Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Sobre Teorías de Chern - Simons y Formas de Transgresión en D=5

Br. María Alejandra Granadillo Criollo

Tutores: Dr. Mauricio Angel
Dr. Pío Arias

Trabajo Especial de Grado

Caracas, 5 de Junio del año 2013

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

Sobre Teorías de Chern - Simons y Formas de Transgresión en D=5

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela por la **Bra. María Alejandra Granadillo Criollo**.Como requisito parcial para optar al título de: Licenciado(a) en Física.

Tutor: Dr. Mauricio Angel A.
Tutor: Dr. Pío Arias

Caracas, Venezuela
Junio, 2013

A mis padres...

Agradecimiento

Todo lo que soy se los debo a mis padres Yajaira Criollo y Francisco Granadillo, atribuyo todos mis éxitos en esta vida a la enseñanza moral, intelectual y física que recibí de ellos.

A mis hermanos María Teresa, Rubén, Yenibel y Alfredo por apoyarme de forma incondicional en cada meta propuesta.

A mi estimado tutor y amigo Mauricio Angel por creer que podía lograrlo y convencerme de que lo creyera.

Al profesor Pío Arias por su disposición.

A los demas profesores de la Escuela que ayudaron a mi formación académica y personal.

A quienes me acompañaron en éste largo camino, los que comenzaron siendo compañeros de pasillo y hoy terminan siendo mis amigos de la vida Ariannais Chitty (my person), Natascha Egurrola, Osiris Barrios, Víctor Fernández y Xavier Matute éstos últimos aunque lejos siempre los llevo presente, me han enseñado que la distancia es solo una excusa para extrañarlos más.

A mis queridos amigos Jhonalbert Aponte, Juan Marín, Bicky Marquéz y Manuel Oropeza, con quienes cursé muchos de las asignaturas de ésta carrera y con los cuales celebré y llore los altos y bajos de la misma.

A mis inolvidables amigos de matemáticas, quienes siempre me motivaron a seguir con este proyecto multidisciplinario Carlos Luis Gonzáles, Ángel Padilla, Freysimar Solano.

A mi compañero de primaria, mi colega de universidad y mi amigo del alma Rubén Padrón, son muchos años de buenas experiencias vividas. ¡Lo logramos!

"Nuestra mayor gloria no está en no haber caído nunca, sino en levantarnos cada vez que caemos." Oliver Goldsmith

Índice general

Introducción

Una teoría clásica de campos se puede describir en términos de fibrados con grupo estructural G, junto con un funcional lagrangiano que induce la acción de la teoría. Esta descripción permite, entre otras cosas, estudiar las simetrías de la teoría, las cantidades conservadas, formalizar el estudio de la cuantización de una teoría clásica y estudiar los observables.

La mayoría de las teorías físicas se pueden escribir como una teoría de campos además, tres de las cuatro fuerzas fundamentales son teorías de campos invariantes bajo transformaciones infinitesimales (ó de calibre). La Relatividad General no es una teoría de calibre, el desarrollo de una teoría unificada de las 4 fuerzas, en el contexto de la teoría de calibre tendrá que lidiar con éste problema.

A través de la historia se ha tratado de describir la gravedad en términos de una teoría de calibre que se pueda extender a altas dimensiones (D>4). En tal sentido, se han realizado diversos aportes, entre los cuales se destacan las siguientes contribuciones:

- **Teorías de Lovelock** son teorías que viene de la generalización de la acción de Einstein-Hilbertpara D>4 , y donde se considera torsión cero.

- **Series de Torsión** generalizan la acción de Einstein-Hilbert, se incluye torsión en el lagrangiano (serie de torsión de polinomios invariantes de Lorentz, los cuales no están incluidos en la series de Lovelock y a los que se les puede añadir una dimensión).

- **Teorías de Chern-Simons** son teorías (de calibre) topológicas que se pueden describir a través de un lagrangiano que involucra las formas de CS para un grupo de calibre, y cuya acción describe la dinámica clásica, en éstas teorías se garantiza la independencia referente a los marcos inerciales proporcional a las transformaciones de calibre. Las teorías de CS son localmente invariantes de calibre.

¿Por qué Chern-Simons?

Ventajas	Desventajas
No depende de la métrica del espacio base. Los observables vienen dados en términos de invariantes topológicos. Puede ser extendida a dimensiones mayores a 4.	No es globalmente invariante de calibre, pues la acción cambia por un término de borde bajo transformaciones de calibre.

En [1] se reescribe el funcional de Chern-Simons en términos de una forma de transgresión, y en este caso la teoría es estrictamente invariante de calibre, la acción tiene un extremo cuando valen las ecuaciones de movimiento y las cantidades conservadas resultan más sencillas de calcular. Por otro lado, en [2] el funcional de Chern-Simons se describe en forma explícita para $D = (2n+1)$, la ecuación de movimiento de este funcional es precisamente la ecuación generalizada de Maurer-Cartan, es decir, la 1-forma de conexión resulta n-plana, esto en el marco de la teoría de n-complejos.

Motivación

La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales en la física. Clásicamente la gravedad como fuerza se explica a través de dos puntos de vista.

Newton

Establece por primera vez una relación cuantitativa (deducida empíricamente de la observación) de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa. Dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos de diferente masa únicamente depende del valor de sus masas y del cuadrado de la distancia que los separa.

Einstein

Interpreta los fenómenos gravitatorios como alteraciones de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de masas. La presencia de masa, energía ó momentum en una determinada región del espacio-tiempo, provoca la alteración de los coeficientes de la métrica por lo que, con esta visión la gravitación es una pseudo-fuerza que aparece por el efecto de haber escogido un sistema de refencia no-inercial.

A continuación se presenta un esquema que tiene como finalidad hacer la comparación de manera puntual entre las dos visiones, recordemos que la teoría de newton es un límite de la de Einstein.

Newton	Einstein
La gravedad es una fuerza de atracción.	La gravedad es la distorsión del espacio tiempo, a causa de objetos de gran masa.
El tiempo es un absoluto	El tiempo es relativo.
Los objetos caen por con la misma velocidad independientemente de su masa(localmente).	El tiempo está íntimamente ligado al espacio (relación espacio-tiempo).

El primer intento de describir la teoría gravitatoria como teoría clásica de campo fue a través de la acción de Einstein-Hilbert por medio del trabajo de relatividad general. Ésta acción es la que precisamente lleva a las ecuaciones de campo de Einstein haciendo uso del principio de mínima acción.

El hecho de que se pueda derivar las ecuaciones de movimento a partir de la acción tiene diversas ventajas, entre ellas el que se facilite el trabajo de la unificación de la relatividad general con otras teorías clásicas de campo, las cuales también están formuladas en términos de la acción.

A través de la acción se hace más fácil identificar las cantidades conservadas, usando el teorema de Noether.

Gravedad de Chern - Simons

Son teorías de CS con un grupo espaciotemporal como grupo de gauge, las expresiones para los grupos de Sitter se reducen a cero en el caso de Poincaré y se pueden calcular a partir del álgebra, para especificar el modelo se debe dar información del tensor invariante a usar. Esta teoría no es equivalente nisiquiera on-shell a la Relatividad General, y el que la torsión no sea cero no es requerido por las ecuaciones de movimiento, al contrario de lo que sucede en 2+1. Sin embargo se cree que las gravedades de CS en dimensiones más altas son equivalentes a la Relatividad General en ciertos límites. Es posible también construir acciones de CS para los grupos espaciotemporales usando combinaciones simetrizadas de trazas ordinarias como tensores invariantes.

Las formas de transgresión son generalizaciones de las formas de CS que involucran dos campos de calibre, los cuales están definidos en el mismo espacio tiempo y en variedades con un borde común.

Se utiliza ésta forma de reescritura porque hace que la teoría de CS se vuelva globalmente invariante de calibre, se obtiene un principio de acción bien definido, de modo que la acción es un extremo cuando valen las ecuaciones de movimiento y las cargas conservadas que resultan de esto son covariantes.

El presente trabajo nace de los intentos de entender la relación entre conexiones n-planas y formas de transgresión. consiste en la caracterización del caso para 5 dimensiones, estudiar los potenciales de transgresión en términos de conexiones n-planas, hacer uso de los grupos de cohomología generalizados a fin de buscar una clasificación de los observables y cantidades conservadas y está estructurado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1** se hace un breve repaso en las formulaciones de la gravedad y su desarrollo histórico desde el punto de vista de Newton, Einsten etc, Se introduce de manera general las teorías de campo y de calibre para así darle paso a la descripción a las teorías de Chern-Simons clásicas junto a sus ecuaciones de campo.

En el **Capítulo 2** se definen las formas de Chern-Simons, se generalizan éstas para altas dimensiones, luego se describen sus análogas reescritas en forma de transgresión para D=2n+1 junto a las ecuaciones de movimiento relacionadas.

En el **Capítulo 3** se busca unificar la noción de las formas de transgresión con el tratamiento de formas Chern-Simons. Se describe de forma explícita el funcional de CS para D=(2n+1) en el marco de los N-complejos, donde la dinámica que describe este funcional es precisamente la ecuación de Maurer-Cartan. Se particulariza el cálculo para 5 dimensiones y se describe un modelo a manera de ejemplo ilustrativo.

Capítulo 1

La gravedad

En el presente capítulo se hace un breve repaso en las formulaciones de la gravedad y su desarrollo histórico desde el punto de vista de Newton y Einstein. Se describen brevemente los aportes de las teorías de Lovelock y Las series de torsión. Se introduce de manera general las teorías de campo usando una formulación Lagrangiana y Hamiltoniana en términos de fibrados, de igual forma se reseñan las teorias de calibre para así darle paso a la descripción a las teorías de Chern-Simons clásicas junto a sus ecuaciones de campo, finalmente se caracterizan dichas teorías para el caso tridimensional. Para el desarrollo del mismo se hizo referencia de los siguientes autores ([8],[13,14],[17-24])

1. Antecedentes

. La Gravedad Según Newton

La ley de gravitación universal fué presentada por Newton, ésta describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Establece por primera vez una relación cuantitativa (deducida empíricamente de la observación) de la fuerza con que se atraen dos objetos con masa. Así, Newton dedujo que la fuerza con que se atraen dos cuerpos de diferente masa únicamente depende del valor de sus masas y del cuadrado de la distancia que los separa. También se observa que dicha fuerza actúa de tal forma que es como si toda la masa de cada uno de los cuerpos estuviese concentrada únicamente en su centro,lo cual permite reducir enormemente la complejidad de las interacciones entre los cuerpos.

Cuanto más masivos sean los cuerpos y más cercanos se encuentren, con mayor fuerza se atraerán. El valor de la constante de Gravitación Universal no pudo ser establecido por Newton, quien únicamente dedujo la forma de la interacción gravitatoria, pero no tenía suficientes datos como para establecer de manera precisa su valor. Solo predijo que su valor debería ser muy pequeño. mucho tiempo después se desarrollaron las técnicas necesarias para calcular su valor, y aún hoy es una de las constantes universales conocidas con menor precisión. En 1798 se hizo el primer intento de medición(con el experimento de Cavendish).

Limitaciones de la teoría

Si bien la ley de la gravitación universal da una muy buena aproximación para describir el movimiento de un planeta alrededor del Sol, o de un satélite artificial relativamente cercano a la Tierra, durante el siglo XIX se observó pequeños problemas que no se conseguían resolver, relacionados directamente con la trayectoria predicha por esta teoría para algunos planetas.

Además de este problema, en la actualidad el número de las desviaciones observacionales existentes que no se pueden explicar bajo la teoría newtoniana son varias:

- Ésta teoría únicamente es válida para cuerpos de poca masa o distancias grandes, lo cual se cumple para todos los planetas del Sistema Solar excepto para Mercurio, puesto que éste se encuentra muy cercano al Sol.
- Aunque bajo la descripción de Newton, la gravedad únicamente se produce entre cuerpos con masa, se ha observado cómo la luz también se curva (se desvía) como consecuencia de

la gravedad producida por un cuerpo masivo, por ejemplo el Sol. Este hecho, que aunque sí podía llegar a interpretarse únicamente usando la ley de la Gravitación Universal, no daba cuenta de la desviación correcta observada y esto resultó ser una de las primeras predicciones contrastadas que apoyaron la Relatividad General.

- La velocidad de rotación de las galaxias no parece responder adecuadamente a la ley de la gravitación, lo que ha llevado a formular el problema de la materia oscura y alternativamente de la dinámica newtoniana modificada. A través de la Tercera ley de Kepler se menciona que los periodos de los cuerpos crecen con la distancia a la que se encuentran del cuerpo masivo. Aplicando dicho principio a las estrellas de una galaxia, debería observarse algo similar para las estrellas más alejadas del centro de la galaxia, pero esto es algo que no se observa y que, manteniendo la ley de la Gravitación Universal, únicamente puede ser explicado si en dicha galaxia existe mucha más masa de la que se observa, la cual es precisamente la denominada materia oscura, puesto que sería materia que no vemos.

Además la teoría de gravedad según Newton no presenta un caracter covariante.

. La Gravedad Según Einstein

La búsqueda de una teoría de la gravedad que fuese compatible con los principios relativistas introducidos por Einstein, la inclusión de la gravitación en una teoría de formulación covariante, la necesidad de buscar una teoría que proporcionara descripciones físicas adecuadas para un sistema de referencia totalmente general llevaron a establecer la teoría de la relatividad general.

Según la teoría de Einstein, ningúna información puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, de modo que al asumir los postulados de Newton que llevaría implícitamente la posibilidad de que un observador fuera afectado por las perturbaciones gravitatorias producidas fuera de su cono de luz, da origen a una contradicción.

La solución a esta disyuntiva la proporcionó Einstein, interpretando los fenómenos gravitatorios como alteraciones de la curvatura del espacio-tiempo producida por la presencia de masas. La presencia de masa, energía ó momentum en una determinada región del espacio-tiempo, provoca la alteración de los coeficientes de la métrica por lo que, con esta visión la gravitación es una pseudo-fuerza que aparece por el efecto de haber escogido un sistema de refencia no-inercial.

Las carácteristicas de esta nueva teoría son:

- **El Principio General de Covariancia:** lo cual quiere decir que las leyes físicas deben tomar la misma forma matemática en todos los sistemas de coordenadas, en otras palabras, cualquiera que sea el movimiento de los observadores, las ecuaciones tendrán la misma forma y contendrán los mismos términos. Este sugiere que las leyes deben ser escritas en términos de tensores, cuyas leyes de transformación covariantes y contravariantes pueden proporcionar invariancia.

- **El Movimiento Libre Inercial de Una Partícula:** en un campo gravitatorio se realizará a través de trayectorías geodésicas.

- **El Principio de Equivalencia:** que quiere decir que las leyes de la relatividad especial se aplican localmente para todos los observadores inerciales, este principio convierte a la gravedad en una fuerza aparente, y su aparición es debida a la elección de un marco de referencia acelerado. Conviene señalar que dicho principio no se cumple en presencia de campos electromagnéticos, por lo que su papel en el desarrollo de la teoría de la relatividad general se vuelve menos protagónico.

La Relatividad General se distingue de otras teorías de la gravedad por la simplicidad que proporciona al acoplar la materia y la curvatura del espacio, la curvatura le dice a la materia como moverse y de forma recíproca la materia le dice al espacio como curvarse. Además los fenómenos que la mecánica clásica atribuye a la acción de la fuerza de gravedad, tales como una caída libre, la órbita de un planeta o la trayectoria de una nave espacial son interpretados como efectos geométricos del movimiento de un espacio-tiempo curvado.

Uno de los problemas para lograr constriuir una teória única que unifique todas las fuerzas conocidas (fuerte,débil,electromagnética y gravitatoria) con el fin de facilitar su cálculo y estudio exhaustivo radica en el hecho de que la relatividad general no es una teoría de calibre, y las demás teorías fundamentales de la física si están descritas en términos de calibre, esto genera una inconsistencia a la hora de intentar integrar todas las teorías. Con el fin de solventar esto, se busca describir la gravedad en términos de una teoría de calibre que se pueda extender a altas dimensiones, En tal sentido se han realizado diversos aportes, entre los cuales se destacan las siguientes contribuciones:

. Teorías de Lovelock

Son teorías que involucran términos polinómicos (de Lovelock), los cuales son descritos como densidades escalares en el tensor de curvatura de Riemann, poseen como propiedad remarcable el hecho de que sus derivadas de Euler - Lagrange contienen derivadas de la métrica de orden no mayor a dos , (mientras que el polinomio genérico de densidades escalares contiene derivadas de la métrica de orden 4). Una carácteristica de los términos de Lovelock es que su primera contribución no nula en el sentido de la expasión $g\lambda\mu = \eta\lambda\mu + h\lambda\mu$ de la métrica alrededor del espacio plano, es una derivada total. La teoría de Lovelock provee una extensión para la gravedad en una dimensión mayor a 4, mediante el planteamiento del siguiente teorema:

La acción más general para la gravedad no involucra torsión y porporciona a lo sumo ecuaciones de campo de segundo orden para la métrica y viene dada de la forma

$$I_D = k \int_M \sum_{p=0}^{[D/2]} a_p L^{(D,p)} \tag{1.1}$$

Donde;

- a_p son constantes arbitrarias
- $L^{(D,p)}$ está dado por
  $L^{(D,p)} = \in_{a1\ldots ad} R^{a1a2} \ldots R^{a2_p1a2p} e^{1a2p+1} \ldots e^{a_D}$

Para D $= 2$ esta acción se reduce a una combinación lineal del tipo Euler 2D. X_2 y de espacio-tiempo en volumen(área)

$$\begin{aligned} I_2 &= k \textstyle\int_M \in_{ab} [a, R^{ab} + a_0 e^a e^b] \\ I_2 &= k \textstyle\int_M \sqrt{|g|}(a_1 R + 2a_0) d^2x \\ I_2 &= k a_1 \cdot X_2 + 2k a_0 \cdot V_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Esta acción tiene un extremo local pra $V_2 = 0$, que refleja el hecho que, a menos otra fuente importante está incluida, I_2 no hace una teoría dinámica muy interesante para la geometría. Sí, la variedad M tiene una métrica euclidea y límites preescritos para el primer término, se elige un término límite y la acción es extendida por una superficie en forma de una burbuja de jabón, este es el famoso problema de Plateu, el cual consiste en establecer la forma de una superficie limitada con un área mínima, por un cierto límite fijado que se encuentre cercano a la curva.

Para D = 3 la ecuación $[I_D]$ se reduce a la acción de Hilbert con un término de volumen, cuyos coeficientes son constantes cosmológicas.

Para D = 4 la acción tiene, además las de las 4 dimensiones invariantes del tipo Euler, X_4

$$
\begin{aligned}
I_4 &= k \int_M \in_{abcd} [a_2 R^{ab} R^{cd} + a_1 R^{ab} e^c e^d + a_0 e^a e^b e^c e^d] \\
I_4 &= -k \int_M \sqrt{|g|}[a_2 (R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2) + 2a_1 R + 24a_0] d^4x \\
I_4 &= -ka_2 \cdot X_4 - 2a_1 \int_M \sqrt{|g|} R d^4x - 24ka_0 \cdot V_4
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Para todas las dimensiones, el lagrangiano es un polinomio de grado $d \leq D/2$ en la curvatura 2-forma. En general, cada término $L^{(D,p)}$ en el lagrangiano $[I_D]$ es la continuación a D-dimensiones. En partícular, cada potencia mayor a D en la curvatura, es del tipo Euler X_D. En 4 dimensiones, el término $L^{(4,2)}$ en $[I_4]$ puede ser identificado como la densidad de Gauss - Bonnet, el cual integra sobre una variedad tetradimensiona cerrada y compacta. Este término también posee la primera generalización no trivial de la gravitación de Einstein que ocurre en 5 dimensiones, donde el término cuadrático que puede ser agregado al lagrangiano.

$$
\in_{abcde} R^{ab} R^{cd} e^e = \sqrt{|g|}[R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} - 4R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + R^2] d^5x \tag{1.4}
$$

. Series de Torsión

Generalizan la acción de Einstein - Hilbert, se incluye torsión en el lagrangiano. (Serie de torsión de polinomios invariantes de Lorentz, a los que se les puede añadir una dimensión).

La torsión no está incluida en el lagrangiano descrito en el caso de las teorías de Lovelock, aunque no se toma idénticamente igual a cero. Esto quiere decir que incluir la torsión en el lagrangiano es tan válido como incluir la curvatura. En este sentido existe una serie de polinomios invariantes Lorentz, los cuales efectivamente no están incluidos en las series de Lovelock y que pueden añadir a cada dimensión.

$$
L_D^{Tor}(e^a, \omega ab) = \sum_s \beta_s P^s(e^a, R^{ab}, T^a) \tag{1.5}
$$

Se debe notar que en estos polinomios no se involucra totalmente el símbolo antisimétrico $\in_{abc}$ La forma explícita de esos términos no es muy esclarecedora y toma una forma diferente para cada dimensión. La construcción de estos polinomios así como una amplia discusión de estos está dada en las referencias señaladas a comienzo de capítulo. Estos polinomios incluyen los invariantes de Pontryagin de $4k$-forma, $P_{4k}(R) = R^{a1}_{a2} \ldots R^{a2k}_{a1}$ como un caso partícular.

Existen dos términos adicionales en esta familia y que pueden ser incluidos en cuatro dimensiones,$t = T^a T_a$ y $r = R^{abe_a e_b}$. Sin embargo, resulta que la combinación $N_4 \equiv t - r$ es una derivada total(del invariante de Nieh-Yan) y por lo tanto hay dos términos que son equivalentes lagrangianos. Este tipo de invariantes están también descritos en las clases de Chern-Pontryagin, y también puede que contribuya a la anomalía en el espacio tiempo con torsión.

2. Teorías de Campos Clásicos

Estas teorías están encargadas de describir la dinámica de los fenómenos físicos macroscópicos representables mediante un campo físico. Normalmente se restringe al estudio de los campos de fuerzas clásicos en su tratamiento relativista.

Los sistemas físicos formados por un conjunto de partículas interectuantes de la mecánica clásica y los sistemas físicos de partículas relativistas sin interacción, son sistemas con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas por ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, los campos físicos además de evolución temporal o variación en el tiempo, presentan variación en el espacio. Esa característica hace que los campos físicos se consideren informalmente como sistemas con un número infinito de grados de libertad. Las peculiaridades de los campos hacen que sus ecuaciones de movimiento ó evolución temporal vengan dadas por ecuaciones en derivadas parciales en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Un campo de fuerzas en la descripción newtoniana es una colección de funciones definidas sobre una región del espacio. Si el campo consta de una única componente entonces el campo se llama campo escalar, si las componentes del campo medidas por diferentes observadores se comportan como una 1-forma o un vector entonces se dice que se tiene un campo vectorial. Además de los campos escalares y vectoriales, en física clásica existen campos tensoriales entre otros.

La formulación de la mecánica clásica está dada por los métodos de Lagrange y Hamilton, pero no solo así se describe el movimiento de sistema de partículas, otras teorías de campo también pueden ser formuladas en términos de lagrangianos y hamiltonianos.

Una teoría de campos lagrangianos es definida por una función de campos local, llamada el Lagrangiano, y una integral sobre el espacio tiempo llamada la acción. Las soluciones clásicas de la teoría de campo son puntos críticos de la acción.

Por otro lado, la teoría hamiltoniana está definida por la función Hamiltoniano, sobre el espacio de fase, ó más generalmente sobre una variedad simpléctica. El movimiento clásico del sistema es descrito por las ecuaciones de Hamilton, cuyas soluciones son integrales sobre curvas de gradientes simplécticos de un campo vectorial de el hamiltoniano. Para varios sistemas mecánicos de partículas, los cuales deben ser considerados como teorías $0 + 1$ dimensiones, donde se toman ambas formulaciones, tanto la hamiltoniana como la lagrangiana, y la relación entre estas es expresada por la transformación de Legendre, si el lagrangiano es no degenerado. Un ejemplo típico es el movimiento de una partícula sobre una variedad Riemanniana M. La acción de la teoría Lagrangiana es la energía de un camino en M. El hamiltoniano es la función norma cuadrada sobre el fibrado tangente TM, con el cual se obtiene una estructura simpléctica desde la métrica.

Para teorías de altas dimensiones la formulación hamiltoniana solo tiene sentido sobre espacio - tiempo, en los cuales el producto del espacio y el tiempo sean globales, esto es, sobre $(d + 1)$-variedades dimensionales, las que precisamente son el producto de una d-variedad con un 1-variedad. Un campo en este producto de variedades es un camino de campos en el espacio. La simetría juega un papel muy importante en la física clásica; muchos sistemas mecánicos admiten grupos de simetrías.

. Teorías de Calibre

Éstas teorías involucran el estudio de las propiedades de los fibrados del espacio total, ó bien sus objetos asociados, como conexiones, curvaturas, etc, tales que no cambian bajo transformaciones de calibre. Desde el punto de vista de las matemáticas se tienen los siguientes elementos:

- Una variedad M diferenciable. Real o compleja (en general se pide una variedad C^{∞} riemanniana o pseudo-riemanniana).
- Un grupo G (que por lo general se pedirá un grupo de Lie compacto).
- Un haz vectorial E sobre M tal que G puede ser visto como un grupo de transformaciones en E.
- Un álgebra g asociado a G (es generalmente un álgebra de Lie de dimensión infinita).
- Una conexión ω del haz. El espacio de todas las conexiones en E lo denotamos por A(E) (generalmente es un espacio de dimensión infinita).

En estas teorías el espacio - tiempo se considera la variedad base de un fibrado principal, de grupo estructural dado, denominado grupo de calibre. Los grupos más comunes son los grupos de Lie unitarios o especiales unitarios (U(1), SU(1), SU(2), SU(3), etc).

Se deberá elegir una sección de dicho fibrado. Para ello se construye una conexión que generalmente toma valores en el álgebra del grupo y que en física es el potencial o el campo de calibre.

Diremos que dos conexiones están relacionadas bajo una transformación si representan los mismos campos de partículas y potenciales. Tales conexiones son indistinguibles, ya que con este tratamiento se identifican solo aquellas conexiones que estén relacionadas por transformaciones de calibre. El problema entonces será buscar aquellas conexiones que modelan la naturaleza, podemos plantearlo ahora usando el principio de mínina acción.

El principio de mínima acción nos dice que hay ciertas cantidades asociadas a muchos fenómenos en la naturaleza, éstos se llevan a cabo de tal forma que esas cantidades toman valores mínimos. Utilizando teorías de calibre, se observa que ciertas ecuaciones que aparecen en forma natural (como por ejemplo la teoría de la relatividad) se pueden expresar como condiciones necesarias y suficientes para minimizar el funcional.

Para explicar mejor el principio de mínima acción en las teorías de calibre, se presenta el siguiente esquema:

1. Se define un funcional en el espacio de las conexiones que llamaremos A(E). Esto es, una función que a cada conexión le asocie un número real. Esta función intuitivamente mide la cantidad que deseamos minimizar. En ciertos casos ésta función es el lagrangiano.
2. Se requiere que el funcional sea invariante bajo el grupo de calibre. Esto quiere decir, que si dos conexiones están relacionadas bajo una transformación de gauge entonces el funcional les debe asociar el mismo número real.
3. Se dan condiciones para obtener las conexiones en las cuales el funcional toma valores mínimos (en general llamados puntos críticos). Este problema, usualmente se traduce en sistema

de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son las conexiones buscadas. En mecánica clásica, por ejemplo, las ecuciones que aparececen son las de Euler - Lagrange.

4. Se pide probar la existencia de conexiones que sean puntos críticos del funcional.

5. Generalmente, si las soluciones existen, son infinitas y es deseable contarlas o parametrizarlas mediante un conjunto de parámetros adecuados.

El conjunto de parámetros para las soluciones recibe el nombre de espacio de soluciones. Éste espacio depende del problema particular. Tener dicho espacio es de suma importancia, ya que aquí se va a tener toda la información sobre las soluciones.

La variedad M, el espacio estructural G y el fibrado E generalmente están determinados únicamente por el problema que se desea estudiar. Dados M y G podemos ver que lo más importante para hacer trabajar el esquema previamente planteado es la elección del funcional. Naturalmente el problema en el que estamos interesados nos deberá sugerir cuál funcional usar.

Los campos en el modelo estándar exhiben alguna simetría interna abstracta conocida como invariancia de calibre. Ésta invariancia significa que el lagrangiano que describe el campo no cambia bajo la acción de un grupo de Lie que actúa sobre las componentes de los campos. Cuando se aplica la misma transformación a todos los puntos del espacio, y estos permanecen sin cambio se dice que la teoría tiene invariancia global.

3. Teorías de Chern-Simons

Son teorías que no dependen de la métrica del espacio base, además los observables vienen dados en términos de invariantes topológicos y pueden ser extendida a dimensiones mayores a cuatro, sin embargo no es globalmente invariante de calibre pues la acción cambia por un término de borde bajo transformaciones de calibre.

La forma de conexión de Chern-Simons, puede ser vista como el lagrangiano de una teoría clásica de campo. La teoría clásica de Chern-Simons tiene muchos aspectos sutiles los cuales provocan algunos refinamientos de la formulación matemática usual de la teoría de campos. Sin embargo, las teorías de CS se deben tratar con precaución, éstas difieren del resto de las teorías de campo en dos aspectos importantes.

El primero, la teoría es topológica (en general covariante) está definida sobre una variedad orientada sin alguna elección de métrica, y de aquí viene el hecho de que admite grupo de difeomorfismos como simetrías. donde los ejemplos usuales solo admiten isometrias.

El segundo, el lagrangiano involucra solo primeras potencias de las primeras derivadas de los campos, lo que conlleva a que al primer orden de la ecuación de Euler - Lagrange, el ejemplo usual de eso involucra segundas derivadas o primeras derivadas cuadradas, y a su vez al segundo orden de las ecuaciones de movimiento.

Todo es derivado de la acción. Este principio, ubica a la formulación lagrangiana adelante de la formulación hamiltoniana. En efecto, la última es derivada de la anterior. En muchas teorías de campo se escribe la acción y se verifican sus propiedades fundamentales inmediatamente.

- La acción de Chern-Simons es invariante bajo grandes grupos de simetrías (de transformaciones de calibre).

- Los campos son locales.

La teoría de Chern-Simons es una teoría de calibre, por lo que se trabaja con la geometría de conexiones sobre fibrados principales con grupo de estructura compacto G. Las formas de CS están parametrizadas por formas biliniales sobre el álgebra de Lie de G. Para obtener una acción la cual este bien definida hasta los enteros, se debe restringir hasta una cierta región de las formas integrales. Estos enteros son usualmente llamados el nivel de la teoría. Esto es suficiente para definir la acción de CS si G es conexo o simplemente conexo.

Las soluciones de la teoría clásica de CS son conexiones planas. La acción puede interpretada como el transporte paralelo de una conexión unitaria sobre la línea de fibrados de CS formado sobre el espacio de campos en el borde.

En muchas formas, la teoría de Chern-Simons clásicas unifica los objetos geométricos de calibre, en bajas dimensiones que están asociados con un grupo de Lie compacto G y una forma de integral bilineal en ésta álgebra de Lie.

Al hablar de simetría en la teoría de CS ó más generalmente en cualquier teoría de calibre clásica, se nombra la forma de simetría de un grupoide en vez de un grupo. Un grupoide es un "grupo con estados". En teorías de calibre, los estados están sobre varios fibrados principales sobre una variedad dada, y el grupo de elementos son isomorfismos entre fibrados principales. Para cada fibrado principal el automorfismo forma un grupo.

El grupo de transformaciones de calibre. Sin embargo, las conexiones tienen automorfismo. Esto es particularmente importante cuando se indexan fibrados y conexiones. Esta simetría extra tiene consecuencias no triviales, alguna de las cuales están en manifiesto en la teoría cuántica.

Las propiedades del espacio de configuración de la teoría de Chern-Simons (CS) depende de las propiedades del grupo de calibre G. si G es un grupo de Lie simplemente conexo, entonces el espacio de configuración es simplemente isomorfo al espacio del álgebra de Lie 1-forma valuado en la variedad base dada. Generalmente, se piensa que ésta, está dada por G-fibrados principales con conexiones.

Para los grupos de calibre simplemente conexos tenemos :

Para G un grupo de Lie de conexión simple, se describe la base, disponiendo de la teoría de CS

- Lagrangiano y acción funcional.
- Espacio de fase covariante.

El Lagrangiano y La Acción Funcional

Sea g un álgebra de Lie semi - simple, y escribamos $< -, - > \in W(g)$ Es la forma de Killing de un polinomio invariante (en el álgebra de Weil g).

Nótese que esto es una transgresión vía los elementos de CS. CS $\in W(g)$ (ó un múltiplo de), el álgebra de Lie canónica es :

$$\mu_3 = < -, [-, -] > \in CE(g) \tag{1.6}$$

En el álgebra de Chevalley - Eilenberg de g. Para M una variedad, suave, compacta, de 3 dimensiones, escribimos :

$$Conf(M) : \Omega^1(M, g) = \{\Omega^{\cdot}(M) \leftarrow W(g) : A\} \tag{1.7}$$

Para el grupo de álgebra de Lie valuada en la 1-forma en M.

A esto le llamamos **Campo de Espacios de Configuración** de la teoría de g-Chern-Simons sobre M.

$$CS(A) \in \omega^3(M), \tag{1.8}$$

llamada la forma de CS de A, éste es el lagrangiano de la teoría de CS sobre M.

Definición 1.1. La exponencial de la acción funcional de la teoría de CS es el morfismo al grupo cerrado.

$$Exp(is(-)) : Conf_M \to U(1), \tag{1.9}$$

El cuál envía una configuración del campo A a la integral sobre la variedad de esta forma de CS

$$A \to Exp(i \int_M CS(A)). \tag{1.10}$$

El Espacio de Fase Covariante

La acción funcional es local, esto es un espacio de fase covariante, el cual corresponde al espacio de soluciones a las ecuaciones de Euler - Lagrange y naturalmente lleva la forma de una estructura pre - simpléctica.

Las ecuaciones de Euler - Lagrange para la acción funcional de la definición 1 son:

$$F_A = 0, \tag{1.11}$$

donde F_A es la curvatura de la 2-forma del álgebra de Lie valuada en A. La estructura pre - simpléctica en el espacio de soluciones relativo a cualquier subvariedad 2-dimensional $M_o \to M$ es:

$$w(\delta A_1, \delta A_2)\alpha \int_{M0} < \delta A_1^{\delta} A_2 > . \tag{1.12}$$

Con la Línea de Observables de Wilson

Más generalmente, la configuración de las teorías de CS están definidas en variedades 3-dimensionales (M) con una subvariedad de una dimensión (cerrada) $M^{def} \to M$ donde cada componente conectado (difeomorfo a un círculo) es etiquetado por una representación unitaria irreducible R_i del grupo de calibre.

En la integral de camino de la formulación de la teoría de Chern - Simons esto significa que el integrando es adherido al bucle de Wilson W (M^{def}, R, A) de la conexión principal alrededor de M^{def}

$$Z(M^{def}, M)\alpha \int DAW(M^{def}, R, A)Exp(iS_{sc}(A)). \tag{1.13}$$

De manera más fundamental, todo el loop de Wilson $W(\dots)$ en sí mismo es considerado como el resultadode la integral de camino para la teoría de CS de 1-dimensión, con una orbita coadjunta como espacio modular de G y con representaciones de R derivados del método orbital.

Esto significa que el espacio de configuración de la teoría de Chern-Simons sobre $(M^{def} \to M)$ es el espacio de G-conexiones principales sobre la variedad y de mapas las órbitas coadjuntas sobre M^{def} de la teoría de CS tridimensional sobre la variedad M por encima, y de 1 teoría de CS de una dimensión a lo largo de M^{def} para el cual la conexión G-principal sirve como un background de un campo de calibre.

Para Grupos de Calibre Generales

Sí el grupo de Lie G no es simplemente conexo a un G-fibrado principal en 3-dimensiones, entonces M no será necesariamente trivializable (para $G = U(1)$) de grupos cerrados. Los fibrados cerrados en la variedad son clasificados por la clase Chern, la cual puede ser cualquier elemento de la integral de cohomología $H^2(M, Z)$.

Por lo tanto en estos casos, el espacio de configuración de la teoría de Chern - Simons ya no es general, solo un grupoide de formas de álgebras de Lie valuadas (las cuales son un grupoide de conexiones en el fibrado principal trivial, pero un grupoide de más conexiones generales en el fibrado principal no trivial). Entonces, la formulación general de la teoría de Chern-Simons es:

DEFINICIÓN 1.2. Sea G un grupo de Lie compacto, con un álgebra de Lie g y sea $< -, - >$, un polinomio invariante binario, entonces el homomorfismo de Chern-Weil refinado produce un mapa

$$\hat{C} : H^1(M, G)_{conn} \to H^4(M)_{diff}. \tag{1.14}$$

Desde G-fibrados con conexión a -4 grados de cohomología diferencial ordinaría de M, clasificando 3-fibrado cerrado con conexión sobre M. La teoría de CS 3-fibrado cerrado.

La acción funcional de la teoría de CS es un polinomio de alto grado, de éste 3-fibrado cerrado.

$$S_c s : \nabla \to \int_M \hat{C}(\nabla) \in U(1). \tag{1.15}$$

Caso Abeliano

DEFINICIÓN 1.3. Sea G = U(1) un grupo cerrado, y $< -, - >$ un polinomio canónico invariante. Entonces la configuración espacial es $H^2(M)_{diff}$ (cohomología diferencial ordinaria en grado 2) y la acción funcional está dada por la integración de la fibra en una cohomología diferencial ordinaria sobre el producto cuña.

$$S_c s : \hat{A} \to \int_M \hat{A} U \hat{A} \tag{1.16}$$

. Chern-Simons en 3 Dimensiones

Estas teorías fueron descubiertas en el contexto de anomalías de los 70's y usadas como un modelo exótico de un sistema de calibre para 2+1 dimensiones. Fué solo hasta mediados de los 80's que la gravedad de Einstein en 2+1 dimensiones fue incluida como un ejemplo de un sistema de CS, especialmente a través del trabajo de Witten. Los sistemas de CS son más relevantes de lo que aparentan a primera vista. La relatividad general en 2+1 dimensines (con o sin constante de cosmológia) es un sistema de CS (para grupos ISO(2,1) o SO(2,2) respectivamente), cualquier sistema mecánico ordinario escrito con el rigor hamiltoniano puede ser visto como un sistema de CS abeliano en 0+1 dimensiones. En retrospectiva, podemos ver que la clave para la construcción de la forma de CS (en 3 dimensiones) es la siguiente forma de Pontryagin

$$P = Tr[F \wedge F] \tag{1.17}$$

es cerrada

$$dP = 0 \tag{1.18}$$

por el lemma de Poincaré's, P es localmente exacta, esto quiere decir que es siempre posible escribir en una vecindad abierta como la derivada exterior de una 3-forma.

$$P = dL \tag{1.19}$$

Entonces la 3-forma L es precisamente el lagrangiano de Chern-Simons. Claramante esta idea puede ser generalizada a altas o (bajas) dimensiones, y para otras integrales de invariantes topológicos, como la carácteristica de Euler. Este es precisamente donde la conexión con las teorías de Lovelock pueden ser encontradas.

A continuación un breve repaso de algunos hechos acerca de los sistemas de CS tridimensionales estándar.

La idea es encontrar una 3-forma tal que :

$$dL_{CS} = Tr[F \wedge F] \tag{1.20}$$

donde

$$F = dA + A \wedge A \tag{1.21}$$

Es la curvatura (campo de fuerza) en el representación adjunta y A es el álgebra valuada de la conexión 1-forma. Sea G el grupo de calibre y g el álgebra generada por las matrices T_a, tal que $[T_a, T_b] = C^c_{ab}T_c$. Bajo la acción del grupo de calibre.

La conexión

$$A = A^a_\mu T_a dx^\mu \tag{1.22}$$

transforma como

$$A \rightarrow A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{1.23}$$

donde la 0-forma $g(x)$ es un elemento de g , entonces la curvatura cambia como

$$F \to F' = g^{-1} F g \tag{1.24}$$

y es fácil de mostrar, usando las propiedades cíclicas de la traza, tal que $Tr[F \wedge F]$ es invariante bajo las transformaciones de A y F, entonces el lagrangiano resulta ser

$$L_{CS} = Tr[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A] \tag{1.25}$$

Es fácil chequear que la acción de CS es invariante bajo transformaciones de calibre.

Primero observamos que bajo una transformación de calibre de la forma $A \to A'$ el lado derecho de

$$dL_{CS} = Tr[F \wedge F] \tag{1.26}$$

no cambia y por lo tanto $\delta(dL_{CS}) = 0$

En otras palabras, bajo una variación de el campo que lleve a la forma invariante de Pontryagin, el lagrangiano de CS cambia por una forma cerrada. Entonces, el cambio previsto δL_{CS} aproxima a cero suficientemente rápido el borde del espacio-tiempo, la acción de CS debería ser invariante también. Sustituyendo la transformación $A \to A'$ en el lagrangiano

$$L_{CS} = Tr[A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A] \tag{1.27}$$

se consigue que

$$L_{CS}(A') = L_{CS}(A) - dTr[dgg^{-1}A] - \frac{1}{3} Tr[(g^{-1}dg)^3] \tag{1.28}$$

entonces la acción cambia como

$$I_{CS}[A'] = I_{CS}[A] - \int_{\partial M} Tr[dgg^{-1}A] - \frac{1}{3} \int_M Tr[(gdg^{-1})^3] \tag{1.29}$$

Esto plantea un asunto importante, el que la acción no realmente invariante bajo la transformación de calibre $A \to A'$, a menos que $g \to 1$ suficientemente rápido para cancelar el segundo término, así mismo el tercer término también desaparece. La primera condición siempre se puede pedir, ya que parte de las reglas de juego de cualquier problema variacional en el que el campo satisfaga apropiadamente las condiciones de contorno, y es necesario restringir el tipo de transformaciones de campo permitidas en límite del espacio tiempo.

El último término de la expresión de $L_{CS}(A')$ es cerrado y por lo tanto no hay contribuciones topológicas, éste término puede ser expresado localmente como una derivada exterior de alguna 2-forma, la cual dependa de g(x). Es obvio que este término no podrá desaparecer simplemente por imponer alguna condición asintótica en la transformación de calibre.

La transformación de $I_{CS}[A']$ nos dice que la acción cambia por un término de superficie y posiblemente por un funcional de la transformación. Aunque ninguno de estos términos puede alterar las ecuaciones de campo, ellos pueden cambiar las propiedades globales de la teoría, como la definición de las cargas conservadas. De cualquier manera, la acción $I_{CS}[A]$ es un invariante de calibre genuina si la variedad no posee bordes ($\partial M = 0$).

Ecuaciones de Campo

Una vez definida el principio de una buena acción para la conexión A, es natural preguntarse lo que describe. Para conocer esto se procede a estudiar las ecuaciones de campo, variando los campos de acción.

$$\delta I_{CS}[A] = 2\int_M Tr[T_a T_b] F^a \wedge \delta A^b - \int_{\partial M} Tr[T_a T_b] A^a \wedge \delta A^b \tag{1.30}$$

De aquí se observa que la condición de tener un extremo bajo variaciones arbitrarias δA^b implica

$$F^a = 0 \tag{1.31}$$

Al definir el álgebra del grupo como

$$\gamma_{ab} \equiv Tr[T_a T_b] \tag{1.32}$$

La cual es una matriz no singular, lo cual siempre ocurre para los casos en los que se tiene álgebras de Lie semisimples en la representación adjunta y γ_{ab} es la métrica de Killing.

Álgebras semisimples son aquellas que no contienen subálgebras abelianas invariantes; Es decir, que no se pueden escribir como

$$G = G_0 \bigoplus U.$$

Donde U es abeliano. Las álgebras semisimples corresponden a los grupos clásicos SO(n), SU(n), $S_p(2n)$ y otros menos comunes, como $OS_p(n,m)$, $US_p(p,q)$, E_s, etc.

Existe un álgebra de Lie excepcionalmente importante la cual no es semisimple y aún así es una representación fiel para cuando γ_{ab} no es degenerada.

Este es el caso para el grupo de Poincaré en 2+1 dimensiones, ISO(2,1), cuya álgebra es

$$so(2,1) \bigotimes R^{2,1}$$

donde $R^{2,1}$ es el grupo de traslación en 2+1 dimensiones.

Esta excepción a la regla permite escribir el lagrangiano de Einstein - Hilbert como un 3-forma de CS para el grupo de Poincaré, y es la clave para la cuantizabilidad de la gravedad en 2+1 dimensiones.

Las ecuaciones de campo $F^a = 0$ lucen simples y no se puede esperar mucho de ellas. De hecho, es bien conocido los resultados de un set abierto B, homotópicamente abierto.

$$dA + A \wedge A = 0 \tag{1.33}$$

Entonces A puede ser escrita como un transformación de calibre de una conexión trivial

$$A = g^{-1} dg \tag{1.34}$$

en cualquier sitio en B.

En otras palabras, para una transformación de calibre siempre es posible tomar $A \to 0$ en un pequeño parche de M. Entonces, la configuración de campo descrita por la ecuación $F^a = 0$ podría ser trivial a menos que existan obstrucciones topológicas, las que pueden evitar $A = g^{-1}dg$ si se hace válido desde el principio la globalidad a lo largo de la variedad entera M, incluso si esto solo es válido en un pequeño conjunto abierto de B . Y esto es de hecho lo que pasa con la gravedad en 2+1 dimensiones, donde las ecuaciones de campo son de la forma de $F^a = 0$ y aún así se pueden encontrar soluciones no triviales como los agujeros negros y el colapso gravitacional. De cualquier forma,lo que sigue siendo cierto es el hecho de que un sistema de CS en 2+1 dimensiones no tiene grados de libertad locales que se puedan propagar. En dimensiones altas sin embargo, los sistemas de CS poseen grados de libertad locales que se propagan y la situacion es similar a la de la teoría de calibre estándard.

Capítulo 2

Formas de Chern - Simons y de Transgresión

En este capítulo se definen las formas de Chern-Simons como una función polinomial local de alguna 1-forma, se particularizan los casos para n=1 y n=2, luego se generalizan éstas para dimensiones altas. Se describen las formas de transgresión para el caso de Chern - Simons, se define la acción transgresora, las invariancias de difeomorfismo y gauge junto a las ecuaciones de movimiento relacionadas. Se estudian las cargas de Noether y el principio de mínima acción para así hacer el calculo de las corrientes y cargas conservadas. Finalmente se define la gravedad a manera de transgresión y se hace el estudio partícular para D = 2n+1. Para el desarrollo del mismo se hizo referencia de los siguientes autores ([2-12],[15])

1. Formas de Chern-Simons

La forma de CS es una función polinomial local de una 1-forma **A**, valuada en una álgebra de Lie g.

Explícitamente:

$$Q_{cs}^{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < A(tdA + t^2A^2)^n > \tag{2.1}$$

siendo $< ... >$ el tensor simétrico invariante bajo g de rango $(n+1)$

Los casos más simples son $n = 1, 2$

Para n=1

Usando :

$$Q_{cs}^{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < A(tdA + t^2A^2)^n >$$

$$Q_{cs}^{3} = 2\left(\int_0^1 dt < A(tdA) > + \int_0^1 dt < A(t^2A^2)\right)$$

$$Q_{cs}^{3} = 2\int_0^1 dt < tdA^2 > +2\int_0^1 dt < t^2A^3)$$

$$Q_{cs}^{3} = 2\frac{t^2}{2} \mid_0^1 + \frac{2}{3}A^3t^3 \mid_0^1$$

$$Q_{cs}^{3} = < AdA + \frac{2}{3}A^3 > \tag{2.2}$$

Para n=2

Usando:

$$Q_{cs}^{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < A(tdA + t^2A^2)^n >$$

$$Q_{cs}^{5} = (2+1)\int_0^1 dt < A(tdA + t^2A^2)^2 >$$

$$Q_{cs}^{5} = 3\int_0^1 dt < A\left(t^2(dA)^2 + 2tdA(t^2A^2) + t^4A^4\right) >$$

$$Q_{cs}^{5} = 3\int_0^1 dt < At^2(dA)^2 > +3\int_0^1 < 2tAdA(t^2A^2) > +3\int_0^1 < At^4A^4 >$$

$$Q_{cs}^{5} = A(dA)^2\frac{t^3}{3}\mid_0^1 + 6A^3dA\frac{t^4}{4}\mid_0^1 + \frac{3}{5}t^5\mid_0^1 A^5$$

$$Q_{cs}^{5} =< A(dA)^2 + \frac{3}{2}A^3dA + \frac{3}{5}A^5 > \tag{2.3}$$

Denotamos

$F = dA + A^2$ como la curvatura correspondiente a la conexión **A**

- $dQ_{cs}^{(2n+1)} =< F^{(n+1)} >$ como la propiedad de la forma de CS
- $d\delta_{gauge}Q_{cs}^{(2n+1)} = 0$ La identidad que involucra la variación de la forma de CS bajo transformaciones de gauge. Es una forma exacta.

$L_{cs}^{(2n+1)^k}\int_0^1 < A(tdA+t^2A^2)^n >$ Lagrangiano de CS para una teoría de gauge, siendo **k** una constante arbitraria adimensional.

Este lagrangiano cumple con las siguientes carácteristicas:

Dimensionalidad : El lagrangiano de CS solo existe en dimensiones impares.

Tensor invariante : Se hace uso de un tensor simétrico $< ... >$ invariante bajo el álgebra, el tensor es de rango n+1 (solo puede vincularse a la métrica de killing en d=3).

La métrica: Es independiente de cualquier métrica que pueda existir (ó no) en la variedad espacio temporal M.

Campos independientes: El único campo independiente es la 1-forma de conexión **A**.

Curvatura : El lagrangiano de CS contiene potencias más altas de la curvatura (para d $\geq$ **A**).

Dinámica : Las ecuaciones de movimiento son $D * F^A =< F^nGA >= 0$ A pesar de la presencia de potencias de la curvatura mayores que 2 en el lagrangiano, son de primer orden en **A**.

Generalización de las Formas de Chern-Simons a Dimensiones Altas

A pesar de la interesante estructura matemática, estas teorías tridimensionales parecen ser muy surealista como modelos de nuestro mundo. Veremos ahora como éstas ideas son extendidas a altas dimensiones. El ingrediente esenciales en la construcción de teorías de Chern-Simons en altas dimensiones es la existencia de una 2n-forma

$$Q_{2n}(A) = \gamma_{a1\ldots an} F^{a1} \wedge F^{a2} \wedge \cdots \wedge F^{an} \tag{2.4}$$

la cual es cerrada.

$$dQ_{2n} = 0 \tag{2.5}$$

Un invariante bajo transformaciones de calibre $A \rightarrow A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$

$$Q_{2n}(A') = Q_{2n}(A) \tag{2.6}$$

Es sencillo mostrar que los invariantes de la forma

$$Q_{2n}(A) = \langle F \wedge F \wedge \cdots \wedge F \rangle \tag{2.7}$$

Satisface estos requerimientos, donde hemos definido

$$\gamma_{a1\ldots a2} \equiv \langle T_{a1}, T_{a2} \ldots T_{an} \rangle \tag{2.8}$$

y $\langle \ldots \rangle$ destaca que para una operación con la traza en una representación apropiada del álgebra de Lie g. Los invariantes de la forma

$$Q_{2n}(A) = \gamma_{a1\ldots an} F^{a1} \wedge F^{a2} \wedge \cdots \wedge F^{an} \tag{2.9}$$

Corresponden 1:1 con el n-ésimo rango de tensores invariantes $\gamma_{a1\ldots an}$ los cuales pueden ser construidos por un grupo de calibre dado. El número de estos tensores suele ser generalmente pequeños.

Ahora haremos uso de la siguiente notación para escribir Q_2n como

$$Q_{2n}(A) = \langle F^n \rangle \tag{2.10}$$

Estos invariantes pertenecen a la familia de clases carácteristicas, conocidas como invariantes de Chern-Weil. Estas clases en sí mismas definen integrales invariantes relacionadas con las propiedades topológicas de los mapas que pueden establecerse entre la variedad M y el grupo G.

Entonces, la ecuación análoga a

$$dL_{CS} = Tr[F \wedge F] \tag{2.11}$$

es ahora

$$dL_{CS}^{2n-1} = \langle F^n \rangle \tag{2.12}$$

y su solución puede ser escrita como

$$L_{CS}^{2n-1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 dt\langle A(dtA + t^2A^2)^{n-1}\rangle + \alpha \tag{2.13}$$

Donde α es una (2n-1)-forma arbitraria cerrada ($d\alpha = 0$).

Bajo transformaciones de calibre de la forma $A \to A'$, la forma de Chern-Simons cambia como

$$L_{CS}^{2n-1}(A') = L_{CS}^{2n-1}(A) + d\beta + (-1)^{n-1}\frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}\langle(g^{-1}dg)^{2n-1}\rangle \tag{2.14}$$

donde la (2n-1)-forma β es una función de A y depende de g como la combinación $g^{-1}dg$, entonces la acción

$$I_{CS}^{2n-1}[A] = \int_M L_{CS}^{2n-1} \tag{2.15}$$

Describe un teoría de calibre para el grupo G, la cual bajo transformaciones finitas de calibre cambia como la integral de L_{CS}^{2n-1}. El segundo término de dicha expresión da lugar a un término de borde, y el tercer término es proporcional al número de repeticiones. De nuevo, se puede observar que bajo una transformación de calibre infinitesimal (conectado a la identidad) de la forma

$$\delta A = -\nabla\lambda \tag{2.16}$$

Donde $\lambda << 1$

La acción cambia por un término de superficie, el cual puede ser cero bajo apropiadas condiciones de contorno.

2. Formas de Trasgresión

Las formas de transgresión constituyen la matriz de donde surgen las formas de CS.

Una forma de transgresión es una función de dos conexiones de gauge cuya propiedad principal es su completa invariancia bajo transformaciones de gauge, recíprocamente las formas de CS pueden pensarse como formas de transgresión con uno de los campos de gauge igual a cero.

Se puede pensar el segundo campo de gauge en las formas de transgresión como un background de referencia fijo no dinámico, o como un campo dinámico. En el segundo caso además puede pensarse que ambos campos están definidos en el mismo espaciotiempo, o que están definidos en variedades con un borde en común.

A nivel de teoría de campos las formas de transgresión poseen :

- **Invariancia de calibre**

  Las teorías de Chern-Simons no son estrictamente invariantes de calibre, sino cuasi-invariantes, en el sentido de que la acción cambia por un término de borde bajo transformaciones de calibre. Las transgresiones en cambio son invariantes de calibre.

- **Principio de Acción**

  Para tener un principio de acción bien definido, (en el sentido de que la acción sea un extremo cuando valen las ecuaciones del movimiento) es necesario en general agregar un término de borde a la acción, lo cual a veces se hace caso por caso para configuraciones específicas. La acción de transgresión permite dar una prescripción general de los términos de borde que hacen el principio de acción bien definido, los cuales son parte de su definición.

- **Cargas conservadas covariantes**

  Las cargas conservadas que vienen de la acción de CS no son covariantes. Su álgebra de corchetes de Poisson contiene términos centrales, como sucede siempre que se parte de una acción cuasi invariante. Los valores obtenidos aplicando el teorema de Noether a estas teorías no coinciden con los obtenidos por los métodos hamiltonianos, que son los que tienen significado físico. Las cargas calculadas utilizando transgresiones como acciones son covariantes, reflejando la invariancia estricta de la acción, y dan los mismos valores que los métodos hamiltonianos.

Las transgresiones tienen otras áreas interesantes de aplicación, como por ejemplo el estudio de modelos de objetos extendidos de diversas dimensionalidades, como cuerdas y membranas (en general llamados branas).

Teorema de Chern-Weil

El teorema de Chern-Weil correlaciona la derivada exterior de la forma de transgresión con la diferencia entre dos densidades topológicas asociadas a dos nociones distintas de curvatura.

Sean $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{A}}$ para una álgebra de Lie g, con curvaturas correspondientes $\mathbf{F}$ y $\bar{\mathbf{F}}$.

sea $< ... >$ un tensor simétrico de rango $r = n + 1$ invariante bajo un grupo g. La forma de transgresión $Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow \bar{A}}$ es definida como:

$$Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow \bar{A}} = (n+1)\int_0^1 dt < \Theta F_t^n > \tag{2.17}$$

donde :

- $\Theta = A - \bar{A}$
- $A_t = \bar{A} + t\Theta$
- $F_t = dA_t + A_t^2$

La conexión A_t iterpola entre A y $\bar{A}$ a medida que t barre el initervalo $0 \leq t \geq 1$

La propiedad más importante de las formas de transgresión es su invariancia bajo transformaciones de gauge.

Dicha invariancia queda establecida fácilmente por medio de la siguiente cadena de argumentos :

1. La diferencia entre dos conexiones es un tensor:
   Θ trasforma como un tensor.

2. La suma de una conexión con un tensor produce otra conexión:
   A_t transforma como conexión.

3. La curvatura asociada a una conexión es un tensor:
   F_t transforma como un tensor.

4. Dado que todos sus argumentos son tensores, la propiedad de invariancia del tensor simétrico $<...>$garantiza que la forma de transgresión $Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow\bar{A}}$ permanezca invariante bajo transformaciones de gauge.

Consideremos :

- $A \rightarrow < F^{(n+1)} >$
- $\bar{A} \rightarrow < \bar{F}^{(n+1)} >$

Siendo A y la conexión y F la curvatura.

$$< F^{(n+1)} > - < F^{(n+1)} >= \int_0^1 dt \frac{d}{dt} < F_t^{(n+1)} > \tag{2.18}$$

Acción de Transgresión

La acción de una teoría de gauge definida en una variedad (2n+1) dimensional:

$$S_t[A, \bar{A}] = k \int_M Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow\bar{A}} \tag{2.19}$$

donde k una constante adimensional, y $Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow\bar{A}}$ es la forma de transgresión. Ésta acción es un funcional de dos campos independientes (Las 1-formas de conexión A y $\bar{A}$).

La acción de transgresión será invariante bajo difeomorfismos y transformaciones de gauge (grupo de simetría independientes).

Invariancia bajo difeomorfismo

Está garantizada por la naturaleza de la forma diferencial del lagrangiano de CS. "Todas las formas diferenciales, por construcción, son invariantes bajo grupo de difeomorfismos".

$$\delta_\alpha = -L_\epsilon \alpha \tag{2.20}$$

Es la variación funcional infinitesimal de una P-forma α

- ϵ Es el campo vectorial infinitesimal que genera difeomorfismo $\delta\chi^\mu = \epsilon^{\mu(x)}$
- L_ϵ Es la derivada de Lie

$$\delta_{dif} A = -L_\epsilon A$$

$$\delta_{dif}\bar{A} = -L_\epsilon \bar{A}$$

Invariancia bajo transformaciones de Gauge

Está garantizada por las propiedades de la forma de transgresión.

$$\delta_{gauge}A = -D\lambda$$

$$\delta_{gauge}\bar{A} = -D\lambda$$

$\lambda \in g$ elemento del álgebra que define la transformación.

La acción de transgresión contrasta con lo que ocurre con el caso de Chern-Simons, donde la acción cambia por un término de borde, bajo transformaciones de gauge.

La invariancia de gauge (por el principio de simetría) prohíbe la adición de un término de borde arbitrario a la acción de transgresión, porque ésta destruiría la invariancia.

Para la forma de transgresión, las condiciones de borde y las cargas de Noether asociadas tienen un significado intrínseco. Para el caso de CS no es así, las condiciones de borde y las cargas de Noether pueden ser modificadas por la adición de un término de borde arbitrario a la acción.

La acción de transgresión es discreta bajo el intercambio $A \leftrightarrow \bar{A}$

$$S_t[\bar{A}, A] = -S_t^{(2n+1)}[A, \bar{A}] \tag{2.21}$$

Sobre las Simetrías de Intercambio:

Haciendo $A \leftrightarrow \bar{A}$, las variables definidas en la forma de transgresión cambian a:

- $\Theta \to -\Theta$
- $A_t \to A_{1-t}$
- $F_t \to F_{1-t}$

Y la expresión de la acción cumplirá con :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(1-t)dt \tag{2.22}$$

Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Borde

$$\begin{aligned} A \to \bar{A}' &= A + \delta A \\ \bar{A} \to \bar{A}' &= \bar{A} + \delta\bar{A} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Bajo variaciones infinitesimales arbitrarias.

$$\delta S_t^{(2n+1)} = (n+1)k \int_M \left(< \delta A F^n > - < \delta \bar{A} \bar{F}^n >\right) + \int_{\partial M} \Xi \tag{2.24}$$

$$\Xi \equiv n(n+1)k \int_0^1 dt < \delta A_t \Theta F_t^{(n-1)} > \tag{2.25}$$

Deducción:

Partiendo de $Q_{A\leftrightarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt < \Theta F_t^n >$

Variamos infinitesimalmente :

- $\delta\Theta = \delta A - \delta\bar{A}$
- $\delta A_t = \delta\bar{A} + \delta\Theta$
- $\delta F_t = D_t \delta A_t \simeq \delta((A_t + (A_t)^2)$ Siendo Dt la derivada covariante en la conexión A_t.

Hacemos la variación:

$$\delta Q_{A\leftarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt\delta < \Theta F_t^n >$$

$$\delta Q_{A\leftarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt < \delta\Theta F_t^n > + (n+1)\int_0^1 dt < \Theta \delta F_t^n >$$

$$\delta F_t^n = n F_t^{n-1} \delta F_t^n$$

$$\delta Q_{A\leftarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt < \delta\Theta F_t^n > + (n+1)\int_0^1 dt < \Theta n F_t^{n-1} \delta F_t^n >$$

$$\delta Q_{A\leftarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt < \delta\Theta F_t^n > + (n+1)\int_0^1 dt < \Theta F_t^{n-1} \delta F_t^n >$$

$$\delta Q_{A\leftarrow\bar{A}}^{(2n+1)} = (n+1)\int_0^1 dt < \delta\Theta F_t^n > + n(n+1)\int_0^1 dt < \Theta D_t \delta A_t F_t^{n-1} >$$

$$< \theta D_t \delta A_t F_t^{(n-1)} > = < D_t \Theta \delta A_t F_t^{(n-1)} > + d < \delta A_t \Theta F_t^{(n-1)} > \tag{2.26}$$

Identidad de Bianchi: Derivada covariante a lo largo de la curva.

$$D_t F_t = 0 \tag{2.27}$$

Usando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} F_t &= D_t \Theta \\ \tfrac{d}{dt} \delta A_t &= \delta\Theta \end{aligned} \tag{2.28}$$

Usando la regla de Leibniz para $\frac{d}{dt}$

$$n < D_t \Theta \delta A_t F_t^{n-1} >= \frac{d}{dt} < \delta A_t F_t^n > - < \delta \Theta F_t^n > \tag{2.29}$$

Haciendo las sustituciones pertinentes y multiplicando por n :

$$n < \Theta D_t \delta A_t F_t^{n-1} >= n < D_t \theta \delta A_t F_t^{n-1} > + dn < \delta A_t \Theta F_t^{n-1} >$$

$$n < \Theta D_t \delta A_t F_t^{n-1} >= \frac{d}{dt} < \delta A_t F_t^n > - < \delta \Theta F_t^n > + dn < \delta A_t \Theta F_t^{n-1} >$$

Sustituyendo en la expresión de $\delta Q^{(2n+1)}_{A \leftarrow \bar{A}}$

$$\delta Q^{(2n+1)}_{A \leftarrow \bar{A}} = (n+1) \int_0^1 dt \frac{d}{dt} < \delta A_t F_t^n > + n(n+1) d \int_0^1 dt < \delta A_t \Theta F_t^{n-1} >$$

se produce

$$\delta Q^{(2n+1)}_{A \leftarrow \bar{A}} = (n+1)(< \delta A F^n > - < \delta \bar{A} \bar{F}^n >) + n(n+1) d \int_0^1 dt < \delta A_t \Theta F_t^{n+1} > \tag{2.30}$$

De donde se pueden escribir las ecuaciones de movimiento como:

$$< F^n G A >= 0 \tag{2.31}$$

$$< \bar{F}^n G A >= 0 \tag{2.32}$$

con la condición de borde:

$$\int_0^1 dt < \delta A_t \theta F_t^{n-1} > bm = 0 \tag{2.33}$$

Con esto se concluye que la dinámica producida por una acción del tipo

$$S_t[A, \bar{A}] = k \int_0^1 Q^{(2n+1)}_{A \leftarrow \bar{A}} \tag{2.34}$$

Determina que A y $\bar{A}$ sean campos independientes en la variedad M, Los cuales obedecen cada uno a ecuaciones de movimiento de CS desacopladas. Las condiciones de borde, en cambio, ligan ambas conexiones en ∂M, produciendo la primera diferencia significativa a nivel dinámico entre la acción de CS y la acción de transgresión.

Cargas de Noether

En cualquier sistema de gauge, el teorema de Noether proporciona un medio de extraer corrientes conservadas a partir de la acción de transgresión.

Las corrientes son del tipo (d-1)formas, siendo "d" la dimensión de la variedad espacio temporal M, cuya derivada exterior se anula cuando las ecuaciones de movimiento se satisfacen. Usualmente se interpretan las corrientes como el dual * de Hodge de una 1-forma, de modo que la ecuación de continuidad puede ser escrita en la forma

$$D * 1 - forma = 0$$

Para nuestro caso, el lagrangiano es invariante bajo dos conjuntos independientes de simetrías, (gauge y difeomorfismo). El teorema de Noether proporciona consecuentemente dos corrientes conservadas independientes para cada uno de ellos.

Teorema de Noether

Las ecuaciones de movimiento son invariantes si el lagrangiano de un sistema se transforma mediante la adición de una derivada total de alguna función $f(q_j, t)$, dependiente solo de las coordenadas temporales. Sea

$$S = \int_{t1}^{t2} L dt \tag{2.35}$$

La acción correspondiente a un lagrangiano L.

Se considera la transformación :

$$L' = L + \frac{df(q_j, t)}{dt} \tag{2.36}$$

La acción asociada con L' será de la forma :

$$S' = \int_{t1}^{t2} L' dt = \int_{t1}^{t2} (L + \frac{df(q_j, t)}{dt} dt = \int_{t1}^{t2} L dt + \int_{t1}^{t2} \left(\frac{df(q_j, t)}{dt} dt \right)$$

$$S' = S + \int_{t1}^{t2} \left(\frac{df(q_j, t)}{dt} dt \right)$$

$$S' = S + \Big[f(q_j(t2), t2) - f(q_j(t1), t1) \Big] \tag{2.37}$$

$$S' = S + Constante$$

Usando que $\delta S = \delta S'$

Principio mínima acción

Anuncia que la evolución del sistema entre el estado en t_1 y en t_2 es tal que δ sea mínima, es decir $\delta S = 0$ (siendo S un extremo por el principio de Hamilton). Entonces, el principio de mínima acción implica que $\delta S = \delta S' = 0$.

Las ecuaciones de lagrange derivadas de éste principio usando L ó L' tienen la misma forma, (son invariantes bajo la transformación).Una transformación infinitesimal:

$$L \rightarrow L' = L + \delta L \tag{2.38}$$

Que no modifique las ecuaciones de movimiento, representa una simetría del sistema (simetría de acción), Entonces diremos que "la acción es invariante bajo dicha transformación".

Teorema de Noether (Clásicamente)

Sí, la acción de un sistema con lagrangiano $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ es invariante bajo la transformacion infinitesimal de coordenadas $q'_j = q_j + \delta q_j$ que cambia el lagrangiano como $L' = L + \delta L$ de tal forma que $\delta L = \frac{df(q_j,t)}{dt}$ para alguna función $f(q_j, t)$. Entonces la cantidad

$$J = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - f = constante \tag{2.39}$$

Constituye una cantidad conservada asociada a la transformación δL , y a la funcion J se le denomina Corriente de Noether.

Demostración:

La transformación $q'_j = q_j + \delta q_j$ (con t fijo $\rightarrow \delta t = o$) Produce la siguiente variación en el lagrangiano

$$\delta L(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

$$\delta L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \tag{2.40}$$

usando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{2.41}$$

obteniendo que

$$\delta L = \sum_{j=1}^{s} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\Big)\delta q_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\Big(\delta q_j\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big) \tag{2.42}$$

según el teorema, la variación δL se puede escribir

$$\delta L = \frac{df(q_j, t)}{dt}$$

entonces

$$\delta L = \Big(Desarrollo\ de\ Leibintz\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big) = \frac{df(q_j,t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big) = \frac{d}{dt}f(q_j,t) \tag{2.43}$$

donde la función $f(q_j,t)$ debe ser continua.

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - f\Big) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - f\Big) = Constante \tag{2.44}$$

bautizando

$$J \equiv \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - f \tag{2.45}$$

como la corriente de Noether.

El teorema de Noether establece que a cada simetría que posee un sistema, le corresponde una cantidad conservada. Las simetrías y sus cantidades conservadas asociadas permiten conocer propiedades de un sistema y hacer predicciones sobre el comportamiento del mismo, sin necesidad de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de movimiento del sistema (pueden ser dificiles en muchos casos). Extensible a teoría de campos.

El teorema de Noether (forma diferencial)

Sea $L = L(\phi)$ una d-forma lagrangiana para un campo ϕ arbitrario (en general ϕ representa un conjunto de campos), asumimos que L

- Es invariante bajo difeomorfismos.
- Es invariante bajo transformaciones de gauge asociadas a una cierta álgebra de Lie.

Sí aplicamos una variación infinitesimal arbitraria

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$$

El lagrangiano $L = L(\phi)$ tomará la forma de :

$$\delta L = E(\phi)\delta\phi + d\Xi(\phi, \delta\phi) \tag{2.46}$$

donde

- $E(\phi) = 0$ corresponde a las ecuaciones de movimiento.
- Ξ es una (d-1) forma que depende de ϕ y de su variación $\delta\phi$

Cuando la variación $\delta\phi$ corresponde a una transformación de gauge, el lagrangiano varía a lo más en una forma exacta

$$\delta_{gauge} L = d\Omega \tag{2.47}$$

Significa que, cuando las ecuaciones de movimiento $E(\phi) = 0$ son satisfechas, la corriente toma la forma

$$J_{gauge} = \Omega - \Xi \tag{2.48}$$

siendo ésta conservada on shell, y con Ξ una (d-1) forma, i,e $dJ_{gauge} = 0$.

Ξ Indica que debemos reemplazar en $\Xi(\Phi, \delta\phi)$ la transformación de gauge correspondiente a ϕ.

Bajo un difeomorfismo infinitesimal $\delta\chi^{\mu} = \epsilon^{\mu}(x)$ la variación funcional del lagrangiano puede escribirse en la siguiente forma

$$\delta dif L = -\mathbf{L}_{\epsilon} L \tag{2.49}$$

$$\delta dif L = -\big(dI_{\epsilon} + I_{\epsilon} d\big) L$$

usando el hecho de que $dL = 0$

$$\delta dif L = -dI_{\epsilon} L \tag{2.50}$$

Haciendo la sustitución se obtiene que cuando las ecuaciones de movimiento $E(\phi) = 0$ se satisfacen, la corriente se escribe como

$$J_{dif} = -\Xi_{dif} - I_{\epsilon} L \tag{2.51}$$

(conservada on shell)

Para cada transformación habrá una simetría, por cada simetría habrá a su vez una corriente conservada.

Corrientes Conservadas Para la Acción Transgresora

Siendo el término de borde

$$\Xi = n(n+1)k\int_0^1 dt < \delta A_t \Theta F_t^{n-1} > \tag{2.52}$$

Se busca particularizar Ξ para los casos de transformaciones de gauge y difeomorfismos.

Corriente de Gauge

La corriente de Noether asociada a transformaciones de gauge se escriben como

$$*J_{gauge} = \Omega - \Xi_{gauge} \tag{2.53}$$

Nos interesa el estudio de una conexión transgresora del tipo

$$S_t[A,\bar{A}] = k\int_M Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow\bar{A}} \tag{2.54}$$

El primer término de la corriente se anula idénticamente

$$\Omega = 0 \tag{2.55}$$

Para evaluar el término de borde Ξ, se usa la variación de A y $\bar{A}$ bajo las transformaciones de gauge, las cuales sería

$$\begin{aligned} \delta_{gauge}A &= -D_\lambda \\ \delta_{gauge}\bar{A} &= -\bar{D}\lambda \end{aligned} \tag{2.56}$$

Sustituyendo las expresiones en el término de la acción de transgresión

$$\delta A_t = \delta\bar{A} + t\delta\Theta \tag{2.57}$$

siendo

$$\delta\Theta = \delta A - \delta\bar{A} \tag{2.58}$$

$$\delta A_t = \delta\bar{A} + t\delta A - t\delta\bar{A}$$

$$\delta A_t = \delta\bar{A}(1-t) + t\delta A$$

$$\delta A_t = -\bar{D}\lambda(1-t) - tD_\lambda$$

Se obtiene

$$\delta_{gauge}A_t = -D_t\lambda \tag{2.59}$$

Siendo D_t la derivada covariante de la conexión A_t

$$\delta_{gauge}\bar{A} = -\bar{D}\lambda$$

Sustituyendo en

$$\Xi = n(n+1)k \int_0^1 dt < \delta A_t \Theta F_t^{n-1} >$$

Nos produce

$$\Xi = n(n+1)k \int_0^1 dt < -D_\lambda \Theta F_t^{n-1} > \tag{2.60}$$

usando

- $D_t F_t = 0$ La identidad de Bianchi
- La regla de Leibniz para D_t
- Invariancia del tensor métrico

Para obtener

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +n(n+1)k \int_0^1 dt < \lambda D_t \Theta F_t^{n-1} > \tag{2.61}$$

se reemplaza la identidad

$$\Big(\frac{d}{dt}F_t\Big) = D_t\Theta \tag{2.62}$$

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +n(n+1)k \int_0^1 dt < \lambda\Big(\frac{d}{dt}\Big)F_t F_t^{n-1} >$$

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +n(n+1)k \int_0^1 dt < \lambda\Big(\frac{d}{dt}\Big)F_t^{n} >$$

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +(n+1)k \int_0^1 dt\Big(\frac{d}{dt}\Big) < \lambda F_t^{n} >$$

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +(n+1)k\Big(< \lambda F_t^{n} > - < \lambda \bar{F}_t^{n} > \Big)$$

Usando

$$\Omega = 0$$

$$\Xi_{gauge} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > +(n+1)k\Big(< \lambda F^{n} > - < \lambda \bar{F}^{n} > \Big)$$

En la expresión de la corriente

$$*J_{gauge} = \Omega - \Xi_{gauge}$$

$$J_{gauge} = 0 + n(n+1)kd\int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{(}n-1) > +(n+1)k\Big(< \lambda F^n > - < \lambda \bar{F}^n > \Big)$$

Eliminando los términos propocionales a las ecuaciones de movimiento

$$J_{gauge} = n(n+1)kd\int_0^1 dt < \lambda\Theta F_t^{n-1} > \tag{2.63}$$

la cual está definida on shell

Corriente de Difeomorfismo

La corriente asociada a la invariancia bajo difeomorfismos de la acción

$$S_t[A,\bar{A}] = K\int_M Q^{(2n+1)}_{A\leftarrow\bar{A}} \tag{2.64}$$

tiene la forma general

$$*J_{dif} = -\Xi_{dif} - I_\epsilon L_T^{(2n+1)} \tag{2.65}$$

sobre el primer término $-\Xi_{dif}$ de la variación de A y $\bar{A}$ bajo difeomorfismo

$$\begin{array}{c} \delta_{dif}A = -\mathbf{L}_\epsilon A \\ \delta_{dif}\bar{A} = -\mathbf{L}_\epsilon \bar{A} \end{array} \tag{2.66}$$

sustituyendo ahora en la definicion de A_t

$$\delta A_t = \delta\bar{A} + t\delta\Theta$$

$$\delta\Theta = \delta A - \delta\bar{A}$$

$$\delta_{dif}A_t = -\mathbf{L}_\epsilon A_t$$

Sustituyendo obtenemos

$$\Xi = n(n+1)k\int_0^1 dt < \delta A_t\Theta F_t^{n-1} >$$

$$\Xi = -n(n+1)k\int_0^1 dt < \mathbf{L}_\epsilon A_t\Theta F_t^{n-1} > \tag{2.67}$$

haciendo uso de la identidad

$$\mathbf{L}_\epsilon A_t = I_\epsilon F_t + D_t I_\epsilon A_t \tag{2.68}$$

$$\Xi = n(n+1)k\int_0^1 dt < (I_\epsilon F_t + D_t I_\epsilon A_t)\Theta F_t^{n-1} >$$

$$\Xi = -n(n+1)k\int_0^1 dt < (I_\epsilon F_t\Theta F_t^{n-1} > -n(n+1)k\int_0^1 dt < (D_t I_\epsilon A_t\Theta F_t^{n-1} > \tag{2.69}$$

Usando

- La regla de Leibniz para el operador de contracción I_ϵ y para la derivada covariante D_t.
- Identidad de Bianchi $D_t F_t = 0$.
- Las propiedades del tenso simétrico.

Se consigue

$$\Xi = -I_\epsilon L_t^{(2n+1)} + (n+1)k \int_0^1 dt < I_\epsilon \Theta F_t^n >$$

$$-n(n+1)kd \int_0^1 dt < I_\epsilon A_t \Theta F_t^{n-1} > +n(n+1)k \int_0^1 dt < I_\epsilon A_t D_t \Theta F_t^{n-1} > \tag{2.70}$$

Usando las identidades

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} F_t &= D_t \Theta \\ \tfrac{d}{dt} I_\epsilon A_t &= I_\epsilon \Theta \end{aligned} \tag{2.71}$$

Integrando por partes t

$$\Xi = -I_\epsilon L_T^{2n+1} + (n+1)k \int_0^1 dt \frac{d}{dt} < I_\epsilon A_t F_t^n > -n(n+1)kd \int_0^1 dt < I_\epsilon A_t \Theta F_t^{n-1} >$$

Directamente se obtiene

(2.72)

$$\Xi_{dif} + I_\epsilon L_T^{(2n+1)} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < I_\epsilon A_t \Theta F_t^{n-1} > +(n+1)k\Big(< I_\epsilon A F^n > - < I_\epsilon \bar{A} \bar{F}^n > \Big)$$

Sustituimos

$$*J_{dif} = -\Xi_{dif} - I_\epsilon L_T^{(2n+1)}$$

$$*J_{dif} = -n(n+1)kd \int_0^1 dt < I_\epsilon A_t \Theta F_t^{n-1} > \tag{2.73}$$

Esta solo definida on shell y se ha omitido los términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento.

La elección de un álgebra g en el lagrangiano, determinará, cuales serán los campos independientes de la teoría y junto con el tensor $< ... >$, se fijarán las formas de las distintas interacciones que ocurrirán entre ellos.

Del lagrangiano de transgresión en su forma más general se obtiene toda la información que se pueda desear acerca de la teoría

- Ecuaciones de movimento.
- Condiciones de borde.

- Cargas conservadas.

Información adicional del lagrangiano se obtiene con la fórmula extendida de Homotopía de Cartan. La cual se usa para dar una versión más explícita del lagrangiano, en la cual se toman en cuenta las particularidades del álgebra elegida. Es esencial para dar una interpretación en términos más físicos a la teoría.

Al considerar generalizaciones de las teorías de calibre con acciones de Chern-Simons, se toma el lagrangiano dado por las formas de transgresión $L_{trans} = T_{2n+1}$ siendo

$$T_{2n+1} \equiv (n+1)\int_0^1 dtSTr((A_1 - A_0)F_t^n) \tag{2.74}$$

$$A_t = tA_1 + (1-t)A_0 \tag{2.75}$$

$$F_t = dA_t + A_t^2 \tag{2.76}$$

en D = 2n+1, en vez de formas de CS.

Las ecuaciones de movimiento pueden determinarse a partir de la fórmula general para variaciones de las transgresiones

$$\delta T_{2n+1} = (n+1)\langle F_1^n \delta A_1\rangle - (n+1)\langle F_0^n \delta A_0\rangle - n(n+1)d\int_0^1 \langle JF_t^{n-1}\delta A_t\rangle \tag{2.77}$$

donde las interpolaciones son entre A_0 y A_1.

Las ecuaciones de movimiento (e.d.m) que siguen de esta acción son las siguientes:

$$\langle F_1^n T^I\rangle = 0 \tag{2.78}$$

$$\langle F_0^n T^I\rangle = 0 \tag{2.79}$$

Las cuales deben suplirse con condiciones de borde apropiadas que anulen el término de borde

$$-n(n+1)d\int_0^1 \langle JF_t^{n-1}\delta A_t\rangle \tag{2.80}$$

de modo que sea $\delta T_{2n+1} = 0$ cuando valen las ecuaciaciones de movimiento, con lo que esta acción sería realmente un extremo. El término de borde en la variación de la transgresión se anula si las variaciones δA_1 y δA_0 se toman como cero en el borde, Esto es equivalente a tomar los potenciales de calibre fijos en el borde como condición de borde.

Una condición de borde que parece natural dada la forma del término de borde es que J = 0 (ó que tienda a cero lo suficientemente rápido) en el borde, con lo que $A_0 = A_1$ en el borde, y que F_t sea finito n el borde. Con esto se asegura que el término de borde se anule.

Aquí se asume que en las ecuaciones de movimiento ambos campos de calibre son dinámicos. Sin embargo se pueden distinguir dos posibilidades :

- A_1 y A_0 campos dinámicos que satisfacen las ecuaciones de movimento (como ya se había mencionado).
- Solo A_1 es dinámico, mientras A_0 es un background fijo. En ese caso solo A_1 debe satisfacer las ecuaciones de movimiento.

Cualquiera que sean las condiciones de borde de las antes expuestas, la acción es un extremo para variaciones que se reducen a transformaciones de calibre en el borde. Para el primer caso se puede tomar δA_1 y δA_0 como arbitrarios en el interior ("bulk")pero reduciendose a transformaciones de calibre infinitesimales con el mismo parámetro de calibre λ en el borde.

Debido a la invariancia de calibre de la transgresión se tiene que:

$$0 = \delta_\lambda T_{2n+1} = (n+1)\langle F_1^n D_1 \lambda\rangle - (n+1)\langle F_0^n D_0 \lambda\rangle - n(n+1)d\int_0^1 \langle J F_t^{n-1} \delta_\lambda A_t\rangle$$

$$\delta_\lambda T_{2n+1} = d\{(n+1)\langle F_1^n \lambda\rangle - (n+1)\langle F_0^n \lambda\rangle - n(n+1)\int_0^1 \langle J F_t^{n-1} D_t \lambda\rangle\} \tag{2.81}$$

Si tomamos en cuenta la variación general de la transgresión se tiene que los términos de bulk son cero debido a las ecuaciones de movimiento y el término de borde es el mismo de la expresión previa para variaciones de calibre, por lo que de todos modos $F_1^n\lambda$ y $F_0^n\lambda$ son cero. Con lo que se prueba que la acción es un extremo, aún si las variaciones de calibre de los potenciales y se permiten en el borde.

Para el segundo caso no se asume que $\langle F_0^n T^I\rangle = 0$, y se toma que δA_1 arbitrario en el bulk pero reduciendose a transformaciones de calibre con parámetro λ en el borde, mientras que δA_0 es una variación de calibre con parámetro λ tanto en el bulk como en el borde (con un λ que es el mismo que aparece en las variaciones de δA_1 en el borde). Un argumento análogo al primer caso muestra que también en este caso la variación de la acción será cero.

Las formas explícitas de las formas de Chern-Simons y transgresión en 3D son

$$Q_3 = \langle A dA + \frac{2}{3}A^3\rangle = \langle AF - \frac{1}{3}A^3\rangle \tag{2.82}$$

$$T_3 = \langle A_1 dA_1 + \frac{2}{3}A_1^3\rangle - \langle A_0 dA_0 + \frac{2}{3}A_0^3\rangle - \langle A_1 A_0\rangle \tag{2.83}$$

En 5D estas son

$$Q_5 = \langle A(dA)^2 + \frac{2}{3}A^3 dA + \frac{3}{5}A^5\rangle = \langle AF^2 - \frac{1}{2}A^3 F + \frac{1}{10}A^5\rangle \tag{2.84}$$

$$T_5(0,1) = Q_5(1) - Q_5(0) - dC_4 \tag{2.85}$$

donde

$$C_4 = \frac{1}{2}\langle (A_1 A_0 - A_0 A_1)(F_1 + F_0) + A_0 A_1^3 + A_0^3 A_1 + \frac{1}{2}A_1 A_0 A_1 A_0\rangle \tag{2.86}$$

La notación $Q_5(1)$ y $Q_5(0)$ significa que el argumento es $A_1(A_0)$ y $A_0(A_1)$ respectivamente.

Gravedad con Formas de Transgresión

Se consideraran las teorías de gravitación en las que la acción está dada por formas de transgresión con el grupo G dado por el grupo de Anti-siter SO(d-2,2), d= 2n+1, con generadores J_{AB} con el álgebra

$$[J_{AB}, J_{CD}] = +\eta_{BC}J_{AD} - \eta_{AC}J_{BD} - \eta_{BD}J_{AC} + \eta_{AD}J_{BC} \tag{2.87}$$

Y la traza simétrica definidad por

$$\langle J_{A1A2} \dots J_{Ad-1Ad} \rangle = \epsilon_{A1 \dots Ad} \tag{2.88}$$

Los generadores se dividen en generadores del grupo de Lorentz

$$J_{ab} \tag{2.89}$$

con $a, b = 0, \dots, d-2$

Y los generadores de traslaciones

$$P_a = J_{a,d-1} \tag{2.90}$$

El potencial de calibre A es

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab}J_{ab} + e^a P_a \tag{2.91}$$

En **d = 2+1** la forma de Chern-Simons es

$$Q_3(e, \omega) = \epsilon_{abc}(R^{ab}e^c + \frac{1}{3}e^3) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d(e^a\omega^{bc}) \tag{2.92}$$

Y la forma de transgresión es

$$T_3(e1, \omega1; e0, \omega0) = \epsilon_{abc}(R_1^{ab}e_1^c + \frac{1}{3}e_1^3 - \epsilon_{abc}(R_0^{ab}e_0^c + \frac{1}{3}e_0^3) + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}d[(e_1^a + e_0^a)(\omega_1^{bc} - \omega_0^{bc})]) \tag{2.93}$$

En **d=4+1** la forma de Chern-Simons es

$$Q_5(e, \omega) = \frac{3}{4}\epsilon_{abcde}(R^{ab}R^{cd}e^e + \frac{2}{3}e^a e^b e^c R^{de} + \frac{1}{5}e^a e^b e^c e^d e^e) +$$

$$\frac{1}{4}\epsilon_{abcde}d(-2\omega^{ab}d\omega^{cd}e^e + \frac{1}{2}e^a e^b e^c \omega^{de} - \frac{3}{2}\omega^{af}\omega_f^b\omega^{cd}e^e) \tag{2.94}$$

En una notación más compacta

$$Q_5(e, \omega) = \frac{3}{4}\epsilon(3R^2 e + 2e^3 R + \frac{1}{5}e^5) +$$

$$\frac{\epsilon}{4}d(-2\omega d\omega e + \frac{1}{2}e^3\omega - \frac{3}{2}((\omega^2))\omega e) \tag{2.95}$$

donde el paréntesis doble implica contracciones

ejemplo :

$$((\omega^2)) \equiv \omega^{af}\omega_f^b$$

y

$$((\omega e)) \equiv \omega^{af}e_f$$

La transgresión en **d = 4+1**

$$T_5 = \frac{3}{4}\epsilon(R^2e + \frac{2}{3}Re^3 + \frac{1}{5}e^5) - \frac{3}{4}\epsilon(\tilde{R}^2\bar{e} + \frac{2}{3}\tilde{R}\bar{e}^3 + \frac{1}{5}\bar{e}^5) -$$

$$\frac{1}{4}\epsilon d[\theta(e+\bar{e})(R - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}e^2) + \theta(e+\bar{e})(\tilde{R} - \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}\bar{e}^2) + \theta Re + \theta\tilde{R}\bar{e}]$$

donde

$$\theta^{ab} = \omega^{ab} - \bar{\omega}^{ab}$$

Fórmula Extendida de Homotopía de Cartan (FEHC)

Consideramos un conjunto $\{A_i, i = 0, ..., r+1\}$ de 1-formas de conexión en un fibrado principal, sobre una variedad d-dimensional M y un simplex orientable (r+1)-dimensinal T_{r+1}, parametrizando por $\{t^i, i = 0, ..., r+1\}$ las cuales satisfacen las siguientes relaciones

$$t^i \geq 0$$

$$i = 0, \ldots, r+1 \tag{2.96}$$

$$\sum_{i=0}^{r+1} t^i = 1 \tag{2.97}$$

La siguiente ecuación implica que la combinación lineal de

$$A_t = \sum_{i=0}^{r+1} t^i A_i \tag{2.98}$$

también transforma como una conexión al igual que cada A_i por lo que se define la curvatura como

$$F_t = dA_t + A_t^2 \tag{2.99}$$

Para el caso $r = 1$, es posible asociar cada una de las conexiones A_i con un vértice del simplex $T(r+1)$, el cual se representa consistentemente como

$$T_{r+1} = (A_0, A_1, \ldots A(r+1)) \tag{2.100}$$

La derivada exterior de M se denota por **d** y a su vez la derivada exterior de $T(r+1)$ será denotada por d_t, dichas derivadas son "mapeos" de la forma

$$d : \Omega^a(M) \times \Omega^b(T_{r+1}) \to \Omega^{a+1}(M) \times \Omega^b(T_{r+1}) \tag{2.101}$$

siendo $\omega^a(M)$ el espacio de las a-formas en M

$$d_t : \Omega^a(M) \times \Omega^b(T_{r+1}) \to \Omega^a(M) \times \Omega^{b+1}(T_{r+1}) \tag{2.102}$$

siendo $\omega^b(T_{r+1})$ el espacio de las b-formas en T_{r+1}

$$L_t : \Omega^a(M) \times \Omega^b(T_{r+1}) \to \Omega^{a-1}(M) \times \Omega^{b+1}(T_{r+1}) \tag{2.103}$$

El operador derivación homotópica.

- El operador de derivación homotópica disminuye en una unidad en grado de una 1-forma diferencial en M.
- El operador de derivación homotópica aumenta en una unidad el grado de una 1-forma diferencial en T_{r+1}.

La única manera consistente de definir su acción sobre A_t y F_t es

$$L_t A_t = 0 \tag{2.104}$$

$$L_t F_t = dt A_t \tag{2.105}$$

Los operadores d, dt y L_t cumplen con la regla de leibniz y satisfacen además

- $d^2 = 0$
- $dt^2 = 0$
- $[L_t, d] = d_t$
- $[L_t, dt] = 0$
- $\{d, dt\} = 0$

En el álgebra gradada

Entonces la FEHC

$$\int_{\partial T_{r+1}} \frac{L_t^p}{P!}\pi = \int_{T_{r+1}} \frac{L_t^{p+1}}{(p+1)!} dt + (-1)^{p+q} d \int_{T_{r+1}} \frac{L_t^{p+1}}{(p+1)!}\pi \tag{2.106}$$

siendo π

- Un polinomio en las formas $\{At, Ft, dt, A_t, F_t\}$

- Una m-forma en M
- Una q-forma en T_{r+1}

con $m \geq p$ y $p + q = r$

Más explícitamente

$$\pi = \sum_p \alpha_p < A_t^{ap} F_t^{bp} (dtA_t)^{cp} (dtF_t)^{dp} > \tag{2.107}$$

- α_p Constantes arbitrarias
- $< ... >$ Forma multilineal en el álgebra

Los exponentes ap, bp,cp,dp satisfacen las relaciones

$$ap + 2bp + cp + 2dp = m \tag{2.108}$$

$$cp + dp = q \tag{2.109}$$

La FEHC se puede considerar como la versión integrada de la identidad diferencial

$$(p+1)dtL_t^p \pi = L_t^{p+1} d\pi - dL_t^{p+1} \pi \tag{2.110}$$

La cual es equivalente a

$$[L_t^{p+1}] = (p+1)dtL_t^p \tag{2.111}$$

La identidad diferencial se puede demostrar usando las propiedades

$$\begin{gathered} d^2 = 0 \\ \{d, dt\} = 0 \end{gathered} \tag{2.112}$$

Se quiere demostrar $[L_t^{p+1}, d] = (p+1)d_t L_t^p$

Para p = 1

$$[L_t^2, d] = L_t[L_t, d] + [L_t, d]dt$$

$$[L_t^2, d] = L_t dt + dtL_t$$

$$[L_t^2, d] = 2L_t dt \tag{2.113}$$

Para p = k es válido porque solo involucra un cambio de etiqueta, por lo que se obtiene

$$[L_t^{k+1}, d] = (k+1)d_t L_t^k \tag{2.114}$$

Para = k+1

$$[L_t^{k+1+1}, d] = (k+1+1)dtL_t^{k+1}$$

$$[L_t^{k+2}, d] = (k+2)dtL_t^{k+1} \tag{2.115}$$

Demostración

$$[L_t^{k+2}, d] = L_t[L_t^{k+1}, d] + [L_t, d]L_t^{k+1}$$

$$[L_t^{k+2}, d] = (k+1)L_t^k dtL_t + dtL_t^{k+1}$$

$$[L_t^{k+2}, d] = (k+1)L_t^{k+1}dt + dtL_t^{k+1}$$

$$[L_t^{k+2}, d] = L_t^{k+1}dt[(k+1)+1]$$

$$[L_t^{k+2}, d] = L_t^{k+1}dt(k+2)$$

$$[L_t^{k+2}, d] = (k+2)dtL_t^{k+1}$$

Ahora integrando la identidad diferencia sobre el simplex T_{r+1}

$$(p+1)\int_{\partial T_{r+1}} L_t^p \pi = \int_{T_{r+1}} L_t^{p+1} d\pi - \int_{T_{r+1}} d_L^{p+1}\pi \tag{2.116}$$

Usando el teorema de Stokes para el lado izquierdo de la ecuación, además de la regla de integración

$$d\int_{T_s} \alpha = (-1)^s \int_{T_s} d\alpha \tag{2.117}$$

Se consigue una versión restringida de FEHC

$$(p+1)\int_{\partial T_{r+1}} L_t^p \pi = \int_{T_{r+1}} L_t^{p+1} d\pi + (-1)^{p+q} d\int_{T_{r+1}} L_t^{p+1}\pi \tag{2.118}$$

La cual es ahora equivalente a

$$\int_{\partial T_{r+1}} \frac{L_t^p}{P!}\pi = \int_{T_{r+1}} \frac{L_t^{p+1}}{(p+1)!} dt + (-1)^{p+q} d\int_{T_{r+1}} \frac{L_t^{p+1}}{(p+1)!}\pi \tag{2.119}$$

Cargas Conservadas

Sea $\sum_0$ una variedad (d-1)-dimensional, e impongamos la condición de que M tenga la topología

$$M = R \times \sum_0 \tag{2.120}$$

. Esto significa que siempre existe un embebimiento

$$\sum : \sum_0 \to \sum_M \subset M \tag{2.121}$$

De $\sum_0$ en M, sea J una corriente conservada en M, $dem * J = 0$

Entonces definimos la carga Q asociada a J como

$$Q = \int_{\Sigma_0} \sum^* *J \tag{2.122}$$

Donde $\sum^* *J$ corresponde a la imagen recíproca de *J inducida por el embebimiento $\sum$
Cuando $*J$ corresponde a una forma exacta sobre M

$*J = dm\sigma$, entonces la carga puede escribirse como una integral sobre $\partial \sum_0$

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\Sigma_0} \sum^*(dm\sigma) \\ Q &= \int_{\Sigma_0} d\Sigma \sum^* \sigma \\ Q &= \int_{\partial\sigma_0} (\partial\sigma_o)^* \sigma \end{aligned} \tag{2.123}$$

Capítulo 3

Chern - Simons como Formas de Transgresión

El objetivo en este capítulo es unificar la noción de la transgresión con el tratamiento de formas de Chern-Simons. Se maneja un lagrangiano para una teoría de campo de gauge con un álgebra de Lie arbitraria, luego se caracteriza para casos partículares, se describe la acción, se discuten las simetrías, la dinámica y las condiciones de contorno que siguen las ecuaciones de movimiento aquí obtenidas. Se presenta la fórmula extendida de Homotopía de Cartan a través del uso de un método iterativo. Se describe el funcional de Chern-Simons generalizado explicitamente para D = (2n+1), donde la dinámica que se obtiene con funcional es precisamente la ecuación generalizada de Maurer-Cartan, con el fin de entender lo que significan las formas de transgresión en el marco de los N-complejos. Se particulariza el cálculo para 5 dimensiones y se describe un modelo a manera de ejemplo ilustrativo. Para el desarrollo del mismo se hizo referencia de los siguientes autores ([1-10],[16],[22-25])

A modo ilustrativo se presentará de forma esquemática una pequeña comparación a groso modo del procedimiento que sigue para la obtención de observables físicos.

Teorías de Campo	**Teorías de Chern-Simons**
Se construye un lagrangiano.	Se construye un lagrangiano a través de la acción y forma de CS
Se reescribe con el formalismo Hamiltoniano.	Se reescribe en términos de la transgresión.
Se usa el principio de mínima acción. Se generan las corrientes $J = 0$	Se varía la expresión funcional $\delta T = 0$.
Se obtienen cargas conservadas	Usando el teorema de Noether se obtienen cantidades conservadas
Observables físicos	Pueden ó no ser observables físicos

Los observables físicos que se obtienen a través del tratamiento con teorías de campos estarán incluidos en los conseguidos a través del tratamiento de Chern-Simons, el caso contrario no es cierto. Si se consigue una cantidad conservada usando CS y esta resulta describir un fenómeno físico puede coincidir con alguna de las conseguidas con el método Hamiltoniano.

Nuevamente, de manera ilustrativa y en groso modo el procedimiento a seguir con el tratamiento hecho en el desarrollo del trabajo se presenta a continuación.

Teoría de Chern-Simons

Se construye una acción S .

$\Downarrow$

Con la acción se construye un lagrangiano (con 1 conexión sobre el fibrado principal).

$\Downarrow$

Al observar que la invariacia bajo transformaciones de gauge es solo local (cambia en un término de borde cuando se hace la derivada total).

$\Downarrow$

Se reecribe el lagrangiano en terminos de transgresión (2 conexiones en un mismo fibrado).

$\Downarrow$

Se hace variar el lagrangiano para obtener la dinámica del sistema

$\Downarrow$

Se reescribe usando la fórmula de Homotopía de Cartan

$\Downarrow$

Las ecuaciones resultantes proporcionarán las cargas conservadas y los posibles observables físicos

$\Downarrow$

Para caracterizar el modelo, se debe especificar la conexión, y al definir la dimensión se obtienen las cantidades que se conservan

1. Chern- Simons como Formas de Transgresión

$$Q_{2n+1}(A_1, F) \equiv (n+1)\int_0^1 dsSTr(A, F_s^n) \tag{3.1}$$

La siguiente forma de Chern - Simons no es invariante de calibre global, involucra un solo potencial sobre la fibra y en la que podemos definir

$A_t = tA \rightarrow$ El potencial

$F_t = dA_t + A_t^2 \rightarrow$ La curvatura

$STr \rightarrow$ La traza simétrica invariante en el álgebra g.

$$STr(F_1^{n+1}) - STr(F_0^{n+1}) = dT_{2n+1}(A_1, A_0) \tag{3.2}$$

La cual es global, involucra dos potenciales sobre la misma fibra y en la que podemos definir

$A_0; A_1 \rightarrow$ Potenciales ó conexiones

$F_0; F_1 \rightarrow$ Curvaturas

$$A_0t = tA_0 \tag{3.3}$$

$$A_1t = tA_1 \tag{3.4}$$

$$F_0t = dA_{0t} + A_{0t}^2 \tag{3.5}$$

$$F_1t = dA_{1t} + A_{0t}^2 \tag{3.6}$$

Entonces la forma de transgresión queda definida como

$$T_{2n+1}(A_1, A_0) \equiv (n+1)\int_0^1 dtSTr((A_1 - A_0)F_t^n) \tag{3.7}$$

Esta forma de transgresión se puede escribir como la diferencia de dos formas de Chern-Simons más un término de borde usando la fórmula de homotopía de Cartan aplicada a polinomios del tipo

$$P(F_t, A_t) = Q_{2n+1}(F_t, A_t) \tag{3.8}$$

Dando como resultado

$$T_{2n+1}(A_1, F_1, A_0, F_0) = Q_{2n+1}(A_1, F_1) - Q_{2n+1}(A_0, F_0) - d[k_{01}Q_{2n+1}(A_t, F_t)] \tag{3.9}$$

(k_{01} proveniente de la expresión de homotopía de Cartan.)

se usa el hecho de que

$$dQ_{2n+1}(A,F) = STr(F^{n+1}) \tag{3.10}$$

El último término es un término de borde $C_{2n} = k_{01}Q_{2n+1}(A_t, F_t)$

Dado más explícitamente por

$$C_{2n}(F_1, A_1; A_0, F_0) \equiv -n(n+1)\int_0^1 ds \int_0^1 dtsSTr(A_t J F_{st}^{n-1}) \tag{3.11}$$

Con

$$F_s t = sF_t + s(s-1)A_t^2 \tag{3.12}$$

$$A_t = tA_1 + (1-t)A_0 \tag{3.13}$$

La invariancia de la forma de transgresión de gauge involucrando ambos potenciales A_0 y A_1 se sigue de la covariancia de $J = A_1 - A_0$ y F_t bajo esas transformaciones, la definición de T_{2n+1} y la invariancia de la traza.

Si ahora bautizamos en la expresión de la transgresión

$$T_{2n+1}(A_1, A_0) \equiv (n+1)\int_0^1 dtSTr((A_1 - A_0)F_t^n) \tag{3.14}$$

$A_t = tA_1 + (1-t)A_0$

$F_t = dA_t + A_t^2 \simeq d(tA_1 + (1-t)A_0) + (tA_1 + (1-t)A_0)^2$

La forma de transgresión es invariante bajo transformaciones de gauge en las que las conexiones A_0 y A_1 transforman con el mismo elemento g dl grupo G, debido a la covariancia de

$$J \equiv A_1 - A_0 \tag{3.15}$$

$$J^g = g^- 1Jg \tag{3.16}$$

La covariancia de F_t, $F_t^g = g^- 1F_t g$ y la invariancia de la traza simétrica.

La invariancia bajo transformaciones de gauge de las transgresiones es parte de la motivacion para usarlas, en vista a la invariancia local (no globlal) de las formas de Chern-Simons se hace más conveniente éste nuevo tratamiento.

Haciendo variar infinitesimalmente la forma de transgresión, se obtiene la dinámica del sistema. Bajo variaciones infinitesimales genéricas de A_0 y A_1, la variación de la transgresión es

(Recordamos que la forma de transgresión se puede escribir como)

$$T_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < (A_1 - A_0)F_t^n > \tag{3.17}$$

Siendo $J = A_1 - A_0$

$$T_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < JF_t^n > \tag{3.18}$$

Además definimos

$$A_t = tJ + A_0 = t(A_1 - A_0) + A_0 = tA_1 + tA_0 + A_0 = tA_1 + A_0(1-t)$$

finalmente

$$A_t = tA_1 + (1-t)A_0 \tag{3.19}$$

$$F_t = dA_t + A_t^2 = dtA_1 + d(1-t)A_0 + (tA_1 + (1-t)A_0)^2$$

$$F_t = A_1 dt - A_0 dt + t^2 A_1^2 + 2tA_1(1-t)A_0 + (1-t)^2 A_0^2$$

$$F_t = A_1 dt - A_0 dt + t^2 A_1^2 + 2t(1-t)A_0 A_1 + (1-t)^2 A_0^2 \tag{3.20}$$

Definimos

$$F_0 = dA_0 + A_0^2 \tag{3.21}$$

$$D_o J = dJ + A_0 J + JA_0 \tag{3.22}$$

Para obtener

$$F_t = F_0 + tD_0 J + t^2 J^2 \tag{3.23}$$

La derivada de F_t con respecto al parámetro t satisface

$$\frac{d}{dt}F_t = D_t J = dJ + A_t J + JA_t = dJ + 2tJ^2 + A_0 J + JA_0 \tag{3.24}$$

Si se varía la forma general de transgresión, se obtiene

$$\delta T_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\{< F_t^n \delta J > + < nJF_t^{n-1} D_t[\delta A_t] >\} \tag{3.25}$$

Pero

$$D_t[JF_t^{n-1}\delta A_t] = D_t JF_t^{n-1}\delta A_t - JF_t^{n-1} D_t[\delta A_t]$$

$$D_t = \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}\delta A_t - JF_t^{n-1} D_t[\delta A_t] \tag{3.26}$$

Usando $\delta A_t = t\delta J + \delta A_0$

$$\delta T_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt\{< [F_t^n + t_n \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}]\delta J > + < n\frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}\delta A_0 >\}$$

$$-n(n-1)d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t > \tag{3.27}$$

Dentro del corchete

$$F_t^n + t_n \frac{d}{dt} F_t F_t^{n-1} = \frac{d}{dt}[FF_t^n] \tag{3.28}$$

$$n\frac{d}{dt} F_t F_t^{n-1} = \frac{d}{dt} F_t^n \tag{3.29}$$

Entonces las dos primeras integrales en t pueden calcularse dando

$$\delta T_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta J > +(n+1) < (F_1^n - F_0^n)\delta A_0 > -n(n+1)d\int_0^1 dt < JF_t^(n-1)\delta A_t > \tag{3.30}$$

Finalmente para variaciones genéricas de las transgresiones

$$\delta T_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1)d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t > \tag{3.31}$$

Bajo transformaciones de gauge involucrando solo a A_1

$$\delta A_1 = D_1 \lambda$$

$$\delta A_t = tD1\lambda$$

$$\delta T_{2n+1} = d[(n+1) < F_1^n \lambda > -n(n+1)\int_0^1 tdt < JF_t^{n-1} D_1 \lambda >] \tag{3.32}$$

Expresión que significa que la transgresión varía por un término de borde sii uno de los campos varía

La expresión previa con

$$A_1 = A$$

$$A_0 = 0$$

Produce la variación de gauge de la forma de Chern-Simons

$$\delta Q_{2n+1} = d[(n+1) < F^n \lambda > -n(n+1)\int_0^1 tdt < AF_t^{n-1} D\lambda >] \tag{3.33}$$

$$F_t = tF + (t^2 - t)A^2 \tag{3.34}$$

$$D\lambda = d\lambda + [A, \lambda] \tag{3.35}$$

Esto implica que la forma de CS no es invariante de gauge global, por lo que su forma cambia con un término de borde.

Para el caso partícular D = 5

Forma de Chern-Simons

$$Q_{2n+1}(A,F) \equiv (n+1)\int_0^1 dsSTr(AF_s^n)$$

n =2

$$Q_5(A,F) = 6\int_0^1 dsSTr(AF_s^2) =< A(dA)^2 + \frac{2}{3}A^3dA + \frac{3}{5}A^5 >$$

$$Q_5(A,F) =< AF^2 - \frac{1}{2}A^3 + \frac{1}{10}A^5 > \tag{3.36}$$

Forma de transgresión

$$T_{2n+1}(A_1,A_2) \equiv (n+1)\int_0^1 dtSTr((A_1 - A_0)F_t^n)$$

n=2

$$T_5(A_1,A_2) \equiv 2\int_0^1 dtSTr((A_1, A_0)F_t^n)$$

$$T_5(A_0,A_1) = Q_5(1) - Q_5(0) - dC4 \tag{3.37}$$

Donde

$$Q_5(1) = Q_5(A_1(A_0)) \tag{3.38}$$

$$Q_5(0) = Q_5(A_0(A_1)) \tag{3.39}$$

$$C4 = \frac{1}{2} < (A_1A_0 - A_0A_1)(F_1 + F_0) + A_0A_1^3 + A_0^3A_1 + \frac{1}{2}A_1A_0A_1A_0 > \tag{3.40}$$

$$T_5(A_0,A_1) = Q_5(A_1(A_0)) - Q_5(A_0(A_1)) - dC4$$

$$\begin{aligned} T_5(A_0,A_1) =& < A_1(A_0)F_1^2 - \frac{1}{2}A_1(A_0)^3F_1 + \frac{1}{10}A_1(A_0)^5 > \\ &- < A_0(A_1)F_2^2 + \frac{1}{2}A_0(A_1)^3 + \frac{1}{10}A_0(A_1)^5 > + \\ &+\frac{1}{2} < (A_1A_0 - A_0A_1)(F_1 + F_0) + A_0A_1^3 + A_0^3A_1 + \frac{1}{2}A_1A_0A_1A_0 > \end{aligned} \tag{3.41}$$

¿Qué pasa con la transgresión si una de las conexiones es cero?

$$A_0 = A \rightarrow A_0t = A_0t$$

$$A_1 = 0 \rightarrow A_1t = tA_0 = A_0(0) = 0A_0 = 0$$

$$T_5(A,0) =< 0F_1^2 - \frac{1}{2}0F_1 + \frac{1}{10}0 > - < A(0)F_2^2 + \frac{1}{2}A(0)^3 + \frac{1}{10}A(0)^5 > +$$

$$+\frac{1}{2} < (0A - A0)(F_1 + F_0) + A0^3 + A^3 0 + \frac{1}{2} 0A0A >= 0$$

(3.42) $$T_5(A, 0) = 0$$

Las ecuaciones del movimiento se determinarán a partir de la fórmula general para variaciones de la transgresión

(3.43) $$\delta T_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1) d \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} \delta A_t >$$

Para nuestro caso de interés
n=2

(3.44) $$\delta T_5 = 3 < F_1^2 \delta A_1 > -3 < F_0^2 \delta A_0 >= 0$$

lo cual implica que, para que la igualdad se satisfaga debe ocurrir

(3.45) $$< F_1^2 >= 0$$

(3.46) $$< F_0^2 >= 0$$

Ya que las conexiones no son cero. Lo que quiere decir que la conexiones son 2 - planas.

Este resultado concuerda con el obtenido en la referencia [1]. Con el cual podemos extrapolar el análisis y concluir que si se tienen n conexiones las mismas serán n - planas.

2. Observables, Cargas de Gauge y Difeomorfismo

Del Teorema de Noether

La variación de formas de diferenciales bajo difeomorfismos en que las coordenadas cambian como δx^μ esta dada por

(3.47) $$\delta\alpha(x) = \alpha'(x) - \alpha(x) = -L_\xi \alpha$$

Donde L_ξ representa la derivada de Lie, que para formas diferenciales puede escribirse como

(3.48) $$L_\xi \alpha = [dI_\xi + I_\xi d]\alpha$$

con d la derivada exterior y el operador de contracción dado por

(3.49) $$I_\xi \alpha_p = \frac{1}{(p-1)!} \xi^\nu \alpha_{\nu\mu_1 \ldots \mu_p - 1} dx^{\mu 1} \ldots dx^{\mu p - 1}$$

El operador I_ξ es una antiderivación, en el sentido de que actuando en el producto exterior de dos formas diferenciales α_p y β_q de ordenes p y q respectivamente, produce

(3.50) $$I_\xi(\alpha_p \beta_q) = I_\xi \alpha_p \beta_q + (-1)^p \alpha_p I_\xi \beta_q$$

Un resultado útil es que la derivada de Lie actuando sobre potenciales de gauge es

$$L_\xi A = D(I_\xi A) + I_\xi F \tag{3.51}$$

donde D es la derivada covariante y F es el tensor de campo.

Se considera una densidad de lagrangiano dado por una forma diferencial $L(\phi, \partial\phi)$, donde ϕ representa todos los campos dinámicos. La variación del lagrangiano bajo difeomorfismos está dada por

$$\delta L = -d(I_\xi L) \tag{3.52}$$

Ya que $dL = 0$ porque el orden de L es igual a la dimensión del espacio.

Se considera una clase de transformaciones bajo las que el lagrangiano sea cuasi invariante, combinadas con difeomorfismos. Bajo estas, las variación del lagrangiano se asume de la forma

$$\delta L = d\Omega - d(I_\xi L) \tag{3.53}$$

donde la primera derivada total viene de las transformaciones consideradas y la segunda de los difeomorfismos. Por otro lado, el procedimiento usual que lleva a las ecuaciones de movimiento (E.D.M.) de Euler-Lagrange proporciona la variación del lagrangiano como las ecuaciones de movimiento más un término de borde.

$$\delta L = (E.D.M.)\delta\phi + d\Theta \tag{3.54}$$

donde las variaciones $\delta\phi$ son infinitesimales, pero arbitrarias en su forma. A partir de estas expresiones de la variación obtenemos,(asumiendo las variaciones en ambas, restringidas a transformaciones de la clase considerada en la primera expresión de δL e igualando) que si valen las E.D.M.

$$d[\Omega - I_\xi L - \Theta] = 0 \tag{3.55}$$

Se sigue que la llamada çorriente de Noether"

$$\star j = \Omega - I_\xi L - \Theta \tag{3.56}$$

Se puede ver que, si se agrega un término de borde a L, como $L' = L + dB$, con B función de los campos y sus derivadas, entonces la corriente conservada asociada a la invariancia bajo difeomorfismos, cambia como $\star j = \star j + I_\xi B$

Cargas de Gauge

La variación de la transgresión es

$$\delta T_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1) d \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} \delta A_t >$$

Bajo transformaciones de gauge

$$\delta_\lambda A_1 = -D_1 \lambda$$

$$\delta_\lambda A_0 = -D_0 \lambda$$

de donde

$$\delta_\lambda A_t = -D_t\lambda = -d\lambda - A_t\lambda + \lambda A_t \tag{3.57}$$

Las E.D.M. que asumiremos son satisfechas por ambos campos A_1 y A_0 son $< F_1^n T^a >= 0$ y $< F_0^n T^a >= 0$, de donde se sigue que podemos leer la forma Θ que aparece en el teorema de Noether de la expresión de la variación.

$$\Theta = n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1} D_t\lambda > \tag{3.58}$$

La forma Ω es cero en este caso, ya que la transgresión es invariante de gauge. Se sigue que la corriente conservada es

$$\star j_\lambda = -\Theta = -n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1} D_t\lambda > \tag{3.59}$$

Además $\star j_\lambda = dQ_\lambda$ con

$$Q_\lambda = n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\lambda > \tag{3.60}$$

ya que

$$dQ_\lambda = n(n+1)\int_0^1 dt < D_t[JF_t^{n-1}\lambda] > \tag{3.61}$$

o

$$dQ_\lambda = n(n+1)\int_0^1 dt < \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}\lambda - JF_t^{n-1} D_t\lambda > \tag{3.62}$$

usando

$$\frac{d}{dt}F_t^{n-1} = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}F_t^n \tag{3.63}$$

$$dQ_\lambda = (n+1) < (F_1^n - F_0^n)\lambda > -n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1} D_t\lambda > \tag{3.64}$$

donde el primer término del segundo miembro es cero, debido a las E.D.M.

Está expresión de las cargas es válida para Chern-Simons, poniendo $A_1 = A$ y $A_0 = 0$, ya que la configuración $A_0 = 0$ satisface las E.D.M.

2.1. Cargas de Difeomorfismo.

La variación de la transgresión es

$$\delta T_{2n+1} = (n+1) < F_1^n \delta A_1 > -(n+1) < F_0^n \delta A_0 > -n(n+1)d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta A_t >$$

La variación de los potenciales bajo difeomorfismo es

$$\delta_\xi A_1 = -L_\xi A_1 = D_1[I_\xi A_1] - I_\xi F_1 = -[I_\xi d + dI_\xi]A_1 \tag{3.65}$$

$$\delta_\xi A_0 = -L_\xi A_0 = D_0[I_\xi A_0] - I_\xi F_0 = -[I_\xi d + dI_\xi]A_0 \tag{3.66}$$

$$\delta_\xi A_t = -L_\xi A_t = D_t[I_\xi A_t] - I_\xi F_t = -[I_\xi d + dI_\xi]A_t \tag{3.67}$$

Podemos leer el Θ que aparece en la expresión del teorema de Noether de la variación de la transgresión

$$\Theta = -n(n-1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}\delta_\xi A_t >$$

o

$$\Theta = n(n+1)\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t] + JF_t^{n-1}I_\xi F_t >$$

pero

$$D_t[JF_t^{n-1}I_\xi A_t] = D_t JF_t^{n-1}I_\xi A_t - JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t] = \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}I_\xi A_t - JF_t^{n-1}D_t[I_\xi A_t]$$

entonces

$$\Theta = n(n+1)\int_0^1 dt < \frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}I_\xi A_t + JF_t^{n-1}I_\xi F_t > -n(n+1)d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}I_\xi A_t > \tag{3.68}$$

Para el término $I_\xi L$ en la corriente de Noether tenemos

$$I_\xi L = I_\xi T_{2n+1} = (n+1)\int_0^1 dt < I_\xi JF_t^n - nJF_t^{n-1}I_\xi F_t > \tag{3.69}$$

La corriente es $\star j = \Omega - [\Theta + I_\xi L]$, pero $\Omega = 0$ debido a la invariancia de la acción bajo difeomorfismo, entonces

$$\star j = -[\Theta + I_\xi L] = -(n+1)\int_0^1 dt < n\frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}I_\xi A_t + I_\xi JF_t^n >$$
$$+n(n+1)d\int_0^1 dt < JF_t^{n-1}I_\xi A_t >$$

Pero

$$I_\xi A_t = tI_\xi J + I_\xi A_0$$

entonces

$$I_\xi J = \frac{d}{dt}I_\xi A_t$$

y por lo tanto

$$< n\frac{d}{dt}F_t F_t^{n-1}I_\xi A_t + I_\xi JF_t^n = \frac{d}{dt} < F_t^n I_\xi A_t >$$

lo que permite integrar los primeros términos de la corriente, dando como resultado

$$\star j = < F_1^n I_\xi A_1 > - < F_0^n I_\xi A_0 > + n(n+1) d \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} I_\xi A_t >$$

Los primeros dos términos del segundo miembro son cero debido a las E.D.M., entonces

$$\star j = dQ_\xi \tag{3.70}$$

con

$$Q_\xi = +n(n+1) \int_0^1 dt < J F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{3.71}$$

Como en el caso de las cargas de gauge, ésta expresión es válida para Chern - Simons, poniendo $A_1 = A$ y $A_0 = 0$, ya que la configuración $A_0 = 0$ satisface las E.D.M.

Otra forma de plantear estas cargas es

$$Q'_\xi = Q_\xi + I_\xi B \tag{3.72}$$

entonces de las expresiones de los potenciales de gauge resulta

$$Q_\xi^{trans}(0,1) = Q_\xi^{CS}(1) - Q_\xi^{CS}(0) - I_\xi C_{2n}(0,1) \tag{3.73}$$

con

$$C_{2n} = -(n+1)n \int_0^1 ds \int_0^1 dt < t A_s J (F_s)_t^{n-1} > \tag{3.74}$$

donde

$$(F_s) = tF_s + (t^2 - t)A_s^2$$

$$A_s = sA_1 + (1-s)A_0$$

$$F_s = dA_s + A_s^2$$

y de ahí

$$I_\xi C_{2n}(0,1) = -n(n+1) \int_0^1 ds \int_0^1 dt < t I_\xi A_s J (F_s)_t^{n-1} + t A_s I_\xi J (F_s)_t^{n-1} +$$

$$+ (n-1) t A_s (F_s)_t^{n-2} I_\xi (F_s)_t > \tag{3.75}$$

Para ilustrar el método se presenta el cálculo concreto de la masa de agujeros negros para cualquier dimensión

Una elección particular de la configuración A_0 que permite apartarnos lo menos posible de las teorías de graviación de Chern - Simons, en el sentido de agregar un mínimo de estructura adicional, es la configuración de variedad cobordante (VC), donde $A_1 = A$ y $A_0 = \bar{A}$, tenemos

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + e^a P_a \tag{3.76}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2}\bar{\omega}^{ab} J_{ab} + \bar{e} P_a \tag{3.77}$$

con $\bar{A}$ definido solo en el borde, por

$$\begin{gathered} \bar{e}^a = 0 \\ \bar{\omega}^{1\bar{i}} = 0 \\ \bar{\omega}^{\bar{i}\bar{j}} = \omega^{\bar{i}j} \end{gathered} \tag{3.78}$$

donde el índice 1 corresponde a la dirección normal al borde y los índices subrayados como $\bar{i}$ pueden tomar cualquier valor diferente de 1.

Para esta elección de A_0 puede verse que la acción puede escribirse como la forma estándar del término de bulk para el lagrangiano de Chern - Simons, con el tensor invariante

$$< J_{A1A2...} J A_{d-1 A_d} >= k \frac{2^n}{(n+1)} \epsilon_{A1...A_d} \tag{3.79}$$

el cual puede escribirse notablemente solo en términos de e y R (y no de ω) en la forma conocida como Lanczos - Lovelock - Chern - Simons

$$L_{LCS}(R, e) = k \int_0^1 dt \epsilon (R + t^2 e^2)^n e \tag{3.80}$$

más un término de borde dado por

$$\alpha = -kn \int_0^1 dt \epsilon \theta e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k^{n-1}}{2k+1} \sum_{l=0}^{n-1-k} C_l^{n-1-k} \tilde{R}^{n-1-k-l} t^{2l} \theta^{2l} t^{2k} e^{2k}$$

$$\alpha = -kn \int_0^1 dt \int_0^t ds \epsilon \theta e \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} C_l^{n-1-k} \tilde{R}^{n-1-k-l} t^{2l} \theta^{2l} s^{2k} e^{2k}$$

$$\alpha = -kn \int_0^1 dt \int_0^t ds \epsilon \theta e (\tilde{R} + t^2 \theta^2 + s^2 e^2)^{n-1} \tag{3.81}$$

Es decir que el lagrangiano de transgresión en este caso esta dado por

$$L_{trans} = L_{LCS} + d\alpha \tag{3.82}$$

Este resultado es particularmente notable si se tiene en cuenta que el término de borde que debe adicionarse al lagrangiano L_{LCS} para obtener el lagrangiano de Chern-Simons con el tensor invariante dado, no se conoce en general para cualquier dimensión

La configuración de variedad cobordante permite otra elección de condiciones de borde particularmente conveniente, que también hace que la acción sea un extremo cuando valen las ecuaciones de movimiento. La fórmula de la variación de la transgresión para la configuración de la variedad cobordante da

$$\delta T^0_{2n+1} = d[kn\int_0^1 dtt\epsilon(\delta\theta e - \theta\delta e)(\tilde{R} + t^2\theta^2 + t^2e^2)^{n-1}] \tag{3.83}$$

lo que sugiere la condición de borde natural

$$\epsilon_{abca3\ldots a2n+1}\delta\theta^{ab}e^c = \epsilon_{abca3\ldots a\theta^{ab}2n+1}\delta e^c \tag{3.84}$$

esto implica que la curvatura intrínseca del borde K_{ij} satisface

$$\delta K_{ij} = 0 \tag{3.85}$$

para las variaciones permitidas en esta condición de borde, y

$$K_{ij} = \Omega g_{ij} \tag{3.86}$$

donde Ω es una cosntante y g_{ij} es la métrica del borde. Esta última ecuación implica que la normal es un vector de Killing conforme, ya que la curvatura extrinseca está dada por la derivada de Lie de la métrica del borde según la normal.

$$K_{ij} = L_n g_{ij} \tag{3.87}$$

3. Cálculo de Cargas para Chern - Simons y Transgresión

3.1. Chern - Simons en d = 2+1.

Se considera la solución de las E.d.M. de gravedad de CS para un agujero negro en rotación en d = 2n+1.

$$e^0 = \Delta dt, \quad e^1 = \frac{1}{\Delta}dr, \quad e^2 = rd\phi - \frac{J}{2r}dt \tag{3.88}$$

con

$$\Delta = \sqrt{r^2 - 2G3M + \frac{2G3J}{4r^2}} \tag{3.89}$$

y conexión

$$\omega^{01} = rdt - \frac{J}{2r}d\phi, \quad \omega^{02} = -\frac{J}{2r^2\delta}dr, \quad \omega^{12} = -\Delta d\phi \tag{3.90}$$

la solución de anti Sitter (Ads)

$$\bar{e^0} = \bar{\Delta}dt, \quad \bar{e^1} = \frac{1}{\bar{\Delta}}dr, \quad \bar{e^2} = rd\phi \tag{3.91}$$

con

$$\bar{\Delta} = \sqrt{r^2 + 2G3}$$

y conexión

$$\omega^{\bar{0}1} = rdt, \quad \omega^{\bar{0}2} = 0, \quad \omega^{\bar{1}2} = -\bar{\Delta}d\phi \tag{3.92}$$

Corriente de gauge

d= 2+1

$$\star j_{\lambda}^{CS} = -2d < A\lambda > \tag{3.93}$$

O, para gravedad de CS, si $\lambda = \frac{1}{2}\lambda^{ab}J_{ab} + \lambda^a P_a$

$$\star j_{\lambda}^{CS} = kd[\epsilon_{abc}\omega^{ab}\lambda^c + \epsilon_{abc}e^a\lambda^{bc}] \tag{3.94}$$

con la traza simétrica mencionada

$$< J_{A1,A2...}J_{Ad-1Ad} >= k\frac{2^n}{(n+1)}\epsilon_{A1...Ad} \tag{3.95}$$

Para una transformación de gauge lo que se requiere es que λ sea un parámetro covariantemente constante asintóticamente, esto es $D\lambda = 0$ asintóticamente (para transgresiones debe ser $D1\lambda = D0\lambda = 0$ asintóticamente), lo que implica que $\delta_{\lambda A} = 0$ en el borde espacial, condición análoga a la condición de ser vector de Killing para vectores que generan difeomorfismos. La condición $D\lambda = 0$ implica, tanto para el agujero negro como AdS

$$\lambda^0 = \lambda^{01} = c1r, \quad \lambda^1 = \lambda^{02} = 0, \lambda^2 = -\lambda^{12} = c2r \tag{3.96}$$

donde $c1$ y $c2$ son constantes.

Las cargas conservadas $\int_\Sigma \star j_{\lambda}^{CS}$ en d= 2+1 dan:

- M para el parámetro de gauge que corresponde a $c1 = 1$ y $c2 = 0$
- J para el parámetro de gauge que corresponde a $c1 = 0$ y $c2 = 1$

si la integral, que se reduce a un integral en el borde espacial, se toma en el circulo de radio infinito.

Corriente de Difeomorfismo

d = 2+1

$$\star j_{xi}^{CS} = d < AI_{xi}A > \tag{3.97}$$

Las cargas conservadas $\int_\Sigma \star j_{xi}^{CS}$ en d = 2+1 dan:

- M para el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$
- -J para el vector de Killinng $\xi = \frac{\partial}{\partial \phi}$

no importa en que radio se tome la integración (al contrario de lo que sucede con las cargas de gauge)

4. Masa de Agujeros Negros en Cualquier Dimensión: variedades cobordantes

La carga de Noether asociada a la invariancia bajo difeomorfismo es para $d = 2n + 1$

$$Q_\xi = n(n+1) \int_0^1 < \Delta A F_t^{n-1} I_\xi A_t > \tag{3.98}$$

donde

$$\Delta A = A - \bar{A} \tag{3.99}$$

Calcularemos esta carga tomando A como una solución de las E.D.M. correspondientes a un agujero negro para gravedad de AdS en dimensión arbitraria $d = 2n + 1$ y $\bar{A}$ como la configuración correspondiente a una variedad cobordante

$$A = \frac{1}{2}\omega^{ab} J_{ab} + e^a P_a \tag{3.100}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2}\bar{w}^{ab} J_{ab} + \bar{e}^a P_a \tag{3.101}$$

Donde

$$\begin{gathered} e^0 = \Delta dt \\ e^1 = \frac{1}{\Delta} dr \\ e^m = r\tilde{e}^m \\ \omega^{01} = rdt \\ \omega^{1m} = -\Delta \tilde{e}^m \\ \omega^{0m} = 0 \\ \omega^{mn} \end{gathered} \tag{3.102}$$

donde las coordenadas 0 y 1 corresponden a las direcciones temporal y espacial radial y $\tilde{e}^m$ y ω^{mn} son el velbein y la conexión de espín de la esfera S^{d-1} correspondientes a las variables angulares.

Tenemos

$$\Delta = \sqrt{r^2 - (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}} + 1} = \sqrt{r^2 - \alpha + 1} \tag{3.103}$$

donde

$$\alpha = (2G_k M + 1)^{\frac{1}{n}} \tag{3.104}$$

para $\bar{A}$ tenemos

$$\begin{gathered} \bar{e}^a = 0 \\ \bar{\omega}^{1\bar{i}} = 0 \\ \bar{\omega}^{\bar{i}\bar{j}} = \omega^{\bar{i}j} \end{gathered} \tag{3.105}$$

donde los índices subrayados como $\bar{i}$ pueden tomar cualquier valor posible diferente de 1

Si

$$\Delta A = A - \bar{A} \equiv \frac{1}{2}\Theta^{ab} J_{ab} + E^a P_a$$

con

$$\Theta^{ab} \equiv \omega^{ab} - \bar{\omega}^{ab}$$

$$E^a \equiv e^a - \bar{e}^a$$

Entonces

$$E^a = e^a$$

$$\Theta^{1\bar{i}} = \omega^{1\bar{i}}$$

$$\Theta^{\bar{i}j} = 0$$

y para ΔA tenemos

$$\Delta A = \frac{1}{2}\Theta ab J_{ab} + e^a P_a = \Theta^{1\bar{i}} J_{1\bar{i}} + e^a P_a \tag{3.106}$$

También

$$A_t = t\Delta A + \bar{A} = \frac{1}{2}[t\Theta - \bar{\omega}]J + [tE - \bar{e}]P \tag{3.107}$$

entonces para el vector de Killing temporal $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ obtenemos

$$I_\xi A_t = te^0_t P_0 + t\Theta^{01}_t J_{01}$$

donde se usó que

$$E = e$$

$$\bar{e} = 0$$

$$I_\xi \bar{\omega} = 0$$

Los tensores de campo son

$$F = \frac{1}{2}\bar{R}^{ab} J_{ab} + T^a P_a \tag{3.108}$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2}\bar{R}^{ab} J_{ab} + \bar{T}^a P_a \tag{3.109}$$

donde

$$\bar{R}^{ab} = R^{ab} \tag{3.110}$$

ó en una notación más simple

$$\bar{R} = R + e^2$$

$$\bar{R}^{ab} = \tilde{R}^{ab} + \bar{e}^a \bar{e}^b$$

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^a_c \omega^{cb}$$

$$\tilde{R}^{ab} = d\bar{\omega}^{ab} + \bar{\omega}_c^a \bar{\omega}^{cb}$$

Para soluciones de agujeros negros

$$T^a = 0$$

$$\bar{R}^{0a} = 0$$

$$\bar{R}^{1m} = 0$$

$$\bar{R}^{mn} = \alpha \tilde{e}^m \tilde{e}^n$$

y para la configuración de variedad cobordante

$$\bar{T}^a = 0$$

$$\bar{R}^{1\bar{i}} = \tilde{R}^{1\bar{i}} = 0$$

$$R^{\bar{i}\bar{j}} = \tilde{R}^{\bar{i}\bar{j}} + (\Theta^2)^{\bar{i}\bar{j}}$$

de donde

$$\bar{\tilde{R}}^{\bar{i}\bar{j}} = \bar{R}^{\bar{i}\bar{j}} - [(\Theta^2)^{\bar{i}\bar{j}} + (e^2)^{\bar{i}\bar{j}}] \tag{3.111}$$

La configuración $\bar{A}$ de variedad cobordante con el agujero negro también satisface las ecuaciones del movimiento, como el propio agujero negro.

necesitaremos

$$F_t = dA_t + A_t^2 = \bar{F} + t\bar{D}\Delta A + t^2 \Delta A + t^2 \Delta A^2 \tag{3.112}$$

con

$$\bar{D}\Delta A = d\Delta A + \bar{A}\Delta A + \Delta A \bar{A} \tag{3.113}$$

entonces

$$F_t = \frac{1}{2}[\bar{\tilde{R}} + t(\bar{D}\Theta + \bar{e}E + E\bar{e}) + t^2(\Theta^2 + E^2)]J + [\bar{T} + t(\bar{D}E + ((\Theta\bar{e}))) + t^2((\Theta E))]P \tag{3.114}$$

donde los parentesis dobles indican contracciones, y $\bar{D}$ es la derivada covariante con $\bar{\omega}$, por ejemplo

$$[\bar{D}\Theta]^{ab} = d\Theta^{ab} + \bar{\omega}_c^a \Theta^{cb} + \bar{\omega}_c^b \Theta^{ac}$$

Por definición

$$F_t =\equiv \frac{1}{2}\bar{R}_t J + T_t P \tag{3.115}$$

Para las configuraciones consideradas

$$F_t = \frac{1}{2}[\tilde{R} + t\bar{D}\Theta + t^2(\Theta^2 + e^2)]J + [t\bar{D}e + t^2((\Theta e))]P$$

juntando todo , con el vector de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ y la traza simétrica que lleva a la gravedad de Chern-Simons usual para el grupo AdS

(3.116) $$< J_{a1a2}J_{a3a4}\dots J_{a2n-1a2n}P_{a2n+1} = k\frac{2^n}{(n+1)}\epsilon_{a1a2a3\dots a2n-1a2na2n+1} >$$

donde

(3.117) $$k = [2(d-2)!\Omega_{d-2}G_d]^-1$$

con Ω_{d-2} el volumen de la esfera en $d-2$ dimensiones. G_d la constante de Newton de dimensión d.

De la forma de ΔA y $I_\xi A_t$ vemos que el índice 1 debe estar en ΔA o $I_\xi A_t$, y por lo tanto también el generador P. Lo que implica que los índices e F_t deben ser angulares mn

Necesitamos

$$[\bar{D}\Theta]^{mn} = 0$$

$$(\Theta^2 + e^2)^{mn} = (\alpha - 1)\tilde{e}^m\tilde{e}^n$$

$$\tilde{R}^{mn} = \tilde{e}^m\tilde{e}^n$$

Reuniendo todo obtenemos

$$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = kn\int_0^1 dtt\epsilon_{01m1\cdots m2n-2}(2\Theta_t^{01}e^{m1} + 2e_t^0\Theta^{1m1})[1+t^2(\alpha-1)]^{n-1}\tilde{e}_{m2\dots}\tilde{e}_{m2n-1}$$

pero

$$\Theta_t^{01} = r$$

$$e^{m1} = r\tilde{e}^{m1}$$

$$e_t^0 = \Delta$$

$$\Theta^{1m1} = -\Delta\tilde{e}^{m1}$$

entonces

(3.118) $$Q(\frac{\partial}{\partial t}) = kn\int_0^1 dt\epsilon_{01m1\dots m2n-2}2t(\alpha-1)[1+t^2(\alpha-1)]^{n-1}\tilde{e}_{m1\dots}\tilde{e}_{m2n-1}$$

esta expresión puede integrarse en t tomando

$$u = [1 + t^2(\alpha - 1)]$$

y el resultado es

$$Q\frac{\partial}{\partial t} = k\epsilon_{01m1\dots m2n-2}(\alpha^n - 1)\tilde{e}_{m1\dots}\tilde{e}_{m2n-1}$$

integrando la esfera S^{d-2} esto da

$$\int_{Sd-2} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = k(d-2)!\Omega_{d-2}(\alpha^n - 1)$$

donde usamos

$$\int_{Sd-2} \epsilon_{01m1...m2n-2}\tilde{e}_{m1}...\tilde{e}_{m2n-1}$$

Finalmente

$$\int_{Sd-2} Q(\frac{\partial}{\partial t}) = M \tag{3.119}$$

5. Trabajos Futuros

5.1. Conexiones N-planas.

Sea M una variedad suave y finita y $\epsilon = M \times E$ un fibrado trivial sobre M, donde ϵ es un fibrado global y M es una vecindad sobre la cual ϵ es trivial. Ya que nuestros resultados son covariantes se mantiene globalmente así.

El espacio $\Omega^\bullet(M, End(\epsilon))$ de $End(\epsilon)$-forma valuada sobre M está dotado con una estructura de álgebra graduada, con el producto dado por

$$\wedge : \Omega^\bullet(M, End(\epsilon)) \otimes \Omega^\bullet(M, End(\epsilon)) \to \Omega^\bullet(M, End(\epsilon)) \tag{3.120}$$

$$(\alpha \otimes \psi)(\beta \otimes \phi) \to (\alpha \wedge \beta) \otimes \psi\phi \tag{3.121}$$

El espacio de las ϵ-formas valuadas $\Omega^\bullet(M, \epsilon)$ está dotado con una estructura de módulo diferencial graduada sobre $\Omega^\bullet(M, End(\epsilon))$ y tambien sobre el álgebra diferencial graduada $\Omega^\bullet(M)$ de la forma diferencial sobre M, dada por

$$\Omega^\bullet(M) \otimes \Omega^\bullet(M, \epsilon) \to \Omega^\bullet(M, \epsilon)$$

$$\alpha(\beta \otimes \phi) \to (\alpha \wedge \beta) \otimes \phi.$$

$$\Omega^\bullet(M, End(\epsilon)) \otimes \Omega^\bullet(M, \epsilon) \to \Omega^\bullet(M, \epsilon)$$

$$(\alpha \otimes \Phi)(\beta \otimes \phi) \to (\alpha \wedge \beta) \otimes \Phi(\phi)$$

Recordemos que una derivada covariante ∇ sobre ϵ es un mapa lineal $\nabla : \Omega^\bullet(M, E) \to \Omega^\bullet(M, E)$ de grado 1, tal que

$$\nabla(a\alpha) = (da)\alpha + (-1)^{deg(a)} a \nabla \alpha \tag{3.122}$$

para todo $a \in \Omega^\bullet(M), \alpha \in \Omega^\bullet(M, E)$.

Si ϵ es trivial, ∇ debe ser escrita como $\nabla = d + \omega$ para algún $\omega \in \Omega^1(M, End(\epsilon))$, donde d es de Rham Diferencial y ω es la conexión uno-forma de ∇.

Para cualquier $\alpha \in \Omega^k(M,E), \nabla\alpha \in \Omega^{k+1}(M,E)$ es la Forma E-valuada dada por

$$\nabla\alpha = d\alpha + \omega \wedge \alpha \tag{3.123}$$

Ahora tomando la derivada covariante de esta expresión se obtiene

$$\nabla^2(\alpha) = d\omega \wedge \alpha + \omega \wedge \omega \wedge \alpha = (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \alpha = F_\omega \wedge \alpha \tag{3.124}$$

La 2-forma $F_\omega \in \Omega^2(M, End(\epsilon))$ es llamada la curvatura de ∇. Una conexión ω se dice plana si $\nabla^2 = 0$ o equivalentemente si $F_w = 0$.

Definición 3.1. Diremos que una conexión ω es **N-plana** si $\nabla^N = 0$, donde $\nabla = d+\omega$ y $N \geq 2$.

5.2. La (M-N) Ecuación de Maurer -Cartan.

Un $N - dga$ es un álgebra graduada asociativa A, provista de un operador $d : A \to A$ de grado 1 tal que $d(ab) = d(a)b + (-1)^{\bar{a}} ad(b)$ y $d^N = 0$. Un álgebra nilpotente graduada (Nil-dga) sera un $N - dga$ para algunos enteros $N \geq 2$.

Lema 3.2. *Sea $\mathbf{A}^\bullet$ una $M - dga$ y $R \in Ob(\mathbf{Artin})$. Definimos $d_A R = dA + e$ donde $e \in Der(\mathbf{A}^\bullet \otimes \mathbf{R}_+)$ de grado 1, entonces*

$$(d_A R)^N = \sum_{s \in E_N} c(s,N) e^{(s)d_A^{N(s)}}, \tag{3.125}$$

donde los coeficientes $c(s, N+1)$ son iguales a

$$\delta_1(s)c(s>1,N) + (-1)^{|s|+l(s)}c(s,N) + \sum_{i=1}^{l(s)} \eta_i(s)(-1)^{|s<1|+i-1}c(s-e_1,N), \tag{3.126}$$

y $c(\emptyset,1) = c(0,1) = 1$

La siguiente expresión generaliza la expresión previa, proporcionandonos información acerca de los coeficientes generalizados de Maurer-Cartan.

$$(d_A + e)^N + 1 = \sum_{s \in E_{N+1}} c(s, N+1) e^s d_A^{N(s)+1}.$$

Teorema 3.3. *Tenemos*

$$(d_A R)^N = \sum_{k=0}^{N-1} c_k d_A^k, c(s,N) e^{(s)} \tag{3.127}$$

donde

$$c(s,N) = \sum_{\gamma \in P_N(\emptyset,s)} \omega(\gamma) \tag{3.128}$$

y

$$c_k = \sum_{s \in E_N N(s) = ks_i < M} c(s,N) e^{(s)} \tag{3.129}$$

Prueba. Se puede verificar que los coeficientes $c(s,N) = \sum_{\gamma \in P_N(\emptyset,s)} \omega(\gamma)$ cumplen con la fórmula de recurrencia del Lema 3.2, para se debe verificar que $P_{N+1}(\emptyset, s)$ naturalmente fraccionado en 3 bloques. El primer bloque contiene caminos que son de la composición de un camino $\gamma : \emptyset \to s$ en $P_N(, s > 1)$ con un borde $s > 1 \to (0, s > 1)$ y correspondiente con el primer término en la recurrencia. El segundo bloque consiste en caminos de la composición de un camino $\gamma : \emptyset \to s$ en $P_N(\emptyset, s)$ con un borde $s \to s$ y correspondiente con el segundo término de la fórmula de la recurrencia del Lema 3.2, finalmente el último bloque consiste en caminos que son de la composición de caminos $\gamma : \emptyset \to s - e_i$ en $P_N(\emptyset, s - e_i)$ con un borde $s - e_i \to s$ y correspondiente con el último término de la recurrencia.

Sea $\mathbf{A}^\bullet$ un M-dga y $A_R^\bullet$ una N-deformación sobre R con $\mathbf{A}_R^\bullet = A^\bullet \otimes R$. Para $a \in A^1 \otimes R_+$ definimos $e_a : A_R^\bullet \to A_R^\bullet$ por

$$e_a(b) = ab - (-1)^{\bar{b}} ba. \tag{3.130}$$

Donde asumimos que el producto no es de grado conmutativo. Es fácil ver que e_b es una derivación de grado 1 en $\mathbf{A}^\bullet \otimes R_+$. Entonces $d_{AR} = d_A + e_a$ es una N-deformación de d_A sii satisface la siguiente ecuación

$$\sum_{s \in E_N si < M} c(s,N) e_a^{(s)} d_A^{N-|s|-l(s)} = 0 \tag{3.131}$$

Ésta fórmula es llamada **La (M,N)-Ecuación de Maurer - Cartan** .

Definición 3.4. Para $N \geq M, a \in A^1 \otimes R_+$ se dice un (M,N)-Elemento de Maurer - Cartan de $\mathbf{A}^\bullet \otimes R$ si e_a satisface la (M,N) ecuación de Maurer - Cartan. Diremos que es una homotótica a a', si e_a es homotópica a e'_a como un morfismo de N-dgas.

5.3. Acción de Chern-Simons.

Sea $(A^{\bullet, m_A, d_A})$ una 2-dga sobre $\mathbf{k}$ y sea $(M^\bullet, m_M, d_M)$ un 2-dgm sobre $(A^{\bullet, m_A, d_A})$,consideremos una 2K-Ecuación de Maurer-Cartan, la cual surge cuando deformamos el 2-dgm $(M^\bullet, m_M, d_M)$ en una 2K-dgm, $MC_{2K}(a) = (d_{End}(a) + a^2)^K = 0$, donde $a \in End(M^\bullet)$ tiene grado 1. Asumamos que existe un funcional lineal $\int : End(M^\bullet) \to \mathbf{k}$ de grado 2K+1, ($i.e., \int b = 0 if \bar{b} \neq 2K+1$) el cual satisface las siguientes condiciones:

1. $\int$ es no degenerada, esto es, $\int ab = 0$ para todo a, entonces $b = 0$
2. $\int d(a) = 0$ para todo a, donde $d = d_{End}(M^\bullet)$.
3. $\int$ es cíclica, esto es $\int a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^{\bar{a1}(\bar{a2} \ldots \bar{an})} \int a_2 \ldots a_n a_1$

Definimos el funcional de Chern-Simons $CS_{2,2K} : End(M^\bullet) \to \mathbf{k}$ por

$$CS_{2,2K}(a) = 2K \int \pi(\#^{-1}(a(d_{End}(a) + a^2)^k)) \tag{3.132}$$

donde

1. $\mathbf{k} < a, d(a) >$ denota la $\mathbf{k}$- álgebra libre generada por los símbolos $a4$ y $d(a)$.

2. $\# : \mathbf{k} < a, d(a) > \to \mathbf{k} < a, d(a) >$ es el mapa lineal definido por

$$\#(a^{i_1} d(a)^{j_1} \dots a^{ik} d(a)^{jk}) = (i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k) a^{i_1} d(a)^{j_1} \dots a^{i_k} d(a)^{j_k}$$

3. $\pi : \mathbf{k} < a, d(a) > \to End(M^\bullet)$ es la proyección canónica.

Para K=1 tenemos que $CS_{2,2(a)}$ es igual a

$$2 \int \pi(\#^{-1}(a(d(a) + a^2))) = 2 \int \pi(\#^{-1}(ad(a) + a^3)) = \int ad(a) + \frac{2}{3} a^3, \tag{3.133}$$

el cual es el funcional de Chern-Simons. En general se tienen los siguientes resultados

Teorema 3.5. *Sea $K \geq 1$ un entero. El funcional de Chern-Simons $CS_{2,2k}$ Es un Lagrangiano para la 2K-ecuación de Maurer-Cartan, i.e., $a \in End(M^\bullet)$ es un punto crítico de $CS_{2,2K}$ si y solo si $(d(a) + a^2)^K = 0$.*

Prueba. Verifiquemos que $\frac{\partial}{\partial \epsilon} CS_{2,2K+2}(a + b\epsilon)|_{\epsilon=0} = (2K+2) \int bMC_{2K+2}(a)$.

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} CS_{2,2K+2}(a + b\epsilon)|_{\epsilon=0} \tag{3.134}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \epsilon} (2K+2)\pi \int ((a + b\epsilon) MC_{2K+2}(a + b\epsilon))|_\epsilon = 0$$

$$= (2K+2) \int \pi(\#^{-1}(\frac{\partial}{\partial \epsilon}(a + b\epsilon) MC_{2K}(a + b\epsilon) MC_2(a + b\epsilon)))|_\epsilon = 0$$

$$= (2K+2) \int \pi(\#^{-1}(\frac{\partial}{\partial \epsilon}(a + b\epsilon) MC_{2K}(a + b\epsilon))|_{\epsilon=0} MC_2(a)$$

$$+ (2K+2) \int \pi(\#^{-1}(aMC_{2K}(a) \frac{\partial}{\partial \epsilon} MC_2(a + b\epsilon)))|_{\epsilon=0}.$$

Por razones de peso el segundo término de ésta expresión desaparece, por hipótesis de inducción

$$\frac{\partial}{\partial} CS_{2,2K+2}(a + b\epsilon)|_{\epsilon=0} = (2K+2) \int bMC_{2K}(a) MC_2(a) \tag{3.135}$$

$$= (2K+2) \int bMC_{2K+2}(a).$$

Para K=2, 3 El funcional de Chern-Simons $CS_{2,2K}$(a) está dado por

$$CS_{2,4}(a) = \int \frac{4}{3} a(d(a))^2 + 2a^3 d(a) + \frac{4}{5} a^5 \tag{3.136}$$

$$CS_{2,6(a)} = \int \frac{3}{2} a(d(a))^3 + \frac{12}{5} a^3 (d(a))^2 + \frac{6}{5} ad(a) a^2 d(a) + 3a^5 d(a) + \frac{6}{7} a^7. \tag{3.137}$$

Sería interesante reescribir el funcional $CS_{2,2K}$(a) en términos de formas de transgresión, más aún, dado que en este caso se tiene un $2K$-complejo, podríamos utilizar los grupos de cohomología generalizados asociados a este $2K$-complejo para clasificar los observables y las cantidades conservadas.

6. Resultados Concluyentes

Al usar las teorías modeladas a través de un lagrangiano dado por las formas de Chern - Simons conseguimos un tratamiento independiente de la métrica del estado base, cuyos observables son invariantes topológicos pero en la cual la invariancia es estrictamente local bajo transformaciones de gauge, pues la acción cambia por un término de borde, por esta razón se reescribe el funcional de la teoría en términos de transgresiones. Éstas involucran 2 campos de calibre que en principio interactúan entre ellos y que representan una generalización de las teorías del CS, de esta manera se consigue una invariancia global, una acción bien definida y que las cargas conservadas sean covariantes respecto al método hamiltoniano. Dichas cargas se consiguen al variar el funcional de transgresión infinitesimalmente y reescribiéndolo con la fórmula de homotopía de Cartan donde la ecuación que describe la dinámica de esta variación es precisamente la de Maurer - Cartan.

Al hacer el tratamiento con los dos potenciales de gauge nos podemos preguntar las posibles combinaciones que podemos tener entre ellos, una estas es que alguna de sus contribuciones sean cero (caso CS), ó que ninguna sea cero en cuyo caso podemos concluir usando las referencias citadas ([1]) que la curvatura es plana, es decir para dos potenciales la 2-curvatura es 2-plana.

La pregunta que surge a través de estos resultados entonces es, si hay n-conexiones con contribución distinta de cero ¿cuál será la relación con su N-curvatura? Con el principio estudiado con el caso de la transgresión con dos potenciales podemos intuir de manera especulativa quizás, que al considerar un mayor número de conexiones estaríamos tratando con una superposición de campos con curvaturas N-planas. Se pretende extender el estudio de este trabajo de investigación a dimensiones mayores a 5 para poder dar respuesta a esta conjetura.

Apéndice

1. Fibrados

1.1. Variedad diferenciable.

Dado un espacio topológico X de Hausdorff, segundo numerable y localmente compacto decimos que una variedad diferenciable es un atlas de dimensión n (n-variedad), la cual es un espacio topológico M, junto con una familia $(M_i, \Psi)_{i\in I}$ tal que:

1. $M = \bigcup_{i\in I} M_i$
2. Para cada $i \in I$ existe un inyección $\psi_i : M_i \to \mathbb{R}^n$ tal que $\psi_i(M_i)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$
3. Para $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, $\psi_i(M_i \cap M_j)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y las composiciones: $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(M_i \cap M_j) \to \psi_j(M_i \cap M_j)$ son diferenciables.
4. Es maximal en el sentido que cualquier otra carta que satisfaga la propiedad 3, pertenece al atlas.

Definición 3.6. Un fibrado consiste en una cuaterna (E, B, π, F), donde E, B y F, son variedades y π es una aplicación continua y sobreyectiva de $E \to B$, de manera que se cumple que $\forall x \in B$:

- $\pi^{-1}(x) \subseteq E$
- $\pi(\pi^{-1}) = x$
- $\pi^{-1}(x) \cong F$ Es la fibra típica.
- $E = \bigcup\limits_{x\in B} \pi^{-1}(x)$

Si F y $\pi^{-1}(x)$ son espacios vectoriales, decimos que es un fibrado vectorial. $\forall\ U_\alpha \subseteq B, \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times F$ decimos que es una trivialidad local.

Condición de cociclo

Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$:

- $U_\alpha \cap U_\beta \subseteq U_\alpha$
- $U_\alpha \cap U_\beta \subseteq U_\beta$

Existe una aplicación $\pi^{-1}(U_\beta)$ que cumple con la siguiente relación:

$$\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) = U_\alpha \cap U_\beta \times F \to U_\alpha \cap U_\beta \times F$$

$$(x, f) \to (x, g_{\alpha\beta}(f))$$

$$Id \times g_{\alpha\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} : F \to F$$

donde $g_{\alpha\beta} \in Aut(F)$

.
En particular, si $F = \mathbb{R}^n, Aut(F) \equiv Gln(\mathbb{R})$. $Aut(F)$ se denomina grupo estructural.

Se llama a B el espacio de base del fibrado, E el espacio total, para cualquier $x \in B$, $\pi^{-}1(x)$ se llama la fibra en x y la función π se llama proyección.

Definición 3.7. G-fibrado principal es un fibrado $\pi : P \to M$ junto a una acción continua $P \times G \to P$ con un grupo topológico G tal que este último preserva las fibras de P y la acción es libre y transitiva. La fibra abstracta del fibrado se la toma como G.

Si G es un grupo de Lie cualquiera y $F \equiv G$ entonces decimos que el **fibrado es principal**.

Definición 3.8. Dada una variedad diferenciable de dimensión n, se denomina Fibrado Tangente a la variedad diferenciable TM de dimensión $2n$ que se forma considerando en cada punto $m \in M$ el espacio vectorial T_mM

$$TM = \{(m, v) \backslash m \in M, v \in T_mM\}.$$

Definición 3.9. Sea M una variedad suave sobre la cual G actúa efectivamente. El Fibrado Asociado a (E, π, B, F) a través de la acción de G en E es denotado (P, π_P, M, B, F) con

$$P = P \times_M G = (P \times_M) \backslash \approx,$$

siendo $\approx$ la relación de equivalencia dada por

$$(u, w) \approx (R_a u, a^{-1} w)$$

si $a \in G$. La clase de equivalencia de (u, w) se denotará $u.w$. La fibra de π_P sobre $m \in B$ será denotado P_m.

Definición 3.10. Sea M una variedad de dimensión n. Sea LM el Fibrado de Referencias de M, entendido como el conjunto de isomorfismos lineales $l : R^n \to T_mM, \forall m \in M$, equivalentente LM se puede entender como el conjunto de bases de $T_mM, \forall \in M$ bajo la correspondencia

$$l \leftrightarrow \{l(e1), \ldots, l(en)\}.$$

Denotaremos por π^L a la proyección $LM \to M$ y por R^L la acción a la derecha del grupo estructural $Gl(n)$ sobre LM. Escribiremos

$$R_a^L \equiv la := l \circ a$$

con $a \in GL(n)$.

El grupo actúa naturalmente sobre la fibra vía cambio de bases. Dándole al fibrado de referencia la estructura de un fibrado principal.

PROPOSICIÓN 3.11. *Si* $E_1 \to B$ *y* $E_2 \to B$ *son fibrados, entonces:*
E_1^* , $E_1 \otimes E_2$, $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \oplus E_2$ *son fibrados.*

EJEMPLO 3.12.

$TM \to M$ Es el fibrado tangente, con fibra típica $T_xM,\ x \in M$.

$TM^* \to M$ Es el fibrado cotangente, con fibra típica $T_x^*M, x \in M$

$\bigwedge^k TM^* \to M$ Es el fibrado exterior

$TM^* \otimes T^*M \dots TM \dots \otimes TM \to M$ Es el fibrado tensorial

DEFINICIÓN 3.13. Sea $\pi : E \to B$ y $s = B \to E$ decimos que s es una sección si $\pi \circ s = Id$, en particular :

- $s : B \to TM$ Es un campo vectorial.
- $s : B \to \bigwedge^k T^*M$ Es una k-forma diferencial.
- $s : M \to T^pM \otimes T^qM$ Es un (p,q) tensor.

1.2. Conexiones sobre fibrados principales.

Sea un fibrado principal con base B y grupo estructural G, que actúa en cada punto x de un espacio P, y P_x es el espacio tangente a P. Sea G_x es un subespacio de P_x tangente a la fibra a través de x. Entonces :

DEFINICIÓN 3.14. Una conexión Γ en P es la elección de un subespacio tangente Q_x en cada punto de x de P, el cual satisface las siguientes condiciones:

1. P_x es la suma directa de Q_x y G_x.
2. Para cada $a \in G, x \in P, Q_{xa}$ es la imagen de Q_x por R_a.
3. Q_x depende diferencialmente de x respecto de esta última condición: dado un campo vectorial X (no necesariamente diferenciable) sobre P (ó un subespacio abierto de P), tenemos en cada punto la descomposición. (condición 1)

$$X_x = Y_x + Z_x$$

donde

$$Y_x \in G_x, Z_x \in Q_x$$

y se cumple que :

- La asociación $x \to Y_x$ da un campo vectorial llamado componente vertical.
- La asociación $x \to Z_x$ da un campo vectorial llamado componente horizontal.

Ahora, la condición (3) significa que si un campo vectorial X es diferenciable, también lo es la componente horizontal Z de X (también la vertical). Cuando una conexión es dada, llamamos a Q_x subespacio horizontal en x.

La componente vertical (horizontal) de un campo vectorial X se denota $vX(hX)$.

PROPOSICIÓN 3.15. *X es vertical si $vX = X$(idem horizontal).*

Dada una conexión γ en P, podemos definir una 1-forma w sobre P con valores en g de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 3.16. Sea G_x (para $x \in P$) el conjunto de todos los vectores tangentes de la forma $(A*)_x$ para $A \in g$, donde $A*$ es el campo vectorial correspondiente a $A \in g$. Ahora, w_x está definido por ser la aplicación lineal de G_x en g que aplica $(A*)_x \to A$ y el cual cumple $Z \in Q_x$ en 0 de g.

A partir de esta definición tenemos que si X es campo vectorial diferenciable sobre P, entonces $w(X) = w(vX)$.

1.3. Forma de conexión.

La forma w es llamada la forma de conexión si satisface :

1. $w(A*) = A$

2. Para cada $a \in G, R_a$ transforma w en $ad(a^{-1}w)$, es decir;

$$(R_a^*.w)(X) = (ad(a^{-1}))(w(X))$$

para cualquier campo vectorial X, y $ad(a^{-1})$ es la representación adjunta de G en g. Recíprocamente, dada una 1-forma diferenciable w sobre P con valores en g satisfaciendo a) y b), podemos definir una conexión Γ cuya forma de es w.

La proyección canónica $\pi : P \to B$ para $x \in P$ induce una aplicación $\pi : P_x \to T_u$ de B en $\pi(x) = u$, cuando una conexión es dada, se nota que $\pi : Q_x \to T_u$ es isomorfismo.

DEFINICIÓN 3.17. Sea X un campo vectorial de B, diremos que $X*$ es un Levantamiento de X si es el único campo vectorial sobre P, el cual es horizontal y cubre X.

X^* y X están relacionados de la siguiente forma

$$\pi X^* = X$$

.

La existencia de unicidad del levantamiento se obtiene del hecho que ϕ es linealmente isomorfo a Q_x en T_u.

LEMA 3.18. *El levantamiento de X^* es invariante por R_a para cada $a \in G$. Recíprocamente, si X^* es campo vectorial horizontal sobre P el cual es invariante por R_a, entonces es el levantamiento de algún campo vectorial X sobre B.*

Lema 3.19. *Sean X^* e Y^* levantamientos de X e Y respectivamente. Entonces $X^* + Y^*$ es el levantamiento de $X + Y$ y $h[X^*, Y^*]$ es el levantamiento de $[X, Y]$.*

1.4. Paralelismo.

En una variedad diferenciable, un campo vectorial se dice paralelo si su derivada paralela en ese punto es nula, se extiende este concepto de transporte paralelo a lo largo de la curva, si la derivada se anula en cada punto de ella. Intuitivamente, el campo vectorial unitario es ortogonal al campo vectorial tangente a la curva en cada punto. La traslacion paralela en una variedad diferenciable en la cual se da un campo vectorial que en algún punto dado se comportará paralelamente a un vector dado.

Una curva en P se dice *horizontal* si sus vectores tangentes son todos horizonales.

Dada una curva $\alpha = \alpha(t)$ en B, un levantamiento de α es una furva horizontal $\alpha^* = \alpha^*(t)$ en P tal que

$$\pi\alpha^*(t) = \alpha(t), 0 \leq t \leq 1$$

Si tomamos X^* el levantamiento de $\alpha(t)$ en B, su tangente $\alpha'(t)$ puede ser extendida a un campo vectorial X definido en cierto abierto U que contenga a la curva. Tomamos X^* el levantamiento de X definido en $\phi^-1(U)$. Entonces cada curva integral de X^* a través de cualquier punto de la fibra sobre u_o es una curva horizontal, la cual proyecta sobre $\alpha(t)$. Recíprocamente, cada levantamiento de $\alpha(t)$ debe ser una curva integral de X^*. Este argumento es la clave de la demostración de existencia y unicidad del levantamiento $\alpha(t)$, el cual pasa a través de cada punto de P sobre $\alpha(t_o)$.

2. Tensores

Un tensor es un objeto con índices en una o más representaciones de un grupo, tal que todos sus componentes son constantes (números puros) y que bajo transformaciones arbitrarias en el grupo transforma en si mismo.

Por ejemplo η_{rs} es un tensor invariante de $O(N, M)$ por definición (también de $SO(N, M)$), el símbolo de Levi-Civita $\epsilon_{r1 \ldots rD}$ es un tensor invariante ante de $SO(N, M), N + M = D$ y también lo son las matrices de Dirac para esa dimensión y signatura $\gamma^r_{\alpha\beta}$ (con índices en las representaciones fundamental y adjunta).

Se puede obtener tensores invariantes tomando la traza de un producto de generadores del grupo. La traza simétrica se obtiene simetrizando

$$STr(T^{I1} \ldots T^{In+1}) = \sum_P Tr(T^{(I1} \ldots T^{In+1)})$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones de índices. Llamamos en general Traza Invariante, al resultado de la contracción de todos los índices de un objeto dado con un tensor invariante, y una Traza Simétrica Invariante si el tensor invariante es simétrico.

Los tensores invariantes con índices en la representación adjunta para los grupos $SO(D)$ con cualquier signatura (lo que incluye dS y AdS y su contracción Poincaré) son esencialmente η_{rs} y $\epsilon_{r1 \ldots rD}$ (el tensor de Levi-Civita), y productos tensoriales y contracciones de estos. Productos de estos son equivalentes a productos de trazas de productos generadores $Tr[T^{r1} \ldots T^{rn1}] \ldots Tr[T^{r1} \ldots T^{r1} \ldots T^{rn}k]$

con el rango del tensor invariante igual a $N = n_1 + \cdots + n_k$.

También se usa la notación

$$< T^{r1} \ldots T^{rk} > \equiv g^{r1 \ldots rk}$$

para denotar una traza simétrica invariante. Los índices de grupo se suben y bajan con la métrica del grupo, que para $SO(D)$ es η_{rs}.

3. Algunas Demostraciones

3.1. Operador y fórmula de homotopía de Cartan.

Sea A_t la interpolación entre dos potenciales de gauge (ó conexiones) A_0 y A_1,

$$A_t = tA_1 + (1-t)A_0$$

$$F_t = dA_t + A_t^2$$

Un polinomio invariante $P(F)$ se define como la suma forma

$$P(F) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n STr(F^{n+1})$$

donde

$$STr(T^{I_1} \ldots T^{I_{n+1}}) = g^{I_1 \ldots I_{n+1}}$$

corresponde a una traza simétrica invariante en el álgebra G. Esto es lo mismo que decir que $g^{I_1 \ldots I_{n+1}}$ es un tensor invariante simétrico en el álgebra del G, el cual por construcción tiene sus índices en la representación adjunta del grupo G.

El operador de homotopía de Cartan k_{01} actúa sobre polinomios $P(F_t, A_t)$ y se define como

$$k_{01} P(F_t, A_t) = \int_0^1 dt l_t P(F_t, A_t)$$

donde la acción del operador l_t en polinomios arbitrarios de A_t y F_t es definida a través de

$$l_t A_t = 0$$
$$l_t F_t = A_1 - A_0 \equiv J$$

y la convención de que l_t actúa como una antiderivación

$$l_t(\Lambda_p \Sigma_q) = (l_t \Lambda_p)\Sigma_q + (-1)^p \Lambda_p (l_t \Sigma_q)$$

donde Λ_p y Σ_q son p y q-formas (funciones de A y de F) respectivamente.

Se puede verificar directamente la relación

$$(l_t d + dl_t)P(F_t, A_t) = \frac{\partial}{\partial t} P(F_t, A_t)$$

la cual se puede integrar entre 0 y 1 en t para obtener la fórmula de homotopía de Cartan.

$$(k_{01}d + dk_{01})P(F_t, A_t) = P(F_1, A_1) - P(F_0, A_0)$$

Para variaciones arbitrarias δA se puede definir la antiderivación l (correspondiente a dtl_t) actuando como

$$lA = 0$$

$$lF = \delta A$$

Entonces

$$ld + dl = \delta$$

en polinomios en A y F.

3.2. Vector de Killing.

Un vector de Killing ξ es un campo vectorial sobre una variedad que satisface la siguiente ecuacion, usualmente referidas como las ecuaciones de killing:

$$L_{\bar{\xi}} g_{\mu\nu} = \xi_(\mu; \nu) = 0$$

donde $L_{\bar{xi}}$ es la derivada de Lie de cualquier objeto geométrico que venga a continuación para ser operado. Nos dice como cambia la geométria de los objetos que son empujados a lo largo de las curvas que tengan vectores tangentes.

El sentido físico de las ecuaciones de Killing está referido a la métrica, la cual al ser arrastrada, a lo largo de algunas curvas congruentes permanece invariante. Lo que nos está diciendo es que los caminos para el cual el vector tangente constituye un simetría de la variedad al menos es local. Existen sin embargo algunas formas útiles de ver las simetrías incluso cuando ésta no sea de la clase de simetrías que deja la métrica sin cambios.

Introduciremos más generalmente la noción de simetría considerando el caso ecuaciones más generalizadas.

3.3. Vector de Killing conforme.

$$L_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi(\mu;\nu) = X g_{\mu\nu}$$

Estos generan cambios invariantes para la curvatura, al menos en la dirección de la métrica.

Por otro lado, cuando X es una constante distinta de cero la métrica cambia por un factor de escala a medida.

El caso más importante es cuando X es cero, nos referimos a este caso como (un verdadero) Vector de Killing, y es cuando la métrica es completamente invariante.

3.4. Teorema de Noether.

Este teorema indaga en las consecuencias que tiene las relaciones entre la invariancia de los lagrangianos bajo un cierto grupo de simetría.

El contenido de este teorema se centra en los llamados grupos continuos en el sentido de Lie, i.e. grupos G que a la vez son variedad. Los cuales llevan asociado una transformación en particular de G. Así, se muestra la relación entre simetrías globales y cantidades conservadas, y la relación entre simetrías locales e identidades gauge. Éstos corresponden respectivamente al primer y segundo teoremas de Noether (que se diferencian en que el primero tiene un número finito (o infinito numerable) de generadores de la simetría, mientras que para el segundo se consideran grupos con infinitos generadores. La diferencia entre local y global consiste en que el parámetro de la transformación dependa o no de la posición en el espaciotiempo.

La variación de formas diferenciales bajo difeomorfimos en que las coordenas cambian como $\delta x^{\mu} = \xi^{\mu}$ está dada por

$$\delta\alpha(x) = \alpha'(x) - \alpha(x) = -\mathbb{L}_{\xi}\alpha$$

Donde $\mathbb{L}_{xi}$ es la derivada de Lie, que para formas diferenciales puede escribirse como:

$$\mathbb{L}_{\xi}\alpha = [dI_{\xi} + I_{\xi}d]\alpha$$

con d la derivada exterior y el operador de contracción dado por

$$I_\xi \alpha_p = \frac{1}{(p-1)} \xi^\nu \alpha \nu \mu_1 \dots \mu_{p-1} dx^{\mu 1} \dots dx^{\mu p-1}$$

el operador I_ξ es una antiderivación, en el sentido de que actuando en él, el producto exterior de dos formas diferenciales α_p y β_q de ordenes p y q respectivamente, da $I_\xi(\alpha_p\beta_q) = I_\xi\alpha_p\beta_q + (-1)^p\alpha_p I_\xi\beta_q$. Un resultado útil es que la derivada de Lie acuando sobre potenciales de gauge es

$$\mathbb{L}_\xi A = D(I_\xi A) + I_\xi F$$

donde D es la derivada covariante y F es el tensor de campo. Se considera una densidad lagrangiana dada por una forma diferencial $L(\phi, \partial\phi)$, donde ϕ representa todos los campos dinámicos. La variación del lagrangiano bajo difeomorfismo está dada por $\delta\mathbb{L} = -d(I_\xi L)$, ya que $d\mathbb{L} = 0$ porque el orden de $\mathbb{L}$ es igual a la dimensión del espacio. Se considera una clase de transformaciones bajo las que el lagrangiano sea cuasi-invariante, combinadas con difeomorfismos. Bajo estas, la variación del lagrangiano se asume de la forma

$$\delta\mathbb{L} = d\Omega - d(I_\xi L)$$

donde la primera derivada total viene de las transformaciones consideradas y la segunda de los difeomorfismos. Por otro lado, el procedimiento usual que lleva a las ecuaciones del movimiento (E.d.M.) de Euler - Lagrange da la variación del lagrangiano como las ecuaciones del movimiento más un término de borde

$$\delta L = (E.d.M.)\delta\phi + d\Theta$$

donde las variaciones $\delta\phi$ son infinitesimales pero arbitrarias en su forma. A partir de estas expresiones de la variación obtenemos, (asumiendo las variaciones en ambas, restringidas a transformaciones de la clase considerada en la primera expresión de $\delta\mathbb{L}$ e igualando) que si valen las E.d.M.

$$d[\Omega - I_\xi L - \Theta] = 0$$

se sigue que la llamada Corriente de Noether

$$\star j = \Omega - I_\xi L - \Theta$$

Se puede ver que si se agrega un término de borde a $\mathbb{L}$, como $\mathbb{L}' = \mathbb{L} + dB$ con B función de los campos y sus derivadas, entonces la corriente conservada asociada a la invariancia bajo difeomorfismos cambia como $\star j' = \star j + I_{xi} B$

3.5. Grupo de simetría.

La fibra se considerará como la variedad del grupo estructural G, el espacio tangente $T_M G$ de G sobre el elemento de identidad e que constituye el álgebra de Lie g asociada al grupo estructural G .

Sea $\{T_A\}$ una base de $T_M G = g$ entonces;

$$[T_A, T_B] = C^C_{AB} T_C$$

El conmutador sobre formas diferenciales valuadas en el álgebra.

Siendo

$$C_A B^C$$

constantes de estructura

Satisface

$$C^C_{AB} = (-1)^q(A)q(B)C^C_{AB}$$

La identidad de Jacobi

$$(-1)^{q(A)q(B)}C^C_{AB}C^E_{CD} + (-1)^{q(D)q(B)}C^C_{DA}C^E_{CB} + (-1)^{q(B)q(A)}C^C_{BD}C^E_{CA} = 0$$

Sea M y N una M y N-formas respectivamente, sobre una variedad V valuadas en el álgebra g i.e.;

$$M = M^A T_A; \qquad M^A \in \Omega^M(V)$$

$$N = N^A T_A; \qquad N^A \in \Omega^N(V)$$

Entonces se define el conmutador entre M y N como

$$[M, N] = M^A N^B [T_A, T_B]$$

$$[M, N] = M^A N^B C_{AB} T_C$$

En donde se está implicíto el uso de la relación

$$[M, N] = M^A N^B = M^A \wedge N^B$$

Cuando el conmutador del álgebra viene dado por la representación inducida por el álgebra cobertora universal

$$[T_A, T_B] = T_A T_B = T_A T_B - (-1)^{q(A)q(B)} T_B T_A$$

Entonces el conmutador

$$[M, N] = MN(-1)^{mn} NM$$

Ya que $T_M G = g$ puede definir un mapeo desde vectores en un espacio tangente $T_g G$ hacía el espacio tangente $T_M G$

Sean

- V y W Dos variedades
- $f : V \to W$ Un mapeo entre las variedades

Denotamos $f*$ la imagen recíproca (pullback) inducida por $f : V \to W$, sobre una forma en W hacia V, y con f_* como la imagen directa (pushfoward) inducida sobre un vector en V hacia W así, de esa forma. Dado un vector $\chi \in T_g G$, el elemento correspondiente del álgebra de Lie.

$$\chi \in g = T_M G$$

Está dado por

$$\chi = L_{g-1*}\Big(\chi(g)\Big)$$

Esta operación induce la definición de la forma canónica de un grupo de Lie ó forma de Maurer - Cartan.

$$a_+(g) \in \Omega^1(G) \otimes g$$

como la forma que satisface

$$a_+(g)\Big(\chi(g)\Big) = X$$

A continuación se retoma el tema de las conexiones sobre fibrados principales con el fin de ahondar en detalles que no se tomaron a consideración a principio del capítulo.

Localmente un tiene una estructura del tipo $U \times G$ por lo que se puede esperar que el espacio tangente al fibrado pueda descomponerse en una estructura de suma directa. La descomposición se efectúa en un subespacio tangente vertical, tangente a la fibra G y uno horizontal ortogonal a él.

La operación se lleva a cabo a través de la conexión de Ehresmann

Denotamos

- dp La derivada exterior sobre el fibrado p.
- dm La derivada exterior sobre la variedad base M.
- $T_p p$ El espacio tangente del fibrado principal en p.
- $V_p p$ El espacio tangente a la fibra (subespacio vertical).
- $H_p p$ El complemento de $V_p p$ (subespacio horizontal).

Descompondremos al espacio tangente como

$$T_pP = V_pp \oplus H_pp$$

El subespacio vertical V_pp de T_pp está definido como el kernel de π_* i.e.

$$v_pp = \{y \in T_p/\pi_*(y) = 0\}$$

Para definir el subespacio horizontal en forma unívoca, se debe definir primero una conexión sobre el fibrado.

DEFINICIÓN 3.20. Sea $A \in \Omega^1(p) \otimes g$ una 1-forma sobre p, valuada en el álgebra de Lie, la cual satisface las siguientes condiciones

- La forma A es contínua y suave sobre p. Lo cual implica que A debe ser definida globalmente sobre todo el fibrado.
- Para todo $y \in V_pp$ se cumple que
$$A(y) = a_+(y_\alpha(p))(y_\alpha * y) = y$$
Lo que implica que A asocia a cada vector del subespacio vertical, su correspondiente elemento del álgebra de Lie.
- La acción derecha del grupo viene dada por
$$R_g^*(A(pg)) = g^-1A(p)g$$
Siendo R_g^* La imagen recíproca inducida por la acción derecha $p' = pg$.

Entonces A será llamada, una conexión sobre el fibrado.

El subespacio horizonal será definido como el kernel de A i.e.

$$H_pp \equiv \{\chi \in T_pp/A(\chi) = 0\}$$

Dada una conexión A, tenemos una definición unívoca para H_pp. Ésta definición cumple con la condición de consistencia

$$H_{pg}p = R_g * H_pp$$

La distribución de H_pp es invariante bajo la acción de G.

Sea $\chi \in H_pp$, entonces

$$A(R_g * (\chi)) = R_g^*(A(x)) = 0,$$

por lo tanto $R_g * \chi \in H_{pg}p$.

Bibliografía

[1] M. Angel, R. Díaz, N-differential graded algebras. **J.Pure Appl. Alg 217** (3), (2007), 673-683.

[2] F.Izaurieta, E. Rodriguez, P. Salgado, On transgressions forms and Chern.Simons (super) gravity. Concepción Chile. Marzo 2006.

[3] D. Freed, Remarks on Chern-Simons theory. Bulletin Of The American Mathematical Society, **Volume 46**, Number 2, Pages 221-254, April 2009.

[4] P. Mora, Formas de transgresión como principio unificador en teoría de campos. Instituto de física, facultad de ciencias Iguá 4225, Montevideo, Uruguay. Febrero 2008.

[5] D. Freed, Classical Chern-Simons theory part I. Departament of mathematics, university of Texas at Austin. June 1992.

[6] D.Freed, Classical Chern-Simons theory part II.Houston Journal of Mathematics. **Volume 76**, Number 1. 2050.

[7] J. Manuel Fernandez De la Bastida, Una nueva relación entre la física y las matemáticas en el ocaso del siglo xx. Arbor, 159:626, Pages 125. 1998.

[8] J. Zanelli, Lecture notes on Chern-Simons (super) gravities, **second edition**. Centro de estudios científicos (CECS), casilla 1469, Valdivia Chile. Febrero 2008.

[9] L. Brambila Paz, J. Muciño Raymundo, Las teorías de gauge, CONACyT, Proy 0412-E9107. Departamento de matemáticas, UAM-Iztapala, AP 55-534 México.09340 D.F. Instituto de matemáticas, UNAM, C.U. México D.F.

[10] J. Zanelli, Chern-Simons gravity : from 2+1 to 2n+1 dimensions.Centro de estudios científicos (CECS), casilla 1469. Departamento de física, universidad de Santiago de Chile, Casilla 307. Santiago 2. Chile.

[11] J. Zanelli, Chern-Simons. Forms and trangression actions or the universe as a subsystem. 12 th conference on recent developments in gravity (NEBXII), Journal of physics: conference, series **68**.Centro de estudios científicos (CECS), casilla 1469, Valdivia Chile. 2007.

[12] E. Rodriguez Salgado, Formas de transgresión y semigrupos abelianos en supergravedad. Tesis para optar al grado académico de doctor en ciencias físicas. Chile. 2006.

[13] F. Izaurieta Aranda. Expansión en semigrupos y M-supergravedad en 11 dimensiones. Tesis para optar al grado académico de doctor en ciencias físicas. Concepción Chile. Octubre 2006.

[14] E. Grandi, Teorías de gauge no conmutatuvas: Chern-Simons y Born-Infeld. Tesis doctoral. Universidad nacional de la plata, facultad de ciencias exactas. Departamento de física.

[15] D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. de Snoo, Schur Functions, Operator Colligations, and Reproducing Kernel Pontryagin Spaces, Operator Theory: Adv. Appl. Vol. 96, 1997.

[16] N. Aronszan, Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.

[17] Landau , Lifshitz, Mecánica, Ed. Reverté, Barcelona.1991

[18] H. Pérez, "Física 2 enseñanza media superior",México D.F. 1994

[19] B.E. Clotfelter, The cavendish Experiment as Cavendish knew it. American Journal of Physics.**55:210**. 1987

[20] A.Mardones, J. Zanelli. Lovelock-Cartan Theory of gravity, Class and Quantum Grav, **8, 1545-1558**. 1991.

[21] Landau, Lifshitz, Teoría clásica de Campos.Ed.Reverté.

[22] O. Chandía, J. Zanelli, Phys. Rev.**D55** 7580.1997

[23] O. Chandía, J. Zanelli, Phys. Rev.**D58** 045014.1998

[24] O. Chandía, J. Zanelli, Phys. Rev.**D63** 048502.2001

[25] M. Angel, R. Díaz, N-flat connections. February **2,2008**