

*Formulación Canónica e Invariantes
de Nudo en Teorías Topológicas Abelianas*

Br. Julio Torres

Tutores: Dr. Lorenzo Leal
Dr. Ernesto Contreras

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 1 de julio del año 2014



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

**FORMULACIÓN CANÓNICA E INVARIANTES
DE NUDO EN TEORÍAS TOPOLÓGICAS
ABELIANAS**

Br. Julio Torres

Dr. Lorenzo Leal, Tutor

Dr. Ernesto Contreras, Tutor

Caracas, 1 de julio del año 2014

**Formulación Canónica e Invariantes
de Nudo en Teorías Topológicas Abelianas**

Copyright © 2014

Universidad Central de Venezuela
Julio Torres

FORMULACIÓN CANÓNICA E INVARIANTES
DE NUDO EN TEORÍAS TOPOLÓGICAS ABELIANAS

Br. Julio Torres

*Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de*
Licenciado en Física.

Dr. Lorenzo Leal, Tutor

Fecha

Dr. Ernesto Contreras, Tutor

Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Julio Torres, titulado: “**Formulación Canónica e Invariantes de Nudo en Teorías Topológicas Abelianas**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dr. Lorenzo Leal, Tutor

Fecha

Dr. Ernesto Contreras, Tutor

Fecha

Dr. Ernesto Fuenmayor

Fecha

Dr. José López

Fecha

Caracas, 1 de julio del año 2014

A Dios.

A mis abuelos José, Hilda y Josefina.

A mis padres Gustavo y Fanny.

Agradecimientos

Después de tanto trabajo agradezco inicialmente a Dios por haberme sostenido con su mano durante toda la carrera y especialmente durante la realización del TEG, y por haberme permitido vivir cada uno de los momentos que fueron vitales para llegar hasta aquí.

Agradezco a mis tutores el Dr Lorenzo Leal y al Dr Ernesto Contreras por su disposición a enseñarme con pedagogía en cada paso para el desarrollo óptimo del TEG.

Agradezco a mis padres por haber dado tanto para mi formación desde que fui niño hasta este momento.

Agradezco a mis compañeros por apoyarme en el trabajo, particularmente a Daniel Bachour, Camilo Las Heras, Fabián Ruiz, Miguel García, Jesús Hernandez, Manuel Gutiérrez, Sanber Bizcaya, Victor Nuñez y Airton Reyes.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	vii
Lista de Figuras	ix
1. Introducción	2
2. Aspectos Generales de la Teoría de Campos	4
2.1. Principio de Hamilton	4
2.1.1. Formulación Lagrangiana de la Teoría de Maxwell	6
2.2. Teorías Topológicas	7
2.2.1. Formulación Lagrangiana de la Acción de Chern-Simons y su Caracter Topológico. Teoría BF Abeliانا en $D = 2 + 1$	7
2.2.2. Formulación Lagrangiana de la Teoría BF Abeliانا en $D=3+1$	12
2.3. Formulación Hamiltoniana	14
2.3.1. Corchetes de Poisson	15
2.3.2. Método de Dirac	17
2.4. Formulación Hamiltoniana de una teoría BF en $D=2+1$	22

2.5.	Formulación Hamiltoniana de la Teoría BF en $D=3+1$	25
3.	Invariantes Topológicos a Partir de la Acción y el Hamiltoniano on-shell	28
3.1.	Invariantes Topológicos a partir de la Acción on-shell de la Teoría BF en $D=2+1$	28
3.2.	Invariante Topológico a partir del cálculo de la Acción on-shell en la Teoría BF en $D=3+1$	31
3.3.	Hamiltoniano on-shell de una teoría BF en $D = 2 + 1$	33
3.4.	Hamiltoniano on-Shell de una teoría BF en $D = 3 + 1$	35
3.4.1.	Caso I	35
3.4.2.	Caso II	36
4.	Hamiltoniano on shell para una corriente especial en $D=2+1$	38
4.1.	Invariante especial en $D=2+1$	39
4.2.	Hamiltoniano on-shell	43
5.	Invariante especial en $D=3+1$	47
5.1.	Algunos Objetos Geométricos Útiles	47
5.2.	Invariante Asociado a los Anillos de Borromeo	49
5.3.	Hamiltoniano on-shell	53
6.	Conclusiones	56
A.	Apéndice A	58
	Bibliografía	60

LISTA DE FIGURAS

3.1.	Número de Gauss	31
3.2.	Hamiltoniano on shell D=2+1, X_0 dentro de γ_B	35
3.3.	Hamiltoniano on shell D=2+1 X_0 fuera de γ_B	35
4.1.	Hamiltoniano on-shell D=2+1, término sin cortes entre γ_1 y γ_2 dentro de γ_3	46
4.2.	Hamiltoniano on-shell D=2+1, término de corte entre γ_1 y γ_2 dentro de γ_3	46
5.1.	Hamiltoniano on shell D=3+1, Corte de las curvas con orientación específica	50
5.2.	Hamiltoniano on shell D=3+1, Intersección de las tres superficies	51

Resumen

Formulación Canónica e Invariantes de Nudo en Teorías Topológicas Abelianas

Julio Torres

Dr. Lorenzo Leal, Tutor

Dr. Ernesto Contreras, Tutor

Universidad Central de Venezuela

En este trabajo se estudia la obtención de invariantes de nudo a partir del cálculo del Hamiltoniano on-shell asociado a Teorías Topológicas Abelianas acopladas con corrientes externas no triviales. En particular se considera un modelo cuyo Hamiltoniano on-shell reproduce un invariante topológico no trivial, que permite detectar el anudamiento de los Anillos Borromeos, y que previamente había sido obtenido en el contexto de la formulación Lagrangeana.

Dr. Lorenzo Leal
Tutor

Dr. Ernesto Contreras
Tutor

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Además del interés que reviste la Teoría de Campos por su aplicación en la descripción de las interacciones fundamentales, existen importantes nexos entre la Teoría de Campos y áreas fundamentales de la Matemática, como es el caso de la Topología. Las Teorías de Campo Topológicas constituyen interesantes modelos físico-matemáticos con los cuales se pueden explorar características geométricas de la variedad donde se formula la teoría, así como obtener, a través de consideraciones físicas, invariantes topológicos interesantes, tales como invariantes de nudo. Uno de los aportes más significativo en el área de Teorías Topológicas se debe a E. Witten, quien en 1988 encontró importantes relaciones entre la Teoría Cuántica de Campos e invariantes de nudo, a partir del estudio de la Teoría de Chern-Simons [1].

En este trabajo se estudiarán acciones topológicas, es decir, independientes de la métrica e invariantes bajo transformaciones de coordenadas. Las teorías a considerar serán del tipo Chern-Simons y BF, y a partir de ellas exploraremos cómo encontrar invariantes de nudo y generalizaciones al caso de otros objetos extendidos. Esta consecución de invariantes puede lograrse por tres vías: 1) Considerando la formulación cuántica, como propone y estudia Witten en la referencia mencionada. 2) A partir del

estudio clásico de la acción on-shell, como se estudia en las referencias [2,3,4,12]. 3) Mediante el estudio del Hamiltoniano clásico on-shell, como en las referencias [3,4]. En este trabajo consideraremos las dos últimas posibilidades, con énfasis en la última. En efecto, el trabajo termina con el estudio de una teoría en 3+1 dimensiones tipo BF, acoplada con corrientes externas seleccionadas para que el Hamiltoniano on-shell reproduzca un invariante de nudo no trivial, que fué obtenido previamente por la vía Lagrangiana [12] y que está asociado a los Anillos Borromeos. Este nudo es un ejemplo importante y clásico de la Teoría de Nudos, pues constituye un arreglo cuyo anudamiento no puede ser detectado por el Número de Anudamiento de Gauss, y en cierto modo, generaliza a dicho invariante de Gauss.

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el segundo capítulo abordaremos brevemente la teoría clásica de campos que incluye el principio de Hamilton y la formulación a la Dirac de teorías con vínculos. En el tercer capítulo se revisa el método de obtención invariantes topológicos a partir de la acción on-shell y también a partir de su formulación Hamiltoniana, siguiendo las referencias [2,3]. En el cuarto capítulo se presenta un invariante que corresponde a una proyección de los anillos Borromeos en el plano, y que se encontró a partir del estudio del Hamiltoniano on-shell de una teoría tipo BF en $D= 2+1$ [4]. En el quinto, partiendo de la acción BF en $D = 3 + 1$ y escogiendo unas corrientes específicas[5] para hallar el Hamiltoniano on-shell, se obtiene el invariante correspondiente a los anillos de Borromeo. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo y las referencias bibliográficas.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS GENERALES DE LA TEORÍA DE CAMPOS

En este segundo capítulo se revisan las formulaciones de Lagrange y de Hamilton para el estudio de la dinámica clásica de campos. Se ilustran estas formulaciones para el Campo de Maxwell, con particular atención al hecho de que se trata de una teoría singular, por lo que hay que recurrir al método canónico de Dirac. Se aborda el estudio de teorías de campo topológicas, como un caso especial de teorías de campo, que ocupará nuestra atención a lo largo de este trabajo.

2.1. Principio de Hamilton

El principio de mínima acción establece que todo sistema físico está descrito por una función Lagrangiana definida por

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (2.1)$$

entre dos instantes de tiempo t_1 y t_2 , el sistema evoluciona de manera tal que la acción S , definida como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (2.2)$$

tome el mínimo valor posible[9],

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (2.3)$$

En la teoría clásica de campos se define la densidad Lagrangiana como función de los campos φ y sus primeras derivadas, seguidamente se introduce la acción en un espacio-tiempo con D dimensiones para una región Λ

$$S = \int_{\Lambda} d^D x \mathcal{L}(\varphi_{\mu}, \partial_{\alpha} \varphi_{\mu}). \quad (2.4)$$

El principio variacional que produce las ecuaciones dinámicas puede establecerse como sigue. La evolución del sistema entre el tiempo t_1 y t_2 es tal que la acción sea estacionaria, con la condición que los campos se anulan en el infinito[10]

$$\delta S = 0, \quad (2.5)$$

$$\delta S = \int_{\Lambda} d^D x \delta \mathcal{L}(\varphi_{\mu}, \partial_{\alpha} \varphi_{\mu}) = 0. \quad (2.6)$$

Desarrollando la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Lambda} d^D x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}} \delta \varphi_{\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \varphi_{\mu})} \delta (\partial_{\alpha} \varphi_{\mu}) \right\}, \\ \delta S &= \int_{\Lambda} d^D x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}} - \left(\partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \varphi_{\mu})} \right) \right) \right) \delta \varphi_{\mu} \right\} + \int_{\Lambda} d^D x \partial_{\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \varphi_{\mu})} \delta \varphi_{\mu} \right\}. \end{aligned}$$

La segunda integral es igual a cero debido a que se puede convertir en una integral de superficie utilizando el teorema de Gauss, y suponemos que los campos se anulan suficientemente rápido en el infinito. Finalmente para satisfacer $\delta S = 0$ tiene que cumplirse:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}} - \partial_{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \varphi_{\mu})} \right) = 0, \quad (2.7)$$

que se conoce como la ecuación de Euler-Lagrange para campos.

2.1.1. Formulación Lagrangiana de la Teoría de Maxwell

La teoría de Maxwell describe de manera completa los fenómenos electromagnéticos a nivel clásico. Presenta 2 simetrías muy importantes, la simetría de Lorentz que condujo a la teoría de la relatividad especial y la invariancia de calibre, que está presente en todas las teorías que describen las interacciones fundamentales conocidas hasta el momento. La acción de Maxwell está dada por:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \right), \quad (2.8)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.9)$$

Usando la ecuación de Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones de Maxwell no homogéneas:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta. \quad (2.10)$$

Las homogéneas surgen de (2.9). En efecto, definiendo el dual de F

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.11)$$

es inmediato ver que se cumple

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Es también inmediato comprobar que la transformación de calibre $\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ para el campo A con un campo escalar Λ , deja invariante la acción y las ecuaciones de movimiento de la teoría con la condición de que las corrientes sean conservadas[2].

2.2. Teorías Topológicas

Las teorías topológicas permiten obtener características geométricas interesantes relacionadas con la variedad donde se define la teoría, y con las corrientes acopladas con los campos dinámicos. Para que una teoría sea topológica debe poseer las siguientes características[2,3]:

1. Invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas.
2. Independencia de la métrica.

2.2.1. Formulación Lagrangiana de la Acción de Chern-Simons y su Caracter Topológico. Teoría BF Abeliana en $D = 2 + 1$

La teoría de Chern-Simons es una teoría topológica con la cual se pueden estudiar invariantes de nudo interesantes. La acción de Chern-Simons viene dada por

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + A_\mu J^\mu \right). \quad (2.13)$$

Para establecer su carácter topológico es necesario ver como transforman los ingredientes de la misma:

1. Elemento de volumen:

$$d^n x' = \det(\mathcal{J}) d^n x. \quad (2.14)$$

2. Símbolo de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{\mu'\nu'\lambda'} = \frac{1}{\det(\mathcal{J})} \frac{dx^{\mu'}}{dx^\mu} \frac{dx^{\nu'}}{dx^\nu} \frac{dx^{\lambda'}}{dx^\lambda} \varepsilon^{\mu\nu\lambda}. \quad (2.15)$$

3. Campo vectorial:

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A_\mu. \quad (2.16)$$

4. Derivada:

$$\partial_{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \partial_{\nu}. \quad (2.17)$$

5. Densidad de corriente:

$$J_A^{\mu'} = J_A^{\mu} \frac{1}{\det(\mathcal{J})} \frac{dx^{\mu'}}{dx^{\mu}}. \quad (2.18)$$

Sustituyendo las transformaciones generales de coordenadas en la acción de Chern-Simons se obtiene

$$\begin{aligned} S' &= \int d^3 x' \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu' \nu' \lambda'} A_{\mu'} \partial_{\nu'} A_{\lambda'} + A_{\mu'} J^{\mu'} \right), \\ S' &= \frac{1}{2} \int d^3 x \det(\mathcal{J}) \left(\frac{1}{\det(\mathcal{J})} \right) \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \left(\frac{\partial x^{\mu''}}{\partial x^{\mu'}} A_{\mu''} \right) \frac{\partial x^{\nu''}}{\partial x^{\nu'}} \partial_{\nu''} \left(\frac{\partial x^{\lambda''}}{\partial x^{\lambda'}} A_{\lambda} \right) \\ &\quad + \int d^3 x \det(\mathcal{J}) \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} A_{\mu} J_A^{\mu} \frac{1}{\det(\mathcal{J})} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_{\mu} \frac{dx^{\lambda'}}{dx^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda''}}{\partial x^{\lambda'}} \right) A_{\lambda''} + \frac{1}{2} \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\lambda} + \int d^3 x A_{\mu} J_A^{\mu}. \end{aligned}$$

Considerando la derivada total

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(A_{\mu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} A_{\lambda''} \frac{\partial x^{\lambda''}}{\partial x^{\lambda'}} \right) = A_{\mu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} A_{\lambda''} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda''}}{\partial x^{\lambda'}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(A_{\mu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} A_{\lambda''} \right) \frac{\partial x^{\lambda''}}{\partial x^{\lambda'}}, \quad (2.19)$$

y empleando que los campos se anulan en infinito, solamente queda el segundo término de la expresión (2.19), por lo cual se tiene

$$S' = \frac{1}{2} \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\lambda} + \int d^3 x A_{\mu} J_A^{\mu}. \quad (2.20)$$

Además de la invariancia bajo cambio generales de coordenadas, que acabamos de mostrar, la teoría es independiente de la métrica por construcción, por lo tanto es topológica.

Estudiemos ahora si la teoría es invariante bajo transformaciones de calibre, para ello consideremos la transformación:

$$\bar{A}_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu} \Lambda, \quad (2.21)$$

sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned} S(\bar{A}) &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) \partial_\nu (A_\lambda + \partial_\lambda \Lambda) + (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) J^\mu \right) \\ &= S(A) + \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \Lambda + \partial_\mu \Lambda \partial_\nu A_\lambda + \partial_\mu \Lambda \partial_\nu \partial_\lambda \Lambda) + \partial_\mu \Lambda J^\mu \right). \end{aligned}$$

El primer y tercer término de la integral se anulan, por lo tanto

$$S(\bar{A}) = S(A) + \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \Lambda \partial_\nu A_\lambda + \partial_\mu \Lambda J^\mu \right). \quad (2.22)$$

En cuanto a los términos restantes se tiene que

$$S(\bar{A}) = S(A) + \int d^3x \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} (\partial_\nu (\partial_\mu \Lambda A_\lambda) - (\partial_\nu \partial_\mu \Lambda) A_\lambda) + (\partial_\mu (\Lambda J^\mu) - \Lambda (\partial_\mu J^\mu)) \right).$$

Vemos que el segundo término se anula por la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico y el cuarto por conservación de la corriente $\partial_\mu J^\mu = 0$. Los restantes se anulan al aplicar teorema de Gauss, con las condiciones de contorno usuales. Así probamos que la acción es invariante bajo transformaciones de calibre.

Para hallar las ecuaciones de movimiento, a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, necesitamos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial (\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + A_\mu J^\mu)}{\partial A_\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \delta_\mu^\alpha \partial_\nu A_\lambda + \delta_\mu^\alpha J^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda + J^\alpha,$$

el otro término será

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{\partial (\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + A_\mu J^\mu)}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \delta_\nu^\beta \delta_\lambda^\alpha = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\beta\alpha} A_\mu,$$

uniendo los términos de la ecuación de Euler-Lagrange para la acción de Chern-Simons, se obtiene

$$\varepsilon^{\alpha\nu\lambda} \partial_\nu A_\lambda = -J^\alpha. \quad (2.23)$$

Utilizando la métrica Euclídea la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{J}, \quad (2.24)$$

cuya estructura matemática es idéntica a la Ley de Ampere. Este hecho será de mucha utilidad a la hora de estudiar los invariantes topológicos en lo sucesivo[2].

Las teorías BF son otro ejemplo de teorías topológicas. En 2+1, la teoría BF abeliana viene descrita por la acción[2,3,4]

$$S_{BF} = \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu B_\lambda + \int d^3x J_A^\mu A_\mu + \int d^3x J_B^\mu B_\mu. \quad (2.25)$$

Bajo cambios generales de coordenadas, los nuevos objetos transforman como

$$B_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} B_\mu, \quad (2.26)$$

$$J_B^{\mu'} = J_B^\mu \frac{1}{\det(\mathcal{J})} \frac{dx^{\mu'}}{dx^\mu}, \quad (2.27)$$

y se tiene, al igual que antes,

$$S'_{BF} = S_{BF}. \quad (2.28)$$

Bajo transformaciones de calibre,

$$\bar{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda,$$

$$\bar{B}_\mu = B_\mu + \partial_\mu \Omega,$$

considerando que las corrientes son conservadas

$$\partial_\mu J_A^\mu = 0,$$

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0,$$

puede probarse que la acción no cambia. La prueba es similar a la del caso anterior, y la omitimos por brevedad.

Para hallar las ecuaciones de movimiento debemos tomar en cuenta la existencia de dos campos A y B independientes, por lo cual se obtienen dos ecuaciones de

movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Comencemos con el campo A,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu B_\lambda + J_A^\mu A_\mu)}{\partial A_\beta} = (\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \delta_\mu^\beta \partial_\nu B_\lambda + J_A^\mu \delta_\mu^\beta) = (\varepsilon^{\beta\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda + J_A^\beta),$$

entonces la ecuación de movimiento es:

$$\varepsilon^{\alpha\mu\beta} \partial_\alpha B_\mu = -J_A^\beta. \quad (2.29)$$

Repetimos el mismo procedimiento para el campo B,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_\beta} = \frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu B_\lambda + J_B^\mu B_\mu)}{\partial B_\beta} = J_B^\mu \delta_\mu^\beta = J_B^\beta,$$

el otro término es,

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha B_\beta)} \right) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu B_\lambda)}{\partial(\partial_\alpha B_\beta)} \right) = \partial_\alpha (\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \delta_\lambda^\beta \delta_\nu^\alpha) = \partial_\alpha (\varepsilon^{\mu\alpha\beta} A_\mu),$$

y la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\mu = -J_B^\beta. \quad (2.30)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.29) y (2.30) pueden resolverse de manera inmediata observando que son formalmente idénticas a la Ley de Ampere, y por tanto, sus soluciones se pueden escribir en la forma de la integral de Biot-Savart con $R = |x - x'|$:

$$B_\mu(x) = \frac{-1}{4\pi} \int d^3 x' \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{1}{R} \right) \right) J_A^\lambda(x') \right), \quad (2.31)$$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 x' \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{1}{R} \right) \right) J_B^\lambda(x') \right). \quad (2.32)$$

Aquí se ha hecho uso de la independencia de la métrica, para escoger la métrica Euclídea a la hora de expresar la solución. Debe resaltarse entonces que no hay distinción entre super y subíndices. Esto vale también para el caso de teorías topológicas en 3+1, que estudiaremos en la próxima sección.

2.2.2. Formulación Lagrangiana de la Teoría BF Abeliana en $D=3+1$

Consideremos ahora la extensión de la teoría anterior al caso de dimensión $D=3+1$. Este modelo se estudiará a lo largo del presente trabajo con el fin de obtener invariantes topológicos a partir de su formulación Hamiltoniana. La acción viene dada por[2]

$$S_{BF} = \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\nu A_\rho + \int d^4x J^\mu A_\mu + \int d^4x K^{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

El campo $B_{\mu\nu}$ y su corriente asociada $K^{\mu\nu}$ son antisimétricos. Las expresiones de las secciones anteriores para las transformaciones generales de coordenadas se extienden a $D = 3 + 1$, solamente se añade ahora

$$B_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} B_{\mu\nu}, \quad (2.34)$$

$$K_B^{\mu'\nu'} = K_B^{\mu\nu} \frac{1}{\det(\mathcal{J})} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}. \quad (2.35)$$

Sustituyendo las expresiones para las transformaciones de coordenadas en la acción, y procediendo de manera similar a los casos anteriores se puede ver que la teoría es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. A la vez, la acción es independiente de la métrica y por lo tanto se tiene una teoría topológica.

Las corrientes deben ser conservadas para que la teoría sea invariante de calibre:

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.36)$$

$$\partial_\mu K^{\mu\nu} = 0. \quad (2.37)$$

Las transformaciones de calibre son las siguientes:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (2.38)$$

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu, \quad (2.39)$$

que al sustituir en la acción conducen a:

$$\begin{aligned} S'_{BF} &= \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (B_{\mu\nu} + \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) \partial_\lambda (A_\rho + \partial_\rho \Lambda) + J^\mu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) + K^{\mu\nu} (B_{\mu\nu} + \partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu), \\ &= S_{BF} + \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu) \partial_\lambda A_\rho + \int d^4x J^\mu \partial_\mu \Lambda + \int d^4x K^{\mu\nu} (\partial_\mu f_\nu - \partial_\nu f_\mu). \end{aligned}$$

Es fácil ver, luego de integraciones por partes, del empleo las condiciones de borde habituales para los campos en infinito, y de propiedades elementales de simetría de tensores, que los tres últimos términos de la expresión anterior se anulan, por lo tanto se establece la invariancia de calibre la invariancia de calibre de la teoría.

Para obtener las ecuaciones de movimiento respectivas, hacemos uso de la ecuación de Euler-Lagrange. Necesitamos las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} &= \frac{\partial (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\nu A_\rho + J^\mu A_\mu + K^{\mu\nu} B_{\mu\nu})}{\partial A_\alpha} = J^\alpha, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma A_\alpha)} &= \frac{\partial (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\nu A_\rho + J^\mu A_\mu + K^{\mu\nu} B_{\mu\nu})}{\partial (\partial_\gamma A_\alpha)} = \frac{\partial (\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\nu A_\rho)}{\partial (\partial_\gamma A_\alpha)} = \varepsilon^{\mu\nu\gamma\alpha} B_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\varepsilon^{\mu\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_{\mu\nu} - J^\alpha = 0. \quad (2.40)$$

Con el campo $B_{\mu\nu}$ se hace lo mismo.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{\theta\beta}} &= K^{\theta\beta} + \varepsilon^{\theta\beta\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\gamma B_{\theta\beta})} &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\varepsilon^{\theta\beta\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho + K^{\theta\beta} = 0. \quad (2.41)$$

Las soluciones de las ecuaciones de movimiento vienen dadas por:

$$B_{\alpha\theta}(x) = \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^4x' \varepsilon^{\alpha\theta\gamma\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{|x - x'|^2} \right) \right) J^\rho(x'), \quad (2.42)$$

$$A_\theta(x) = \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^4x' \varepsilon^{\theta\gamma\rho\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{|x - x'|^2} \right) \right) K^{\rho\phi}(x'). \quad (2.43)$$

Para obtener estas soluciones, se ha hecho uso nuevamente de la analogía de las ecuaciones con la Ley de Ampere (esta vez en cuatro dimensiones). Así mismo, se está tomando la métrica cuadridimensional como la Euclídea.

2.3. Formulación Hamiltoniana

La formulación Hamiltoniana o Canónica representa un método alternativo al Lagrangiano para describir la dinámica clásica de los sistemas físicos. Resumiremos brevemente dicha formulación para los casos de partículas y de campos[6].

Dado el Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i)$ de un sistema de partículas, definimos sus momentos canónicos por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.44)$$

A partir de aquí, y suponiendo que

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0, \quad (2.45)$$

se podrán despejar las velocidades en función de las coordenadas y los momentos generalizados. Se define entonces el Hamiltoniano como

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (2.46)$$

y se puede probar que las ecuaciones de Lagrange son completamente equivalentes a las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.47)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.48)$$

La formulación Hamiltoniana es particularmente ventajosa con miras a realizar la cuantización canónica de los sistemas mecánicos. Para el caso de campos, el procedimiento es similar. Se definen los momentos conjugados de los campos

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}, \quad (2.49)$$

y se despejan las derivadas temporales de los campos en función de los momentos, supuesto que el sistema sea regular, esto es

$$\det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i \partial \dot{\varphi}_j} \right) \neq 0. \quad (2.50)$$

La densidad Hamiltoniana se define \mathcal{H} se deduce entonces como

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}. \quad (2.51)$$

y su integral es el Hamiltoniano H . Se puede demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones canónicas

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i}, \quad (2.52)$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_i}. \quad (2.53)$$

Aquí, se ha hecho uso de la derivada funcional, que se define como

$$\delta F[\phi] = \int dx \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x). \quad (2.54)$$

El objeto $\frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi(x)}$ explica como transforma el funcional si la función $\phi(x)$ es variada en el punto x [3].

2.3.1. Corchetes de Poisson

Una vez desarrollada la formulación Hamiltoniana se introducen los corchetes de Poisson de la siguiente manera:

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right), \quad (2.55)$$

donde A y B son funciones que dependen de los momentos conjugados y de las coordenadas generalizadas. Los corchetes fundamentales son los que se muestran a continuación:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad (2.56)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (2.57)$$

Los corchetes de Poisson satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\{A, k\} = 0$, con k igual constante.
2. $\{A, B\} = -\{B, A\}$.
3. $\{A+B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\}$.
4. $\{A, B C\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B$.
5. $\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0$ (Identidad de Jacobi).

La dinámica del sistema se puede expresar de la siguiente forma en función de los corchetes de Poisson:

$$\dot{f}(q, p) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.58)$$

En teoría clásica de campos conviene introducir los corchetes de Poisson

$$\{A(\varphi, \pi, t), B(\varphi, \pi, t)\} = \int d^D x \left(\frac{\delta A}{\delta \varphi} \frac{\delta B}{\delta \pi} - \frac{\delta B}{\delta \varphi} \frac{\delta A}{\delta \pi} \right). \quad (2.59)$$

Los corchetes fundamentales serán:

$$\{\varphi_a(x), \varphi_b(x)\} = \{\pi_a(x), \pi_b(x)\} = 0, \quad (2.60)$$

$$\{\varphi_a(x), \pi_b(y)\} = \delta_b^a \delta^D(x - y), \quad (2.61)$$

y la evolución temporal en términos de los corchetes de Poisson satisface[10]

$$\dot{F}(t) = \int d^3 x \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi(x)} \dot{\phi}(x) - \frac{\delta F(t)}{\delta \pi(x)} \dot{\pi}(x) \right) = \{F, H\}_{PB}. \quad (2.62)$$

2.3.2. Método de Dirac

El método expuesto anteriormente es válido solo para aquellos casos en los que se pueden despejar las velocidades en función de los campos y los momentos conjugados,

$$\dot{q}_n = \dot{q}_n(q, p),$$

es decir, aquellos en los que se cumple

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_n} \right) \neq 0.$$

Existen casos donde no se pueden despejar dichas velocidades en función de los campos y de sus momentos conjugados, por lo tanto, se generarán los siguientes vínculos:

$$\phi_m(q_n, p_n) = 0,$$

donde $m = 1, 2, \dots, M$ indica el número de ligaduras que se pueden generar. Estas ligaduras son llamadas ligaduras primarias. Dirac propone un método alternativo tomando en cuenta la ligadura mostrada anteriormente, manteniéndose dentro del formalismo canónico. El método de Dirac propone el siguiente Lagrangiano[14]

$$L^* = L(q, p) - u_m \phi_m(q_n, p_n), \quad (2.63)$$

donde u_m son multiplicadores de Lagrange y $\phi_m(q_n, p_n)$ son las ligaduras primarias del sistema. Aplicando el principio variacional se escribe la ecuación de Euler-Lagrange de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_k} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial \xi_k} = 0,$$

donde $\xi_k = (q_n, p_n, \phi_m)$. Considerando lo anterior se define el Hamiltoniano incorporando las ligaduras,

$$H^*(q_i, p_i) = H(q_i, p_i) + u_m \phi_m(q_i, p_i), \quad (2.64)$$

por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton toman la siguiente forma

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H^*(q_i, p_i)}{\partial q_i}, \quad (2.65)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H^*(q_i, p_i)}{\partial p_i}, \quad (2.66)$$

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0. \quad (2.67)$$

Para describir la dinámica se introducen los corchetes de Poisson, que son:

$$\dot{q}_n = \{q_n, H^*(q_n, p_n)\},$$

$$\dot{p}_n = \{p_n, H^*(q_n, p_n)\}.$$

Las ligaduras no se substituyen en los corchetes directamente ya que las mismas afectan la dinámica del sistema, esto se indica introduciendo la notación

$$\phi \approx 0,$$

el símbolo \approx quiere decir débilmente cero. Para garantizar la consistencia de la dinámica es necesario preservar las ligaduras en el tiempo, entonces

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} + u_m \{\phi_m, \phi_l\} \approx 0.$$

De lo anterior se pueden generar cuatro casos diferentes:

1. Una inconsistencia tipo $1 = 0$. Indica que el el Lagrangiano genera ecuaciones de movimiento inconsistentes, al ocurrir esta situación el problema debe replantearse.
2. Una igualdad tipo $0 = 0$. Esta puede ser satisfecha de dos maneras:
 - (a) La expresión resultante del corchete de Poisson es igual a cero.
 - (b) La expresión resultante del corchete de Poisson es función de las ligaduras, y se anula debido a estas.
3. Se encuentran nuevas relaciones entre los p_n y los q_n , independientes de las ligaduras primarias y que son llamadas ligaduras secundarias:

$$\sigma_k(q_n, p_n) = 0.$$

4. Se encuentran relaciones que permiten hallar los u_m en función de los p_n y los q_n , de la forma $u_m = u_m(q_n, p_n)$. Al ocurrir esta situación, el proceso se repite hasta que solamente ocurra el paso 2 o 4, porque si ocurre 3 se tiene que repetir el proceso.

Las ligaduras primarias y secundarias las reunimos en la expresión (con $j = 1, 2, 3, \dots, J$)

$$\rho_j(q, p) \approx 0.$$

Se define que un objeto O es de primera clase si cumple

$$\{O, \rho_j(q, p)\} = 0, \forall j.$$

y de segunda clase si

$$\{O, \rho_j(q, p)\} \neq 0,$$

para por lo menos un j .

El Hamiltoniano conmuta con todas las ligaduras, por lo tanto es un objeto de primera clase. Las ligaduras pueden ser de primera o de segunda clase.

Si todas las ligaduras son de primera clase se cuantiza de la siguiente manera (con $c = \hbar = 1$):

1. Los corchetes de Poisson se convierten en conmutadores y los observables clásicos pasan a ser operadores cuánticos en el espacio de Hilbert:

$$\{q_i, p_j\} \rightarrow -i[\hat{q}_i, \hat{p}_j], \quad (2.68)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (2.69)$$

2. La ecuación de Schrödinger de la teoría es:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_t\rangle = H^*|\Psi_t\rangle. \quad (2.70)$$

3. Las ligaduras serán operadores cuánticos. Definimos los estados físicos como aquellos que son aniquilados por las ligaduras de primera clase.

$$\hat{\psi}_j(q_n, p_n)|\Psi_t\rangle = 0 \quad \forall_j. \quad (2.71)$$

A diferencia de la formulación canónica estándar, el espacio de Hilbert está restringido a causa de las ligaduras primarias, las cuales actúan sobre los kets físicos aniquilándolos.

Cuando las ligaduras son de segunda clase, se calculan los corchetes de Poisson entre ellas, y posteriormente se construye la matriz $(C_{kk'})$ que es la siguiente:

$$C_{kk'} = \begin{pmatrix} 0 & \{\chi_1, \chi_2\} & \{\chi_1, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_1, \chi_k\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & 0 & \{\chi_2, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_2, \chi_k\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{\chi'_k, \chi_1\} & \{\chi'_k, \chi_2\} & \{\chi'_k, \chi_3\} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.72)$$

Dirac probó que el determinante de la matriz $(C_{kk'})$ es distinto de cero, por lo tanto, el número de ligaduras de segunda clase ha de ser par, ya que esta es antisimétrica, este hecho garantiza la existencia de una matriz inversa $(C_{kk'})^{-1}$,

$$(C_{kk''})^{-1}(C_{k''k'}) = \delta_{kk'}. \quad (2.73)$$

A continuación se definen los corchetes de Dirac

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_k\}C_{kk'}^{-1}\{\chi_{k'}, B\},$$

que cumplen las siguientes reglas:

1. $\{f, g\}^* = -\{g, f\}^*$.
2. $\{hf, g\}^* = h\{f, g\}^* + \{h, g\}^*f$.
3. $\{f, g + h\}^* = \{f, g\}^* + \{f, h\}^*$.

$$4. \{f, \{g, h\}^*\}^* + \{g, \{h, f\}\}^* + \{h, \{f, g\}\}^* = 0.$$

La dinámica estará dada por

$$\dot{f} = \{f, H^*\}. \quad (2.74)$$

Para proceder a cuantizar se siguen los siguientes pasos:

1. El álgebra de los corchetes de Dirac es reemplazado por un álgebra cuántica de conmutadores y los observables clásicos pasan a ser operadores cuánticos autoadjuntos.

$$\{q_i, p_i\}^* \rightarrow -i[\hat{q}_i, \hat{p}_j]. \quad (2.75)$$

2. La dinámica está descrita por

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_t\rangle = H^* |\Psi_t\rangle. \quad (2.76)$$

3. Las ligaduras de primera clase pasan a ser operadores cuánticos, siendo los estados $|\Psi\rangle$ anulados por dichos operadores.

$$\hat{\psi}_j |\Psi_t\rangle = 0 \forall_j. \quad (2.77)$$

2.4. Formulación Hamiltoniana de una teoría BF en D=2+1

El objetivo de este trabajo es encontrar diversos invariantes topológicos partiendo del Hamiltoniano on shell de teorías topológicas, por ello es necesario realizar la formulación Hamiltoniana de las teorías desarrolladas anteriormente. Empecemos con la teoría BF en $D = 2 + 1$,

$$S_{BF} = \int d^3x (\varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu B_\rho + J_A^\mu A_\mu + J_B^\mu B_\mu).$$

Necesitaremos la descomposición 2+1 de la acción

$$\begin{aligned} S_{BF} &= \int d^3x \left(\{\varepsilon^{0ij} A_0 \partial_i B_j + \varepsilon^{i0j} A_i \partial_0 B_j + \varepsilon^{ij0} A_i \partial_j B_0\} + \{J_A^0 A_0 + J_A^i A_i\} + \{J_B^0 B_0 + J_B^i B_i\} \right), \\ &= \int d^3x \left(\{\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j - \varepsilon^{ij} A_i \partial_0 B_j + \varepsilon^{ij} A_i \partial_j B_0\} + \{J_A^0 A_0 + J_A^i A_i\} + \{J_B^0 B_0 + J_B^i B_i\} \right). \end{aligned}$$

Considerando la derivada total,

$$\partial_j (A_i B_0) = (\partial_j A_i) B_0 + A_i (\partial_j B_0),$$

al aplicar el teorema de Gauss, aplicando las condiciones de borde usuales, queda lo siguiente:

$$S_{BF} = \int d^3x \left(\{\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j - \varepsilon^{ij} A_i \partial_0 B_j - \varepsilon^{ij} (\partial_j A_i) B_0\} + \{J_A^0 A_0 + J_A^i A_i\} + \{J_B^0 B_0 + J_B^i B_i\} \right).$$

De lo anterior leemos directamente la densidad Lagrangiana a primer orden

$$\mathcal{L}' = \left(\{\varepsilon^{ij} A_0 \partial_i B_j - \varepsilon^{ij} A_i \partial_0 B_j - \varepsilon^{ij} (\partial_j A_i) B_0\} + \{J_A^0 A_0 + J_A^i A_i\} + \{J_B^0 B_0 + J_B^i B_i\} \right). \quad (2.78)$$

Definimos los momentos conjugados

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \pi_A^0 = \phi_1, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_0} = \pi_B^0 = \phi_2, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_j} = -\varepsilon^{ij} A_i = \pi_B^j. \quad (2.81)$$

Las 2 primeras ecuaciones definitorias de los momentos conjugados se consideran ligaduras, mientras que la última no. Si se toma en cuenta que $-\varepsilon^{ij}A_i\partial_0B_j$ equivale al término $\pi\dot{\phi}$, a través de la transformación de Legendre (2.51) la densidad Hamiltoniana se escribe

$$\mathcal{H}' = -\{\varepsilon^{ij}A_0\partial_iB_j\} - \varepsilon^{ij}(\partial_iA_j)B_0 - \{J_A^0A_0 + J_A^iA_i\} - \{J_B^0B_0 + J_B^iB_i\}, \quad (2.82)$$

$$= \mathcal{H} - A_0(\varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0) - B_0(\varepsilon^{ij}\partial_iA_j + J_B^0). \quad (2.83)$$

Reconocemos entonces a \mathcal{H} como la densidad Hamiltoniana, y a los campos A_0 y B_0 como multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras:

$$\varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0 = 0,$$

$$\varepsilon^{ij}\partial_jA_i + J_B^0 = 0.$$

Siguiendo el método de Dirac, preservamos en el tiempo las ligaduras primarias, calculando su corchete de las ligaduras con el Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \{\pi_A^0(x), H'\} &= \int d^2x \{ \pi_A^0(x), -A_0(\varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0) - B_0(\varepsilon^{ij}(\partial_iA_j) + J_B^0) - (J_A^iA_i) - (J_B^iB_i) \}, \\ &= \varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0 = \phi_3 = 0. \end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} \{\pi_B^0(x), H'\} &= \int d^2x \{ \pi_B^0(x), -A_0(\varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0) - B_0(\varepsilon^{ij}(\partial_iA_j) + J_B^0) - (J_A^iA_i) - (J_B^iB_i) \}, \\ &= \varepsilon^{ij}\partial_iA_j + J_B^0 = \phi_4 = 0, \end{aligned}$$

se preservan así mismo las dos últimas ligaduras obtenidas, en el tiempo

$$\begin{aligned} \{\phi_3(x), H'(x')\} &= \{\varepsilon^{ij}\partial_iB_j + J_A^0, \mathcal{H}'(x')\}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \{\phi_4(x), H'(x')\} &= \{\varepsilon^{ji}\partial_jA_i + J_B^0, \mathcal{H}'(x')\}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior se resume de manera más ordenada como sigue:

Ligadura Primaria	$\theta_1 = \pi_A^0$
Ligadura Primaria	$\theta_2 = \pi_B^0$
Ligadura Secundaria	$\theta_3 = \varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0$
Ligadura Secundaria	$\theta_4 = \varepsilon^{ji} \partial_j A_i + J_B^0$

Al no obtenerse más ligaduras el procedimiento de preservación de ligaduras finaliza. Calculamos los corchetes de las ligaduras:

$$\begin{aligned}
 \{\phi_1, \phi_2\} &= \{\pi_A^0, \pi_B^0\} = 0 \\
 \{\phi_1, \phi_3\} &= \{\pi_A^0, \varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0\} = 0, \\
 \{\phi_1, \phi_4\} &= \{\pi_A^0, \varepsilon^{ij} \partial_i A_j + J_B^0\} = 0, \\
 \{\phi_2, \phi_3\} &= \{\pi_B^0, \varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0\} = 0, \\
 \{\phi_2, \phi_4\} &= \{\pi_B^0, \varepsilon^{ij} \partial_i A_j + J_B^0\} = 0, \\
 \{\phi_3, \phi_4\} &= \{\varepsilon^{ij} \partial_i B_j + J_A^0, \varepsilon^{pq} \partial_p A_q + J_B^0\}, \\
 &= -\varepsilon^{ij} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial x^p} \{B_j(y), \pi_B^p(x)\}, \\
 &= -\varepsilon^{ij} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial x^p} \delta_p^j \delta^2(x - y) = 0.
 \end{aligned}$$

El último corchete se hace cero al contraerse un tensor simétrico con uno antisimétrico. Se tiene entonces que todas las ligaduras son de primera clase. Esto es un reflejo del hecho de que todas las ligaduras están asociadas a simetrías de calibre de la teoría. A efectos de la cuantización, que no abordaremos en este trabajo, todas las ligaduras habrían de ser impuestas como restricciones sobre el espacio de Hilbert, mientras que los corchetes de Poisson inducen los conmutadores de la manera usual [2,3].

2.5. Formulación Hamiltoniana de la Teoría BF en D=3+1

En la búsqueda de invariantes topológicos en $D = 3 + 1$ a partir de la formulación Hamiltoniana, se retoma la teoría propuesta en la sección (2.2.2).

$$S_{BF} = \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu} \partial_\nu A_\rho + \int d^4x J^\mu A_\mu + \int d^4x K^{\mu\nu} B_{\mu\nu}.$$

Como en el caso anterior, se realiza la descomposición espacio-temporal

$$S_{BF} = \int d^4x \left(\varepsilon^{0ijk} B_{0i} \partial_j A_k + \varepsilon^{i0jk} B_{i0} \partial_j A_k + \varepsilon^{ij0k} B_{ij} \partial_0 A_k + \varepsilon^{ijk0} B_{ij} \partial_k A_0 \right) \\ + \int d^4x \left(J^0 A_0 + J^i A_i + K^{0i} B_{0i} + K^{ij} B_{ij} \right).$$

Empleando

$$\partial_k (B_{ij} A_0) = \partial_k (B_{ij}) A_0 + B_{ij} \partial_k (A_0),$$

se tiene

$$S_{BF} = \int d^4x \left(\varepsilon^{ij0k} B_{ij} \dot{A}_k + B_{0i} \{ 2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \} + A_0 \{ J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \} + \{ J^i A_i + K^{ij} B_{ij} \} \right).$$

El Lagrangiano queda

$$\mathcal{L}' = \left(\varepsilon^{ij0k} B_{ij} \dot{A}_k + B_{0i} \{ 2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \} + A_0 \{ J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \} + \{ J^i A_i + K^{ij} B_{ij} \} \right). \quad (2.84)$$

Los momentos canónicos se definen mediante

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{A}_0} &= \pi_A^0 = \phi_1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{A}_k} &= \varepsilon^{ijk} B_{ij} = \pi_A^k, \\ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{B}_{0i}} &= \pi_B^{0i} = \phi_2, \end{aligned}$$

de nuevo reconocemos ϕ_1 y ϕ_2 como ligaduras primarias, mientras que la segunda relación establece que $\varepsilon^{ijk} B_{ij}$ es directamente el momento conjugado de A_k . La densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H}' = -B_{0i} \{ 2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \} - A_0 \{ J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \} - \{ J^i A_i + K^{ij} B_{ij} \}. \quad (2.85)$$

Estudiamos la preservación temporal de las ligaduras primarias. Se tiene

$$\begin{aligned}
 \{\phi_1, H'\} &= \int d^3y \{\pi_A^0(x), \mathcal{H}'(y)\}, \\
 &= - \int d^3y \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right) \{\pi_A^0(x), A_0(y)\}, \\
 &= - \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right) = \phi_3,
 \end{aligned}$$

igualmente con ϕ_2

$$\begin{aligned}
 \{\phi_2, H'\} &= \int d^3y \{\pi_B^{0i}(x), \mathcal{H}'(y)\}, \\
 &= - \int d^3y \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \right) \{\pi_B^{0i}(x), B_{0i}\}, \\
 &= - \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \right) = \phi_4.
 \end{aligned}$$

Toca preservar ϕ_3 y ϕ_4 ; es sencillo ver que

$$\begin{aligned}
 \{\phi_3, H'\} &= 0, \\
 \{\phi_4, H'\} &= 0.
 \end{aligned}$$

Se resumen las ligaduras en el siguiente cuadro

<i>Ligadura Primaria</i>	$\phi_1 = \pi_A^0$
<i>Ligadura Primaria</i>	$\phi_2 = \pi_B^{0i}$
<i>Ligadura Secundaria</i>	$\phi_3 = - \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right)$
<i>Ligadura Secundaria</i>	$\phi_4 = - \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \right)$

Proseguimos estudiando de qué clase son las ligaduras. Para ello calculamos

$$\begin{aligned}
 \{\phi_1, \phi_2\} &= \{\pi_A^0(x), \pi_B^{0i}(y)\} = 0, \\
 \{\phi_1, \phi_3\} &= \{\pi_A^0(x), - \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right)\} = 0, \\
 \{\phi_1, \phi_4\} &= \{\pi_A^0(x), - \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \right)\} = 0, \\
 \{\phi_2, \phi_3\} &= \{\pi_B^{0i}(x), - \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right)\} = 0, \\
 \{\phi_3, \phi_4\} &= \{- \left(J^0 + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij} \right), - \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k + K^{0i} \right)\} = 0.
 \end{aligned}$$

Luego de ver que todas las ligaduras son objetos de primera clase, lo siguiente sería implementar los postulados para la cuantización de la teoría, pero esto no lo abordaremos en este trabajo, visto que nos interesa la obtención de invariantes topológicos por métodos clásicos.

CAPÍTULO 3

INVARIANTES TOPOLÓGICOS A PARTIR DE LA ACCIÓN Y EL HAMILTONIANO ON-SHELL

En esta sección se procederá a calcular invariantes topológicos a partir de la acción on-shell de las teorías BF. Comenzaremos revisando estudios previos en los que se consideran invariantes relativamente sencillos, tanto en dimensión $2 + 1$ como $3 + 1$, para luego estudiar con detalle invariantes altamente no triviales [2,3,4].

3.1. Invariantes Topológicos a partir de la Acción on-shell de la Teoría BF en $D=2+1$

Consideraremos las ecuaciones de movimiento de la teoría B-F en $D = 2 + 1$, con corrientes específicas, con las cuales se calculará la acción para hallar invariantes topológicos interesantes. Recordemos que las ecuaciones de movimiento son:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu A_\lambda = J_B^\mu,$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu B_\lambda = -J_A^\mu.$$

Las soluciones son las siguientes:

$$B_\lambda(x) = \frac{-1}{4\pi} \int d^3x' \left(\varepsilon^{\lambda\theta\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \left(\frac{1}{R} \right) \right) J_A^\rho(x') \right), \quad (3.1)$$

$$A_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \left(\varepsilon^{\lambda\theta\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \left(\frac{1}{R} \right) \right) J_B^\rho(x') \right). \quad (3.2)$$

Con estas soluciones se vuelve a la acción (2.25) y en ella se sustituyen, para obtener:

$$S_{BF} = \int d^3x B_\rho J_B^\rho. \quad (3.3)$$

Escogemos ahora las corrientes de la forma[2,3]:

$$J_B^\rho(x) = \oint_{\gamma_B} d^\rho x' \delta^3(x - x'), \quad (3.4)$$

$$J_A^\rho(x) = \oint_{\gamma_A} d^\rho x' \delta^3(x - x'). \quad (3.5)$$

Esto corresponde a corrientes filiformes con soporte en curvas cerradas. Las corrientes son claramente conservadas. Sustituyendo las corrientes y el campo B en la acción se llega a:

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{-1}{4\pi} \int d^3x \oint_{\gamma_B} d^\lambda x'' \delta^3(x - x'') \int d^3x' \varepsilon^{\lambda\theta\rho} \frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \oint_{\gamma_A} d^\rho x''' \delta^3(x' - x'''), \\ &= \frac{-1}{4\pi} \oint_{\gamma_B} d^\lambda x \left(\oint_{\gamma_A} d^\rho x' \varepsilon^{\lambda\theta\rho} \frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Lo anterior es una expresión analítica del número de anudamiento de Gauss, que es el primer invariante de nudo que apareció en la literatura. Se puede reescribir de manera que su interpretación resulta transparente. Renombrando

$$C^\lambda = \oint_{\gamma_A} d^\rho x' \varepsilon^{\lambda\theta\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right),$$

se obtiene:

$$S_{os} = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\gamma_B} d^\lambda x C^\lambda.$$

Empleando el teorema de Stokes

$$\int_l C^\mu dl^\mu = \int_S dS^\mu \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu C_\lambda,$$

$$S_{os} = \frac{-1}{4\pi} \int_{S_B} dS_B^\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\gamma} \partial_\beta C_\gamma,$$

se sustituye C_γ ,

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{-1}{4\pi} \int_{S_B} dS_B^\lambda \varepsilon^{\lambda\beta\gamma} \partial_\beta \left(\oint_{\gamma_A} d^\rho x' \varepsilon^{\gamma\theta\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \varepsilon^{\lambda\beta\gamma} \varepsilon^{\gamma\theta\rho} \int_{S_B} dS_B^\lambda \left(\oint_{\gamma_A} d^\rho x' \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right), \end{aligned}$$

considerando $\varepsilon^{\gamma\lambda\beta} \varepsilon^{\gamma\theta\rho} = \delta^{\lambda\theta} \delta^{\beta\rho} - \delta^{\lambda\rho} \delta^{\beta\theta}$

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{-1}{4\pi} (\delta^{\lambda\theta} \delta^{\beta\rho} - \delta^{\lambda\rho} \delta^{\beta\theta}) \int_{S_B} dS_B^\lambda \left(\oint_{\gamma_A} d^\rho x' \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right), \\ &= \frac{-1}{4\pi} \left(\left(\int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\rho x' \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \frac{1}{R} \right) \right) - \left(\int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\lambda x' \frac{\partial}{\partial x^\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

El primer término se hace cero y por lo tanto se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\lambda x' \frac{\partial}{\partial x^\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right), \\ &= \frac{-1}{4\pi} \left(\int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\lambda x' \frac{\partial}{\partial x'^\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\theta} \frac{1}{R} \right) \right), \end{aligned}$$

y utilizando finalmente la identidad $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = 4\pi\delta^3(x - x_0)$ se llega a

$$S_{os} = \frac{-1}{4\pi} \left(\int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\lambda x' 4\pi\delta^3(x - x') \right) = - \int_{S_B} dS_B^\lambda \oint_{\gamma_A} d^\lambda x' \delta^3(x - x'). \quad (3.6)$$

La integral de superficie depende de la variable x y la integral de línea depende de la variable x' . Esta expresión del número de anudamiento de Gauss es interesante por lo siguiente, en primer lugar es invariante bajo cualquier transformación general de coordenadas e independiente de la métrica. Por otra parte, se observa que la expresión recibe contribución sólo en caso de que la curva γ_A atraviese a la superficie S_B . En ese caso, el elemento de superficie y el elemento de línea conforman un volumen no degenerado, de modo que la delta de Dirac contribuye e indica que se ha producido un corte. Y este flujo de una curva a través del área bordeada por la otra es precisamente lo que cuenta el número de Gauss.

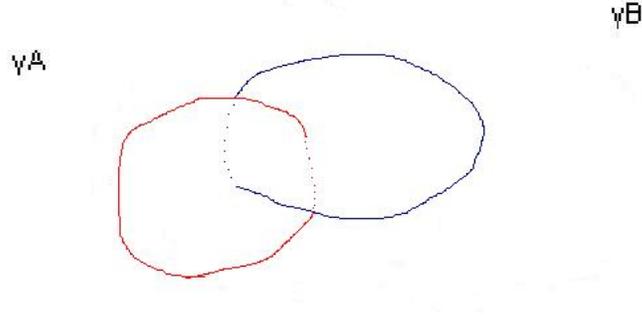


Figura 3.1: Número de Gauss

3.2. Invariante Topológico a partir del cálculo de la Acción on-shell en la Teoría BF en D=3+1

En esta sección se calculará la acción on-shell de la teoría BF en $D = 3 + 1$ dimensiones, para ello se parte de la acción (2.33), y sustituyendo las ecuaciones de movimiento adecuadas en la acción

$$\varepsilon^{\mu\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma B_{\mu\nu} - J^\alpha = 0.$$

$$\varepsilon^{\theta\beta\lambda\rho} \partial_\lambda A_\rho + K^{\theta\beta} = 0.$$

se obtiene

$$S_{os} = \int d^4x J^\mu A_\mu, \quad (3.7)$$

donde el campo A es solución de las ecuaciones de movimiento señaladas anteriormente

$$A_\theta(x) = \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^4x' \varepsilon^{\theta\gamma\rho\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{|x - x'|^2} \right) \right) K^{\rho\phi}(x').$$

Por analogía con el caso 2+1, consideramos corrientes con soporte en una curva y en una superficie cerradas, de la forma[2]

$$J^\theta(x) = \oint_{\gamma_A} d^\theta x' \delta^4(x - x'), \quad (3.8)$$

$$K^{\rho\phi}(x) = \oint_{S_B} dS^{\rho\phi}(x') \delta^4(x - x'). \quad (3.9)$$

Estas corrientes son conservadas, y son también independientes de la métrica y covariantes bajo transformaciones generales de coordenadas. Sustituyendo en (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^4x \oint_{\gamma_A} d^\theta x'' \delta^4(x - x'') \int d^4x' \varepsilon^{\theta\gamma\rho\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right) \oint_{S_B} dS^{\rho\phi}(x''') \delta^4(x' - x'''), \\ S_{os} &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \oint_{\gamma_A} d^\theta x \oint_{S_B} dS^{\rho\phi}(x') \varepsilon^{\theta\gamma\rho\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de Stokes y recordando que $d\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\theta\lambda} dS_{\theta\lambda}$,

$$\begin{aligned} S_{os} &= \frac{1}{4(4\pi^2)} K_s \int_{S_A} dS_{\beta\eta}^A(x) \varepsilon^{\beta\eta\kappa\tau} \partial_\kappa \oint_{S_B} dS_B^{\rho\phi}(x') \varepsilon^{\tau\gamma\rho\phi} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4(4\pi^2)} K_s \varepsilon^{\tau\beta\eta\kappa} \varepsilon^{\tau\gamma\rho\phi} \int_{S_A} dS_{\beta\eta}^A(x) \oint_{S_B} dS_B^{\rho\phi}(x') \frac{\partial}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right). \end{aligned}$$

En esta expresión, la superficie S_A es cualquier superficie cuyo borde es la curva γ_A . Usando ahora la identidad $\varepsilon^{\tau\beta\eta\kappa} \varepsilon^{\tau\gamma\rho\phi} = \delta^{\beta\gamma}(\delta^{\eta\rho}\delta^{\kappa\phi} - \delta^{\eta\phi}\delta^{\kappa\rho}) - \delta^{\beta\rho}(\delta^{\eta\gamma}\delta^{\kappa\phi} - \delta^{\eta\phi}\delta^{\kappa\gamma}) + \delta^{\beta\phi}(\delta^{\eta\gamma}\delta^{\kappa\rho} - \delta^{\eta\rho}\delta^{\kappa\gamma})$, se tiene

$$S_{os} = \frac{2}{4(4\pi^2)} k_s \left[\int_{S_A} dS_A^{\rho\phi}(x) \oint_{S_B} dS_B^{\rho\phi}(x') \frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right) \right].$$

Finalmente empleando $\nabla^2 \left(\frac{1}{R^2} \right) = -4\pi^2 \delta^4(R)$, se obtiene

$$S_{os} = -\frac{k_s}{2} \int_{S_A} dS_A^{\rho\phi}(x) \oint_{S_B} dS_B^{\rho\phi}(x') (x') \delta^4(x - x').$$

El resultado anterior es un invariante similar al número de Gauss, que mide el número de anudamiento de la superficie cerrada S_B con la curva abierta γ_A , en cuatro dimensiones. Esto es lo mismo, aunque es difícil de visualizar, que el número de intersecciones entre la superficie cerrada S_B con cualquier superficie abierta S_A con borde en γ_A .

3.3. Hamiltoniano on-shell de una teoría BF en $D = 2 + 1$

En las secciones anteriores se estudió la obtención de invariantes topológicos partiendo de la acción on-shell. Veremos que es posible, a partir del estudio del Hamiltoniano on-shell, encontrar proyecciones de dichos invariantes en las variedades espaciales correspondientes, si se consideran corrientes apropiadas en cada caso.

Para la teoría en 2+1 dimensiones, escogamos las corrientes siguientes[2,3]

$$J_A^\nu(x) = \begin{cases} \delta^2(x - x_0), \nu = 0 \\ 0, \nu = i \end{cases}, \quad (3.10)$$

$$J_B^\nu(x) = \begin{cases} 0, \nu = 0 \\ \oint_{\gamma_B} dy^i \delta^2(x - y), \nu = i \end{cases}. \quad (3.11)$$

Partiendo de (2.83) el Hamiltoniano on-shell queda como sigue

$$\begin{aligned} H'_{os} &= - \int d^2y \left(J_A^i A_i + J_B^i B_i \right) \\ &= - \int d^2y J_B^i B_i, \end{aligned}$$

el campo B viene dado por (2.31) y (2.32)

$$B^\mu = \frac{-1}{4\pi} \int dV \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda} J_A^\nu \hat{R}^\lambda}{R^2},$$

así pues se tiene

$$\begin{aligned} B^i &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^2x \left(\frac{\varepsilon^{i0j} \delta^2(x - x_0) R^j}{R^2} \right), \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\varepsilon^{i0j} (x - x_0)^j}{(|t - t'|^2 + |x - x_0|^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon^{ij} \frac{(x - x_0)^j}{(|x - x_0|^2)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

que al sustituirlo en el Hamiltoniano produce

$$\begin{aligned} H'_{os} &= - \int d^2x \left(\frac{1}{2\pi} \varepsilon^{ij} \frac{(x - x_0)^j}{(|x - x_0|^2)} \int_{\gamma_B} dy^i \delta^2(x - y) \right), \\ &= \frac{-\varepsilon^{ij}}{2\pi} \int_{\gamma_B} dy^i \frac{(y - x_0)^j}{|y - x_0|^2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si hacemos coincidir el punto x_0 coincide con el origen del sistema de referencia, entonces, como $r = y - x_0$, vemos que:

$$\begin{aligned} H'_{os} &= \frac{-\varepsilon^{12}}{2\pi} \int_{\gamma_B} dy^1 \frac{(r^{(2)})}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2} - \frac{-\varepsilon^{21}}{2\pi} \int_{\gamma_B} dy^2 \frac{(r^{(1)})}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2}, \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{\gamma_B} dy^1 \frac{(r^{(2)})}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2} - \frac{-1}{2\pi} \int_{\gamma_B} dy^2 \frac{(r^{(1)})}{(r^{(1)})^2 + (r^{(2)})^2}. \end{aligned}$$

Pero se tiene que

$$\begin{aligned} d\left(\operatorname{arccotang}\left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}\right)\right) &= \frac{\partial \operatorname{arccotang}\left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}\right)}{\partial r^{(1)}} dr^{(1)} + \frac{\partial \operatorname{arccotang}\left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}\right)}{\partial r^{(2)}} dr^{(2)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}}\right)^2} \left(\frac{-r^{(2)} dr^{(1)}}{(r^{(2)})^2} + \frac{dr^{(2)}}{r^{(1)}} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{r^{(1)}}{r^{(2)}}\right)^2} \left(\frac{r^{(1)} dr^{(2)} - r^{(2)} dr^{(1)}}{(r^{(1)})^2} \right), \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} H'_{os} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_B} d\left(\operatorname{arccotang}\left(\frac{r^{(2)}}{r^{(1)}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_B} d\theta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La última integral muestra que el Hamiltoniano on-shell mide el ángulo barrido por la curva γ_B , medido desde el origen (o en general desde un punto x_0), entonces el Hamiltoniano on-shell sería una proyección del número de Gauss en el plano: como se ve en la figura 2.2 el resultado de la integral será 2π si el punto x_0 se encuentra dentro de la curva γ_B y según la figura 2.3, será cero si el mismo se encuentra fuera de la curva.

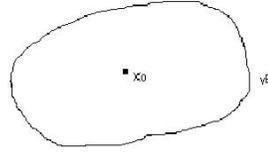


Figura 3.2: Hamiltoniano on shell $D=2+1$, X_0 dentro de γ_B

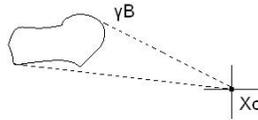


Figura 3.3: Hamiltoniano on shell $D=2+1$ X_0 fuera de γ_B

3.4. Hamiltoniano on-Shell de una teoría BF en $D = 3 + 1$

Consideremos ahora la teoría BF en dimensión 3+1. El mayor número de dimensiones permite ahora contar con más casos de corrientes sencillas, cuyas acciones on-shell asociadas conducirán a invariantes topológicos simples, como mostraremos.

3.4.1. Caso I

Comencemos considerando las corrientes[2]

$$J^\alpha(y) = \begin{cases} \oint_{\gamma_A} dx^i \delta^3(y-x) & , \alpha = i \\ 0 & , \alpha = 0 \end{cases},$$

$$K^{\alpha\beta}(y) = \begin{cases} \oint_{\gamma_B} dx^i \delta^3(y-x) & , \alpha = i \beta = 0 \\ 0 & , \alpha = 0 \beta = 0 \\ 0 & , \alpha = i \beta = j \end{cases},$$

donde γ_A y γ_B son curvas cerradas. De las ecuaciones (2.42) y (2.43) se retoma el campo

$$\begin{aligned} A^k(x) &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^3x' \frac{\varepsilon^{kij} K^{0i} \hat{R}^j}{R^3} \\ &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \varepsilon^{kij} \oint_{\gamma_B} dy^i \frac{(x-y)^j}{(x-y)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

sustituyendo en el Hamiltoniano (2.85), se obtiene

$$\begin{aligned} H_{os} &= \int d^3x J^k A_k, \\ &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \varepsilon^{kij} \int d^3x \oint_{\gamma_A} dx''^k \delta(x-x'') \oint_{\gamma_B} dx'^i \frac{(x-x')^j}{(x-x')^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \varepsilon^{kij} \oint_{\gamma_A} dx^k \left(\oint_{\gamma_B} dx'^i \frac{(x-x')^j}{(x-x')^{\frac{3}{2}}} \right), \\ &= -\frac{1}{2(4\pi^2)} \int_{S_A} dS^i(x) \oint_{\gamma_B} dx'^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{R^2}, \\ &= -\frac{1}{2(4\pi^2)} \int_{S_A} dS_A^i(x) \oint_{\gamma_B} dx'^i \delta^3(x-x'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

El resultado anterior es el número de Gauss, que fue explicado con detalle en la sección 3.1.

3.4.2. Caso II

Con el fin de obtener otro invariante interesante, se propone la siguiente corriente:

$$J^\alpha(y) = \begin{cases} \delta^3(x-x_0) & , \alpha = 0 \\ 0 & , \alpha = i \end{cases}, \quad (3.16)$$

$$K^{\alpha\beta}(y) = \begin{cases} 0 & , \alpha = i \beta = 0 \\ \oint_{S_B} d\Sigma^{ij}(y) \delta^3(y-x) & , \alpha = i \beta = j \end{cases}. \quad (3.17)$$

En estas expresiones, Σ_B es una superficie cerrada, y x_0 un punto arbitrario. Retomando las ecuaciones (2.42) y (2.43), para el campo B se tiene

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^3x' \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu} J^0(x')(x-x')^k}{R^3}, \\ &= \frac{1}{2(4\pi^2)} \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu} (x-x'_0)^\lambda}{R^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

que al sustituir en el Hamiltoniano (2.91)

$$\begin{aligned} H_{os} &= - \int d^3x K^{ij} B_{ij}, \\ &= - \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^3x K^{ij} \varepsilon^{kij} \frac{(x-x_0)^k}{|x-x_0|^3}, \\ &= - \frac{1}{2(4\pi^2)} \int d^3x \left(\oint_{S_B} d\Sigma_B^{ij} \delta^3(x-x') \right) \varepsilon^{kij} \frac{(x-x_0)^k}{|x-x_0|^3}, \\ &= - \frac{1}{2(4\pi^2)} \oint_{S_B} d\Sigma_B^{ij} \varepsilon^{kij} \frac{(x-x_0)^k}{|x-x_0|^3}, \\ &= - \frac{1}{(4\pi^2)} \oint_{S_B} dS_k \frac{(x-x_0)^k}{|x-x_0|^3}, \\ &= - \frac{1}{(4\pi^2)} \oint_{S_B} d\Omega = - \frac{1}{(4\pi^2)} \Omega_B, \end{aligned}$$

donde Ω_B es el ángulo sólido subtendido por la superficie desde el punto x_0 , y es igual a un múltiplo de 4π , dependiendo de cuántas veces y con qué orientación la superficie encierre al punto. Claramente esto representa también un invariante topológico.

CAPÍTULO 4

HAMILTONIANO ON SHELL PARA UNA CORRIENTE ESPECIAL EN $D=2+1$

En este capítulo revisaremos el estudio de una extensión del invariante de Gauss en el plano, esto es, del invariante que mide el número de vueltas con el que una curva cerrada circunda a un punto en el plano. Esta extensión fué obtenida en la referencia [3,4], a partir del cálculo del Hamiltoniano on-shell de la teoría BF acoplada con ciertas corrientes especiales, de carácter topológico, que revisaremos enseguida. El invariante en cuestión, que se obtiene por este método, puede verse como una proyección en el plano de un invariante tridimensional que detecta el anudamiento de los Anillos Borromeos [13], que serán también estudiados más adelante.

4.1. Invariante especial en $D=2+1$

Para el estudio que haremos será de utilidad introducir los siguientes objetos geométricos:

1. Factor de forma de una curva en el plano:

$$T_{(\gamma)}^\nu(x) = \int_\gamma dx'^\nu \delta^2(x - x'). \quad (4.1)$$

Este elemento transforma como una densidad tensorial.

2. Extensión bilocal del factor de forma:

$$T_{(\gamma)}^{\mu x, \nu y} = \int_\gamma dx'^\mu \int_0^{x'} dy'^\nu \delta^2(x - x') \delta(y - y'). \quad (4.2)$$

Este elemento transforma como una densidad tensorial.

3. Factor de forma superficial:

$$\mathcal{F}_x^\Sigma = \int_\Sigma d^2 x' \delta^2(x - x'). \quad (4.3)$$

Este elemento es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas e independiente de la métrica y es una 0-forma.

4. Gradiente del objeto \mathcal{F}_x^Σ :

$$\mathcal{G}_\mu(y, \partial_\Sigma) = -\frac{\partial}{\partial y^\mu} \mathcal{F}_y^\Sigma = \varepsilon_{\mu\nu} \int_{\partial\Sigma} dx'^\nu \delta^2(x - x'). \quad (4.4)$$

Este elemento es una 1-forma que por tanto es covariante bajo transformaciones generales de coordenadas.

A partir de los objetos definidos anteriormente, consideremos la cantidad

$$I(\mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}) = \int d^2 x \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)} + \int d^2 x \int d^2 y T_3^{[ix, jy]} \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}, \quad (4.5)$$

donde $\mathcal{G}^{(1)}$ y $\mathcal{G}^{(2)}$ están asociados a dos curvas abiertas γ_1 y γ_2 , respectivamente, que comienzan en el infinito, y $\mathcal{F}_x^{(3)}$ es asociado a una superficie cerrada que se encuentra bordeada por la curva γ_3 . Finalmente $T_3^{[ix,jy]}$ es un factor de forma bilocal antisimetrizado, asociado a la curva γ_3 , que detecta dos tangentes a una misma curva con un orden específico. Por su construcción, se aprecia que I no depende de la métrica y es un invariante bajo cambios generales de coordenadas. Es entonces un invariante topológico, asociado a las curvas 1, 2 y 3. Veremos a continuación que en realidad, no depende de la forma de las curvas abiertas 1 y 2: sólo depende de sus puntos finales, siempre y cuando éstos no estén circundados por la curva cerrada γ_3 . Para probar esto, consideremos dos curvas γ_1 y $\gamma_{1'}$ que compartan sus puntos de inicio y final. Calculemos la variación que experimenta I cuando cambiamos entonces de curva 1 según lo dicho anteriormente:

$$\Delta I = \int d^2x \varepsilon^{ij} \Delta \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)} + \int d^2x \int d^2y T_3^{[ix,jy]} \Delta \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}, \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}_i^{(1)} &= \mathcal{G}_i^{(1')} - \mathcal{G}_i^{(1)}, \\ &= \varepsilon_{ij} (T_{(1')}^{jx} - T_{(1)}^{jx}), \\ &= \mathcal{G}_i^{(\partial\Sigma')} = -\partial_i \mathcal{F}^{(1)}. \end{aligned}$$

Comencemos con ΔI_1

$$\begin{aligned} \Delta I_1 &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \Delta \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}, \\ &= \int d^2x \varepsilon^{ij} (-\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(1)}) \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}, \\ &= - \int d^2x \varepsilon^{ij} \left(\partial_{ix} (\mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}) - \mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} - \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} (\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}) \right) \\ &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \left(\mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} (\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}) \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

El otro término lo llamaremos ΔI_2 :

$$\begin{aligned}
 \Delta I_2 &= \int d^2x \int d^2y T_3^{[ix,jy]} \Delta \mathcal{G}_{ix}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}, \\
 &= \int d^2x \int d^2y T_3^{[ix,jy]} (-\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(1)}) \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \\
 &= - \int d^2x \int d^2y \left(\partial_{ix} (T_3^{[ix,jy]} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}) - \partial_{ix} (T_3^{[ix,jy]} \mathcal{F}_x^{(1)}) \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \right), \\
 &= \int d^2x \int d^2y \left(\partial_{ix} (T_3^{[ix,jy]} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}) \right). \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

Necesitaremos las ligaduras diferenciales siguientes, cuya prueba se encuentra en el apéndice A

$$\partial_{ix} T^{ix,jy} = (-\delta^2(x-x_0) + \delta^2(x-y)) T^{jy}, \tag{4.9}$$

$$\partial_{jy} T^{ix,jy} = (\delta^2(y-x_0) - \delta^2(y-x)) T^{ix}. \tag{4.10}$$

De ellas se desprende que

$$\partial_{ix} T^{[ix,jy]} = \frac{1}{2} (T^{ix,jy} - T^{jy,ix}) = (\delta^2(x-y) - \delta^2(x-x_0)) T^{jy}. \tag{4.11}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}
 \Delta I_2 &= - \int d^2x \int d^2y \left((\delta^2(x-x_0^{(3)}) - \delta^2(x-y)) \right) T_3^{jy} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \\
 &= \int d^2x \int d^2y \delta^2(x-y) \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} T_3^{jy} - \int d^2x \int d^2y T_3^{jy} \delta^2(x-x_0^{(3)}) \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Uniendo $\Delta I_1 + \Delta I_2$,

$$\begin{aligned}
 \Delta I &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} (\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}) \\
 &\quad + \int d^2x \int d^2y \delta^2(x-y) \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} T_3^{jy} - \int d^2x \int d^2y \delta^2(x-x_0^{(3)}) T_3^{jy} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \\
 &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} (\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}) \\
 &\quad + \int d^2x \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} T_3^{jx} - \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{F}_{x_0^{(3)}}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)},
 \end{aligned}$$

que con el empleo de

$$-\partial_{ix} \mathcal{F}_x^\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} dx'^j \varepsilon_{ij} \delta^2(x-x') = \mathcal{G}_{ix}^{(\partial\Sigma)}, \tag{4.12}$$

resulta

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} - \int d^2y \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} T_3^{jx} + \int d^2x \mathcal{F}_x^{(1)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} T_3^{jy} - \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}, \\ &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} (\partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} - \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)},\end{aligned}$$

sustituyendo

$$\mathcal{G}_{ix}^\gamma = \varepsilon_{ij} T_x^{(\gamma)j} = \varepsilon_{ij} \int_\gamma dx' \delta^2(x - x'),$$

en la expresión anterior, se obtendrá

$$\begin{aligned}\Delta I &= \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{F}_x^{(1)} (\delta^2(x - x_f^{(2)})) \mathcal{F}_x^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \\ &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \\ &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \varepsilon^{ij} (-\partial_{iy} \mathcal{F}_y^{(3)}).\end{aligned}\tag{4.13}$$

y al usar

$$\partial_{iy} (\mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \mathcal{F}_y^{(3)}) = \partial_{iy} (\mathcal{G}_{jy}^{(2)}) \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{F}_y^{(3)} + \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \partial_{iy} (\mathcal{F}_y^{(3)}).$$

Se sustituye

$$\begin{aligned}\Delta I &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} + \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y \varepsilon^{ij} (\partial_{iy} (\mathcal{G}_{jy}^{(2)} \mathcal{F}_y^{(3)}) - \mathcal{F}_y^{(3)} \partial_{iy} (\mathcal{G}_{jy}^{(2)})), \\ &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y \varepsilon^{ij} (\mathcal{F}_y^{(3)} \partial_{iy} (\mathcal{G}_{jy}^{(2)})), \\ &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \int d^2y \mathcal{F}_y^{(3)} \delta^2(y - x_f^{(2)}) \\ &= \mathcal{F}_{x_f}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{F}_{x_f}^{(3)},\end{aligned}\tag{4.14}$$

y esto se anula siempre que $x_f^{(2)}$ no esté circundado por la curva γ_3 . Este argumento puede repetirse de igual manera para probar que I no depende de la curva 2 en su totalidad, sólo depende de los puntos extremos de ella, siempre y cuando la curva 3 no encierre a los puntos extremos de la curva 1. Concluimos entonces que I es un invariante topológico asociado a la curva 3, y a los puntos finales de las curvas 1,2, siempre y cuando estos puntos no estén circundados por la curva 3 en el sentido del número de Gauss en el plano. En breve veremos un ejemplo en el que este invariante detecta un anudamiento no trivial entre una curva cerrada y un par de puntos.

4.2. Hamiltoniano on-shell

Una vez visto el invariante se procede a proponer las corrientes adecuadas para determinar un Hamiltoniano on-shell que coincida con dicho invariante. Recordemos que el Hamiltoniano on-shell (2.88) viene dado por

$$H = - \int d^2x (J_A^i A_i + J_B^i B_i).$$

Escogemos ahora las siguientes corrientes:

$$J_A^\mu = \begin{cases} 0 & , \mu = 0 \\ \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)} + \int d^2y T_3^{[ix,jy]} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} & , \mu = i \end{cases}, \quad (4.15)$$

$$J_B^\mu = \begin{cases} \delta^2(x - x_f^{(1)}) - \delta^2(x - x_0^{(1)}) & , \mu = 0 \\ 0 & , \mu = i \end{cases}. \quad (4.16)$$

Estas corrientes son conservadas para que la acción sea invariante de calibre; el caso de J_B^μ es sencillo, pero se estudiará con detalle la conservación de J_A^μ . Se tiene

$$\partial_{ix} J_A^i = \partial_{ix} (\varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}) + \partial_{ix} \left(\int d^2y T_3^{[ix,jy]} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \right).$$

El primer término produce

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \partial_{ix} (\varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)}), \\ &= (\partial_{ix} \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} (\partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}), \\ &= \delta^2(x - x_f^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)}. \end{aligned}$$

El segundo término es

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \partial_{ix} \left(\int d^2y T_3^{[ix,jy]} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \right), \\ &= T_3^{jx} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} - \delta^2(x - x_0^{(3)}) \int d^2y T_3^{jy} \mathcal{G}_{jy}^{(2)}, \\ &= \varepsilon^{ji} \partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} - \delta^2(x - x_0^{(3)}) \varepsilon_{ji} \int_{\gamma_3} d^2y \oint_{\gamma_3} dw^j \delta^2(w - y) \int_{\gamma_2} dz^i \delta^2(z - y), \\ &= \varepsilon^{ji} \partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} + \varepsilon_{ji} \delta^2(x - x_0^{(3)}) \oint_{\gamma_3} dy^j \int_{\gamma_2} dz^i \delta^2(z - y), \end{aligned}$$

sumando Γ_1 y Γ_2 ,

$$\begin{aligned}\partial_{ix} J_x^i &= \delta^2(x - x_f^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)} + \varepsilon^{ji} \partial_{ix} \mathcal{F}_x^{(3)} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} + \varepsilon_{ji} \delta^2(x - x_0^{(3)}) \oint_{\gamma_3} dy^j \int_{\gamma_2} dz^i \delta^2(z - y), \\ &= \delta^2(x - x_f^{(2)}) \mathcal{F}_x^{(3)} + \varepsilon_{ji} \delta^2(x - x_0^{(3)}) \oint_{\gamma_3} dy^j \left(\int_{\gamma_2} dz^i \delta^2(z - y) \right).\end{aligned}$$

Si la curva γ_3 no encierra el punto final de γ_2 , la corriente es conservada. En efecto, el primer término se anula dado que x debe ser interior a γ_3 . El segundo, mide el número de cortes de γ_3 con γ_2 , que se anula, de nuevo, si $x_f^{(2)}$ no está dentro de γ_3 . Esto prueba la conservación de la corriente. Pasemos al cálculo del Hamiltoniano on-shell.

Utilizando las ecuaciones de movimiento halladas anteriormente (2.29) y (2.39),

$$\varepsilon^{ij} \partial_i A_j = J_B^0,$$

se ve que

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} \partial_i A_j &= \delta^2(x - x_f^{(1)}) - \delta^2(x - x_i^{(1)}), \\ &= \partial_i T_1^{ix}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ij} A_j(x) &= T_1^{ix} + \varepsilon^{ij} \partial_j Z, \\ A_j(x) &= \mathcal{G}_j^1 + \partial_j Z,\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde Z es una función arbitraria. Se tiene así

$$\begin{aligned}H_{os} &= - \int d^2x J_A^i A_i, \\ &= - \int d^2x J_A^i (\mathcal{G}_{jx}^{(1)} + \partial_j Z).\end{aligned}$$

Integrando por partes el segundo término y empleando que la corriente es conservada, se ve que este término no contribuye. Queda entonces,

$$H_{os} = - \int d^2x \varepsilon^{ij} \mathcal{G}_{jx}^{(2)} \mathcal{F}_x^{(3)} \mathcal{G}_{jx}^{(1)} - \int d^2x \int d^2y T_3^{[ix, jy]} \mathcal{G}_{jy}^{(2)} \mathcal{G}_{jx}^{(1)}.\tag{4.18}$$

Vemos así que el Hamiltoniano on-shell coincide con el invariante I dado por (4.5). Como ya se discutió, el Hamiltoniano on-shell depende solamente de la curva cerrada

γ_3 y de los puntos finales de γ_2 y γ_1 . Además se ve que es invariante topológico debido a que es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas e independiente de la métrica. Para interpretar su significado, conviene considerar la configuración de curvas mostrada en la figura (4.1). La curva cerrada γ_3 pasa alrededor de uno de los puntos finales y luego por el otro, seguidamente se devuelve deshaciendo su pasaje en torno a cada uno de los puntos. Es fácil ver que si uno de los puntos finales es retirado de la configuración, el nudo podría desanudarse debido a que la curva no encierra a cada punto por separado y las ecuaciones de movimiento serían inconsistentes. Sin embargo, el sistema completo compuesto por los puntos finales y la curva γ_3 está anudado, en el sentido de que no puede extraerse la curva γ_3 sin pasar por encima de alguno de los puntos. Si se considera que los puntos finales son cortes de tramos rectos infinitos, perpendiculares al plano del papel, puede verse que la configuración de la figura es una representación de los Anillos Borromeos, que será estudiada en el próximo capítulo. En la figura (4.2) las curvas γ_2 y γ_1 se cortan dentro de γ_3 , pero en este caso el término antisimétrico de corte no actúa. Solamente interviene el término restante que detecta si el punto de corte entre ambas curvas está contenido dentro de γ_3 .

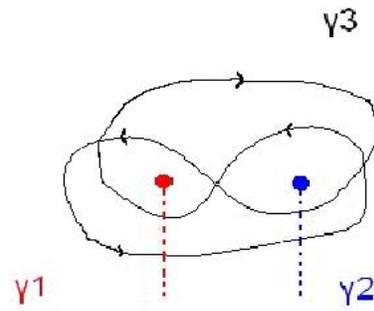


Figura 4.1: Hamiltoniano on-shell $D=2+1$, término sin cortes entre γ_1 y γ_2 dentro de γ_3

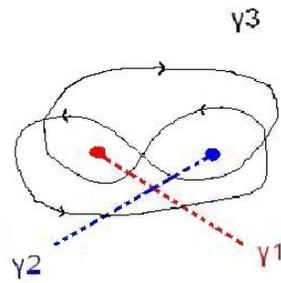


Figura 4.2: Hamiltoniano on-shell $D=2+1$, término de corte entre γ_1 y γ_2 dentro de γ_3

CAPÍTULO 5

INVARIANTE ESPECIAL EN $D=3+1$

En este capítulo proponemos unas corrientes para la teoría BF en dimensión $3+1$, que conducen a un Hamiltoniano on-shell, que produce un invariante de nudo, que corresponde al invariante de Milnor [15], estudiado en la referencia [5], y que constituye un grado más de complejidad en relación al número de anudamiento de Gauss. En efecto, este invariante, permite discriminar el anudamiento de los Anillos Borromeos [13], que es un nudo altamente no trivial asociado a tres curvas cerradas cuyos números de Gauss son nulos para cualesquiera de los tres pares de curvas posibles que se consideren. Comenzaremos introduciendo una serie de objetos que permitirán escribir e interpretar el invariante. Posteriormente propondremos las corrientes que conducirán a reproducir este invariante a partir del cálculo del Hamiltoniano on-shell de la teoría BF.

5.1. Algunos Objetos Geométricos Útiles

Será conveniente definir una familia de objetos asociados a volúmenes, superficies, curvas y puntos en \mathfrak{R}^3 . Estos objetos pueden verse como formas diferenciales, aunque

para su presentación no es imprescindible recurrir a este concepto. Comencemos con el objeto asociado a un volumen v dado por

$$\mathcal{F}(y, v) = \int_v d^3x \delta^3(x - y). \quad (5.1)$$

Bajo una transformación general de coordenadas el jacobiano correspondiente a la transformación del elemento de volumen se compensa con el inverso del jacobiano respectivo a la delta de Dirac, hecho que lo hace covariante bajo cambios generales de coordenadas, y a la vez es independiente de la métrica. Esto es útil para tratar con invariantes topológicos. Tomando el opuesto de la derivada exterior

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\mu(y, \partial v) &= -\frac{\partial}{\partial y^\mu} \mathcal{F}(y, v) = -\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_v d^3x \delta^3(x - y), \\ &= \int_v d^3x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^3(x - y) = \frac{1}{2} \int_{\partial v} d\Sigma^{\nu\rho}(x) \varepsilon_{\mu\nu\rho} \delta^3(x - y), \end{aligned}$$

donde se hizo uso del teorema de la divergencia. En esta expresión ∂V es el borde que limita el volumen v . Bajo transformaciones generales de coordenadas transforma así

$$\mathcal{G}'_\mu(y', \partial v) = \frac{\partial y^\nu}{\partial y'^\mu} \mathcal{G}'_\nu(y', \partial v). \quad (5.2)$$

El objeto $\mathcal{G}_\mu(y, \partial v)$ puede definirse también para superficies no necesariamente cerradas. Otro elemento útil es la derivada exterior de $\mathcal{G}_\mu(y, \partial v)$

$$h_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \mathcal{G}_{\nu]} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \oint_{\partial\Sigma} dx^\rho \delta^3(x - y). \quad (5.3)$$

Aquí se ha empleado el Teorema de Stokes, siendo $\partial\Sigma$ la curva que bordea a la superficie Σ . Finalmente se puede tomar la derivada exterior de $h_{\mu\nu}$

$$i_{\alpha\nu\rho} = -3\partial_{[\mu} h_{\nu\rho]}(y, \partial\Sigma) = \varepsilon_{\mu\nu\rho} (\delta^3(y - x_f) - \delta^3(y - x_0)). \quad (5.4)$$

Esta definición se puede extender a puntos simples,

$$i_{\alpha\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho} \delta^3(y - x). \quad (5.5)$$

Es útil considerar el dual de $h_{\mu\nu}$

$$T_\gamma^{\mu y} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} h_{\nu\rho}(y, \gamma) = \oint_\gamma dx^\mu d^3x \delta^3(x - y). \quad (5.6)$$

5.2. Invariante Asociado a los Anillos de Borromeo

Consideremos ahora el objeto I, que depende de tres superficies abiertas, y se expresa como[5]

$$I(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\rho x}^{(3)} + \int d^3x \int d^3y \left(T_1^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(3)} + T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(1)} + T_3^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} \right). \quad (5.7)$$

Por construcción, este objeto es un escalar bajo cambios generales de coordenadas y es independiente de la métrica. Es entonces un invariante topológico asociado a las superficies Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 . Estudiaremos su significado geométrico, y en particular, veremos que en realidad depende sólo de los bordes de las superficies, por lo cual será entonces un invariante de nudo, y no de superficies. Comencemos reescribiendo el número de Gauss asociado a la curva γ y a la curva que bordea la superficie Σ como

$$J(\gamma, \Sigma) = \int d^3x T_\gamma^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(\Sigma)} \quad (5.8)$$

$$J(\gamma, \Sigma) = \frac{1}{2} \int_\Sigma d\Sigma^{\nu\rho} \int_\gamma dz^\mu \varepsilon_{\mu\nu\rho} \delta^3(y - z). \quad (5.9)$$

Acotemos que el número de Gauss de la curva γ_2 cortando la superficie Σ_1 es igual al de la curva γ_1 cortando la superficie Σ_2 , es decir:

$$J(\gamma_1, \Sigma_2) = J(\gamma_2, \Sigma_1) = L(\gamma_1, \gamma_2). \quad (5.10)$$

Estudiemos término a término el invariante I. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int d^3x \int d^3y T_1^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(3)} &= \int d^3x \int d^3y \oint_{\gamma_1} dz^\mu \int^z dz'^\nu \delta^3(x - z) \delta^3(z' - y), \times \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Sigma_2} d\Sigma_2^{\alpha\beta}(x') \varepsilon_{\mu\alpha\beta} \delta^3(x - x') \frac{1}{2} \int_{\Sigma_3} d\Sigma_3^{\gamma\rho}(y') \varepsilon_{\nu\gamma\rho} \delta^3(y - y') - (\mu x \rightleftharpoons \nu y) \\ &= \oint_{\gamma_1} dx^\mu \int^x dy^\nu \left(\frac{1}{2} \int_{\Sigma_2} d\Sigma_2^{\alpha\beta}(x') \varepsilon_{\mu\nu\rho} \delta^3(x - x') \right) \left(\frac{1}{2} \int_{\Sigma_3} d\Sigma_3^{\gamma\rho}(y') \varepsilon_{\nu\gamma\rho} \delta^3(y - y') \right) - (\mu x \rightleftharpoons \nu y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \oint_{\gamma_1} dx^\mu \int^x dy^\nu \left(\int_{\Sigma_2} dS_\mu^{(2)}(x') \delta^3(x - x') \right) \left(\int_{\Sigma_3} dS_\nu^{(3)}(y') \delta^3(y - y') \right) - (\mu x \rightleftharpoons \nu y), \\
 &= \oint_{\gamma_1} dx^\mu \int^x dy^\nu \int_{\Sigma_2} dS_\mu^{(2)}(x') \int_{\Sigma_3} dS_\nu^{(3)}(y') (\delta^3(x - x') \delta^3(y - y')) - (\mu x \rightleftharpoons \nu y),
 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $dS_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} d\Sigma^{\nu\alpha}$. La fórmula anterior mide el número de veces que se producen los cuatro cortes siguientes: γ_1 corta a Σ_3 , luego a Σ_2 , luego a Σ_3 en sentido opuesto al de la primera vez y finalmente a Σ_2 también en sentido opuesto. Si los números de Gauss entre γ_1 y γ_3 y entre γ_1 y γ_2 se anulan, este invariante mide el número de veces que γ_1 fluye primero a través de 3, luego de 2, luego de 3 pero en sentido opuesto y finalmente de 2 en sentido opuesto también. Los dos términos siguientes en la expresión (5.7) (el tercer y cuarto términos) tienen interpretaciones análogas, intercambiando cíclicamente las curvas 1, 2 y 3. En la figura (5.1) se representa lo explicado anteriormente

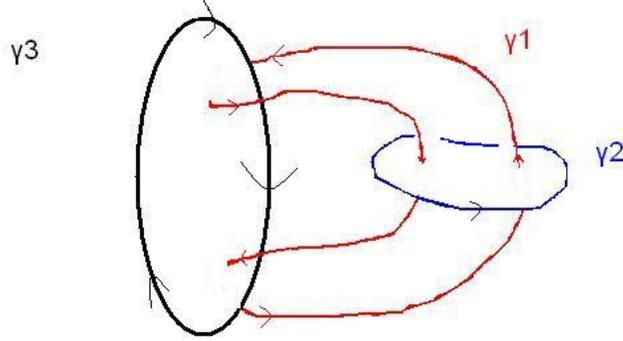


Figura 5.1: Hamiltoniano on shell $D=3+1$, Corte de las curvas con orientación específica

En cuanto al primer término se tiene,

$$\begin{aligned}
 \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\rho x}^{(3)} &= \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \int_{S_1} dS_1^\mu(x') \delta^3(x - x') \int_{S_2} dS_2^\nu(y) \delta^3(x - y) \times \\
 &\quad \int_{S_3} dS_3^\rho(z) \delta^3(x - z), \\
 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho} \int_{S_1} dS_1^\mu(x) \int_{S_2} dS_2^\nu(y) \int_{S_3} dS_3^\rho(z) \delta^3(x - z) \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Esta expresión mide el número orientado de veces que las tres superficies se cortan en el mismo punto. A continuación en la figura (5.2) se ve claramente la representación de dicho invariante.

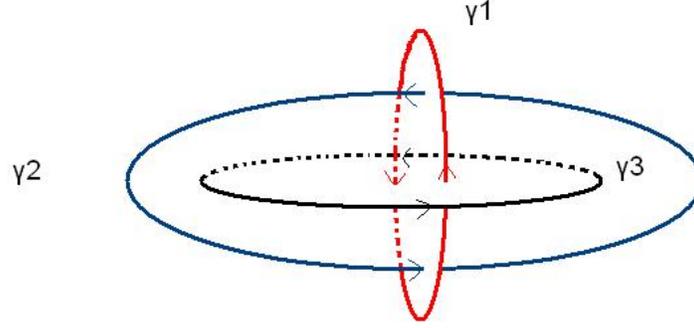


Figura 5.2: Hamiltoniano on shell $D=3+1$, Intersección de las tres superficies

Para demostrar que el objeto es un invariante de nudo, probaremos a continuación que I sólo depende de los bordes de las superficies que lo conforman y no de la forma de las superficies. Consideremos una variación en cualquiera de las superficies manteniendo el mismo borde, por ejemplo, $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma'_1$ con $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma'_1$; por lo tanto, $\Delta\mathcal{G}_\mu^{(1)} = \mathcal{G}_\mu^{(1)}(\Sigma'_1) - \mathcal{G}_\mu^{(1)}(\Sigma_1) = \mathcal{G}_\mu^{(1)}(\partial V)$. Entonces

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\Sigma'_1, \Sigma_2, \Sigma_3) - I(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) \\ &= \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \Delta\mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\rho x}^{(3)} + \int d^3x \int d^3y \left(T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \Delta\mathcal{G}_{\nu y}^{(1)} + T_3^{[\mu x, \nu y]} \Delta\mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Analicemos esta expresión. Comenzamos con

$$\begin{aligned} \int d^3x' \int d^3y T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \Delta\mathcal{G}_{\nu y}^{(1)} &= - \int d^3x' \int d^3y T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \mathcal{F}_y^{(1)}, \\ &= \int d^3x \int d^3y \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu} T_2^{[\mu x, \nu y]} \right) \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{F}_y^{(1)}, \\ &= \int d^3x \int d^3y \left(\delta^3(y - x_0^{(2)}) - \delta^3(y - x) \right) T_2^{\mu x} \mathcal{F}_y^{(1)} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \\ &= \int d^3x T_2^{\mu x} \mathcal{F}_{x_0^{(2)}}^{(1)} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} - \int d^3x T_2^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{F}_x^{(1)}, \end{aligned}$$

recordando la siguiente ligadura

$$\partial_{y\nu} T^{[\mu x, \nu y]} = \left(\delta^3(y - x_0) - \delta^3(y - x) \right) T^{\mu x}.$$

De igual manera se tiene

$$\int d^3 x \int d^3 y T_3^{[\mu x, \nu y]} \Delta \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} = \int d^3 y T_3^{\nu y} \mathcal{F}_y^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} - \int d^3 y T_3^{\nu y} \mathcal{F}_{x_0}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)}.$$

Uniendo ambos resultados

$$\Delta I_1 = \left(\mathcal{F}_{x_0}^{(1)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(3)} \right) \int d^3 x T_2^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} - \int d^3 x T_2^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{F}_x^{(1)} + \int d^3 y T_3^{\nu y} \mathcal{F}_y^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)}.$$

Se cumple que

$$\begin{aligned} \int d^3 x \mathcal{F}_x^{(1)} T_3^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} &= \int d^3 x \mathcal{F}_x^{(1)} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \mathcal{G}_{\rho x}^{(3)} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} \\ &= - \int d^3 x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \Delta \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\rho x}^{(3)} + \int d^3 x \mathcal{F}_x^{(1)} T_2^{\mu x} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)}. \end{aligned}$$

Finalmente se llega a:

$$\Delta I = \left(\left(\mathcal{F}_{x_0}^{(1)} - \mathcal{F}_{x_0}^{(3)} \right) L(\gamma_3, \gamma_2) \right). \quad (5.11)$$

Vemos entonces que si $L(\gamma_3, \gamma_2)$ se anula, I no depende de la superficie Σ_1 , sino sólo de la curva γ_1 que es su borde. Este argumento puede repetirse idénticamente para γ_2 y luego para γ_3 . Concluimos así que I es un invariante de nudo y no de superficies, siempre y cuando los bordes de dichas superficies no estén anudados entre si en el sentido de Gauss.

5.3. Hamiltoniano on-shell

El invariante estudiado en el capítulo anterior puede obtenerse a partir del estudio perturbativo del Lagrangiano on shell de la acción de Chern-Simons no-Abeliana [5,12], y también del estudio exacto de una teoría BF Abeliana [11], en ambos casos en dimensión $2+1$. En esta sección veremos que el invariante estudiado en la sección anterior de este capítulo puede también obtenerse en el marco del formalismo Hamiltoniano, para una teoría tipo BF en dimensión $3+1$. Consideremos la acción

$$S_{BF} = \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} B_{\mu\nu}^a \partial_\nu A_\rho^a + \int d^4x J^{\mu a} A_\mu^a + \int d^4x K^{\mu\nu a} B_{\mu\nu}^a. \quad (5.12)$$

Aquí, los campos $B_{\mu\nu}^a$ y A_μ^a y las corrientes $J^{\mu a}$ y $K^{\mu\nu a}$ tienen un índice interno tomado del comienzo del abecedario latino, que va desde 1 hasta 3. Se trata entonces de tres copias de la acción BF Abeliana. El análisis canónico es pues similar al de la teoría BF estudiada en la sección (2.5). El Hamiltoniano se escribe como

$$\mathcal{H}' = -B_{0i}^a \left(2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k^a + K^{0ia} \right) - A_0^a \left(J^{0a} + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ija} \right) - (J^{ia} A_i^a + K^{ija} B_{ij}^a), \quad (5.13)$$

donde figuran las ligaduras

$$J^{0a} + \varepsilon^{0kij} \partial_k B_{ij}^a = 0, \quad (5.14)$$

$$K^{0ia} + 2\varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k^a = 0, \quad (5.15)$$

que resultan ser de primera clase, como puede verse fácilmente. Tomaremos las corrientes como[5]

$$J^{\mu a} = (J^{0a}, J^{ia}) = \left(0, \Phi_1 \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c + \Phi_2 \int d^2y \varepsilon^{abc} T^{[ix, jy]_b} \mathcal{G}_{jy}^c \right), \quad (5.16)$$

$$K^{\mu\nu a} = (K^{0ia}, K^{ija}) = (T_a^{ix}, 0). \quad (5.17)$$

Las tres corrientes K están asociadas a tres curvas cerradas, a través de sus factores de forma. Las tres corrientes J dependen de los factores de forma de tres superficies cuyos bordes son las curvas anteriores, así como de los factores de forma

bilocales de dichas curvas, Φ_1 y Φ_2 son constantes que ajustaremos enseguida. Para la consistencia de la teoría, las corrientes deben ser conservadas. Se tiene que

$$\partial_{ix} J^{ia}(x) = \partial_{ix} \left(\Phi_1 \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c + \Phi_2 \int d^2 y \varepsilon^{abc} T^{[ix, jy]_b} \mathcal{G}_{jy}^c \right).$$

Estudiamos el primer término que llamaremos B_1

$$B_1 = \partial_{ix} \left(\Phi_1 \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c \right) = \Phi_1 \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \partial_{ix} (\mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c).$$

Recordando que

$$\varepsilon^{ijk} \partial_{ix} \mathcal{G}_{jx}^b = T_b^{kx}.$$

B_1 queda de la siguiente forma

$$B_1 = \Phi_1 \varepsilon^{abc} \left(T_b^{kx} \mathcal{G}_{kx}^c - T_c^{jx} \mathcal{G}_{jx}^b \right).$$

El otro término es

$$\begin{aligned} B_2 &= \left(\Phi_2 \int d^2 y \varepsilon^{abc} \partial_{ix} (T^{[ix, jy]_b}) \mathcal{G}_{jy}^c \right), \\ &= \Phi_2 \varepsilon^{abc} T_b^{jx} \mathcal{G}_{jx}^c - \Phi_2 \varepsilon^{abc} \delta^3(x - x_0^b) L(\gamma_b, \gamma_c). \end{aligned}$$

Uniendo resultados anteriores se tiene

$$\begin{aligned} \partial_{ix} J^{ia} &= \Phi_1 \varepsilon^{abc} \left(T_b^{kx} \mathcal{G}_{kx}^c - T_c^{jx} \mathcal{G}_{jx}^b \right) + \Phi_2 \varepsilon^{abc} T_b^{jx} \mathcal{G}_{jx}^c - \Phi_2 \varepsilon^{abc} \delta^3(x - x_0^b) L(\gamma_b, \gamma_c), \\ &= 2\Phi_1 \varepsilon^{abc} T_b^{kx} \mathcal{G}_{kx}^c + \Phi_2 \varepsilon^{abc} T_b^{jx} \mathcal{G}_{jx}^c - \Phi_2 \varepsilon^{abc} \delta^3(x - x_0^b) L(\gamma_b, \gamma_c). \end{aligned}$$

Si $\Phi_1 = -\frac{\Phi_2}{2}$ se tiene lo siguiente:

$$\partial_{ix} J^{ia} = -\Phi_2 \varepsilon^{abc} \delta^3(x - x_0^b) L(\gamma_b, \gamma_c). \quad (5.18)$$

Vemos entonces que para que la corriente 1 sea conservada, el número de anudamiento de Gauss entre las curvas 2 y 3 debe ser cero. Esto se repite para todas las permutaciones cíclicas de 1,2 y 3. La conservación de la otra corriente es inmediata, por tratarse

de factores de forma de curvas cerradas. Seguidamente se sustituyen las corrientes en el Hamiltoniano on-shell

$$\begin{aligned} H &= - \int d^3x \left(J^{ia} A_i^a + K^{ija} B_{ij}^a \right), \\ &= - \int d^3x J^{ia} A_i^a, \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para hallar los campos A^a , partimos de la ligadura (5.15)

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k^a &= -K^{0ia} = -T_a^i, \\ \varepsilon^{0ijk} \partial_j A_k^a &= \varepsilon^{0ijk} \partial_j \mathcal{G}_k^a, \\ \varepsilon^{0ijk} \partial_j (A_k^a + \mathcal{G}_k^a) &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto el campo es,

$$A_k^a = \partial_k Z^a - \mathcal{G}_k^a, \quad (5.20)$$

donde Z^a es una función arbitraria. Sustituyendo en el Hamiltoniano (denotaremos $\Phi = \Phi_2$), se tiene

$$\begin{aligned} H &= - \int d^3x J^{ia} (\partial_i Z^a - \mathcal{G}_i^a), \\ &= \int d^3x J^{ia} \mathcal{G}_i^a, \\ &= \int d^3x \left(-\frac{\Phi}{2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c \mathcal{G}_i^a + \Phi \int d^2y \varepsilon^{abc} (T_b^{[ix,jy]}) \mathcal{G}_{jy}^c \right) \mathcal{G}_i^a, \\ &= -\frac{\Phi}{2} \int d^3x \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \mathcal{G}_{jx}^b \mathcal{G}_{kx}^c \mathcal{G}_i^a + \Phi \int d^3x \int d^3y \varepsilon^{abc} (T_b^{[ix,jy]}) \mathcal{G}_{jy}^c \mathcal{G}_i^a, \\ &= -3\Phi \int d^3x \varepsilon^{ijk} \mathcal{G}_{ix}^1 \mathcal{G}_{jx}^2 \mathcal{G}_{kx}^3 - 2\Phi \int d^3x \int d^3y T_1^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(3)} + T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(1)} \\ &+ T_3^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Vemos entonces que el Hamiltoniano on-shell es proporcional al invariante topológico I estudiado en la sección anterior. Es interesante observar que la condición de consistencia de las ecuaciones de movimiento, esto es, la conservación de las corrientes, es precisamente la garantía de que I sea un invariante de nudo, y no de superficie. Esta íntima conexión entre física y topología es uno de los aspectos que consideramos deben subrayarse en este trabajo.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En el presente Trabajo Especial de Grado se prosiguió con un programa iniciado hace varios años que persigue el estudio y la caracterización de invariantes de nudo (y generalizaciones de ellos) a partir del estudio de teorías de campo topológicas en el contexto clásico [2,3,4]. Luego de una revisión de los resultados previos, se estudió la formulación Hamiltoniana de una teoría tipo BF en dimensión 3+1, acoplada con corrientes externas topológicas, que condujo a un Hamiltoniano on-shell dado por

$$\mathcal{H} = -3\Phi \int d^3x \varepsilon^{ijk} \mathcal{G}_{ix}^1 \mathcal{G}_{jx}^2 \mathcal{G}_{kx}^3 - 2\Phi \left(\int d^3x \int d^3y \left(T_1^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(2)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(3)} + T_2^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(3)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(1)} + T_3^{[\mu x, \nu y]} \mathcal{G}_{\mu x}^{(1)} \mathcal{G}_{\nu y}^{(2)} \right) \right).$$

Los tres últimos términos en esta expresión miden el número de veces que una curva γ_a corta primero la superficie Σ_b y luego a Σ_c , con $a \neq b \neq c$, y luego corta a Σ_b en sentido opuesto al inicial, para finalmente cortar a Σ_c también en sentido opuesto. Por su parte el primer término mide el número orientado de veces que las tres superficies se cortan en un mismo punto. Juntos, los cuatro términos producen una cantidad que es independiente de la forma precisa de las superficies, y sólo depende de las curvas que las bordean. Esto se probó mostrando que el cambio que sufre el invariante cuando se reemplaza la superficie Σ_a por otra que comparta el mismo borde, viene dado por

$$\Delta I = \left(\left(\mathcal{F}_{x_0^{(b)}}^{(a)} - \mathcal{F}_{x_0^{(c)}}^{(a)} \right) L(\gamma_c, \gamma_b) \right), \quad (6.1)$$

y se anula cuando las otras dos curvas no se anudan en el sentido del número de Gauss. El invariante obtenido por este método, corresponde al encontrado en la referencia [3,4], y permite, por ejemplo, distinguir el anudamiento de los Anillos Borromeanos. El método de obtención de invariantes topológicos, cuyo estudio se prosiguió en este trabajo, podría ser extendido al caso de teorías no Abelianas, utilizando técnicas perturbativas adecuadas al formalismo Hamiltoniano.

APÉNDICE A

APÉNDICE A

En este apéndice se hará el cálculo pertinente para demostrar las ligaduras (4.9) y (4.10). La primera en demostrar será la siguiente

$$\partial_{ix} T^{ix, jy} = (-\delta^2(x - x_0) + \delta^2(x - y)) T^{jy}.$$

Para ello

$$\partial_{ix} T^{ix, jy} = \partial_{ix} \oint_{\gamma} dx'^i \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(x - x') \delta^2(y - y') \quad (\text{A.1})$$

$$= - \oint_{\gamma} dx'^i \partial_{ix'} (\delta^2(x - x')) \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y'). \quad (\text{A.2})$$

Se toma en cuenta la derivada

$$\begin{aligned} \partial_{ix'} \left(\delta^2(x - x') \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right) = \\ \partial_{ix'} (\delta^2(x - x')) \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') + \delta^2(x - x') \partial_{ix'} \left(\int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

y se sustituye

$$\begin{aligned} \partial_{ix} T^{ix, jy} &= - \oint_{\gamma} dx'^i \partial_{ix'} \left(\delta^2(x - x') \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right) + \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \partial_{ix'} \left(\int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right) \\ &= -\delta^2(x - x_f) \oint_{\gamma} dy'^j \delta^2(y - y') + \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \partial_{ix'} \left(\int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right). \end{aligned}$$

Se analiza el segundo término del resultado recientemente obtenido, haciendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
u^i \frac{\partial}{\partial x'^i} \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') &= \int_{x_0}^{x'+u} dy'^j \delta^2(y - y') - \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y'), \\
&= \int_{x'}^u dy'^j \delta^2(y - y'), \\
&= u^j \delta^2(y - y'), \\
&= \delta_{ij} u^i \delta^2(y - x'),
\end{aligned}$$

finalmente

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - x') = \delta_{ij} \delta^2(y - x'),$$

se unen los resultados

$$\begin{aligned}
\partial_{ix} T^{ix,jy} &= -\delta^2(x - x_f) \oint_{\gamma} dy'^j \delta^2(y - y') + \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \partial_{ix'} \left(\int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y') \right) \\
&= -\delta^2(x - x_f) \oint_{\gamma} dy'^j \delta^2(y - y') + \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \delta_{ij} \delta^2(y - x'), \\
&= -\delta^2(x - x_f) T^{jy} + \delta^2(x - y) \oint_{\gamma} dx'^j \delta^2(y - x'), \\
&= \left(\delta^2(x - y) - \delta^2(x - x_f) \right) T^{jy} = \left(\delta^2(x - y) - \delta^2(x - x_0) \right) T^{jy}. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

A continuación se demostrará la segunda ligadura

$$\begin{aligned}
\partial_{jy} T^{ix,jy} &= \partial_{jy} \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y'), \\
&= -\oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \partial_{jy'} \int_{x_0}^{x'} dy'^j \delta^2(y - y'), \\
&= -\oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \left(\delta^2(y - x') - \delta^2(y - x_0) \right), \\
&= -\left(\delta^2(y - x) - \delta^2(y - x_0) \right) \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x') \\
&= \left(\delta^2(y - x_0) - \delta^2(y - x) \right) \oint_{\gamma} dx'^i \delta^2(x - x'). \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E.Witten *Topological Quantum Fields Theory, common Math. Phys* 112,353 386(1988).
- [2] N. Torres *Formulación Hamiltoniana de la Teoría B-F en Dimensión 3 + 1 e Invariantes Topológicos. Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de Venezuela, (Marzo 2012).*
- [3] A. Díaz *Cuantización a la Dirac de una Teoría Topológica Abeliana. Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de Venezuela,(Mayo 2011)*
- [4] E. Contreras, A. Diaz and L. Leal, *Mod. Phys. Lett. A* **27**, 1250069 (2012) [arXiv:1109.6701 [hep-th]].
- [5] L. Leal *Ecuaciones Clásicas de la Teoría de Chern-Simons e Invariantes de Nudo. Trabajo de Ascenso a la Categoría de Profesor Titular, Universidad Central de Venezuela, (Octubre 2010).*
- [6] J. Camacaro *Algunas Aplicaciones del Método de Cuantización a la Dirac. Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de venezuela (1995).*

- [7] P. Dirac *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, Inc. Yeshiva University, New York, (1994).
- [8] M. Henaux, C. Teitelboim *Quantizations of Gauge System*. Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1992).
- [9] H. Goldstein, C. Pole, J. Safko *Classical Mechanics*. Addison Wesley (Julio 2002).
- [10] W. Greiner *Fields Quantizations*. Springer-Verlog. Berlín Heilberg (1996).
- [11] L. Leal and J. Pineda, Mod. Phys. Lett. A **23**, 205 (2008) [arXiv:0704.2429 [hep-th]].
- [12] L. Leal, Phys. Rev. D **66**, 125007 (2002) [hep-th/0204139].
- [13] D. Rolfsen *Knots and Links*, Wilmington, Publish or Perish (1976).
- [14] F. Ysalguez *Aspectos Clásicos y Cuánticos de las Teorías de Yang-Mills en (1+1)*. Trabajo Especial de Grado, Universidad Central de Venezuela (2012).
- [15] J. Milnor, Ann. of Math. 59, 177 (1954)