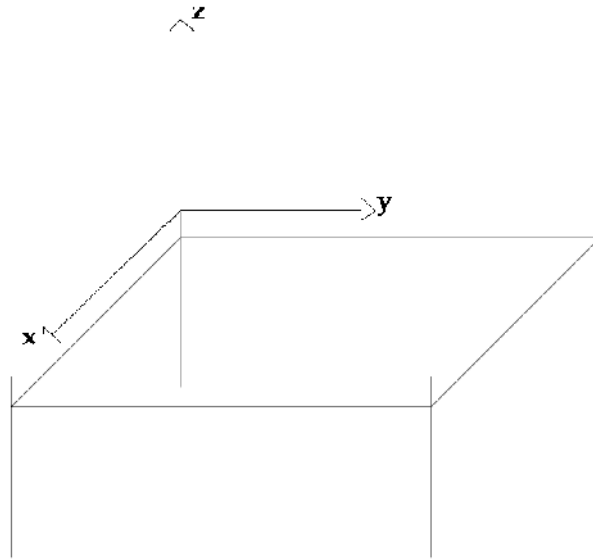


(c)

**Figura 3. 3** Orden de enumeración de los nodos del diseño del SPAT: (a) Enumeración de la capa intermedia. (b) Enumeración de la capa inferior. (c) Enumeración de la capa superior

### Paso 3: Definir un Sistema de Coordenadas

Se debe definir el sistema de coordenadas que se va a utilizar como base, tomando en cuenta que el origen siempre estará situado en el nodo 1. Como se observa en la figura 3.4:

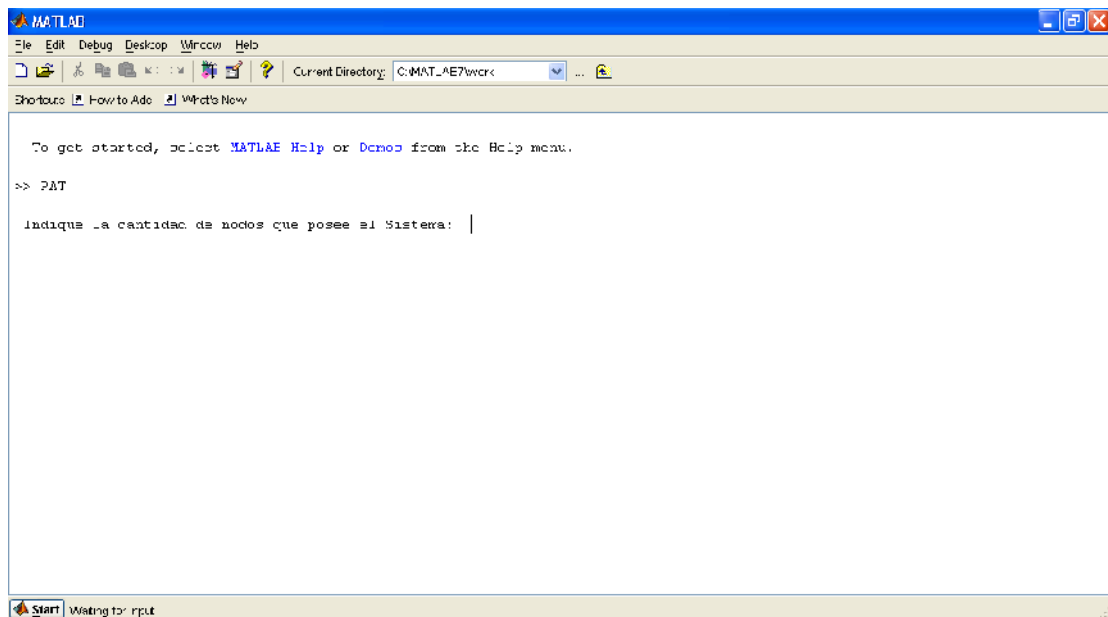


**Figura 3. 4** Determinación del eje de coordenadas a utilizar

### **3.2. Segunda Parte: Interacción con el Programa, ingreso de datos.**

#### **Paso 4: Abrir el Programa.**

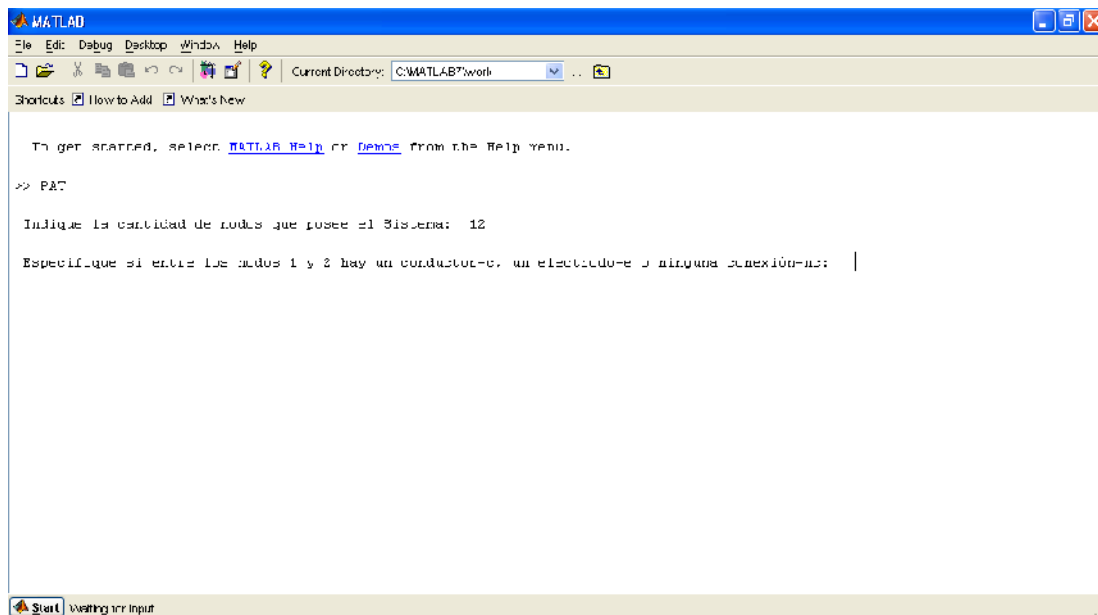
Se debe comenzar abriendo el programa Matlab, previamente instalado en el computador. Para ello correr en el ambiente de trabajo de Matlab, el archivo PAT.m (observar figura 3.5).



**Figura 3. 5** Primera salida del programa al ejecutarlo

### **Paso 5: Indicar la cantidad de nodos.**

Al correr el programa, inmediatamente éste le pedirá el primer dato, se debe ingresar el numero de nodos que se determinó en el Paso 2. Por ejemplo: se definieron 12 nodos en el ejemplo anterior (ver figura 3.6).



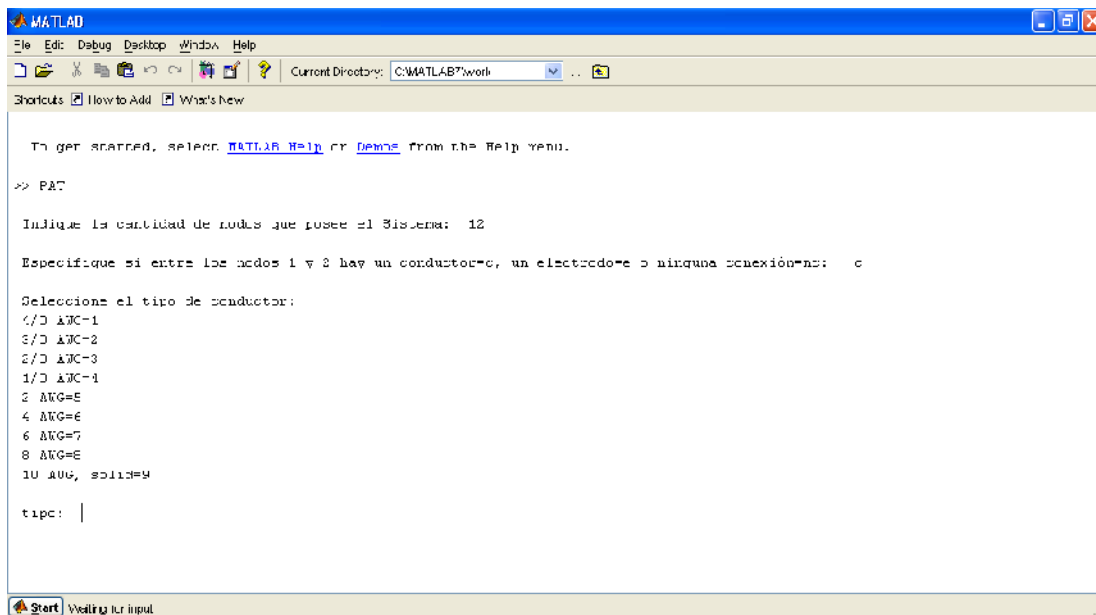
**Figura 3. 6** Ingresando el número de nodos

### **Paso 6: Ingresar las características del SPAT**

El programa pedirá información de cada uno de los segmentos que conforma el SPAT, de manera progresiva.

Comenzará entonces con el segmento que se encuentra entre el nodo 1 (que representa el origen de coordenadas) y el nodo 2.

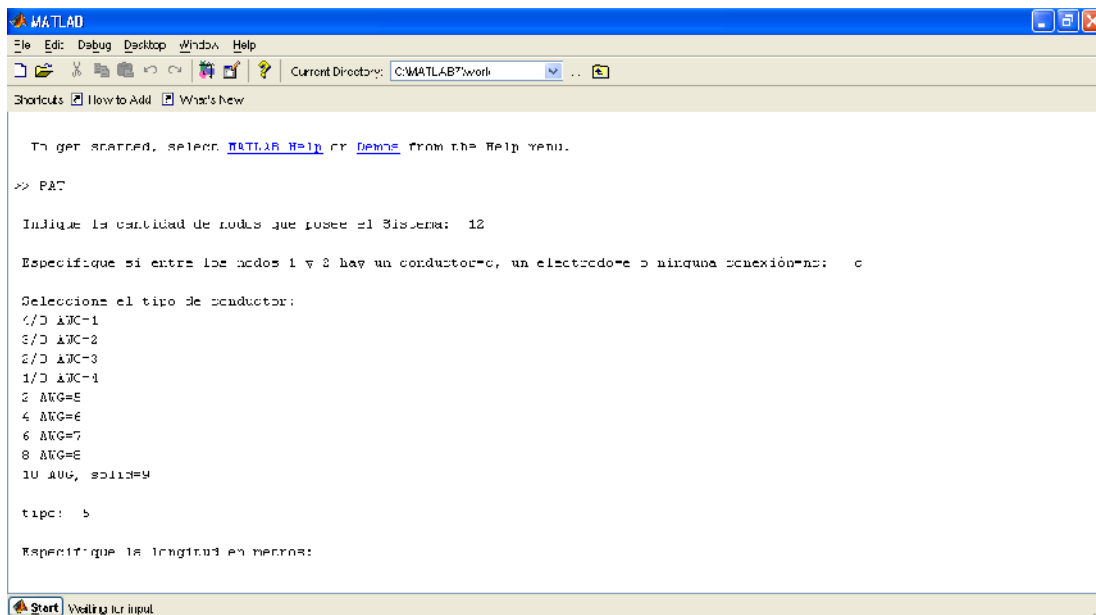
Lo primero que hay que indicar es si este segmento representa a un electrodo (se ingresa una e), a un conductor (ingresando una c) o si no existe conexión entre estos nodos (se indica con un nc). Por ejemplo: siguiendo con el caso anterior, se indica que hay un conductor (ver figura 3.7).



**Figura 3.7** Seleccionando un conductor.

Luego el programa indicará que se seleccione el tipo de conductor según el calibre del mismo. Para ello se ingresa el número que se encuentra a la derecha del calibre deseado.

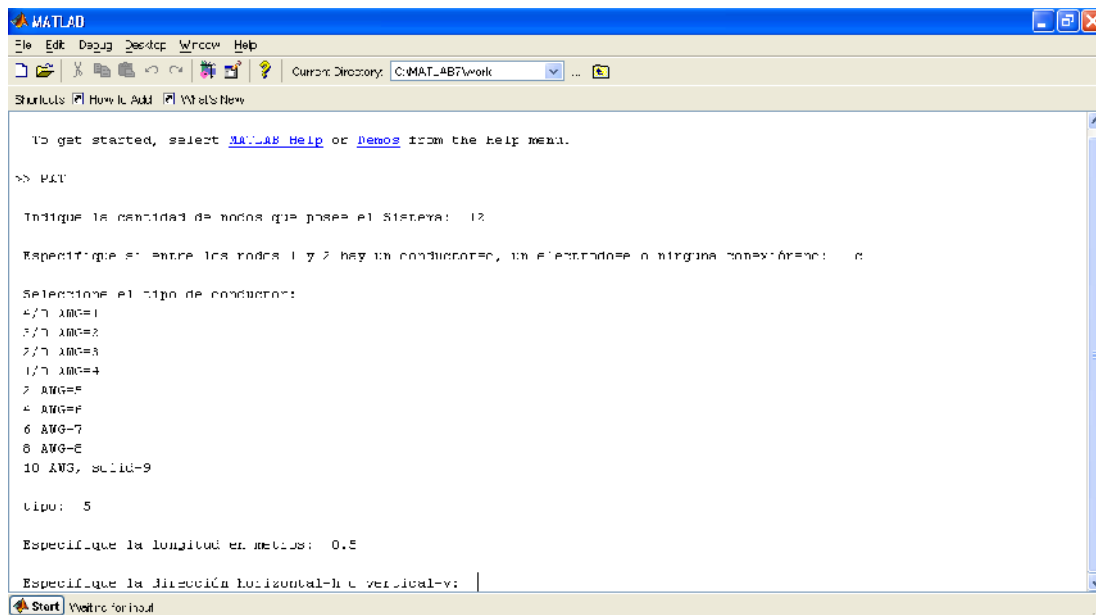
Por ejemplo: suponiendo que se trata de un conductor calibre 2 AWG, se debe ingresar un número 5 para ello (ver figura 3.8).



**Figura 3.8** Seleccionando el calibre

Seguidamente, se debe indicar la longitud del conductor en metros.

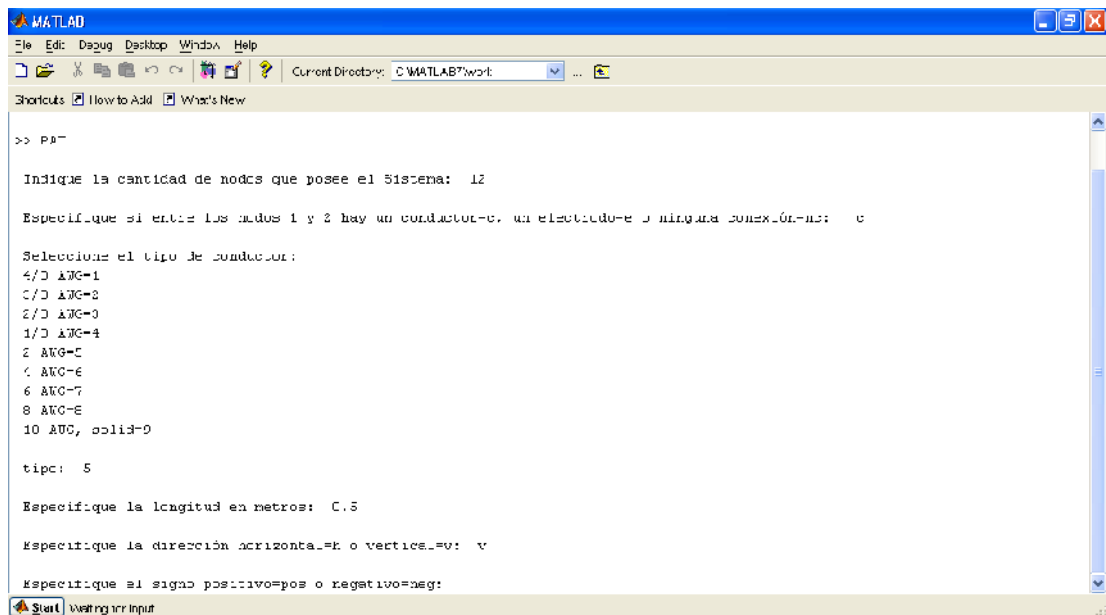
Por ejemplo: suponiendo que el conductor es de 50 cm, se ingresa 0.5 (ver figura 3.9).



**Figura 3.9** Especificando la longitud del conductor.

Ahora se debe indicar si el conductor se encuentra horizontal o vertical.

Por ejemplo: en el diseño que se planteó en un comienzo, el conductor que se encuentra entre los nodos 1 y 2 está vertical (ver figura 3.10).

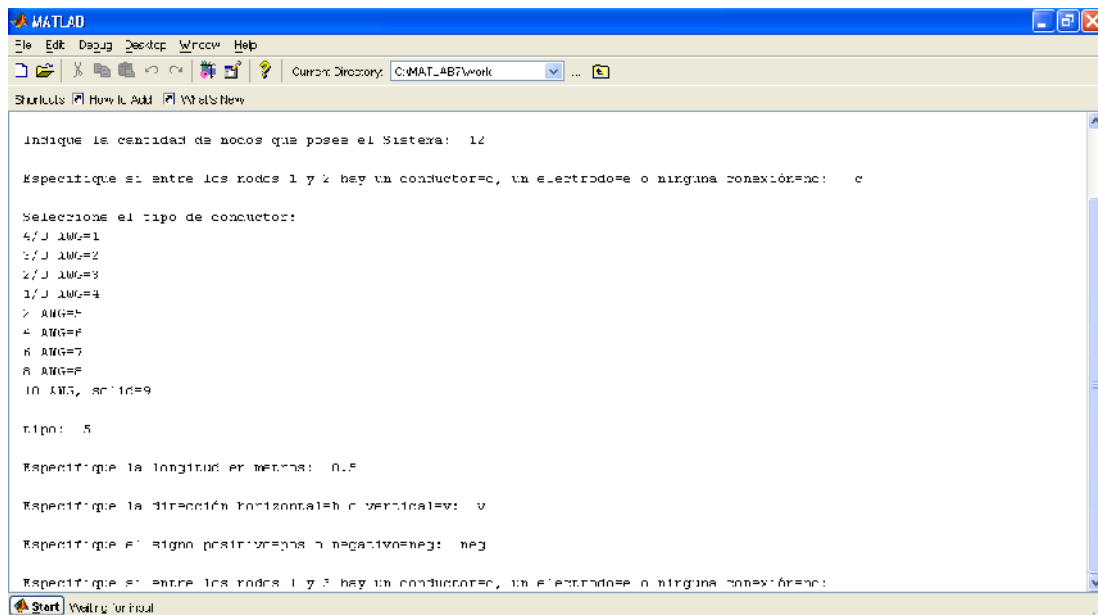


**Figura 3.10** Indicando la dirección.

Luego de indicar la dirección, se debe indicar el signo en base al sistema de coordenadas planteado en el paso 3.

Por ejemplo: en este caso el signo sería negativo, ya que el conductor se encuentra en dirección del eje z negativo (ver figura 3.11).

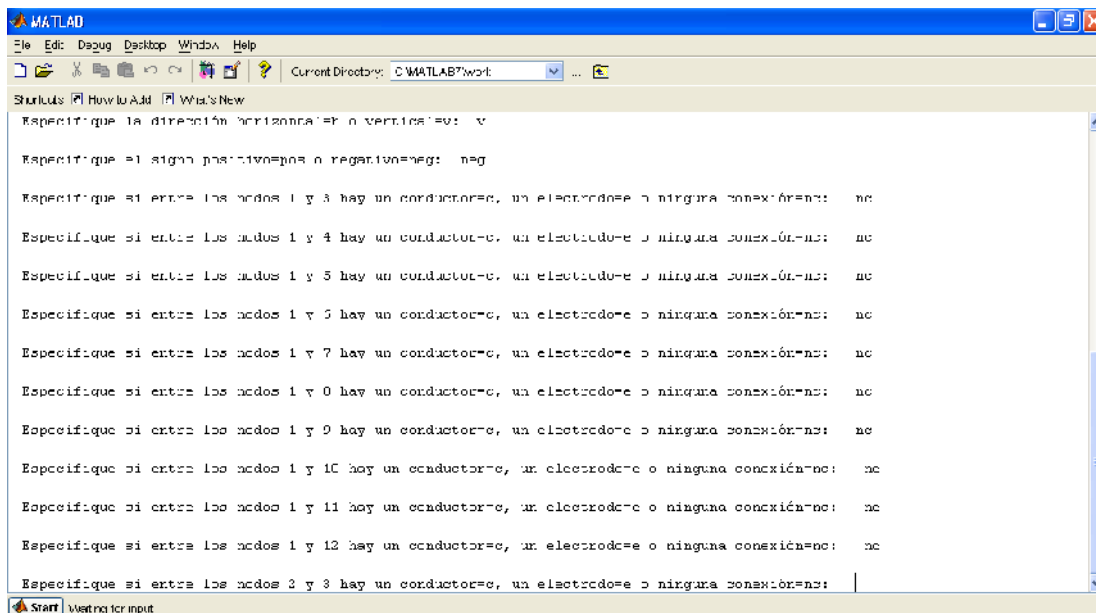




**Figura 3.11** Estableciendo el signo

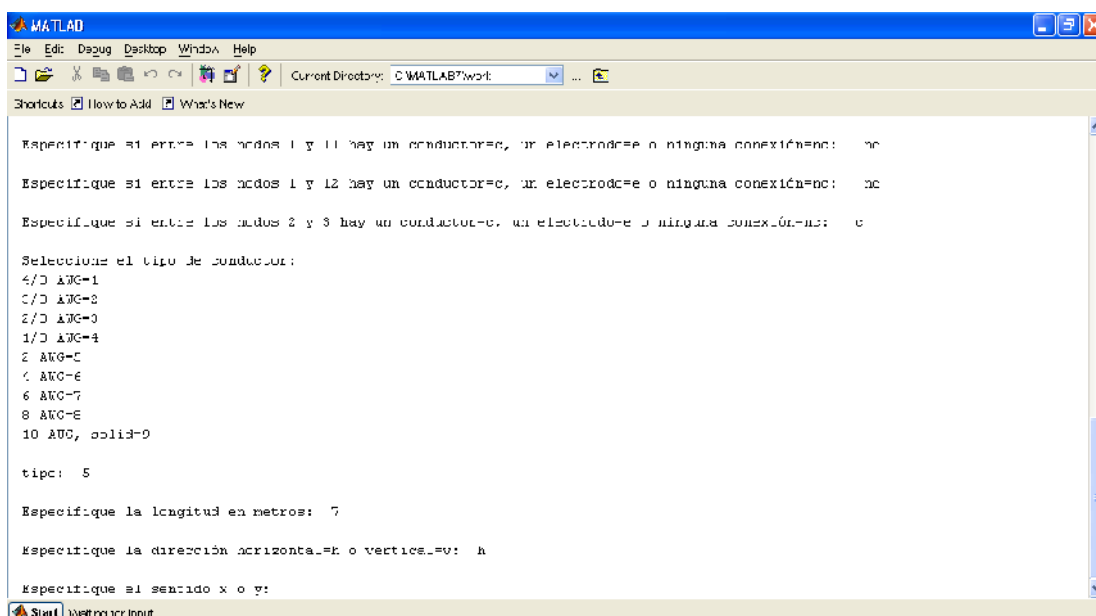
De esta manera se concluye la caracterización del primer segmento.

Obviamente entre estos dos primeros nodos siempre habrá conexión, pero no será el caso de otros nodos como por ejemplo el segmento que sigue entre los nodos 1 y 3, que no hay conexión, en este caso se coloca nc para indicarlo. Y de la misma forma con los otros nodos, ya que el nodo 1 no tiene mas conexiones (ver figura 3.12).



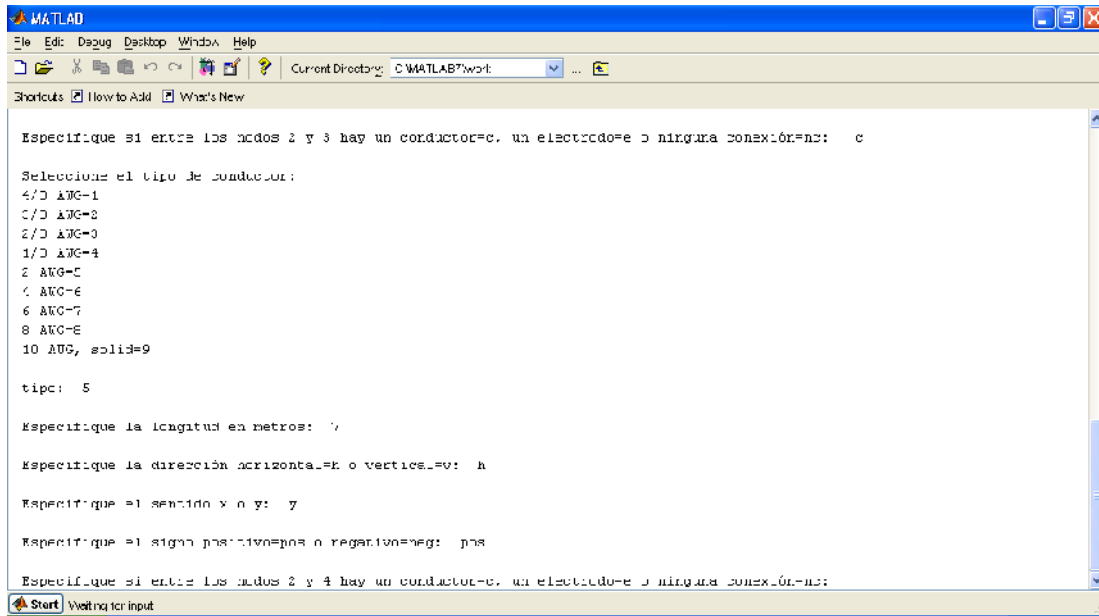
**Figura 3. 12** Especificando conexiones entre los nodos

Luego, el segmento entre los nodos 2 y 3 se encuentra horizontal, y en base al sistema de coordenadas planteado, esta en direcci3n del eje y positivo. Y suponiendo un calibre 2 AWG (ver figura 3.13).



**Figura 3. 13** Caracterizando el segundo conductor

En este caso, que el conductor se encuentra en dirección horizontal, se debe indicar si se encuentra en dirección del eje x o del eje y (ver figura 3.14).



**Figura 3.14** Ingresando la dirección del conductor

Luego entre los nodos 2 y 4 no hay conexión, hasta el segmento entre los nodos 2 y 5, que se ilustrará por estar en dirección del eje x (ver figura 3.15).

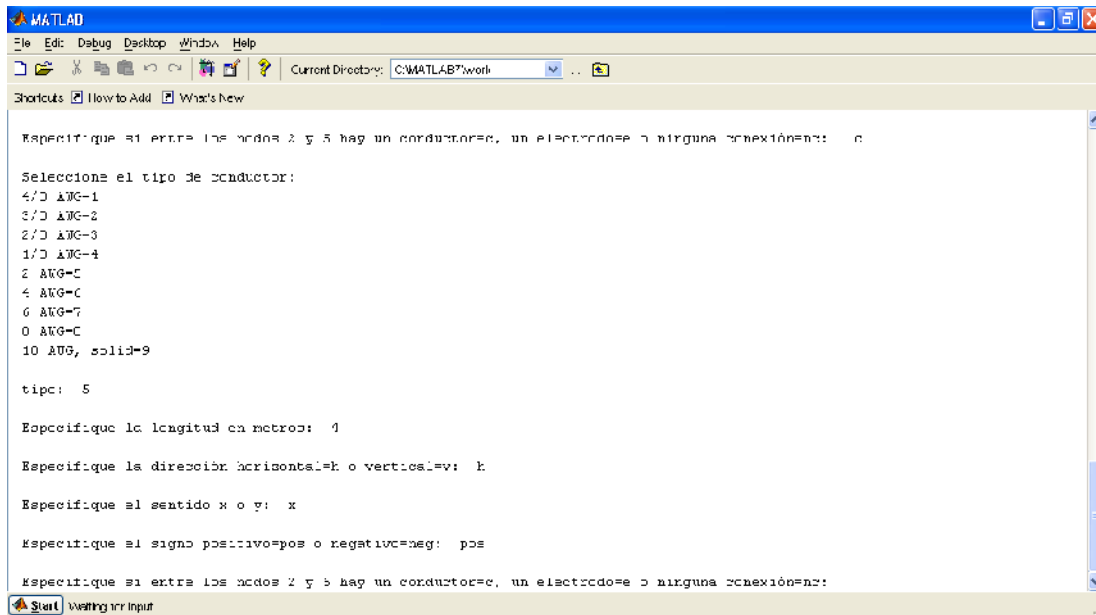


Figura 3. 15 Caracterizando el conductor entre los nodos 2 y 5

De igual manera se caracterizarán el resto de los segmentos (ver figura 3.16).

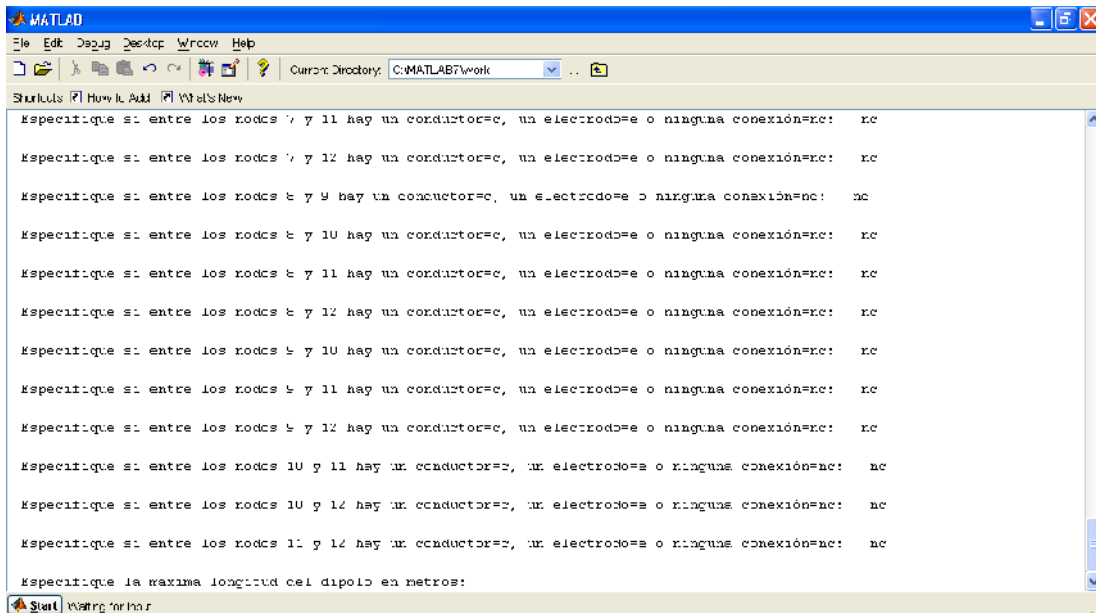


Figura 3. 16 Caracterizando el resto de los conductores.

Para continuar se debe indicar la longitud máxima del dipolo, que se refiere a la longitud máxima que tendrá una partición del electrodo o conductor.

Por ejemplo: si se desea que la longitud máxima sea 10 cm, recordando que mientras el número sea menor, el resultado será más exacto, pero la corrida del programa tardará más tiempo.

Y por último se ingresará la resistividad del terreno.

En el Capítulo IV, se ilustran ejemplos del cálculo de la resistencia de puesta a tierra.

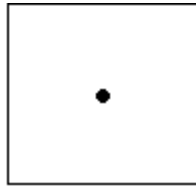
## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS DEL SOFTWARE

En este capítulo, se presentan corridas del programa, comparadas con expresiones matemáticas publicadas por Dwight (4.1) y (4.2). [Dwight, 1936] y con el método planteado en la norma IEEE 80-2000.

#### 4.1 Electrodo vertical

En la figura 4.1 se observa el electrodo vertical visto desde arriba.



**Figura 4.1** Electrodo Vertical

#### 4.1.1 PAT

##### 4.1.1.1 Sin Particionar el electrodo

>> PAT

Indique la cantidad de nodos que posee el Sistema: 2

Especifique si entre los nodos 1 y 2 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique la máxima longitud del dipolo en metros: 3

Especifique la Resistividad del terreno: 100

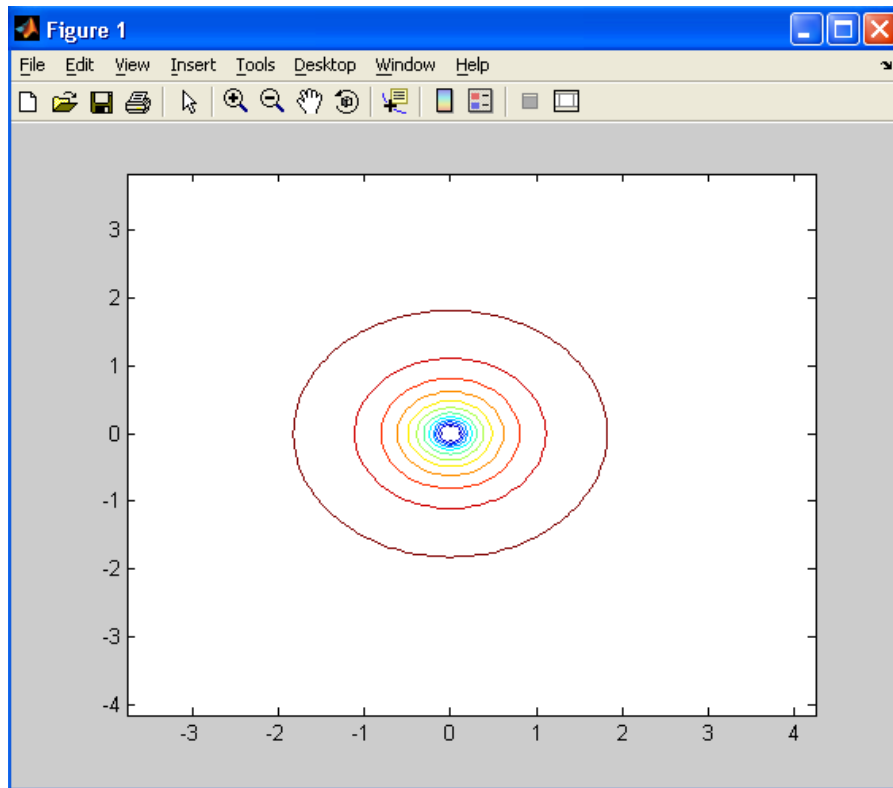
**RPAT =**

**34.7656**

>> radio

radio =

0.0063



**Figura 4. 2** Curvas isopotenciales con un electrodo vertical en (0,0)

En la figura 4.2 se observa el resultado de las curvas isopotenciales dadas por el programa PAT.

#### **4.1.1. 2 Particionando el electrodo en 10 dipolos.**

>> PAT

Indique la cantidad de nodos que posee el Sistema: 2

Especifique si entre los nodos 1 y 2 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e



Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

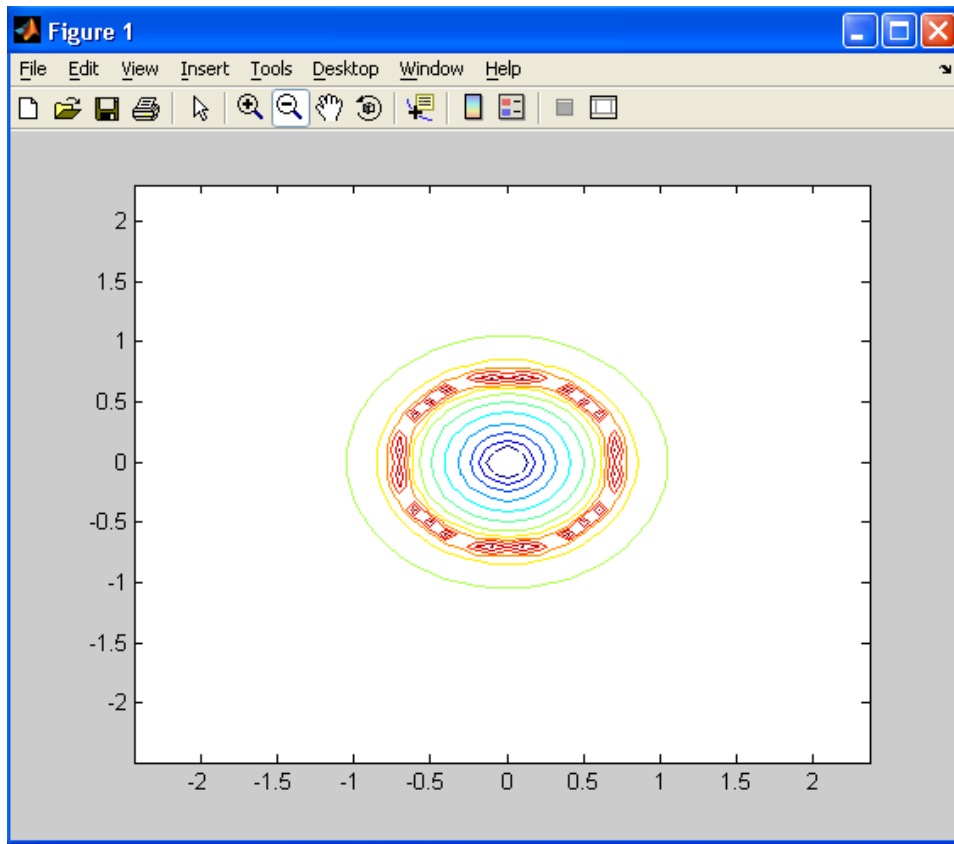
Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique la máxima longitud del dipolo en metros: 0.3

Especifique la Resistividad del terreno: 100

**RPAT =**

**34.5731**



**Figura 4. 3** Curvas de Isopotencial para un electrodo vertical particionado en 10 dipolos.

En la figura 4.3 se observan las curvas isopotenciales dadas por el programa PAT para el ejemplo calculado.

#### 4.1.2 Dwight

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left( \ln \left( \frac{4L}{a} \right) - 1 \right) \quad (4.1)$$

Donde,

R= Resistencia de puesta a tierra

$\rho$  = Resistividad del suelo [100]

L= Longitud del electrodo o conductor [3]

a= Radio del electrodo o conductor [0.0063]

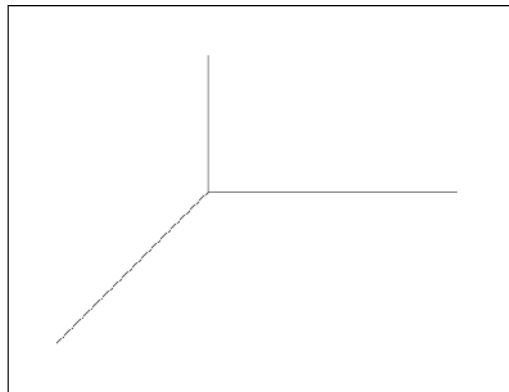
Con ayuda del programa Derive, se resuelve la ecuación:

$$R = \frac{100}{2\pi \cdot 3} \left( \ln \left( \frac{4 \cdot 3}{0.0063} \right) - 1 \right)$$

$$R = 34.75995400$$

## 4. 2 Electrodo Vertical con uno Horizontal

En la figura 4.4 se observa el arreglo de electrodos utilizado en éste ejemplo.



**Figura 4. 4** Electrodos horizontales defasados en ángulo recto

### 4.2.1 PAT

En el caso del programa PAT, para tener la malla enterrada a una profundidad  $s$ , se utilizará un conductor vertical de cobre calibre 8 AWG, para así compararlo con la ecuación presentada por Dwigth.

#### 4.2.1. 1 Sin particionar el electrodo

>> PAT

Indique la cantidad de nodos que posee el Sistema: 4

Especifique si entre los nodos 1 y 2 hay un conductor= $c$ , un electrodo= $e$  o ninguna conexión= $nc$ : c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 8

Especifique la longitud en metros: 0.45

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 1 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: x

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 2 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: y

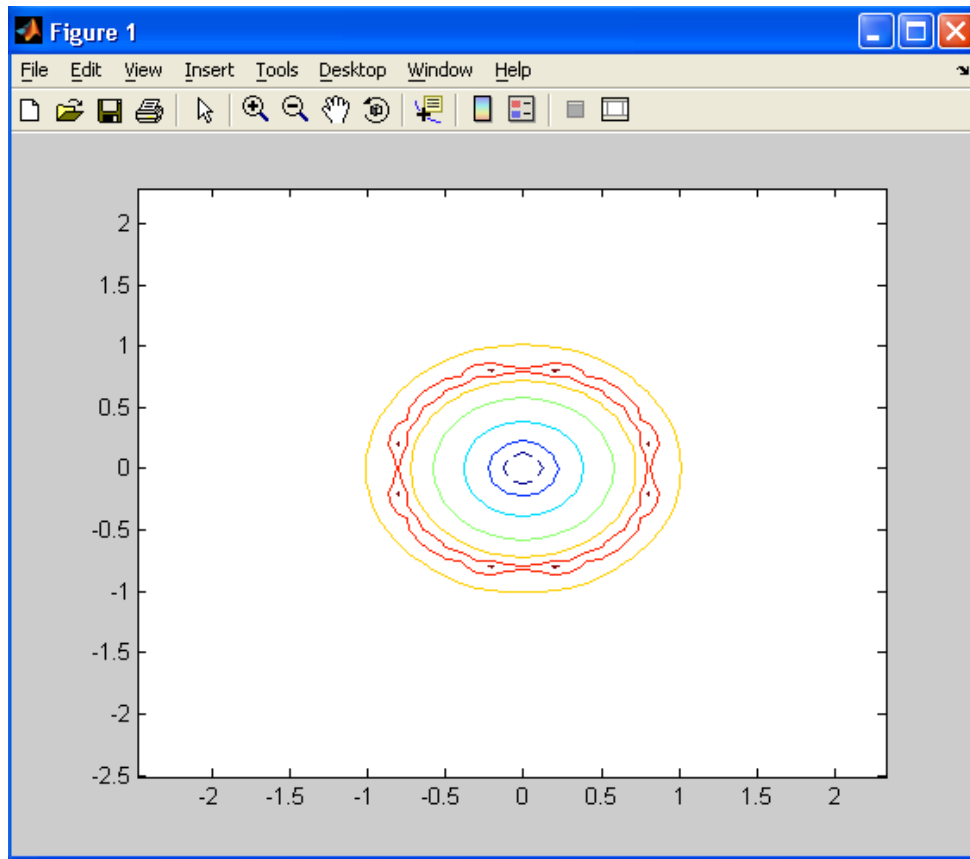
Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 3 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique la Resistividad del terreno: 100

**RPAT =**

**21.1591**



**Figura 4.5** Curvas de Isopotencial con dos electrodos horizontales desfasados en ángulo recto.

La figura 4.5 presenta las curvas de isopotencial para el ejemplo calculado.

#### 4.2.1. 2 Particionando el electrodo en 10 dipolos

>> PAT

Indique la cantidad de nodos que posee el Sistema: 4

Especifique si entre los nodos 1 y 2 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 8

Especifique la longitud en metros: 0.45

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 1 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:



1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: x

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 2 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 10

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: y

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

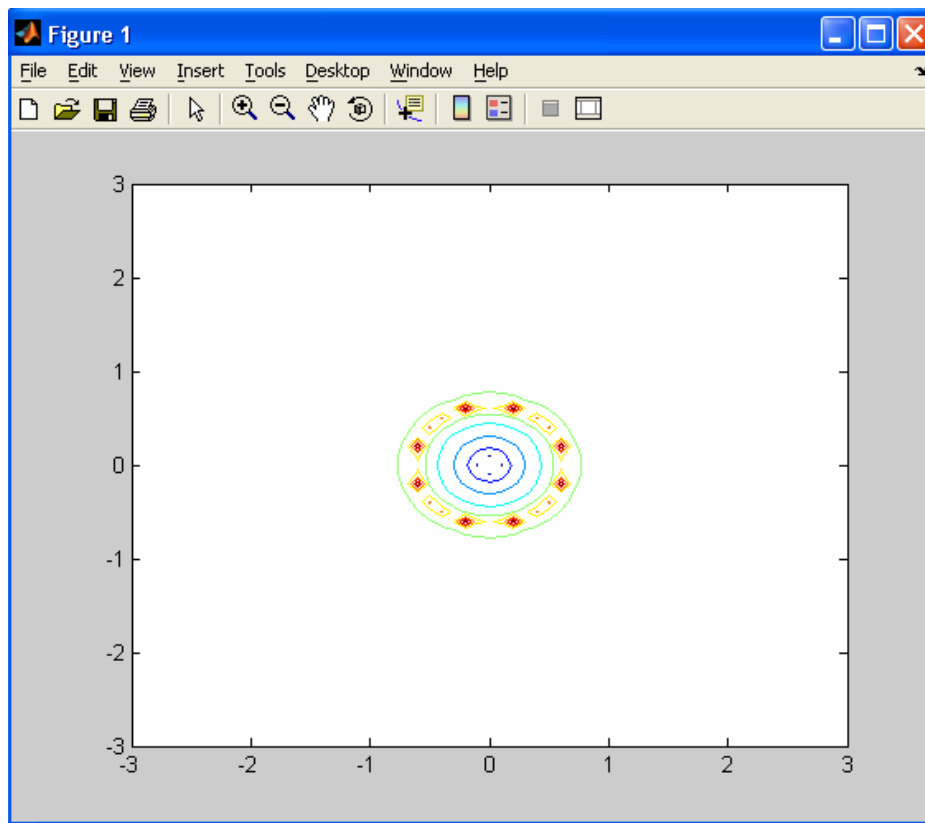
Especifique si entre los nodos 3 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique la máxima longitud del dipolo en metros: 0.3

Especifique la Resistividad del terreno: 100

**RPAT =**

**20.8788**



**Figura 4. 6** Curvas de Isopotencial para dos conductores horizontales particionados en 10 dipolos defasados en ángulo recto

En la figura 4.6 se presentan las curvas de isotencial calculadas por el software PAT

#### 4.2. 2 Dwight

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \ln\left(\frac{2L}{a}\right) + \ln\left(\frac{2L}{s}\right) - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \right) \quad (4.2)$$

Donde,

R= Resistencia de puesta a tierra

$\rho$  = Resistividad del suelo [100]

L= Longitud del electrodo o conductor [3]

a= Radio del electrodo o conductor [0.0063]

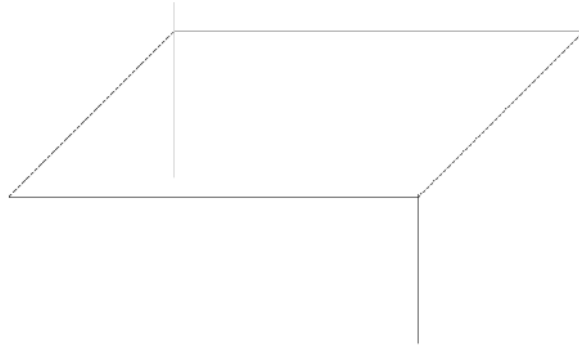
s= Profundidad de los electrodos [0.45]

Con ayuda del programa Derive, se resuelve la ecuación:

$$R = \frac{100}{4\pi 3} \left( \ln\left(\frac{2*3}{0.0063}\right) + \ln\left(\frac{2*3}{0.45}\right) - 0.2373 + 0.2146 \frac{0.45}{3} + 0.1035 \frac{0.45^2}{3^2} - 0.0424 \frac{0.45^4}{3^4} \right)$$

$$R = 24.52685883$$

### 4.3 Malla



**Figura 4.7** Malla

#### 4.3.3 PAT

>> PAT

Indique la cantidad de nodos que posee el Sistema: 9

Especifique si entre los nodos 1 y 2 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 4

Especifique la longitud en metros: 0.3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 1 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 5 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 6 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 1 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 3 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 4

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: y

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 2 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 5 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 4

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: x

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 2 y 6 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 12

Especifique la longitud en metros: 2.3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 2 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 2 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 3 y 4 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4



2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 4

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: x

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: pos

Especifique si entre los nodos 3 y 5 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 3 y 6 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 3 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 12

Especifique la longitud en metros: 2.3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 3 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 3 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 4 y 5 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: c

Seleccione el tipo de conductor:

4/0 AWG=1

3/0 AWG=2

2/0 AWG=3

1/0 AWG=4

2 AWG=5

4 AWG=6

6 AWG=7

8 AWG=8

10 AWG, solid=9

tipo: 4

Especifique la longitud en metros: 3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: h

Especifique el sentido x o y: y

Especifique el signo positivo=pos o negativo=neg: neg

Especifique si entre los nodos 4 y 6 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 4 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 4 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 12

Especifique la longitud en metros: 2.3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 4 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 5 y 6 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 5 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 5 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 5 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: e

Seleccione el tipo de electrodo:

1/2" hierro con recubrimiento de cobre=10

5/8" hierro con recubrimiento de cobre=11

3/4" hierro con recubrimiento de cobre=12

tipo: 12

Especifique la longitud en metros: 2.3

Especifique la dirección horizontal=h o vertical=v: v

Especifique si entre los nodos 6 y 7 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 6 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 6 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 7 y 8 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 7 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique si entre los nodos 8 y 9 hay un conductor=c, un electrodo=e o ninguna conexión=nc: nc

Especifique la máxima longitud del dipolo en metros: 2.3

Especifique la Resistividad del terreno: 100

**RPAT =**

**10.5031**

#### **4.3. 4 Método IEEE**

$$R_1 = \frac{\rho}{\pi Lc} \left[ \ln \left( \frac{2Lc}{a'} \right) + \frac{K_1 Lc}{\sqrt{A}} - K_2 \right] \quad (4.1)$$

Donde,

= Resistividad del suelo [100 m]

$L_c$ = longitud de todos los conductores conectados en la malla [12m]

$a' = \sqrt{a * 2 * h}$  para conductores enterrados a una profundidad h [53.104m]

a= radio del conductor [0.0047m]

A= Área de la malla [9m<sup>2</sup>]

K<sub>1</sub>K<sub>2</sub>= Coeficientes IEEE K<sub>1</sub> = 1.15, K<sub>2</sub> = 4.78

Sustituyendo en (4.1)

$$R_1 = \frac{100}{\pi * 12} \left[ \ln \left( \frac{2 * 12}{53.104} \right) + \frac{1.15 * 12}{\sqrt{9}} - 4.78 \right]$$

$$R_1 = 15.739$$

$$R_2 = \frac{\rho}{2 * \pi * n_R * L_r} \left[ \ln \left( \frac{4L_r}{b} \right) - 1 + \frac{2 * K_1 * L_r}{\sqrt{A}} * (\sqrt{n_R} - 1)^2 \right] \quad (4.2)$$

Donde,

= Resistividad del suelo [100 m]

L<sub>r</sub>= longitud de todas las barras [9.2m]

b= radio de la barra [0.0081m]

A= Área de la malla [9m<sup>2</sup>]

n<sub>R</sub>= Número de barras ubicadas en el área de la malla [4]

K<sub>1</sub>K<sub>2</sub>= Coeficientes IEEE K<sub>1</sub> = 1.15, K<sub>2</sub> = 4.78

Sustituyendo en 4.2,

$$R_2 = \frac{100}{2 * \pi * 4 * 9.2} \left[ \ln \left( \frac{4 * 9.2}{0.0081} \right) - 1 + \frac{2 * 1.15 * 9.2}{\sqrt{9}} * (\sqrt{4} - 1)^2 \right]$$

$$R_2 = 13.491$$

$$R_m = \frac{\rho}{\pi Lc} \left[ \ln \left( \frac{2Lc}{Lr} \right) + \frac{K_1 * Lc}{\sqrt{A}} - K_2 + 1 \right] \quad (4.3)$$

$$R_m = \frac{100}{\pi * 12} \left[ \ln \left( \frac{2 * 12}{9.2} \right) + \frac{1.15 * 12}{\sqrt{9}} - 4.78 + 1 \right]$$

$$R_m = 8.3958$$

$$R_g = \frac{R_1 * R_2 - R_m^2}{R_1 + R_2 + 2 * R_m} \quad (4.4)$$

Donde,

$R_g$  = Valor de la resistencia total del sistema [  $\Omega$  ]

$R_1$  = Valor de la resistencia de la malla [  $\Omega$  ]

$R_2$  = Valor de la resistencia del conjunto de barras [  $\Omega$  ]

$R_m$  = Valor de la resistencia de mutua entre  $R_1$  y  $R_2$  [  $\Omega$  ]

$$R_g = \frac{15.739 * 13.491 - 8.3958^2}{15.739 + 13.491 + 2 * 8.3958}$$

$$R_g = 11.404$$

Se puede observar que los resultados obtenidos no son iguales para ambos métodos, lo cual se debe en primer lugar que los métodos utilizados son diferentes y en segundo lugar que para poder calcular la malla del ejemplo con el software PAT, se debe colocar un conductor que no está previsto en el método IEEE.

## CONCLUSIONES

Las ecuaciones de Maxwell que dependen del campo eléctrico se reducen a dos en régimen estacionario, de las cuales se obtienen las siguientes conclusiones: la primera es que el campo eléctrico es la divergencia de una función potencial y la segunda que el rotacional del mismo es igual a cero. De éstas se obtiene la ecuación de Laplace como solución del potencial eléctrico, la cual está asociada a la función de Green, que representa la base para el cálculo de la resistencia de puesta a tierra.

La integración de esta solución conlleva a varios errores, los cuales pueden minimizarse tomando en cuenta la imagen de los conductores en el aire para modelar un medio homogéneo, calculando el potencial promedio y por último particionando el electrodo o conductor que se esté estudiando en pequeños dipolos. De esta manera se aproxima a una solución real.

Cuando se desea resolver ecuaciones matemáticas muy complejas, como es el caso de la doble integración de la función de green, matlab es una herramienta de apoyo que facilita el diseño de programas como el desarrollado en éste trabajo.

Se elaboró un programa apoyado en matlab, que calcula la resistencia de puesta a tierra en base a expresiones analíticas, mejorando así la solución presentada en la Norma IEEE Std 80, 1986.

Con el software realizado se mejoran muchas de las expresiones matemáticas que se presentan en los libros para el cálculo de reesistencia, ya que se considera que la densidad de carga en un electrodo varía a trozos.

No existe una solución analítica exacta para calcular resistencias de puesta a tierra ni potenciales del terreno.



Cuando se resuelven integrales con mas de tres variables, matlab presenta limitaciones para realizar los cálculos, por lo que se utilizó el programa derive para resolver dichas integrales, utilizando además cambios de variables.

En casos de diseños de sistemas de puesta a tierra de mas de dos electrodos, o si se particiona en dipolos muy pequeños, matlab se tarda un tiempo considerable en realizar los cálculos.

## RECOMENDACIONES

El desarrollo de una interfaz visual que permita al usuario observar la malla de puesta a tierra que se está generando, lo cual aumentaría la confianza en el uso del programa.

El diseño de un ciclo dentro del programa que permita el ingreso de electrodos o conductores inclinados, aproximándolos a particiones paralelas a los ejes de coordenadas.

La utilización del software por el Departamento de Potencia de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Central de Venezuela, con fines educativos y de investigación.

Continuar la investigación agregando al software varias capas de suelo, para hacer así el resultado más aproximado a la realidad.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Coordinación de Extensión, 2010] Coordinación de extensión. *Curso de Extensión de Conocimientos “Sistemas de Puesta a Tierra”*. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería.

[Dwight, 1936] Dwight H.B. *Calculation of Resistance to Ground*, AIEEE, Vol.55, N° 12.

[FONDONORMA, 2004] FONDONORMA. *Código Eléctrico nacional*.

[IEEE Std 80, 1986] IEEE 80-2000. *IEEE Guide for safety in AC Substation Grounding*. USA.

[Johnk, 1996] Johnk Carl. *Teoría Electromagnética. Campos y Ondas*. México.

[Trane, 2010] Trane, Library.

<<http://www.trane.com/commercial/library/vol273/fault.asp>> [consulta:2010]

## BIBLIOGRAFÍA

FONDONORMA 200-2004. *Código Eléctrico Nacional*, Caracas Venezuela.

Johnk, Carl T.(1996) *Teoría Electromagnética. Campos y Ondas*, Limusa Noriega EditoresMéxico.

Dwight H.B. (1936) *Calculation of Resistance to Ground*, AIEEE, Vol.55, N° 12.

Schwarz; S, (1954) *Analytical Expressions for the Resistance of Grounding Systems*, Transaction of the American Institute of Electrical Engineers, Part III-B, Power Apparatus and System, Vol. 73, pp 1011-1016.

Colomina Ignasi, Ambarina Fermín, Casteleiro Manuel, (2002) *A Numerical Formulation for Grounding analysis in Stratified Soils*, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 17, No 2.

Colominas, I; Navarrina, F.; Casteleiro, M., (1997) *Una Formulación Numérica General para el Cálculo y Diseño de Tomas de Tierra en Grandes Instalaciones Eléctricas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 13,3, pp. 383-401.

Coordinación de extensión. (2010) *Curso de Extensión de Conocimientos “Sistemas de Puesta a Tierra”*. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ingeniería.

IEEE 80-2000. (1986) *IEEE Guide for safety in AC Substation Grounding*. USA.

Trane, Library. <<http://www.trane.com/commercial/library/vol273/fault.asp>>  
[consulta: 2010]

## **ANEXOS**

[ANEXO N° 1]

[Integrales]

A continuación se presentan una de las 9 integraciones realizadas con el programa derive.

Suponiendo que la carga se encuentra en un electrodo en dirección de  $z'$ ,

$$\partial F = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \partial z'$$

$$F = \int_{z_1'}^{z_2'} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \partial z'$$

$$F = \ln \left( \frac{\sqrt{z^2 - 2 * z_2' * z + y^2 - 2 * y' * y + x^2 - 2 * x' * x + y'^2 + x'^2 + z_2'^2} - z + z_2'}{\sqrt{z^2 - 2 * z_1' * z + y^2 - 2 * y' * y + x^2 - 2 * x' * x + y'^2 + x'^2 + z_1'^2} - z + z_1'} \right)$$

Luego si el dipolo en el que se calculó la carga se encuentra en dirección del eje  $z$ , se puede asumir que  $x'=y'=0$ , por lo tanto  $F$  queda:

$$F = \ln \left( \frac{\sqrt{z^2 - 2 * z_2' * z + y^2 + x^2 + z_2'^2} - z + z_2'}{\sqrt{z^2 - 2 * z_1' * z + y^2 + x^2 + z_1'^2} - z + z_1'} \right)$$

Ahora, calculando la tensión sobre la superficie de un dipolo en dirección del eje  $x$

$$\int_{x_1}^{x_2} F \partial x = \int_{x_1}^{x_2} \ln \left( \frac{\sqrt{z^2 - 2^* z_2'^* z + y^2 + x^2 + z_2'^2} - z + z_2'}{\sqrt{z^2 - 2^* z_1'^* z + y^2 + x^2 + z_1'^2} - z + z_1'} \right) \partial x$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F \partial x = y^* \arctan \left( \frac{x_1^* (z - z_1')}{y^* \sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_1^2 + z_1'^2}} \right) - y^* \arctan \left( \frac{x_2^* (z - z_1')}{y^* \sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_2^2 + z_1'^2}} \right) -$$

$$y^* \arctan \left( \frac{x_1^* (z - z_2')}{y^* \sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_1^2 + z_2'^2}} \right) - y^* \arctan \left( \frac{x_2^* (z - z_2')}{y^* \sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_2^2 + z_2'^2}} \right) +$$

$$x_1^* \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_1^2 + z_1'^2} - z + z_1'}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_1^2 + z_2'^2} - z + z_2'} \right) + (z_1' - z)^* \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_1^2 + z_1'^2} + x_1}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_2^2 + z_1'^2} + x_2} \right) -$$

$$x_2^* \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_1'^* z + x_2^2 + z_1'^2} - z + z_1'}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_2^2 + z_2'^2} - z + z_2'} \right) + (z - z_2')^* \ln \left( \frac{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_1^2 + z_2'^2} + x_1}{\sqrt{y^2 + z^2 - 2^* z_2'^* z + x_2^2 + z_2'^2} + x_2} \right)$$



**[ANEXO N° 2]**

**[Calculation of Resistances to Ground]**

# Calculation of Resistances to Ground

Formulas for practical use in the calculation of the resistances from grounding conductors of various forms to the earth are given in this paper and their use illustrated by examples. The accuracy of the formulas varies considerably, as discussed in the paper, but is sufficiently good that the methods should be helpful to those whose work involves problems of grounding.

By  
H. B. DWIGHT  
FELLOW A I E E

Massachusetts Institute of  
Technology, Cambridge

**A**N ELECTRICAL CONNECTION to the ground requires consideration of the engineering problem of obtaining the lowest number of ohms to ground for a given cost. This problem involves the need of formulas for comparing different arrangements of ground conductors. A collection of such formulas for d-c resistance is given in this paper, with some discussion as to their relative accuracy. In order to compare 2 arrangements of conductors, it is usual to assume that they are both placed in earth of the same uniform conductivity. It is well-known that there is usually considerable variation of earth conductivity in the vicinity of ground conductors, but that effect is a separate problem.

## CYLINDRICAL CONDUCTOR

A very common type of ground connector is that of a vertical ground rod. Such a rod is an isolated cylinder and the flow of electricity from it into and through the ground is calculated by the same expressions as is the flow of dielectric flux from an isolated charged cylinder. That is, the problem of the resistance to ground of the ground rod is essentially the same as that of the capacitance of an isolated cylinder whose length is very great compared to its radius. The following formula for the latter case has been given by E. Hallén:<sup>1</sup>

$$\frac{C}{L} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1.22741}{4\lambda^2} + \frac{2.17353}{8\lambda^3} + \frac{11.0360}{16\lambda^4} \dots$$

where

$\lambda = \log_e (2L/a)$

$2L =$  length of the isolated cylinder in centimeters

$a =$  radius of the cylinder in centimeters

$C =$  capacitance in absolute electrostatic units, or statfarads

$\log_e$  denotes natural logarithm

By taking unity divided by this series, an expression is obtained which is more convenient for the present purpose, and which is more rapidly convergent, to a slight extent, as follows:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \left( \lambda - 0.306852 - \frac{0.17753}{\lambda} - \frac{0.5519}{\lambda^2} \dots \right) \quad (1)$$

This formula has been checked, and close agreement found, by a successive approximation calculation<sup>2</sup> in which uniform distribution of charge is first assumed and then other distributions of charge are successively added, so as to keep the potential of the cylinder the same throughout. The formula has been checked also by Dr. F. W. Grover<sup>3</sup> by a successive approximation method using mechanical integration.

An approximate method of calculation which is used for a great many shapes of conductors is the average potential method of Dr. G. W. O. Howe.<sup>4</sup> This consists in assuming uniform charge density over the surface of the conductor and calculating the average potential. Then the approximate capacitance is taken as equal to the total charge divided by the average potential. This method is correct within 2 or 3 parts in 1,000 for a long straight antenna wire, and within less than 1 per cent for a cylinder of the proportions of a ground rod. However, an estimate of its accuracy should be made for each shape or combination of conductors with which it is used, because in some cases it gives an error of several per cent. For example, it gives a value of  $1/C$  for a thin round plate which is 8 per cent too high (see the paragraph following equation 35).

Assuming a uniform charge density  $q$  per centimeter along the cylinder, on its curved surface, the potential at  $P$  (figure 1) because of the ring  $dy$  is, by equation 6, page 153, reference 10,

$$q \, dy \left[ \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^3} \left( \frac{3y^2}{r^2} - 1 \right) + \dots \right] \quad (2)$$

where  $r^2 = a^2 + y^2$  and  $y$  is the distance from  $P$  to the ring.

Integrate equation 2 from  $y = 0$  to  $L - x$  and also from 0 to  $L + x$ , obtaining the potential at  $P$  resulting from the parts of the cylinder to the right and left of  $P$ . Then multiply by  $dx/L$  and integrate from  $x = 0$  to  $L$ , giving the average potential of the cylinder resulting from uniform charge density on its curved surface, as follows:

$$\frac{V_{av}}{2q} = \log_e \frac{4L}{a} - 1 + \frac{a}{L} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \dots \right) - \frac{a^2}{L^2} \left( \frac{3}{16} - \frac{1}{32} \dots \right) + \frac{a^4}{L^4} \left( \frac{1}{64} - \frac{1}{1024} \dots \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{V_{av}}{2qL} = \frac{1}{L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 + 0.63 \frac{a}{L} - 0.18 \frac{a^2}{L^2} + 0.015 \frac{a^4}{L^4} \dots \right) \quad (4)$$

A paper recommended for publication by the A I E E committee on power transmission and distribution. Manuscript submitted July 22, 1936; released for publication September 4, 1936.

1. For all numbered references see list at end of paper.

If, as is often done, only the first term of equation is used, the result is

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \left( \log_e \frac{2L + \sqrt{a^2 + 4L^2}}{a} + \frac{a}{2L} - \sqrt{1 + \frac{a^2}{4L^2}} \right) \quad (5)$$

which, when expanded, becomes

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 + 0.5 \frac{a}{L} - 0.06 \frac{a^2}{L^2} + 0.002 \frac{a^4}{L^4} \dots \right) \quad (6)$$

It may be seen that equation 6 does not have the right coefficients for terms in  $a/L$  and so equations 6 and 5 should not be used. For long cylinders of the proportions of wires or vertical ground rods, the

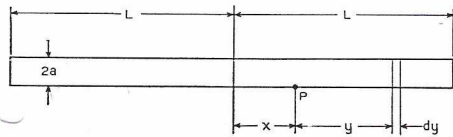


Fig. 1 (above). Cylindrical conductor

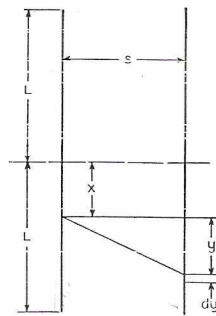


Fig. 2 (left). Two rods connected in parallel

terms in  $a/L$  and its powers are of very small effect and may be omitted, thus giving the practical formula

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) \quad (7)$$

This gives an error of less than one per cent in practical cases of resistance to ground. The error is due to the approximation inherent in the average potential method and if a more accurate formula is desired, equation 1 should be used. The small error in equation 7 cannot be avoided by including terms in  $a/L$  or by using more complicated expressions in logarithms or inverse hyperbolic functions such as equation 5 or its equivalent forms.

The formula

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \log_e \frac{2L}{a} \quad (8)$$

which is based on the capacitance of an ellipsoid of revolution of the same diameter and length as the

cylinder, has a larger error than equation 7, and should not be used. Logarithms to base 10 may be used, by noting that  $\log_e p = 2.303 \log_{10} p$ .

The method of changing a formula for capacitance into one for resistance to ground, or through the ground, may be found by considering the simple case of 2 parallel plates whose distance apart is small and the effect of whose edges may be neglected.

If each of the 2 plates has an area of  $B$  square centimeters and if the charge density on one is  $q$  per square centimeter and that on the other  $-q$  per square centimeter, the number of lines of dielectric flux through air from one plate to the other is  $4\pi qB$ . The volts per centimeter in the space between the plates is equal to  $4\pi q$ , the density of the lines, and the potential difference  $V$  between the plates is  $4\pi qs$ , where the separation of the plates is  $s$  centimeters. Then

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{qB} = \frac{4\pi s}{B} \quad (9)$$

For the flow of electricity between the same plates when they are embedded in earth of resistivity  $\rho$  abohms per centimeter cube, the resistance between the plates in abohms is

$$R = \frac{\rho s}{B} \quad (10)$$

Thus in this case,

$$R = \frac{\rho}{4\pi C} \quad (11)$$

where  $C$  is in statfarads. If  $\rho$  is in ohms per centimeter cube,  $R$  will be in ohms. Equation 11 shows merely the relation between the units and has nothing to do with the geometry of the flow of dielectric flux and current which in equations 9 and 10 is represented by the letters  $s/B$ . Equation 11 applies to any conductor or combination of conductors (see reference 11, appendix III, page 219).

The resistance of a buried straight wire of length  $2L$  centimeters, no part of which is near the surface of the ground, is given by equations 7 and 11 and is

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) \quad (12)$$

A vertical ground rod which penetrates to a depth of  $L$  centimeters must be considered along with its image in the ground surface. The voltage and the shape of current flow are the same as for a completely buried cylinder of length  $2L$  centimeters, but the total current is half as much, making the resistance twice as great. Therefore, the resistance to ground of a vertical ground rod of depth  $L$  centimeters is

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) \quad (13)$$

In general, if  $C$  includes the capacitance of the images of a conductor or conductors in the earth, the resistance to ground is

$$R = \frac{\rho}{2\pi C} \quad (14)$$

Vertical ground rods are widely used, sometimes in large groups, because they can be driven in place with little or no excavation and because they are likely to reach permanent moisture and earth of good conductivity.

#### TWO GROUND RODS IN PARALLEL

Let 2 ground rods of radius  $a$  centimeters be as shown in figure 2, and let them be electrically in parallel. Find the air capacitance  $C$  of the 2 rods and their images, that is, of 2 cylinders each of length  $2L$ . Let the cylinders have a uniform charge of  $q$  per centimeter. The potential at a point on one cylinder at a distance  $x$  from its center, caused by  $q dy$  on the other cylinder, is

$$\frac{q dy}{\sqrt{s^2 + y^2}}$$

The potential at  $x$  caused by the other cylinder is obtained by integrating this expression from  $y = 0$  to  $L - x$  and from  $y = 0$  to  $L + x$ . The average potential on one cylinder caused by uniform charge on the other is then obtained by multiplying by  $dx/L$  and integrating from  $x = 0$  to  $L$ , and is

$$2 \log_e \frac{2L + \sqrt{s^2 + 4L^2} + \frac{s}{L} - \frac{\sqrt{s^2 + 4L^2}}{L}}{s} \quad (15)$$

For large values of  $s/L$ , this becomes

$$\frac{2qL}{s} \left( 1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2L^4}{5s^4} \dots \right) \quad (16)$$

For small values of  $s/L$ , it is

$$2q \left( \log_e \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right) \quad (17)$$

Add the average potential of the cylinder caused by its own charge,

$$\frac{2qL}{C} = 2q \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) \quad (18)$$

Divide by  $4qL$ , the total charge on the 2 cylinders, thus obtaining the value of  $1/C$  for the pair of ground rods and their images. Then, by equation 14, the resistance to ground of the pair of rods is

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 + \log_e \frac{2L + \sqrt{s^2 + 4L^2}}{s} + \frac{s}{2L} - \frac{\sqrt{s^2 + 4L^2}}{2L} \right) \quad (19)$$

or, for large values of  $s/L$ ,

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4\pi s} \left( 1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2L^4}{5s^4} \dots \right) \quad (20)$$

or, for small values of  $s/L$ ,

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \log_e \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right) \quad (21)$$

A short alternative calculation for equation 20, which is found by trial to be good for spacings of 20 feet or more, is to replace each ground rod by a half-buried sphere which is equivalent in resistance

to one isolated ground rod. This procedure can be illustrated by a numerical example. The resistance to earth of a ground rod of  $3/4$ -inch diameter and 10-foot depth, by equation 13, is

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \times 6.155$$

The hemisphere which is buried and its image above the ground surface make a complete sphere whose air capacitance as an isolated conductor is, by a well known proposition, equal to its radius  $A$  in centimeters. By equation 14, the resistance to ground of the hemisphere is

$$R = \frac{\rho}{2\pi A}$$

Then the radius of the hemisphere which is equivalent to the isolated ground rod is, by equation 13,

$$A = \frac{L}{\log_e \frac{4L}{a} - 1} = \frac{L}{6.155}$$

Here,  $A$  and  $L$  may be both in centimeters or both in feet and so  $A = 10/6.155 = 1.625$  feet.

The capacitance of 2 equal spheres at a distance  $s$ , center to center, connected in parallel, is readily calculated when  $s$  is not small and the charges can be assumed uniformly distributed around the spheres. By symmetry, the spheres will carry equal charges. Let each charge be  $q$ . The potential of the surface of each sphere is

$$q \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{s} \right)$$

and

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{s} \right)$$

where the dimensions are in centimeters. Then

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{s} \right) \quad (20a)$$

This is the same as using the first term of the second part of equation 20.

From numerical examples, it is found that the results of equations 19 and 20a differ by about 0.5 per cent for 20-foot spacing between 2 ground rods, and by a few per cent for 10-foot spacing.

#### GROUPS OF GROUND RODS

The potential of a rod caused by its own charge and the charges of several other rods can be found by using equation 16 or 17 several times. Similarly, the potential of the surface of a sphere caused by its own charge and the charges of a number of other spheres is

$$\frac{q_1}{A} + \frac{q_2}{s_2} + \frac{q_3}{s_3} + \dots$$

where for an approximate calculation  $q_1, q_2, q_3$ , etc., may be assumed equal.

For somewhat better accuracy, the values of  $q$  for the rods near the center of the group may be taken a little lower than the values for the rods near the outer parts of the group, by an amount sufficient to make the potential of each rod the same. Thus the values for the outer parts may be taken equal to  $q$ , and others to  $0.95q$ ,  $0.9q$ , etc., according to judgment and to the test of equal potentials.

In order to design groups of ground rods for transmission line towers, stations and substation grounds, etc., and to decide on the best number and spacing of rods, it is desirable to be able to compare various groups of rods, assuming uniform conductivity of the soil. Accordingly, sets of curves are given in figures 3 to 6.<sup>2</sup> From them it is possible to estimate how many rods and how much area will be required for a certain number of ohms to ground in a given locality, from measurements on a few temporary test ground rods.

The basis of comparison is the resistance of one isolated ground rod of  $\frac{3}{4}$ -inch diameter and 10-foot depth. By means of figure 3, the resistance of single rods of various depths can be found and, if desired, the resistivity of the soil. In figure 4 the conductivity of 2, 3, and 4 rods is given in terms of the conductivity of isolated rods, and in figure 5 results are shown for larger numbers of rods.

In figure 6 the information is presented in different form, and the lowest resistance that can be obtained from a given area is shown. This information is often of value as it may be the means of preventing the wasteful attempt of putting additional ground rods in an area which could not give the desired low resistance even if an infinite number of rods were used. For instance, if 36 ground rods are distributed as in figure 7 over a square area of 10,000 square

feet, that is, 100 by 100 feet, the spacing will be 20 feet. Figure 6 shows that the resistance is 1.3 times the resistance of an infinite number of rods in the same area. Therefore, no matter what the resistance in ohms may be or what the uniform conductivity of the ground may be, if it is desired to have less than 75 per cent of the resistance with 36 rods there is no use in putting more rods in the area of 10,000 square feet but it will be necessary to use a larger area.

Figure 6 shows also that if there are more than 10 rods 10 feet deep, there is no use in having closer than 10-foot spacing.

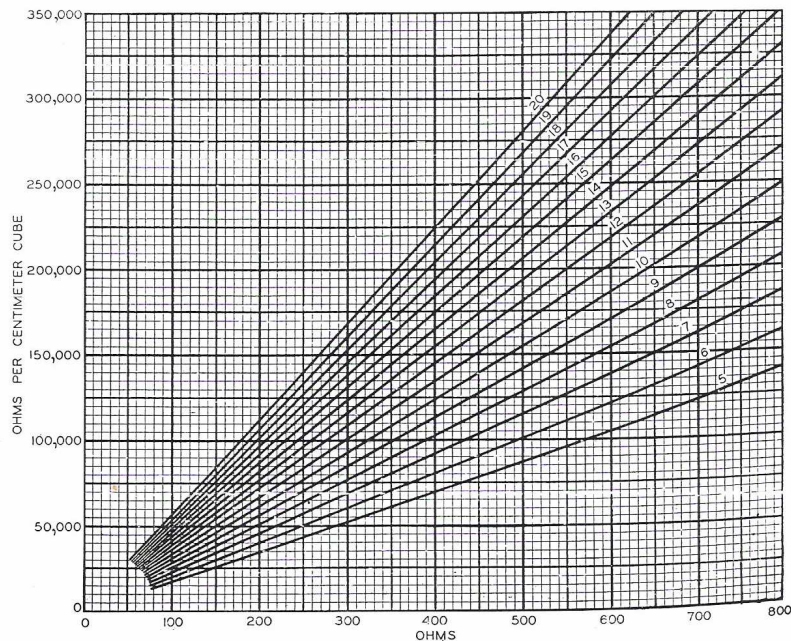
It is generally desirable not only to utilize the ground area effectively, but to make effective use of the rods, inasmuch as they represent a considerable cost. If one wishes the rods to be at least 60 per cent as effective as they would be if isolated, that is, to have at least 60 per cent of the conductivity of isolated rods, it may be seen from both figures 5 and 6 that it is necessary to use over 20-foot spacing for 16 rods in a square area, about 30-foot spacing for 25 rods, and over 40-foot spacing for 49 rods.

The curves of figures 5 and 6 are based on uniform distribution of ground rods in square areas, as shown in figure 7, the boundary of the area running through the outer rods. Although the curves are computed for square areas, they give an estimate for rectangular areas. The curves cannot be used for a part of a group of rods nor for a group which is near other groups, but a reading from the curves is to apply to

Fig. 3. Resistance of one ground rod of  $\frac{3}{4}$ -inch diameter

For low resistances divide both scales by 10; for high resistances multiply both scales by 10

Numbers on curves are depths in feet



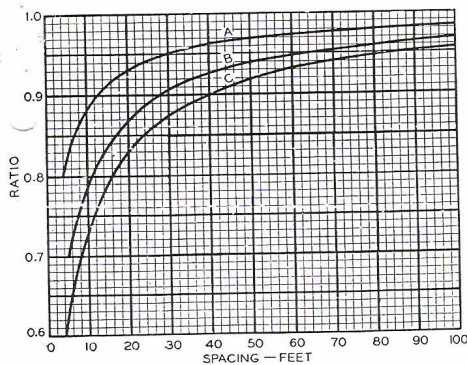


Fig. 4. Ratio of conductivity of ground rods in parallel to that of isolated rods

Ground rods are  $\frac{3}{4}$  inch in diameter, 10 feet deep; 3 rods on equilateral triangle, 4 rods on square  
 A—Two rods      B—Three rods      C—Four rods

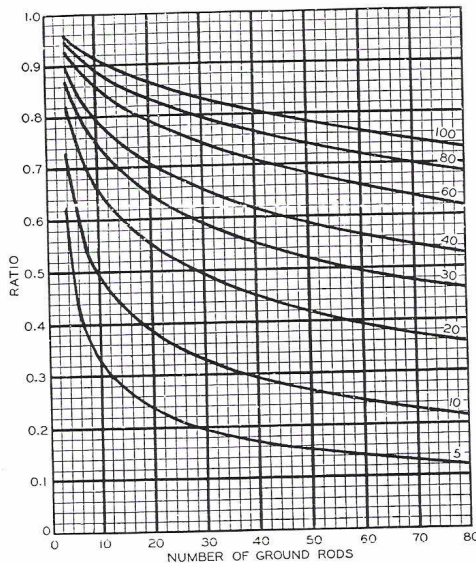


Fig. 5. Ratio of conductivity of ground rods in parallel on an area to that of isolated rods

Numbers on curves are spacings in feet

area which contains all the ground rods in the infinity.

In the calculation of cases involving more than 4 rods or the spheres which were substantially equivalent to them, equal charges were assumed for the spheres. The potential of a corner sphere was calculated and that of an innermost sphere and the average taken, thus approximating the Howe average potential method. For a small number of spheres this was checked and good agreement obtained by computing the actual charges by simultaneous equations. For a large number of ground rods, the results shown in figures 5 and 6 are approximate.

The effect of the buried wires used to connect the ground rods together was not included in the computations for the figures which have been described. If the conductivity of each ground rod be assumed to be increased by the same percentage by the connecting wires, the latter will have little effect on the comparison of different groups of rods made by means of the curves.

#### BURIED HORIZONTAL WIRE

In some cases, connection to the earth is made by means of a buried horizontal wire. The image of this wire in the ground surface requires the use of equation 19 or 21 where, in this case, the length of the buried wire is  $2L$  centimeters and the distance from the wire to its image is  $s$  centimeters, which is twice the distance from the wire to the ground surface. If the image were not taken into account, a serious change in the result would often ensue.

*Example.* Length of No. 4/0 wire, 200 feet; depth, 10 feet;  $\rho$ , 200,000 ohms per centimeter cube.  $R = 57.6$  ohms

#### TWO PARALLEL BURIED WIRES

The resistance to ground of 2 parallel buried wires, including the effect of their images in the ground

surface, is calculated by the same method as for 4 ground rods at the corners of a rectangle. The average potential of one of the wires caused by its own charge, equation 18, is to be added to the average potential caused by each of the other wires. Thus, one item is to be computed by equation 18 and 3 items by equation 15 or 17, using 3 values of  $s$ . The sum, divided by the total charge of the 4 wires,  $8qL$ , is  $1/C$  and then equation 14 can be applied.

*Example.* To find: the resistance to ground of 2 wires, 100 feet long, 0.46 inch in diameter, 7 feet apart, and 10 feet below the surface of the ground, the resistivity of the ground being 200,000 ohms per centimeter cube. The wires are connected in parallel, electrically.

Potential of a wire caused by its own charge, by equation 18	16.51 $q$
Potential by equation 15 or 17 for $s = 7$	4.84 $q$
Potential by equation 15 or 17 for $s_1 = 20$	2.99 $q$
Potential by equation 15 or 17 for $s_2 = 21.19$	2.89 $q$
Potential	27.23 $q$

Total charge =  $4 \times 1200 \times 2.540 \times q = 12,190 q$

$$\frac{1}{C} = \frac{27.23}{12,190}$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi C} = \frac{200,000 \times 27.23}{2\pi \times 12,190} = 71.1 \text{ ohms}$$

#### RIGHT-ANGLE TURN OF WIRE

If the buried wire forms a right angle each arm of which is  $L$  centimeters in length the depth below

The ground surface being  $s/2$ , the resistance to ground including the effect of the image wires is

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \dots \right) \quad (22)$$

where  $a$  is the radius of the wire.

*Example.* Length of each arm of No. 4/0 wire, 100 feet; depth, 10 feet;  $\rho$ , 200,000 ohms per centimeter cube.  $R = 59.4$  ohms

#### THREE-POINT STAR

If there are 3 buried wires of length  $L$  which meet each other at 120 degrees, the resistance to ground including the effect of images is

$$R = \frac{\rho}{6\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 1.071 - 0.209 \frac{s}{L} + 0.238 \frac{s^2}{L^2} - 0.054 \frac{s^4}{L^4} \dots \right) \quad (23)$$

*Example.* Length of each arm of No. 4/0 wire, 100 feet; depth, 10 feet;  $\rho$ , 200,000 ohms per centimeter cube.  $R = 43.9$  ohms

#### FOUR-POINT STAR

$$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 2.912 - 1.071 \frac{s}{L} + 0.645 \frac{s^2}{L^2} - 0.145 \frac{s^4}{L^4} \dots \right) \quad (24)$$

*Example.* Same values of dimensions as for 3-point star.  $R = 37.3$  ohms

#### SIX-POINT STAR

$$R = \frac{\rho}{12\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 6.851 - 3.128 \frac{s}{L} + 1.758 \frac{s^2}{L^2} - 0.490 \frac{s^4}{L^4} \dots \right) \quad (25)$$

*Example.* Same values of dimensions as for 3-point star.  $R = 31.1$  ohms

#### EIGHT-POINT STAR

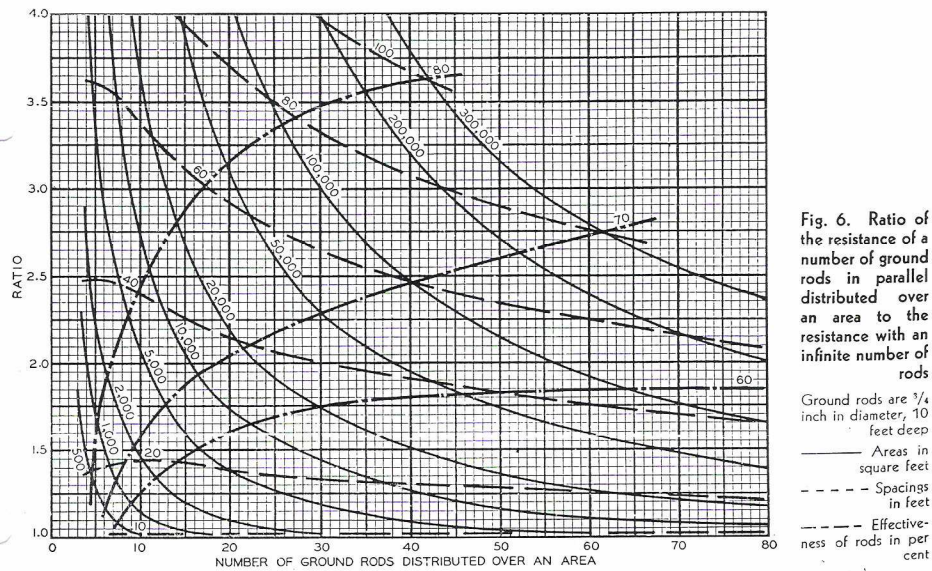
$$R = \frac{\rho}{16\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 10.98 - 5.51 \frac{s}{L} + 3.26 \frac{s^2}{L^2} - 1.17 \frac{s^4}{L^4} \dots \right) \quad (26)$$

*Example.* Same values of dimensions as for 3-point star.  $R = 28.2$  ohms

Equations 22 to 26, being simple power series, save considerable time in computing numerical results.

If  $L$  is in centimeters and  $\rho$  in ohms per centimeter cube,  $R$  is in ohms. Also, if  $L$  is in inches and  $\rho$  in ohms per inch cube,  $R$  is in ohms. Inside the brackets, only ratios of dimensions occur. The numerator of each fraction must be in the same units as the denominator of that fraction. Note that  $s$  is the distance from the wire to the image, and is twice the distance from the wire to the ground surface.

In order to estimate relative accuracy, the potential of the wire at various distances from the center of a 4-point star was plotted and compared with the potential distribution of a round plate. The poten-
















tial distribution in the 2 cases showed approximately the same amount of deviation from the average potential. Accordingly, it can be concluded that the resistance of stars of wire obtained by

on another equal wire which meets it at one end at angle  $\theta$  is given by the simplified expression

$$V_{av} = 2g \log_e [1 + \operatorname{cosec} (\theta/2)] \quad (27)$$

Table I—Approximate Formulas Including Effect of Images

	One Ground Rod Length $L$ , radius $a$	$R = \frac{\rho}{2\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right)$	(13)
	Two Ground Rods $s > L$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} - 1 \right) + \frac{\rho}{4\pi s} \left( 1 - \frac{L^2}{3s^2} + \frac{2}{5} \frac{L^4}{s^4} \dots \right)$	(20)
	Two Ground Rods $s < L$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \log_e \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$	(21)
	Buried Horizontal Wire Length $2L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \log_e \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$	(21)
	Right-Angle Turn of Wire Length of arm $L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} - 0.2373 + 0.2146 \frac{s}{L} + 0.1035 \frac{s^2}{L^2} - 0.0424 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$	(22)
	Three-Point Star Length of arm $L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{6\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 1.071 - 0.209 \frac{s}{L} + 0.238 \frac{s^2}{L^2} - 0.054 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$	(23)
	Four-Point Star Length of arm $L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 2.912 - 1.071 \frac{s}{L} + 0.645 \frac{s^2}{L^2} - 0.145 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$	(24)
	Six-Point Star Length of arm $L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{12\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 5.851 - 3.128 \frac{s}{L} + 1.758 \frac{s^2}{L^2} - 0.490 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$	(25)
	Eight-Point Star Length of arm $L$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{16\pi L} \left( \log_e \frac{2L}{a} + \log_e \frac{2L}{s} + 10.98 - 5.51 \frac{s}{L} + 3.26 \frac{s^2}{L^2} - 1.17 \frac{s^4}{L^4} \dots \right)$	(26)
	Ring of Wire Diameter of ring $D$ , diameter of wire $d$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{2\pi^2 D} \left( \log_e \frac{8D}{d} + \log_e \frac{4D}{s} \right)$	(29)
	Buried Horizontal Strip Length $2L$ , section $a$ by $b$ , depth $s/2$ , $b < a/8$	$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - \pi ab}{2(a+b)^2} + \log_e \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$	(31)
	Buried Horizontal Round Plate Radius $a$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left( 1 - \frac{7}{12} \frac{a^2}{s^2} + \frac{33}{40} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$	(32), (36)
	Buried Vertical Round Plate Radius $a$ , depth $s/2$	$R = \frac{\rho}{8a} + \frac{\rho}{4\pi s} \left( 1 + \frac{7}{24} \frac{a^2}{s^2} + \frac{99}{320} \frac{a^4}{s^4} \dots \right)$	(32), (38)

equations 23 to 26 is an approximation within several per cent.

In deriving the formulas for stars of wire, the average potential on one branch caused by its own charge is computed and added to that caused by each of the other branches and the images. The total potential, divided by the total charge of all the branches and their images, gives  $1/C$  and then equation 14 is used.

For these computations, the formulas in appendix 2 of reference 3 are used. In this connection, the average potential of one wire caused by the charge

if  $\theta$  should be extremely small, the radius of the wire would need to be brought into the computation, and equation 27 would be inapplicable.

#### BURIED RING OF WIRE

The capacitance of an isolated ring of round wire is given by

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{\pi D} \log_e \frac{8D}{d} \quad (28)$$

where the diameter of the ring,  $D$  centimeters, is



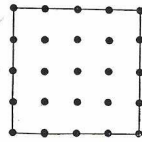


Fig. 7. Distribution of ground rods used for calculating the curves

much larger than the diameter of the wire,  $d$  centimeters. The resistance to ground of a deeply buried ring is then  $R = \rho/4\pi C$  as in equation 11.

The capacitance of a ring and its image at distance  $s$  is given by

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\pi D} \left( \log_e \frac{8D}{d} + \log_e \frac{4D}{s} \right) \quad (29)$$

where  $s$  is considerably larger than  $d$  and also considerably smaller than  $D$ .<sup>12</sup> The resistance to ground of a buried horizontal ring, taking the effect of the ground surface into account, is then  $R = \rho/2\pi C$  as in equation 14. Note that  $s$  is twice the distance from the ring to the ground surface.

#### BURIED STRIP CONDUCTOR

The capacitance of an isolated strip conductor, whose length  $2L$  centimeters is large compared with its width  $a$  centimeters or its thickness  $b$  centimeters, is given by

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - \pi ab}{2(a+b)^2} \right) \quad (30)$$

For a description of the derivation, see equation 27 of reference 2. The thickness  $b$  should be less than about  $1/8$  of the width  $a$ .

In most cases, the effect of the image should be included, as follows:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2L} \left( \log_e \frac{4L}{a} + \frac{a^2 - \pi ab}{2(a+b)^2} + \log_e \frac{4L}{s} - 1 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right) \quad (31)$$

where  $s$  is the distance in centimeters from the strip to the image, that is, twice the distance to the ground surface. The resistance to ground, when equation 31 is used, is  $R = \rho/2\pi C$  as in equation 14.

#### ROUND PLATE

The capacitance of a single isolated thin round plate is given by<sup>13</sup>

$$\frac{1}{C} = \frac{\pi}{2a} = \frac{1.571}{a} \quad (32)$$

where  $a$  is the radius of the plate in centimeters.

It is of interest to show that the average potential method, if used in this case, produces an error of 8 per cent, giving a value of  $1/C$  which is 8 per cent too large. Expressions for the potential caused by a ring carrying uniform charge density are given in reference 10, pages 11 and 153. From these is obtained the average potential of a thin round plate of radius  $a$  centimeters caused by a uniform charge

density  $q$  per square centimeter in the form of 3 series whose sum is

$$V_{av} = \frac{2\pi q a^2}{3} \left( 2 + \frac{1}{4} + \frac{3^2}{4^2 \times 6} + \frac{3^2 \times 5^2}{4^2 \times 6^2 \times 8} + \dots \right) \quad (33)$$

The sum of this slowly converging series can be found by comparing it with the series

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (34)$$

Multiply the terms within the brackets of equation 33 by 0.401723 to make the eleventh terms of equations 33 and 34 alike. It is found that  $1/C$  or  $V_{av}/\pi a^2 q$  is slightly greater than  $1.69721/a$ . Multiply the terms within the bracket of equation 33 by 0.329595 to make its tenth term equal to the eleventh term of equation 34 and all its succeeding terms distinctly less than the corresponding terms of equation

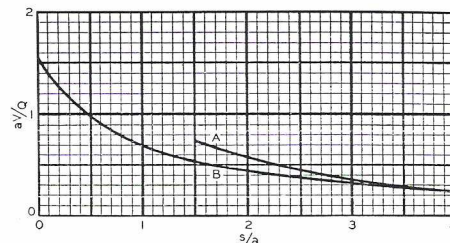


Fig. 8. Average potential on a round plate caused by an equal plate

A - Same plane  
B - Parallel planes  
 $a$  - radius of plates in centimeters

34. It is found that  $1/C$  is less than  $1.70169a$ . The difference between the 2 limiting values is 0.27 per cent and an inspection of the series shows that the value of  $1/C$  by the average potential method is much nearer the smaller limit than the larger, and so is nearly equal to

$$\frac{1.6972}{a} \quad (35)$$

The true value of  $1/C$  is, however, by equation 32,

$$\frac{\pi}{2a} = \frac{1.5708}{a}$$

The average potential method, therefore, gives a value of  $1/C$  for a thin round plate which is 8 per cent too high.

This result has been confirmed by Dr. F. W. Grover by a method using mechanical integration, which gave

$$\frac{V_{av}}{\pi a^2 q} = \frac{1.6966}{a}$$

There is a connection between the error caused by the average potential method and the amount of the

variation in potential over the conductor caused by uniform charge distribution. The potential of the center of the plate resulting from uniform charge distribution is  $2\pi a q$ , using the formulas of reference 10. However, the average value is

$$\frac{.97}{a} \times \pi a^2 q = 1.697\pi a q$$

Thus, the potential of the center is seen to be 18 per cent higher than the average potential. This comparatively large percentage may account in some degree for the 8 per cent error in the case of a round plate, resulting from the use of the average potential method. In the case of the cylinder of the length considered in this paper, the potential of the middle point was 4.7 per cent higher than the average potential (see reference 2) and in that case the average potential method was shown to give a very nearly correct value of  $1/C$ .

#### TWO ROUND PLATES IN PARALLEL PLANES

The potential caused by a charged round plate, at points not near the plate, is given by the last series on page 154 of reference 10. Integrating that series over the surface of a second disk having the same axis and the same length of radius as the first, the average potential on the second disk caused by the charge on the first is

$$V_{av} = \frac{Q}{s} \left( 1 - \frac{7}{12} \frac{a^2}{s^2} + \frac{33}{40} \frac{a^4}{s^4} \dots \right) \quad (36)$$

where  $Q$  is the total charge in statfarads on the first disk,  $a$  is the radius in centimeters of both plates, and  $s$  is the distance in centimeters between the 2 plates.

This power series should not be used unless the last term is quite small and so the largest value of  $a/s$  for which it is useful is about  $1/2$ . Since equation 36 gives the average potential, it is not a precise calculation for capacitance or resistance. However, the order of its precision may be estimated by finding the potential at the center of the second disk, which is  $(Q/s) \tan^{-1}(a/s)$  (see the series on page 154 of reference 10).

Where  $s = 2a$ , the potential at the center is 4 per cent greater than the average potential, and for larger values of the separation  $s$  the discrepancy is smaller. It may be remembered that for one isolated round plate the potential of the center was 18 per cent more than the average potential, and the error in the value of capacitance was 8 per cent. In the case of the calculation for one isolated ground rod of average proportions the potential at the middle of the cylinder is 4.7 per cent greater than the average potential, and the error in the capacitance is less than 1 per cent.<sup>2</sup> It may be concluded that the use of average potential gives the same order of accuracy in the case of equation 36 as in the case of a long cylinder.

Values of  $aV/Q$  calculated by equation 36 are plotted in figure 8. This curve has been extended to apply to small values of  $s$  by taking the average values obtained by using the 2 series on page 154, reference 10, to compute the potential at the rim and at the center of the second disk caused by the charge on the first disk. This process is shown to give good results by comparing it with equation 36 for  $s/a$  between 2 and 4. The potential at the rim is equal to the potential at the center when  $s = 0$ . More accurate values for the curve of figure 8 could be computed by dividing the circular area into

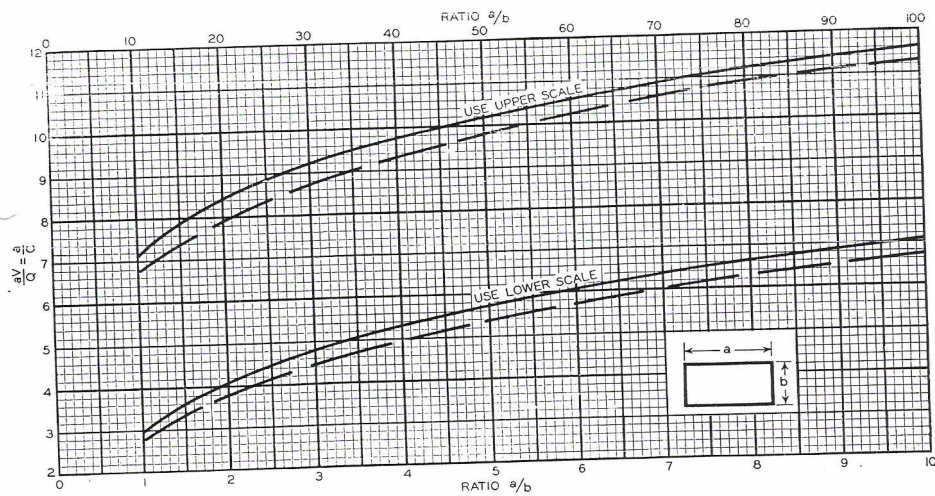


Fig. 9. Capacitance of a rectangular plate  
Dimension  $a$  in centimeters;  $C$  in statfarads

bands, computing the potential for each band, and averaging, this being a process of mechanical integration. However, no matter how carefully this might be done, the result would be subject to the error inherent in the average potential method.

It may be seen from equation 36 that when the separation is large, the potential on one plate caused by the other is given closely by

$$V = \frac{Q}{s} \quad (37)$$

which is the same as assuming that the charge is on the surface of a sphere, or concentrated at a point. For example, when  $s/a = 5$ , the result of equation 37 is 2 per cent larger than that of equation 36 and the value of  $Q/s$  itself is only 13 per cent of the potential of an isolated plate to which it is to be added. Accordingly, equation 37 can usually be used for the images of the buried plates, which are at distances  $s_1$  and  $s_2$ , center to center.

Where the 2 round plates are connected in parallel, then in the capacitance problem the plates and their images all carry charges equal to  $Q$ . By symmetry, the potential is the same for them all, and is made up of the following 4 items which are added together. First, the potential,  $\pi Q/(2a)$ , given by equation 32, caused by the plate's own charge; second, the potential given by equation 36, caused by the other coaxial buried plate which lies in a vertical plane parallel to that of the first plate; third, the potential  $Q/s_1$ , caused by the plate's image, where  $s_1$  is the distance in centimeters from the center of the plate to the center of the image, that is,  $s_1$  is twice the distance to the surface of the ground; fourth, the potential  $Q/s_2$ , caused by the other image.

The sum of these 4 items is equal to  $V$  and the capacitance of the 4 plates is given by  $1/C = V/(4Q)$ . Then the resistance to ground of the 2 buried plates connected in parallel is  $R = \rho/(2\pi C)$  by equation 14.

Where the 2 round plates are connected in series, in the resistance problem current flows from one to the other through the ground and in the capacitance problem one plate carries a charge  $Q$  and the other  $-Q$ . The images carry charges  $Q$  and  $-Q$ , each being of the same sign as the charge directly beneath it. Equations 11 and 14 are still used to change from the capacitance problem to the resistance problem.

#### TWO ROUND PLATES IN THE SAME PLANE

Where the 2 plates of radius  $a$  in centimeters are in the same plane, the average potential on one resulting from the charge on the other is

$$V_{\pi\pi} = \frac{Q}{s} \left( 1 + \frac{7}{24} \frac{a^2}{s^2} + \frac{99}{320} \frac{a^4}{s^4} + \dots \right) \quad (38)$$

In this case, there is more error in the use of average potential than in equation 36, for when  $s/a = 2$ , the potential at the center differs from the average potential by 19 per cent. As in other cases, if the term in  $a^2/s^2$  is negligibly small compared to 1, the simple expression  $Q/s$  may be used

and the error resulting from the use of average potential is negligible.

#### RECTANGULAR PLATES

The capacitance of an isolated thin rectangular plate,  $a$  centimeters by  $b$  centimeters, according to the average potential method, is given by<sup>9</sup>

$$\frac{1}{C} = 2 \left( \frac{1}{a} \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} + \frac{1}{b} \log_e \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} + \frac{a}{3b^2} + \frac{b}{3a^2} - \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{a^2 + b^2}}{3a^2b^2} \right) \quad (39)$$

The potential of the center of a square plate is 18 per cent greater than the average potential, and this difference is 15 per cent for a rectangle whose length is 5 times its width. Accordingly, the correction for the average potential method found for a circular plate will apply, and 8 per cent should be subtracted from the value of  $1/C$  given by equation 39 for a square or nearly square plate, and almost as much should be subtracted for a rectangular plate of length about 5 times the width. The full lines of figure 9 show values calculated by equation 39 and the broken lines show estimated corrected values (see the paragraphs following equation 32 of reference 2).

A formula for the average potential of a rectangular plate caused by a uniformly distributed charge on a similar plate in the same plane can be given but it is not short and it is subject to the errors inherent in the average potential method. It seems better to replace the rectangular plates by circular plates of the same area and on the same centers, and to use equation 36, 37, or 38 for the effect of one plate on another.

#### REFERENCES

1. LÖSUNG ZWEIER POTENTIALPROBLEME DER ELEKTROSTATIK, E. Hallén, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, v. 21A, No. 22, 1929 Stockholm.
2. CALCULATION OF RESISTANCES TO GROUND AND OF CAPACITANCE, H. B. Dwight, *Journal of Mathematics and Physics*, v. 10, 1931, No. 1, p. 50.
3. METHODS, FORMULAS AND TABLES FOR THE CALCULATION OF ANTENNA CAPACITY, F. W. Grover, Scientific Paper No. 568 of the Bureau of Standards, Washington, D. C., 1928, page 569.
4. CAPACITY OF RADIO-TELEGRAPH ANTENNAE, G. W. O. Howe, *The Electrician*, v. 73, 1914, p. 829, 839, and 906.
5. CAPACITY OF ARRAYS OF THE UMBRELLA TYPE, G. W. O. Howe, *The Electrician*, v. 75, 1915, p. 870.
6. CALCULATION OF THE EFFECTIVE RESISTANCE OF EARTH PLATES, G. W. O. Howe, *The Electrician*, v. 76, 1915, p. 353.
7. CALCULATION OF THE CAPACITY OF RADIO-TELEGRAPH ANTENNAE INCLUDING THE EFFECT OF MASTS AND BUILDINGS, G. W. O. Howe, *The Electrician*, v. 77, 1916, p. 761 and 880.
8. CAPACITY OF AN INVERTED CONE AND THE DISTRIBUTION OF ITS CHARGE, G. W. O. Howe, *Physical Society of London Journal*, v. 29, 1917, p. 339.
9. CAPACITY OF RECTANGULAR PLATES AND A FORMULA FOR CAPACITY OF ARRAYS, G. W. O. Howe, *Radio Review*, Nov. 1920, p. 710.
10. FOURIER'S SERIES AND SPHERICAL, CYLINDRICAL, AND ELLIPSOIDAL HARMONICS (a book), W. E. Byerly, Ginn and Company, Boston, Mass., 1893.
11. GROUND CONNECTIONS FOR ELECTRICAL SYSTEMS, Technologic Paper No. 108 of the Bureau of Standards, Washington, D. C.
12. DIE AUSBREITUNG DER LÜFT- UND ERDFELDER UM HOCHSPANNUNGSLEITUNGEN BESONDERS DRI ESD- UND KURZSCHLÜSSEN, R. RÜDENBERG, *Elektrotechnische Zeitschrift*, v. 46, Sept. 3, 1925, p. 1342.
13. THE NEWTONIAN POTENTIAL FUNCTION (a book), B. O. Peirce, Ginn & Co., Boston, Mass., 1902, p. 161.
14. BRDSTRÖME (a book), F. Ollendorff, Julius Springer, Berlin, 1928.