

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**SOBRE LA FORMULACIÓN HAMILTONIANA**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Ortiz M, Edgar L  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Abraham Lozada

Julio-2015

Caracas-Venezuela

*Escuela de Física*



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



## **SOBRE LA FORMULACIÓN HAMILTONIANA**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Ortiz M, Edgar L  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. Abraham Lozada

Julio-2015  
Caracas-Venezuela



Aquí va el veredicto

Sustituya esta hoja por el veredicto original, para no alterar la numeración de las páginas.

Este mensaje aparece porque el comando veredicto lleva un argumento diferente a “final” o “borrador”

Si se escoge

`\veredicto{final}`

se omite esta página, se reenumeran la páginas posteriores para incluir el veredicto luego de la portada.

Si se escoge

`\veredicto{borrador}`

se inserta la carta de autorización del tutor. Para cualquier otra elección aparece este mensaje.

Use la opción borrador para las monografías que serán enviadas a los jurados.



# La Divina Comedia, Inferno: Canto I

Nel mezzo del cammin di nostra vita mi ritrovai per una selva oscura, ché la diritta via era smarrita.

Ahi quanto a dir qual era è cosa dura esta selva selvaggia e aspra e forte che nel pensier rinnova la paura!



# Agradecimientos

Dedicado a mi familia, quienes me han apoyado incondicionalmente.



## Resumen

En este trabajo se formula la descripción hamiltoniana de un sistema físico en el lenguaje de la geometría simpléctica. Tomamos completamente en cuenta los aspectos globales de la formulación hamiltoniana los cuales no son, generalmente, considerados en la literatura física. Se prueba que un momento magnético en un campo magnético externo y el campo clásico libre de Dirac, son descritos por dinámicas hamiltonianas que no vienen de la estructura simpléctica típica derivada de un lagrangiano.



# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>15</b>
<b>Lista de tablas</b>	<b>17</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>19</b>
<b>2. Mecánica Clásica Local</b>	<b>21</b>
2.1. Sistema De Coordenadas . . . . .	21
2.2. Tratamientos Locales Clásicos . . . . .	21
2.2.1. Principio De Mínima Acción . . . . .	22
2.2.2. Formulación Hamiltoniana . . . . .	22
<b>3. Variedades Diferenciables</b>	<b>25</b>
3.1. Localidad en el Espacio de Estados . . . . .	25
3.2. Globalidad en el Espacio de Estados . . . . .	26
3.3. Variedades Topológicas . . . . .	27
3.4. Variedades Diferenciables . . . . .	27
3.5. Encajamiento de una Variedad . . . . .	29
3.6. Esferas Como Variedades . . . . .	30
3.6.1. $S^1$ . . . . .	30
3.6.2. $S^2$ . . . . .	33
3.7. Espacios Tangentes Sobre Variedades . . . . .	35
3.7.1. Transformaciones Diferenciables . . . . .	35
3.7.2. Vectores Tangentes A Una Variedad . . . . .	35
3.7.3. Fibrado Tangente . . . . .	38
3.8. Formas Diferenciales . . . . .	39
3.8.1. Formas . . . . .	39
3.8.2. Formas Diferenciales . . . . .	40
3.8.3. Integración de Formas Diferenciales . . . . .	42
3.9. Derivada Exterior y Teorema de Stokes . . . . .	43
3.9.1. La Derivada Exterior . . . . .	44
3.9.2. Teorema de Stokes . . . . .	44

---

<b>4. Variedades Simplécticas</b>	<b>45</b>
4.1. Espacios Vectoriales Simplécticos . . . . .	45
4.1.1. La Base Simpléctica . . . . .	46
4.2. Estructuras Simplécticas sobre Variedades . . . . .	46
4.3. Variedades Simplécticas y Dinámica . . . . .	47
4.3.1. Fibrado Cotangente y su Estructura Simpléctica . . . . .	47
4.3.2. Atlas Simpléctico . . . . .	48
4.3.3. Campos Vectoriales Hamiltonianos . . . . .	49
4.4. Variedades Simplécticas y Compacidad . . . . .	50
4.4.1. Compacidad . . . . .	50
4.4.2. Formas Exactas . . . . .	51
<b>5. Fibrado Cotangente de las Esferas</b>	<b>53</b>
5.1. Fibrado Cotangente de $S^1$ : $T^*S^1$ . . . . .	53
5.2. Fibrado cotangente de $S^2$ : $T^*S^2$ . . . . .	54
5.3. Fibrado Cotangente de $S^3$ : $T^*S^3$ . . . . .	55
<b>6. Formulación Hamiltoniana en Esferas como Espacio de Configuraciones</b>	<b>57</b>
6.1. $S^1$ Como Variedad de Configuraciones . . . . .	57
6.1.1. Partícula Libre en $S^1$ . . . . .	57
6.1.2. Partícula con Gravedad en $S^1$ . . . . .	58
6.2. $S^2$ Como Variedad de Configuraciones . . . . .	59
6.2.1. Partícula Libre en $S^2$ . . . . .	59
6.2.2. Partícula con Gravedad en $S^2$ . . . . .	61
6.3. $S^3$ Como Variedad de Configuraciones . . . . .	62
6.3.1. Partícula Libre en $S^3$ . . . . .	62
<b>7. Formulación Hamiltoniana en Esferas como Espacio de Fases</b>	<b>65</b>
7.1. $S^2$ Como Espacio de fases . . . . .	65
7.1.1. Forma Simpléctica en $S^2$ . . . . .	65
7.1.2. Formulación Hamiltoniana en $S^2$ : Espín en un Campo Magnético Uniforme. . . . .	66
7.2. $S^{2n}$ como Espacio de Fases . . . . .	67
7.2.1. Cohomología de de Rham . . . . .	67
7.2.2. Cohomología de de Rham de las Esferas . . . . .	68
<b>8. El Campo de Dirac</b>	<b>69</b>
8.1. La Ecuación de Dirac . . . . .	69
8.2. Formulación Lagrangiana . . . . .	71
8.3. Formulación Simpléctica del Campo de Dirac . . . . .	72
8.3.1. Forma Simpléctica . . . . .	72
8.3.2. Dinámica Hamiltoniana en $\mathcal{D}$ . . . . .	73

8.3.3. Campo de Dirac en $(1 + 1)$ . . . . .	74
<b>9. Discusión</b>	<b>75</b>
<b>A. Atlas Estereográfico Para las Esferas</b>	<b>77</b>
A.1. $S^1$ . . . . .	77
A.1.1. Condición de Compatibilidad . . . . .	78
A.2. $S^n$ . . . . .	79
A.2.1. Condición de Compatibilidad . . . . .	79
<b>B. Atlas de las Proyecciones Ortogonales Para las Esferas</b>	<b>81</b>
B.1. $S^1$ . . . . .	81
B.2. $S^n$ . . . . .	82



# Índice de figuras

3.1. Condición de compatibilidad . . . . .	28
3.2. $S^1$ . . . . .	30
3.3. Primera carta polar para $S^1$ . . . . .	31
3.4. Segunda carta polar para $S^1$ . . . . .	31
3.5. Condición de compatibilidad para las cartas polares en $S^1$ . . . . .	32
3.6. $S^2$ . . . . .	33
3.7. 1 <sup>ra</sup> carta polar para $S^1$ . . . . .	33
3.8. 2 <sup>da</sup> carta polar para $S^2$ . . . . .	34
3.9. Intersección cartas polares para $S^2$ . . . . .	34
A.1. Atlas estereográfico para $S^1$ . . . . .	77
B.1. Atlas de las proyecciones ortogonales para $S^1$ . . . . .	81

---



# Índice de cuadros





# Capítulo 1

## Introducción

La mecánica clásica a pesar de que no describe todos los fenómenos físicos ya que es un límite de la mecánica cuántica, describe una cantidad de situaciones de manera muy precisa. Mas aún, usar mecánica cuántica en tales situaciones es inútil ya que la clásica las describe en términos de variables más adecuadas. Esto ha llevado a muchos a hacer afirmaciones (*un poco exageradas*) de que el mundo es no lineal (*cuando es totalmente lineal desde el punto de vista de la cuántica*). Por otro lado, aunque no necesario, la construcción de la cuántica casi siempre parte de una teoría clásica. En particular, la formulación hamiltoniana juega un papel destacado en este sentido.

Uno de los problemas fundamentales donde la mecánica clásica ha jugado un papel distinguido es el caso especial de la mecánica celeste. Formalmente, en el estudio del problema gravitatorio de  $N - \text{cuerpos}$ . Este problema llevó desde la época de Poincaré a métodos que son caracterizados mayormente por el punto de vista geométrico-global. El objetivo principal de esta tesis es formular la mecánica clásica en el lenguaje de la geometría simpléctica. Esto nos permitirá ver que la formulación hamiltoniana es más general que la lagrangiana en cierto sentido. Con esta meta, tomaremos completamente en cuenta los aspectos globales de la formulación hamiltoniana los cuales, generalmente, son despreciados en la literatura en física.

En mecánica clásica el espacio de estados de un sistema en general, tiene la estructura de una variedad diferencial. En la formulación hamiltoniana una estructura fundamental sobre esta variedad es una forma simpléctica. Esto es lo que se conoce como una variedad simpléctica. La mecánica lagrangiana esta contenida en la mecánica hamiltoniana como un caso especial (*el espacio de fase es en este caso el fibrado cotangente de un espacio de configuración y la función hamiltoniana es la transformada de Legendre de la función lagrangiana*). Entonces, pueden existir sistemas dinámicos que no vienen de un lagrangiano y sí de un hamiltoniano.

Una estructura simpléctica impone restricciones sobre una variedad  $M$ . Es decir, de la

---

misma forma que una variedad puede no aceptar una métrica arbitraria, no necesariamente, esta admite una forma simpléctica. Por lo tanto, es importante verificar que nuestro espacio de estados admite una forma simpléctica antes de trabajar esta localmente. Esta verificación sólo puede hacerse globalmente y de allí la importancia de los métodos geométricos-globales.

La estructura simpléctica también tiene sus aplicaciones en variedades infinito dimensionales. En este caso la situación es mas delicada pero es una herramienta a considerar cuando se trabaja la formulación hamiltoniana en teoría clásica de campos. Evidentemente, la situación válida en dimensión finita aparece aquí de nuevo pero repotenciada.

A continuación describimos la organización de este trabajo. En el capítulo uno se resume la descripción usual de la mecánica clásica tal como aparece en los libros de texto ( ver, por ejemplo, [1] y [2]). En el capítulo dos, damos una breve introducción a la teoría de variedades diferenciales y a la vez incorporamos notación que necesitaremos mas adelante. En el capítulo tres, describimos la formulación hamiltoniana desde el punto de vista de la geometría simpléctica. En el capítulo cuatro, consideramos las formas simplécticas típicas sobre las variedades diferenciales definidas por fibrados cotangentes de las esferas  $S^1$ ,  $S^2$  y  $S^3$ . En el capítulo cinco, estudiamos sistemas físicos particulares descritos por una formulación lagrangiana con espacio de configuración dado por las esferas  $S^1$ ,  $S^2$  y  $S^3$ . Vemos que la formulación hamiltoniana en los fibrados cotangentes  $T^*S^1$ ,  $T^*S^2$  y  $T^*S^3$  se derivan de la transformada de Legendre de una formulación lagrangiana. En el capítulo seis, se da un ejemplo de una formulación hamiltoniana que no viene de una lagrangiana. Este ejemplo ocurre en  $S^2$  como espacio de fase. También discutimos la imposibilidad de definir una forma simpléctica sobre las esferas  $\{S^{2n}, n = 2, 3, 4, \dots\}$ . En el capítulo siete se discute el campo clásico de Dirac en  $(3 + 1)$  y  $(1 + 1)$ . Probamos que existe una forma simpléctica que da la dinámica del campo clásico de Dirac. En este caso, se tiene una formulación lagrangiana (*la cual es usual*) y una hamiltoniana que no viene de la lagrangiana. Finalmente, en el capítulo ocho, se discuten los resultados del trabajo.

---

# Capítulo 2

## Mecánica Clásica Local

La formulación de la mecánica clásica, para sistemas con  $n$  grados de libertad, normalmente se hace en un espacio que representa la posición del sistema, este espacio se denomina espacio de configuraciones.

### 2.1. Sistema De Coordenadas

La manera típica de especificar la posición del sistema es usando un sistema de coordenadas, ver por ejemplo [1],[2],[3],[4]. Un sistema de coordenadas es una correspondencia uno a uno entre una parte del espacio de configuraciones y un subconjunto de  $R^n$ . De manera tal que podemos considerar a esta parte del espacio de configuraciones del sistema como si estuviese en este subconjunto. Este enfoque lo llamamos local porque no se toma en cuenta todo el espacio de configuraciones.

Evidentemente, la configuración del sistema no determina la evolución del mismo. Hace falta especificar las velocidades. Así que el espacio de estados, normalmente, viene dado por las posiciones y las velocidades, es decir, por un subconjunto de  $R^{2n}$ . Nuevamente, esto es una descripción local. Concretamente, este es el caso de la formulación lagrangiana. En esta formulación, la dinámica está determinada por un escalar  $L$  (en lugar de vectores fuerza), conocido como el lagrangiano.

### 2.2. Tratamientos Locales Clásicos

Consecuente con lo dicho anteriormente, respecto a la formulación Lagrangiana, tenemos el principio de mínima acción y por otro lado, la formulación Hamiltoniana. A continuación se ilustran estos tratamientos:

---

### 2.2.1. Principio De Mínima Acción

El principio de mínima acción establece de manera axiomática que un sistema dinámico esta caracterizado por una cantidad  $\mathbf{L}$ , denominada Lagrangiano :

$$L = L(q, \dot{q}, t), \quad (2.1)$$

donde,  $q$  y  $\dot{q}$ , designan las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas que definen el sistema de coordenadas en un subconjunto de  $R^{2n}$ . La dinámica del sistema esta dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange :

$$(d_t \partial_{\dot{q}_i} - \partial_i)L = 0. \quad (2.2)$$

Estas ecuaciones se obtienen al considerar que la acción del sistema alcanza un extremo:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (2.3)$$

con  $t_1$  y  $t_2$  dos instantes de tiempo fijos que caracterizan a los puntos  $q(t_1)$  y  $q(t_2)$ , siendo estos los extremos de todas las curvas sobre las cuales se integra. La variación se hace con extremos fijos para curvas  $q(t)$  en el espacio de configuraciones.

### 2.2.2. Formulación Hamiltoniana

La descripción Hamiltoniana de un sistema, normalmente, se hace en términos de las coordenadas generalizadas y los momenta del sistema ( un subconjunto de  $R^{2n}$ ). Una descripción local también. Partiendo de una formulación lagrangiana local, se puede obtener el Hamiltoniano del sistema y los momenta vía la transformada de Legendre, así obtenemos:

$$\begin{aligned} dL &= \partial_{q_i} L dq_i + \partial_{\dot{q}_i} L d\dot{q}_i, \\ &= \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \quad \text{con } p_i = \partial_{\dot{q}_i} L, \\ d(p_i \dot{q}_i - L) &= -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i. \end{aligned}$$

De esta manera podemos definir el Hamiltoniano del sistema según la transformada de Legendre que aparece en la última ecuación:

$$H = p_i \dot{q}_i - L.$$

Del diferencial del Hamiltoniano, se obtienen las ecuaciones dinámicas del sistema:

$$\dot{q}_i = \partial_{p_i} H, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i} H. \quad (2.4)$$

---

En estas descripciones típicas de la mecánica clásica se observan dos puntos débiles. En efecto:

- i. Se tiene que ambas formulaciones son completamente equivalentes. Esto ocurre debido al tratamiento local de ellas, pero como veremos más adelante, la formulación hamiltoniana es más general que la lagrangiana.
- ii. La relación (2.4) de las ecuaciones dinámicas, no es geométrica. Esto es, esta forma no es válida globalmente, en general.

Puesto que la física es global (si es global es local, pero el inverso no es necesariamente cierto), se debe formular ambas teorías de una manera geométrica; es decir, independiente de coordenadas. Esto, como hemos mencionado, no se hace en los textos usuales de mecánica clásica (ver por ejemplo [1],[2], [3]). En las próximas secciones revisaremos los conceptos necesarios para una formulación geométrica de la teoría hamiltoniana, colocando así las bases para discutir nuestros objetivos.

---



# Capítulo 3

## Variedades Diferenciables

La formulación global de la mecánica clásica se hace en variedades diferenciables ya que el espacio de estados, en general, no es un  $R^{2n}$ . En esta sección, recordaremos, a la vez que establecemos notación, los conceptos básicos relacionados con variedades diferenciables.

### 3.1. Localidad en el Espacio de Estados

Un sistema de coordenadas describiendo la posición de un punto en el espacio es una herramienta útil en el estudio de los objetos geométricos; como ejemplo de objeto geométrico podemos considerar la trayectoria de una partícula, o en general la evolución de un sistema dinámico.

Usar coordenadas, permite aplicar los métodos del cálculo diferencial e integral para resolver los problemas concernientes al caso tratado ya que trabajamos en  $R^n$ . Sin embargo, la dinámica de un sistema es independiente del sistema de coordenadas usado y debe poderse formular de forma geométrica.

Usualmente se requiere más de un sistema de coordenadas para la descripción global del sistema. Como ejemplo podemos considerar el péndulo esférico planar, cuyo espacio de configuraciones es la esfera  $S^1$ . En efecto, para describir los puntos del círculo con un sistema de coordenadas, definimos el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{3.1}$$

donde  $(x, y)$  son coordenadas cartesianas en el plano. Luego, cada punto  $P \in S^1$  está únicamente definido por un par de números, las coordenadas cartesianas  $x$  y  $y$ . Para un punto en  $S^1$  no hay necesidad de dar las dos coordenadas. Si la coordenada  $x$  del punto  $P$  es conocida, la segunda coordenada se puede encontrar fácilmente a partir de la ecuación:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

---

Los puntos de  $S^1$  están descritos por un solo parámetro, la coordenada cartesiana  $x$ . Para ser más precisos, sólo los puntos del hemisferio norte que satisfacen la relación  $y > 0$ , están únicamente definidos por el parámetro  $x$ . La manera análoga para el hemisferio sur donde  $y < 0$ . En ambas descripciones  $x$  varía en el intervalo  $(-1, 1)$  del eje real. Sin embargo, los puntos  $P_0 = (1, 0)$  y  $P_1 = (-1, 0)$  no estarían incluidos en esta descripción. Mas aún, estos puntos son singularidades de las coordenadas introducidas. Es obvio que estas no son singularidades físicas ya que todos los puntos de  $S^1$  son equivalentes. Aquí vemos otro punto débil de los sistemas de coordenadas ya que ellos pueden introducir singularidades ficticias.

Una pregunta natural sería : ¿ se puede introducir una parametrización que describa todos los puntos de  $S^1$  ?. El parámetro  $\theta$ , igual al ángulo ente entre el eje  $x$  y el radio-vector de un punto  $P \in S^1$ , pareciera ser un buen candidato. Lamentablemente, este parámetro no esta únivocamente definido, pues sufre una discontinuidad en el punto  $P_0 = (1, 0)$ . Entonces se puede ver que no existe parametrización alguna que sea continua y que describa todos los puntos de  $S^1$  por un abierto de  $R$ . Más adelante, veremos que esto tiene que ver con propiedades topológicas, en el caso de  $S^1$  es la compacidad.

El ejemplo anterior demuestra que en general la posibilidad de describir los puntos de un espacio con un sistema de coordenadas único es imposible, por lo tanto es necesario usar diferentes sistemas de coordenadas para describir distintas partes del espacio. Una pregunta surge: ¿ Cómo entran en estos espacios los conceptos de análisis matemático en  $R^n$ ?. La respuesta a esta pregunta viene dada por el concepto de variedad diferenciable que se tratará en las próximas secciones.

## 3.2. Globalidad en el Espacio de Estados

La dinámica de un sistema es un ente geométrico, por ende se espera que al pasar de un sistema de coordenadas a otro, las ecuaciones de la dinámica no varíen. Todas estas consideraciones son tomadas en cuenta en la definición de las estructuras matemáticas conocidas como variedades diferenciables.

Respecto a los aspectos globales podemos considerar el siguiente ejemplo:

Sea  $M = S^1$  la circunferencia unidad con el parametro  $\theta$  escogido como una coordenada local. Tratemos de buscar una función suave  $f$  definida sobre  $S^1$  tal que :

$$\frac{df}{d\theta} = g(\theta), \quad (3.2)$$

se satisfaga, donde  $g$  es una función suave definida sobre  $S^1$ . Si se resuelve este problema

en un entorno de un punto  $P \in S^1$  con coordenada  $\theta_0$ , entonces cualquier antiderivada,

$$f(\theta) = \int g(\theta)d\theta,$$

de la función  $g$  es una solución. De manera global, el problema no siempre tiene solución en  $S^1$ . De hecho, cualquier función suave sobre  $S^1$  puede ser identificada con una función periódica de período  $2\pi$ . Por tanto, la función  $f$  es solución de 3.2, si la misma es periódica; luego se tiene que cumplir:

$$0 = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} g(\theta)d\theta. \quad (3.3)$$

La relación 3.3, es la condición necesaria y suficiente para obtener una solución del problema 3.2. Aca se puede ver que la existencia de la solución depende de la estructura de la variedad como un todo.

### 3.3. Variedades Topológicas

Las **variedades topológicas** son espacios topológicos que localmente se comportan de manera similar a  $R^n$ , esto es, son localmente homeomorfas a  $R^n$ . En otras palabras, cada punto de una variedad topológica posee un entorno en el cual podemos establecer un sistema de coordenadas. Diremos que un espacio topológico  $\mathbf{M}$  tiene la estructura de una variedad topológica si tiene un cubrimiento por cartas tal que cada uno de sus puntos está en al menos una carta. Una **carta** es un abierto  $\mathbf{U}$  en el espacio Euclideo con coordenadas:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n),$$

junto a una transformación uno-a-uno, que define un homeomorfismo:

$$\phi : \mathbf{U} \rightarrow \phi(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{M}.$$

### 3.4. Variedades Diferenciables

Supongamos que dos puntos  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$ , en  $R^n$ , en dos cartas  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{U}'$  tienen la misma imagen en una variedad topológica  $\mathbf{M}$ ; entonces  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}'$  tienen vecindades :

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{U} \quad y \quad \mathbf{V}' \subset \mathbf{U},$$

con la misma imagen en  $\mathbf{M}$ . Tenemos así las transformaciones:

$$\psi^{-1}\phi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}' \quad \phi^{-1}\psi : \mathbf{V}' \rightarrow \mathbf{V}. \quad (3.4)$$

Estas transformaciones están dadas por  $n$ -funciones de  $n$ -variables:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}'(\mathbf{q}); \quad y \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{q}').$$

Las cartas  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{U}'$  se denominan **compatibles** si las transformaciones (3.4) son diferenciables en  $R^n$ . En la figura (3.1) se ilustra este punto:

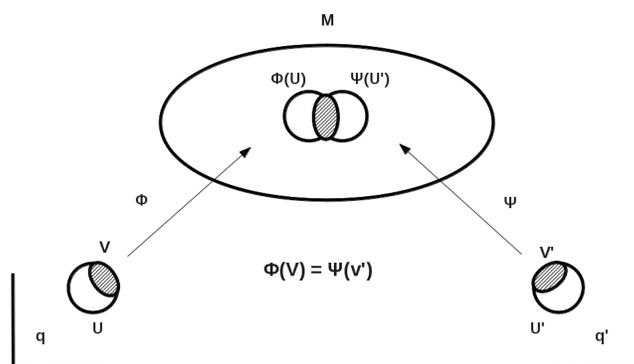


Figura 3.1: Condición de compatibilidad

Un **atlas** es la unión de cartas compatibles que cubren la variedad topológica; dos atlas se denominan equivalentes si su unión es nuevamente un atlas.

Una **variedad diferenciable** es una clase equivalente de atlas. En este caso el número  $n$  será el mismo para todas las cartas de la variedad (suponemos que la variedad es conexa),  $n$  se define como la dimensión de la variedad.

Nótese que una variedad topológica puede tener más de un atlas diferenciable. Basta definir una relación de equivalencia entre los atlas de una misma variedad topológica. Con esta relación de equivalencia podemos dar la definición de estructura diferenciable. Una **estructura diferenciable** para una variedad topológica es una clase de equivalencia de atlas a través de la relación descrita previamente. Una  $n$ -variedad diferenciable es una  $n$ -variedad topológica provista de una estructura diferenciable. Por brevedad, usualmente nos referiremos a una variedad diferenciable simplemente como variedad.

---

La unión de todos los atlas en una clase de equivalencia es también un atlas de la misma clase. Generalmente identificaremos la clase con dicho atlas maximal. Dado un atlas para una variedad topológica, siempre podemos extenderlo al atlas maximal uniéndolo con todos los atlas equivalentes a él. Así pues, para ver que una variedad topológica es diferenciable basta mostrar un atlas diferenciable para ella.

Una variedad topológica puede tener mas de una estructura diferenciable, basta con dar dos atlas que no sean equivalentes, sin embargo, estas estructuras diferenciables diferentes pueden ser difeomórficas. Así que esencialmente las estructuras diferenciables serán las mismas. Pero puede ocurrir que las estructuras diferenciables no sean difeomórficas. Como ejemplo tenemos  $R^4$ , quien admite infinitas estructuras diferenciables no difeomórficas (para mas referencias ver capítulo 1, sección 1.5 de [5]).

### 3.5. Encajamiento de una Variedad

El teorema de Whitney asegura que cualquier variedad puede ser encajada como subconjunto de un espacio Euclideo de dimensión superior a la dimensión de la variedad.

**Teorema:** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ . Entonces existe  $m$  y un encajamiento suave  $\psi : M \rightarrow R^m$

Para una demostración de este teorema, en el caso de variedades compactas, ver [6] pag 142-145.

---

## 3.6. Esferas Como Variedades

A continuación veremos que las esferas se pueden considerar como variedades. Esto lo hacemos puesto que en este trabajo estudiaremos la formulación Hamiltoniana sobre ellas.

### 3.6.1. $S^1$

Consideremos la superficie dada por la relación:  $x^2 + y^2 = 1$  en  $R^2$ . Esta superficie es la circunferencia unidad en  $R^2$ :

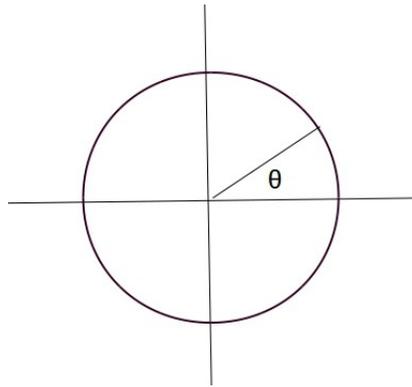


Figura 3.2:  $S^1$

Esta superficie es una variedad 1-dimensional ( *la circunferencia que denotaremos por  $S^1$* ).

$S^1$  se puede describir con varios atlas:

#### El Atlas Polar

En el atlas polar, cada punto de  $S^1$  se puede describir usando coordenadas polares:

$$\phi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Para cubrir completamente a  $S^1$  se pueden considerar las cartas:

- $(\theta_1, \phi_1)$      $\theta_1 \in (0, 2\pi)$ ,
- $(\theta_2, \phi_2)$      $\theta_2 \in (-\pi, \pi)$ .

Donde  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son equivalentes a  $\phi$ , lo que cambia es su dominio.

En la primera carta, se cubre todo  $S^1$  salvo el punto  $(1,0)$ :

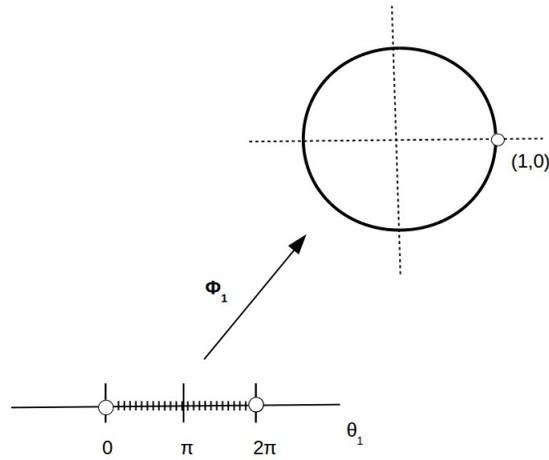


Figura 3.3: Primera carta polar para  $S^1$

Por otro lado; en la segunda carta, se cubre todo  $S^1$  salvo el punto  $(-1,0)$ :

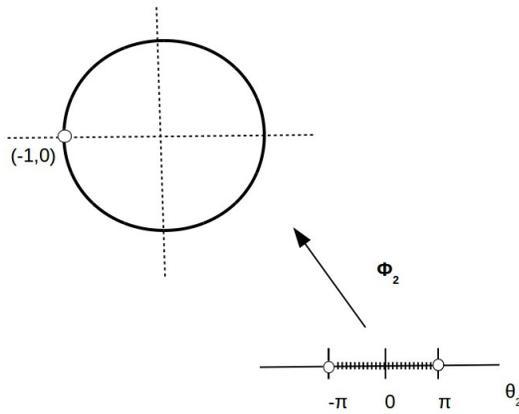


Figura 3.4: Segunda carta polar para  $S^1$

Las dos cartas cubren toda la variedad. La intersección de las dos cartas es  $S^1 - \{(-1, 0), (1, 0)\}$ :

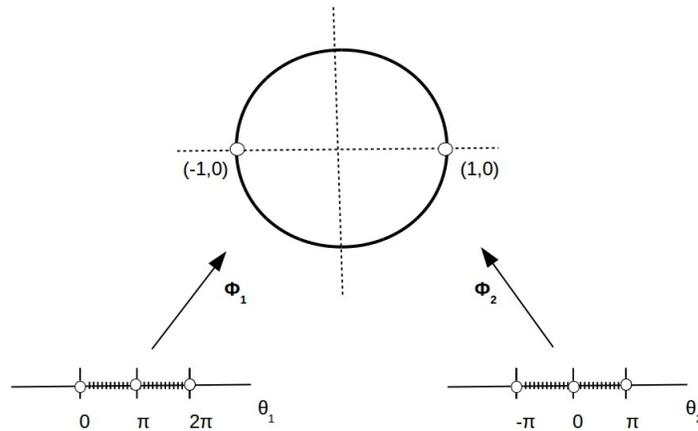


Figura 3.5: Condición de compatibilidad para las cartas polares en  $S^1$

La condición de compatibilidad está dada por :

$$\theta_2 = \phi_1^{-1} \circ \phi_2 = \begin{cases} \theta_1 & \theta_1 \in (0, \pi) \\ \theta_1 - 2\pi & \theta_1 \in (\pi, 2\pi) \end{cases} . \quad (3.5)$$

La condición de compatibilidad entre estas cartas es infinitamente diferenciable; es decir, la composición  $\phi_i^{-1} \circ \phi_j \in C^\infty$ . Luego, tenemos una estructura diferenciable para  $S^1$ . Es bueno recordar que  $S^1$  admite una sola estructura diferenciable salvo difeomorfismos.

### 3.6.2. $S^2$

Consideremos la superficie dada por la relación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  en  $R^3$ . Esta superficie es la esfera unidad en  $R^3$ :

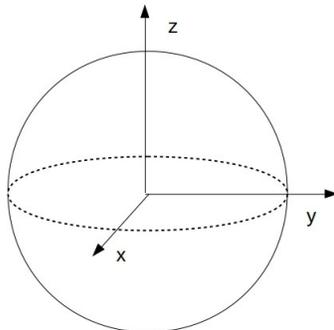


Figura 3.6:  $S^2$

Esta superficie es una variedad 2-dimensional (*denotada por  $S^2$* ).  $S^2$  se puede describir con varios atlas:

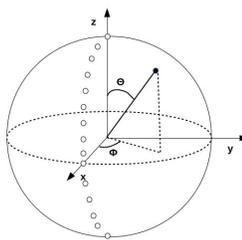
#### El Atlas Esférico

En el atlas esférico, cada punto de  $S^2$  se puede describir usando coordenadas esféricas:

$$\psi(\phi, \theta) = (\text{sen}(\theta)\cos(\phi), \text{sen}(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)),$$

$$\phi \in (0, 2\pi), \quad \theta \in (0, \pi),$$

en esta carta esférica, que es un homeomorfismo de un abierto de  $R^2$  en  $S^2$ , se cubre todo  $S^2$  menos el arco resaltado con los puntos en blanco:



ooo Puntos no cubiertos por la carta polar

Figura 3.7: 1<sup>ra</sup> carta polar para  $S^2$

Para cubrir completamente  $S^2$ , se puede considerar la carta esférica :

$$\psi_1(\phi_1, \theta_1) = (\sin(\theta_1)\cos(\phi_1), \cos(\theta_1), \sin(\theta_1)\sin(\phi_1)),$$

donde  $\theta_1 \in (0, \pi)$  se mide tomando como referencia el eje  $y$ , por otro lado,  $\phi_1 \in (-\pi, \pi)$  se mide tomando como referencia el eje  $x$  según se indica en la figura (3.8):

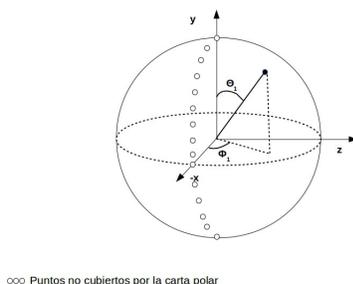


Figura 3.8: 2<sup>da</sup> carta polar para  $S^2$

La intersección de estas dos cartas es  $S^2$  sin los semiarcos resaltados en la figura (3.9)

:

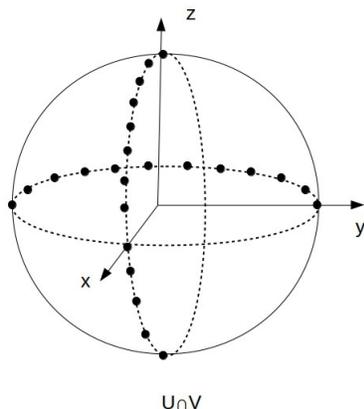


Figura 3.9: Intersección cartas polares para  $S^2$

La condición de compatibilidad está dada por :

$$(\theta, \phi) = \psi^{-1} \circ \psi_1 = (\arccos(\sin(\theta_1)\sin(\phi_1)), \arctg(\operatorname{ctg}(\theta_1)\sec(\phi_1))),$$

la cual es diferenciable como función de  $R^2$ . Luego, tenemos una estructura diferenciable para  $S^2$ . Es bueno recordar que  $S^2$  admite una sola estructura diferenciable salvo difeomorfismos.

Para ver otros atlas, ir a los apéndices  $A$  y  $B$ .

## 3.7. Espacios Tangentes Sobre Variedades

En esta sección discutimos cómo, a pesar de que no necesariamente es un espacio vectorial, se puede hablar de vectores en una variedad. En efecto, los vectores existen, no en la variedad misma, sino en el llamado espacio tangente asociado a cada punto de la variedad. Aparte del espacio tangente, definimos transformaciones diferenciables junto con ciertas ideas del cálculo diferencial en  $R^n$  extendido a una variedad.

### 3.7.1. Transformaciones Diferenciables

En lo siguiente, cuando usemos el término parametrización, nos referiremos a una carta en una variedad y el homeomorfismo definido por ella.

**Definición:** Sean  $N$  y  $M$  dos variedades de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente. Una transformación  $\varphi : N \rightarrow M$  es diferenciable en un punto  $p \in N$  si con una parametrización  $g : V \subset R^m \rightarrow M$  con  $\varphi(p) \in g(V)$ , existe una parametrización  $f : U \subset R^n \rightarrow N$  con  $p \in f(U)$  tal que  $\varphi(f(U)) \subset g(V)$  y la transformación :

$$g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset R^n \rightarrow R^m,$$

es diferenciable en  $f^{-1}(p)$ . La transformación  $\varphi$  es diferenciable en un abierto de  $N$  si este es diferenciable en todos los puntos de este conjunto.

La transformación  $g^{-1} \circ \varphi \circ f$  es la expresión de  $\varphi$  en las parametrizaciones  $f$  y  $g$ . Dado que el cambio de parametrización es diferenciable, la diferenciable de  $\varphi$  no depende de la escogencia de las cartas.

En particular; partiendo de la definición anterior, podemos hablar de funciones diferenciables ( $\varphi : M \rightarrow R$ ) y curvas diferenciables ( $\varphi : I \subset R \rightarrow M$ ) sobre una variedad ( $I \subset R$  denotará un abierto que contiene el origen).

### 3.7.2. Vectores Tangentes A Una Variedad

En lo que sigue, se definirá la noción de un vector tangente a una curva diferenciable. En el caso de una curva diferenciable  $\alpha : I \subset R \rightarrow S \subset R^3$  sobre una superficie regular en  $R^3$ , el vector tangente  $\dot{\alpha}(t)$  es sencillamente la velocidad de  $\alpha$  como un vector libre en  $R^3$ . Dado que en una variedad cualquiera no se sabe su encajamiento, el ejemplo anterior no es general; en este caso, necesitamos una propiedad característica de los vectores tangentes, la cual no dependa del encajamiento.

**Definición:** Sea  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow R^n$  una curva diferenciable en  $R^n$ , con  $\alpha(0) = p \in R^n$  :

$$\alpha(t) = \left( x_1(t), \dots, x_n(t) \right), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon), \quad (x_1, \dots, x_n) \in R^n,$$

entonces:

$$\dot{\alpha}(0) = \left( \dot{x}_1(0), \dots, \dot{x}_n(0) \right) = v \in R^n.$$

Sea  $\varphi$  una función a valores reales en  $R^n$ , y diferenciable en un entorno de  $p$ . Entonces la derivada de  $\varphi$  en la dirección de  $v$  en  $p$ , está dada por:

$$\left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0} = \partial_{x_i} \varphi d_t x_i \Big|_{t=0} = (\dot{x}_i(0) \partial_{x_i}) \varphi.$$

La derivada en la dirección de  $v$  es un operador sobre funciones diferenciables, el cual depende solo de  $v$ . Esta es la propiedad característica de vectores que se usará para extender este concepto en una variedad.

**Definición:** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable sobre la variedad  $M$ , con  $\alpha(0) = p \in M$ , y sea  $D$  el conjunto de funciones diferenciables sobre  $M$  en  $p$ . El vector tangente a la curva  $\alpha$  en  $p$  esta dado por la transformación  $\dot{\alpha}(0) : D \rightarrow R$  dado por :

$$\dot{\alpha}(0)\varphi = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0}, \quad \varphi \in D.$$

Un vector tangente en  $p \in M$  es un vector tangente a alguna curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ .

A continuación se mostrará que el conjunto de vectores tangentes a un punto  $p \in M$  generan un espacio vectorial real de dimensión  $m$  ( $m$  es la dimensión de  $M$ ). Para ello, tomemos una carta  $f : U \subset R^m \rightarrow M$  alrededor de  $p = f(0, \dots, 0)$ . Entonces una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  y una función  $\varphi \in D$  se pueden escribir como :

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ \alpha(t) &= \left( x_1(t), \dots, x_m(t) \right), \\ \varphi \circ f(q) &= \varphi(x_1, \dots, x_m), \quad q = (x_1, \dots, x_m) \in U, \end{aligned} \tag{3.6}$$

tenemos pues :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0)\varphi &= \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi(x_1(t), \dots, x_m(t)) \right|_{t=0}, \\ &= \left( \dot{x}_i(0) (\partial_{x_i})_0 \right) \varphi, \end{aligned}$$

de manera tal que el vector tangente  $\dot{\alpha}(0)$  en  $p$  está dado por la transformación:

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{x}_i(0)(\partial_{x_i})_0.$$

Nótese que la transformación  $(\partial_{x_i})_0$  es el vector tangente a  $p$  para la curva :

$$x_i \rightarrow f(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

**Definición:** Sea  $T_f$  el espacio vectorial generado por  $\{(\partial_{x_i})_0\}, i = 1, \dots, m$ .

**Lema:** El conjunto  $T_pM$  de vectores tangentes a  $M$  en  $p$  es igual a  $T_f$ .

**Demostración:** De acuerdo a lo explicado anteriormente,  $T_pM \subset T_f$ . Por otro lado, si  $v \in T_f$ , entonces  $v = \lambda_i(\partial_{x_i})_0$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow M$ , en la parametrización  $f$  con  $x_i = \lambda_i t$ . Entonces  $\dot{\alpha}(0) = v$ ; es decir,  $v \in T_pM$ .  $\square$

Tenemos entonces que  $T_pM$  es un espacio vectorial. La escogencia de una parametrización  $f$  determina una base  $\{(\partial_{x_i})_0\}$  para  $T_pM$ . Luego  $T_pM$  es un espacio vectorial  $m$ -dimensional y se denomina como el *espacio tangente* de  $M$  en  $p$ . La base  $\{(\partial_{x_i})_0\}$  se denomina *base coordinada* asociada a la parametrización  $f$ .

### Diferencial de una Transformación entre Variedades

Con la noción de espacio tangente se puede definir el concepto del diferencial de una transformación  $\varphi : N \rightarrow M$ .

**Definición:** Sean  $N$  y  $M$  dos variedades y sea  $\varphi : N \rightarrow M$  una transformación diferenciable. Para cada  $p \in N$ , el diferencial de  $\varphi$  en  $p$  es la transformación lineal

$$d\varphi_p : T_pN \rightarrow T_{\varphi(p)}M,$$

la cual asocia a cada vector  $v \in T_pN$  el vector  $d\varphi_p(v) \in T_{\varphi(p)}M$  definido a continuación. Se escoge una curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ , con  $\alpha(0) = p$ ,  $\dot{\alpha}(0) = v$ ; luego:

$$d\varphi_p(v) = \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) \right|_{t=0}.$$

### 3.7.3. Fibrado Tangente

**Definición:** Sea  $M$  una variedad, consideremos el conjunto:

$$TM = \left\{ (p, v); p \in M, v \in T_p M \right\},$$

es decir,  $TM$  es el conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$ . A continuación se verá que este conjunto es también una variedad  $2n$ -dimensional, y se denomina *el fibrado tangente* de  $M$ .

Sea  $f_\alpha : U_\alpha \subset R^n \rightarrow M$  una carta de  $M$  con  $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \in U_\alpha$ . Para  $\omega \in T_{f_\alpha(q)}M$ ,  $q \in U_\alpha$ , se tiene:

$$\omega = y_i^\alpha \partial_{x_i^\alpha}.$$

Definamos una transformación  $F_\alpha : U_\alpha \times R^n \rightarrow TM$ :

$$F_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \dots, y_n^\alpha) = \left( f_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), y_i^\alpha \partial_{x_i^\alpha} \right).$$

**Teorema:** Si  $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable para  $M$ , entonces  $\{(U_\alpha \times R^n, F_\alpha)\}$  es una estructura diferenciable para  $TM$ .

**Demostración:** Sea:

$$(p, v) \in F_\alpha(U_\alpha \times R^n) \cap F_\beta(U_\beta \times R^n),$$

esto es,

$$(p, v) = \left( f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha) \right) = \left( f_\beta(q_\beta), df_\beta(v_\beta) \right),$$

donde  $q_\alpha \in U_\alpha$ ,  $q_\beta \in U_\beta$ ,  $v_\alpha, v_\beta \in R^n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} F_\beta^{-1} \circ F_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) &= F_\beta^{-1} \left( f_\alpha(q_\alpha), df_\alpha(v_\alpha) \right), \\ &= \left( f_\beta^{-1} \circ f_\alpha(q_\alpha), d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)(v_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Dado que  $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$  es diferenciable, entonces también lo es  $d(f_\beta^{-1} \circ f_\alpha)$ . Por lo tanto,  $F_\beta^{-1} \circ F_\alpha$  es diferenciable.  $\square$

## 3.8. Formas Diferenciales

La mecánica hamiltoniana no se puede entender sin tener en cuenta los conceptos de formas diferenciales. En lo que sigue revisaremos algunos aspectos de multiplicación exterior, diferenciación exterior, integración y el teorema de Stokes.

### 3.8.1. Formas

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial real y  $n$ -dimensional. Una forma de grado uno, es una función lineal  $\omega : V \rightarrow R$  esto es :

$$\omega(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \omega(\vec{v}_1) + \lambda_2 \omega(\vec{v}_2) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,$$

**Definición:** Una forma de grado dos o  $2 - forma$  es una función bilineal antisimétrica  $\omega : V \times V \rightarrow R$ ,

$$\begin{aligned} \omega^2(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= -\omega^2(\vec{v}_2, \vec{v}_1), \\ \omega^2(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= \lambda_1 \omega^2(\vec{v}_1, \vec{v}_3) + \lambda_2 \omega^2(\vec{v}_2, \vec{v}_3). \end{aligned}$$

**Definición:** Una forma de grado  $k$  o  $k - forma$  es una función de  $k$  vectores  $k$ -lineal y antisimétrica,

$$\begin{aligned} \omega^k(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) &= (-1)^\nu \omega^k(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_k}), \\ \omega^k(\lambda_1 \vec{v}'_1 + \lambda_2 \vec{v}''_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) &= \lambda_1 \omega^k(\vec{v}'_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) + \lambda_2 \omega^k(\vec{v}''_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k), \end{aligned}$$

donde :

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{si } i_1, \dots, i_k \text{ es una permutación par} \\ 1 & \text{si } i_1, \dots, i_k \text{ es una permutación impar} \end{cases}$$

### Producto Exterior de 1-formas

Sean  $\omega_1$  y  $\omega_2$  dos uno formas, su producto exterior se define mediante la acción sobre un par de vectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  dada por :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \omega_2(\vec{v}_1) \\ \omega_1(\vec{v}_2) & \omega_2(\vec{v}_2) \end{vmatrix}.$$

El producto exterior es una operación bilineal antisimétrica. Ahora supongamos que escogemos una base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  del espacio vectorial y definamos la base dual en el espacio de  $1 - formas$  tal que  $x_i(\vec{v}) = v_i$  con  $i = 1, \dots, n$ . El producto exterior de estas  $1 - formas$  son las  $2 - formas$   $x_i \wedge x_j$ . Tenemos  $C_2^n$  productos exteriores que son diferentes, esto es,  $x_i \wedge x_j$  con  $i < j$ .

Puesto que el espacio vectorial de las 2-formas es de dimensión  $C_2^n$ , cada 2-forma se puede escribir en términos del producto exterior de las 1-formas:  $(x_1, \dots, x_n)$ . Es decir,

$$\omega^2 = \alpha_{ij} x_i \wedge x_j \quad \text{con } i < j$$

### Producto Exterior de Varias 1-formas

Dadas  $k$  1-formas  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ , su producto exterior se define mediante su acción sobre un conjunto de  $k$  vectores  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$  dada por:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{v}_1) & \dots & \omega_k(\vec{v}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(\vec{v}_k) & \dots & \omega_k(\vec{v}_k) \end{vmatrix}.$$

Consideremos la multiplicación exterior de  $k$  1-formas del tipo  $(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \quad \text{con } 1 \leq i_m \leq n,$$

si alguno de los índices se repite, la expresión anterior se anula a causa de la antisimetría del producto exterior. Las siguientes formas son linealmente independientes,

$$x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} \quad \text{con } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

tenemos un total de  $C_k^n$   $k$ -formas independientes. Este conjunto de  $k$ -formas forma una base en el espacio de las  $k$ -formas puesto que la dimensión del espacio vectorial de las  $k$ -formas es  $C_k^n$ , por lo tanto, dada una  $k$ -forma  $\omega^k$  tendremos:

$$\omega^k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

### 3.8.2. Formas Diferenciales

**Definición:** Una forma diferencial de grado 1 o 1-forma sobre una variedad  $\mathbf{M}$  es una transformación suave,

$$\omega : \mathbf{TM} \rightarrow R,$$

del fibrado tangente a la recta, lineal en cada espacio tangente.

El ejemplo más sencillo de una forma diferencial es el diferencial de una función.

Sea  $f : \mathbf{M} \rightarrow R$  una función sobre la variedad  $\mathbf{M}$ . El diferencial  $df|_x$  de  $f$  en  $x$  es una transformación lineal,

$$df_x : \mathbf{TM}_x \rightarrow R,$$

del espacio tangente a  $\mathbf{M}$  en  $x$  sobre la recta. Recordemos la definición del diferencial de una función sobre una variedad :

Sea  $\mathbf{v}$  el vector velocidad de la curva  $x(t) : R \rightarrow \mathbf{M}$ ;  $x(0) = x$  y  $\dot{x} = \mathbf{v}$ . Por definición :

$$df|_x(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x(t)),$$

en pocas palabras, el diferencial de una función sobre un punto de la variedad es una 1-forma sobre el espacio (*vectorial*) tangente a la variedad en dicho punto. El diferencial  $df$  de  $f$  sobre la variedad es una transformación suave del fibrado tangente  $\mathbf{TM}$  a la recta,

$$df : \mathbf{TM} \rightarrow R \quad \mathbf{TM} = \bigcup_x \mathbf{TM}_x,$$

esta transformación es diferencial y es lineal sobre cada espacio tangente.

### Forma General de una 1-forma Diferencial sobre $R^n$

**Teorema:** Cada 1-forma diferencial sobre  $R^n$ , con un sistema coordenado dado por  $(x_1, \dots, x_n)$ , se puede escribir de manera única como :

$$\omega = a_i(x)dx_i,$$

donde los coeficientes  $a_i(x)$  son funciones suaves y los  $dx_i$  son los diferenciales de las funciones coordenadas, es decir, 1-formas. Mas aún ellas son la base dual a la base coordenada  $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ . Es decir :

$$dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$$

### Definición de k-formas Diferenciales

**Definición:** Una  $k$ -forma diferencial  $\omega^k|_x$  en un punto  $x$  de la variedad diferencial  $M$  es una  $k$ -forma exterior sobre el espacio tangente  $\mathbf{TM}_x$  a  $\mathbf{M}$  en  $x$ . Si la forma  $\omega^k|_x$  esta dada en cada punto  $x$  de la variedad  $\mathbf{M}$  y si es diferenciable, entonces tenemos definida una  $k$ -forma sobre la variedad  $\mathbf{M}$ .

Esta definición en el caso de 1-formas ( $k = 1$ ) coincide con nuestra definición de 1-formas diferenciales.

Consideremos una carta de la variedad diferencial  $\mathbf{M}$  con coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y consideremos también un punto  $x$  en la variedad. Las  $n$  1-formas  $dx_1, \dots, dx_n$  forman

una base del espacio de 1 – formas sobre el espacio tangente  $\mathbf{TM}_x$ . Consideremos el producto exterior de las 1 – formas básicas,

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \quad i_1 < \cdots < i_k,$$

estas  $C_k^n$  formas constituyen una base del espacio de las  $k$  – formas exteriores sobre  $\mathbf{TM}_x$ .

**Teorema:** Cada  $k$  – forma diferencial sobre  $\mathbf{M}$ , en una carta  $(x_1, \dots, x_n)$ , se puede escribir de manera únivoca en la forma:

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

donde  $a_{i_1, \dots, i_k}(x)$  son funciones suaves sobre  $\mathbf{M}$ .

### 3.8.3. Integración de Formas Diferenciales

En este apartado definiremos el concepto de cadena, frontera de una cadena y la integración de una forma sobre una cadena.

#### Comportamiento de Formas Diferenciales Bajo Transformaciones

Sea  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$  una transformación diferencial entre variedades suaves y sea  $\omega$  una  $k$  – forma diferencial sobre  $\mathbf{N}$ . Entonces surge de manera natural una  $k$  – forma definida sobre  $\mathbf{M}$  y se denota por  $f^*\omega$ ; definida por la relación:

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f_*v_1, \dots, f_*v_k),$$

para cualquier vector tangente  $v_i \in \mathbf{TM}_x$ . En este caso  $f_*$  es el diferencial de la transformación  $f$ .

#### Integración de una k-forma sobre una Celda

Sea  $\omega$  una  $k$  – forma diferencial sobre una variedad n-dimensional  $\mathbf{M}$ . Sea  $\mathbf{D}$  un poliedro  $k$ -dimensional convexo y acotado en un espacio  $k$ -dimensional euclideo  $R^k$ . Una celda  $k$ -dimensional  $\sigma$  de  $\mathbf{M}$  está definida por el triplete  $\sigma = (D, f, Or)$  que consiste en :

1. Un poliedro convexo y acotado  $\mathbf{D} \subset R^k$
2. Una transformación diferenciable  $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{M}$
3. Una orientación definida en  $R^k$  denotada por  $Or$

**Definición:** La integral de la  $k$ -forma  $\omega$  sobre la célula  $k$ -dimensional, es la integral de la forma sobre el poliedro  $\mathbf{D}$

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\mathbf{D}} f^* \omega.$$

La celda  $k$ -dimensional que difiere de  $\sigma$  en la orientación se denomina el negativo de  $\sigma$  y se denota por  $-\sigma$ .

### Cadenas

**Definición:** Una cadena de dimensión  $k$  sobre una variedad  $\mathbf{M}$  consiste en una colección finita de celdas  $k$ -dimensionales  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  en  $\mathbf{M}$  y enteros  $m_1, \dots, m_r$  denominados multiplicidades. Una cadena se denota por:

$$c_k = m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r.$$

### Integrales sobre una Cadena

Sea  $\omega$  una  $k$ -forma y  $c_k = \sum m_i \sigma_i$  una cadena sobre  $\mathbf{M}$ . La integral de la forma  $\omega$  sobre  $c_k$  es la suma de las integrales sobre cada una de las celdas de la cadena pesadas con sus respectivas multiplicidades:

$$\int_{c_k} \omega = \sum m_i \int_{\sigma_i} \omega$$

### Frontera de una Cadena

Sea  $\sigma = (\mathbf{D}, f, Or)$  una celda  $k$ -dimensional. Su frontera  $\partial\sigma$  es la  $(k-1)$ -cadena :  $\partial\sigma = \sum \sigma_i$ , con  $\sigma_i = (\mathbf{D}_i, f_i, Or_i)$ , donde los  $\mathbf{D}_i$  son las caras  $(k-1)$ -dimensionales de  $\mathbf{D}$ . Los  $f_i$  son las restricciones de  $f$  a  $\mathbf{D}_i$  y  $Or_i$  es tal que unida al vector normal  $n_i$  a  $\mathbf{D}_i$  es equivalente a  $Or$ .

La frontera de una cadena  $c_k$  esta dada por :

$$\partial c_k = \partial(m_1 \sigma_1 + \dots + m_r \sigma_r) = m_1 \partial\sigma_1 + \dots + m_r \partial\sigma_r.$$

**Teorema:** La frontera de la frontera de una cadena es cero:

$$\partial \partial c_k = 0$$

Para la demostración de este teorema, ver [4] y [7].

## 3.9. Derivada Exterior y Teorema de Stokes

En esta sección nuestro objetivo es discutir la derivada exterior y el teorema de Stokes. Aunque necesitaremos más precisiones, que las aquí expuestas, para los resultados que

más tarde necesitaremos, no elaboraremos con profundidad sobre estos puntos. Lo hacemos de esta forma por brevedad y para establecer notación, terminología y referencias que usaremos más adelante.

### 3.9.1. La Derivada Exterior

La derivada exterior de una  $k$ -forma  $\omega^k : d\omega^k$  sobre una variedad  $\mathbf{M}$  es una  $(k + 1)$ -forma sobre  $\mathbf{M}$ . En el caso de una  $0$ -forma  $f$ , la definición de derivada exterior nos da la  $1$ -forma  $df$ .

Si en un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  sobre  $\mathbf{M}$  la forma  $\omega^k$  se escribe como:

$$\omega^k = \sum a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

entonces su derivada exterior  $d\omega^k$  se construye de la siguiente manera:

$$d\omega^k = \sum da_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

### 3.9.2. Teorema de Stokes

Sea  $c$  una  $(k + 1)$ -cadena, y  $\omega$  una  $k$ -forma sobre una variedad diferencial  $\mathbf{M}$ , entonces :

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Para un tratamiento más extenso de la derivada exterior y el teorema de Stokes, ver las referencias : [4],[6],[7],[8],[9],[10],[11].

# Capítulo 4

## Variedades Simplécticas

La geometría de la formulación Hamiltoniana reside en el concepto de variedad simpléctica. En una variedad simpléctica existe un isomorfismo natural entre las 1-formas y los campos vectoriales. El campo vectorial asociado, por el isomorfismo, al diferencial de una 0-forma, se denomina **campo vectorial Hamiltoniano**. En este capítulo, abordaremos estas ideas fundamentales para el desarrollo de nuestro trabajo, en particular, escribimos las ecuaciones de Hamilton en forma global (independiente de coordenadas).

### 4.1. Espacios Vectoriales Simplécticos

Sea  $V$  un espacio vectorial real.

**Definición:** Una estructura simpléctica  $\omega$  sobre  $V$  es una dos forma bilineal antisimétrica no degenerada. Es decir,  $\omega(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \forall \vec{v}_1 \in V$  entonces  $\vec{v}_2 = 0$ . Esta forma se denomina también métrica antisimétrica, y a veces la denotaremos también por  $[x, y] = -[y, x]$ .  $V$  junto a la estructura  $[\cdot, \cdot]$  se le denomina espacio vectorial simpléctico.

**Ejemplos:**

(i) Sean  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  las bases duales ya definidas en la sección (2.8.1) que actúan sobre  $R^{2n}$  y  $\omega^2$  la 2-forma,

$$\omega^2 = p_i \wedge q_i,$$

dado que esta forma es no degenerada y antisimétrica, se puede tomar como el producto escalar antisimétrico:  $[x, y] = \omega^2(x, y)$ . De esta manera dotamos a  $R^{2n}$  con una estructura simpléctica; esta estructura se denomina la estructura simpléctica estándar.

---

(ii) Los complejos son un espacio vectorial complejo de dimensión uno. Sin embargo, los complejos son un espacio vectorial real de dimensión dos. De la misma forma,  $C^n$  es un espacio vectorial real de dimensión  $2n$ . Una forma simpléctica puede definirse en  $C^n$  usando su producto interior usual,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i,$$

en efecto, sea

$$\omega(\vec{v}, \vec{w}) = \text{Im}(\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle),$$

la antisimetría es obvia de la definición, además  $\omega : C^n \times C^n \rightarrow R$ . La no degeneración se sigue de las propiedades usuales del producto escalar.

#### 4.1.1. La Base Simpléctica

Se puede probar que para una 2-forma antisimétrica de rango  $r$ , forzosamente,  $r$  tiene que ser par. Puesto que una estructura simpléctica implica que  $\omega$  es no degenerada, entonces la dimensión de  $V$  debe ser  $2n$  (Ver por ejemplo [12]).

**Definición:** Una base simpléctica es un conjunto de  $2n$  vectores ordenados, que forman una base de  $V$ ,  $\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) cuyo producto tiene la forma,

$$[\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{p_j}] = [\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_j}] = [\mathbf{e}_{q_i}, \mathbf{e}_{q_j}] = 0 \quad [\mathbf{e}_{p_i}, \mathbf{e}_{q_i}] = 1.$$

**Teorema:** Cada espacio vectorial simpléctico tiene una base simpléctica y todos los espacios simplécticos de la misma dimensión son isomorfos simplécticamente.

## 4.2. Estructuras Simplécticas sobre Variedades

Sea  $M^{2n}$  una variedad  $2n$  dimensional. Una estructura simpléctica sobre esta variedad es una 2-forma diferencial, cerrada y no degenerada, esto es,

$$d\omega^2 = 0 \quad \forall \xi \neq 0 \exists \eta : \omega^2(\xi, \eta) \neq 0 \quad \xi, \eta \in TM_x,$$

el par  $(M^{2n}, \omega^2)$  se denomina variedad simpléctica.

**Ejemplos:**

(i) Consideremos  $R^{2n}$  como una variedad, con las coordenadas  $p_i$  y  $q_i$  y con la 2-forma  $\omega^2 = \sum dp_i \wedge dq_i$ : se tiene que  $\omega^2$  es cerrada y no degenerada, tenemos que  $(R^{2n}, \omega^2)$  es

una variedad simpléctica (es la del espacio vectorial anterior pero usando la estructura diferenciable usual de  $R^{2n}$ ).

(ii) Un ejemplo muy importante de variedad simpléctica es el caso de un fibrado cotangente. Este es el caso que ocurre cuando la formulación Hamiltoniana se obtiene globalmente de una formulación Lagrangiana. Dada su relevancia y debido a los detalles técnicos este ejemplo lo consideraremos en la sección que sigue a continuación.

Notemos que una forma simpléctica implica la existencia de un elemento de volumen sobre la variedad. Por lo tanto, la variedad simpléctica es orientable. Esto quiere decir que no toda variedad puede ser simpléctica. Un ejemplo obvio sería la cinta de Möbius la cual es una superficie no orientable. Evidentemente, esto es un problema global porque localmente en la cinta de Möbius existe una forma simpléctica. Sin embargo, la física es global y por lo tanto los aspectos geométricos no se pueden obviar.

### 4.3. Variedades Simplécticas y Dinámica

Para una variedad de configuraciones de un sistema dinámico, sabemos que en su descripción Lagrangiana se usa el fibrado tangente. El fibrado tangente es una variedad pero no tiene una estructura simpléctica obvia a menos que tenga estructura adicional. Sin embargo, el llamado fibrado cotangente, que explicamos a continuación, es una variedad simpléctica sin ninguna exigencia.

#### 4.3.1. Fibrado Cotangente y su Estructura Simpléctica

Sea  $\mathbf{V}$  una variedad diferenciable  $n$ -dimensional (en el caso de la formulación Lagrangiana  $\mathbf{V}$  sería el llamado espacio de configuración).

**Definición:** Una 1-forma en  $\mathbf{x}$  se denomina también vector cotangente a  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{x}$ . El conjunto de todos los vectores cotangentes a  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{x}$  forma un espacio vectorial  $n$ -dimensional, dual a  $\mathbf{TV}_x$ . Denotaremos a este espacio vectorial por  $\mathbf{T}^*\mathbf{V}_x$  y lo llamaremos el espacio cotangente a  $\mathbf{V}$  en  $\mathbf{x}$ .

La unión de todos los espacios cotangentes forma el fibrado cotangente y se denota por  $\mathbf{T}^*\mathbf{V}$ . El fibrado cotangente tiene una estructura de variedad diferenciable con dimensión  $2n$ ; para ver esto consideraremos un punto del fibrado cotangente como dado por una 1-forma sobre el espacio tangente a  $\mathbf{V}$  en un punto  $\mathbf{x}$ , y el mismo punto  $\mathbf{x}$ .

Si escogemos una carta en  $\mathbf{V}$  que contenga al punto  $\mathbf{x}$  con las coordenadas locales  $q$ , entonces una 1-forma está dada por  $n$ -componentes  $p$ . Las coordenadas  $q$  y  $p$  forman un sistema coordinado para una carta de  $\mathbf{T}^*\mathbf{V}$ . Evidentemente, de este tipo de cartas se

genera un atlas para el fibrado cotangente.

Consideremos la proyección  $f : \mathbf{T}^*\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ . Esta proyección es, obviamente, sobreyectiva.

**Teorema:** El fibrado cotangente tiene una estructura simpléctica (global) que en las cartas locales del fibrado cotangente descritas previamente tiene la forma :

$$\omega^2 = dp \wedge dq = \sum_{i=0}^n dp_i \wedge dq_i.$$

**Demostración:** Sea  $\xi \in T(T^*V)_p$  un vector tangente al fibrado cotangente en el punto  $p \in T^*V_x$ . La derivada  $f_* : T(T^*V) \rightarrow TV$  manda un vector tangente al fibrado cotangente en un vector tangente a la variedad diferencial en el punto  $x$ . Ahora definimos una 1-forma sobre  $T^*V$  por la relación :

$$w^1(\xi) = p(f_*\xi),$$

en coordenadas locales esta 1-forma está dada por  $\omega^1 = pdq$ . Tomando la derivada exterior de esta una forma; tenemos  $\omega^2 = dp \wedge dq$ , la cual es cerrada y no degenerada.

### 4.3.2. Atlas Simpléctico

**Definición:** Un atlas de una variedad  $M^{2n}$  se denomina simpléctico si la estructura simpléctica estándar  $\omega^2 = dp \wedge dq$  es introducida en coordenadas locales, y su transferencia de una carta a otra vía la condición de compatibilidad entre las mismas, es una transformación canónica. Localmente, toda variedad simpléctica admite una carta simpléctica en una vecindad de cada punto de la misma. Este es el contenido del siguiente teorema.

**Teorema:** En una vecindad de un punto, toda variedad simpléctica admite una carta tal que la forma simpléctica asume la forma estándar de  $R^{2n}$ .

Evidentemente se tiene el siguiente resultado:

**Corolario:** Cada variedad simpléctica tiene un atlas simpléctico.

El teorema es el conocido teorema de *Darboux*. Nótese que esto significa que localmente todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son indistinguibles, luego nuevamente los aspectos globales, normalmente ignorados en la literatura física, cobran importancia a la hora de diferenciar las variedades simplécticas. Observemos que este resultado para variedades simplécticas contrasta con lo conocido de variedades Riemannianas o pseudoriemmanianas que si pueden ser distinguidas localmente (por ejemplo, con

el tensor de curvatura). El corolario se sigue del teorema de *Darboux* y la estructura de variedad diferenciable.

Notemos que el siguiente resultado también es cierto (ver por ejemplo [4]):

**Teorema:** Un atlas simpléctico define una estructura simpléctica sobre la variedad  $M^{2n}$ .

Finalmente, observemos que aunque en una variedad  $2n$  – *dimensional* arbitraria (no necesariamente simpléctica) podemos definir en un atlas cualquiera  $2$  – *formas* del tipo *Darboux* (en cada carta del atlas), esto no garantiza que exista una  $2$  – *forma* cerrada y no degenerada definida globalmente. Si esto fuese cierto, toda variedad sería simpléctica y ya hemos discutido que esto no es cierto (más adelante veremos otros ejemplos). Vemos entonces que la existencia de una forma simpléctica global en una variedad, por ejemplo, en el fibrado cotangente, no es trivial y que las discusiones locales pueden inducir errores, ya que localmente siempre se puede definir una  $2$  – *forma* tipo *Darboux*.

### 4.3.3. Campos Vectoriales Hamiltonianos

En este apartado veremos cómo una estructura simpléctica establece un isomorfismo entre vectores del fibrado tangente y las 1-formas.

**Definición:** A cada vector  $\xi$  tangente a una variedad simpléctica  $(M, \omega^2)$  en el punto  $x$ , le asignamos una 1-forma  $\omega_\xi^1$  sobre  $TM_x$  dada por :

$$\omega_\xi^1(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in TM_x.$$

Dada esta construcción y el hecho de que  $\omega^2$  es no degenerada, se sigue que la correspondencia entre  $\xi$  y  $\omega_\xi^1$  es un isomorfismo.

Denotaremos al inverso de este isomorfismo por  $I$ , esto es,  $I : T^*M_x \rightarrow TM_x$ . Sea  $H$  una función sobre una variedad simpléctica  $M^{2n}$ ,  $dH$  es una 1-forma diferencial sobre la variedad, y en cada punto de la misma, por el isomorfismo, tiene asociada un vector tangente a la variedad. De esta manera obtenemos un campo vectorial  $IdH$  tangente a la variedad.

**Definición:** El campo vectorial  $IdH$  se denomina campo vectorial Hamiltoniano y  $H$  se denomina función Hamiltoniana.

Vemos entonces que la estructura simpléctica define de manera global una dinámica del sistema dado un hamiltoniano  $H$  vía las curvas integrales, esto es:

$$\dot{X} = IdH.$$

Otra manera global de escribir la dinámica Hamiltoniana de un sistema está dada por la expresión:

$$dH = i_X \omega^2 = \omega^2(\cdot, X).$$

Notemos que cualquiera de estas dos últimas representan (de manera equivalente) las ecuaciones de la dinámica Hamiltoniana de forma geométrica y por lo tanto independiente de cartas. Para una variedad simpléctica, en coordenadas locales  $p$  y  $q$  (tipo *Darboux*), la matrix de transformación que representa este isomorfismo está dada por :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En una carta tipo *Darboux*, obtenemos las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{X} = IdH \rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \text{y} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

## 4.4. Variedades Simpléticas y Compacidad

Hemos visto que partiendo de una variedad de configuraciones  $\mathbf{M}$ , su fibrado cotangente es una variedad simpléctica. Esta construcción normalmente, en la literatura, lleva a la creencia de que la formulación Hamiltoniana es una forma equivalente (en otro espacio) a la Lagrangiana. Sin embargo, esto no es cierto. Para ver esto último, notemos que el fibrado cotangente de  $\mathbf{M}$  tiene dos peculiaridades :

- $\mathbf{T}^*\mathbf{M}$  es no compacto.
- La estructura simpléctica de  $\mathbf{T}^*\mathbf{M}$  es tal que la 2-forma es exacta.

Considerando estas características, podemos ver que la formulación Hamiltoniana es más general que la formulación Lagrangiana. En efecto, basta dar un espacio de fases que sea compacto o una forma simpléctica no exacta que definan una dinámica Hamiltoniana. En lo que sigue exploramos estas dos posibilidades. Empezaremos por recordar el concepto de compacidad.

### 4.4.1. Compacidad

Una Variedad  $\mathbf{M}$  es compacta si para un cubrimiento arbitrario de abiertos  $\{S_\alpha\}$  :

$$M = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha},$$

existe un subcubrimiento finito  $\{S_i\}_{i=0}^N$  que la cubre:

$$M = \bigcup_i S_i.$$

**Teorema:** Los fibrados cotangentes son variedades diferenciales no compactas.

**Demostración:** Recordemos que en un espacio compacto, todo conjunto cerrado es compacto. Luego para demostrar que un espacio no es compacto basta con probar la existencia de un conjunto cerrado que no es compacto. Consideremos la proyección natural del fibrado cotangente en la variedad. Esta función es continua. Así que la imagen inversa de un cerrado en la variedad es un cerrado en el fibrado cotangente. Consideremos un punto  $q$  en la variedad, como conjunto,  $\{q\}$ , es cerrado. Su imagen inversa en el fibrado cotangente es  $\{q\} \times T^*M(q)$  que sería un cerrado. Este conjunto,  $T^*M(q)$  es homeomorfo a  $R^n$ , no es compacto. Así, el espacio topológico  $T^*M$  no es compacto ya que posee un conjunto cerrado que no es compacto.

#### 4.4.2. Formas Exactas

Se dice que una  $k$ -forma diferencial es exacta, si la misma es la derivada exterior de una  $(k-1)$ -forma. Como hemos mencionado, la  $2$ -forma simpléctica de un fibrado cotangente es exacta. En el caso de una variedad compacta, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema:** Las formas simplécticas definidas sobre variedades compactas no son exactas.

**Demostración:** Se sabe que una  $2$ -forma  $\omega$  definida sobre una variedad simpléctica es no degenerada si y solo si  $\omega^n$  es un elemento de volumen. Ahora, si además  $\omega = d\beta$  es exacta, entonces :

$$\omega^n = d(\beta \wedge \omega^{n-1}),$$

es también una forma exacta. Esto se contradice con el teorema de Stokes, pues la integral de la forma de volumen es positiva sobre toda la variedad :

$$0 \neq \int_M \omega^n = \int_{\partial M} \beta \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

pues  $M$  es compacta.

Estos dos últimos teoremas reafirman que una variedad simpléctica compacta no tiene la estructura simpléctica que viene de un Lagrangiano. Por otro lado, variedades simplécticas compactas existen. Por ejemplo,  $S^2$  como veremos mas adelante, es una variedad

simpléctica. Esto es, sobre  $S^2$  existe una  $2$ -*forma* cerrada y no degenerada definida globalmente. Luego, la formulación Hamiltoniana es mas general que la Lagrangiana. Como veremos, esta generalización no es meramente matemática sino que describe situaciones físicas.

---

# Capítulo 5

## Fibrado Cotangente de las Esferas

En este capítulo, queremos construir, ya que lo necesitaremos en el capítulo cinco, una forma explícita para los atlas de los fibrados cotangentes de las esferas  $S^1$ ,  $S^2$  y  $S^3$ . También construimos la forma simpléctica canónica asociada al fibrado cotangente de manera explícita. Notemos que esta última se construye independientemente del lagrangiano del sistema. En efecto, dada esta forma simpléctica, con dar una función hamiltoniana sobre el fibrado cotangente se obtiene una dinámica Hamiltoniana (la cual podría verse, si se quiere, como que viene de un lagrangiano también). Usualmente, en la literatura física, se obtiene la impresión de que para dar la forma simpléctica se necesita de un lagrangiano cuando no es así.

### 5.1. Fibrado Cotangente de $S^1$ : $T^*S^1$

Consideremos una 1-forma  $\omega$  en una de las cartas polares de  $S^1$ . En un punto de la variedad, la forma está dada por :

$$\omega = pd\theta \quad p \in R$$

De acá, vemos que  $p \in (-\infty, \infty)$  y por lo tanto un atlas para el fibrado cotangente de  $S^1$  está dado por:

$$\psi_1(\theta_1, p_1) = (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1), p_1) \quad p_1 \in R \quad y \quad \theta_1 \in (0, 2\pi)$$

$$\psi_2(\theta_2, p_2) = (\cos(\theta_2), \sin(\theta_2), p_2) \quad p_2 \in R \quad y \quad \theta_2 \in (-\pi, \pi)$$

La intersección de estas dos cartas es no nula. La condición de compatibilidad está dada por (3.5) y por la igualdad:

$$p_1 = p_2$$

---

Dada una 1-forma  $\omega$  sobre el fibrado cotangente, por las condiciones de compatibilidad y de la construcción general de la 2 – forma en un fibrado cotangente, vemos que:

$$\omega^2 = d\omega = dp_1 \wedge d\theta_1 = dp_2 \wedge d\theta_2,$$

define de manera global una 2 – forma no degenerada.

## 5.2. Fibrado cotangente de $S^2 : T^*S^2$

Consideremos una 1-forma en un punto dado  $(\phi, \theta)$  de  $S^2$  :

$$\omega = p_\phi d\phi + p_\theta d\theta \quad p_\phi, p_\theta \in R \quad (5.1)$$

De acá se puede ver que un atlas para  $T^*S^2$  está dado por las cartas:

$$\psi_1(\phi_1, \theta_1, p_1, p_2) = (\text{sen}(\theta_1)\cos(\phi_1), \text{sen}(\theta_1)\sin(\phi_1), \cos(\theta_1), p_1, p_2) \quad \theta_1 \in (0, \pi), \phi_1 \in (0, 2\pi), p_1, p_2 \in R$$

$$\psi_2(\phi_2, \theta_2, p_3, p_4) = (\sin(\theta_2)\cos(\phi_2), \cos(\theta_2), \sin(\theta_2)\sin(\phi_2), p_3, p_4) \quad \theta_2 \in (0, \pi), \phi_2 \in (-\pi, \pi), p_3, p_4 \in R$$

Al escribir la 1 – forma (5.1) en cada carta del fibrado cotangente obtenemos :

$$\omega_1 = p_1 d\theta_1 + p_2 d\phi_1$$

$$\omega_2 = p_3 d\theta_2 + p_4 d\phi_2$$

Dado que:

$$\theta_2 = \theta_2(\theta_1, \phi_1)$$

$$\phi_2 = \phi_2(\theta_1, \phi_1)$$

Tenemos entonces :

$$\begin{aligned} \omega_2 &= p_3 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} d\phi_1 \right) + p_4 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} d\phi_1 \right) \\ &= \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} p_3 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} p_4 \right) d\theta_1 + \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} p_3 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} p_4 \right) d\phi_1 \end{aligned}$$

En la region de intersección de las cartas se verifica la condición :

$$p_1 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} p_3 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta_1} p_4$$

$$p_2 = \frac{\partial \theta_2}{\partial \phi_1} p_3 + \frac{\partial \phi_2}{\partial \phi_1} p_4$$

Luego, la 2 – forma global sobre  $T^*S^2$  vendrá dada por :

$$d\omega_1 = dp_1 \wedge d\theta_1 + dp_2 \wedge d\phi_1$$

$$d\omega_2 = dp_3 \wedge d\theta_2 + dp_4 \wedge d\phi_2$$

### 5.3. Fibrado Cotangente de $S^3$ : $T^*S^3$

De manera análoga para  $S^3$  usando el atlas estereográfico (ver apéndice A), tenemos :

$$\omega_1 = p_1 dx_1^1 + p_2 dx_2^1 + p_3 dx_3^1$$

$$\omega_2 = p_4 dx_1^2 + p_5 dx_2^2 + p_6 dx_3^2$$

En la región de intersección de las cartas, la condición de compatibilidad viene dada por las relaciones :

$$p_1 = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_1^1} p_4 + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_1^1} p_5 + \frac{\partial x_3^2}{\partial x_1^1} p_6$$

$$p_2 = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1} p_4 + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2^1} p_5 + \frac{\partial x_3^2}{\partial x_2^1} p_6$$

$$p_3 = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_3^1} p_4 + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_3^1} p_5 + \frac{\partial x_3^2}{\partial x_3^1} p_6$$

Luego, la 2 – forma global sobre  $T^*S^3$  vendrá dada por :

$$\omega_1 = dp_1 \wedge dx_1^1 + dp_2 \wedge dx_2^1 + dp_3 \wedge dx_3^1$$

$$\omega_2 = dp_4 \wedge dx_1^2 + dp_5 \wedge dx_2^2 + dp_6 \wedge dx_3^2$$



# Capítulo 6

## Formulación Hamiltoniana en Esferas como Espacio de Configuraciones

En este capítulo se considera a las esferas  $S^1$ ,  $S^2$  y  $S^3$  como variedades de configuraciones. En primera instancia se estudia su formulación Lagrangiana en los fibrados tangentes, después se estudia su formulación Hamiltoniana en los fibrados cotangentes, ya definidos en el capítulo anterior. El formalismo Lagrangiano usa la estructura del fibrado cotangente para generar una dinámica vía la transformada de Legendre al asignar un hamiltoniano en el fibrado cotangente. En este sentido, la formulación Lagrangiana en el fibrado tangente es equivalente a una Hamiltoniana en el fibrado cotangente.

### 6.1. $S^1$ Como Variedad de Configuraciones

En esta sección se usa el atlas polar para  $S^1$ .

#### 6.1.1. Partícula Libre en $S^1$

##### Formulación Lagrangiana

El Lagrangiano de una partícula libre en una carta de  $TS^1$  está dado por :

$$L_1 = \frac{1}{2}m\dot{\theta}_1^2 \quad (6.1)$$

La condición de compatibilidad:

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2,$$

nos dice que los Lagrangianos son iguales en la región de intersección de las dos cartas que cubren a  $TS^1$ . Por lo tanto, independientemente de la carta, el Lagrangiano sería:

---

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 \quad (6.2)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para este sistema nos arroja como solución:

$$\theta = \dot{\theta}_0(t - t_0) + \theta_0$$

Donde  $\dot{\theta}_0$  y  $\theta_0$  son el estado del sistema en  $t_0$ . De esta manera la descripción del movimiento queda resuelta globalmente al usar las cartas en las regiones que estas describen y tomando en cuenta el estado cuando entra a la región descrita por cada carta.

### Formulación Hamiltoniana

Haciendo uso de la transformada de Legendre para construir el fibrado cotangente, obtenemos :

$$p_\theta = m\dot{\theta}$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m}, \quad dH = \frac{p_\theta}{m}dp_\theta$$

Al usar la estructura simpléctica, obtenemos :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_\theta}{m} \end{pmatrix}$$

De estas ecuaciones obtenemos la misma información que en la formulación Lagrangiana, con el cuidado debido de las cartas.

### 6.1.2. Partícula con Gravedad en $S^1$

#### Formulación Lagrangiana

El Lagrangiano de una partícula con gravedad en  $S^1$ , para cada carta está dado por :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)$$

La ecuación de Euler-Lagrange para este sistema nos arroja:

$$\ddot{\theta} = -g\cos(\theta)$$


---

### Formulación Hamiltoniana

Usando la transformada de Legendre obtenemos el Hamiltoniano :

$$p_\theta = m\dot{\theta}$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{2m} + mg\sin(\theta)$$

$$dH = \frac{p_\theta}{m} dp_\theta + mg\cos(\theta)d\theta$$

De este hamiltoniano vía la forma simpléctica se obtiene el siguiente sistema :

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ \frac{p_\theta}{m} \end{pmatrix}$$

De estas ecuaciones, se recupera la obtenida previamente:

$$\ddot{\theta} = -g\cos(\theta)$$

## 6.2. $S^2$ Como Variedad de Configuraciones

### 6.2.1. Partícula Libre en $S^2$

En esta sección se usa el atlas polar para  $S^2$ .

### Formulación Lagrangiana

El Lagrangiano de una partícula libre en  $S^2$  es :

$$L = \frac{1}{2}m \left( \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \right)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}m \left( \sin^2(\theta_1)\dot{\phi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 \right)$$

Dado que  $TS^2$  es una variedad diferenciable, las condiciones de compatibilidad garantizan que el lagrangiano se ha definido de manera global. Para una carta, las ecuaciones de Euler-Lagrange llevan a la siguiente dinámica :

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2$$

$$0 = 2\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin(\theta)\ddot{\phi}$$

### Formulación Hamiltoniana

Haciendo uso de la transformada de Legendre obtenemos :

$$p_\theta = m\dot{\theta}, \quad p_\phi = m\sin^2(\theta)\dot{\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} \right)$$

$$H_1 = \frac{1}{2m} \left( p_{\theta_1}^2 + \frac{p_{\phi_1}^2}{\sin^2(\theta_1)} \right)$$

En este caso, aplica el razonamiento anterior : dado que el fibrado cotangente  $T^*S^2$  es una variedad diferenciable, entonces las condiciones de compatibilidad garantizan que el Hamiltoniano se ha definido de manera global. En una carta tenemos:

$$mdH = p_\theta dp_\theta + \frac{p_\phi}{\sin^2(\theta)} dp_\phi - p_\phi^2 \csc^3(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

La forma simpléctica en esta carta nos lleva al sistema :

$$m \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p}_\theta \\ \dot{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_\phi^2 \csc^3(\theta) \cos(\theta) \\ 0 \\ p_\theta \\ \frac{p_\phi}{\sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones, se recupera la dinámica obtenida antes en la formulación Lagrangiana :

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2$$

$$0 = 2\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin(\theta)\ddot{\phi}.$$

Una solución de estas ecuaciones está dada por  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $\dot{\phi}$  constante. Dada una data inicial arbitraria, siempre se puede escoger un sistema de coordenadas tal que se reproduce la situación anterior (ya que la esfera es homogénea), luego todas las soluciones son círculos de radio unidad recorridos con velocidad angular constante. El movimiento queda descrito globalmente al usar las cartas que generan el atlas, tanto en la formulación Lagrangiana como en la Hamiltoniana, de manera obvia.

---

### 6.2.2. Partícula con Gravedad en $S^2$

#### Formulación Lagrangiana

El Lagrangiano de una partícula con gravedad en  $S^2$  es :

$$L = \frac{1}{2}m \left( \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 \right) - mg\cos(\theta)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}m \left( \sin^2(\theta_1)\dot{\phi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2 \right) - mg\sin(\theta_1)\sin(\phi_1)$$

En una carta, las ecuaciones de Euler-Lagrange llevan a la siguiente dinámica :

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 + g\sin(\theta)$$

$$0 = 2\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin(\theta)\ddot{\phi}$$

#### Formulación Hamiltoniana

Haciendo uso de la transformada de Legendre obtenemos :

$$p_\theta = m\dot{\theta}, \quad p_\phi = m\sin^2(\theta)\dot{\phi}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2(\theta)} \right) + mg\cos(\theta)$$

$$H_1 = \frac{1}{2m} \left( p_{\theta_1}^2 + \frac{p_{\phi_1}^2}{\sin^2(\theta_1)} \right) + mg\sin(\theta_1)\sin(\phi_1)$$

En una carta tenemos:

$$mdH = p_\theta dp_\theta + \frac{p_\phi}{\sin^2(\theta)} dp_\phi - (m^2 g \sin(\theta) + p_\phi^2 \csc^3(\theta) \cos(\theta)) d\theta$$

La forma simpléctica en esta carta nos lleva al sistema :

$$m \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{p}_\theta \\ \dot{p}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m^2 g \sin(\theta) - p_\phi^2 \csc^3(\theta) \cos(\theta) \\ 0 \\ p_\theta \\ \frac{p_\phi}{\sin^2(\theta)} \end{pmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones, se recupera la dinámica obtenida antes en la formulación Lagrangiana :

$$\ddot{\theta} = \sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 + g\sin(\theta)$$

$$0 = 2\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} + \sin(\theta)\ddot{\phi},$$

el movimiento queda descrito globalmente al usar las cartas que generan el atlas, tanto en la formulación Lagrangiana como en la Hamiltoniana, de manera obvia.

### 6.3. $S^3$ Como Variedad de Configuraciones

#### 6.3.1. Partícula Libre en $S^3$

En esta sección se usa el atlas polar para  $S^3$ .

#### Formulación Lagrangiana

El Lagrangiano de una partícula libre en  $S^3$  es :

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{\phi}_1^2 + \sin^2(\phi_1)\dot{\phi}_2^2 + \sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2)\dot{\phi}_3^2 \right)$$
$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{\theta}_1^2 + \sin^2(\theta_1)\dot{\theta}_2^2 + \sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)\dot{\theta}_3^2 \right)$$

Para una carta, las ecuaciones de Euler-Lagrange llevan a la siguiente dinámica :

$$\ddot{\phi}_1 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_1) \left( \dot{\phi}_2^2 + \sin^2(\phi_2)\dot{\phi}_3^2 \right)$$

$$0 = 2\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \sin(\phi_1)\ddot{\phi}_2 - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_3^2$$

$$0 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\ddot{\phi}_3 + 2\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3 + 2\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3$$

#### Formulación Hamiltoniana

Haciendo uso de la transformada de Legendre obtenemos :

---

$$p_{\phi_1} = m\dot{\phi}_1, \quad p_{\phi_2} = m\sin^2(\phi_1)\dot{\phi}_2, \quad p_{\phi_3} = m\sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2)\dot{\phi}_3$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_{\phi_1}^2 + \frac{p_{\phi_2}^2}{\sin^2(\phi_1)} + \frac{p_{\phi_3}^2}{\sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2)} \right)$$

$$H_1 = \frac{1}{2m} \left( p_{\theta_1}^2 + \frac{p_{\theta_2}^2}{\sin^2(\theta_1)} + \frac{p_{\theta_3}^2}{\sin^2(\theta_1)\sin^2(\theta_2)} \right)$$

En una carta tenemos:

$$\begin{aligned} mdH &= p_{\phi_1} dp_{\phi_1} + \frac{p_{\phi_2}}{\sin^2(\phi_1)} dp_{\phi_2} + \frac{p_{\phi_3}}{\sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2)} dp_{\phi_3} \\ &\quad - csc^3(\phi_1)\cos(\phi_1) \left( p_{\phi_2}^2 + \frac{p_{\phi_3}^2}{\sin^2(\phi_2)} \right) d\phi_1 - \frac{p_{\phi_3}^2 csc^3(\phi_2)\cos(\phi_2)}{\sin^2(\phi_1)} d\phi_2 \end{aligned}$$

La forma simpléctica en esta carta nos lleva al sistema :

$$m \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \\ p_{\phi_1} \\ p_{\phi_2} \\ p_{\phi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -csc^3(\phi_1)\cos(\phi_1) \left( p_{\phi_2}^2 + \frac{p_{\phi_3}^2}{\sin^2(\phi_2)} \right) \\ -\frac{p_{\phi_3}^2 csc^3(\phi_2)\cos(\phi_2)}{\sin^2(\phi_1)} \\ 0 \\ p_{\phi_1} \\ p_{\phi_2} \\ \frac{p_{\phi_3}}{\sin^2(\phi_1)\sin^2(\phi_2)} \end{pmatrix}$$

De este sistema de ecuaciones, se recupera la dinámica obtenida antes en la formulación Lagrangiana :

$$\ddot{\phi}_1 = \sin(\phi_1)\cos(\phi_1) \left( \dot{\phi}_2^2 + \sin^2(\phi_2)\dot{\phi}_3^2 \right)$$

$$0 = 2\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \sin(\phi_1)\ddot{\phi}_2 - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_3^2$$

$$0 = \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\ddot{\phi}_3 + 2\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3 + 2\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3$$

El movimiento queda descrito globalmente al usar las cartas que generan el atlas, tanto en la formulación Lagrangiana como en la Hamiltoniana, de manera obvia.

Finalmente, observemos que si nos quedamos con la descripción en una carta del fibrado cotangente (o del tangente en la formulación Lagrangiana), tenemos lo que normalmente se discute en la literatura física (ver, por ejemplo, [1] y [2]). En este capítulo hemos ilustrado como va la descripción global de la dinámica (lo cual ni siquiera se menciona usualmente). En los capítulos que siguen veremos que los aspectos globales juegan un papel más importante cuando la variedad simpléctica no es un fibrado cotangente.

# Capítulo 7

## Formulación Hamiltoniana en Esferas como Espacio de Fases

En este capítulo se estudia a  $S^2$  como espacio de fases, siendo este caso un ejemplo de un sistema Hamiltoniano que no es formulado en un fibrado cotangente. También se muestra que no existe formulación Hamiltoniana admisible para  $S^{2n}$  con  $n = 2, 3, 4, \dots$

### 7.1. $S^2$ Como Espacio de fases

#### 7.1.1. Forma Simpléctica en $S^2$

La esfera  $S^2$  es una variedad orientable y riemanniana, así que posee un elemento de volumen (ver, por ejemplo [12]). Esto es, una  $2 - forma$  que no se anula en ningún punto de la variedad. Por lo tanto, esta  $2 - forma$  es no degenerada y cerrada pues la variedad es  $2 - dimensional$ . Globalmente tenemos una forma simpléctica. En una carta, el elemento de volumen en  $S^2$  se escribe como :

$$\omega^2 = S \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi.$$

Donde  $S$  es el radio de la esfera.

De lo dicho anteriormente,  $S^2$  es una variedad simpléctica. Por lo tanto, se espera poder describir situaciones físicas que tengan a esta variedad como espacio de fases. A continuación veremos que la dinámica de un espín en un campo magnético uniforme vive en esta variedad simpléctica.

---

### 7.1.2. Formulación Hamiltoniana en $S^2$ : Espín en un Campo Magnético Uniforme.

Consideremos el comportamiento del dipolo magnético originado por el espín de una partícula cuando se le coloca en un campo magnético  $\vec{B}$  en el eje  $z$ . Este sistema físico está regido por la dinámica :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\frac{g_s\mu_b}{\hbar}\vec{S} \times \vec{B},$$

de la ecuación anterior se deduce (lo que muestra la consistencia con el vínculo, ya que  $S$  es fijo) que el módulo de  $\vec{S}$  no varía con el tiempo, es decir :

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2,$$

luego esta dinámica vive en una esfera de radio  $S$ . La pregunta natural es si esta dinámica es Hamiltoniana con la estructura simpléctica que se discutió previamente. Usando una carta esférica, con  $\vec{B} = B\hat{k}$  (en el eje  $z$ ) obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\phi} &= \frac{g_s\mu_b}{\hbar}B\end{aligned}\tag{7.1}$$

Para obtener el Hamiltoniano de este sistema usamos la relación global :

$$dH = i_X\omega^2 = \omega^2(\cdot, X)$$

En una carta, el campo vectorial Hamiltoniano del sistema está dado por :

$$X = \dot{\theta}\partial_\theta + \dot{\phi}\partial_\phi\tag{7.2}$$

Al reemplazar en la forma global de la dinámica obtenemos :

$$dH = i_X\omega^2 = S\sin(\theta) \left( \dot{\phi}d\theta - \dot{\theta}d\phi \right)\tag{7.3}$$

Al usar (7.1) se obtiene :

$$dH = \frac{g_s\mu_b}{\hbar}SB\sin(\theta)d\theta \longrightarrow H = -\frac{g_s\mu_b}{\hbar}SB\cos(\theta) = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$$

La ecuación anterior coincide con la energía de interacción entre el momento magnético del spin  $\vec{\mu}$  y el campo magnético  $\vec{B}$ .

De manera equivalente, se pudo partir, obviamente, del hamiltoniano y usar la forma global de la dinámica para obtener (7.1); veamos :

$$\begin{aligned}
H &= -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\frac{g_s \mu_b}{\hbar} SB \cos(\theta) \\
dH &= \frac{g_s \mu_b}{\hbar} SB \sin(\theta) d\theta \\
\frac{g_s \mu_b}{\hbar} SB \sin(\theta) d\theta &= \sin(\theta) (\dot{\phi} d\theta - \dot{\theta} d\phi)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

De la ecuación (7.4) se obtiene la dinámica del sistema:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0 \\
\dot{\phi} &= \frac{g_s \mu_b}{\hbar} B.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Así vemos que la dinámica del espín en un campo magnético uniforme es Hamiltoniana. Como sabemos del capítulo 3, puesto que  $S^2$  es compacta, esta dinámica hamiltoniana no viene de la forma simpléctica heredada de un lagrangiano. En la literatura se consiguen descripciones lagrangianas que llevan a una formulación simpléctica pero estas son necesariamente locales.

## 7.2. $S^{2n}$ como Espacio de Fases

A continuación queremos generalizar la situación de  $S^2$  a esferas de dimensión par mayor que dos. Como veremos, esto no es posible. La razón de esta imposibilidad es topológica y para mostrarlo usaremos el concepto de cohomología de de Rham.

### 7.2.1. Cohomología de de Rham

Las formas que son la imagen de otra forma vía la derivada exterior son denominadas exactas; y las formas cuya derivada exterior es nula, son llamadas cerradas. Dado que  $d^2 = 0$ , se tiene que las formas exactas son cerradas.

La inversa a esta afirmación en general no es verdad, las formas cerradas no tienen que ser exactas.

La idea de la cohomología de de Rham es clasificar los diferentes tipos de formas cerradas en una variedad; esto se hace con una relación de equivalencia, donde dos elementos de la clase equivalente, es decir, dos formas cerradas, son denominadas cohomólogas si su diferencia es una forma exacta.

Consideremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} Z_{dR}^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} \\ B_{dR}^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \tau \in \Omega^{k-1}(M), \omega = d\tau\} \end{aligned}$$

Donde  $\Omega^k(M)$  es el conjunto de las  $k$ -formas definidas sobre la variedad  $M$ . El  $k$ -ésimo espacio cohomológico de de Rham de  $M$ , se define como el espacio cociente de las formas cerradas por las formas exactas (ver, por ejemplo [10]):

$$H_{dR}^k(M) = Z_{dR}^k(M) / B_{dR}^k(M)$$

**Ejemplo:** Sea  $M = R$ , calculemos  $H_{dR}^1(R)$ . Es trivial chequear que, en este caso, todas las 1-formas cerradas son exactas por lo tanto :

$$H_{dR}^1(R) = \{0\}.$$

Esta situación también es cierta en  $R^n$ . Donde, toda forma cerrada necesariamente es exacta. Sin embargo, esta no es la situación en otras variedades donde la cohomología es no trivial.

### 7.2.2. Cohomología de de Rham de las Esferas

**Teorema:** : La cohomología de las esferas está dada por :

$$H_{dR}^k(S^n) = \begin{cases} R, k = 0, n \\ 0, \text{ otros } k \end{cases}$$

La demostración de este teorema se puede realizar haciendo uso de la técnica de la secuencia de Meyer-Vietoris; ver [10], [11], [13],[14], [15]. De este resultado tenemos el siguiente teorema:

**Teorema:** : Las esferas  $(S^{2n}, n > 1)$  no admiten formas simplécticas globales.

**Demostración:** Del teorema anterior se sigue que  $H_{dR}^2(S^{2n}) = \{0\}$ . Por lo tanto, toda 2-forma cerrada es exacta. Pero en la sección (3.4.2) probamos que en una variedad compacta, no existen formas simplécticas exactas definidas globalmente. Puesto que  $S^{2n}$  es compacto, tenemos que es imposible definir una forma simpléctica  $\square$

El teorema anterior nos dice que es imposible tener una formulación Hamiltoniana sobre  $S^{2n}(n > 1)$ . Evidentemente, mucho menos una formulación Lagrangiana. Formulas locales, como siempre, se pueden hacer pero la física es global.

# Capítulo 8

## El Campo de Dirac

En este capítulo queremos llevar la discusión del formalismo hamiltoniano tal cual ha sido considerada en los capítulos anteriores, pero esta vez tomaremos como ejemplo un sistema con infinitos grados de libertad. La formulación hamiltoniana de este tipo de sistemas es importante, no sólo para la dinámica clásica, sino para la construcción de su teoría cuántica (para la cual es una guía). Como ejemplo concreto vamos a estudiar el campo clásico de Dirac. Lo consideraremos en (3+1) y (1+1) dimensiones. Demostraremos que la dinámica asociada al campo clásico de Dirac es hamiltoniana construyendo la forma simpléctica (*global*) explícitamente y su hamiltoniano.

### 8.1. La Ecuación de Dirac

Históricamente, la ecuación de Dirac surge como una candidata para describir la mecánica cuántica del electrón tomando en cuenta la relatividad especial de Einstein. Esta ecuación también se puede considerar como una dinámica clásica. Esto significa, que en cada punto tenemos un campo (*un espinor*) bien definido en analogía a como se define en cada punto del espacio un campo electromagnético clásico. Es decir, por ejemplo, que hay una energía asociada a este campo clásico a diferencia de la energía de una partícula cuántica que esta asociada con el espectro de un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert.

El campo clásico de Dirac tiene la forma de una columna de cuatro números complejos,

$$\psi(x) = (\psi^\alpha(x)), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Se llama el biespinor de Dirac. La dinámica del campo clásico de Dirac vendría dada por la ecuación,

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = 0. \tag{8.1}$$

---

Las matrices  $4 \times 4$ ,  $\gamma^\nu$ , satisfacen la relación de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_4,$$

donde  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu$  (el anticonmutador de matrices),  $g^{\mu\nu}$  es la métrica en el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas, e  $I_4$  denota la matriz ( $4 \times 4$ ) unidad. La primera pregunta sobre las relaciones de Dirac es sobre la existencia de matrices que la obedecen. Dirac demostró que uno puede tomar, por ejemplo,

$$\gamma^0 = \gamma_D^0 \equiv \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \gamma_D^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

donde  $\sigma_0$  es la matriz ( $2 \times 2$ ) unidad, y  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son las matrices de Pauli. Las matrices (8.2) son conocidas como la representación de Dirac. Existe un teorema matemático el cual garantiza que todas las matrices  $\gamma^\mu$  pueden ser obtenidas a partir de una representación arbitraria vía una transformación de similaridad. Luego, cualquier conjunto de matrices de Dirac  $\gamma^\mu$  puede ser obtenida de  $\gamma_D^\mu$ ,

$$\gamma^\mu = A^{-1}\gamma_D^\mu A,$$

donde  $A$  es una matriz ( $4 \times 4$ ) no singular. Las soluciones de la ecuación de Dirac (8.1) con las diferentes escogencias de las matrices  $\gamma^\mu$  están obviamente correlacionadas, esto es

$$\psi(x) = A^{-1}\psi_D(x),$$

donde  $\psi_D$  es solución de (8.1) con las matrices  $\gamma^\mu$  en la representación de Dirac.

La dinámica clásica definida por la ecuación de Dirac, siendo una ecuación de primer grado, tiene como espacio de estados, en un tiempo dado, los biespinores de Dirac. Estos representan un campo clásico complejo. Por simplicidad supondremos que el estado son funciones infinitamente diferenciables. Además, para que su energía sea finita (*la energía es conservada ya que hay invariancia frente a translaciones en el tiempo*), exigiremos que,

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) < +\infty, \quad (8.3)$$

para toda solución de la ecuación de Dirac, donde

$$\bar{\psi}(x) = \psi^+(x) A^+ A \gamma^0.$$

Donde  $+$  denota la operación del adjunto del biespinor considerado como una matriz de una columna compleja. Notemos que (8.3) no depende del tiempo ni de la representación de las matrices  $\gamma^\mu$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) &= \int d^3x \psi^+(x) A^+ A \psi(x) \\ &= \int d^3x \psi_D^+(x) \psi_D(x), \end{aligned} \quad (8.4)$$

lo cual nos dice que no depende de la representación. Es fácil, chequear que esta cantidad es independiente del tiempo. Además (8.4) es obviamente definida positiva.

## 8.2. Formulación Lagrangiana

Dada la dinámica del campo clásico de Dirac, definida en la sección anterior, queremos ver si esta dinámica es hamiltoniana. Como sabemos de lo visto a lo largo de este trabajo no es forzoso que una formulación hamiltoniana venga de una lagrangiana. En la literatura, usualmente, se considera a la ecuación de Dirac como proveniente de un lagrangiano (ver por ejemplo: [3] y [16]). Sin embargo, de esta formulación lagrangiana no se puede obtener (vía una transformada de Legendre) una formulación hamiltoniana como veremos en breve.

Sea la densidad Lagrangiana :

$$L = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\nu \partial_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi) - m \bar{\psi} \psi. \quad (8.5)$$

Tomamos como variable dinámicas independientes  $\bar{\psi}^\alpha$  y  $\psi^\alpha$ . Así, tenemos que el lagrangiano (8.5) es una variable real y del principio variacional se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange. De una de las ecuaciones de Euler-Lagrange recuperamos la ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi = 0.$$

Notemos, que aunque el lagrangiano es una función del fibrado tangente en variable real, la dinámica está definida no en el fibrado tangente sino en el espacio de configuración. Luego, procediendo de la manera usual, definimos los momentos canónicos conjugados :

$$\begin{aligned} P_\psi &= \partial_{\dot{\psi}} L = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\nu \\ P_{\bar{\psi}} &= \partial_{\dot{\bar{\psi}}} L = -\frac{i}{2} \gamma^\nu \psi \end{aligned} \quad (8.6)$$

Notemos que (8.6) nos dan un resultado anómalo ya que los momentos canónicos viven en el espacio de configuración (*lo cual contradice que estos viven en un espacio diferente al de configuración*, esto es, en el fibrado cotangente). Por lo tanto, no se puede obtener una formulación hamiltoniana geométrica a partir de la formulación lagrangiana del campo de Dirac. Esto es, pasar del fibrado tangente al fibrado cotangente.

En la siguiente sección veremos que no es necesario partir de un lagrangiano para obtener la ecuación de Dirac. En efecto, obtendremos esta dinámica de una formulación hamiltoniana que no es el fibrado cotangente de la variedad de configuraciones de la formulación lagrangiana del campo de Dirac.

### 8.3. Formulación Simpléctica del Campo de Dirac

De la sección anterior vemos que no hay una formulación simpléctica estándar (*que viva en un fibrado cotangente*) que parte del lagrangiano de Dirac. En esta sección demostraremos que, efectivamente, la dinámica del campo de Dirac no reside en el fibrado cotangente del espacio de configuración del lagrangiano (8.5).

#### 8.3.1. Forma Simpléctica

Tenemos que el campo clásico de Dirac, aunque es un sistema de infinitos grados de libertad (*distinto a lo estudiado en los capítulos anteriores*), tiene como espacio de configuración un espacio vectorial complejo. Esto simplifica el tratamiento ya que, como en el caso de  $C^n$ , veremos que hay una forma simpléctica. En efecto, en el espacio vectorial del campo de Dirac,  $\mathcal{D}$ , donde

$$\mathcal{D} = \{ \psi^\alpha(x) \in C^\infty(R^3) \oplus C^\infty(R^3) \oplus C^\infty(R^3) \oplus C^\infty(R^3), \text{ tal que se verifica (8.3)} \},$$

tenemos un producto escalar dado por :

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int d^3x \bar{\phi} \gamma^0 \psi, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}.$$

Luego, similarmente al caso de  $C^n$ , podemos definir la forma simpléctica sobre el espacio vectorial real  $\mathcal{D}$  (*todo espacio vectorial complejo se puede considerar como real*) dada por :

$$\omega(\phi, \psi) = \text{Im}(\langle \phi | \psi \rangle).$$

El hecho de que  $\omega$  es una forma simpléctica en el espacio vectorial real  $\mathcal{D}$  se sigue de las propiedades usuales del producto escalar en el espacio vectorial complejo  $\mathcal{D}$ .

### 8.3.2. Dinámica Hamiltoniana en $\mathcal{D}$

Tenemos entonces que  $\mathcal{D}$  es un espacio vectorial simpléctico. Tenemos también la ecuación de Dirac en  $\mathcal{D}$ . La pregunta obvia es si el campo vectorial que genera la dinámica del campo de Dirac viene dado por una función hamiltoniana vía la forma simpléctica definida en la sección anterior. La respuesta es que sí, como explicaremos a continuación.

La dinámica de Dirac se puede ver incluida en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , donde:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3) \oplus L^2(\mathbb{R}^3)$$

Mas aún , como es bien conocido (ver [17]) esta dinámica es generada por un operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$ . En el caso de la representación de Dirac, este operador viene dado por :

$$H_0 = \begin{pmatrix} m\sigma_0 & -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -m\sigma_0 \end{pmatrix},$$

con dominio dado por (ver [17])  $H^1(\mathbb{R}^3)^4 \subset \mathcal{H}$ , el primer espacio de Sobolev. Tenemos el siguiente teorema ([12]):

**Teorema:** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert complejo y  $\omega(\phi, \psi) = \text{Im}(\langle \phi | \psi \rangle)$ . Entonces:

- Un operador lineal  $H_0$  en  $\mathcal{H}$  que genera una dinámica tipo Schrödinger es Hamiltoniano si y solo si  $H_0$  es simétrico.
- La función hamiltoniana asociada con  $H_0$  esta dada por,

$$H = \frac{1}{2} \langle H_0 \psi | \psi \rangle.$$

Por lo tanto, al usar este teorema, se sigue que la dinámica del campo clásico de Dirac es hamiltoniana y que el hamiltoniano viene dado por:

$$H(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi | H_0 \psi \rangle.$$

Es decir, el hamiltoniano será explícitamente:

$$\begin{aligned} H(\psi) &= \frac{1}{2} \int (\bar{\psi} \gamma^0 H_0 \psi) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \{ \bar{\psi} (-i\gamma^i \partial_i + m) \psi \} d^3x, \end{aligned}$$

que coincide con la energía conservada calculada del teorema de Noether.

### 8.3.3. Campo de Dirac en $(1 + 1)$

La discusión anterior hecha en  $(3 + 1)$  no hace uso del caracter espinorial del campo de Dirac. En efecto, podemos considerar el campo de Dirac en  $(1 + 1)$  donde  $\psi^\alpha$  (ver [18]) obedece la ecuación de Dirac en  $(1 + 1)$  y no puede ser un espinor ya que en  $(1 + 1)$  no hay espinores (ver [18]).

Toda la discusión anterior se lleva a cabo perfectamente en  $(1 + 1)$ , ya que análogamente, existe un operador autoadjunto que genera el campo de Dirac en  $(1 + 1)$ . De hecho, todos los cálculos son más simples y no los repetiremos para no alargar innecesariamente el trabajo.

---

# Capítulo 9

## Discusión

En este trabajo, hemos afrontado la problemática de la formulación hamiltoniana de teorías físicas clásicas, con finitos o infinitos grados de libertad, en el lenguaje de la geometría simpléctica. En particular, hemos discutido la relación de la formulación lagrangiana y la hamiltoniana. La conclusión obvia es que la hamiltoniana y la lagrangiana son equivalentes si el Lagrangiano es regular. Sin embargo, hay situaciones donde existe la hamiltoniana y esta no viene de una lagrangiana. Ejemplos son, en finitos grados de libertad, un espín en un campo magnético externo, y en infinitos grados de libertad, el campo de Dirac.

En la discusión de la formulación hamiltoniana hemos visto la importancia de los aspectos globales (*geométricos*) de esta. Normalmente, en la literatura física, no se toman en cuenta los aspectos globales. De hecho, por ejemplo, se discute si un sistema es completamente integrable y no se menciona que esto tiene que ver con aspectos no locales (*la no existencia de suficientes constantes de movimiento globales*). Otro aspecto que ilustra la importancia de la globalidad es el teorema de Darboux. Efectivamente, variedades simplécticas de la misma dimensión no se pueden distinguir localmente (*cosa que no ocurre en geometría Riemanniana, donde si pueden ser distinguidas localmente*). En nuestro trabajo, hemos visto que  $S^{2n}$ ,  $n = 2, 3, 4, 5, \dots$  no admite una formulación simpléctica. Este es un resultado global.

El problema de un espín en un campo magnético externo ha sido considerado en la literatura. Este sistema físico se considera desde el punto de vista relativista o sin relatividad. En ambos casos, la formulación lagrangiana es la herramienta fundamental. Sin embargo, nuestros resultados del capítulo (6) demuestran que la dinámica de un espín no proviene de una formulación lagrangiana. Efectivamente, esta dinámica no vive en un fibrado cotangente, ya que el espacio de fases es compacto. Por lo tanto, habría que revisar estos estudios anteriores para ver como se comparan con nuestros resultados.

El resultado de que  $S^{2n}$  no admite una forma simpléctica definida globalmente tiene

---

un origen topológico. Este resultado es conocido en la literatura matemática (ver, por ejemplo, [19]). Notemos que la demostración de la imposibilidad de una forma simpléctica sobre  $S^{2n}$  solo se puede hacer trabajando en una formulación geométrica. A veces se ve que se colocan en igual pie (en el mejor de los casos) a los métodos geométricos con los métodos usando coordenadas. Mas aún, se enfatiza que los métodos de coordenadas son preferibles ya que permiten calcular más fácilmente. Sin embargo, este resultado de imposibilidad no puede ser mostrado con métodos de coordenadas. De lo cual se observa que los métodos geométricos son fieles al problema mientras que los métodos de coordenadas pueden introducir conclusiones espúreas.

En el caso del campo clásico de Dirac, tenemos una formulación lagrangiana y una hamiltoniana que viene de una forma simpléctica. Lo nuevo es que la forma simpléctica del campo de Dirac no viene de la estructura del fibrado cotangente que se obtiene normalmente del lagrangiano. Como demostramos, este no es el caso. Existe la alternativa de tratar este lagrangiano con la teoría de Dirac de vínculos para construir la formulación hamiltoniana. No obstante, el método de Dirac no lleva a una forma simpléctica como la que hemos construido explícitamente en el capítulo 7.

Finalmente, en este trabajo hemos considerado la formulación hamiltoniana desde el punto de vista de la geometría simpléctica. Sin embargo, para obtener una formulación hamiltoniana, no es necesario una variedad simpléctica, otra posibilidad es una variedad de Poisson. Una variedad de Poisson es, esencialmente, una variedad con un corchete de Poisson. Evidentemente, toda variedad simpléctica es Poissoniana, pero al revés no necesariamente es cierto.

---

# Apéndice A

## Atlas Estereográfico Para las Esferas

### A.1. $S^1$

Consideremos el par de rectas que parten de los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$  e intersectan a  $S^1$  en el punto  $(x_0, y_0)$ . Con estas rectas podemos asignar a  $(x_0, y_0)$  una coordenada  $x_1$  y  $x_2$  en los planos  $y = -1$  y  $y = 1$  respectivamente, según se ilustra en la siguiente figura:

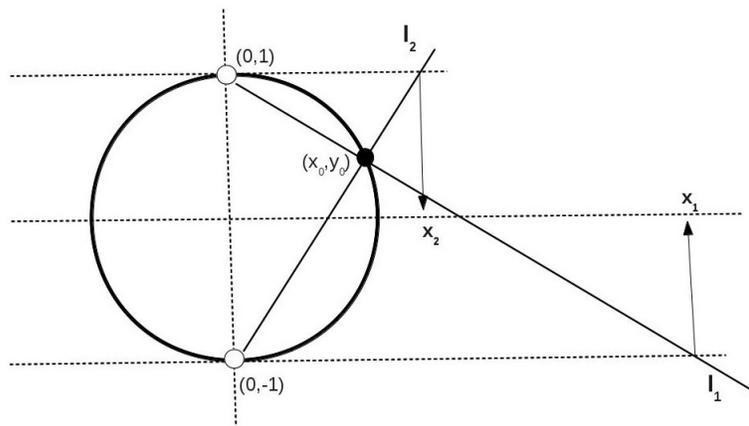


Figura A.1: Atlas estereográfico para  $S^1$

La coordenada  $x_i$  se obtiene al intersectar la recta  $l_i$  con el plano  $y = (-1)^i$ .

Para  $i = 1$ , la ecuación de la recta  $l_1$  está dada por:

$$(x, y) = t(x_0, y_0 - 1) + (0, 1)$$

---

Al intersectar con el plano  $y = -1$  obtenemos:

$$(x_1, -1) = t(x_0, y_0 - 1) + (0, 1)$$

$$x_1 = \frac{2x_0}{1 - y_0}$$

Con esta carta se cubre  $S^1 - \{(0, 1)\}$ . Para tener un atlas, necesitamos otra carta la cual en este caso, viene dada por la coordenada  $x_2$ . Procediendo de manera análoga para la recta  $l_2$ , obtenemos:

$$(x, y) = t(x_0, y_0 + 1) + (0, -1)$$

$$(x_2, 1) = t(x_0, y_0 + 1) + (0, -1)$$

$$x_2 = \frac{2x_0}{1 + y_0}$$

### A.1.1. Condición de Compatibilidad

La intersección de las dos cartas es  $S^1 - \{(0, 1), (0, -1)\}$ . Dada una coordenada  $x_1$  de la primera carta, sabemos :

$$x_0 = \frac{1 - y_0}{2} x_1$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 1$$

Con estas dos ecuaciones podemos expresar a  $x_0$  y  $y_0$  en función de la coordenada  $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{4x_1}{x_1^2 + 4} \\ y_0 &= \frac{x_1^2 - 4}{x_1^2 + 4} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Haciendo uso de todas las relaciones encontradas, la condición de compatibilidad está dada por :

$$x_2 = \frac{4}{x_1}$$

Como podemos ver, la condición de compatibilidad es infinitamente diferenciable en la región de intersección de las cartas.

## A.2. $S^n$

Procediendo de manera análoga al caso de  $S^1$ , consideraremos el par de rectas que pasan por los puntos  $(0, \dots, 1)$  y  $(0, \dots, -1)$  e intersectan a  $S^n$  en el punto  $(x_{01}, \dots, x_{0n})$ .

Bajo estas consideraciones tenemos :

$$x_1^i = \frac{2x_{0i}}{1 - x_{0n}}$$

$$x_2^i = \frac{2x_{0i}}{1 + x_{0n}}.$$

Así tenemos un atlas para  $S^n$  cuya intersección es  $S^n - \{(0, \dots, 1), (0, \dots, -1)\}$ .

### A.2.1. Condición de Compatibilidad

Sabiendo que :

$$x_{0i} = \frac{1 - x_{0n}}{2} x_1^i$$

$$x_{0n}^2 = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{1i}^2$$

La condición de compatibilidad está dada por :

$$x_2^i = \frac{4x_1^i}{\sum_{j=1}^{n-1} x_1^j x_1^j}$$

Como podemos ver, la condición de compatibilidad es infinitamente diferenciable en la region de intersección de las cartas. Para más referencias respecto a las proyecciones estereográficas, ver capítulo 4, sección 18 , ejemplo B.2 de [4], para una referencia más concisa ver [20].



# Apéndice B

## Atlas de las Proyecciones Ortogonales Para las Esferas

### B.1. $S^1$

Consideremos las cartas sobre  $S^1$  dadas por:

$$\begin{aligned} U_{x^+} &= (y, +\sqrt{1-y^2}) & y \in (-1, 1) \\ U_{x^-} &= (y, -\sqrt{1-y^2}) & y \in (-1, 1) \\ U_{y^+} &= (x, +\sqrt{1-x^2}) & x \in (-1, 1) \\ U_{y^-} &= (x, -\sqrt{1-x^2}) & x \in (-1, 1) \end{aligned} \tag{B.1}$$

Las cartas  $U_{x^+}$  y  $U_{y^+}$  se intersectan en el primer cuadrante:

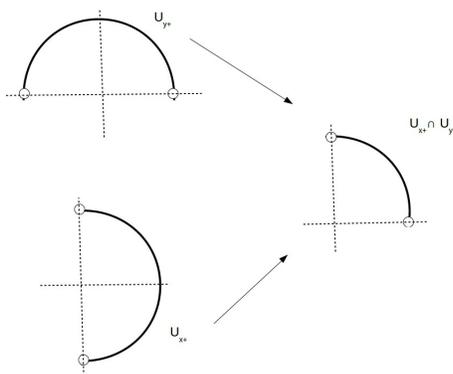


Figura B.1: Atlas de las proyecciones ortogonales para  $S^1$

---

La condición de compatibilidad en esta region está dada por :

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in (0, 1)$$

Nuevamente la condición es  $C^\infty$  en  $x \in (0, 1)$ .

## B.2. $S^n$

El atlas de las cúpulas para una esfera  $n - dimensional$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$$

está dado por las cartas :

$$\begin{aligned} & \vdots \\ U_{x_j^+} &= \left( \dots, x_{k \neq j}, \dots, + \sqrt{1 - \sum_{i=1, \neq j}^{n+1} x_i^2} \right) \\ U_{x_j^-} &= \left( \dots, x_{k \neq j}, \dots, - \sqrt{1 - \sum_{i=1, \neq j}^{n+1} x_i^2} \right) \\ & \vdots \end{aligned}$$

con  $k, j = 1, \dots, n + 1$  . Para más referencias, ver página 194, ejemplo 5.3 de [10].

# Bibliografía

- [1] H Goldstein, C Poole, and J Safko. *Classical Mechanics, third edition*. Adisson Wesley, New York, 2002.
  - [2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Classical Mechanics, third edition*. ELSEVIER, Boston, 1976.
  - [3] Greiner and Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, New York, 1996.
  - [4] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York, 1989.
  - [5] Ana Cannas Da Silva. *4-manifolds : Symplectic or Not*. Springer, New Jersey, 2007.
  - [6] A. Mishchenko and A. Fomenko. *A Course of Differential Geometry and Topology*. Mir Publishers, Moscow, 1988.
  - [7] Harley Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover, New York, 1989.
  - [8] Manfredo P. Do Carmo. *Differential Forms And Applications*. Springer, New York, 1994.
  - [9] Serge Lang. *Differential And Riemannian Manifolds*. Springer, New York, 1962.
  - [10] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology And Physics, second edition*. IoP, Bristol, 2003.
  - [11] Benjamin Smith. *Differential Geometry*. McGill University, Montreal, 2010.
  - [12] Ralph Abraham and Jerrold Marsden. *Foundations of Mechanics*. Adisson Wesley, New York, 1987.
  - [13] Ortiz Omar. *Cálculo de la Cohomología de De Rham de los Espacios Proyectivos por medio de la Sucesión de Gysin*. UCV, Caracas, 2009.
  - [14] Patrick Hafkenschied. *De Rham Cohomology of Smooth Manifolds*. VU University, Amsterdam, 2010.
  - [15] Ana Cannas Da Silva. *Symplectic Geometry*. Springer, New York, 2004.
-

- [16] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Quantum Fields*. Benjamin Publishing Company, Inc., Moscow, 1983.
  - [17] Bernd Thaller. *The Dirac Equation*. Springer, New York, 1992.
  - [18] Souad Tabban. *Aspectos de Mecánica Cuántica Relativista en Dimensiones Bajas*. UCV, Caracas, 2009.
  - [19] Ana Cannas Da Silva. *Lectures On Symplectic Geometry*. Springer, New York, 2006.
  - [20] B.A. Rosenfeld and N.D. Segeeva. *Stereographic Projection*. Mir Publishers, Moscow, 1977.
-