

*Cálculo automatizado de diagramas de
Feynman empleando productos de helicidad*

Br. Dafne Arias

Tutores: Fernando Febres Cordero
Lorenzo Leal

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 7 de noviembre del año 2014



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

CÁLCULO AUTOMATIZADO DE DIAGRAMAS DE FEYNMAN EMPLEANDO PRODUCTOS DE HELICIDAD

Br. Dafne Arias

Fernando Febres Cordero, Tutor

Lorenzo Leal, Tutor

Caracas, 7 de noviembre del año 2014

**Cálculo automatizado de diagramas de Feynman empleando productos de
helicidad**

Copyright © 2014

Universidad Central de Venezuela
Dafne Arias

**CÁLCULO AUTOMATIZADO DE DIAGRAMAS DE FEYNMAN
EMPLEANDO PRODUCTOS DE HELICIDAD**

Br. Dafne Arias

*Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de*
Licenciado en Física.

Fernando Febres Cordero, Tutor

Fecha

Lorenzo Leal, Tutor

Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. Dafne Arias, titulado: “**Cálculo automatizado de diagramas de Feynman empleando productos de helicidad**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Fernando Febres Cordero, Tutor Fecha

Lorenzo Leal, Tutor Fecha

José López Fecha

Ernesto Fuenmayor Fecha

Caracas, 7 de noviembre del año 2014

A mis padres,

Pio Arias

Zulay Perdomo

A mis abuelas,

Flor y Bayu

A mis hermanos,

Pio, Angel y Mota

A mis grandes amigos,

Oswaldo y Yucki

Agradecimientos

Al profesor Fernando Febres Cordero, a quien admiro bastante por su forma de hacer ciencia y explicarla, le agradezco sobre todo su paciencia, apoyo y guía a lo largo de la realización de este trabajo, especialmente, por todas sus enseñanzas referentes a los contenidos aquí expuestos y el manejo del computador, y por ser un ejemplo personal de lo que significa ser un gran investigador con alta trayectoria científica, motivación importante para seguir en este camino.

A mi padre Pio José Arias, persona correcta y cuyo carácter fuerte me impulsó varias veces en este camino en el cual es muy sencillo rendirse, siendo además mi primer contacto con lo que significa ser un científico dedicado a su trabajo y a la ayuda de sus colegas. También le agradezco por haber estado al tanto del progreso del trabajo aquí presentado y por sus sugerencias en algunos de los contenidos expuestos.

A mi madre Zulay Perdomo y a mi hermano Pio Arias (hijo), quienes aunque no expertos en el tema han estado al tanto del desarrollo no solo de mi Trabajo Especial de Grado, sino de mi progreso académico.

A mi compañero de carrera, futuro colega y sincero amigo, Oswaldo Ramírez con el cual comparto todos los altos y bajos a lo largo de estos 5 años de estudios juntos, y quien entiende perfectamente las dificultades de nuestra carrera. No solo le agradezco por haber estado al tanto y leído los primeros borradores de este trabajo, cuyas opiniones y observaciones fueron gustosamente recibidas, le agradezco porque sin su apoyo y comprensión no hubiese llegado en el tiempo propuesto y sin tantas alegrías al final de esta etapa.

A los profesores Lorenzo Leal, José Antonio López, Nelson Bolívar y Ernesto Fuenmayor por su colaboración, apoyo y preocupación para la presentación de este trabajo.

A mis tíos, Pedro Rangel, Xiomara Perdomo, Mariela Perdomo, Asdrubal Arias, Ana Schulz, y a mis abuelas, Flor y Bayu, por todas sus enseñanzas y ayudas para el desarrollo de mi educación en general.

A mi prima Yaritza Rangel, quien es la hermana mayor que nunca tuve, pero que también ha sido mi modelo a seguir en diversas ocasiones.

A mi amiga, Gabriela Carpio, por ayudarme a descansar cuando era necesario en estos meses de trabajo.

A mi amiga, Yusneida Torres, otra hermana quien sin tener conocimientos profundos en esta área leyó completamente este trabajo e hizo las correcciones necesarias en cuanto a ortografía, agradezco también su preocupación, amistad y respeto en lo que fueron las semanas más intensas de escritura.

A mis hermanos y adorados amigos, Angel Maldonado y Sergio Mota, esta es una etapa de logros que termina para dar comienzo a otra, y es una alegría más para compartir entre los tres en lo que han significado estos 10 años de Amistad.

ÍNDICE GENERAL

Índice General	viii
Lista de Figuras	xii
1. Introducción	2
2. Fermiones y Productos de Helicidad	5
2.1. La Ecuación de Dirac	5
2.1.1. Descripción y Matrices	5
2.1.2. Espinor de Weyl	8
2.1.3. Soluciones de la ecuación de Dirac	9
2.1.4. Espinores	10
2.2. Productos de Helicidad	11
2.2.1. Helicidad y Quiralidad	11
2.2.2. Productos de helicidad	12
2.2.3. Propiedades e Identidades	13
2.2.4. Vectores de Polarización	14

3. Diagramas de Feynman y Ordenamiento de Color	16
3.1. QED: Electrodinámica Cuántica	16
3.2. QCD: Cromodinámica Cuántica	18
3.3. Algoritmo de Diagramas de Feynman para el cálculo de amplitudes en QED	19
3.3.1. Ejemplo del uso de las Reglas de Feynman en QED	21
3.4. Algoritmo de Diagramas de Feynman para el cálculo de amplitudes en QCD	23
3.5. Ordenamiento de Color	23
3.5.1. Álgebra de Color $SU(3)$: matrices y constantes de estructura	23
4. Cálculos y códigos para amplitudes en QCD	28
4.1. Amplitud para un proceso con solo 4 gluones	28
4.1.1. Amplitudes MHV: Maximally Helicity Violating Amplitudes	34
4.2. Automatización de árboles con multiples helicidades	35
4.2.1. Códigos para calcular amplitudes con multiples helicidades	35
4.2.2. Aplicación de AtreeFDhel para la amplitud de 4 Gluones .	46
4.2.3. Casos con más de 4 gluones	47
4.2.4. Códigos para amplitudes con líneas fermiónicas	49

5. Resultados numéricos	52
5.1. Procesos con solo gluones	53
5.1.1. 4 gluones	53
5.1.2. 5 gluones	54
5.1.3. 6 gluones	57
5.1.4. 7 gluones	57
5.2. Procesos con 2 quarks y gluones	58
5.2.1. 2 quarks y 2 gluones	58
5.2.2. 2 quarks y 3 gluones	61
5.2.3. 2 quarks y 4 gluones	62
5.2.4. 2 quarks y 5 gluones	63
5.3. Procesos con 4 quarks y gluones	63
5.3.1. 4 quarks	63
5.3.2. 4 quarks y 1 gluón	66
5.3.3. 4 quarks y 2 gluones	66
5.3.4. 4 quarks y 3 gluones	67
5.3.5. 4 quarks y 4 gluones	68
6. Reducciones de Passarino-Veltman y amplitudes de un lazo	69
6.1. Más allá de las Amplitudes de Árbol. Cálculos de un lazo	69
6.2. Reducción de Passarino-Veltman	72
6.2.1. Ejemplo: reducción de la integral tensorial C3 usando la técnica de PV	73
6.3. Automatización de Passarino-Veltman en Mathematica	76
7. Conclusión	78

<i>Índice General</i>	xi
A. Uso de FeynArts para la dispersión electrón-positrón y procesos de 4 gluones	80
A.1. Uso de FeynArts en la dispersión electrón-positrón	80
A.2. Uso de FeynArts para un proceso con 4 gluones	81
B. Automatización de árboles: funciones	86
B.1. Definición de ColorSimplify	86
B.2. Definición de AtreeColorManagement	87
B.3. Definición de AtreeKinematics	89
C. Tablas para procesos con muchas helicidades	97
D. Breve ejemplo de la aplicación de los Productos de Helicidad	104
Bibliografía	106

A.4.	Diagramas para 4 gluones generados con FeynArts	84
A.5.	Diagrama generado con FeynArts para 4 gluones sin hacer sustituciones	85
A.6.	Amplitud para un solo diagrama de 4 gluones con FeynArts	85

Resumen

Cálculo automatizado de diagramas de Feynman empleando productos de helicidad

Dafne Arias

Fernando Febres Cordero, Tutor

Lorenzo Leal, Tutor

Universidad Central de Venezuela

Se presenta un algoritmo y se desarrolla un código computacional para el cálculo automatizado de diagramas de árbol de Feynman para la extracción de amplitudes en teorías cuánticas de campo. Se emplea la técnica de productos de helicidad que permite evitar la manipulación analítica de cuadrados de amplitudes. Se demuestra el poderío de los códigos desarrollados con el cómputo de amplitudes ordenadas de color con hasta 8 partículas. Se comparan las amplitudes obtenidas a resultados del programa numérico BlackHat. Se discuten extensiones, basadas en reducciones de Passarino-Veltman de integrales tensoriales, para el cómputo de diagramas de Feynman de un lazo.

Fernando Febres Cordero
Tutor

Lorenzo Leal
Tutor

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Décadas atrás, históricamente se conocían solo varios mesones y bariones, y todo era un coctel de partículas. Murray Gell-Mann, físico estadounidense y ganador del Premio Nobel de Física en 1969, puso orden a ello proponiendo los quarks, originalmente como un artilugio matemático, una forma de organización, y no algo físico. En ese tiempo, aparece también el Modelo de Partones propuesto por Feynman en un artículo del año 1969 [1], donde dichos partones eran propuestos para estudiar las colisiones con la presencia de hadrones en el estado inicial. Algún tiempo después, se llegó a la conclusión de que los partones de los que hablaba Feynman eran los mismos quarks que mencionaba Gell-Mann.

El cálculo de amplitudes de choque está en el centro de la Teoría Cuántica de Campos. Dichas amplitudes contienen toda la información dinámica que se requiere para entender procesos de interacción entre partículas. Las mismas son fundamentales, pues para un proceso de choque la sección eficaz del mismo se obtiene a partir del cuadrado de estas. Por ejemplo, al analizar choques en colisionadores hadrónicos, se

emplea la ecuación:

$$\sigma(p_1 p_2 \rightarrow X) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_i^{p_1}(x_1) f_j^{p_2}(x_2) \hat{\sigma}(ij \rightarrow X) , \quad (1.1)$$

donde las $f_i^{p_j}(x_j)$ son las llamadas funciones de densidad partónica, que reflejan la probabilidad de encontrar el partón i en el hadrón j con una fracción total de momentum x_j . La sección eficaz $\hat{\sigma}(ij \rightarrow X)$ se conoce como la sección partónica fuerte (*partonic hard cross section*, en inglés), en la cual intervienen solo partículas puntuales (los *partones*) y se puede calcular con teoría de perturbaciones en teoría cuántica de campos. La ecuación 1.1 la propone de manera heurística en 1969 Feynman [1], y se prueba en el contexto de Cromodinámica cuántica (QCD) en los años 80 empleando la técnica de expansión de producto de operadores [2].

En general, escribimos:

$$\hat{\sigma} \propto |A|^2 , \quad (1.2)$$

donde A es la amplitud de choque. En el contexto de QCD, esta amplitud se expande como una serie de potencias en la constante de acoplamiento fuerte, α_s , según:

$$A = \alpha_s^n \left(A^{\text{tree}} + \frac{\alpha_s}{2\pi} A^{1\text{-loop}} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 A^{2\text{-loop}} + \dots \right) , \quad (1.3)$$

donde al primer coeficiente A^{tree} se le conoce como la amplitud de árbol, al segundo $A^{1\text{-loop}}$ la amplitud de un lazo, y prosiguen de esta forma. Los nombres vienen pues estos coeficientes se relacionan con diagramas de Feynman con topología de árbol, un lazo y varios lazos.

En este trabajo se estará presentando algoritmos para el cómputo automatizado de amplitudes en QCD empleando diagramas de Feynman. El algoritmo de reglas de Feynman permite de manera sistemática organizar el cómputo a todos los órdenes de amplitudes de choque. Ahora, el manejo de estos diagramas se vuelve muy complejo rápidamente como función del número de lazos y como función del número de partículas que intervienen en el proceso de interés. Esto pues cada integral introduce comúnmente muchas estructuras tensoriales en las expresiones de las amplitudes, y

mientras más partículas intervengan en el proceso, mayor número de vértices se deben incluir en los diagramas correspondientes. De hecho, se conoce bien que la complejidad computacional de los diagramas de Feynman en teorías de calibre, crece factorialmente como función del número de lazos y del número de partículas consideradas.

Otra complicación común al calcular observables a partir de diagramas de Feynman, es que se busca calcular directamente cuadrados de amplitudes. La amplitud es un número complejo. De ser posible calcularla directamente, su cuadrado es una operación trivial, mas si se busca calcular el cuadrado analítico de la amplitud, esto produce el cuadrado de términos. En ciertos casos, esto vuelve inmanejable las expresiones inclusive para computadores modernos.

En este trabajo se empleará un generador de expresiones para diagramas de árbol de Feynman para el cómputo directo de amplitudes (no su cuadrado). Para lograr esto se empleará la técnica de productos espinoriales, que en particular permite dar expresiones a los espinores de los fermiones presentes, así como para los vectores de polarización de los vectores de calibre externos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se introduce primero la ecuación de Dirac, los llamados espinores y luego los productos espinoriales (junto a identidades básicas de productos de helicidad). En el Capítulo 3 se presenta brevemente la técnica de diagramas de Feynman para el cálculo de amplitudes en electrodinámica cuántica (QED) y en (QCD). Además se discute la idea de amplitudes ordenadas de color, fundamental en el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 4 se presentan detalles del algoritmo general y códigos desarrollados para el cálculo general de amplitudes de color. En el Capítulo 5 se muestran resultados para procesos de árbol con una cantidad de entre 4 y 8 partículas. En el Capítulo 6 se habla de cálculos a nivel de un lazo y el desarrollo de un código a futuro. Finalmente en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones y perspectivas a futuro. También en los Apéndices A-D se encuentran variados detalles de los cálculos aquí presentados.

CAPÍTULO 2

FERMIONES Y PRODUCTOS DE HELICIDAD

En este Capítulo 2 se introducen conceptos preliminares (como las identidades útiles referentes a los productos de helicidad, entre otros) que servirán para realizar los cálculos que se desarrollan en Capítulos posteriores. Los conceptos aquí presentados se desarrollan siguiendo referencias estándares tales como [3], [4] y [5].

2.1. La Ecuación de Dirac

2.1.1. Descripción y Matrices

Como aclaratoria, en esta primera parte de descripción **no** se utilizan unidades naturales. Para mayor referencia, ver [6].

Se comienza escribiendo la relación clásica de energía-momentum para una partícula libre:

$$\frac{\vec{P}^2}{2m} + V = E . \quad (2.1)$$

Al sustituir en Ec. (2.1) la definición de los operadores cuánticos asociados:

$$E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} ; \quad \vec{p} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla , \quad (2.2)$$

en donde ∇ es el operador diferencial gradiente. Al actuar sobre una función de onda Ψ se tiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} . \quad (2.3)$$

Esta ecuación es la conocida **Ecuación de Schrödinger**.

De manera análoga, la **Ecuación de Klein-Gordon** puede ser obtenida comenzando con la relación **relativista** de energía-momentum:

$$E^2 - |\vec{p}|^2c^2 = m^2c^4 . \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) también se puede escribir como:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0 . \quad (2.5)$$

Haciendo las modificaciones necesarias en notación de cuadvectores $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$. Se hacen la sustituciones mencionadas para obtener:

$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\Psi - m^2c^2\Psi = 0 , \quad (2.6)$$

lo que es:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \nabla^2\Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi . \quad (2.7)$$

Se encuentra que el uso de la ecuación Klein-Gordon como extensión relativista de la ecuación de Schrödinger, tiene el problema básico de que la probabilidad total no se conserva en el tiempo. Dirac se dio cuenta que la razón de esto es debido que la misma es una ecuación de segundo orden en derivadas temporales. Por ello él buscó una ecuación consistente con la relación de energía-momentum, y que fuera de primer orden en el tiempo.

La estrategia básica de Dirac fue factorizar la expresión de energía-momentum relativista Ec. (2.5), que sería sencillo si se mirara en el Sistema en reposo $p_i\Psi = 0$:

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 . \quad (2.8)$$

En otro Sistema de referencia, aparecen coeficientes a ser determinados:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) . \quad (2.9)$$

Si se hace la multiplicación:

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa) p_\kappa - m^2 c^2 , \quad (2.10)$$

se observa que no se quieren términos lineales en p_κ , entonces se puede escoger $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$.

Dirac, se dio cuenta de que era necesario emplear objetos que anticonmutaran entre ellos: estos tenían que ser matrices. El conjunto que se encuentra cumple entonces las siguientes propiedades:

$$(\gamma^0)^2 = 1 , \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 , \quad \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 . \quad (2.11)$$

Lo cual se puede sintetizar en:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (2.12)$$

Existen conjuntos equivalentes de matrices que cumplen esta relación. Por ejemplo, la llamada *representación de Weyl*:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad (2.13)$$

donde las **matrices de Pauli** σ^i ($i = 1, 2, 3$) son:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.14)$$

Con estas matrices 4x4 en la Ec. (2.5), podemos factorizar la relación de energía-momento:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 . \quad (2.15)$$

Seleccionando uno de los términos:

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 . \quad (2.16)$$

Haciendo la sustitución $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ y actuando sobre la función de onda Ψ de la partícula, que ahora es un vector columna de cuatro entradas, se encuentra:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0 . \quad (2.17)$$

Escrita en unidades naturales ($c = 1; \hbar = 1$) queda:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 . \quad (2.18)$$

Esta entonces es finalmente la **ecuación de Dirac** en donde la función de onda Ψ es un elemento de 4 entradas conocido como el **Spinor de Dirac**:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} . \quad (2.19)$$

Note que con la *Acción de Dirac*, que es *invariante de Lorentz*:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi , \quad (2.20)$$

genera la ecuación de Dirac (para más detalles ver por ejemplo [3]).

2.1.2. Espinor de Weyl

Se pueden formar una representación de 2 dimensiones considerando los bloques por separado:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} . \quad (2.21)$$

Se les llama espinor izquierdo a Ψ_L y espinor derecho Ψ_R . En general, tienen la forma:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} , \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} . \quad (2.22)$$

En esos términos, la Ecuación de Dirac es:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 + \sigma \nabla) \\ i(\partial_0 - \sigma \nabla) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = 0 . \quad (2.23)$$

Si se coloca la masa igual a 0 en Ec. (2.23), se obtienen las siguientes ecuaciones desacopladas:

$$i(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)\Psi_L = 0 , \quad i(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla)\Psi_R = 0 . \quad (2.24)$$

En este sentido, para fermiones sin masa, los grados de libertad izquierdos y derechos son independientes.

2.1.3. Soluciones de la ecuación de Dirac

Como la ecuación de Dirac viene de factorizar la relación relativista de energía-momento, cada entrada del campo de Dirac obedece la ecuación de Klein-Gordon. Así se espera que el espinor de Dirac se pueda expandir en término de ondas planas. Para frecuencias de ondas positivas:

$$\Psi = u(p)e^{-ip \cdot x} , \quad (2.25)$$

mientras que para frecuencia de ondas negativas, se escribe:

$$\Psi = v(p)e^{+ip \cdot x} . \quad (2.26)$$

Tanto en la Ec. (2.25) como en la Ec. (2.26), se cumple la relación relativista $p^2 = m^2$.

Sustituyendo la Ec. (2.25) en la Ec. (2.16) (se emplean unidades naturales $c = 1$, $\hbar = 1$) se obtiene:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 . \quad (2.27)$$

En el sistema en reposo, es decir, $\vec{p} = 0$ la Ec. (2.27) se convierte:

$$(m\gamma^0 - m)u(p_0) = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u(p_0) = 0 , \quad (2.28)$$

cuyas soluciones se pueden escribir en términos de un espinor de 2 componentes ξ cualquiera, en la siguiente forma:

$$u(p_0) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Por último, para el caso de una partícula que no se encuentra en reposo, se obtienen las siguientes soluciones para el espinor $u(p)$:

$$\begin{aligned} u^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p_3/(E+m) \\ (p_1+ip_2)/(E+m) \end{pmatrix}, & u^2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ (p_1-ip_2)/(E+m) \\ -p_3/(E+m) \end{pmatrix}, \\ u^3 &= \begin{pmatrix} -p_3/(-E+m) \\ (-p_1-ip_2)/(-E+m) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & u^4 &= \begin{pmatrix} (-p_1+ip_2)/(-E+m) \\ p_3/(-E+m) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

en donde las 2 primeras soluciones se asocian a una partícula con energía $E = +\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ y las 2 últimas a una partícula con $E = -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. Para evitar soluciones de energía negativa, se redefinen las dos últimas soluciones con $v(p) = u(-p)$, y se interpretan como soluciones de tipo antipartícula, que cumplen la ecuación:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0. \quad (2.31)$$

2.1.4. Espinores

Algunas relaciones importantes para los espinores $u(p)$ y $v(p)$ son las siguientes:

$$(\not{p} - m)u^s(p) = 0, \quad \bar{u}^s(p)(\not{p} - m) = 0, \quad (2.32)$$

en donde $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ y $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$. Por otro lado para la antipartícula:

$$(\not{p} + m)v^s(p) = 0, \quad \bar{v}^s(p)(\not{p} + m) = 0. \quad (2.33)$$

De las soluciones generales en la Ec. 2.30, además se encuentra:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m , \quad \sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m , \quad (2.34)$$

las cuales se conocen como relaciones de completitud.

2.2. Productos de Helicidad

2.2.1. Helicidad y Quiralidad

Introducimos la matriz γ^5 con la relación $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Para esta se puede probar directamente la relación de anticonmutación $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, así como también $(\gamma^5)^2 = 1$. Es interesante que esta relación de anticonmutación permite probar que si Ψ es solución de la ecuación de Dirac sin masa, también entonces lo es $\gamma^5\Psi$:

$$i\not{p}\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad i\not{p}(\gamma^5\Psi) = 0 . \quad (2.35)$$

Con esto, encontramos que las soluciones de la ecuación de Dirac pueden ser simultáneamente auto-estados de γ^5 , a los cuales se les llama espinores quirales. Se definen así entonces los proyectores quirales:

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) , \quad P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) . \quad (2.36)$$

Es sencillo probar que P_L y P_R son proyectores, que además son complementarios.

Así, podemos definir los espinores:

$$P_L\Psi = \Psi_L , \quad P_R\Psi = \Psi_R , \quad (2.37)$$

donde hemos empleado la notación de espinores derechos e izquierdos de la sección 2.1.2, pues se encuentra que, en la representación de Weyl:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.38)$$

Finalmente notamos que para fermiones sin masa la helicidad h , definida como la proyección del operador de espín $\vec{\Sigma}$ en la dirección definida por el momento de la partícula \hat{p} , es decir $h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$, y el cual tiene para una partícula de espín medio solo dos valores, se pueden identificar con los auto-estados quirales.

2.2.2. Productos de helicidad

En lo subsiguiente trabajaremos entonces con amplitudes definidas para partículas con helicidades definidas. Esto permitirá trabajar de forma más eficiente sus expresiones analíticas, en parte debido a que tendremos la capacidad, a través del uso de los productos de helicidad, de calcular amplitudes (y no necesariamente cuadrados de amplitudes).

Consideremos fermiones sin masa. Se emplea la notación para los cuadrimomentos κ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y para los espinores escribimos:

$$\kappa_i^\mu \Rightarrow u_+(\kappa_i) \equiv |i^+\rangle \equiv \lambda_i^\alpha, \quad u_-(\kappa_i) \equiv |i^-\rangle \equiv \lambda_i^{\dot{\alpha}}. \quad (2.39)$$

Tomamos básicamente las soluciones correspondientes a cada caso. Aquí $u_\pm(\kappa_i) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)u(\kappa_i)$ es un espinor derecho; las λ_i^α son versiones de 2 componentes, y $|i^\pm\rangle$ representa un espinor de momento i con helicidad \pm . Por otro lado también encontramos a $v_\mp(\kappa_i) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)v(\kappa_i)$. Para los espinores conjugados se tienen relaciones similares: $\overline{u_-(\kappa_i)} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\overline{u(\kappa_i)}$. Nóte el uso de los proyectores de quiralidad de la Ecuación de Dirac que se definieron en 2.2.1.

Cuando la masa tiende a 0 en el caso de estos fermiones sin masa, las soluciones positivas y negativas de la Ecuación de Dirac son iguales bajo convenciones de normalización. Una forma de verlo es notar que las proyecciones positivas y negativas de los operadores de energía, $\Lambda_+(k) \sim u(k) \otimes \overline{u(k)}$ y $\Lambda_-(k) \sim v(k) \otimes \overline{v(k)}$ son ambas proporcionales a \not{k} en el límite de partículas sin masa.

Por lo tanto se puede hacer las siguientes equivalencias en notación compacta:

$$|i\pm\rangle \equiv |\kappa_i^\pm\rangle \equiv u_\pm(\kappa_i) \equiv v_\mp(\kappa_i) \quad (2.40)$$

$$\langle i\pm| \equiv \langle \kappa_i^\mp| \equiv \overline{u_\mp(\kappa_i)} \equiv \overline{v_\pm(\kappa_i)} \quad (2.41)$$

Para la correspondencia entre todas las notaciones, se coloca la siguiente tabla ilustrativa:

Notación Weyl	Notación Dirac	Espinor Dirac	Espinor Dirac
		$(E > 0)$	$(E < 0)$
$ i\rangle$	$ i^+\rangle$	$u_+(k_i)$	$v_-(k_i)$
$ i]$	$ i^-\rangle$	$u_-(k_i)$	$v_+(k_i)$
$\langle i $	$\langle i^- $	$\overline{u_-(k_i)}$	$\overline{v_+(k_i)}$
$[i $	$\langle i^+ $	$\overline{u_+(k_i)}$	$\overline{v_-(k_i)}$

En base a estos objetos, se definen los Productos Espinoriales con las relaciones:

$$\langle ij\rangle = \overline{u_-(\kappa_i)}u_+(\kappa_j) , \quad (2.42)$$

$$[ij] = \overline{u_+(\kappa_i)}u_-(\kappa_j) . \quad (2.43)$$

2.2.3. Propiedades e Identidades

Entre algunas identidades interesantes, se encuentran:

$$\langle ij\rangle [ji] = \langle i^-| |j^+\rangle \langle j^+| |i^-\rangle = (k_i + k_j)^2 = s_{ij} . \quad (2.44)$$

Los productos con helicidades son antisimétricos:

$$\langle ji\rangle = -\langle ij\rangle , \quad [ji] = -[ij] , \quad \langle ii\rangle = [ii] = 0 . \quad (2.45)$$

En los cálculos que se presentan posteriormente, al calcular amplitudes usando las Reglas de Feynman aparecen elementos de matriz de las matrices γ^μ entre espinores.

Es entonces conveniente ver como se comportan dichos productos, que en esta notación vienen escritos como $\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle$.

Dichos productos son cuadvectores, por tanto siempre aparecen contraídos con un cuadvector momento o matrices γ . Una identidad importante relacionada con lo anterior es la conocida como **Rearreglo de Fierz**:

$$\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle \langle k^+ | \gamma_\mu | l^+ \rangle = 2[ik] \langle lj \rangle , \quad (2.46)$$

así como la relación:

$$\langle i^+ | \not{p}_k | j^+ \rangle = 2[ik] \langle kj \rangle . \quad (2.47)$$

2.2.4. Vectores de Polarización

Es de interés poder escribir los vectores de polarización $\epsilon_\mu(k)$, necesarios en teorías de calibre con bosones sin masa con helicidad definida de ± 1 . Se puede emplear:

$$\epsilon_\mu^\pm(k, q) = \pm \frac{\langle q^\mp | \gamma_\mu | k^\mp \rangle}{\sqrt{2} \langle q^\mp, k^\pm \rangle} . \quad (2.48)$$

Donde k es el momentum del bosón (más adelante de los gluones) y q es un cuadvector auxiliar sin masa, llamado el **momentum de referencia**. Este q se encuentran relacionados con la libertad de calibre de los gluones externos.

El conjugado complejo revierte la helicidad:

$$(\epsilon_\mu^+)^* = \epsilon_\mu^- . \quad (2.49)$$

Estos vectores de polarización y sus denominadores se normalizan de la siguiente manera:

$$\epsilon^+ \cdot (\epsilon^+)^* = \epsilon^+ \cdot \epsilon^- = -\frac{1}{2} \frac{\langle q^- | \gamma_\mu | k^- \rangle \langle q^+ | \gamma^\mu | k^+ \rangle}{\langle qk \rangle [qk]} = -1 , \quad (2.50)$$

$$\epsilon^+ \cdot (\epsilon^-)^* = \epsilon^+ \cdot \epsilon^+ = \frac{1}{2} \frac{\langle q^- | \gamma_\mu | k^- \rangle \langle q^- | \gamma^\mu | k^- \rangle}{\langle qk \rangle^2} = 0 . \quad (2.51)$$

Por último, al escoger un momentum de referencia adecuado se pueden simplificar los cálculos de amplitudes haciendo que términos y diagramas se anulen, así (notando que se coloca $q_i = q$):

$$\epsilon_i^+(q)\epsilon_j^+(q) = \epsilon_i^-(q)\epsilon_j^-(q) = 0 , \quad (2.52)$$

$$\epsilon_i^+(k_j)\epsilon_j^-(q) = \epsilon_i^+(q)\epsilon_j^-(k_i) = 0 . \quad (2.53)$$

CAPÍTULO 3

DIAGRAMAS DE FEYNMAN Y ORDENAMIENTO DE COLOR

3.1. QED: Electrodinámica Cuántica

QED, es una teoría cuántica de campos que describe las interacciones electromagnéticas. Básicamente es una teoría que permite describir fenómenos de interacción entre partículas cargadas y fotones. QED es además una teoría de calibre abeliana, cuyo grupo de simetría es $U(1)$. Como consecuencia de esta simetría se tiene el importante resultado de que la carga eléctrica se conserva.

En teorías de calibre cuánticas de campo se deduce la naturaleza de las interacciones a partir de transformaciones locales en el espacio basadas en el grupo de simetría correspondiente.

Para explicar lo anterior, primero, se comienza verificando densidad lagrangiana clásica para el fermión no interactuante:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \longrightarrow \mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\rlap{\not{D}} - m)\Psi , \quad (3.1)$$

donde Ψ es el campo espinorial, además $\rlap{\not{D}} = \gamma^\mu\partial_\mu$ y $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 = (\Psi^*)^t\gamma^0$.

Esta densidad lagrangiana se observa que es **invariante** bajo lo que se llama un cambio **global**, es decir para un $\theta = \text{constante}$:

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{i\theta}\Psi . \quad (3.2)$$

Ahora, ¿será invariante bajo una transformación que sea **local**? Es decir para un $\theta \neq \text{constante}$ ($\theta = \theta(x)$):

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x) = e^{i\theta(x)}\Psi(x) . \quad (3.3)$$

A primera vista de la Ec. (3.3), la respuesta a dicha pregunta pareciera un no, ya que al sustituir se obtienen términos que contienen las derivadas de $\theta(x)$.

Ahora, si se introduce un nuevo campo vectorial $A^\mu(x)$, tal que en lugar de ∂_μ , se escriba $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, escribimos:

$$D_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + ieA_\mu\Psi , \quad (3.4)$$

imponiendo que el nuevo campo transforme según:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu = A_\mu(x) + \frac{i}{e}(\partial_\mu e^{i\theta(x)})e^{-i\theta(x)} . \quad (3.5)$$

Con esto se obtiene que la densidad lagrangiana de Ec. (3.1) sea inavriante bajo la transformaciones **locales**.

Como hemos introducido un nuevo campo, es natural convertirlo en físico introduciendo un término dinámico:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (3.6)$$

donde el llamado tensor de esfuerzo está definido según: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Con todo esto, el lagrangiano clásico de QED, invariante bajo transformaciones locales *de calibre*, es:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi . \quad (3.7)$$

Este lagrangiano es el punto de partida de la teoría cuántica y relativista que es QED. Del mismo se pueden extraer amplitudes que permiten estudiar las transiciones que experimentan electrones al interactuar con fotones (y otros electrones y positrones). Se menciona que de la Ec. (3.7) se pueden extraer las llamadas *reglas de Feynman* para QED. Dichas reglas son el punto de partida para el cálculo de amplitudes a procesos en QED. Por ejemplo, del término $\bar{\Psi}\gamma^\mu i A_\mu \Psi$ se extrae *el vértice* de interacción *fermión-fermión-fotón*. Para más detalles, mirar por ejemplo [3].

3.2. QCD: Cromodinámica Cuántica

En cierto sentido, la teoría cuántica de campos que se asocia a la interacción fuerte nuclear, la llamada Cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés), es muy similar a QED. La idea básica es cambiar el grupo de simetrías de $U(1)$ al grupo $SU(3)$ (grupo de matrices 3×3 unitarias de determinante 1). Fenomenológicamente se sabe que ambas interacciones (QED y QCD) son muy distintas. Es interesante resaltar como muchas de las diferencias se deben solo al hecho de que $U(1)$ es un grupo abeliano, mientras que $SU(3)$ no lo es.

Los quarks son fermiones que interactúan bajo QCD, con la representación fundamental (es decir, bajo los elementos del grupo $SU(3)$). Por ello, se dice que ellos pueden tener tres colores (conservados): **rojo**, **azul** y **verde**.

De forma similar a como se hace en QED se puede construir el lagrangiano de QCD, el cual al introducir la derivada *covariante* adecuada, también es invariante bajo la transformación local:

$$q(x) \longrightarrow q'(x) = e^{i\theta_i t_i} q(x) , \quad (3.8)$$

donde q y q' son vectores de tres entradas los θ_i son (tres) parámetros reales y las matrices t_i son los generadores del álgebra asociada a $SU(3)$ (de forma tal que $e^{i\theta_i t_i}$ es un elemento del grupo $SU(3)$).

Dados los grados de libertad extra introducidos con respecto a QED, el proceso de construcción del lagrangiano de QCD es más elaborado. Nos remitimos a escribir el resultado que se obtiene. El lagrangiano (invariante bajo transformaciones locales del grupo $SU(3)$) es:

$$L_{QCD} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G_a^{\mu\nu} + \sum_i q_i^a (i\not{D} - m_i)_{ab} q_i^b, \quad (3.9)$$

siendo $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, con g es la *constante de acoplamiento fuerte*, f^{abc} las llamadas *constante de estructura* de $SU(3)$, la suma en i es sobre el número de sabores de quark y A_μ^a es el campo vectorial de calibre, que describe a los gluones (los "fotones" de la interacción fuerte).

Es importante volver a señalar que del lagrangiano, se obtienen términos de interacción que aparecen de forma natural y acoplan las partículas, como por ejemplo: $\bar{q}\gamma^\mu A_\mu q$. Términos que se corresponden a algunas de las reglas de Feynman.

3.3. Algoritmo de Diagramas de Feynman para el cálculo de amplitudes en QED

Los diagramas de Feynman constituyen representaciones pictóricas de expresiones matemáticas que gobiernan el comportamiento de las partículas.

En la teoría cuántica de campos, el cálculo de amplitudes de transición se realiza de forma común con la técnica llamada de integrales de camino. Este procedimiento es muy elaborado y para teorías de calibre con muchos grados de libertad puede resultar muy complejo. Sin embargo, como dichas integrales tienen una estructura regular, se pueden realizar representaciones gráficas de los procesos y en base a ello construir un algoritmo para el cómputo directo de amplitudes. Este procedimiento fue elaborado por Feynman y por eso a dichos diagramas se les da su nombre.

Aunque el algoritmo de diagramas de Feynman simplifica mucho el cálculo de amplitudes, se debe comentar que la complejidad computacional de las expresiones que

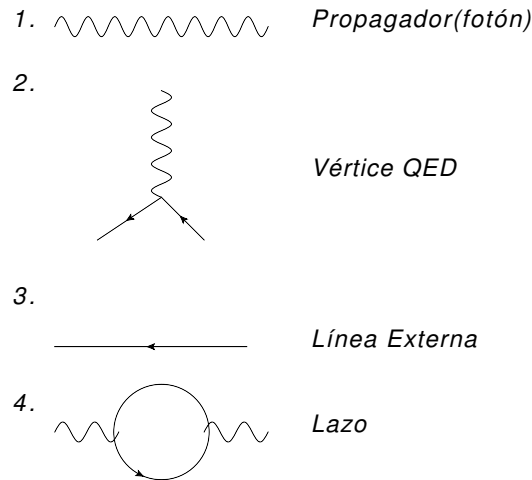


Figura 3.1: Representación gráfica de las Reglas de Feynman en QED

se producen crece exponencialmente con el número de partículas externas consideradas y con el número de términos incluidos en la expansión perturbativa (en las constantes de acoplamiento) de la amplitud.

Las reglas de Feynman para diagramas en procesos en QED, son:

1. Para cada propagador (fotón): $-\frac{ig^{\mu\nu}}{p^2}$
2. Para cada vértice: $-ie\gamma^\mu$
3. Para cada línea externa: $i\frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
4. Se impone conservación de momento en cada vértice.
5. Se integra sobre cada uno de los momentos indeterminados de un lazo: $\int \frac{d^4t}{(2\pi)^4}$

En la Figura 3.1 se muestran representaciones pictóricas de estas reglas.

Los *propagadores* son líneas internas de los diagramas, que representan la transición de campos no observados. Las *líneas externas* son funciones de onda de partículas

externas, que se observan asintóticamente. Los *vértices* finalmente son las reglas que representan a las interacciones, son los términos de “contacto” entre los campos.

Para los campos externos, se tienen las siguientes reglas:

1. Para fermiones externos iniciales colocamos: $u^s(p)$
2. Para fermiones externos finales colocamos: $\bar{u}^s(p)$
3. Para antifermiones externos iniciales colocamos: $\bar{v}^s(p)$
4. Para antifermiones externos finales colocamos: $v^s(p)$

3.3.1. Ejemplo del uso de las Reglas de Feynman en QED

Desarrollemos a continuación un ejemplo de un cómputo de una amplitud en QED. Tomemos el proceso producción de un par muón-antimuón en una aniquilación electrón-positrón. El diagrama de Feynman relacionado se muestra en la Figura (A.1) que se encuentra en el Apéndice A.

Al usar las reglas se puede escribir:

$$A = [\bar{v}^s(p_2)(-ie\gamma^\mu)u^s(p_1)]\left(-\frac{ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2}\right)[\bar{u}^s(p_3)(-ie\gamma^\nu)v^s(p_4)] . \quad (3.10)$$

La cantidad que realmente se necesita calcular objetos físicos, como por ejemplo secciones eficaces y vidas medias de partículas, no es de hecho la amplitud A , sino su magnitud al cuadrado $|A|^2$. En un experimento típico, se comienza con un rayo de partículas dispersadas en una dirección. En este caso la sección eficaz relevante es la promedio sobre todas las configuraciones de spines iniciales, y la suma sobre todas las posibles combinaciones de spines. En principio, se puede hallar $|A|^2$ para cada posible combinación y entonces sumar sobre ese promedio, de esta forma, se define la amplitud al cuadrado como:

$A^2 \equiv$ amplitud al cuadrado promediada sobre la polarización de los spines iniciales, y sumada sobre la polarización de los espines finales.

Con esto:

$$A^2 = e^4 \frac{g^4}{(p_1 + p_2)^4} (\bar{u}^s(p_1)(\gamma^\mu)v^s(p_2))(\bar{v}^s(p_2)(\gamma^\mu)u^s(p_1))(\bar{v}^s(p_4)(\gamma^\nu)u^s(p_3))(\bar{u}^s(p_3)(\gamma^\nu)v^s(p_1)). \quad (3.11)$$

Haciendo la suma sobre la orientación de los espines, todo se reduce a una multiplicación de matrices sobre la cual se toma la traza. Incluimos un factor de $1/4$ porque se quiere es el promedio sobre todos los espines iniciales: como tenemos 2 partículas, cada una con 2 orientaciones de espín posibles, el promedio es un cuarto de la suma. Así entonces:

$$\frac{1}{4} \sum |A|^2 = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\gamma^\nu(\not{p}_3)\gamma^\mu(\not{p}_4)] \text{Tr}[\gamma_\nu(\not{p}_2)\gamma_\mu(\not{p}_1)]. \quad (3.12)$$

Es importante resaltar que en este ejemplo se han colocado todas las masas de los electrones y muones iguales a cero. Esta es una buena aproximación siempre y cuando las energías de interacción sean mucho más altas que las mismas. A partir de este punto, se reduce todo a un problema de calcular trazas con algunos productos complicados de matrices gamma, pero esto se puede hacer fácilmente.

A veces es útil expresar las amplitudes en términos de variables que codifiquen la energía, el momento y los ángulos de las partículas en un proceso de dispersión. Estas variables son usadas por procesos de dispersión de 2 partículas y son definidas como:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2. \quad (3.13)$$

El resultado final obtenido, en términos de las llamadas variables de Mandelstam 3.13, es:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |A|^2 = \frac{8e^4}{s^2} \left[\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right]. \quad (3.14)$$

3.4. Algoritmo de Diagramas de Feynman para el cálculo de amplitudes en QCD

Las reglas de Feynman para QCD son las mismas que para QED, excepto que se deben agregar los grados de libertad de color, además de considerar interacciones entre los gluones mismos. A continuación se listan las reglas de Feynman que cambian:

1. Para un vértice fermiónico: $= ig\gamma_\mu t_a$
2. Para el vértice de 3 bosones: $= gf^{abc}[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-k)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$
3. Para el vértice de 4 bosones: $= -ig^2[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})]$

Las representaciones que se observan en la Figura 3.2 acompañan a las reglas anteriormente mencionadas.

3.5. Ordenamiento de Color

3.5.1. Álgebra de Color $SU(3)$: matrices y constantes de estructura

Una de las reducciones importantes que se emplean para manejar expresiones grandes de amplitudes es el llamado ordenamiento de color. Con el mismo se logran identificar expresiones que son invariantes de calibre, y que como consecuencia se esperan que sean más sencillos. Efectivamente, el ordenamiento de color presentado en esta sección ha probado ser muy poderoso para el cálculo de amplitudes en QCD.

Las amplitudes en QCD siempre presentarán objetos relacionados al grupo (y álgebra) de $SU(3)$. Como se mencionó $SU(3)_c$ (c por color) es el grupo de matrices complejas unitarias de rango 3 con determinante 1. Los generadores del álgebra del

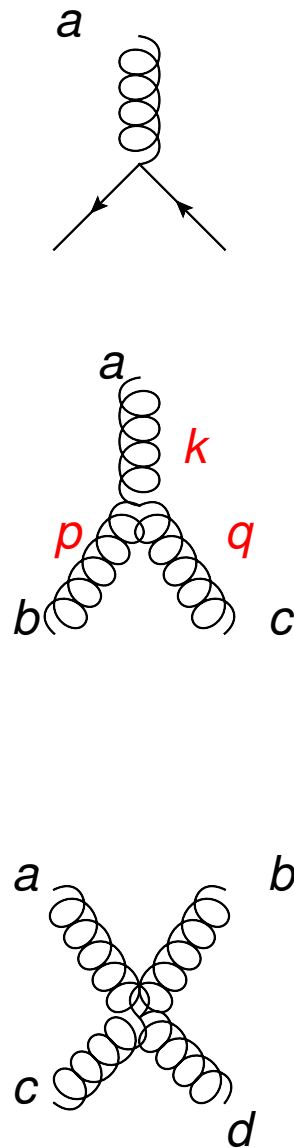


Figura 3.2: Representación gráfica de las Reglas de Feynman en QCD

grupo $SU(3)$ son matrices análogas a las matrices de Pauli, y satisfacen las reglas de conmutación:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad (3.15)$$

en donde t^a son los generadores del grupo y f^{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$ que son totalmente antisimétricas. Esta última ecuación es importante, pues nos dice que productos de los generadores son miembro del álgebra (i.e. se expanden a partir de los mismos generadores).

Los generadores del álgebra de $SU(3)$ también satisfacen:

$$\text{Tr}(t^a) = 0, \quad (t^a)^\dagger = t^a. \quad (3.16)$$

La estructura de color general que deseamos construir para las amplitudes, se basa en sustituir sistemáticamente las constantes de estructura f^{abc} en favor de trazas de multiplicación de los generadores por t^d . Para ello se emplea de manera recursiva las relaciones:

$$\text{Tr}[t^a t^b] = \delta^{ab}, \quad (3.17)$$

y

$$f^{abc} = -i \text{Tr}[[t^a, t^b] t^c]. \quad (3.18)$$

Como podemos ver en las reglas de Feynman de QCD, si nos enfocamos en amplitudes con solo gluones, por cada vértice de tres gluones obtenemos un factor de color f^{abc} , mientras que por cada vértice con cuatro gluones se observa la contracción $f^{abc} f^{cde}$. De esta manera la Ec. (3.18) es beneficiosa pues permite el intercambio de constantes de estructura por productos de trazas.

Para reducir el número de trazas que se tienen en los productos de color, cuando se tienen contracciones de los índices de los generadores contrayendo los t^a , se emplea la relación conocida como *rearrreglo de Fierz*:

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right). \quad (3.19)$$

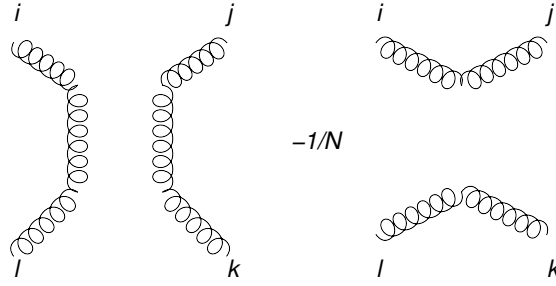


Figura 3.3: Representación esquemática del Rearreglo de Fierz

Para QCD, $N = 3$. La Ec. (3.19) puede ser representada esquemáticamente como se muestra en la Figura 3.3.

Como ejemplo de este procedimiento nótese:

$$f^{abe} f^{cde} = (-2i)^2 [\text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) - \text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) - \text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e) + \text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e)] . \quad (3.20)$$

Usando la Ec. (3.19) solamente para el primer grupo de trazas se obtiene lo siguiente:

$$\text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) = \text{Tr}(t^a t^b t^c t^d) - \frac{1}{N} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^c t^d) . \quad (3.21)$$

En el Capítulo 4 se presentan un ejemplo más elaborado de este procedimiento, desarrollado en torno a la amplitud en QCD de interacción entre cuatro gluones.

Se observa por tanto que al realizar los cálculos para dispersión de varios gluones, como se verá más adelante, aparecerán productos con trazas.

De forma general, aunque en el siguiente Capítulo 4 se haga un ejemplo, considere una amplitud con n gluones externos, denominada $\mathcal{A}_n^{\text{gluones}}$. Al descomponer dicha amplitud usando las Ec. (3.18) y Ec. (3.19) para cada uno de los vértices recursivamente, continuando hasta llegar a un gluón externo, finalmente se tendrá una traza de los generadores reflejando el reordenamiento de los gluones externos, y un término que se llama la *Amplitud parcial*:

$$\mathcal{A}_n^{\text{gluones}}(k_i, \lambda_i, a_i) = g^{n-2} \sum_{\sigma} \text{Tr}(t^{a_{\sigma(1)}} \dots t^{a_{\sigma(n)}}) A_n^{\text{gluones}}(\sigma(1)^{\lambda_1}, \dots, \sigma(n)^{\lambda_n}) , \quad (3.22)$$

siendo $A_n^{gluons}(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ el coeficiente de la estructura de color (traza de producto de generadores) la llamada *Amplitud Parcial* que contiene la información puramente cinemática y es invariante de calibre.

CAPÍTULO 4

CÁLCULOS Y CÓDIGOS PARA AMPLITUDES EN QCD

En este capítulo se desarrolla el cálculo de la amplitud de cuatro gluones, y con el mismo se presentan detalles técnicos necesarios para procesar amplitudes de manera automatizada. A continuación entonces se muestran los códigos elaborados para este fin.

4.1. Amplitud para un proceso con solo 4 gluones

Para un proceso con 4 gluones se tienen 4 diagramas, que son los que se muestran en la Figura 4.1. La Amplitud relacionada es entonces la suma de las expresiones asociadas a cada uno de los cuatro diagramas.

De la Figura 3.2 para el diagrama (1), aplicando la regla número 3 que se presentó

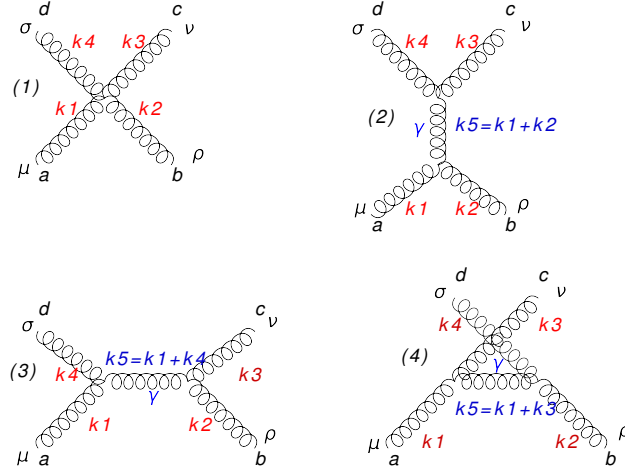


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para un proceso con 4 gluones.

en la sección 3.4, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\rho(k_2)\epsilon_\nu(k_3)\epsilon_\sigma(k_4) \\
 & [-ig_s^2(f^{dce}f^{abe}(g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho} - g^{\sigma\rho}g^{\nu\mu}) + \\
 & f^{dae}f^{cbe}(g^{\sigma\nu}g^{\mu\rho} - g^{\sigma\rho}g^{\nu\mu}) + \\
 & f^{dbe}f^{cae}(g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu} - g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}))],
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde de ahora en adelante denotaremos al producto $\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\rho(k_2)\epsilon_\nu(k_3)\epsilon_\sigma(k_4)$ con el tensor $T_{\mu\nu\rho\sigma}$. Nótese que todos los gluones se consideran como en el estado final.

Para el diagrama (2), conocido como (t) se aplica la regla correspondiente a la Figura 3.2, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & T_{\mu\nu\rho\sigma}[g_s f^{e1ab}(g_{\gamma_1}^\mu(-k_2)^\rho + g^{\mu\rho}(k_1 - k_2)_{\gamma_1} + g_{\gamma_1}^\rho(-k_1)^\mu)] \times \\
 & -i \frac{g_{\gamma_1\gamma_2}}{(k_1 + k_2)^2} \delta^{e_1e_2} \times [(g^{\gamma_2\nu}(k_5 - k_3)^\sigma + g^{\nu\sigma}(k_3 - k_4)^{\gamma_2} + g^{\sigma\gamma_2}(k_4 - k_5)^\nu)] \times \\
 & g_s f^{e_2cd}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Para el diagrama (3), llamado (s), por otro lado se encuentra:

$$\begin{aligned}
 & T_{\mu\nu\rho\sigma} g_s f^{dae} [g^{\sigma\mu}(k_4 - k_1)_\gamma + g_\gamma^\mu(-k_4)^\sigma + g_\gamma^\sigma(-k_1)^\mu] \times \\
 & \frac{-1}{(k_1 + k_4)^2} \times g_s f^{ebc} \times [g^{\gamma\rho}(k_5 - k_2)^\nu + g^{\rho\nu}(k_2 - k_3)^\gamma + g^{\nu\gamma}(k_3 - k_5)^\rho].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Finalmente, para el último diagrama, llamado (u):

$$\begin{aligned}
 & T_{\mu\nu\rho\sigma} g_s f^{eca} [g_\gamma^\nu (-k_3)^\mu + g^{\nu\mu} (k_1 - k_5)_\gamma + g_\gamma^\mu (-k_1)^\nu] \times \\
 & \frac{-1}{(k_1 + k_3)^2} \times g_s f^{ebd} \times [g^{\gamma\rho} (k_5 - k_2)^\sigma + g^{\rho\sigma} (k_2 - k_4)^\gamma + g^{\sigma\gamma} (k_4 - k_5)^\rho] .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Al sumar las expresiones de las Ecs. (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A = & T_{\mu\nu\rho\sigma} (-i g_s^2 [f^{dce} f^{abe} (g^{\sigma\mu} g^{\nu\rho} - g^{\sigma\rho} g^{\nu\mu}) + \\
 & f^{dae} f^{cbe} (g^{\sigma\nu} g^{\mu\rho} - g^{\sigma\rho} g^{\nu\mu}) + \\
 & f^{dbe} f^{cae} (g^{\sigma\nu} g^{\rho\mu} - g^{\sigma\mu} g^{\nu\rho})]) + \\
 & T_{\mu\nu\rho\sigma} (g_s f^{eab} [g_\gamma^\mu (-k_2)^\rho + g^{\mu\rho} (k_1 - k_2)_\gamma + g_\gamma^\rho (-k_1)^\mu]) \times \\
 & \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2} \times (g_s f^{ecd} [g^{\gamma\nu} (k_5 - k_3)^\sigma + g^{\nu\sigma} (k_3 - k_4)^\gamma + g^{\sigma\gamma} (k_4 - k_5)^\nu]) + \\
 & T_{\mu\nu\rho\sigma} (g_s f^{dae} [g^{\sigma\mu} (k_4 - k_1)_\gamma + g_\gamma^\mu (-k_4)^\sigma + g_\gamma^\sigma (-k_1)^\mu]) \times \\
 & \frac{-i}{(k_1 + k_4)^2} \times (g_s f^{ebc} \times [g^{\gamma\rho} (k_5 - k_2)^\nu + g^{\rho\nu} (k_2 - k_3)^\gamma + g^{\nu\gamma} (k_3 - k_5)^\rho]) + \\
 & T_{\mu\nu\rho\sigma} (g_s f^{eca} [g_\gamma^\nu (-k_3)^\mu + g^{\nu\mu} (k_1 - k_5)_\gamma + g_\gamma^\mu (-k_1)^\nu]) \times \\
 & \frac{-i}{(k_1 + k_3)^2} \times (g_s f^{ebd} \times [g^{\gamma\rho} (k_5 - k_2)^\sigma + g^{\rho\sigma} (k_2 - k_4)^\gamma + g^{\sigma\gamma} (k_4 - k_5)^\rho]) .
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Al extraer como factor común las constantes de estructura, se encuentra:

$$\begin{aligned}
 A = & -iT_{\mu\nu\rho\sigma}g_s^2 \times \\
 & (f^{abe}f^{cde} [(-g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho} + g^{\sigma\rho}g^{\nu\mu}) + \\
 & \frac{g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}(k_1 - k_2)_\gamma(k_3 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}(k_1 - k_2)_\gamma(k_5 - k_3)^\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \\
 & \frac{g^{\mu\rho}g^{\sigma\gamma}(k_1 - k_2)_\gamma(k_4 - k_5)^\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{g_\gamma^\mu g^{\nu\sigma}(-k_2)^\rho(k_3 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \\
 & \frac{g_\gamma^\mu g^{\gamma\nu}(-k_2)^\rho(k_5 - k_3)^\sigma}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{g_\gamma^\mu g^{\sigma\gamma}(-k_2)^\rho(k_4 - k_5)^\nu}{(k_1 + k_2)^2} + \\
 & \frac{g_\gamma^\rho g^{\nu\sigma}(-k_1)^\mu(k_3 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{g_\gamma^\rho g^{\gamma\nu}(-k_1)^\mu(k_5 - k_3)^\sigma}{(k_1 + k_2)^2} + \\
 & \left. \frac{g_\gamma^\rho g^{\sigma\gamma}(-k_1)^\mu(k_4 - k_5)^\nu}{(k_1 + k_2)^2} \right] \\
 & + f^{ade}f^{bce} [(g^{\sigma\nu}g^{\mu\rho} - g^{\sigma\rho}g^{\nu\mu}) - \\
 & \frac{g^{\sigma\mu}g^{\rho\nu}(k_4 - k_1)_\gamma(k_2 - k_3)^\gamma}{(k_1 + k_4)^2} - \frac{g^{\sigma\mu}g^{\nu\gamma}(k_4 - k_1)_\gamma(k_3 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_4)^2} \\
 & \frac{g^{\sigma\mu}g_\rho^\gamma(k_4 - k_1)_\gamma(k_5 - k_2)^\nu}{(k_1 + k_4)^2} - \frac{g_\gamma^\mu g_\rho^\gamma(-k_4)_\sigma(k_5 - k_2)^\nu}{(k_1 + k_4)^2} \\
 & \frac{g_\gamma^\mu g^{\rho\nu}(-k_4)_\sigma(k_2 - k_3)^\gamma}{(k_1 + k_4)^2} - \frac{g_\gamma^\mu g^{\nu\gamma}(-k_4)_\sigma(k_3 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_4)^2} \\
 & \frac{g_\gamma^\sigma g_\rho^\gamma(-k_1)^\mu(k_5 - k_2)^\nu}{(k_1 + k_4)^2} - \frac{g_\gamma^\sigma g^{\rho\nu}(-k_1)^\mu(k_2 - k_3)^\gamma}{(k_1 + k_4)^2} \\
 & \left. \frac{g_\gamma^\sigma g^{\nu\gamma}(-k_1)^\mu(k_3 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_4)^2} \right] \\
 & + f^{ace}f^{bde} [(g^{\sigma\nu}g^{\rho\mu} - g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}) + \\
 & \frac{g_\rho^\nu g^{\gamma\rho}(-k_3^\mu)(k_5 - k_2)^\sigma}{(k_1 + k_3)^2} + \frac{g_\rho^\nu g^{\rho\sigma}(-k_3^\mu)(k_2 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_3)^2} + \\
 & \frac{g_\rho^\nu g^{\sigma\gamma}(-k_3^\mu)(k_4 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_3)^2} + \frac{g^{\nu\mu}g^{\gamma\rho}(k_1 - k_5)_\gamma(k_5 - k_2)^\sigma}{(k_1 + k_3)^2} + \\
 & \frac{g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma}(k_1 - k_5)_\gamma(k_2 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_3)^2} + \frac{g^{\nu\mu}g^{\sigma\gamma}(k_1 - k_5)_\gamma(k_4 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_3)^2} + \\
 & \frac{g_\gamma^\mu g^{\gamma\rho}(-k_1^\nu)(k_5 - k_2)^\sigma}{(k_1 + k_3)^2} + \frac{g_\gamma^\mu g^{\rho\sigma}(-k_1^\nu)(k_2 - k_4)^\gamma}{(k_1 + k_3)^2} + \\
 & \left. \frac{g_\gamma^\mu g^{\sigma\gamma}(-k_1^\nu)(k_4 - k_5)^\rho}{(k_1 + k_3)^2} \right] .
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

En la Ec. (4.6), a pesar de ser para un proceso bastante sencillo, ya se encuentran las

estructuras más importantes algebraicas que resaltan la importancia de manejar las estructuras de color y cinemáticas de una forma eficiente. Esto es, el uso de ordenamiento de color, así como el empleo de estados con helicidad definida.

Para manipular la Ec. (4.6) se usarán entonces las propiedades e identidades discutidas en el Capítulo 3 que se encuentran en las Ec. (3.19) y Ec. (3.18), estas serán aplicadas por etapas. Se comienza con $f^{abe} f^{cde}$:

$$f^{abe} f^{cde} = -i \text{Tr}[[t^a, t^b]t^e](-i) \text{Tr}[[t^c, t^d]t^e] = (-2i)^2 \text{Tr}[[t^a, t^b]t^e \text{Tr}[[t^c, t^d]t^e]] . \quad (4.7)$$

Aplicando la propiedad $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ y la definición $[t^a, t^b] = t^a t^b - t^b t^a$, se obtiene:

$$f^{abe} f^{cde} = (-2i)^2 [\text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) - \text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) - \text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e) + \text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e)] . \quad (4.8)$$

Usando el rearrreglo de Fierz:

$$\text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) = \text{Tr}(t^a t^b t^c t^d) - \frac{1}{N} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^c t^d) , \quad (4.9)$$

$$- \text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^c t^d t^e) = -\text{Tr}(t^b t^a t^c t^d) + \frac{1}{N} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^c t^d) , \quad (4.10)$$

$$- \text{Tr}(t^a t^b t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e) = -\text{Tr}(t^a t^b t^d t^c) + \frac{1}{N} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^d t^c) , \quad (4.11)$$

$$\text{Tr}(t^b t^a t^e) \text{Tr}(t^d t^c t^e) = \text{Tr}(t^b t^a t^d t^c) - \frac{1}{N} \text{Tr}(t^a t^b) \text{Tr}(t^d t^c) , \quad (4.12)$$

donde la segunda parte cada una de las ecuaciones se cancela, específicamente el segundo sumando de la Ec. (4.9) con Ec. (4.10) y el de la Ec. (4.11) con Ec. (4.12).

Finalmente, se obtiene que $f^{abe} f^{cde}$ es igual a una combinación cíclica:

$$f^{abe} f^{cde} = (-2i) [\text{Tr}(t^a t^b t^c t^d) - \text{Tr}(t^b t^a t^c t^d) - \text{Tr}(t^a t^b t^d t^c) + \text{Tr}(t^b t^a t^d t^c)] . \quad (4.13)$$

Ahora, si se observa la Ec. (4.13), se encuentra para las otras constantes de estructura, las siguientes relaciones en términos de trazas:

$$f^{ade} f^{bce} = (-2i) [\text{Tr}(t^a t^r t^d t^b t^r t^c) - \text{Tr}(t^r t^d t^a t^r t^b t^c) - \text{Tr}(t^a t^r t^d t^r t^c t^b) + \text{Tr}(t^r t^d t^a t^r t^c t^b)] , \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 f^{ace} f^{bde} = (-2i) & [Tr(tr^a tr^c tr^b tr^d) - Tr(tr^c tr^a tr^b tr^d) - \\
 & Tr(tr^a tr^c tr^d tr^b) + Tr(tr^c tr^a tr^d tr^b)] .
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Al sustituir Ec. (4.13), Ec. (4.14) y Ec. (4.15) en Ec. (4.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A = 4iT_{\mu\nu\rho\sigma} g_s^2 \times \\
 & ([Tr(t^a t^b t^c t^d) - Tr(t^b t^a t^c t^d) - Tr(t^a t^b t^d t^c) + Tr(t^b t^a t^d t^c)] \\
 & \quad [(-g^{\sigma\mu} g^{\nu\rho} + g^{\sigma\rho} g^{\nu\mu}) + \\
 & \quad \frac{g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} (k_1 - k_2)_\gamma (k_3 - k_4)_\gamma}{(k_1 + k_2)^2} + \dots) \\
 & + [Tr(t^a t^d t^b t^c) - Tr(t^d t^a t^b t^c) - Tr(t^a t^d t^c t^b) + Tr(t^d t^a t^c t^b)] \\
 & \quad [(g^{\sigma\nu} g^{\mu\rho} - g^{\sigma\rho} g^{\nu\mu}) - \\
 & \quad \frac{g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu} (k_4 - k_1)_\gamma (k_2 - k_3)_\gamma}{(k_1 + k_4)^2} - \dots) \\
 & + [Tr(t^a t^c t^b t^d) - Tr(t^c t^a t^b t^d) - Tr(t^a t^c t^d t^b) + Tr(t^c t^a t^d t^b)] \\
 & \quad [(g^{\sigma\nu} g^{\rho\mu} - g^{\sigma\mu} g^{\nu\rho}) + \\
 & \quad \frac{g_\rho^\nu g^{\gamma\rho} (-k_3^\mu) (k_5 - k_2)_\sigma}{(k_1 + k_3)^2} + \dots) ,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En donde los puntos denotan otros términos cinemáticos que se factorizan. Nótese que términos con productos de trazas se cancelan. La Ec. (4.16) nos muestra entonces que la amplitud de cuatro gluones efectivamente se puede escribir como una sumatoria de trazas de color con coeficientes. La generalización de esto a amplitudes con n gluones, se escribe entonces como:

$$\mathcal{A}_n^{gluones}(k_i, \lambda_i, a_i) = g^{n-2} \sum_{\sigma} = Tr(t^{a_{\sigma(1)}} \dots t^{a_{\sigma(n)}}) A_n^{gluones}(\sigma(1)^{\lambda_1}, \dots, \sigma(n)^{\lambda_n}) . \tag{4.17}$$

Donde a los coeficientes $A_n^{gluones}(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ se les conoce con el nombre de *amplitudes parciales*. Estas contienen información puramente cinemática. En la Ec. (4.17), k_i y λ_i denotan respectivamente los momentos y helicidades de los gluones.

Las amplitudes parciales que aparecen en la Ec. (4.17) se espera sea más sencilla que la amplitud total de la Ec. (4.6), pues al estar ordenada por color, su estructura de polos recibe contribuciones solo de partículas adyacentes.

4.1.1. Amplitudes MHV: Maximally Helicity Violating Amplitudes

Es válido hacerse la pregunta de si la descomposición de color junto con la helicidad puedan llevar a un número grande de amplitudes parciales para ser calculadas. Sin embargo, gracias a que el lagrangiano de QCD es invariante bajo paridad, que permite simultáneamente invertir todas las helicidades en la amplitud, algunas de las amplitudes parciales se anularán, mientras otras serán equivalentes, lo cual disminuye el número de objetos a calcular.

En el caso con 4 gluones, a pesar de esperarse $2^4 = 16$ amplitudes de helicidad, basta con conocer:

$$\begin{aligned}
 &A_4^{gluones}(1^+, 2^+, 3^+, 4^+) \\
 &A_4^{gluones}(1^-, 2^+, 3^+, 4^+) \\
 &A_4^{gluones}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) \\
 &A_4^{gluones}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+) .
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Además, se encuentra que las primeras dos amplitudes parciales en Ec. (4.18) son iguales a 0, y esto resulta ser muy útil. Inclusive, esta propiedad se puede generalizar para amplitudes con n gluones.

Como se mostró en las Subsecciones 4 y 2.2.4 , cada uno de los diagramas contribuye con n vectores de polarización, que terminan siendo contraídos entre si (de hecho al menos un par). Por lo cual se espera que en alguno de esos términos aparezcan productos escalares de la forma $\epsilon_i^+(q_i)\epsilon_j^+(q_j)$. Como se observó en Ec. (2.52) y Ec. (2.53) al colocar los vectores de referencia q correspondientes con $q = q_i$, este tipo de expresiones da 0.

Entonces, en una amplitud parcial de la forma $A_n^{gluones}(1^+, \dots, n^+)$ (todas las helicidades positivas), todos los productos escalares con vectores de polarización se anularían como dice Ec. (2.52) y por tanto la misma amplitud en sí.

Ahora, si una de las helicidades es negativa (en el caso generalizado presentado), es decir, que se trabaja con la amplitud, $A_n^{gluones}(1^+, \dots, (n-1)^+, n^-)$ usando tanto la Ec. (2.52) como la Ec. (2.53), todos los productos escalares se anularían y de nuevo, la amplitud también.

Pero, los primeros casos que no se anulan ocurren para cuando se tienen **2 gluones con helicidades negativas**. Estas amplitudes son las que se conocen como **Maximally Helicity Violating Amplitudes** (MHV por sus siglas en inglés), y son de la forma:

$$A_n^{gluones}(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = i(-g)^{n-2} \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle (n-1)n \rangle \langle n1 \rangle}, \quad (4.19)$$

tal como Parke y Taylor lo postularon en 1986 [12].

4.2. Automatización de árboles con multiples helicidades

Esta sección se muestra como los pasos analíticos realizados en la sección anterior para obtener amplitudes parciales, se implementaron en un código automatizado para el procesamiento de amplitudes más complejas.

4.2.1. Códigos para calcular amplitudes con multiples helicidades

Por cuestiones de espacio, no se escriben los códigos completos en Mathematica de las funciones definidas, para mayor referencia mirar el Apéndice A. Para mayor referencia de los paquetes de S@M y FeynArts ver [8] y [9] respectivamente.

4.2.1.1. ColorSimplify

Como se explicó en las Secciones 3.5 y 4.1, en vez de constantes de estructura se emplean en este trabajo trazas de matrices. Esto se logra aplicando relaciones como Ec. (3.18).

A partir de lo ejemplificado con amplitudes de 4 gluones, se procedió a automatizar lo pasos correspondientes en el lenguaje de Mathematica. Esto, como se verá, permite realizar cálculos mucho más complejos con más partículas.

Luego de cargar los paquetes *FeynArts* (que se explica mejor en el primer Apéndice) y *S@M* en Mathematica:

Listing 4.1: Inicialización de Paquetes

```
1 <<FeynArts'
2 << Spinors'
```

se emplea la función *ColorSimplify*, que se basa en la Ec. (3.18) aplicada de forma recursiva para reducir constantes de estructura a trazas. La misma luce como sigue:

Listing 4.2: Definición de ColorSimplify

```
1 ColorSimplify [expr_] := Block[{color}, color = expr;
2   color = color /. IndexDelta[a_, b_] -> TrC[a, b];(*Para la notación de FeynArts*)
3   color = color /. fC[a_, b_, c_] -> -1/Sqrt[2] (TrC[a, b, c] - TrC[b, a, c]);
4   color = Expand[color];
5   color = color //. {TrC[w___, a_]^2 -> (TrC[w, w] - 1/N*TrC[w]*TrC[w])};
6   color = Expand[color];
7   color = color //. {TrC[w___, a_, x___]*TrC[y___, a_, z___] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
8     x, w]*TrC[z, y]),
9     TrC[x___, a_, y___, a_, z___] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
10  color = Expand[color];
11  color = color //. {TrC[w___, a_, x___]*TrC[y___, a_, z___] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
12    x, w]*TrC[z, y]),
13    TrC[x___, a_, y___, a_, z___] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
```

```

12 color = Expand[color];
13 color = color /. {TrC[w____, a_, x____]*TrC[y____, a_, z____] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
    x, w]*TrC[z, y]),
14      TrC[x____, a_, y____, a_, z____] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
15 color = Expand[color];
16 color = color /. {TrC[w____, a_, x____]*TrC[y____, a_, z____] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
    x, w]*TrC[z, y]),
17      TrC[x____, a_, y____, a_, z____] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
18 color = Expand[color];
19 ... (*Ir a Apéndice*)

```

A continuación se presenta un ejemplo de operación de esta función, el cual genera el resultado presentado en la Figura 4.2:

Listing 4.3: Aplicación de ColorSimplify

```

1 ejemplocolor1 = fC[a, b, e] fC[e, c, d];
2 ColorSimplify [ejemplocolor1]

```

$$\frac{\text{TrC}[a, b] \text{TrC}[c, d]}{2 N} - \frac{\text{TrC}[b, a] \text{TrC}[c, d]}{2 N} - \frac{\text{TrC}[a, b] \text{TrC}[d, c]}{2 N} + \frac{\text{TrC}[b, a] \text{TrC}[d, c]}{2 N} -$$

$$\frac{1}{2} \text{TrC}[a, b, c, d] + \frac{1}{2} \text{TrC}[a, b, d, c] + \frac{1}{2} \text{TrC}[b, a, c, d] - \frac{1}{2} \text{TrC}[b, a, d, c]$$

Figura 4.2: Resultado al aplicar ColorSimplify

4.2.1.2. p1toFA

Además de ser necesaria una función para el manejo de color, se debe construir una interface para extraer información de los diagramas de Feynman que FeynArts produce. Para ello se construyó la siguiente función *p1toFA*:

Listing 4.4: p1toFA

```

1 p1toFA[p1_, i1_] := Module[{listaret},

```

```

2  If[p1 == p, listaret = {V[5, {ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hp]};
3  If[p1 == m, listaret = {V[5, {ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hm]};
4  If[p1 == qp, listaret = {F[3, {1, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hp]};
5  If[p1 == qm, listaret = {-F[3, {1, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hm]};
6  If[p1 == Qp, listaret = {F[3, {2, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hp]};
7  If[p1 == Qm, listaret = {-F[3, {2, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hm]};
8  If[p1 == ep, listaret = {F[2, {1}], hp}];
9  If[p1 == em, listaret = {-F[2, {1}], hm}];
10 If[p1 == sp, listaret = {S[13, {1, 1, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hp]};
11 If[p1 == sm, listaret = {-S[13, {1, 1, ToExpression["c" <> ToString[i1]]}, hm]}; listaret ]

```

Con esta, al colocar p (gluón con helicidad positiva), m (gluón con helicidad negativa), qp (quark), qm (conjugado del quark anterior), Qp (otro quark), Qm (conjugado del quark anterior), ep (leptón) o em (conjugado del leptón anterior), *p1toFA* lo transforma a la notación de FeynArts.

4.2.1.3. AtreeTopFeynString

Se construyó también una función que permite de controlar la producción de las topologías necesarias por parte de FeynArts para los distintos procesos de interés. En este nivel no se da información sobre las helicidades de las partículas externas (funciona para todos los casos).

Usando las funciones de FeynArts *CreateTopologies* e *InsertFields* se crearon las topologías y luego se insertaron los campos respectivamente.

Listing 4.5: AtreeTopFeynString

```

1  AtreeTopFeynString[p1_____]:=Module[{npoint,particles,top,DiagExp1},
2  npoint= Length[p1];
3  particles = Apply[p1toFA,#] & /@ p1;
4  particles = Apply[First, {#}] & /@ particles;
5  top = CreateTopologies[0, npoint];

```

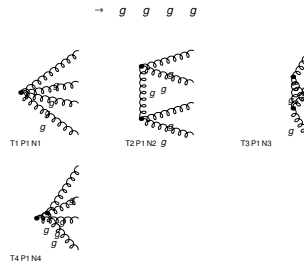


Figura 4.3: Diagramas para 4 gluones generado con AtreeTopFeynString

```

6  If[FreeQ[p1,sp],DiagExp1= InsertFields[top, {} -> particles,
7      Model -> {SMQCD}, InsertionLevel -> {Particles},
8      ExcludeParticles -> {S[_], V[2], V[3], V[4], U[_]},
9      ExcludeFieldPoints ->{FieldPoint[0][-F[3,{2,_}],F[3,{2,_}],V [1]]};
10  DiagExp1=InsertFields[top, {} -> particles,
11      Model -> {MSSMQCD}, InsertionLevel -> {Particles},
12      ExcludeParticles -> {S[_], V[2], V[3], V[4], U[_], F[11], F[12],F[15]};
13  ];
14  DiagExp1= CreateFeynAmp[DiagExp1];
15  DiagExp1 = Apply[List, DiagExp1];
16  DiagExp1 = Map[Extract[#, -1] &, DiagExp1];
17  DiagExp1 ]

```

Se señala una de las amplitudes obtenidas en FeynArts para 4 gluones luego de aplicar AtreeTopFeynString en la Figura (4.4).

4.2.1.4. Manejo de color con AtreeColorManagement

Luego de relacionar la notación con la de FeynArts y habiendo obtenido los diagramas y expresiones correspondientes, se trabaja con el color.

$$\begin{aligned}
 & \{-i (-i \text{GS}^2 g[\text{Lor1}, \text{Lor4}] g[\text{Lor2}, \text{Lor3}] (-\text{SUNF}[\text{c1}, \text{c2}, \text{c3}, \text{c4}] - \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c3}, \text{c2}, \text{c4}]) - \\
 & \quad i \text{GS}^2 g[\text{Lor1}, \text{Lor2}] g[\text{Lor3}, \text{Lor4}] (\text{SUNF}[\text{c1}, \text{c3}, \text{c2}, \text{c4}] - \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c4}, \text{c3}, \text{c2}]) - \\
 & \quad i \text{GS}^2 g[\text{Lor1}, \text{Lor3}] g[\text{Lor2}, \text{Lor4}] (\text{SUNF}[\text{c1}, \text{c2}, \text{c3}, \text{c4}] + \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c4}, \text{c3}, \text{c2}])\} \\
 & \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c1}\}], \text{k1}, \text{Lor1}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c2}\}], \text{k2}, \text{Lor2}] \\
 & \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c3}\}], \text{k3}, \text{Lor3}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c4}\}], \text{k4}, \text{Lor4}], \\
 & -\text{GS}^2 ((\text{k1} - \text{k2})[\text{Lor5}] g[\text{Lor1}, \text{Lor2}] + (- (\text{k1} + \text{k3} + \text{k4})[\text{Lor2}] g[\text{Lor1}, \text{Lor5}] + \\
 & \quad (\text{k2} - \text{k3} - \text{k4})[\text{Lor1}] g[\text{Lor2}, \text{Lor5}]) ((\text{k3} - \text{k4})[\text{Lor6}] g[\text{Lor3}, \text{Lor4}] + \\
 & \quad (-2 (\text{k3} - \text{k4})[\text{Lor4}] g[\text{Lor3}, \text{Lor6}] + (\text{k3} + 2 (\text{k4}))[\text{Lor3}] g[\text{Lor4}, \text{Lor6}]) \\
 & \quad g[\text{Lor5}, \text{Lor6}] \frac{1}{(\text{k3} + \text{k4})^2} \text{SumOver}[\text{Glu5}, 8] \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c2}, \text{Glu5}] \\
 & \text{SUNF}[\text{c3}, \text{c4}, \text{Glu5}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c1}\}], \text{k1}, \text{Lor1}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c2}\}], \text{k2}, \text{Lor2}] \\
 & \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c3}\}], \text{k3}, \text{Lor3}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c4}\}], \text{k4}, \text{Lor4}], \\
 & -\text{GS}^2 ((\text{k1} - \text{k3})[\text{Lor5}] g[\text{Lor1}, \text{Lor3}] + (- (\text{k1} + \text{k2} + \text{k4})[\text{Lor3}] g[\text{Lor1}, \text{Lor5}] + \\
 & \quad (- (\text{k2} + \text{k3} - \text{k4})[\text{Lor1}] g[\text{Lor3}, \text{Lor5}]) ((\text{k2} - \text{k4})[\text{Lor6}] g[\text{Lor2}, \text{Lor4}] + \\
 & \quad (-2 (\text{k2} - \text{k4})[\text{Lor4}] g[\text{Lor2}, \text{Lor6}] + (\text{k2} + 2 (\text{k4}))[\text{Lor2}] g[\text{Lor4}, \text{Lor6}]) \\
 & \quad g[\text{Lor5}, \text{Lor6}] \frac{1}{(\text{k2} + \text{k4})^2} \text{SumOver}[\text{Glu5}, 8] \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c3}, \text{Glu5}] \\
 & \text{SUNF}[\text{c2}, \text{c4}, \text{Glu5}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c1}\}], \text{k1}, \text{Lor1}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c2}\}], \text{k2}, \text{Lor2}] \\
 & \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c3}\}], \text{k3}, \text{Lor3}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c4}\}], \text{k4}, \text{Lor4}], \\
 & -\text{GS}^2 ((\text{k2} - \text{k3})[\text{Lor6}] g[\text{Lor2}, \text{Lor3}] + (-2 (\text{k2} - \text{k3})[\text{Lor3}] g[\text{Lor2}, \text{Lor6}] + \\
 & \quad (\text{k2} + 2 (\text{k3}))[\text{Lor2}] g[\text{Lor3}, \text{Lor6}]) ((\text{k1} - \text{k4})[\text{Lor5}] g[\text{Lor1}, \text{Lor4}] + \\
 & \quad (- (\text{k1} + \text{k2} + \text{k3})[\text{Lor4}] g[\text{Lor1}, \text{Lor5}] + (- (\text{k2} - \text{k3} + \text{k4})[\text{Lor1}] g[\text{Lor4}, \text{Lor5}]) \\
 & \quad g[\text{Lor5}, \text{Lor6}] \frac{1}{(\text{k2} + \text{k3})^2} \text{SumOver}[\text{Glu5}, 8] \text{SUNF}[\text{c1}, \text{c4}, \text{Glu5}] \\
 & \text{SUNF}[\text{c2}, \text{c3}, \text{Glu5}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c1}\}], \text{k1}, \text{Lor1}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c2}\}], \text{k2}, \text{Lor2}] \\
 & \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c3}\}], \text{k3}, \text{Lor3}] \text{ep}^*[\text{V}[5, \{\text{c4}\}], \text{k4}, \text{Lor4}]\}
 \end{aligned}$$

Figura 4.4: Expresión de la Amplitud para 4 gluones generada con FeynArts

Lo primero que se hace es sustituir las estructuras de FeynArts en la notación que se utiliza para posteriormente crear expresiones en términos de las trazas. En este sentido para FeynArts $SUNT[a, i, j] = t_{ij}^a$ corresponde a los generadores de $SU(N)$ en general, $SUNF[a, b, c] = f^{abc}$ que son las constantes de estructura y finalmente $SUNF[a, b, c, d] = \sum_i f^{abi} f^{icd}$. Estas sustituciones se realizan con comandos como:

Listing 4.6: AtreeColorManagement

```

1 diagcolor2 = Expand[diagcolor1] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_] -> SUNF[Glu1, Glu2, lg1]
   SUNF[lg1, Glu3, Glu4]; (*Sustituyendo ahora los factores de color*)
2 diagcolor3 = Expand[diagcolor2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_] -> fC[Glu1, Glu2, Glu3];
    
```

Para entonces obtener las trazas, se emplea la función ColorSimplify:

Listing 4.7: Creando expresiones en término de las Trazas TrC

```

1 diagcolor5 = Map[ColorSimplify, diagcolor4]
    
```

Luego de confirmar por pasos que funcionaba lo anterior para el proceso de 4 gluones, se construyó una función que de manera serial realiza estas operaciones. Se llamó a la misma *AtreeColorManagement*, como sigue:

Listing 4.8: AtreeColorManagement

```

1 AtreeColorManagement[p1_,Diags_]:=Module[{DiagExp2,npoint,scount,colorpart,particles,eplist ,
    emlist ,enumber,lg1,lg2 , lg3 , stglhs , stgrhs },
2   DiagExp2=Diags;
3   npoint= Length[p1];
4   scount=Length[Position[p1,sp]];
5   eplist =Position[p1,ep];
6   eplist =Map[Extract[Take[#, 1], 1] &, eplist];
7   emlist =Position[p1,em];
8   emlist =Map[Extract[Take[#, 1], 1] &, emlist];
9   enumber=Length[eplist]+Length[emlist];
10  particles = Apply[p1toFA,#] & /@ p1;
11  particles = Apply[First, {#}] & /@ particles;
12  colorpart ={};
13  Do[If[! MemberQ[Union[eplist,emlist],ii], colorpart =Join[colorpart,{ ii }]],{ ii ,1, npoint }];
14  If [scount===1,DiagExp2= DiagExp2 //. SUNT[c1_,c2_,c3_,c4_] -> - SUNF[c1,c2,c3,c4]];
15  If [npoint>7, DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_] \
16  SUNF[Glu5_, Glu6_, Glu7_,Glu8_] SUNF[Glu9_, Glu10_, Glu11_, Glu12_] ->
17  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4] \
18  SUNF[Glu5, Glu6, lg2] SUNF[lg2, Glu7, Glu8] \
19  SUNF[Glu9, Glu10, lg3] SUNF[lg3, Glu11, Glu12]];
20  If [npoint>5, DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_] \
21  SUNF[Glu5_, Glu6_, Glu7_,Glu8_] ->
22  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4] \
23  SUNF[Glu5, Glu6, lg2] SUNF[lg2, Glu7, Glu8]];
24  DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_] ->
25  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4];
26 ... (* Ir a Apéndice*)

```

4.2.1.5. Amplitudes Parciales y MHV: AtreeKinematics

El último procedimiento para obtener amplitudes parciales con helicidades definidas (como las MHV) implica realizar sustituciones para los vectores de polarización

de los bosones y para los espinores de los fermiones externos. Además, claro está, es necesario realizar toda el álgebra de Dirac y contracciones de índices de Lorentz. Todo se expresa finalmente en términos de los productos espinoriales que se definieron en Ec. (2.42) y Ec. (2.43). Esto se realizó en la función definida como *AtreeKinematics*. Además de que contrae los tensores métricos, asigna las polarizaciones y contiene dentro de su definición al Rearreglo de Fierz $\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle \langle k^+ | \gamma_\mu | l^+ \rangle = 2[ik] \langle lj \rangle$.

Antes de visualizar toda la función y señalar sus partes, en este punto es importante escribir la notación empleada por *S@M*. En *S@M* los espinores son señalados por una función llamada *Sp*, los objetos *Sp[n]* son espinores. Los productos escalares de Ec. (2.42) y Ec. (2.43) son descritos de la siguiente manera:

1. $\text{Spaa}[a,a]=0$
2. $\text{Spaa}[b,a]= -\langle ab \rangle$
3. $\text{Spbb}[a,b]=[ba]$
4. $\text{Spabp}[1,2]= \langle 12 \rangle$

Con esto, se tiene:

Listing 4.9: *AtreeKinematics*

```

1 AtreeKinematics[p1_,Diags_]:=Module[{DiagExp3,npoint,particles,hlocal,hmlist,hplist,hmfirst,
    hpfirst},
2   DiagExp3=Diags;
3   npoint=Length[p1];
4   particles=Apply[p1toFA,#]&/@p1;
5   hplist=Position[particles,hp];
6   hmlist=Position[particles,hm];
7   If[Length[hmlist]==0,hmfirst[p_]=npoint-Floor[p/npoint],hmfirst[p_]=hmlist[[1]][[1]];
8   If[Length[hplist]==0,hpfirst[p_]=npoint-Floor[p/npoint],hpfirst[p_]=hplist[[1]][[1]];
9   (* Contracción del tensor métrico *)

```

```

10  DiagExp3= DiagExp3 //. {MetricTensor[Lor_, Lor1_] MetricTensor[Lor2_, Lor_] -> MetricTensor[
    Lor1, Lor2],
11  MetricTensor[Lor_, Lor1_] MetricTensor[Lor_, Lor2_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
12  MetricTensor[Lor1_, Lor_] MetricTensor[Lor2_, Lor_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
13  MetricTensor[Lor1_, Lor_] MetricTensor[Lor_, Lor2_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
14  FourVector[C____, Lor_] MetricTensor[Lor_, Lor1_] -> FourVector[C, Lor1],
15  FourVector[C____, Lor_] MetricTensor[Lor1_, Lor_] -> FourVector[C, Lor1]};
16  (* Asignación de los vectores de polarización *)
17  Do[hlocal= particles [[ ii ]][[2]];
18  If [p1 [[ ii ]][[1]]===m || p1 [[ ii ]][[1]]===p, (* gluons *)
19  DiagExp3= DiagExp3 /. Conjugate[PolarizationVector][V[5,{ToExpression["c"<>ToString[p1
    [[ii ]][[2]]]}],
20  FourMomentum[Out_, Ind_, Index[Lorentz,Lor1_] ] :> If[hlocal===hm,
21  Spba[eta[ ii ], gmu[Index[Lorentz, Lor1 ]], p1 [[ ii ]][[2]]/ Sqrt[2]/Spbb[eta[ ii ], p1 [[ ii
    ]][[2]],
22  -Spab[eta[ii ], gmu[Index[Lorentz, Lor1 ]], p1 [[ ii ]][[2]]/ Sqrt[2]/Spaa[eta[ ii ], p1 [[ ii
    ]][[2]]];
23  (* Se escogen los momentos de referencia*)
24  DiagExp3= DiagExp3 //. eta[Ind_] :>If[ particles [[ Ind]][[2]]===hp,Sp[p1 [[ hfirst [Ind
    ]][[2]],
25  Sp[p1 [[ hfirst [Ind ]][[2]]]; ];
26  If [p1 [[ ii ]][[1]]===qp || p1 [[ ii ]][[1]]===Qp ||
27  p1 [[ ii ]][[1]]===qm || p1 [[ ii ]][[1]]===Qm || (* massless quarks *)
28  p1 [[ ii ]][[1]]===ep || p1 [[ ii ]][[1]]===em, (* electrons (massless) *)
29  DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSpinor[FourMomentum[Out_,ii],0]]->spinor[
    p1[[ii]][[2]],hlocal];
30  DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSpinor[-FourMomentum[Out_,ii],0]]->spinor[
    p1[[ii]][[2]],hlocal];
31  ];
32  ,{ ii ,1, npoint }];
33  (* Trabajando con las líneas fermiónicas *)
34  DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracMatrix[Index[Lorentz, Lor1_]]]->gmu[Index[
    Lorentz,Lor1]];
35  DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSlash[q____]]:>Apply[momslash,q];
36  DiagExp3= DiagExp3 //. {momslash[CC____ FourMomentum[Out_,Ind1_],q1____]:>

```

```

37   If[Length[List[q1]]>0,CC momslash[p1[[Ind1 ]][[2]]] + momslash[q1],CC momslash[p1[[Ind1
      ]][[2]]], momslash[FourMomentum[Out_,Ind1_],q1____]:>
38   If[Length[List[q1]]>0,momslash[p1[[Ind1 ]][[2]]] + momslash[q1],momslash[p1[[Ind1 ]][[2]]]];
39   DiagExp3= DiagExp3 //. FermionChain[q____] :> If[EvenQ[Length[List[q]]], spaa[q], spaabb[q]];
40   DiagExp3= DiagExp3 //. {spaa[spinor[q1_,hm],q2____]->Spaa[Sp[q1],q2],spaa[spinor[q1_,hp],
      q2____]->Spbb[Sp[q1],q2]};
41   DiagExp3= DiagExp3 //. {spaabb[spinor[q1_,hm],q2____]->Spab[Sp[q1],q2],spaabb[spinor[q1_,hp
      ],q2____]->Spba[Sp[q1],q2]};
42   DiagExp3= DiagExp3 //. {spinor[q1_,h_]->Sp[q1],momslash[q1_]->Sp[q1]};
43   (* Contracción de momentos*)
44   DiagExp3= ExpandAll[DiagExp3];
45   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor1_, Lor2_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
      gmu[Lor2],bb];
46   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor2_, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
      gmu[Lor2],bb];
47   DiagExp3= DiagExp3 //. FourVector[fourmom____, Index[Lorentz, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Index[
      Lorentz, Lor1_]], bb____] :>
48   Sum[If[IntegerQ[First[Extract[fourmom, {ii}]]],
49   Take[Extract[fourmom, {ii}],{1,Length[Extract[fourmom, {ii}]]-1} FF[aa,Sp[p1[[Last[Last[
      Extract[fourmom, {ii}]]][[2]], bb],
50   FF[aa,Sp[p1[[Last[Extract[fourmom, {ii}]]][[2]], bb],
51   {ii, 1,Length[fourmom]}}];
52   DiagExp3= ExpandAll[DiagExp3];
53   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor1_, Lor2_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
      gmu[Lor2],bb];
54   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor2_, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
      gmu[Lor2],bb];
55   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor1_],Index[Lorentz, Lor2_]] FF_[aa____,
      Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
56   FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
57   DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor2_],Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,
      Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
58   FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
59   DiagExp3= DiagExp3 //. FourVector[fourmom____, Index[Lorentz, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Index[
      Lorentz, Lor1_]], bb____] :>

```

```

60 Sum[If[IntegerQ[First[Extract[fourmom, {ii}]]],
61 Take[Extract[fourmom, {ii}],{1,Length[Extract[fourmom, {ii}]]-1} FF[aa,Sp[p1[[Last[Last[
Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb],
62 FF[aa,Sp[p1[[Last[Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb]],
63 {ii, 1,Length[fourmom]}];
64 DiagExp3= Expand[DiagExp3] //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor1_],Index[Lorentz, Lor2_]] FF_[
aa____,Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
65 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
66 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor2_],Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,
Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
67 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
68 (* Rearreglo de Fierz definido como sigue)
69 ... (* Ir a Apéndice*)

```

En la Figura 4.5 se muestra un ejemplo de salida de la función *AtreeKinematics*.

$$\begin{aligned}
 & i \left(\frac{\langle 1 | 3 \rangle \langle 1 | 3 | 2 \rangle^2 [4 | 2]}{2 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle \langle 2 | 3 \rangle [2 | 1] [3 | 2]^2} - \frac{\langle 1 | 3 \rangle \langle 1 | 3 | 2 \rangle \langle 1 | 4 | 2 \rangle [4 | 2]}{2 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle \langle 2 | 3 \rangle [2 | 1] [3 | 2]^2} - \right. \\
 & \frac{\langle 1 | 3 \rangle \langle 1 | \text{abra} | \text{Lor1} | \text{bra} | 2 \rangle^2 [4 | 2]}{4 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle [2 | 1] [3 | 2]} + \frac{\langle 1 | 3 | 4 \rangle \langle 3 | 1 | 2 \rangle \langle 1 | \text{abra} | \text{Lor1} | \text{bra} | 2 \rangle^2}{4 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle \langle 3 | 4 \rangle [2 | 1] [3 | 2] [4 | 3]} + \\
 & \frac{\langle 1 | 2 | 4 \rangle \langle 3 | 4 | 2 \rangle \langle 1 | \text{abra} | \text{Lor1} | \text{bra} | 2 \rangle^2}{4 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle \langle 3 | 4 \rangle [2 | 1] [3 | 2] [4 | 3]} - \left(\langle 1 | 3 \rangle \langle 1 | \text{abra} | \text{Lor1} | \text{bra} | 2 \rangle^2 [4 | \right. \\
 & \left. 2 \right) \left(-\frac{1}{2} \langle 1 | 3 \rangle [3 | 1] + \frac{1}{2} \langle 2 | 3 \rangle [3 | 2] + \frac{1}{2} \langle 1 | 4 \rangle [4 | 1] - \frac{1}{2} \langle 2 | 4 \rangle [4 | 2] \right) \Big/ \\
 & \left. (4 \langle 1 | 2 \rangle \langle 1 | 4 \rangle \langle 3 | 4 \rangle [2 | 1] [3 | 2] [4 | 3]) \right)
 \end{aligned}$$

Figura 4.5: Ejemplo de salida de la función *AtreeKinematics*

4.2.1.6. *AtreeFDhel* y paquete *arbolesFeynArts.m*

Para manipular todos los pasos de procesamiento de los diagramas de Feynman, se contruyó una función que aplica todos los pasos de manera serial, a partir de una entrada sencilla que especifica el proceso de interés y los nombres de los momentos asignados a las partículas en cuestión.

Esta es la función **AtreeFDhel**, creada en base a las 5 funciones anteriores. Sencillamente:

Listing 4.10: AtreeFDhel

```

1 AtreeFDhel[{i1____},{p1____}] := Module[{npoint,sposition,p2,particlelist,DiagExp2,Amplitude},
2   npoint=Length[{p1}];
3   sposition=Position[{p1},s];
4   If[Length[sposition]>0,Print["Scalar_amplitudes_not_working!"];
5   particlelist ={};
6   p2={p1};
7   Do[particlelist =Join[particlelist ,{ If [!(p2[[ii]]==s),p2[[ii]], If [ii==sposition [[1]][[1]], sp,
8     sm]]}],{ii,1,npoint}];
9   particlelist = Inner[List, particlelist ,{i1}, List];
10  DiagExp2=AtreeTopFeynString[particlelist]; (*Para generar las topologías e insertar los
11     campos, se utiliza AtreeTopFeynString*)
12  DiagExp2=AtreeColorManagement[particlelist,DiagExp2]; (* Descomposición de color gracias a
13     AtreeColorManagement *)
14  Amplitude=AtreeKinematics[particlelist,DiagExp2]; (* Trabajo con las amplitudes MHV usando
15     AtreeKinematics*)
16  Amplitude ]

```

Cada una de las funciones que se construyeron se incluyeron en un único archivo llamado *arbolesFeynArts.m*, que permite de manera rápida cargar todos los paquetes en sesiones interactivas o tipo *script* de Mathematica.

4.2.2. Aplicación de AtreeFDhel para la amplitud de 4 Gluones

Ejecutando el paquete *arbolesFeynArts.m* escribimos para un proceso de 4 gluones con helicidades todas positivas:

Listing 4.11: Ejemplo para 4 gluones

```

1 Arbpppp = AtreeFDhel[{i1, i2, i3, i4}, {p, p, p, p}];

```

Lo cual genera resultados en fracciones de segundos. Si se evalúa como se muestra a continuación:

Listing 4.12: Ejemplo para 4 gluones. Parte 2

```

1 Arboles[{i1_, i2_, i3_, i4_}, {p, p, p, p}] := Evaluate[Arbpppp]
2 Arboles[{c1, c2, c3, c4}, {p, p, p, p}]

```

se obtiene la forma de la amplitud parcial correspondiente, la cual se muestra en la Figura 4.6. Básicamente este es el resultado de realizar las sustituciones cinemáticas a una de las amplitudes parciales que se extraen de la expresión en la Ec. (4.16)

Con esto hecho, solo quedan usar las funciones de S@M: *DeclareSpinor*, *GenMomenta* y *Num4V[a]* para evaluar en diferentes puntos del espacio de fases. *DeclareSpinor* declara que sus argumentos son espinores, *GenMomenta* genera cuádrimomentos arbitrarios de la forma $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ y *Num4V[a]* hace accesible el valor del cuádrimomento asociado a un espinor dado.

4.2.3. Casos con más de 4 gluones

A continuación se estudiaron amplitudes mucho más complejas, incluyendo hasta 7 gluones y también incluyendo quarks. A pesar de que los tiempos de cómputo aumentan exponencialmente, el código mostró ser robusto. Se encuentra de hecho: para 5 gluones se tienen 25 diagramas de Feynman, mientras que para 6 gluones, FeynArts encuentra 220 diagramas. Una amplitud parcial de 6 gluones contiene por ejemplo 5639 términos y le toma aproximadamente 30 minutos de cómputo para obtener la expresión de la amplitud. En el caso de 7 gluones, el cómputo duró aproximadamente 65 horas y empleó 35 GB de memoria RAM, en una computadora con un procesador Intel(R) Xeon(R) CPU W5580 de 3.20GHz con 8 procesadores y un total de 96GB de memoria RAM.

$$\begin{aligned}
 & i \left(- \langle c4 | c1 | c3 \rangle \langle c4 | c2 | c2 \rangle [c1 | c4] / \right. \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2] +}{\langle c4 | c1 | c2 \rangle \langle c4 | c2 | c3 \rangle [c1 | c4]} - \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c1 | c3 \rangle \langle c4 | c3 | c2 \rangle [c1 | c4]} + \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c1 | c2 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c1 | c4]} - \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c2 | c3 \rangle [c2 | c4]} - \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c3 \rangle \langle c4 | c3 | c1 \rangle [c2 | c4]} - \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c2 | c4]} - \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c3 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c2 | c4]} + \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c2 | c2 \rangle [c3 | c4]} + \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c2 \rangle \langle c4 | c3 | c1 \rangle [c3 | c4]} + \\
 & \quad \frac{4 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c2 \rangle [c3 | c4]} + \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c3 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c2 \rangle [c3 | c4]} - \\
 & \quad \frac{2 \langle c2 | c3 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c3 | c2]}{\langle c4 | c1 | c2 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c1 | c4]} + \\
 & \quad \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{\langle c4 | c3 | c2 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c1 | c4]} + \\
 & \quad \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c2 | c4]} - \\
 & \quad \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{\langle c4 | c3 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c3 \rangle [c2 | c4]} - \\
 & \quad \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{\langle c4 | c1 | c2 \rangle \langle c4 | c3 | c1 \rangle [c3 | c4]} + \\
 & \quad \left. \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{\langle c4 | c2 | c1 \rangle \langle c4 | c3 | c2 \rangle [c3 | c4]} \right) \\
 & \quad \frac{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}{4 \langle c3 | c4 \rangle \langle c4 | c1 \rangle \langle c4 | c2 \rangle \langle c4 | c3 \rangle [c4 | c3]}
 \end{aligned}$$

Figura 4.6: Muestra de resultado en FeynArts para el proceso de 4 gluones al usar AtreeFDhel

Este es un ejemplo de *script* para obtener amplitudes parciales con 6 gluones:

Listing 4.13: Ejemplo resumido para 6 gluones

```

1 << arboles_FeynArts.m (* Inicialización del Paquete*)
2 Arbppppppp = AtreeFDhel[{i1, i2, i3, i4, i5, i6}, {p, p, p, p, p, p}] (*Uso de AtreeFDhel para 6
   gluones con helicidades todas positivas*)
3 Arboles[{i1_, i2_, i3_, i4_, i5_, i6_}, {p, p, p, p, p, p}] := Evaluate[Arbppppppp] (*Evaluando
   *)
4 Arboles[{c1, c2, c3, c4, c5, c6}, {p, p, p, p, p, p}]
5 (*Ahora se evalúa para un punto cualquiera del espacio de fases*)
6 SeedRandom[100]
7 DeclareSpinor[d1, d2, d3, d4, d5, d6]
8 GenMomenta[{d1, d2, d3, d4, d5, d6}]
9 Num4V[d1]
10 Num4V[d2]
11 Num4V[d3]
12 Num4V[d4]
13 Num4V[d5]
14 Num4V[d6]
15 N[Arboles[{d1, d2, d3, d4, d5, d6}, {p, p, p, p, p, p}], 16] (*Genera la Amplitud parcial para la
   helicidad dada*)

```

4.2.4. Códigos para amplitudes con líneas fermiónicas

Se trabajó de igual forma para casos con líneas fermiónicas, entre ellos: 2 quarks y n gluones (2q2g, 2q3g, 2q4g y 2q5g), 2 quarks de un tipo con 2 quarks de otro junto a n gluones (2q2Q, 2q2Q1g, 2q2Q2g, 2q2Q3g y 2q2Q4g).

Como ejemplo, se presenta el uso de AtreeFDhel para el caso de 2q2Q1g, el cual luego, en el siguiente Capítulo, se evaluará en un punto del espacio de fases:

Listing 4.14: AtreeFDhel para el caso de 2q2Q1g

```

1 (* ::Package:: *)
2
3 << arboles_FeynArts.m;

```



```

4
5 Print["AmplitudqmQp+Qmqp"];
6 Arb1 = AtreeFDhel[{i1, i2, i3, i4, i5}, {qm, Qp, p, Qm, qp}];
7 Arboles[{{i1_, i2_, i3_, i4_, i5_}, {qm, Qp, p, Qm, qp}}] := Evaluate[Arb1];
8
9 Print["AmplitudqmQp-Qmqp"];
10 Arb2 = AtreeFDhel[{i1, i2, i3, i4, i5}, {qm, Qp, m, Qm, qp}];
11 Arboles[{{i1_, i2_, i3_, i4_, i5_}, {qm, Qp, m, Qm, qp}}] := Evaluate[Arb2];
12
13 Print["AmplitudqmQP+qpQm"];
14 Arb3 = AtreeFDhel[{i1, i2, i3, i4, i5}, {qm, Qp, p, qp, Qm}];
15 Arboles[{{i1_, i2_, i3_, i4_, i5_}, {qm, QP, p, qp, Qm}}] := Evaluate[Arb3];
16
17
18 Save["Arboles_2q2Q1gout.m", Arboles]; (*Nótese que esto es el resultado, para luego usar los
    valores de las Amplitudes Parciales obtenidas sin volver a utilizar el paquete*)
19
20 Quit;

```

Listing 4.15: Evaluación en un punto del espacio de fases para 2q2Q1g

```

1 (* ::Package:: *)
2
3 <<arboles_FeynArts.m
4
5 <<Arboles_2q2Q1gout.m (*Resultado del que se hablaba en el Istlisting anterior*)
6
7 SeedRandom[100]
8
9 DeclareSpinor [ps51,ps52,ps53,ps54,ps55]
10 GenMomenta[{ps51,ps52,ps53,ps54,ps55}]
11 Num4V[ps51]
12 mom1=Num4V[ps51];
13 mom2=Num4V[ps52];
14 mom3=Num4V[ps53];

```

```
15 mom4=Num4V[ps54];
16 mom5=Num4V[ps55];
17 momentosps5={mom1[[1]],mom1[[2]],mom1[[3]],mom1[[4]],
18 mom2[[1]],mom2[[2]],mom2[[3]],mom2[[4]],
19 mom3[[1]],mom3[[2]],mom3[[3]],mom3[[4]],
20 mom4[[1]],mom4[[2]],mom4[[3]],mom4[[4]],
21 mom5[[1]],mom5[[2]],mom5[[3]],mom5[[4]]};
22 Export["momentos_2q2Q1g.dat",momentosps5,"List"]
23
24 N[Arboles[{ps51,ps52,ps53,ps54,ps55},{qm, Qp, p, Qm, qp}],16]
25 N[Arboles[{ps51,ps52,ps53,ps54,ps55},{qm, Qp, m, Qm, qp}],16]
26 N[Arboles[{ps51,ps52,ps53,ps54,ps55},{qm, Qp, p, qp, Qm}],16]
27
28 Save["Momentos2q2Q1g.m",Arboles]
29
30 Quit;
```

Es importante resaltar que ya a este nivel, visto que le llevaba a la computadora de minutos a horas obtener los resultados, se creaban paquetes en Mathematica que se dejaban corriendo en el terminal.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación resultados numéricos de las amplitudes calculadas con el paquete *arbolesFeynArts.m*, que empleó el generador de diagramas de Feynman *FeynArts* [9]. En adelante denotaremos los resultados obtenidos en este trabajo con el nombre *ArbolesFA*. Las evaluaciones correspondientes se realizaron en puntos del espacio de fase generados de manera aleatoria usando S@M [8]. Dichas amplitudes son comparadas con las generadas por el programa numérico **BlackHat** [10] una librería escrita en C++ que utiliza técnicas modernas basadas en unitariedad para hallar amplitudes de procesos en QCD.

Dichas amplitudes se hallaron para diferentes procesos no triviales con la finalidad de verificar el funcionamiento del paquete *arbolesFeynArts.m* y demostrar que usando diagramas de Feynman junto con los productos de helicidad y el ordenamiento de color, se pueden obtener amplitudes verificables con las técnicas modernas que no utilizan diagramas de Feynman.

Como notación se utiliza $g+$ y $g-$ para indicar gluones de helicidad positiva y negativa respectivamente, y $q+$ con $q-$ para indicar a un quark (antiquark) de helicidad

positiva y un quark (antiquark) de helicidad negativa. Para amplitudes con dos tipos de quark distintos, empleamos la notación Q para el segundo quark.

5.1. Procesos con solo gluones

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g+,g-,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-2,03967996675588	1,06840310494348
<i>BlackHat</i>	-2,039679966755875	1,068403104943475

Tabla 5.1: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 4 gluones.

5.1.1. 4 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(2.30168718761206761, 1.36097578039930615, 1.74857236036045211, 0.62289929793468714)
 (3.15110560723367840, -0.04871577790486545, -1.89987345549157294, 2.51347850081140799)
 (-4.26314725311165090, -0.78026092294905513, 0.39270563000394387, -4.17269693148152190)
 (-1.18964554173409511, -0.53199907954538557, -0.24140453487282305, 1.03631913273542677)

Cada línea representa un momento de una partícula en notación (p_0, p_1, p_2, p_3) , con cada entrada con unidades de TeV. Se emplea la convención de que todas las partículas salen. Esta misma notación se usa en todas las siguientes secciones de este capítulo.

Al evaluar en estos puntos del espacio de fases se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.1.

Los procesos para 4 gluones y 5 gluones le tomaban segundos a la computadora evaluarlos, al ver las tablas se nota que la coincidencia con *BlackHat* es hasta la cifra decimal 13 en el caso de 4 gluones, entonces para este proceso se habla de un error en el orden de 10^{-14} .

5.1.2. 5 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(0.980599203197601537, -0.5906938997925733, -0.0678369182241916, -0.779777959797182739)
 (1.04454301854917973, -1.01548550985781771, 0.238161383485702151, -0.056021891121385352)
 (0.786139114403999901, 0.43768067999574067, -0.103138712209646058, 0.644835432957981233)
 (-1.29210648061856251, 0.27484558120659775, 1.05136325851331135, 0.69902386396743795)
 (-1.51917485553221866, 0.89365314844805260, -1.11854901156517583, -0.50805944600685109)

Al evaluar en estos puntos del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.2.

La coincidencia es hasta la cifra decimal 13 por lo cual se habla de un error también en el orden de 10^{-14} .

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	g+,g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g-,g-,g-,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g+,g-,g-,g-,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g+,g-,g+,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0.5497235919040	0.2648287917376
<i>BlackHat</i>	0.5497235919039611	0.2648287917376144
	g-,g+,g-,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.3014009356678	0.8097234715726
<i>BlackHat</i>	-0.3014009356678016	0.8097234715726169
	g-,g-,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.0546190777142	0.0209725997549
<i>BlackHat</i>	-0.05461907771423895	0.02097259975493741

Tabla 5.2: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 5 gluones.

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	g+,g+,g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g-,g-,g-,g-,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g+,g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g+,g-,g-,g-,g-,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	g-,g-,g+,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.273559989135	0.585815634672
<i>BlackHat</i>	-0.2735599891352311	0.5858156346721254
	g-,g+,g-,g+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-1.468715294162	0.685112371990
<i>BlackHat</i>	-1.468715294161594	0.6851123719897453
	g-,g+,g-,g+,g-,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0.82703995227	-0.75257749305
<i>BlackHat</i>	0.8270399522657844	-0.7525774930548282

Tabla 5.3: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 6 gluones.

5.1.3. 6 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(1.40113539350451390, -0.06734986524849299, -1.38630576967609677, 0.191835084238581820)
 (0.85312839663915721, 0.39883451527938057, 0.46269777842666018, 0.595541649603950008)
 (1.07070098128216907, 0.08354232708024596, 0.81657264131939124, -0.68748119418154980)
 (0.660624942638639877, -0.2675175630490436, 0.0282182964547853, -0.603376661830565868)
 (-1.91315927864700733, -1.12613524023213980, -1.47995722915439370, 0.44913744672882446)
 (-2.07243043541747273, 0.97862582617004989, 1.55877428262965367, 0.95261856889840830)

Al evaluar en estos puntos del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.3.

Se observa una buena coincidencia de los resultados obtenidos con *ArbolesFA* y con *BlackHat*. En general los resultados son iguales hasta la cifra decimal 12 o 13.

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	g-,g+,g-,g+,g-,g+,g-	
<i>ArbolesFA</i>	13.15360605	6.01013260
<i>BlackHat</i>	13.15360605483442	6.010132596221718

Tabla 5.4: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 7 gluones.

5.1.4. 7 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(15.024652416009320,0.5018705449455290,7.168269699720715,-13.194855652491113)
 (15.374360484110857,-1.8613270866384009,7.606562763401442,-13.230518685915917)
 (-11.325680800571449,0.8964728143587419,-5.525629510231323,9.845547247624643)
 (-6.500655907523475,0.01643403242446254,-2.8611318413064672,5.837138146151793)
 (-4.6557075387310396,0.02118408671015551,-2.1064746711347669,4.1518584249146751)
 (-4.523228568720289,0.59046499973042669,-2.2393109373767789,3.8854130146903914)
 (-3.393740084573924,-0.1650993915309147,-2.04228550307282,2.705417505025527)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.4.

En este caso altamente no trivial se observa que hay coincidencia de los resultados con hasta al menos 9 cifras significativas.

5.2. Procesos con 2 quarks y gluones

5.2.1. 2 quarks y 2 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(1.68343985577466141, 1.36883694668301574, -0.55811207314388459, -0.80546016364384325)
 (3.49079848146130782,1.64851084251344158,3.06311331354347039,0.29227190881255912)
 (-3.27389887632787591,-3.20432023784335668,-0.63900590827072502,0.20595415743200803)
 (-1.90033946090809332,0.18697244864689936,-1.86599533212886078,0.3072340973992761)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.5.

El error es en el orden de 10^{-15} , para este caso de amplitudes con 2 quarks y 2 gluones. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla 5.5 han sido multiplicadas por una fase convencional $-i$.

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q^-,g^+,g^+,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q^-,g^-,g^+,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.63339121979241	0.06669877762262
<i>BlackHat</i>	-0.6333912197924138	0.06669877762261663
	q^-,g^-,g^-,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q^-,g^+,q^+,g^-	
<i>ArbolesFA</i>	0.872962399528094	0.038254621345394
<i>BlackHat</i>	0.872962399528093	0.03825462134539418

Tabla 5.5: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks y 2 gluones.

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q^-,g^+,g^+,g^+,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q^-,g^-,g^+,g^+,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0.53458376723326	-0.94875432061929
<i>BlackHat</i>	0.5345837672332645	-0.9487543206192849
	q^-,g^-,g^-,g^+,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.050647325389503	0.223994324971928

<i>BlackHat</i>	-0.05064732538950326	0.2239943249719277
	q-,g-,g+,g-,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0.11151948519310	0.02085036611438
<i>BlackHat</i>	0.111519485193104	0.02085036611438104
	q-,g+,g-,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0.0363382491555005	0.0276584445924607
<i>BlackHat</i>	0.03633824915550055	0.02765844459246071
	q-,g-,g-,g-,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g+,q+,g-,g-	
<i>ArbolesFA</i>	0.043629956542409	0.789295059391866
<i>BlackHat</i>	0.04362995654240923	0.7892950593918654
	q-,g-,q+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0.472213760885538	-1.285081614469915
<i>BlackHat</i>	0.4722137608855373	-1.285081614469915
	q-,g-,q+,g-,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.343954462971809	-0.042273737504314
<i>BlackHat</i>	-0.3439544629718088	-0.04227373750431376
	q-,g+,q+,g+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0

Tabla 5.6: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks y 3 gluones.

5.2.2. 2 quarks y 3 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(1.82039190791861125, -0.03687860102770000, -1.52455249839566138, 0.99408568385091847)
 (2.70609517384738058,-0.99071508083616099,1.92283543273395966,-1.62608075357489242)
 (-1.566560845910774173,1.17881601869556136,0.45242217385623174,-0.927264716578080461)
 (-1.65864924867851069,0.09254160410772206,-1.57652348555136524,0.507076997265634134)
 (-1.30127698717670696,-0.24376394093942243,0.72581837735683522,1.05218278903642028)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.6. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla 5.6 han sido multiplicadas por una fase convencional i .

Siguen coincidiendo todas las cifras decimales con los valores que arroja *BlackHat*.

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q-,g+,g+,g+,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g-,g-,g-,g-,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g-,g-,g+,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0.3629982288291	-0.4528443084988
<i>BlackHat</i>	0.3629982288290839	-0.4528443084987815
	q-,g-,g+,g-,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	-4.4485099374543	-1.9701940537369
<i>BlackHat</i>	-4.44850993745434	-1.970194053736911

	q-,g+,g+,g+,q+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g-,g-,g+,q+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.1629375673887	-0.4392153716837
<i>BlackHat</i>	-0.1629375673886874	-0.4392153716837026
	q-,g-,g+,g-,q+,g+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.2396853380775	-3.2947304151495
<i>BlackHat</i>	-0.2396853380774766	-3.294730415149532

Tabla 5.7: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks y 4 gluones.

5.2.3. 2 quarks y 4 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(0.97505672017421854, -0.28397521744327887, -0.43513571467493104, 0.825076113609698325)
 (0.751651163847480402,-0.38793947555059686,0.061565994001328952,-0.640852606927230979)
 (0.438031343774695692,0.396804303462995535,-0.10711407475670438,-0.151474017149238284)
 (1.24662447620943263,0.81856237255481891,0.93185747068473195,-0.125179396271599163)
 (-1.79438246456611444,-1.36996790031003677,0.61797818481096111,0.98035674341548836)
 (-1.61698123943971283,0.82651591728609806,-1.0691518600653866,-0.88792683667711825

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.7.

Se encuentra que hay muy buena concordancia entre los resultados comparados, usualmente con 13 o 14 cifras significativas idénticas. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla 5.7 han sido multiplicadas por una fase convencional $-i$.

5.2.4. 2 quarks y 5 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(15.024652416009320, 0.5018705449455290, 7.168269699720715, -13.194855652491113)
 (15.374360484110857,-1.8613270866384009,7.606562763401442,-13.230518685915917)
 (-11.325680800571449,0.8964728143587419,-5.525629510231323,9.845547247624643)
 (-6.500655907523475,0.01643403242446254,-2.8611318413064672,5.837138146151793)
 (-4.6557075387310396,0.02118408671015551,-2.1064746711347669,4.1518584249146751)
 (-4.523228568720289,0.59046499973042669,-2.2393109373767789,3.8854130146903914)
 (-3.393740084573924,-0.1650993915309147,-2.04228550307282,2.705417505025527)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla C.1 que se encuentra en el Apéndice C. Además se observan amplitudes del estilo MHV.

Se encuentra que hay muy buena concordancia entre los resultados comparados, básicamente incluyendo las 10 o 14 cifras significativas mostradas para *ArbolesFA*. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla C.1 han sido multiplicadas por una fase convencional i .

5.3. Procesos con 4 quarks y gluones

5.3.1. 4 quarks

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q_-, Q_+, Q_-, q_+	
<i>ArbolesFA</i>	0.1330986378235036	0.2796536042195992
<i>BlackHat</i>	0.1330986378235036	0.279653604219599
	q_-, Q_+, q_+, Q_-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q_-, q_+, Q_+, Q_-	
<i>ArbolesFA</i>	0.0331850951138611	0.7628052657494832
<i>BlackHat</i>	0.03318509511386132	0.7628052657494832
	Q_+, Q_-, q_-, q_+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.0331850951138611	0.7628052657494832
<i>BlackHat</i>	-0.03318509511386102	0.7628052657494835
	Q_+, q_-, q_+, Q_-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.1330986378235036	0.2796536042195992
<i>BlackHat</i>	-0.1330986378235036	0.279653604219599

Tabla 5.8: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks q y 2 quarks Q .

(1.68343985577466141,1.36883694668301574,-0.55811207314388459,-0.80546016364384325)
 (3.49079848146130782,1.64851084251344158,3.06311331354347039,0.29227190881255912)
 (-3.27389887632787591,-3.20432023784335668,-0.63900590827072502,0.20595415743200803)
 (-1.90033946090809332,0.18697244864689936,-1.86599533212886078,0.3072340973992761)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.8.

Los resultados encontrados para las amplitudes con un par quark-antiquark del tipo q y otro del tipo Q son iguales con alrededor de 14 cifras significativas. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla 5.8 han sido multiplicadas por una fase convencional -1 .

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q^-, Q^+, g^+, Q^-, q^+	
<i>ArbolesFA</i>	-0.587481308228644	0.182140135796034
<i>BlackHat</i>	-0.5874813082286441	0.1821401357960336
	q^-, Q^+, g^-, Q^-, q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0.3301782775683061	-0.1383108589197166
<i>BlackHat</i>	0.3301782775683059	-0.1383108589197165
	q^-, Q^+, g^-, q^+, Q^-	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q^-, q^+, g^+, Q^+, Q^-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.013167315639069	-0.050798292938808
<i>BlackHat</i>	-0.01316731563906858	-0.05079829293880766
	q^-, q^+, g^-, Q^+, Q^-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.0113355929891308	-0.0046387910106037
<i>BlackHat</i>	-0.01133559298913082	-0.004638791010603732
	Q^+, q^-, g^+, q^+, Q^-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.3301782775683061	-0.1383108589197166
<i>BlackHat</i>	-0.330178277568306	-0.1383108589197166

Tabla 5.9: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks q y 2 quarks Q y 1 gluon.

5.3.2. 4 quarks y 1 gluón

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(1.82039190791861125, -0.03687860102770000, -1.52455249839566138, 0.99408568385091847)
 (2.70609517384738058,-0.99071508083616099.1.92283543273395966.-1.62608075357489242)
 (-1.566560845910774173.1.17881601869556136.0.45242217385623174.-0.927264716578080461)
 (-1.65864924867851069.0.09254160410772206.-1.57652348555136524.0.507076997265634134)
 (-1.30127698717670696.-0.24376394093942243.0.72581837735683522.1.05218278903642028

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.9, en algunos casos la coincidencia fue completa, y siempre al menos 14 dígitos coincidieron.

5.3.3. 4 quarks y 2 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(0.97505672017421854, -0.28397521744327887, -0.43513571467493104, 0.825076113609698325)
 (0.751651163847480402,-0.38793947555059686,0.061565994001328952,-0.640852606927230979)
 (0.438031343774695692,0.396804303462995535,-0.10711407475670438,-0.151474017149238284)
 (1.24662447620943263,0.81856237255481891,0.93185747068473195,-0.125179396271599163)
 (-1.79438246456611444,-1.36996790031003677,0.61797818481096111,0.98035674341548836)
 (-1.61698123943971283,0.82651591728609806,-1.0691518600653866,-0.88792683667711825)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla C.2 (ver Apéndice C).

En la comparación se aprecia que siempre la coincidencia de los resultados contiene más de 12 cifras significativas. Las amplitudes reportadas para *BlackHat* en la Tabla C.2 han sido multiplicadas por una fase convencional -1 .

5.3.4. 4 quarks y 3 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(15.024652416009320, 0.5018705449455290, 7.168269699720715,-13.194855652491113)
 (15.374360484110857,-1.8613270866384009,7.606562763401442,-13.230518685915917)
 (-11.325680800571449,0.8964728143587419,-5.525629510231323,9.845547247624643)
 (-6.500655907523475,0.01643403242446254,-2.8611318413064672,5.837138146151793)
 (-4.6557075387310396,0.02118408671015551,-2.1064746711347669,4.1518584249146751)
 (-4.523228568720289,0.59046499973042669,-2.2393109373767789,3.8854130146903914)
 (-3.393740084573924,-0.1650993915309147,-2.04228550307282,2.705417505025527)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla C.3, ver Apéndice C. Es claro que los resultados concuerdan.

Proceso	Parte Real	Parte Imaginaria
	$q^-, Q^+, g^+, g^-, g^+, g^-, Q^-, q^+$	
<i>ArbolesFA</i>	0.0927881799641	0.0696519228701
<i>BlackHat</i>	0.09278817996436262	0.06965192287018912

Tabla 5.10: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando *ArbolesFA* y *BlackHat* en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks q y 2 quarks Q y 4 gluones.

5.3.5. 4 quarks y 4 gluones

Para este caso se empleó el siguiente punto del espacio de fase:

(0.58721045973206113,0.5735434654529255,-0.12295992898470664,-0.027292363750018598)
 (0.554024565315938816,0.015609711294866443,0.48342968290030968,0.270176419359114139)
 (2.0154581015973971,0.10237032887348332,2.00375972415450576,0.191150838128368385)
 (0.995456778060369686,0.009627786002754764,0.56231775868441507,-0.821364864716742804)
 (0.9198903295790617,-0.6778986355998932,0.60918065183259523,0.124702011762811426)
 (1.55587756027078201,0.81201660635324838,0.92938516086278365,-0.947431916460899221)
 (-2.71458626734890343,-0.36825798300857646,-2.00258736166727003,-1.79527394002147478)
 (-3.913331527206707,-0.46701127936880875,-2.46252568778263272,3.00533381569884146)

Al evaluar en este punto del espacio de fase se obtienen los valores mostrados en la Tabla 5.10.

En esta impresionante comparación, en la que se procesaron 4020 diagramas de Feynman, y cuya expresión analítica cuenta con 291425 líneas de texto, se muestra la poderosa herramienta que se ha construido. La concordancia con el programa *Black-Hat* es clara, y cuenta con 11 cifras significativas. Recordamos que el programa *Black-Hat* [10] no emplea diagramas de Feynman internamente, y por eso la corroboración de los cálculos es altamente no trivial.

CAPÍTULO 6

REDUCCIONES DE PASSARINO-VELTMAN Y AMPLITUDES DE UN LAZO

6.1. Más allá de las Amplitudes de Árbol. Cálculos de un lazo

Muchos procesos que se estudian en colisionadores hadrónicos como el LHC requieren de una alta precisión teórica en los observables asociados para poder realizar comparaciones con los datos experimentales. Esto implica que el primer orden perturbativo, caracterizado por los diagramas de Feynman de árbol estudiados hasta este punto en este trabajo, no es suficiente. De esta manera, es necesario hacer cálculos de términos subsiguientes en la expansión perturbativa. Adicionar el segundo término de la serie implica calcular diagramas de Feynman de un lazo. Estos diagramas tienden a ser más complejos que los de árbol, debido en particular a la presencia de integrales sobre el momento indeterminado del diagrama.

En este capítulo se presentan las llamadas reducciones de Passarino-Veltman, las cuales permiten reducir todas las integrales (tensoriales) de los diagramas de un lazo, a una base de integrales (escalares) conocidos y tabulados. Al aplicar esta reducción, entonces las expresiones de los diagramas de un lazo terminan teniendo una estructura

parecida a la de un diagrama de árbol, y por ello se puede potencialmente procesar esta con los códigos hasta aquí desarrollado. Se tendría así una herramienta entonces que permite el cálculo automatizado de diagramas de Feynman de un lazo.

Se puede observar en la Figura 3.1 que en el caso de topologías de un lazo, existe un momento indeterminado en el cual las reglas de Feynman dicen que para dicho caso con m estados salientes debe hacer una integral sobre los momentos indeterminados.

Existen *integrales escalares* que son funciones escalares de los momentos externos, como por ejemplo: $\int \frac{d^4t}{(2\pi)^4} \frac{1}{t^2} \frac{1}{(t+p)^2} = I(p)$. También se encuentran *integrales tensoriales* que se caracterizan por tener índices de Lorentz *indeterminados* y m denominadores. En su forma más general:

$$I^{\mu_1 \dots \mu_n}(q_1, \dots, q_{m-1}, m_0, \dots, m_{m-1}) = \int \frac{d^d t}{(2\pi)^d} \frac{t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}}{[t^2 - m_0^2][(t + q_1)^2 - m_1^2] \dots [(t + q_1 + \dots + q_{m-1})^2 - m_{m-1}^2]}, \quad (6.1)$$

en donde t representa el momento indeterminado del lazo, $d = 4 - 2\varepsilon$ la dimensión del momento de integración, los índices libres son los índices asociados a cada momento del lazo que aparece en el numerador, y q_i representa los momentos externos.

Para una topología conocida como *burbuja* solo hay 2 términos en el denominador y esto se representa por una letra B , (por simplicidad con las masas iguales a 0) se tiene:

$$B^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \frac{t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}}{t^2(t+p)^2}. \quad (6.2)$$

Para una topología conocida como *triángulo* hay 3 términos en el denominador y esto se representa por una letra C :

$$C^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \frac{t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}}{t^2(t+p_1)^2(t+p_1+p_2)^2}. \quad (6.3)$$

Para una topología conocida como *caja* hay 4 términos en el denominador y esto se representa por una letra D :

$$D^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \frac{t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}}{t^2(t+p_1)^2(t+p_1+p_2)^2(t+p_1+p_2+p_3)^2}. \quad (6.4)$$

Y ciertamente, se puede también pensar en una integral con un solo denominador, con una topología que podríamos llamar tipo *medalla*:

$$A^{\mu_1 \dots \mu_n} = \int \frac{d^4 t}{(2\pi)^4} \frac{t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}}{t^2} . \quad (6.5)$$

Cada una de las topologías anteriores, se pueden observar en la Figura (6.1).

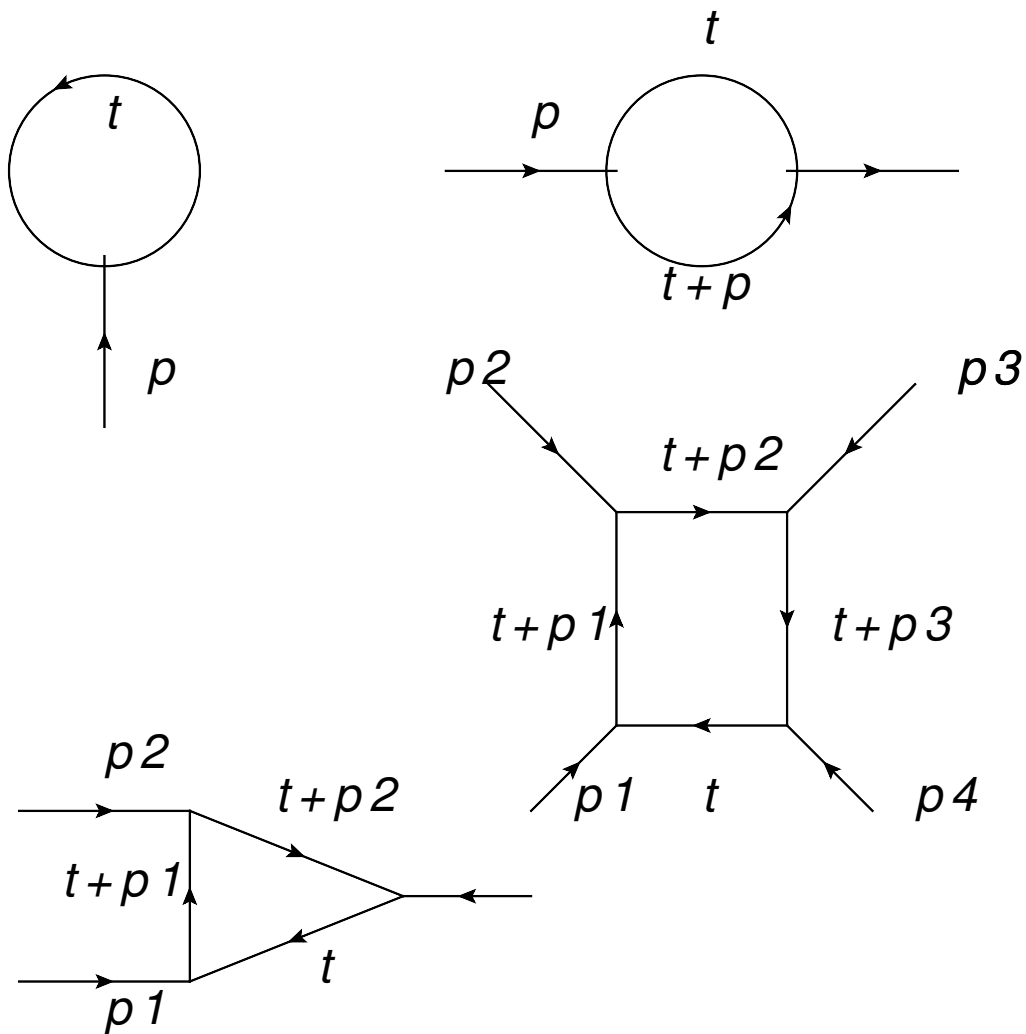


Figura 6.1: Topologías en la reducción de integrales tensoriales

6.2. Reducción de Passarino-Veltman

El proceso de Passarino-Veltman es un algoritmo sistemático para la reducción de estas integrales tensoriales a integrales escalares, estas últimas ya se encuentran tabuladas. Para mayor referencia mirar [11] y [13].

El algoritmo sigue los siguientes pasos:

1. Se nota que los $I^{\mu_1 \dots \mu_n}$ son tensores simétricos de Lorentz.
2. A partir de los momentos externos y del tensor $g^{\mu\nu}$ se proponen tensores simétricos de Lorentz para descomponer las integrales.
3. Contrayendo las integrales con momentos y el $g^{\mu\nu}$ se reescriben los invariantes en términos de los propagadores inversos (inversos de los términos en el denominador de las integrales).
4. Se hacen cambios de variables convenientes para reexpresar las integrales resultantes en términos integrales escalares.
5. Al final, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para todos los coeficientes de Passarino-Veltman.

Como ejemplo, se escriben los tensores simétricos de Lorentz que descomponen las integrales para diferente número de patas externas.

En el caso de las integrales de 2 puntos (topología de burbuja):

$$B1^\mu(q_1, m_0, m_1) = B^{(1)} q_1^\mu, \quad (6.6)$$

$$B2^{\mu\nu}(q_1, m_0, m_1) = B^{(00)} g^{\mu\nu} + B^{(11)} q_1^\mu q_1^\nu. \quad (6.7)$$

En el caso de integrales de 3 puntos:

$$C1^\mu(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) = C^{(1)} q_1^\mu + C^{(2)} q_2^\mu, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 C2^{\mu\nu}(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) = & C^{(00)}g^{\mu\nu} + C^{(11)}q_1^\mu q_1^\nu + \\
 & C^{(22)}q_2^\mu q_2^\nu + \\
 & C^{(12)}(q_1^\mu q_2^\nu + q_1^\nu q_2^\mu) ,
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) = & \\
 & C^{(001)}(g^{\mu\nu}q_1^\rho + g^{\rho\mu}q_1^\nu + g^{\nu\rho}q_1^\mu) + \\
 & C^{(002)}(g^{\mu\nu}q_2^\rho + g^{\rho\mu}q_2^\nu + g^{\nu\rho}q_2^\mu) + \\
 & C^{(111)}q_1^\rho q_1^\nu q_1^\mu + \\
 & C^{(222)}q_2^\rho q_2^\nu q_2^\mu + \\
 & C^{(112)}(q_1^\mu q_1^\nu q_2^\rho + q_1^\rho q_1^\mu q_2^\nu + q_1^\nu q_1^\rho q_2^\mu) + \\
 & C^{(221)}(q_2^\mu q_2^\nu q_1^\rho + q_2^\rho q_2^\mu q_1^\nu + q_2^\nu q_2^\rho q_1^\mu) .
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

6.2.1. Ejemplo: reducción de la integral tensorial C3 usando la técnica de PV

Una integral tensorial que tiene 3 términos en el numerador y es de rango 3, se conoce como $C3^{\mu\nu\rho}$ y es de la forma:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) = & \\
 \int \frac{d^d t}{(2\pi)^d} \frac{t^\mu t^\nu t^\rho}{[t^2 - m_0^2][(t + q_1)^2 - m_1^2][(t + q_1 + q_2)^2 - m_2^2]} . & \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

A partir de la Ec. (6.10) se encuentra que se puede contraer a $C3^{\mu\nu\rho}$ tanto con $q_{1\rho}$, $q_{1\nu}$ y $q_{1\mu}$. Las expresiones resultantes al contraer con los momentos $q_{i\rho}$ ($i = 1, 2$), empleando la Ec. (6.10) se muestran a continuación.

Contrayendo con $q_{1\rho}$:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}q_{1\rho} = & \\
 & C^{(001)}(g^{\mu\nu}q_1^2 + 2q_1^\mu q_1^\nu) + \\
 & C^{(002)}(g^{\mu\nu}q_1q_2 + q_1^\mu q_2^\nu + q_1^\nu q_2^\mu) + \\
 & C^{(111)}q_1^\mu q_1^\nu q_1^2 + \\
 & C^{(222)}q_2^\mu q_2^\nu (q_1 \cdot q_2) + \\
 & C^{(112)}(q_1^\mu q_1^\nu (q_1 \cdot q_2) + q_1^\mu q_2^\nu q_1^2 + q_1^\nu q_2^\mu q_1^2) + \\
 & C^{(221)}(q_2^\mu q_2^\nu q_1^2 + q_2^\mu q_1^\nu (q_1 \cdot q_2) + q_2^\nu q_1^\mu (q_1 \cdot q_2)) .
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Contrayendo con $q_{2\rho}$:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}q_{2\rho} = & \\
 & C^{(001)}(g^{\mu\nu}(q_1 \cdot q_2) + q_1^\nu q_2^\mu + q_1^\mu q_2^\nu) + \\
 & C^{(002)}(g^{\mu\nu}q_2^2 + 2q_2^\mu q_2^\nu) + \\
 & C^{(111)}q_1^\mu q_1^\nu (q_1 \cdot q_2) + \\
 & C^{(222)}q_2^\mu q_2^\nu q_2^2 + \\
 & C^{(112)}(q_1^\mu q_1^\nu q_2^2 + q_1^\mu q_2^\nu (q_1 \cdot q_2) + q_1^\nu q_2^\mu (q_1 \cdot q_2)) + \\
 & C^{(221)}(q_2^\mu q_2^\nu (q_1 \cdot q_2) + q_2^\mu q_1^\nu q_2^2 + q_2^\nu q_1^\mu q_2^2) .
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Contrayendo con la métrica:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}g_{\mu\nu} = & \\
 & C^{(001)}(dq_1^\rho + 2q_1^\rho) + \\
 & C^{(002)}(dq_2^\rho + q_2^\rho) + \\
 & C^{(111)}q_1^\rho q_1^2 + \\
 & C^{(222)}q_2^\rho q_2^2 + \\
 & C^{(112)}(q_2^\rho q_1^2 + 2q_1^\rho (q_1 \cdot q_2)) + \\
 & C^{(221)}(q_1^\rho q_2^2 + 2q_2^\rho (q_1 \cdot q_2)) .
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

donde $d = 4 - 2\varepsilon$.

Por otro lado, las expresiones tensoriales que quedan al contraer el lado de la integral en Ec. (6.11) son las que se presentan a continuación.

Contrayendo con $q_{1\rho}$:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}q_{1\rho} = & \\
 -\frac{1}{2}B2^{\mu\nu}(q_2, m_1, m_2) + \frac{1}{2}q_1^\mu B0(q_2, m_1, m_2) + & \\
 \frac{1}{2}B2^{\mu\nu}(q_1 + q_2, m_0, m_2) - & \\
 \frac{1}{2}[q_1^2 - m_1^2 + m_0^2]C2^{\mu\nu}(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) . &
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Contrayendo con $q_{2\rho}$:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}q_{2\rho} = & \\
 \frac{1}{2}B2^{\mu\nu}(q_1, m_0, m_1) - \frac{1}{2}B2^{\mu\nu}(q_1 + q_2, m_0, m_2) & \\
 -\frac{1}{2}[q_2^2 + 2q_1q_2 + m_1^2 - m_2^2]C2^{\mu\nu}(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) . &
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Contrayendo con la métrica:

$$\begin{aligned}
 C3^{\mu\nu\rho}g_{\mu\nu} = & \\
 B1^\rho(q_2, m_1, m_2) + m_0^2C^\rho(q_1, q_2, m_0, m_1, m_2) . &
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Al comparar la Ec. (6.12) con Ec. (6.15) y Ec. (6.13) con Ec. (6.16), y expandir $B2$ junto con $C2$ en términos de las Ec. (6.7) y Ec. (6.9) se puede reescribir las ecuaciones como combinaciones lineales de los momentos q_1 y q_2 . Luego de realizar las comparaciones, se puede escribir un sistema matricial de la forma $AX = B$ donde X sería la matriz 2×4 que contiene todos los coeficientes de Passarino-Veltman que se desean determinar. Entonces, el problema se transforma en resolver un sistema de ecuaciones lineales por métodos estándares.

6.3. Automatización de Passarino-Veltman en Mathematica

El cálculo de uno o más lazos para procesar amplitudes es como se dijo, necesario para trabajar en órdenes superiores. En este contexto es útil y rápido tener un cálculo automatizado usando una computadora para resolver estas contribuciones en los Diagramas de Feynman y reducirlas a árboles. Por tanto, también en el contexto de este trabajo se buscó escribir un código en Mathematica para permitir la posibilidad de encontrar los coeficientes de Passarino-Veltman, y por tanto, calcular diagramas de Feynman de un lazo. Se presentan a continuación partes del código desarrollados en el lenguaje de Mathematica.

Listing 6.1: Automatización de Cálculos de 1-Lazo

```

1 (*Reducción C1*)
2 (* Definiciones *)
3 Vec[q1, q1] = Dot[q1, q1]
4 Vec[q2, q2] = Dot[q2, q2]
5 Vec[q1, q2] = Dot[q1, q2]
6 (* Simplificación de la notación*)
7 m11 = m1*m1
8 m22 = m2*m2
9 m00 = m0*m0
10 (*Al aplicar el método de reducción de Passarino-Veltman, se llega como se explicó a un sistema
de ecuaciones sencillo, el cual, se resuelve con Mathematica para usar los resultados*)
11 Masasdiferentesa0 = Solve[{Vec[q1, q1]*C1 + Vec[q1, q2]*C2 == (1/2)*(B0[q1 + q2, m0, m2] - B0
[q2, m1, m2] - (Vec[q1, q1] - m11 + m00)*C0[q1, q2, m0, m1, m2]), Vec[q1, q2]*C1 + Vec[q2,
q2]*C2 == (1/2)*(-B0[q1 + q2, m0, m2] + B0[q1, m0, m1] - (Vec[q2, q2] + Vec[q1, q2] +
m11 - m22)*C0[q1, q2, m0, m1, m2])}, {C1, C2}]
12 (*Finalmente utilizando el resultado anterior*)
13
14 C1[q1_, q2_, m0_, m1_, m2_] := If[m0 == 0 && m1 == 0 && m2 == 0, Print[C1, "=", -(1/((
Vec[q1, q2])^2 - Vec[q1, q1] Vec[q2, q2])) (-1/2) (B0[q2] - B0[q1 + q2] + C0[q1, q2] Vec[q1,
q1]) Vec[q2, q2] + 1/2 Vec[q1, q2] (-B0[q1] + B0[q1 + q2] + C0[q1, q2] (Vec[q1, q2] + Vec[q2,
q2])))] &&

```

```

15 Print[C2, "=", 1/(2 ((Vec[q1, q2])^2 - Vec[q1, q1] Vec[q2, q2])) (-B0[q1] ec[q1, q1] + B0[q1 +
    q2] Vec[q1, q1] - B0[q2] Vec[q1, q2] + B0[q1 + q2] q1.q2 + C0[q1, q2] Vec[q1, q1] Vec[q2, q2])
  ], Print[C1, "=", -(1/((q1.q2)^2 - q1.q1 q2.q2)) (-1/2) (B0[q2, m1, m2] - B0[q1 + q2, m0,
    m2] + C0[q1, q2, m0, m1, m2] (m0^2 - m1^2 + q1.q1)) q2.q2 + 1/2 q1.q2 (-B0[q1, m0, m1]
    + B0[q1 + q2, m0, m2] + C0[q1, q2, m0, m1, m2] (m1^2 - m2^2 + q1.q2 + q2.q2)))] &&Print
[C2, "=", 1/(2 ((q1.q2)^2 - q1.q1 q2.q2)) (-B0[q1, m0, m1] q1.q1 + B0[q1 + q2, m0, m2] q1.
    q1 + m1^2 C0[q1, q2, m0, m1, m2] q1.q1 - m2^2 C0[q1, q2, m0, m1, m2] q1.q1 - B0[q2, m1,
    m2] q1.q2 + B0[q1 + q2, m0, m2] q1.q2 - m0^2 C0[q1, q2, m0, m1, m2] q1.q2 + m1^2 C0[q1,
    q2, m0, m1, m2] q1.q2 + C0[q1, q2, m0, m1, m2] q1.q1 q2.q2)]

```

16

17 (*Reducción B2 con masas iguales a 0*)

```

18 B2[q1_, m0_, m1_] := If[m0 == 0 && m1 == 0, Print[B11, "=", (1/3) B0[q1]] && Print[B00, "="
  , (A0/d) - (B0[q1]/12)*(q1)^2]

```

19

20 (*Reducción B1*)

```

21 B0[q1_, m0_, m1_] := If[m0 == 0 && m1 == 0, (-1/2) B0[q1], (1/2)*(1/((q1)^2))*((A0[m0] -
  A0[m1]) - (((q1^2) - (m0^2) + (m1^2))*B0[q1, m0, m1])]

```

El hecho de haber comenzado a desarrollar parte código anterior para las reducciones de $B1$, $B2$ y $C1$, constituye el primer paso de un proyecto a largo plazo luego de la presentación de este trabajo. Se planea de hecho extender lo anterior para las reducciones de $C2$, $C3$ y de funciones tipo D de Passarino-Veltman, para elaborar un paquete en Mathematica que pueda ser utilizado en procesos generales con cuatro partículas externas a nivel de lazo.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIÓN

En este trabajo se presentó un algoritmo y se desarrolló un código computacional para el cómputo de amplitudes a nivel de árbol en teorías cuánticas de campo de calibre, empleando diagramas de Feynman. Se mostró la capacidad de la implementación al calcular amplitudes para procesos 1) de puros gluones con entre 4 y 7 partículas; 2) una línea fermiónica y hasta 5 gluones y 3) dos líneas fermiónicas distintas y hasta 4 gluones. Se compararon resultados obtenidos en el espacio de fase usando las librerías numéricas para cómputo de amplitudes en QCD llamadas BlackHat.

Se empleó el código FeynArts como entrada inicial de las librerías desarrolladas. FeynArts genera de manera automatizada diagramas de Feynman para procesos en el modelo estándar de partículas, y produce también las expresiones analíticas asociadas a los mismos. Con la técnica de productos espinoriales se procesaron dichas expresiones.

Tal como se discutió, las expresiones que se obtienen crecen rápidamente como función del número de partículas en el proceso estudiado. En los casos maximales de hecho las expresiones son demasiado complejas para la realización de estudios fenomenológicos de relevancia para el LHC empleando computadores de escritorio comunes.

Se espera generar en el futuro algoritmos de reducción de estas expresiones empleando relaciones como la identidad Schouten que se encuentra en [4]. Esto podría por ejemplo, en casos sencillos como las amplitudes MHV, dejar de manera más explícita expresiones compactas como las de Parke-Taylor [12].

Tal como se discute en el Capítulo 6, se espera que los mismos códigos desarrollados en este trabajo se puedan extender a diagramas de Feynman de un lazo. El paso principal propuesto es la reducción de Passarino-Veltman de los integrales tensoriales presente a integrales escalares con estructuras tensoriales invariantes de Lorentz. Una vez hecho esto, las expresiones obtenidas se pueden procesar de manera similar a los diagramas de árbol, con las herramientas desarrolladas en este trabajo. Este y otros tópicos se dejan para futuro trabajo.

APÉNDICE A

USO DE FEYNARTS PARA LA DISPERSIÓN ELECTRÓN-POSITRÓN Y PROCESOS DE 4 GLUONES

En este Apéndice se explica con dos ejemplos parte del uso del paquete FeynArts para Mathematica.

FeynArts es un software libre que visualiza y genera tanto Diagramas de Feynman como sus amplitudes, fue desarrollado en los años 90 por Hagen Eck, Sepp Kueblbeck, y Thomas Hahn.

A.1. Uso de FeynArts en la dispersión electrón-positrón

Para el caso de la aniquilación electrón-positrón donde se producen dos muones, que se utilizó como ejemplo para explicar el uso de las reglas de Feynman en el Capítulo 3, también se realizó con FeynArts. Primero se inicializó el paquete de FeynArts y luego se le pidió que creará la topología deseada.

Para FeynArts una topología no es más que un conjunto de líneas conectadas por otro conjunto de puntos(vértices). Todas éstas conectadas para al menos un propaga-

dor. Para generarlas se utiliza el comando **CreateTopologies**[*l*,*i*->*n*] donde *l* indica el número de lazos, *i* el número de patas de entrada y *n* de salida.

Para colocar los campos se utiliza *InsertFields*[*t*, {*i*₁, *i*₂, ...} -> {*o*₁, *o*₂, ...}] que como se dijo, inserta campos dentro de *TopologyList*, donde los campos entrantes son de la forma *i*₁, *i*₂, ..., *i*_n y los de salida de la forma *o*₁, *o*₂, ..., *o*_n.

Especificándole a FeynArts que utilizará solamente los campos de QED, con *QEDOnly* y utilizando su notación (*F*[2, {1}] para el electrón y *F*[2, {2}] para el muón) se genera el diagrama del proceso.

Listing A.1: Cálculo de la Amplitud usando FeynArts la aniquilación electrón-positrón

```

1 << FeynArts'
2 Topologia = CreateTopologies[0, 2 -> 2]
3 Proceso = InsertFields [Topologia, {F[2, {1}], -F[2, {1}]} -> {F[2, {2}], -F[2, {2}]},
      InsertionLevel -> {Classes}, QEDOnly]
4 Paint[%]

```

Finalmente, usando *CreateFeynAmp*[Proceso] se generó la amplitud.

A.2. Uso de FeynArts para un proceso con 4 gluones

Para el caso de 4 gluones sin usar ordenamiento de color ni productos de helicidad se muestran los diagramas generados usando *CreateTopologies*

Listing A.2: FeynArts en el caso de 4 Gluones

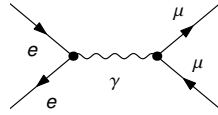
```

1 << FeynArts'
2 Topologias = CreateTopologies[0, 2 -> 2]
3 Paint[%]

```

Luego se insertaron los campos utilizando el modelo SMQCD en FeynArts, nótese la notación para gluones:

$$e e \rightarrow \mu \mu$$



T1 C1 N1

Figura A.1: Aniquilación electrón-positrón

```
FeynAmpList [
  Process -> {{F[2, {1}], p1, ME, {-Charge, LeptonNumber}}, {-F[2, {1}], p2, ME,
    {Charge, -LeptonNumber}} -> {{F[2, {2}], k1, MM, {-Charge, LeptonNumber}},
    {-F[2, {2}], k2, MM, {Charge, -LeptonNumber}}}, Model -> {SM},
  GenericModel -> {Lorentz}, AmplitudeLevel -> {Classes},
  ExcludeParticles -> {S, -F[1], F[1], -F[1, {1}], F[1, {1}], -F[1, {2}],
    F[1, {2}], -F[1, {3}], F[1, {3}], Mix[S, V], S[1], S[2], -S[3], S[3],
    -U[2], U[2], -U[3], U[3], -U[4], U[4], V[2], -V[3], V[3], Mix[S, V][2],
    2 Mix[S, V][2], -2 Mix[S, V][3], -Mix[S, V][3], Mix[S, V][3], 2 Mix[S, V][3]},
  ExcludeFieldPoints -> {}, LastSelections -> {}] [
  FeynAmp [GraphID[Topology == 1, Generic == 1, Classes == 1, Number == 1],
  Integral [], v[p2, ME].(i EL ga[Lor1].om_ + i EL ga[Lor1].om_).u[p1, ME]
  u[k1, MM].(i EL ga[Lor2].om_ + i EL ga[Lor2].om_).v[k2, MM] g[Lor1, Lor2]  $\frac{1}{(k1 + k2)^2}$ ]]]
```

Figura A.2: Amplitud generada usando FeynArts para la aniquilación electrón-positrón

2 → 2

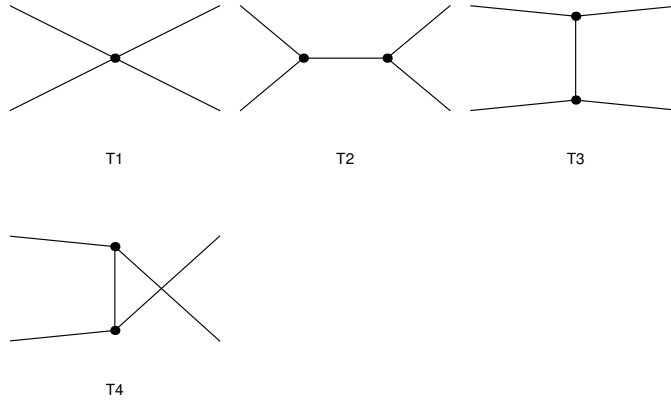


Figura A.3: Topologías

Listing A.3: Insertar Campo en la topología generada

```

1 ProcesosGluones =
2   InsertFields [Topologias, {V[5, {m}], V[5, {r}]} -> {V[5, {n}], V[5, {s}]},
3   InsertionLevel -> {Classes}, Model -> SMQCD]
4   Paint[%]

```

Ahora, gracias al uso de `Paint[]` para generar los diagramas, haciendo referencia al diagrama que queremos que se observa en la Figura A.4 se puede extraer uno de los diagramas y encontrar la amplitud.

Listing A.4: Extracción de Diagrama para el Cálculo de la amplitud

```

1 Verticede4 = DiagramExtract[ProcesosGluones, 1]
2 Paint[Verticede4]
3 CreateFeynAmp[Verticede4]

```

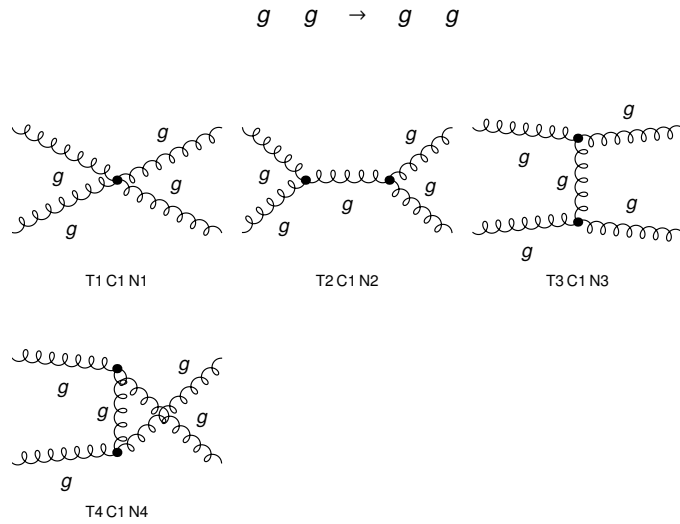
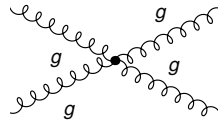


Figura A.4: Diagramas para 4 gluones generados con FeynArts

Tanto el diagrama que se extrae como su amplitud se pueden observar en las Figuras A.5 y A.6.

$$g \quad g \quad \rightarrow \quad g \quad g$$



T1 C1 N1

Figura A.5: Diagrama generado con FeynArts para 4 gluones sin hacer sustituciones

```
FeynAmpList[Process →
  {{V[5, {m}], p1, 0, {√3 ColorCharge}}, {V[5, {r}], p2, 0, {√3 ColorCharge}}} →
  {{V[5, {n}], k1, 0, {√3 ColorCharge}}, {V[5, {s}], k2, 0, {√3 ColorCharge}}},
  Model → {SMQCD}, GenericModel → {Lorentz}, AmplitudeLevel → {Classes},
  ExcludeParticles → {}, ExcludeFieldPoints → {}, LastSelections → {}][
FeynAmp[GraphID[Topology = 1, Generic = 1, Classes = 1, Number = 1],
Integral[], -i ep[V[5, {m}], p1, Lor1] ep[V[5, {r}], p2, Lor2]
(-i GS2 g[Lor1, Lor4] g[Lor2, Lor3] (-SUNF[m, n, r, s] - SUNF[m, r, n, s]) -
i GS2 g[Lor1, Lor2] g[Lor3, Lor4] (SUNF[m, n, r, s] - SUNF[m, s, n, r]) -
i GS2 g[Lor1, Lor3] g[Lor2, Lor4] (SUNF[m, r, n, s] + SUNF[m, s, n, r]))
ep*[V[5, {n}], k1, Lor3] ep*[V[5, {s}], k2, Lor4]]]
```

Figura A.6: Amplitud para un solo diagrama de 4 gluones con FeynArts

APÉNDICE B

AUTOMATIZACIÓN DE ÁRBOLES: FUNCIONES

B.1. Definición de ColorSimplify

Listing B.1: Definición de ColorSimplify

```

1 ColorSimplify [expr_] := Block[{color}, color = expr;
2   color = color /. IndexDelta[a_, b_] -> TrC[a, b];(*Para la notación de FeynArts*)
3   color = color /. fC[a_, b_, c_] -> -I/Sqrt[2] (TrC[a, b, c] - TrC[b, a, c]);
4   color = Expand[color];
5   color = color //. {TrC[w___, a_]^2 -> (TrC[w, w] - 1/N*TrC[w]*TrC[w])};
6   color = Expand[color];
7   color = color //. {TrC[w___, a_, x___]*TrC[y___, a_, z___] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
8     x, w]*TrC[z, y]),
9     TrC[x___, a_, y___, a_, z___] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
10  color = Expand[color];
11  color = color //. {TrC[w___, a_, x___]*TrC[y___, a_, z___] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
12    x, w]*TrC[z, y]),
13    TrC[x___, a_, y___, a_, z___] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
14  color = Expand[color];
15  color = color //. {TrC[w___, a_, x___]*TrC[y___, a_, z___] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
16    x, w]*TrC[z, y]),
17    TrC[x___, a_, y___, a_, z___] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};

```

```

15 color = Expand[color];
16 color = color //. {TrC[w____, a_, x____]*TrC[y____, a_, z____] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
    x, w]*TrC[z, y]),
17     TrC[x____, a_, y____, a_, z____] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
18 color = Expand[color];
19 color = color //. {TrC[w____, a_, x____]*TrC[y____, a_, z____] -> (TrC[x, w, z, y] - 1/N*TrC[
    x, w]*TrC[z, y]),
20     TrC[x____, a_, y____, a_, z____] -> (TrC[x, z]*TrC[y] - 1/N*TrC[x, y, z])};
21 color = Expand[color];
22 color = color //. {TrC[w____, a_]^2 -> (TrC[w, w] - 1/N*TrC[w]*TrC[w])};
23 color = Expand[color];
24 color = color /. {TrC[a_, a_] -> (N^2 - 1), TrC[] -> N};
25 color ]

```

B.2. Definición de AtreeColorManagement

Listing B.2: AtreeColorManagement

```

1 AtreeColorManagement[p1_,Diags_]:=Module[{DiagExp2,npoint,scount,colorpart,particles,eplist ,
    emlist ,enumber,lg1,lg2 , lg3 , stglhs , stgrhs },
2   DiagExp2=Diags;
3   npoint= Length[p1];
4   scount=Length[Position[p1,sp]];
5   eplist =Position[p1,ep];
6   eplist =Map[Extract[Take[# , 1], 1] &, eplist];
7   emlist =Position[p1,em];
8   emlist =Map[Extract[Take[# , 1], 1] &, emlist];
9   enumber=Length[eplist]+Length[emlist];
10  particles = Apply[p1toFA,#] & /@ p1;
11  particles = Apply[First, {#}] & /@ particles;
12  colorpart ={};
13  Do[If[! MemberQ[Union[eplist,emlist],ii ], colorpart =Join[colorpart ,{ ii }],{ ii ,1, npoint }];
14  If [scount===1,DiagExp2= DiagExp2 //. SUNT[c1_,c2_,c3_,c4_] -> - SUNF[c1,c2,c3,c4]];
15  If [npoint>7, DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_]

```

```

16  SUNF[Glu5_, Glu6_, Glu7_,Glu8_] SUNF[Glu9_, Glu10_, Glu11_, Glu12_] ->
17  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4]\
18  SUNF[Glu5, Glu6, lg2] SUNF[lg2, Glu7, Glu8]\
19  SUNF[Glu9, Glu10, lg3] SUNF[lg3, Glu11, Glu12]];
20  If [npoint>5, DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_]\<
21  SUNF[Glu5_, Glu6_, Glu7_,Glu8_] ->
22  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4]\
23  SUNF[Glu5, Glu6, lg2] SUNF[lg2, Glu7, Glu8]];
24  DiagExp2= Expand[DiagExp2] //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_, Glu4_] ->
25  SUNF[Glu1, Glu2, lg1] SUNF[lg1, Glu3, Glu4];
26  DiagExp2= DiagExp2 //. SUNF[Glu1_, Glu2_, Glu3_] -> fC[Glu1, Glu2, Glu3];
27  DiagExp2= DiagExp2 //. NonCommutative[q1____,ChiralityProjector[Ind_]]->1/2
    NonCommutative[q1];
28  DiagExp2= DiagExp2 //. -I GS SUNT[q3____] -> SUNT[-I GS,q3];
29  DiagExp2= DiagExp2 //. -I 2/3 EL -> SUNT[I ELdummy];
30  DiagExp2= DiagExp2 //. I EL -> SUNT[I ELdummy];
31  DiagExp2= DiagExp2 //. NonCommutative[q1____,Times[SUNT[q2____],q3____],q4____]->
    SUNT[q2] NoCommutative[q1,q3,q4];
32  DiagExp2= DiagExp2 //. FermionChain[q1____,Times[SUNT[q2____],q3____],q4____]->SUNT[q2
    ] FermionChain[q1,q3,q4];
33  DiagExp2= DiagExp2 //. SUNT[-I GS,q3____] -> -I GS SUNT[q3];
34  DiagExp2= DiagExp2 //. SUNT[I ELdummy] -> I/Sqrt[2]; (* coupling EL set to 1 and include
    normalization factor for
35  going from QCD to QED amplitudes due to Tr[Ta,Tb]=Delta_ab *)
36  If [! FreeQ[p1,qp],DiagExp2= DiagExp2 //. MU->0];
37  If [! FreeQ[p1,Qp],DiagExp2= DiagExp2 //. MC->0];
38  If [! FreeQ[p1,ep],DiagExp2= DiagExp2 //. ME->0];
39  DiagExp2= DiagExp2 //. SUNT[Glu1_, Ind1_, Ind2_] -> I fC[Ind1, Glu1, Ind2];
40  DiagExp2= Expand[DiagExp2] /. GS->1 /. SumOver[y____,w____] -> 1;
41  DiagExp2= Map[ColorSimplify, DiagExp2]; (* creating expression in term of color traces TrC *)
42  stglhs={};
43  Do[stglhs=Join[stglhs,{ToExpression["g"<>ToString[ii]<>"_"]}],{ii,1,npoint-enumber-1}];
44  stgrhs=Apply[TrC,Join[{ToExpression["c"<>ToString[p1[[colorpart [[1]]][[2]]]], Table[
    ToExpression["g"<>ToString[ii]],{ii,1,npoint-enumber-1}]]];

```

```

45 Do[DiagExp2 = DiagExp2 //. Apply[TrC, RotateLeft[Join[{ToExpression["c"<>ToString[p1[[
    colorpart[[1]]][[2]]]}, stglhs ], ii ] -> stgrhs; \
46 , { ii , 1, npoint - enumber - 1 }];
47 stgrhs = Apply[TrC, Table[ToExpression["c"<>ToString[p1[[colorpart[[ii ]]][[2]]], { ii , 1, npoint -
    enumber }]];
48 DiagExp2 = Map[Coefficient[#, stgrhs] &, DiagExp2];
49 DiagExp2 ]

```

B.3. Definición de AtreeKinematics

Listing B.3: AtreeKinematics

```

1 AtreeKinematics[p1_, Diags_] := Module[{DiagExp3, npoint, particles, hlocal, hmlist, hplist, hmfirsr,
    hpfirsr },
2 DiagExp3 = Diags;
3 npoint = Length[p1];
4 particles = Apply[p1toFA, #] & /@ p1;
5 hplist = Position[particles, hp];
6 hmlist = Position[particles, hm];
7 If[Length[hmlist] == 0, hmfirsr[p_] = npoint - Floor[p/npoint], hmfirsr[p_] = hmlist [[1]][[1]];
8 If[Length[hplist] == 0, hpfirsr[p_] = npoint - Floor[p/npoint], hpfirsr[p_] = hplist [[1]][[1]];
9 (* Contracción del tensor métrico *)
10 DiagExp3 = DiagExp3 //. {MetricTensor[Lor_, Lor1_] MetricTensor[Lor2_, Lor_] -> MetricTensor[
    Lor1, Lor2],
11 MetricTensor[Lor_, Lor1_] MetricTensor[Lor_, Lor2_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
12 MetricTensor[Lor1_, Lor_] MetricTensor[Lor2_, Lor_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
13 MetricTensor[Lor1_, Lor_] MetricTensor[Lor_, Lor2_] -> MetricTensor[Lor1, Lor2],
14 FourVector[C____, Lor_] MetricTensor[Lor_, Lor1_] -> FourVector[C, Lor1],
15 FourVector[C____, Lor_] MetricTensor[Lor1_, Lor_] -> FourVector[C, Lor1]};
16 (* Asignación de los vectores de polarización *)
17 Do[hlocal = particles [[ ii ]][[2]];
18 If[p1 [[ ii ]][[1]] == m || p1 [[ ii ]][[1]] == p, (* gluons *)
19 DiagExp3 = DiagExp3 /. Conjugate[PolarizationVector][V[5, {ToExpression["c"<>ToString[p1
    [[ii ]][[2]]}]]],

```



```

20     FourMomentum[Out_, Ind_], Index[Lorentz, Lor1_] ] :> If[hlocal===hm,
21     Spba[eta[ ii ], gmu[Index[Lorentz, Lor1 ]], p1[[ ii ]][[2]]/ Sqrt[2]/Spbb[eta[ ii ], p1[[ ii
        ]][[2]],
22     -Spab[eta[ii ], gmu[Index[Lorentz, Lor1 ]], p1[[ ii ]][[2]]/ Sqrt[2]/Spaa[eta[ ii ], p1[[ ii
        ]][[2]]];
23     (* Se escogen los momentos de referencia*)
24     DiagExp3= DiagExp3 //. eta[Ind_] :>If[ particles [[ Ind]][[2]]===hp,Sp[p1[[ hmfirsr [Ind
        ]][[2]],
25     Sp[p1[[ hpfirsr [Ind ]][[2]]];    ];
26     If[p1[[ ii ]][[1]]===qp || p1[[ ii ]][[1]]===Qp ||
27     p1[[ ii ]][[1]]===qm || p1[[ ii ]][[1]]===Qm || (* massless quarks *)
28     p1[[ ii ]][[1]]===ep || p1[[ ii ]][[1]]===em, (* electrons (massless) *)
29     DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSpinor[FourMomentum[Out_,ii],0]]->spinor[
        p1[[ii]][[2]],hlocal];
30     DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSpinor[-FourMomentum[Out_,ii],0]]->spinor[
        p1[[ii]][[2]],hlocal];
31     ];
32     ,{ ii ,1, npoint }];
33     (* Trabajando con las líneas fermionicas *)
34     DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracMatrix[Index[Lorentz, Lor1_]]->gmu[Index[
        Lorentz,Lor1]];
35     DiagExp3= DiagExp3 //. NonCommutative[DiracSlash[q____]]:>Apply[momslash,q];
36     DiagExp3= DiagExp3 //. {momslash[CC____ FourMomentum[Out_,Ind1_],q1____]:>
37     If[Length[List[q1]]>0,CC momslash[p1[[Ind1 ]][[2]] + momslash[q1],CC momslash[p1[[Ind1
        ]][[2]]], momslash[FourMomentum[Out_,Ind1_],q1____]:>
38     If[Length[List[q1]]>0,momslash[p1[[Ind1 ]][[2]] + momslash[q1],momslash[p1[[Ind1 ]][[2]]]];
39     DiagExp3= DiagExp3 //. FermionChain[q____ ] :> If[EvenQ[Length[List[q]], spaa[q], spaabb[q]];
40     DiagExp3= DiagExp3 //. {spaa[spinor[q1_,hm],q2____]->Spaa[Sp[q1],q2],spaa[spinor[q1_,hp],
        q2____]->Spbb[Sp[q1],q2]};
41     DiagExp3= DiagExp3 //. {spaabb[spinor[q1_,hm],q2____]->Spab[Sp[q1],q2],spaabb[spinor[q1_,hp
        ],q2____]->Spba[Sp[q1],q2]};
42     DiagExp3= DiagExp3 //. {spinor[q1_,h_] ->Sp[q1],momslash[q1_] ->Sp[q1]};
43     (* Contracción de momentos*)
44     DiagExp3= ExpandAll[DiagExp3];

```

```

45 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor1_, Lor2_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
    gmu[Lor2],bb];
46 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor2_, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
    gmu[Lor2],bb];
47 DiagExp3= DiagExp3 //. FourVector[fourmom____, Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,gmu[Index[
    Lorentz, Lor1_]], bb____] :>
48 Sum[If[IntegerQ[First[Extract[fourmom, {ii}]]],
49 Take[Extract[fourmom, {ii}],{1,Length[Extract[fourmom, {ii}]]-1}] FF[aa,Sp[p1[[Last[Last[
    Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb],
50 FF[aa,Sp[p1[[Last[Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb]],
51 {ii, 1,Length[fourmom]}];
52 DiagExp3= ExpandAll[DiagExp3];
53 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor1_, Lor2_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
    gmu[Lor2],bb];
54 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Lor2_, Lor1_] FF_[aa____,gmu[Lor1_],bb____]->FF[aa,
    gmu[Lor2],bb];
55 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor1_],Index[Lorentz, Lor2_]] FF_[aa____,
    Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
56 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
57 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor2_],Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,
    Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
58 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
59 DiagExp3= DiagExp3 //. FourVector[fourmom____, Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,gmu[Index[
    Lorentz, Lor1_]], bb____] :>
60 Sum[If[IntegerQ[First[Extract[fourmom, {ii}]]],
61 Take[Extract[fourmom, {ii}],{1,Length[Extract[fourmom, {ii}]]-1}] FF[aa,Sp[p1[[Last[Last[
    Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb],
62 FF[aa,Sp[p1[[Last[Extract[fourmom, {ii}]]]]][[2]], bb]],
63 {ii, 1,Length[fourmom]}];
64 DiagExp3= Expand[DiagExp3] //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor1_],Index[Lorentz, Lor2_]] FF_[
    aa____,Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
65 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];
66 DiagExp3= DiagExp3 //. MetricTensor[Index[Lorentz, Lor2_],Index[Lorentz, Lor1_]] FF_[aa____,
    Index[Lorentz, Lor1_],bb____]->
67 FF[aa,Index[Lorentz, Lor2],bb];

```

```

68 (* Rearreglo de Fierz definido como sigue)
69 DiagExp3= DiagExp3 //. {Spab[q1____,gmu[Lor1_],q2____]:>If[OddQ[Length[List[q1]]],Spab[q1,
      abra,Lor1,bra,q2],
70   Spab[q1,bra,Lor1,abra,q2]],
71   Spaa[q1____,gmu[Lor1_],q2____]:>If[OddQ[Length[List[q1]]],Spaa[q1,abra,Lor1,bra,q2],
72     Spaa[q1,bra,Lor1,abra,q2]],
73   Spba[q1____,gmu[Lor1_],q2____]:>If[OddQ[Length[List[q1]]],Spba[q1,bra,Lor1,abra,q2],
74     Spba[q1,abra,Lor1,bra,q2]],
75   Spbb[q1____,gmu[Lor1_],q2____]:>If[OddQ[Length[List[q1]]],Spbb[q1,bra,Lor1,abra,q2],
76     Spbb[q1,abra,Lor1,bra,q2]]};
77 DiagExp3= Expand[DiagExp3] //. {
78   Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spab[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
79   2 Apply[Spaa,Join[List[aa],Reverse[List[cc]]]] Apply[Spbb,Join[Reverse[List[dd]],List[bb
      ]]],
80   Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spab[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
81   2 Apply[Spab,Join[List[aa],List[dd]]] Apply[Spab,Join[List[cc],List[bb]]],
82   Spba[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spba[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
83   2 Apply[Spbb,Join[List[aa],Reverse[List[cc]]]] Apply[Spaa,Join[Reverse[List[dd]],List[bb
      ]]],
84   Spba[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spba[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
85   2 Apply[Spba,Join[List[aa],List[dd]]] Apply[Spba,Join[List[cc],List[bb]]],
86   Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
87   -2 Apply[Spaa,Join[List[aa],Reverse[List[cc]]]] Apply[Spab,Join[Reverse[List[dd]],List[bb
      ]]],
88   Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
89   2 Apply[Spaa,Join[List[aa],List[dd]]] Apply[Spab,Join[List[cc],List[bb]]],
90   Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>

```

```

91     -2 Apply[Spab,Join[List [aa], Reverse[ List [cc ]]]] Apply[Spbb,Join[Reverse[ List [dd ]], List [bb
      ]]],
92 Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
93     2 Apply[Spab,Join[ List [aa], List [dd ]]] Apply[Spbb,Join[ List [cc], List [bb ]]],
94 Spaa[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
95     -2 Apply[Spaa,Join[List [aa], Reverse[ List [cc ]]]] Apply[Spaa,Join[Reverse[ List [dd ]], List [bb
      ]]],
96 Spaa[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
97     -2 Apply[Spab,Join[List [aa], Reverse[ List [cc ]]]] Apply[Spba,Join[Reverse[ List [dd ]], List [bb
      ]]],
98 Spbb[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
99     -2 Apply[Spbb,Join[List [aa], Reverse[ List [cc ]]]] Apply[Spbb,Join[Reverse[ List [dd ]], List [bb
      ]]],
100 Spaa[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
101     -Spaa[aa,abra,Index[Lorentz, Ind1], bra, bb]\
102     Apply[Spaa,Join[Reverse[ List [dd ]],{ abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [cc ]]],
103 Spaa[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
104     -Spaa[aa,abra,Index[Lorentz, Ind1], bra, bb]\
105     Apply[Spbb,Join[Reverse[ List [dd ]],{ abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [cc ]]],
106 Spaa[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spbb[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
      dd____] :>
107     -Apply[Spaa,Join[Reverse[ List [bb ]],{ abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [aa ]]]\
108     Spbb[cc,abra, Index[Lorentz, Ind1], bra, dd],
109 Spaa[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spbb[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>
110     Apply[Spaa,Join[Reverse[ List [bb ]],{ abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [aa ]]]\
111     Apply[Spbb,Join[Reverse[ List [dd ]],{ abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [cc ]]],
112 Spbb[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spbb[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
      dd____] :>

```

```

113     – Spbb[aa,abra,Index[Lorentz,Ind1],bra,bb]\
114     Apply[Spbb,Join[Reverse[List[dd]],{abra,Index[Lorentz,Ind1],bra},Reverse[List[cc]]]],
115 \
116     Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spba[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
117     dd____] :>
117     Spab[aa,abra,Index[Lorentz,Ind1],bra,bb]\
118     Apply[Spab,Join[Reverse[List[dd]],{bra,Index[Lorentz,Ind1],abra},Reverse[List[cc]]]],
119     Spab[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spba[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
120     dd____] :>
120     Spab[aa,abra,Index[Lorentz,Ind1],bra,bb]\
121     Apply[Spab,Join[Reverse[List[dd]],{abra,Index[Lorentz,Ind1],bra},Reverse[List[cc]]]],
122 \
123     Spab[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spba[cc____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,
124     dd____] :>
124     Spab[aa,bra,Index[Lorentz,Ind1],abra,bb]\
125     Apply[Spab,Join[Reverse[List[dd]],{bra,Index[Lorentz,Ind1],abra},Reverse[List[cc]]]],
126     Spab[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spba[cc____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,
127     dd____] :>
127     Spab[aa,bra,Index[Lorentz,Ind1],abra,bb]\
128     Apply[Spab,Join[Reverse[List[dd]],{abra,Index[Lorentz,Ind1],bra},Reverse[List[cc]]]],
129 \
130     Spba[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,abra,Index[Lorentz,
131     Ind1_],bra,dd____] :>
131     Apply[Spab,Join[Reverse[List[bb]],{bra,Index[Lorentz,Ind1],abra},Reverse[List[
132     aa]]]]\
132     Spaa[cc,abra,Index[Lorentz,Ind1],bra,dd],
133     Spba[aa____,abra,Index[Lorentz,Ind1_],bra,bb____] Spaa[cc____,bra,Index[Lorentz,
134     Ind1_],abra,dd____] :>
134     Apply[Spab,Join[Reverse[List[bb]],{bra,Index[Lorentz,Ind1],abra},Reverse[List[
135     aa]]]]\
135     Spaa[cc,bra,Index[Lorentz,Ind1],abra,dd],
136     Spba[aa____,bra,Index[Lorentz,Ind1_],abra,bb____] Spaa[cc____,abra,Index[Lorentz,
137     Ind1_],bra,dd____] :>
137     Apply[Spab,Join[Reverse[List[bb]],{abra,Index[Lorentz,Ind1],bra},Reverse[List[
138     aa]]]]\

```

```

138         Spaa[cc, abra, Index[Lorentz, Ind1], bra, dd],
139     Spba[aa____, bra, Index[Lorentz, Ind1_], abra, bb____] Spaa[cc____, bra, Index[Lorentz,
        Ind1_], abra, dd____] :>
140     Apply[Spab, Join[Reverse[ List [bb]], { abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [
        aa ]]]] \
141         Spaa[cc, bra, Index[Lorentz, Ind1], abra, dd],
142 \
143     Spba[aa____, abra, Index[Lorentz, Ind1_], bra, bb____] Spbb[cc____, abra, Index[Lorentz, Ind1_], bra,
        dd____] :>
144     Apply[Spab, Join[Reverse[ List [bb]], { bra, Index[Lorentz, Ind1], abra }, Reverse[ List [aa ]]]] \
145         Spbb[cc, abra, Index[Lorentz, Ind1], bra, dd],
146     Spba[aa____, abra, Index[Lorentz, Ind1_], bra, bb____] Spbb[cc____, bra, Index[Lorentz, Ind1_], abra,
        dd____] :>
147     Apply[Spab, Join[Reverse[ List [bb]], { bra, Index[Lorentz, Ind1], abra }, Reverse[ List [aa ]]]] \
148         Spbb[cc, bra, Index[Lorentz, Ind1], abra, dd],
149     Spba[aa____, bra, Index[Lorentz, Ind1_], abra, bb____] Spbb[cc____, abra, Index[Lorentz, Ind1_], bra,
        dd____] :>
150     Apply[Spab, Join[Reverse[ List [bb]], { abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [aa ]]]] \
151         Spbb[cc, abra, Index[Lorentz, Ind1], bra, dd],
152     Spba[aa____, bra, Index[Lorentz, Ind1_], abra, bb____] Spbb[cc____, bra, Index[Lorentz, Ind1_], abra,
        dd____] :>
153     Apply[Spab, Join[Reverse[ List [bb]], { abra, Index[Lorentz, Ind1], bra }, Reverse[ List [aa ]]]] \
154         Spbb[cc, bra, Index[Lorentz, Ind1], abra, dd]
155     };
156 (* Termina definición del Rearreglo*)
157 (* Print [DiagExp3]; *)
158 DiagExp3= DiagExp3 //. FourVector[fourmom____, Index[Lorentz, Lor1_]] FourVector[
        fourmom2____, Index[Lorentz, Lor1_]] :>
159     keep[Expand[fourmom fourmom2]] ;
160 (* Momenta dot product *)
161 DiagExp3= DiagExp3 //. FourMomentum[Out_, Ind1_] FourMomentum[Out2_, Ind2_] ->
        1/2 Spaa[indmom[Ind1], indmom[Ind2]] Spbb[indmom[Ind2], indmom[Ind1]];
162 DiagExp3= DiagExp3 //. PropagatorDenominator[fourmom_, 0] :>
        1/keep[Expand[fourmom^2]] ;
163 DiagExp3= DiagExp3 //. FourMomentum[Out_, Ind1_] FourMomentum[Out2_, Ind2_] ->

```

```
166      1/2 Spaa[indmom[Ind1], indmom[Ind2]] Spbb[indmom[Ind2], indmom[Ind1]];
167      DiagExp3= DiagExp3 //. FourMomentum[Out_, Ind1_]^2 ->
168      1/2 Spaa[indmom[Ind1], indmom[Ind1]] Spbb[indmom[Ind1], indmom[Ind1]];
169      DiagExp3= DiagExp3 //. indmom[Indx_]:>Sp[p1[[Indx]][[2]]];
170      DiagExp3= DiagExp3 //. keep[w____] -> w;
171      DiagExp3= DiagExp3 //. Sp[Ind_]:>If[IntegerQ[Ind],Sp[Ind,Ind];
172      DiagExp3= I Sum[DiagExp3[[ii]], {ii, 1, Length[DiagExp3]}];
173      DiagExp3 ]
```

APÉNDICE C

TABLAS PARA PROCESOS CON MUCHAS
HELICIDADES

Para 2q5g:

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q-,g+,g+,g+,g+,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g-,g-,g-,g-,g-,q+	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	q-,g-,g+,g+,g+,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	112.8282134	-406.7691417
<i>BlackHat</i>	112.8282134360352	-406.769141693556
	q-,g-,g-,g+,g+,g+,q+	
<i>ArbolesFA</i>	113.0319689	46.3444709
<i>BlackHat</i>	113.0319689180371	46.34447093997613
	q-,g-,g+,g-,g+,g+,q+	

<i>ArbolesFA</i>	-3.0786563	46.4961764
<i>BlackHat</i>	-3.078656325662233	46.49617641802203
	$q-, g-, g+, g-, g+, g-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	7.880681	-1.829634
<i>BlackHat</i>	7.88068123866009	-1.829634421104041
	$q-, g+, q+, g+, g+, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	$q-, g-, q+, g+, g+, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	155.65969192	-32.07096829
<i>BlackHat</i>	155.6596919243734	-32.07096828885204
	$q-, g-, q+, g-, g+, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	-9.89385940	5.39808436
<i>BlackHat</i>	-9.893859394970328	5.398084357652405
	$q-, g-, q+, g+, g-, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	-46.23876412	29.64138969
<i>BlackHat</i>	-46.23876412417896	29.64138968531602
	$q-, g-, q+, g+, g-, g+, g-$	
<i>ArbolesFA</i>	-2.8196114	-9.1515820
<i>BlackHat</i>	-2.81961139539073	-9.151582027777346
	$q-, g+, g+, q+, g+, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	$q-, g-, g+, q+, g+, g+, g+$	
<i>ArbolesFA</i>	375.717351178	-30.603366211
<i>BlackHat</i>	375.7173511782995	-30.60336621113664
	$q-, g-, g-, q+, g+, g+, g+$	

<i>ArbolesFA</i>	26.808806366	136.594631121
<i>BlackHat</i>	26.80880636557649	136.5946311213068
	$q-,g-,g+,q+,g-,g+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	-212.035253928	97.663876587
<i>BlackHat</i>	-212.0352539259022	97.66387658672548
	$q-,g-,g+,q+,g-,g+,g-$	
<i>ArbolesFA</i>	-15.00419555	-30.34348645
<i>BlackHat</i>	-15.00419554943115	-30.34348644819079
	$q-,g+,g+,g+,q+,g+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	$q-,g-,g+,g+,q+,g+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	296.35302771	-48.96347814
<i>BlackHat</i>	296.3530277127996	-48.96347813949998
	$q-,g-,g-,g+,q+,g+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	29.331553688	108.316184024
<i>BlackHat</i>	29.33155368793346	108.316184024029
	$q-,g-,g+,g-,q+,g+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	-113.936085345	33.581570792
<i>BlackHat</i>	-113.9360853437993	33.58157079145889
	$q-,g-,g+,g-,q+,g+,g-$	
<i>ArbolesFA</i>	-3.61890186	-16.85019466
<i>BlackHat</i>	-3.618901863011593	-16.85019466378717
	$q-,g+,g+,g+,g+,q+,g+$	
<i>ArbolesFA</i>	0	0
<i>BlackHat</i>	0	0
	$q-,g-,g+,g+,g+,q+,g+$	

<i>ArbolesFA</i>	-21.5951853	5.3637608
<i>BlackHat</i>	-21.59518532635153	5.363760815519682
	$q^-,g^-,g^-,g^+,g^+,q^+,g^+$	
<i>ArbolesFA</i>	5.41651839	18.65425753
<i>BlackHat</i>	5.41651838950144	18.65425752507564
	$q^-,g^-,g^+,g^-,g^+,q^+,g^+$	
<i>ArbolesFA</i>	3.7296365	3.3467779
<i>BlackHat</i>	3.729636525925399	3.346777904454467
	$q^-,g^-,g^+,g^-,g^+,q^+,g^-$	
<i>ArbolesFA</i>	-3.96394841	7.15709511
<i>BlackHat</i>	-3.963948409132397	7.157095113743983

Tabla C.1: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando Mathematica y BlackHat en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks y 5 gluones.

Para $2q2Q2g$:

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q^-,Q^+,g^+,g^+,Q^-,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0.2369677230334	2.98556437843830
<i>BlackHat</i>	0.2369677230333682	2.985564378438305
	q^-,Q^+,g^-,g^+,Q^-,q^+	
<i>ArbolesFA</i>	0.64238902213622	-1.59602961749349
<i>BlackHat</i>	0.6423890221362251	-1.596029617493493
	q^-,Q^+,g^+,g^-,Q^-,q^+	

<i>ArbolesFA</i>	-1.6960750163210	-0.3835058765009
<i>BlackHat</i>	-1.69607501632104	-0.3835058765009051
	$q-, Q+, g-, g-, Q-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	0.59088044566339	1.44707814609796
<i>BlackHat</i>	0.5908804456633935	1.447078146097968
	$q-, q+, g+, g+, Q+, Q-$	
<i>ArbolesFA</i>	0.09484119270901	-0.54420665916969
<i>BlackHat</i>	0.09484119270901509	-0.5442066591696934
	$q-, q+, g-, g+, Q+, Q-$	
<i>ArbolesFA</i>	-0.0144127311899	0.2593998559642
<i>BlackHat</i>	-0.01441273118993795	0.2593998559641706
	$q-, q+, g+, g-, Q+, Q-$	
<i>ArbolesFA</i>	0.22469845977318	-0.22084894787497
<i>BlackHat</i>	0.224698459773183	-0.2208489478749726
	$q-, q+, g-, g-, Q+, Q-$	
<i>ArbolesFA</i>	-0.48866274821130	0.44832217021415
<i>BlackHat</i>	-0.4886627482113051	0.4483221702141491
	$Q+, Q-, g+, g-, q-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	0.0144127311899	0.2593998559642
<i>BlackHat</i>	0.01441273118993712	0.2593998559641705
	$Q+, Q-, g+, g+, q-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	-0.09484119270901	-0.54420665916969
<i>BlackHat</i>	-0.09484119270901442	-0.5442066591696938
	$Q+, Q-, g-, g-, q-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	0.48866274821130	0.44832217021415
<i>BlackHat</i>	0.4886627482113041	0.4483221702141496
	$Q+, Q-, g-, g+, q-, q+$	

<i>ArbolesFA</i>	-0.2246984597732	-0.2208489478750
<i>BlackHat</i>	-0.2246984597731826	-0.2208489478749737
	Q+,q-,g+,g+,q+,Q-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.59088044566339	1.44707814609796
<i>BlackHat</i>	-0.5908804456633953	1.447078146097962
	Q+,q-,g-,g-,q+,Q-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.2369677230334	2.98556437843830
<i>BlackHat</i>	-0.2369677230333714	2.985564378438309
	Q+,q-,g-,g+,q+,Q-	
<i>ArbolesFA</i>	1.6960750163210	-0.3835058765009
<i>BlackHat</i>	1.696075016321046	-0.3835058765009039
	Q+,q-,g+,g-,q+,Q-	
<i>ArbolesFA</i>	-0.64238902213622	-1.59602961749349
<i>BlackHat</i>	-0.6423890221362207	-1.596029617493492

Tabla C.2: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando Mathematica y BlackHat en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks q , 2 quarks Q y 2 gluones.

Para 2q2Q3g:

Programas	Parte Real	Parte Imaginaria
	q-,Q+,g+,g-,g+,Q-,q+	
<i>ArbolesFA</i>	-2.51014607	4.59313570
<i>BlackHat</i>	-2.510146074190461	4.59313569610766
	Q+,q-,g+,g-,g+,q+,Q-	

<i>ArbolesFA</i>	-11.26063057	16.91203104
<i>BlackHat</i>	-11.26063056846317	16.91203103706976
	$q-, q+, g+, g-, g+, Q+, Q-$	
<i>ArbolesFA</i>	-0.5763083	-0.6138248
<i>BlackHat</i>	-0.5763083245395543	-0.6138247819328106
	$Q+, Q-, g+, g-, g+, q-, q+$	
<i>ArbolesFA</i>	2.72416993	2.92208994
<i>BlackHat</i>	2.724169928897548	2.92208993554026

Tabla C.3: Comparación de los resultados numéricos obtenidos para las amplitudes empleando Mathematica y BlackHat en un punto del espacio de fases para el proceso de 2 quarks q , 2 quarks Q y 3 gluones.

APÉNDICE D

BREVE EJEMPLO DE LA APLICACIÓN DE LOS PRODUCTOS DE HELICIDAD

Para la aniquilación electrón-positrón que se explicó en el Apéndice A y en el Capítulo 3, se recuerda que al usar las reglas de Feynman se escribía la siguiente amplitud:

$$A = [\bar{v}^s(p_2)(-ie\gamma^\mu)u^s(p_1)]\left(-\frac{ig^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2}\right)[\bar{u}^s(p_3)(-ie\gamma^\nu)v^s(p_4)] \quad (\text{D.1})$$

Usando los productos de helicidad que se definieron en el Capítulo 2 al definir una helicidad, solo sobreviven los términos $\langle +, -, +, - \rangle$ y $\langle -, +, -, + \rangle$ (para entender la razón, se recomienda volver a leer la subsección referente a Amplitudes MHV):

$$A(1+, 2-; 3+, 4-) = \frac{ie^2}{s} \langle 2^+ | \gamma^\mu | 1^+ \rangle \langle 3^+ | \gamma_\mu | 4^+ \rangle \quad (\text{D.2})$$

$$A(1-, 2+; 3+, 4-) = \frac{ie^2}{s} \langle 2^- | \gamma^\mu | 1^- \rangle \langle 3^+ | \gamma_\mu | 4^+ \rangle \quad (\text{D.3})$$

Finalmente usando el **rearrreglo de Fierz**:

$$\langle i^+ | \gamma^\mu | j^+ \rangle \langle k^+ | \gamma_\mu | l^+ \rangle = 2[ik] \langle lj \rangle \quad (\text{D.4})$$

Se pueden calcular las amplitudes anteriores para las helicidades propuestas, y al elevar al cuadrado, debe dar la misma amplitud que se obtiene por productos espino-
riales.

$$A = \frac{ie^2}{s} \langle 2^+ | \gamma^\mu | 1^+ \rangle \langle 3^+ | \gamma_\mu | 4^+ \rangle A(1+, 2-; 3+, 4-) = -\frac{e^2}{s} 2[23] \langle 41 \rangle \quad (\text{D.5})$$

Y:

$$A = \frac{ie^2}{s} \langle 2^- | \gamma^\mu | 1^- \rangle \langle 3^+ | \gamma_\mu | 4^+ \rangle \quad (\text{D.6})$$

$$A = \frac{ie^2}{s} \langle 1^+ | \gamma^\mu | 2^+ \rangle \langle 3^+ | \gamma_\mu | 4^+ \rangle \quad (\text{D.7})$$

Donde $A(1-, 2+; 3+, 4-) = \frac{-e^2}{s} 2[13] \langle 42 \rangle$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. P. Feynman, “Very high-energy collisions of hadrons,” *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415 (1969).
- [2] John C. Collins, Davison E. Soper, and George Sterman. Factorization of Hard Processes in QCD. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 5:1–91, 1988, hep-ph/0409313.
- [3] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [4] L. J. Dixon, “Calculating scattering amplitudes efficiently,” In *Boulder 1995, QCD and beyond* 539-582 [hep-ph/9601359].
- [5] L. J. Dixon, “A brief introduction to modern amplitude methods,” arXiv:1310.5353 [hep-ph].
- [6] D. Griffiths, “Introduction to elementary particles,” Weinheim, Germany: Wiley-VCH (2008) 454 p
- [7] A. Zee, “Quantum field theory in a nutshell,” Princeton, UK: Princeton Univ. Pr. (2010) 576 p

- [8] D. Maitre and P. Mastrolia, “S@M, a Mathematica Implementation of the Spinor-Helicity Formalism,” *Comput. Phys. Commun.* **179**, 501 (2008) [arXiv:0710.5559 [hep-ph]].
- [9] T. Hahn, “Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3,” *Comput. Phys. Commun.* **140**, 418 (2001) [hep-ph/0012260].
- [10] C. F. Berger, Z. Bern, L. J. Dixon, F. Febres Cordero, D. Forde, H. Ita, D. A. Kosower and D. Maitre, “An Automated Implementation of On-Shell Methods for One-Loop Amplitudes,” *Phys. Rev. D* **78**, 036003 (2008) [arXiv:0803.4180 [hep-ph]].
- [11] R. K. Ellis and G. Zanderighi, “Scalar one-loop integrals for QCD,” *JHEP* **0802**, 002 (2008) [arXiv:0712.1851 [hep-ph]].
- [12] S. J. Parke and T. R. Taylor, “An Amplitude for n Gluon Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2459 (1986).
- [13] F. Febres Cordero, “Next-to-Leading-Order Corrections to Weak Boson Production with a Massive Quark Jet Pair at Hadron Colliders,” arXiv:0809.3829 [hep-ph].