UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Conjuntos débilmente Ramsey en espacios de Banach.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Omar Sulbarán** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutor: José Gregorio Mijares.**

Caracas, Venezuela
Octubre 2008

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Conjuntos débilmente Ramsey en espacios de Banach**", presentado por el **Br. Omar Sulbarán**, titular de la Cédula de Identidad **15.714.435**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemáticas**.

**Dr. José Gregorio Mijares.**
**Tutor**

**Dr. Carlos Di Prisco.**
**Jurado**

**Dra. Yamilet Quintana.**
**Jurado**

# Dedicatoria

A aquellos que adquieren conciencia, y toman acciones en pro, sobre la importancia del desarrollo de una actitud disciplinada en esta sociedad sin valores que cada día se destruye a sí misma.

# Agradecimiento

A todos aquellos, entes y personas, que con su apoyo material, académico, institucional, económico, familiar, social, moral, espiritual y hasta sentimental, hicieron que me fuese menos difícil la obtención de este primer logro de envergadura.

Gracias.

# Índice general

# Introducción.

Consideremos lo siguiente, un *espacio polaco* es un espacio topológico separable no vacío al que podemos dotar de una métrica completa cuya topología inducida coincide con la topología original.

No es nuestra intención profundizar en las cuestiones relacionadas con la teoría de los espacios polacos. Sin embargo, la definición anterior nos sirve como punto de partida en la formulación o planteamiento del principal aspecto a considerar en esta investigación.

Sea $\mathbb{N}^{[\infty]}$ el conjunto de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Con la topología natural inducida por el espacio de Cantor ($2^{\mathbb{N}}$) mediante la identificación de cada $A \subseteq \mathbb{N}$ con $\chi_A$, donde $\chi_A$ es la función característica de $A$, se tiene que $\mathbb{N}^{[\infty]}$ es un espacio polaco.

Un subconjunto $\sigma \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es *Ramsey* si existe $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $A^{[\infty]} \subseteq \sigma$ ó $A^{[\infty]} \cap \sigma = \emptyset$, donde $A^{[\infty]}$ es el conjunto de todas los subconjuntos infinitos de $A$.

El teorema de Galvin (ver [**17**]) asegura que todo subconjunto abierto de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ es Ramsey.

Este hecho fue utilizado más tarde por el mismo Galvin junto a K. Prikry (ver [**13**]) para demostrar que los borelianos de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ son Ramsey.

J. Silver (ver [**14**]) demostró que todo conjunto analítico, es decir, la imagen contínua de un boreliano, es Ramsey, extendiendo el resultado de Galvin y Prikry.

E. Ellentuck (ver [**15**]) publicó una prueba topológica del resultado de Silver.

La propiedad de Ramsey para subconjuntos más complejos de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ depende esencialmente de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Intuitivamente, la propiedad de Ramsey puede ser entendida como la afirmación de que dada una partición finita de un cierto "universo", existe un "subuniverso" contenido en él, suficientemente rico (ejemplo, una copia topológica del universo) que yace en una sola clase de la partición. De este modo, fenómenos matemáticos interesantes que son de naturaleza dicotómica, pueden ser descritos usando versiones de la propiedad de Ramsey.

Por otro lado, sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach separable de dimensión infinita con una base fija.

Sea $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$ el conjunto de todas las sucesiones básicas de bloques normalizados (a lo largo de la investigación expondremos con más detalle esta definición). Se tiene entonces que $B_1(\mathcal{X})$ es un espacio polaco.

En ese sentido, similarmente como en el caso de $\mathbb{N}^{[\infty]}$, podemos preguntarnos si para un subconjunto $\sigma$ de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$ es éste Ramsey, es decir, si se verifica una propiedad análoga a la de Ramsey.

Gowers (ver [**12**]) expuso que esto se cumple para el caso $\mathcal{X} = c_0$ considerando a $\sigma$ un abierto en $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$.

Pero esta propiedad falla para espacios de Banach arbitrarios. De hecho, para que esto se cumpla, $\mathcal{X}$ debe contener a $c_0$ (ver [**16**]).

En ese contexto, Gowers introduce la noción de ser *débilmente Ramsey*, para la cual se pueden probar resultados similares como para la propiedad de Ramsey clásica. Esto tuvo una gran importancia, pues le permitió desarrollar potentes herramientas que le sirvieron para demostrar la celebrada dicotomía que lleva su nombre (ver [**12**]) (con la que ganó la medalla Fields).

En este trabajo se hará un estudio detallado de dicha propiedad, y al final se colocará, igualmente detallada, la demostración de que los conjuntos abiertos de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$ son débilmente Ramsey para cualquier espacio de Banach $\mathcal{X}$.

El desarrollo de esta investigación está basada en el artículo *Weakly Ramsey Sets in Banach Spaces* de J. Bagaria y J. López Abad ([**1**]). Estos autores introdujeron una versión análoga a la de Gowers, los mismos participaron activamente en las correcciones de algunos errores técnicos encontrados en el artículo original de Gowers y extendieron algunos resultados de éste.

El trabajo está dividido en cinco (5) capítulos, de los cuales, los cuatro (4) primeros conforman una base sólida en la cual se justifican la mayor parte de los resultados obtenidos en el último capítulo en el que se hace el estudio de la propiedad débilmente Ramsey y la verificación de la misma para el caso de los abiertos de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$.

CAPíTULO 1

# Producto Cartesiano.

Demos inicio al desarrollo de esta investigación al introducir una de las más importantes construcciones de la teoría de conjuntos, el producto cartesiano.

Los principios fundamentales en los que se basa este trabajo se fundamentan en el sistema de axiomas de *Zermelo-Fraenkel* más el *Axioma de Elección*. Nuestro propósito no es hacer un estudio exhaustivo de la teoría axiomática de conjuntos. Sin embargo, aquellos que quisieran abordar el tema de una manera un poco más profunda, pueden acceder a esta información a través de las referencias bibliográficas expuestas al final de la investigación.

## 1. Nociones preliminares.

Sea $A_1, \ldots, A_n$ una colección finita de conjuntos.

La unión de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ la denotaremos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

y la intersección

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Sean $A, B$ dos conjuntos tales que $B \subseteq A$, al complemento de $B$ con respecto a $A$ lo denotaremos $B^c$.

Definición 1.1. Definimos el *producto cartesiano* (finito) de $A_1, \ldots, A_n$ como:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Definición 1.2. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto tal que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Supongamos que a cada elemento $\alpha$ de $\mathcal{A}$ le asociamos un conjunto $A_\alpha$. La colección de conjuntos $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es llamada *familia* de conjuntos, y $\mathcal{A}$ es llamado *conjunto de índices* de la familia.

No es necesario que conjuntos con índices distintos sean diferentes.

Por razones prácticas, más adelante, cuando no exista confusión, escribiremos $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ para representar a la familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ y en algunos casos, cuando se trate de un conjunto arbitrario de índices y no sea necesaria su especificación, escribiremos $(A_\alpha)_\alpha$.

En esta sección extenderemos las nociones de unión e intersección utilizando familias de conjuntos.

Definición 1.3. Sea $\xi$ un conjunto, y sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familia de subconjuntos de $\xi$. La *unión* $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ de esta familia es el conjunto

$$\{x \in \xi : \text{ existe } \alpha \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A_\alpha\}$$

y la intersección $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ es el conjunto

$$\{x \in \xi : \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A},\, x \in A_\alpha\}$$

En algunos momentos escribiremos $\bigcup_\alpha A_\alpha$ ó $\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ para representar a $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$; análogamente para $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$.

## 2. Generalización del producto cartesiano.

En esta sección, el concepto de producto cartesiano es extendido a una familia de conjuntos. Esta extensión está basada en el hecho de que elementos de $A_1 \times \cdots \times A_n$ pueden ser considerados como funciones de la forma $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i$ tales que $f(1) \in A_1, f(2) \in A_2, \ldots, f(n) \in A_n$.

Definición 1.4. Sea $(\mathcal{X}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una familia de conjuntos. El *producto cartesiano* $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{X}_\alpha$ es el conjunto de todas las funciones $f : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{X}_\alpha$ tales que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$, se tiene que $f(\alpha) \in \mathcal{X}_\alpha$.

Un elemento $c \in \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{X}_\alpha$ generalmente lo denotamos $(a_\alpha)_\alpha$, indicando que $c(\alpha) = a_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

Con esta notación, $a_\alpha$ es llamada la *$\alpha$-ésima coordenada* de $(a_\alpha)_\alpha$. El conjunto $\mathcal{X}_\alpha$ es llamado el *$\alpha$-ésimo factor*.

DEFINICIÓN 1.5. Para cada $\beta \in \mathcal{A}$, la función

$$\mathrm{p}_\beta : \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathcal{X}_\alpha \longrightarrow \mathcal{X}_\beta$$

dada por $\mathrm{p}_\beta((a_\alpha)_\alpha) = a_\beta$ la llamamos *proyección* sobre el $\beta$-ésimo factor.

Dado $\beta \in I$ y $C_\beta \subseteq \mathcal{X}_\beta$, denotamos $\mathrm{p}_\beta^{-1}(C_\beta)$ por $\langle C_\beta\rangle$; esta es una pieza en $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{X}_\alpha$ donde cada factor es $\mathcal{X}_\alpha$ excepto el $\beta$-ésimo, el cual es $C_\beta$.

Similarmente, para una cantidad finita de índices $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y conjuntos

$$C_{\beta_1} \subseteq \mathcal{X}_{\beta_1}, \ldots, C_{\beta_n} \subseteq \mathcal{X}_{\beta_n},$$

el subconjunto $\langle C_{\beta_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle C_{\beta_n}\rangle = \mathrm{p}_{\beta_1}^{-1}(C_{\beta_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{p}_{\beta_n}^{-1}(C_{\beta_n})$ es denotado por

$$\langle C_{\beta_1}, \cdots, C_{\beta_n}\rangle.$$

COROLARIO 1.6. *En* $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{X}_\alpha$

$$\prod_{\alpha\in I} C_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} \langle C_\alpha\rangle$$

DEMOSTRACIÓN. $c \in \prod_{\alpha\in I} C_\alpha$ si y sólo si para todo $\alpha$ se tiene que $\mathrm{p}_\alpha(c) \in C_\alpha$ si y sólo si para todo $\alpha$ se tiene que $c \in \mathrm{p}_\alpha^{-1}(C_\alpha)$ si y sólo si $c \in \bigcap_{\alpha\in I}\langle C_\alpha\rangle$.

$\square$

CAPíTULO 2

# Topología.

En este capítulo introduciremos la noción de topología y de espacio topológico, se expondrán algunos conceptos y resultados relacionados con estas nociones que nos serán de gran utilidad en el proceso de comprensión y justificación de los aspectos más importantes que estarán presentes en los próximos capítulos.

## 1. Espacios Topológicos.

DEFINICIÓN 2.1. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto. Una *Topología* en $\mathcal{X}$ es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{X}$ que satisface:

(1) Cada unión de miembros de $\mathcal{F}$ es también un miembro de $\mathcal{F}$. Es decir, sea $I$ un conjunto de índices, si $(A_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \mathcal{F}$.
(2) Cada intersección finita de miembros de $\mathcal{F}$ es también un miembro de $\mathcal{F}$. Es decir, dado $n \in \mathbb{N}$ si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.
(3) $\emptyset$ y $\mathcal{X}$ son elementos de $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 2.2. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto, y sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$. Cualquier unión o intersección de elementos de $\mathcal{F}$ es igual a vacío ó a $\mathcal{X}$, luego $\mathcal{F}$ es una topología. La misma es llamada *topología indiscreta* $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 2.3. En el conjunto $\mathcal{X}$, sea $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Evidentemente el conjunto $\mathcal{F}$ es una topología. Ésta es la llamada *topología discreta.*

DEFINICIÓN 2.4. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto y $\mathcal{F}$ una topología en $\mathcal{X}$.
Al par $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ lo llamaremos *Espacio Topológico.*

Cuando no exista confusión y no sea necesario especificar $\mathcal{F}$, utilizaremos la expresión "el espacio $\mathcal{X}$" o "el espacio topológico $\mathcal{X}$".

En otros casos, cuando necesitemos especificar a la topología $\mathcal{F}$, utilizaremos la expresión "$\mathcal{F}$ es la topología del espacio $\mathcal{X}$".

Los elementos de un espacio topológico los llamaremos *puntos*. Los miembros de $\mathcal{F}$ los llamaremos *conjuntos abiertos* del espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, (o de la topología $\mathcal{F}$).

Definición 2.5. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio topológico. Un *entorno abierto* de un punto $x \in \mathcal{X}$ es un abierto (un miembro de $\mathcal{F}$) que contiene a $x$.

Escribiremos $U(x)$ para decir que $U$ es un entorno abierto de $x$.

En muchos casos también utilizaremos solamente la expresión "entorno de $x$" para referirnos a un entorno abierto de un punto $x$.

Proposición 2.6. *Sea $I$ un conjunto de índices, sea $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ una familia de topologías en $\mathcal{X}$. Entonces, $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ es también una topología en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Por hipótesis, para todo $\alpha \in I$, $\mathcal{F}_\alpha$ es una topología en $\mathcal{X}$, se tiene entonces que $\emptyset, \mathcal{X} \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego $\emptyset, \mathcal{X} \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$.

Sea $(A_t)_{t\in T} \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ una familia arbitraria de elementos de $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$. Por definición de intersección de conjuntos, se tiene que $(A_t)_{t\in T} \subset \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, como $\mathcal{F}_\alpha$ es una topología entonces $\bigcup_{t\in T} A_t \in \mathcal{F}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, lo que implica que $\bigcup_{t\in T} A_t \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$. Procedemos de una forma análoga para el caso de intersecciones finitas de elementos de $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ es una topología en $\mathcal{X}$.

$\square$

Observación 2.7. Sea $\mathcal{H} = (A_\alpha)_\alpha$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{X}$. Nótese que la proposición anterior garantiza que la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{H}$ es una topología en $\mathcal{X}$. Evidentemente, es la menor topología que contiene a $\mathcal{H}$.

A dicha topología (denotada $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) la llamaremos *topología generada por* $\mathcal{H}$.

## 2. Base de una Topología.

DEFINICIÓN 2.8. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio topológico.

Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es llamada una *base* para $\mathcal{F}$ si para cada conjunto abierto $V \in \mathcal{F}$, existe $(A_\alpha)_\alpha \subseteq \mathcal{B}$ tal que $V = \bigcup_\alpha A_\alpha$.

$\mathcal{B}$ es llamada también una "base para el espacio $\mathcal{X}$", y sus miembros los llamamos *conjuntos abiertos básicos*, o abiertos básicos, de la topología $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 2.9. $\mathcal{F}$ es evidentemente una base de $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 2.10. Sea $\mathcal{D}$ la topología discreta (ejemplo (2.3)) sobre $\mathcal{X}$. Entonces, $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in \mathcal{X}\}$ es una base para $\mathcal{D}$. En efecto, si $V \in \mathcal{D}$, entonces $V = \bigcup_{x \in V} \{x\}$.

TEOREMA 2.11. *Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$. Las dos propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) *$\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{F}$.*
(2) *Para cada $G \in \mathcal{F}$ y cada $x \in G$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{F}$.
Sea $G \in \mathcal{F}$ y $x \in G$, como $\mathcal{B}$ es una base entonces existe $(U_\alpha)_\alpha \subseteq \mathcal{B}$ tal que $G = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Luego, existe al menos un $U_\alpha$ tal que $x \in U_\alpha$, con $x \in U_\alpha \subset G$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sea $G \in \mathcal{F}$ y sea $x \in G$. Por hipótesis, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subset G$; luego $G = \bigcup_{x \in G} U_x$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{F}$.

□

Cuando especificamos una base para $\mathcal{F}$ , todo conjunto abierto es considerado como una unión de elementos de dicha base. Sin embargo, expondremos otra manera de describir conjuntos abiertos:

TEOREMA 2.12. *Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ una base para $\mathcal{F}$. Entonces $A$ es un abierto (es un miembro de $\mathcal{F}$) si y sólo si para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subset A$.*

Demostración. Es un resultado inmediato de la definición de topología (2.1) y del teorema (2.11)

$\square$

En particular, como $\mathcal{F}$ es base de $\mathcal{F}$ , el teorema (2.12) provee un método útil para decidir si un conjunto $A$ es abierto.

Según la observación (2.7) dada una familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos de un espacio $\mathcal{X}$, podemos obtener una topología $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Recíprocamente,

Definición 2.13. Dada una topología $\mathcal{F}$, decimos que una familia $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ es una *subbase* para $\mathcal{F}$ cuando $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Observación 2.14. Otra manera de describir a la topología $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, basándonos en la definición de topología, es la siguiente:
$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ consiste de $\emptyset, \mathcal{X}$, todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{H}$, y todas las uniones arbitrarias de esas intersecciones finitas.

Podemos decir que lo anterior, en particular, es un primer método de construcción de una topología partir de una familia dada de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{X}$.

Ejemplo 2.15. Sean $(\mathcal{X}_1, \mathcal{F}_1), \ldots, (\mathcal{X}_n, \mathcal{F}_n)$ espacios topológicos. La *topología producto cartesiano* en $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ es aquella que tiene como subbase a todos los conjuntos de la forma $\langle A_i \rangle = \mathrm{p}_i^{-1}(A_i)$ donde $A_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Por corolario (1.6), una base para esta topología es simplemente la familia de los productos cartesianos de conjuntos abiertos de los espacios $\mathcal{X}_i$.

Un segundo método para topologizar un conjunto, se expone en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.16. *Sea* $\mathcal{B} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ *una familia de subconjuntos de* $\mathcal{X}$ *tal que, para cada* $\alpha, \beta \in I$ *y cada* $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ *existe algún* $U_\rho \in \mathcal{B}$ *con* $x \in U_\rho \subset U_\alpha \cap U_\beta$*. Entonces, la familia* $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ *que consiste de* $\emptyset, \mathcal{X}$*, y todas las uniones de miembros de* $\mathcal{B}$*, es una topología para* $\mathcal{X}$ *.* $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ *es única y es la menor topología que contiene a* $\mathcal{B}$*.*

A $\mathcal{B}$ la llamamos *base para alguna topología.*

DEMOSTRACIÓN. Usando las observaciones (2.7) y (2.14), obtenemos una topología $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ que tiene a $\mathcal{B}$ como subbase. Para ver que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ realmente tiene como base a $\mathcal{B}$ necesitamos probar solamente que cada intersección finita de miembros de $\mathcal{B}$ es en efecto una unión finita de miembros de $\mathcal{B}$.

Como en el teorema (2.11), es suficiente probar que dados $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$

y dado $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$ existe un $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Lo haremos por inducción.

Por hipótesis, se cumple para $n = 2$.

Supongamos que se cumple para $n$. Es decir, dados $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n$.

Sean $U_1, \ldots, U_n, U_{n+1} \in \mathcal{B}$ y sea $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap U_{n+1}$, o lo mismo que $x \in (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap U_{n+1}$.

Por hipótesis inductiva, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Luego, $x \in U \cap U_{n+1}$. Sabemos que existe $U' \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U' \subseteq U \cap U_{n+1}$.

Luego, $x \in U' \subseteq U \cap U_{n+1} \subseteq U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap U_{n+1}$. Lo que completa la prueba.

□

DEFINICIÓN 2.17. Dos bases $\mathcal{B}$ , $\mathcal{B}'$ son equivalentes si $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}(\mathcal{B}')$.

El siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que dos bases sean equivalentes.

TEOREMA 2.18. *Sean* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *dos bases en el espacio* $\mathcal{X}$*.Se tiene que* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ *son equialentes si y solamente si:*

(1) *Para cada* $U \in \mathcal{B}$ *y cada* $x \in U$*, existe un* $U' \in \mathcal{B}'$ *tal que* $x \in U' \subset U$*.*

(2) *Para cada* $U' \in \mathcal{B}'$ *y cada* $x \in U'$*, existe un* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in U \subset U'$*.*

Si se cumple solo la condición (1), entonces $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es un subconjunto propio de $\mathcal{F}(\mathcal{B}')$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{F}(\mathcal{B}')$.

Como cada $U \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ tiene a $\mathcal{B}'$ como base, por el teorema (2.11) se obtiene (1), análogamente obtenemos (2).

Recíprocamente, supongamos que (1) es verdad. Como cada $U \in \mathcal{F}(\mathcal{B})$ es una unión de miembros de $\mathcal{B}$, por el teorema (2.12) se tiene que $U \in \mathcal{F}(\mathcal{B}')$, luego, $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}')$. Análogamente, si (2) es verdad, se tiene que $\mathcal{F}(\mathcal{B}') \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B})$, lo que completa la prueba.

$\square$

## 3. Subconjuntos cerrados de un espacio $\mathcal{X}$, clausura de un subconjunto de $\mathcal{X}$.

Dado un espacio topológico $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, se dijo que a los miembros de $\mathcal{F}$ los llamaríamos *abiertos* de $\mathcal{X}$.

DEFINICIÓN 2.19. Un subconjunto $A \subset \mathcal{X}$ es *cerrado* si su complemento $A^c$ es abierto. Es decir, si $A^c \in \mathcal{F}$.

Por definición de topología en $\mathcal{X}$ sabemos que $\emptyset$ y $\mathcal{X}$ son abiertos. Nótese además que $\emptyset^c = \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^c = \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset$ y $\mathcal{X}$ también son cerrados.

PROPOSICIÓN 2.20. *Dado un espacio* $\mathcal{X}$ *se tiene que:*

a) *La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos cerrados de* $\mathcal{X}$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{X}$*.*

b) *La unión finita de subconjuntos cerrados de* $\mathcal{X}$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{X}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos a).

Sea $(A_\alpha)_\alpha$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados, es decir, $(A^c_\alpha)_\alpha$ es una familia de abiertos, por definición de topología, $\bigcup_\alpha A^c_\alpha$ es un abierto.

Sabemos que $(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c = \bigcup_\alpha A^c_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ es cerrado.

Probemos b)

Por definición de topología, la intersección finita de abiertos es un abierto, como $(\bigcup_{i=1}^{n} A)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A^c$, se tiene entonces que si $A_1, \ldots, A_n$ son cerrados, entonces, la unión de éstos es un cerrado.

□

DEFINICIÓN 2.21. Sea $A \subset \mathcal{X}$. Un punto $x \in \mathcal{X}$ es un *punto de clausura* si cada entorno de $x$ tiene al menos un punto de $A$, es decir, para todo $U(x)$, $\quad U(x) \cap A \neq \emptyset$.

Al conjunto $\overline{A} = \{x \in \mathcal{X} \ : \ \text{para todo } U(x), U(x) \cap A \neq \emptyset\}$ de todos los puntos de clausura de $A$ lo llamaremos *clausura* de $A$.

PROPOSICIÓN 2.22. *Sea $A \subset \mathcal{X}$. Entonces,*

(1) $A \subset \overline{A}$.
(2) $A$ *es cerrado si y sólo si* $A = \overline{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \subset \mathcal{X}$.

(1) Es inmediato pues cada elemento de $A$, por definición, es un punto de clausura de $A$.
(2) Supongamos que $A$ es cerrado. Entonces, $A^c$ es abierto. Luego, todo $x \notin A$ tiene un entorno abierto, que puede ser el mismo $A^c$, que es disjunto de $A$, y por lo tanto $x \notin \overline{A}$, se tiene entonces que $\overline{A} \subseteq A$. Como $A \subseteq \overline{A}$, se concluye que $\overline{A} = A$.

□

PROPOSICIÓN 2.23. $\overline{A}$ *es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$. Esto es,*

$$\overline{A} = \bigcap \{F \mid F \ \textit{cerrado} \ , A \subset F\}$$

DEMOSTRACIÓN. Denotemos a $\bigcap \{F \mid F \text{ cerrado } , A \subset F\}$ con $\bigcap F$. Nótese que $A \subseteq \bigcap F$.

Sea $x \in \overline{A}$, por proposición (2.20), se tiene que $\bigcap F$ es cerrado. Si $x \notin \bigcap F$ entonces $x$ tiene un entorno abierto, el mismo $(\bigcap F)^c$, que es disjunto de $\bigcap F$, y por lo tanto es disjunto de $A$, por lo que $x \notin \overline{A}$, contradicción. Luego, $\overline{A} \subseteq \bigcap F$.

Sea $x \in \bigcap F$. Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces existe un entorno $U(x)$ disjunto de $A$. Se tiene que $(U(x))^c$ es cerrado y además contiene a $A$, por lo que $(U(x))^c$ es algún $F$. Como $x \notin (U(x))^c$, entonces $x \notin \bigcap F$, contradicción. Luego, $\bigcap F \subseteq \overline{A}$.

□

DEFINICIÓN 2.24. Sea $A \subset \mathcal{X}$. Un punto $x \in \mathcal{X}$ es un *punto de acumulación* de $A$ si todo entorno de $x$ contiene al menos un punto de $A$ distinto de $x$.

Sea $A' = \{x \in \mathcal{X} : \text{ para todo } U(x),\, U(x) \cap (A \backslash x) \neq \emptyset\}$.

PROPOSICIÓN 2.25. $\overline{A} = A \cup A'$. *En particular, $A$ es cerrado si y sólo si $A' \subset A$, esto es, $A$ contiene todos sus puntos de acumulación.*

DEMOSTRACIÓN. De las definiciones de puntos límites y de clausura obtenemos que $A' \subseteq \overline{A}$, y como $A \subseteq \overline{A}$, entonces $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Recíprocamente, sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, no hay más nada que probar. Supongamos que $x \notin A$, entonces cada entorno abierto $U(x)$ intersecta a $A$, en donde los puntos de dicha intersección son todos distintos de $x$, por lo que $x \in A'$. Luego, $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Esto completa la prueba.

Si $A$ es cerrado, se probó que $A = \overline{A}$, luego $A' \subseteq A$. Por lo tanto, $A$ es cerrado si y solamente si $A' \subseteq A$.

□

DEFINICIÓN 2.26. Sea $A \subset \mathcal{X}$. El *interior* de $A$ ($\mathrm{Int}(A)$) es el mayor abierto contenido en $A$. Es decir,

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{U \,|\, U \text{ es abierto }, U \subset A\}$$

DEFINICIÓN 2.27. Un subconjunto $D \subset \mathcal{X}$ es *denso* en $\mathcal{X}$ si $\overline{D} = \mathcal{X}$.

Claramente, $\mathcal{X}$ es denso en $\mathcal{X}$, y además, nótese que es el único conjunto cerrado que es denso en $\mathcal{X}$.

Proposición 2.28. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$D$ es denso en $\mathcal{X}$.*
(2) *Si $F$ es un conjunto cerrado y $D \subset F$, entonces $F = \mathcal{X}$.*
(3) *Todo conjunto abierto no vacío en $\mathcal{X}$ contiene un elemento de $D$.*
(4) *El complemento de $D$ tiene interior vacío.*

Demostración. Sea $D \subseteq \mathcal{X}$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Para $D \subseteq F \implies \mathcal{X} = \overline{D} \subseteq \overline{F} = F$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Sea $U$ un abierto no vacío, con $U \cap D = \emptyset$. Entonces $D \subseteq U^c \neq \mathcal{X}$, lo que contradice (2) ya que $U^c$ es cerrado.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Supongamos que $\mathrm{Int}(D^c) \neq \emptyset$, como $\mathrm{Int}(D^c)$ es abierto, por teorema (2.12), existe un abierto no vacío $U \subseteq \mathrm{Int}(D^c)$, y como $\mathrm{Int}(D^c) \subseteq D^c$, se tiene que $U$ no contiene puntos de $D$, contradicción.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Sabemos que $\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$ y que si $A \subseteq B$ entonces $B^c \subseteq A^c$. Por definición de clausura e interior de un conjunto, se tiene que $\mathrm{Int}(D^c) = \left(\overline{(D^c)^c}\right)^c = \left(\overline{D}\right)^c = \emptyset$, luego $\overline{D} = \mathcal{X}$.

□

## 4. Topología relativa.

Definición 2.29. Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio topológico, y $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. La *topología relativa* en $\mathcal{Y}$ es la familia $\mathcal{F}_\mathcal{Y} = \{U \cap \mathcal{Y} \,:\, U \in \mathcal{F}\}$.

Al par $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ lo llamaremos *subespacio topológico* de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$.

Es fácil ver que $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$ es una topología en $\mathcal{Y}$.

Teorema 2.30. *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ un espacio topológico y $(\mathcal{Y}, \mathcal{F}_\mathcal{Y})$ un subespacio topológico. Entonces,*

(1) *Si* $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ *es una base (o una subbase) para* $\mathcal{F}$, *se tiene que* $(\mathcal{Y}\cap U_\alpha)_{\alpha\in I}$ *es una base (o una subbase) para* $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$.

(2) *Sea* $A\subset\mathcal{Y}$. *Entonces* $A$ *es* $\mathcal{F}_\mathcal{Y}$*-cerrado si y sólo si* $A=\mathcal{Y}\cap F$, *donde* $F$ *es* $\mathcal{F}$*-cerrado. Es decir, los conjuntos cerrados en* $\mathcal{Y}$ *son las intersecciones de* $\mathcal{Y}$ *con los conjuntos cerrados en* $\mathcal{X}$.

(3) $\overline{A}_\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\cap\overline{A}$; $A'_\mathcal{Y}=\mathcal{Y}\cap A'$; $\mathcal{Y}\cap Int(A)\subseteq Int_\mathcal{Y}(A)$.

*(*$\overline{A}_\mathcal{Y}$ *y* $A'_\mathcal{Y}$ *denotan a la clausura de* $A$ *en el espacio* $\mathcal{Y}$ *y a el conjunto de puntos de acumulación de* $A$ *en el espacio* $\mathcal{Y}$, *respectivamente.)*

Demostración. (1) Es inmediato.

(2) Sea $A$ un cerrado en $\mathcal{Y}$, entonces $A=\mathcal{Y}\backslash W$ donde $W$ es un abierto en $\mathcal{Y}$, como $W=V\cap\mathcal{Y}$ donde $V\in\mathcal{F}$, se tiene que $A=\mathcal{Y}\backslash(\mathcal{Y}\cap V)=\mathcal{Y}\cap V^c$, donde $V^c$ es un cerrado en $\mathcal{X}$. Recíprocamente, si $A=F\cap\mathcal{Y}$, con $F$ cerrado en $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{Y}\backslash A=\mathcal{Y}\cap F^c$, esto prueba que $A$ es un cerrado en $\mathcal{Y}$.

(3) $y\in\overline{A}\cap\mathcal{Y} \iff \forall U(y):U(y)\cap A\neq\emptyset \iff \forall U(y):(\mathcal{Y}\cap U(y))\cap A\neq\emptyset \iff y\in\overline{A}_\mathcal{Y}$. La prueba de las otras afirmaciones es análoga.

□

Teorema 2.31. *Sea* $\mathcal{Y}$ *un subespacio topológico de* $\mathcal{X}$. *Si* $A\subset\mathcal{Y}$ *es cerrado en* $\mathcal{Y}$, *y* $\mathcal{Y}$ *es cerrado en* $\mathcal{X}$, *entonces* $A$ *es cerrado en* $\mathcal{X}$.

Demostración. Por el teorema anterior, si $A\subset\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{Y}$, entonces $A=F\cap\mathcal{Y}$, donde $F$ es un cerrado en $\mathcal{X}$. La intersección de dos cerrados de $\mathcal{X}$ es un cerrado de $\mathcal{X}$, como $\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{X}$, entonces $A$ es un cerrado en $\mathcal{X}$.

□

Un teorema análogo al anterior se verifica para los abiertos.

Otra propiedad importante es la siguiente:

Teorema 2.32 (Transitividad). *Si* $\mathcal{Y}$ *es un subespacio topológico de* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Z}$ *es subespacio topológico de* $\mathcal{Y}$, *entonces* $\mathcal{Z}$ *es subespacio topológico de* $\mathcal{X}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, y sea $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ la topología de $\mathcal{Z}$ como subespacio topológico de $\mathcal{Y}$. Debemos probar que $\mathcal{F}_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}} = \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}$.

Sea $W \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$ tal que $W = V \cap \mathcal{Z}$, donde $V \in \mathcal{F}_{\mathcal{Y}}$. Como $V = U \cap \mathcal{Y}$, con $U \in \mathcal{F}_{\mathcal{X}}$, se tiene que $W = U \cap \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z} = U \cap \mathcal{Z}$, lo cual prueba que $W \in \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}$.

Con un razonamiento análogo, se prueba que $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{Y}\mathcal{Z}}$.

□

## 5. Topología del Producto Cartesiano.

DEFINICIÓN 2.33. Sea $(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $\alpha \in I$, sea $\mathcal{F}_\alpha$ la topología para $\mathcal{Y}_\alpha$. La *topología producto cartesiano* en $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$ es aquella que tiene por subbase todos los conjuntos $\langle U_\beta \rangle = \mathrm{p}_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde $U_\beta$ varía en $\mathcal{F}_\beta$ y $\beta$ varía en $I$.

EJEMPLO 2.34. Si $I$ es finito, la topología producto cartesiano de $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$ coincide con la previamente expuesta en el ejemplo (2.15).

EJEMPLO 2.35. Por corolario (1.6), se sigue que, los conjuntos abiertos básicos son todos aquellos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

donde $n$ es finito y cada $U_{\alpha_i}$ es un conjunto abierto en $\mathcal{Y}_{\alpha_i}$, o lo mismo que

$$\left\{ (x_\beta)_\beta \in \prod_\beta \mathcal{Y}_\beta \; : \; x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}; i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

Denotaremos a este conjunto con $\langle U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n} \rangle$.

Si $I$ es finito, supongamos que contiene $n$ elementos, para algún $n \in \mathbb{N}$, una *base* para la topología es simplemente la familia de todos los conjuntos $\prod_{i=1}^n U_i$, donde cada $U_i$ es un conjunto abierto en $\mathcal{Y}_i$.

Sin embargo, si $I$ es infinito, esto ya no es verdad: En efecto, un conjunto de la forma $\prod_\alpha U_\alpha$, donde cada $U_\alpha \subset \mathcal{Y}_\alpha$ es abierto en $\mathcal{Y}_\alpha$, nunca es un abierto en el producto cartesiano, porque cada conjunto abierto básico de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{p}_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, no puede ser un conjunto abierto básico contenido en $\prod_\alpha U_\alpha$, y se debe al hecho de que podemos reescribir dicho conjunto como el producto cartesiano $\prod_\alpha A_\alpha$ de una familia $(A_\alpha)_\alpha$, donde, para todo $\alpha$, salvo una cantidad finita, $A_\alpha = \mathcal{Y}_\alpha$. Por teorema (2.12), $\prod_\alpha U_\alpha$ no es abierto.

Ejemplo 2.36. Si $I$ es infinito, y cada $\mathcal{Y}_\alpha$ es un espacio discreto (tiene la topología discreta), como cada $a_\alpha \in \mathcal{Y}_\alpha$ es un conjunto abierto, por el ejemplo anterior se sigue que un punto $(a_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha\in I} \mathcal{Y}_\alpha$ no es un conjunto abierto. La topología producto cartesiano es usada frecuentemente en esta forma, para crear una topología no trivial en el producto cartesiano de una familia infinita de espacios, partiendo de la topología discreta en cada espacio.

Ejemplo 2.37. Es útil observar que si $V$ es algún conjunto abierto en $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{Y}_\alpha$, entonces $\mathrm{p}_\alpha(V) = \mathcal{Y}_\alpha$ para todo $\alpha$, salvo una cantidad a lo sumo finita. Tal conjunto $V$ contiene un abierto básico $U = \langle U_{\alpha_1}, \cdots, U_{\alpha_n}\rangle$ y $\mathrm{p}_\alpha(U) \subset \mathrm{p}_\alpha(V)$ para todo $\alpha$.

Tal y como lo indica el ejemplo (2.35), los resultados que puedan obtenerse para el producto cartesiano finito no necesariamente conducen a la formalización de resultados en el caso infinito.

Definición 2.38. Dada una sucesión de elementos $(x_1, x_2, \ldots)$

Una subsucesión finita $s \subset (x_1, x_2, \ldots)$ es un *segmento inicial* de $(x_1, x_2, \ldots)$ si $s$ es de la forma $s = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

Observación 2.39. Nótese que si $(\mathcal{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios topológicos, por (2.35) se tiene que un abierto básico para el espacio producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$ sería:

$$\mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_1-1} \times U_{n_1} \times \mathcal{Y}_{n_1+1} \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_2-1} \times U_{n_2} \times \mathcal{Y}_{n_2+1} \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_m-1} \times U_{n_m} \times \cdots$$

donde $U_{n_1}, \ldots, U_{n_m}$ son abiertos básicos en $\mathcal{Y}_{n_1}, \ldots, \mathcal{Y}_{n_m}$ respectivamente.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ suponemos que $\mathcal{Y}_n$ tiene la topología discreta, por el ejemplo (2.10) se tiene que $U_{n_i} = \{x_{n_i}\}$ para algún $x_{n_i} \in \mathcal{Y}_{n_i}$, para $i = 1, \ldots, m$ es decir

$$\mathcal{Y}_1 \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_1-1} \times \{x_{n_1}\} \times \mathcal{Y}_{n_1+1} \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_2-1} \times \{x_{n_2}\} \times \mathcal{Y}_{n_2+1} \times \cdots \times \mathcal{Y}_{n_m-1} \times \{x_{n_m}\} \times \cdots$$

Un elemento de este conjunto sería una sucesión de la forma

$$X = (y_1, \ldots, y_{n_1-1}, x_{n_1}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_m-1}, x_{n_m}, y_{n_m+1}, \ldots)$$

donde $y_k \in \mathcal{Y}_k$ con $k \neq n_i$, $i = 1, \ldots, m$

Sea

$$s_{n_1,\ldots,n_m} = (y_1, \ldots, y_{n_1-1}, x_{n_1}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_m-1}, x_{n_m})$$

Ahora bien, sea $\langle s_{n_1,\ldots,n_m} \rangle$ el conjunto de todas las sucesiones que comienzan con $s_{n_1,\ldots,n_m}$ tales que para cada $n > n_m$, se tiene que $y_n \in \mathcal{Y}_n$. Es decir, si $X \in \langle s_{n_1,\ldots,n_m} \rangle$ entonces, $s_{n_1,\ldots,n_m}$ es un segmento inicial de $X$.

Luego, podemos escribir el abierto básico como una unión de conjuntos de la forma $\langle s_{n_1,\ldots,n_m} \rangle$ donde cada $y_r$ varía en $\mathcal{Y}_r$ para cada $r < n_m$ y $r \neq n_i$, con $i = 1, \ldots, m$. Es decir,

$$\bigcup \{ \langle s_{n_1,\ldots,n_m} \rangle \,:\, y_r \in \mathcal{Y}_r, r < n_m, r \neq n_i, i = 1, \ldots, m \}$$

Por lo tanto, el conjunto de todos los $\langle s \rangle$ donde $s$ es un segmento inicial de $X$, con $X$ variando en $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$, forman una base "más refinada" de la topología producto.

Más adelante, veremos cómo este hecho nos será de gran utilidad.

## 6. Topología métrica.

Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos.

DEFINICIÓN 2.40. Una *métrica* en un conjunto $\mathcal{X}$ es una función

$$\rho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

tal que

(1) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
(3) (desigualdad triangular) para todo $x$, $y$, $z \in \mathcal{X}$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

DEFINICIÓN 2.41. Si $\rho$ es una métrica en $\mathcal{X}$, al par $(\mathcal{X}, \rho)$ lo llamaremos *espacio métrico.*

Definición 2.42. Sea $(\mathcal{X}, \rho)$ un espacio métrico. Una sucesión $(x_k)_k$ en $\mathcal{X}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geqslant N$, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición 2.43. Decimos que un espacio métrico $(\mathcal{X}, \rho)$ es *completo* si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición 2.44. Sea $(\mathcal{X}, \rho)$ un espacio métrico, sea $x \in \mathcal{X}$, y $r > 0$. Una *bola abierta* de centro $x$ y radio $r > 0$ es el conjunto $B(x; r) = \{y \in \mathcal{X} \,:\, \rho(x, y) < r\}$.

Observación 2.45. De la definición de topología y de bola abierta, se obtiene que la familia de todos los conjuntos $A \subseteq \mathcal{X}$ tal que para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(x; r) \subseteq A$ es una topología en $\mathcal{X}$.

La llamaremos *Topología inducida por la métrica $\rho$.*

Es inmediato que el conjunto de todas las bolas abiertas $B(x; r)$ con $x \in \mathcal{X}$ y $r > 0$ forma una base de dicha topología.

Definición 2.46. Sean $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ y $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ dos espacios métricos. Dado $x_0 \in \mathcal{X}$, decimos que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es *contínua* en $x_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\rho_{\mathcal{X}}(x, x_0) < \delta$ entonces $\rho_{\mathcal{Y}}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

En términos de topología métrica lo anterior se traduce en: Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

Definición 2.47. Sea $A \subseteq \mathcal{X}$, decimos que $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ es *contínua* en $A$ si es contínua en todo $x \in A$.

CAPíTULO 3

# Espacios de Banach.

Poco a poco, y de manera gradual, tomando la mayor cantidad de detalles posibles que el contexto nos ha permitido, hemos venido construyendo una sólida estructura teórica necesaria para sustentar nuestra investigación. Sin embargo, hay una serie de elementos de gran importancia que aún no han sido tomados en cuenta. Los mismos, serán expuestos en el siguiente capítulo.

La noción de espacio de Banach jugará un papel fundamental en este trabajo. Se considerarán todos los aspectos posibles, y que estén a nuestro alcance, relacionados con ésta noción, todo con la finalidad de tener bien claro qué es lo que necesitamos y a dónde queremos llegar en ésta investigación.

## 1. Subespacios vectoriales.

Para un estudio más profundo de la teoría de espacios vectoriales se recomienda ver [**2**], sólo abordaremos algunas nociones relacionadas con el tema que nos serán de utilidad.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Un vector $x$ de $\mathcal{X}$ se dice *combinación lineal* de los vectores $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$, si existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Definición 3.2. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Un *subespacio vectorial* de $\mathcal{X}$ es un subconjunto $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ no vacío que, con las operaciones de adición y multiplicación escalar sobre $\mathcal{X}$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Una comprobación directa de la definición (ver [**2**]) para un espacio vectorial, demuestra que el subconjunto $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ es un subespacio si, para todos los $x$, $y \in \mathcal{Y}$, el vector $x + y$

también está en $\mathcal{Y}$; el vector $\overrightarrow{0}$ está en $\mathcal{Y}$; para todo $x \in \mathcal{Y}$, el vector $-x$ está en $\mathcal{Y}$; para todo $x \in \mathcal{Y}$ y todo escalar $c \in \mathbb{K}$, el vector $cx$ está en $\mathcal{Y}$. La commutatividad y asociatividad de la adición vectorial y las demás propiedades de la definición de la multiplicación escalar no necesitan ser comprobadas, ya que éstas son propiedades de las operaciones en $\mathcal{X}$.

Se pueden simplificar aún más las cosas.

Teorema 3.3. *Un subconjunto no vacío $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}$ si y sólo si para todo par de vectores $x$, $y \in \mathcal{Y}$ y todo escalar $c \in \mathbb{K}$, el vector $cx + y \in \mathcal{Y}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{Y} \neq \emptyset$.

($\Longrightarrow$) Supóngamos que $\mathcal{Y}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{X}$, si $x$, $y \in \mathcal{Y}$ y $c \in \mathbb{K}$, es inmediato que $cx + y \in \mathcal{Y}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $cx + y \in \mathcal{Y}$ para todos los vectores $x$, $y \in \mathcal{Y}$ y todo escalar $c \in \mathbb{K}$. Como $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, existe $z \in \mathcal{Y}$, y por lo tanto $(-1)z + z = \overrightarrow{0}$ está en $\mathcal{Y}$. Ahora bien, sea $z \in \mathcal{Y}$ y $c \in \mathbb{K}$, entonces $cz = cz + \overrightarrow{0} \in \mathcal{Y}$. En particular $(-1)z = -z \in \mathcal{Y}$. Finalmente, si $x$, $y \in \mathcal{Y}$, entonces $x + y = \overline{1}x + y \in \mathcal{Y}$, con $\overline{1}$ elemento identidad de $\mathbb{K}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}$.

$\square$

Cuando no exista confusión, escribiremos "0" para representar tanto a $0 \in \mathbb{K}$ como a $\overrightarrow{0} \in \mathcal{X}$. Igualmente, escribiremos 1 para referirnos a $\overline{1}$.

Teorema 3.4. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. La intersección de cualquier colección de subespacios de $\mathcal{X}$ es un subespacio de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Sea $(\mathcal{Y}_\alpha)_{\alpha \in I}$ una colección de subespacios de $\mathcal{X}$. Para todo $\alpha \in I$, $\mathcal{Y}_\alpha$ contiene al vector nulo, por lo que éste está en $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$, y por lo tanto $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha \neq \emptyset$. Sean $x$, $y \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$, entonces $x$, $y \in \mathcal{Y}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Sea $c \in \mathbb{K}$, por ser $\mathcal{Y}_\alpha$ subespacio, entonces $cx + y \in \mathcal{Y}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego, $cx + y \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$. Por el teorema (3.3), $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{Y}_\alpha$ es un subespacio de $\mathcal{X}$.

$\square$

Del teorema (3.4) se deduce que si $E$ es cualquier colección de vectores de $\mathcal{X}$, entonces existe un subespacio mínimo de $\mathcal{X}$ que contiene a $E$; esto es, un subespacio que contiene a $E$ y que está contenido en cada uno de los otros subespacios que contienen a $E$.

Definición 3.5. Sea $E$ un subconjunto de vectores de un espacio vectorial $\mathcal{X}$. El *subespacio vectorial generado* por $E$ (denotado $\mathcal{Y}_E$) se define como la intersección de todos los subespacios que contienen a $E$.

Cuando $E$ es un conjunto finito de vectores, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, decimos simplemente que $\mathcal{Y}_E$ es el *subespacio generado por los vectores* $x_1, \dots, x_n$.

Teorema 3.6. *El subespacio generado por un subconjunto $E$ no vacío de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de $E$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y}_E$ el subespacio generado por $E$. Entonces toda combinación lineal $x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ de vectores $x_1, \dots, x_n \in E$ pertenece evidentemente a $\mathcal{Y}_E$. Luego $\mathcal{Y}_E$ contiene al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de $E$. Dicho conjunto, por otra parte, contiene a $E$, por lo que es distinto de vacío. Si $x$, $y$ son vectores de éste cojunto, entonces $x$ es una combinación lineal,

$$x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

de vectores $x_1, \dots, x_n \in E$, y $y$ es una combinación lineal

$$y = d_1y_1 + \cdots + d_ny_m$$

de vectores $y_1, \dots, y_m \in E$.

Para cada escalar $c \in \mathbb{K}$,

$$cx + y = \sum_{i=1}^{n}(cc_i)x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j$$

es decir, $cx+y$ es combinación lineal de elementos de $E$, luego, $cx+y$ es un elemento del conjunto de combinaciones lineales de vectores de $E$. Por teorema (3.3), dicho conjunto es un espacio vectorial, que contiene además a $E$. Por ser $\mathcal{Y}_E$ el menor subespacio que contiene a $E$, entonces $\mathcal{Y}_E$ está contenido dicho conjunto.

Por lo tanto, ambos subespacios son iguales.

$\square$

**Notación**

Al conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de un subconjunto $E$ de un espacio vectorial $\mathcal{X}$ lo denotaremos $span(E)$. Por el teorema anterior $span(E) = \mathcal{Y}_E$.

## 2. Base y dimensión de un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 3.7. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Un subconjunto $E \subseteq \mathcal{X}$ se dice que es *linealmente independiente* si, dado $n \in \mathbb{N}$, para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$ tal que $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$, entonces $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

DEFINICIÓN 3.8. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial. Una *base* de $\mathcal{X}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de $\mathcal{X}$ que genera el espacio $\mathcal{X}$.

El espacio $\mathcal{X}$ es de *dimensión finita* si tiene base finita. Análogamente, $\mathcal{X}$ es de *dimensión infinita* si tiene base infinita.

Por lo obtenido en el teorema (3.6), se tiene que $E \subseteq \mathcal{X}$ es base de $\mathcal{X}$ si $span(E) = \mathcal{X}$.

OBSERVACIÓN 3.9. Una base infinita no tiene nada que ver con “combinaciones lineales infinitas”. Más adelante abordaremos esta noción, a través del estudio de *series*, luego de introducir y comprender la noción de *espacio de Banach* y posteriormente abordaremos las llamadas *bases de Schauder*.

TEOREMA 3.10. *Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $x_1, \ldots, x_m$. Entonces todo conjunto independiente de vectores de $\mathcal{X}$ es finito y no contiene más de $m$ elementos.*

La demostración de este teorema puede encontrarse en [**2**], la misma requiere de ciertos resultados previos relacionados con nociones básicas de sistemas de ecuaciones lineales y matrices que no serán abordados en este trabajo.

## 3. Espacios vectoriales normados.

A partir de este momento, restringiremos nuestro estudio a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales o de los complejos, es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 3.11. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una *norma* en $\mathcal{X}$ es una función $\|\ \| : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que

(1) $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$.
(2) $\|cx\| = |c|\|x\|$, para cada vector $x \in \mathcal{X}$ y cada escalar $c \in \mathbb{K}$.
(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, para todo $x$, $y \in \mathcal{X}$.

DEFINICIÓN 3.12. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial. Al par $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ lo llamaremos *espacio normado*.

DEFINICIÓN 3.13. Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial. Sean $\|\ \|_a$ y $\|\ \|_b$ dos normas en el espacio $\mathcal{X}$. Se dice que $\|\ \|_a$ y $\|\ \|_b$ son *equivalentes* si existen dos constantes positivas $c_1$ y $c_2$ tales que

$$c_1\|x\|_a \leqslant \|x\|_b \leqslant c_2\|x\|_a$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Un resultado inmediato de la definición de norma y de métrica es el siguiente:

PROPOSICIÓN 3.14. *La función $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por, $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x$, $y \in \mathcal{X}$, es una métrica.*

A la misma la llamaremos *métrica asociada a la norma.*

## 4. Operadores Lineales.

Sean $(\mathcal{Y}, \| \|_{\mathcal{Y}})$ y $(\mathcal{X}, \| \|_{\mathcal{X}})$ dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares).

DEFINICIÓN 3.15. Sea $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$, decimos que $T$ es un *operador lineal* si

(*i*) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{X}$.

(*ii*) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in \mathcal{X}$, y para todo escalar $\lambda$.

Un ejemplo trivial de operador lineal es la *función identidad* $\mathrm{I} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ dada por $\mathrm{I}(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Más adelante veremos un importante ejemplo de operador lineal ($n$-proyección), éste jugará un papel fundamental en la obtención de resultados de interés en el desarrollo de este capítulo.

DEFINICIÓN 3.16. Sea $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Decimos que $T$ es un *operador acotado* cuando existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant c\|x\|_{\mathcal{X}}$$

para todo $x \in \mathcal{X}$.

Otro hecho de interés es el siguiente:

TEOREMA 3.17. *Sean $(\mathcal{X}, \| \|_{\mathcal{X}})$ y $(\mathcal{Y}, \| \|_{\mathcal{Y}})$ dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Sea $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$T$ es contínuo.*

(b) *$T$ es un operador acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal.

(b)$\Longrightarrow$(a) Supongamos que $T$ es acotado, es decir, existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant c\|x\|_{\mathcal{X}}$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Sea $x_0 \in \mathcal{X}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

Si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$\|T(x) - T(x_0)\|_{\mathcal{Y}} = \|T(x - x_0)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant c\|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon.$$

Luego, $T$ es contínua en $x_0$, para todo $x_0 \in \mathcal{X}$. Por lo tanto $T$ es contínua.

(a)$\Longrightarrow$(b) Supongamos que $T$ es contínuo en $\mathcal{X}$, es decir, es contínuo en $x$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Sea $y_0 = T(x_0)$. Por la continuidad en $x_0$, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\|_{\mathcal{X}} < \delta$ entonces

$$\|T(x) - y_0\|_{\mathcal{Y}} < 1.$$

Es decir, existe $\delta > 0$ tal que

$$T(B(x_0, \delta)) \subset B(y_0, 1)$$

donde $T(B(x_0, \delta))$ es la imagen bajo $T$ de la bola de centro $x_0$ y radio $\delta$, y $B(y_0, 1)$ la bola de centro $y_0$ y radio 1.

Luego, $T(B(x_0, \delta))$ es un conjunto acotado, es decir, existe una bola que lo contiene.

Sabemos que

$$B(0, 2) = 2B(0, 1) = \frac{2}{\delta}(B(x_0, \delta) - x_0)$$

por linealidad de $T$ se tiene que

$$T(B(0, 2)) = T\left(\frac{2}{\delta}(B(x_0, \delta) - x_0)\right) = \frac{2}{\delta}T(B(x_0, \delta)) - \frac{2}{\delta}T(x_0).$$

Luego, $T(B(0, 2))$ es un conjunto acotado (no confundamos conjunto acotado con operador acotado), es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T(z)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant M$ para todo $z \in B(0, 2)$.

Sea $x \in \mathcal{X}$.

Si $x = 0$ entonces $\|T(0)\|_{\mathcal{Y}} = 0 \leqslant M\|0\|_{\mathcal{X}}$.

Si $x \neq 0$ entonces $\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}} \in B(0, 2)$. Luego,

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leqslant M.$$

Por linealidad,

$$\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} = \left\|T\left(\|x\|_{\mathcal{X}}\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{X}}}\right)\right\|_{\mathcal{Y}}\|x\|_{\mathcal{X}} \leqslant M\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

$\Longrightarrow$

$$\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} \leqslant M\|x\|_{\mathcal{X}}.$$

Por lo tanto, $T$ es un operador acotado.

□

Definición 3.18. Sea $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un operador lineal acotado. Definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

Proposición 3.19. $\|T\| = \inf\{M \geqslant 0 \,:\, \|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ *para todo* $x \in \mathcal{X}\}$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea $M = \inf\{m \geqslant 0 \,:\, \|T(x)\| \leqslant m\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{X}\}$, como $M$ es un ínfimo, entonces existe $x \in \mathcal{X}$, con $x \neq 0$ tal que

$$(M - \varepsilon)\|x\| < \|T(x)\|$$

$\Longleftrightarrow$

$$(M - \varepsilon) < \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(M - \varepsilon) < \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

$\Longleftrightarrow$

$$(M - \varepsilon) < \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, entonces

$$M \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

Por otro lado, sea $x \in \mathcal{X}$, con $x \neq 0$. Sea $M = \inf\{m \geqslant 0 \,:\, \|T(x)\| \leqslant m\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{X}\}$, por hipótesis

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant M$$

se tiene que $M$ es una cota superior, entonces

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leqslant M$$

$\Longleftrightarrow$

$$\sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \leqslant M$$

Por lo tanto

$$\|T\| = \inf\{M \geqslant 0 \,:\, \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \text{ para todo } x \in \mathcal{X}\}.$$

$\square$

## 5. Espacios de Banach.

Definición 3.20. Un espacio vectorial normado $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ es un *espacio de Banach* si y sólo si es completo con respecto a la métrica asociada a la norma.

Ejemplo 3.21. Los siguientes, son ejemplos de espacios de Banach.

(1) $\mathbb{R}$ con la norma dada por el valor absoluto.
(2) $\mathbb{C}$ con la norma $\|a + ib\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ para $a + ib \in \mathbb{C}$.
(3) $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \| \, \|_\infty)$ donde

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_\infty = \text{máx}\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

(4) Sea

$$l_\infty = \left\{ (x_n)_n \,:\, x_n \in \mathbb{R} \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Donde para $x = (x_n)_n \in l_\infty$ se define

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

(5) $c = \{(x_n)_n \,:\, x_n \in \mathbb{R}$ y existe $\text{lím}_{n\longrightarrow\infty} x_n\}$ con $\| \, \|_\infty$.
(6) $c_0 = \{(x_n)_n \,:\, x_n \in \mathbb{R}$ y $\text{lím}_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0\}$ con $\| \, \|_\infty$.

En los ejemplos anteriores, $\mathbb{R}$ puede ser reemplazado por $\mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.22. $C(\mathbf{K}) = \{f : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f$ es contínua $\}$ donde $\mathbf{K}$ es un espacio topológico compacto, con

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbf{K}\}.$$

es un espacio de Banach.

TEOREMA 3.23 (Desiguladad de *Hölder*). *Sea $p$, $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para todo $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, con $k = 1, \dots, n$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), se tiene que*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

*Para $p = 2, q = 2$, la desigualdad es conocida como la desigualdad de* Cauchy-Schwarz.

Para demostrar el teorema, veamos primero el siguiente lema.

LEMA 3.24. *Sean $p$, $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ para todo $a, b \geqslant 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el gráfico de la función $y = x^{p-1}$, $x \geqslant 0$, y las áreas $A_1$ de la región acotada por las curvas $y = x^{p-1}$, $y = 0$, $x = a$, y el área $A_2$ de la región acotada por las curvas $y = x^{p-1}$, $x = 0$, $y = b$.

Claramente, $A_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$.

Como $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ tenemos que $A_2 = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$.

Por la forma de la gráfica de la función $y = x^{p-1}$ tenemos que $ab \leqslant A_1 + A_2 \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

$\square$

Hagamos ahora la demostración del teorema (3.23).

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a_i$, $b_i \geqslant 0$, y no todos los $a_i$, $b_i$ son cero. Para $k = 1, \dots, n$ definamos

$$A_k = \frac{a_k}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{y} \quad B_k = \frac{b_k}{\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Nótese que $\sum_{k=1}^{n} A_k^p = \sum_{k=1}^{n} B_k^q = 1$.

Por el lema (3.24), tenemos que para $k = 1, \dots, n$

$$A_k B_k = \frac{1}{p} A_k^p + \frac{1}{q} B_k^q.$$

Considerando que ésta desigualdad se cumple para todo $k = 1, \dots, n$, se cumple entonces que

$$\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} A_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} B_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant 1$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Con esto queda demostrado el teorema.

□

Teorema 3.25 (Desigualdad de *Minkowski*). *Sea $p \in \mathbb{R}^+$, con $p \geqslant 1$. Entonces para todo $a_k$, $b_k \in \mathbb{K}$, con $k = 1, \dots, n$ tenemos*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Para $p = 1$ es inmediato. Si $p > 1$, sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $a_i, b_i \geqslant 0$. Usando la desigualdad de *Hölder* y el hecho de que $(p-1)q = p$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}(a_k+b_k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}a_k + \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p-1}b_k\\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Dividiendo en ambos lados por $(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p)^{\frac{1}{q}}$ obtenemos

$$
\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

□

EJEMPLO 3.26. Sea $l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\ \|_p)$ donde

$$
\|(a_1,\ldots,a_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

para $1 \leqslant p < \infty$. Por el teorema anterior, para $\|\ \|_p$ se verifica la desigualdad triangular, fácilmente se verifican las otras propiedades, y por lo tanto, $\|\ \|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^n$. Se tiene además que $l_p^n$ es un espacio de Banach.

## 6. Subespacio de un espacio de Banach.

PROPOSICIÓN 3.27. *Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio de un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Se tiene que $\mathcal{Y}$ es un espacio de Banach si y sólo si $\mathcal{Y}$ es cerrado en $\mathcal{X}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{Y}$ un subespacio vectorial del espacio de Banach $\mathcal{X}$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\mathcal{Y}$ es cerrado. Sea $(y_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{Y}$. Como la norma en $\mathcal{Y}$ es la restricción de la norma en $\mathcal{X}$, la sucesión es de Cauchy en $\mathcal{X}$ por lo que converge a algún $y \in \mathcal{X}$. Como $\mathcal{Y}$ es cerrado entonces $y \in \mathcal{Y}$ y $y_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$ en $\mathcal{Y}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es un espacio de Banach.

($\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathcal{Y}$ es de Banach. Sea $y \in \mathcal{X}$, si $(y_n)_n$ es una sucesion en $\mathcal{Y}$ tal que $y_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$ en $\mathcal{X}$. Toda sucesión convergente es de Cauchy, como $\mathcal{Y}$ es de Banach, entonces $y_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} y$ en $\mathcal{Y}$, por lo tanto $\mathcal{Y}$ es cerrado.

□

## 7. Bases de Schauder.

Definición 3.28. Sea $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ un espacio normado. Una *serie* es un par $((x_n)_n, (s_n)_n)$ donde $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathcal{X}$ y

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

A $x_n$ se le llama *término general* de la serie y a la sucesión $(s_n)_n$ se le llama *sucesión de sumas parciales* de la serie.

Cuando no exista confusión escribiremos $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ para referirnos a la serie $((x_n)_n, (s_n)_n)$, y particularmente, utilizaremos la expresión para denotar a el $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Si tal límite existe diremos que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ es *convergente* , es decir, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$ converge. Diremos que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *diverge* si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$ diverge.

Sea $s \in \mathcal{X}$, supongamos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = s$, denotaremos este hecho con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s \text{ en } \mathcal{X}$$

Observación 3.29. Un resultado inmediato de la definición de convergencia de sucesiones y convergencia de series es el siguiente.

Sea $s \in \mathcal{X}$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s$ si y sólo si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\sum_{k=1}^{n} x_k - s\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|s_n - s\| = 0$.

TEOREMA 3.30 (Criterio de Cauchy). *Sea* $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ *un espacio de Banach. Sea* $(x_n)_n$ *una sucesión en* $\mathcal{X}$*. La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *converge en* $\mathcal{X}$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} x_n \right\| < \varepsilon$$

*si* $m \geqslant k \geqslant N_0$.

DEMOSTRACIÓN. Si $m \geqslant k$ entonces

$$s_m - s_{k-1} = \sum_{n=1}^{m} x_n - \sum_{n=1}^{k-1} x_n = \sum_{n=k}^{m} x_n$$

entonces

$$\|s_m - s_{k-1}\| = \left\| \sum_{n=k}^{m} x_n \right\|.$$

Como $\mathcal{X}$ es completo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_n$ es de Cauchy.

De estos dos hechos el resultado es inmediato.

□

OBSERVACIÓN 3.31. Como $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, una consecuencia del teorema (3.25), es la siguiente:

$$\left( \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k + b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

EJEMPLO 3.32. Para $1 \leqslant p < \infty$ sea

$$l_p = \left\{ (x_n)_n \, : \, x_n \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < \infty \right\}.$$

Para $x = (x_n)_n \in l_p$ definamos

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se tiene $\| \, \|_p$ es una norma. La desigualdad triangular se cumple gracias al resultado expuesto en la observación anterior. Se tiene además que $(l_p, \| \, \|_p)$ es un espacio de Banach.

DEFINICIÓN 3.33. Una sucesión $(\mathcal{E}_n)_n$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ de dimensión infinita de llama una *base de Schauder* si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe una única sucesión de escalares $(\lambda_n)_n$ tal que $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$.

DEFINICIÓN 3.34. Una *sucesión básica* es una sucesión $(x_n)_n$ que es una base de Schauder de $\overline{span((x_n)_n)}$, es decir, si es base de Schauder para la clausura del espacio lineal generado por $(x_n)_n$.

A continuación daremos una condición necesaria para que un espacio de Banach tenga base de Schauder.

TEOREMA 3.35. *Todo espacio de Banach con base de Schauder es separable, es decir, contiene un subconjunto denso numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ un espacio de Banach real con base de Schauder $(\mathcal{E}_n)_n$.

Debemos probar que existe un subconjunto denso numerable.

Dado $p \in \mathbb{N}$, sea $A_p$ el conjunto de todos los elementos de la forma $\sum_{n=1}^{p} r_n \mathcal{E}_n$ donde los coeficientes $r_n$ son números racionales.

Los elementos de $A_p$ están determinados por $p$ parámetros $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{Q}$.

La colección de todos los conjuntos de tamaño $p$ de un conjunto numerable es numerable. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces $A_p$ es numerable.

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Por lo tanto, el conjunto $A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$ es numerable.

Probemos que $A$ es denso.

Sea $x \in \mathcal{X}$, sabemos que $x$ puede ser escrito de la forma $x = \lim_{p \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \mathcal{E}_n$.

Sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso. Para $p$ tomemos números racionales $r_n^{(p)}$, con $n = 1, \dots, p$ tal que

$$|r_n^{(p)} - \lambda_n| < \frac{1}{p^2 \|\mathcal{E}_n\|}.$$

Sea $x^{(p)} = \sum_{n=1}^{p} r_n^{(p)} \mathcal{E}_n$, entonces $x^{(p)} \in A_p \subset A$ y

$$\left\| x^{(p)} - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \mathcal{E}_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{p} (r_n^{(p)} - \lambda_n) \mathcal{E}_n \right\| < p.\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|x^{(p)} - x\| &\leqslant \left\| x^{(p)} - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \mathcal{E}_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \mathcal{E}_n - x \right\| \\ &< \left( \frac{1}{p} + \left\| \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \mathcal{E}_n - x \right\| \right) \overset{p \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Por observación (3.29) $x = \text{lím}_{p \longrightarrow \infty} x^{(p)}$.

Por lo tanto, $A$ es denso y numerable, es decir, $\mathcal{X}$ es separable.

□

Observación 3.36. La prueba para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es análoga, solo que en vez de considerar números racionales $r_1, \ldots, r_p$ se consideran pares $(r^1_{i_1}, r^1_{i_2}), \ldots, (r^p_{i_n}, r^p_{i_m})$ de números racionales, es decir, se parte del hecho de que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso.

El recíproco del teorema (3.35) no es cierto, se puede probar que existe un espacio de Banach separable sin base de Schauder. La prueba, no la expondremos en esta investigación.

Consideremos ahora una serie de resultados que jugarán un papel clave en nuestros estudios. Pero antes, definamos lo siguiente:

Definición 3.37. Sea $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $(\mathcal{E}_k)_k$. Dado $n \in \mathbb{N}$, la *$n$-proyección canónica* en $\mathcal{X}$ es la función $P_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ dada por $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k$.

Proposición 3.38. *Para cada $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k \in \mathcal{X}$,*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k \right\| < \infty.$$

Demostración. Dado $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k \in \mathcal{X}$, la sucesión $(\|P_n(x)\|)_n$ es convergente. En efecto,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|P_n(x)\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k \right\| = \left\| \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k \right\| = \|x\|.$$

Toda sucesión convergente es de Cauchy, toda sucesión de Cauchy es acotada, por lo tanto $(\|P_n(x)\|)_n$ es acotada, luego, existe $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n(x)\|$.

$\square$

Proposición 3.39. *Dado $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k \in \mathcal{X}$, sea $|||x||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n(x)\|$. Entonces,*

(i) $||| \; |||$ *es una norma en* $\mathcal{X}$.

(ii) $\|x\| \leqslant |||x|||$ *para todo* $x \in \mathcal{X}$.

(iii) $|\lambda_k| \leqslant 2\frac{|||x|||}{\|\mathcal{E}_k\|}$ *para* $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k$.

Demostración. Sea $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathcal{E}_k \in \mathcal{X}$.

(i) $|||x||| = 0 \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = 0 \iff \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que es el supremo de valores mayores o iguales a 0 $\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k = 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \iff \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \iff x = 0$.

$|||cx||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|c\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |c| \, \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = |c| \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = |c|.|||x|||$.

Sea $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \mathcal{E}_k \in \mathcal{X}$. Como $\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \mathcal{E}_k + \gamma_k \mathcal{E}_k)\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| + \|\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathcal{E}_k\|$ entonces $|||x+y||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \mathcal{E}_k + \gamma_k \mathcal{E}_k)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \mathcal{E}_k\| = |||x||| + |||y|||$.

Luego, $||| \; |||$ es una norma en $\mathcal{X}$.

(ii) $\|x\| = \|\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\|$. Como $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|x\| = \|\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k\| = |||x|||$.

(iii) Como

$$\lambda_n \mathcal{E}_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{E}_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \mathcal{E}_k$$

entonces $\|\lambda_n\mathcal{E}_n\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathcal{E}_k\| + \|\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\mathcal{E}_k\| \leqslant |||x||| + |||x||| = 2|||x||| \implies$ $|\lambda_n|\|\mathcal{E}_n\| \leqslant 2|||x|||$. Por lo tanto

$$|\lambda_n| \leqslant \frac{2|||x|||}{\|\mathcal{E}_n\|}$$

□

TEOREMA 3.40. $(\mathcal{X}, |||\ |||)$ *es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $(\mathcal{X}, |||\ |||)$ es completo.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{E}_k\| = 1$.

Sea $(x^N)_{N\geqslant 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{X}, |||\ |||)$. Entonces para cada $N$ existe $(\lambda_n^N)_n \subset \mathbb{K}$ tal que

$$x^N = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^N\mathcal{E}_n \text{ en } \|\ \|.$$

De la proposición (3.39) (iii), sigue que $(\lambda_n^N)_{N\geqslant 1}$ es una sucesión de escalares que es de Cauchy en $(\mathbb{K}, |\ |)$.

En efecto dado $\varepsilon > 0$, existe $M_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $k, l \geqslant M_0$ se tiene que

$$|\lambda_n^k - \lambda_n^l| \leqslant 2|||x^k - x^l||| < 2\varepsilon.$$

Como $\mathbb{K}$ es completo entonces $(\lambda_n^N)_{N\geqslant 1}$ converge. Sea $\gamma_n = \lim_{N\longrightarrow\infty}\lambda_n^N$ en $\mathbb{K}$.

Vamos a probar que:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\mathcal{E}_n$ converge en $\|\ \|$ a algún punto $y \in \mathcal{X}$.
(2) $\lim_{N\longrightarrow\infty}|||x^N - y||| = 0$.

Veámoslo.

(1) Para esto, aplicaremos varias veces el criterio de Cauchy.

Como $(x^N)_{N\geqslant 1}$ es una sucesión de Cauchy en $|||\ |||$ tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|||x^N - x^M||| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si} \quad N, M \geqslant N_0.$$

Si $i, j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sum_{n=i}^{i+j}(\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n = \sum_{n=1}^{i+j}(\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n - \sum_{n=1}^{i-1}(\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n.$$

De donde
$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n \right\| \leqslant 2|||x^N - x^M||| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Tomando el límite cuando $M \longrightarrow \infty$ se obtiene que
$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\lambda_n^N - \gamma_n)\mathcal{E}_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
si $N \geqslant N_0$.

Como
$$x^{N_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{N_0}\mathcal{E}_n \quad \text{en} \quad \|\,\|.$$
es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{N_0}\mathcal{E}_n$ es convergente, se tiene que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $i \geqslant i_0$ y $j \in \mathbb{N}$ tenemos que
$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} \lambda_n^{N_0}\mathcal{E}_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Luego
$$\left\| \sum_{n=i}^{i+j} \gamma_n\mathcal{E}_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=i}^{i+j} (\gamma_n - \lambda_n^{N_0})\mathcal{E}_n \right\| + \left\| \sum_{n=i}^{i+j} \lambda_n^{N_0}\mathcal{E}_n \right\| < \varepsilon.$$
Por lo tanto existe $y \in \mathcal{X}$ tal que
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n\mathcal{E}_n \quad \text{en} \quad \|\,\|.$$
Hemos probado (1).

(2) Por definición de $|||\;|||$ tenemos que
$$\left\| \sum_{n=1}^{j} (\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n \right\| \leqslant |||x^N - x^M|||.$$
Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_0$ tal que $|||x^N - x^M||| < \varepsilon$ si $N, M \geqslant N_0$.

Luego para todo $j \in \mathbb{N}$ :
$$\left\| \sum_{n=1}^{j} (\lambda_n^N - \lambda_n^M)\mathcal{E}_n \right\| < \varepsilon.$$
Si $N, M \geqslant N_0$.

Tomando el límite cuando $M \longrightarrow \infty$ obtenemos que para todo $j \in \mathbb{N}$ :
$$\left\| \sum_{n=1}^{j} (\lambda_n^N - \gamma_n)\mathcal{E}_n \right\| < \varepsilon.$$
Si $N \geqslant N_0$.

Tomando supremo en $j$ obtenemos

$$|||x^N - y||| \leqslant \varepsilon.$$

Si $N \geqslant N_0$. Hemos probado (2).

De (2) se sigue que $(x^N)_{N\geqslant 1}$ converge en $(\mathcal{X}, |||\ |||)$.

□

Teorema 3.41. *Sean $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $(\mathcal{E}_n)_n$ una base de Schauder de $\mathcal{X}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{E}_k^* : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por*

$$\mathcal{E}_k^*(x) = \lambda_k$$

*Para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$. Entonces, $\mathcal{E}_k^*$ es un funcional lineal y contínuo en $(\mathcal{X}, |||\ |||)$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{X}$, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$ entonces

$$|\mathcal{E}_k^*(x)| = |\lambda_k| \leqslant \frac{1}{\|\mathcal{E}_k\|} 2|||x|||.$$

□

Definición 3.42. Sean $(\mathcal{X}_1, \|\ \|_1)$ y $(\mathcal{X}_2, \|\ \|_2)$ dos espacios normados y sea $T : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ un operador lineal. Decimos que $T$ es una *aplicación abierta* cuando $A$ abierto en $\mathcal{X}_1$ implica que $T(A)$ es abierto en $\mathcal{X}_2$.

Teorema 3.43 (Teorema de la aplicación abierta). *Sean $(\mathcal{X}_1, \|\ \|_1)$ y $(\mathcal{X}_2, \|\ \|_2)$ dos espacios de Banach. Sea $T : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}_2$ un operador lineal contínuo.*

(*a*) *Si $T$ es sobreyectivo, entonces $T$ es abierto.*
(*b*) *Si $T$ es biyectivo, entonces $T^{-1}$ es contínuo, es decir, $T^{-1}$ es un operador acotado.*

Teorema 3.44. *Sea $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ un espacio de Banach y $(\mathcal{E}_n)_n$ una base de Schauder de $\mathcal{X}$. Sea $|||x||| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mathcal{E}_n\right\|$, para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$. Entonces*

(*a*) *Existe $c > 0$ tal que $|||x||| \leqslant c\|x\|$.*
(*b*) *$|||\ |||$ es equivalente a $\|\ \|$.*

Demostración. Por hipótesis, $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ es un espacio de Banach. Se probó que $(\mathcal{X}, ||| \, |||)$ es un espacio de Banach y que $\|x\| \leqslant |||x|||$ para todo $x \in \mathcal{X}$.

Por el teorema de aplicación abierta, tomando como biyección a la función identidad, existe $c > 0$ tal que $|||x||| \leqslant c\|x\|$, y por lo tanto, $||| \, |||$ y $\| \, \|$ son equivalentes.

□

Teorema 3.45. *Sea $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ un espacio de Banach y $(\mathcal{E}_n)_n$ una base de Schauder de $\mathcal{X}$. Para $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$ sea $\mathcal{E}_k^*(x) = \lambda_k$, entonces $\mathcal{E}_k^*$ es contínuo en $(\mathcal{X}, \| \, \|)$.*

Demostración. Por el teorema (3.41) se sabe que $\mathcal{E}_k^*$ es contínuo en $(\mathcal{X}, ||| \, |||)$. Entonces existe $\gamma > 0$ tal que

$$|\mathcal{E}_k^*(x)| \leqslant \gamma |||x||| \leqslant \gamma c \|x\|.$$

Para la última desigualdad hemos utilizado el teorema anterior.

Por lo tanto $\mathcal{E}_k^*$ es contínuo en $(\mathcal{X}, \| \, \|)$.

□

Teorema 3.46 (Principio de acotación uniforme). *Sea $(\mathcal{X}, \| \, \|_{\mathcal{X}})$ un espacio de Banach, sea $(\mathcal{Y}, \| \, \|_{\mathcal{Y}})$ un espacio normado, y seaa $\mathcal{H}$ una familia de operadores lineales contínuos $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Si*

$$\sup_{T \in \mathcal{H}} \|T(x)\|_{\mathcal{Y}} < \infty$$

*para cada $x \in \mathcal{X}$, entonces*

$$\sup_{T \in \mathcal{H}} \|T\| < \infty.$$

Corolario 3.47 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sea $(\mathcal{X}, \| \, \|_{\mathcal{X}})$ un espacio de Banach, sea $(\mathcal{Y}, \| \, \|_{\mathcal{Y}})$ un espacio normado.*

*Sea $\{T_n\}_{n \geqslant 1}$ una sucesión de operadores lineales contínuos $T_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ tal que $\lim_{n \longrightarrow \infty} T_n(x)$ existe para todo $x \in \mathcal{X}$, entonces*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

PROPOSICIÓN 3.48. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ las $n$-proyecciones canonicas $P_n$ (3.37), son operadores acotados y* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la aplicación $T : (\mathcal{X}, ||| \; |||) \longrightarrow (\mathcal{X}, \| \; \|), \quad T(x) = x$. Se trata de un operador acotado entre dos espacios de Banach que es además claramente una biyección. Por el teorema de la aplicación abierta, $T^{-1}$ es acotado, y por proposición (3.19), para todo $x \in \mathcal{X}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n(x)\| = |||x||| = |||T^{-1}(x)||| \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|.$$

en particular, $\|P_n(x)\| \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\;P_n$ es un operador acotado.

Por otro lado, por ser acotado, es contínuo. Por proposición (3.38) y por corolario (3.47), se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

□

La proposición anterior hace que tenga sentido la siguiente

DEFINICIÓN 3.49. Sea $(\mathcal{E}_n)_n$ una base de Schauder de un espacio de Banach $(\mathcal{X}, \| \; \|)$. Definimos la *constante básica* de $(\mathcal{E}_n)_n$ como

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|P_n\|.$$

PROPOSICIÓN 3.50. *Supongamos que $(\mathcal{E}_n)_n$ es una base de Schauder normalizada de $\mathcal{X}$, con constante de la base $C$. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$ un vector normalizado. Entonces, para cada $n \geqslant 1$, se tiene que $|\lambda_n| \leqslant 2C$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $n \geqslant 1$, entonces

$$|\lambda_{n+1}| = |\lambda_{n+1}|\|\mathcal{E}_{n+1}\| = \|\lambda_{n+1}\mathcal{E}_{n+1}\| = \|P_{n+1}(x) - P_n(x)\| \leqslant \|P_{n+1}(x)\| + \|P_n(x)\| \leqslant 2C.$$

□

PROPOSICIÓN 3.51. *Sea $(\mathcal{E}'_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach $(\mathcal{X}, \| \; \|)$ y $K \geqslant 1$. Entonces, $(\mathcal{E}'_n)_n$ es una base de Schauder con constante básica $\leqslant K$ si y solamente si* (*i*) $\mathcal{E}'_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) *Para todo* $m \leqslant n$ *y toda sucesión de escalares* $(\lambda_i)_{i<n}$ *se tiene que*

$$\left\|\sum_{i<m} \lambda_i \mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i<n} \lambda_i \mathcal{E}'_i\right\|$$

(*iii*) $\overline{span((\mathcal{E}'_n)_n)} = \mathcal{X}$.

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Supongamos que $(\mathcal{E}'_n)_n$ es una base de Schauder de $\mathcal{X}$ entonces (*i*) y (*iii*) se siguen a partir de la definición, mientras que (*ii*) se sigue de la proposición (3.48).

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que una sucesión $(\mathcal{E}'_n)_n$ cumple las propiedades (*i*), (*ii*), y (*iii*). Sea

$$\mathcal{X}' = \left\{ x \in \mathcal{X} \ : \ \text{existe una sucesión } (a_n)_n \text{ tal que } x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \mathcal{E}'_n \right\}.$$

Se tiene que $(\mathcal{E}'_n)_n \in \mathcal{X}'$, por lo que $\mathcal{X}' \neq \emptyset$. Claramente, por el teorema (3.3), $\mathcal{X}'$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{X}$. Más aún, $\mathcal{X}'$ es cerrado. En efecto, supongamos que $(x_m)_m$ es una sucesión en $\mathcal{X}'$, donde $x_m = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{(m)} \mathcal{E}'_n$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y sea $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_m \overset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$.

Entonces, a partir de (*ii*), para todo $m \leqslant n$ y todo $k, l$ se tiene que

$$\left\|\sum_{i<m} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i - \sum_{i<m} a_i^{(l)} \mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i<n} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i - \sum_{i<n} a_i^{(l)} \mathcal{E}'_i\right\|.$$

haciendo tender $n \longrightarrow \infty$ se tiene que

$$\left\|\sum_{i<m} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i - \sum_{i<m} a_i^{(l)} \mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K\|x_k - x_l\|,$$

para todo $m, k, l$.

Como la sucesión $(x_k)_k$ es de Cauchy, la desigualdad anterior implica que para todo $m$ la sucesión $\left(\sum_{i<m} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i\right)_k$ es de Cauchy, y por lo tanto, es convergente, con límite $y_m = \sum_{i<m} b_i^{(m)} \mathcal{E}'_i$, ya que $span((\mathcal{E}'_i)_{i<m})$ es cerrado por ser de dimensión finita.

Utilizando otra vez (*ii*) se tiene que si $m \leqslant m'$ entonces

$$\left\|\sum_{i<m} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i - \sum_{i<m} b_i^{(m')} \mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K \left\|\sum_{i<m'} a_i^{(k)} \mathcal{E}'_i - \sum_{i<m'} b_i^{(m')} \mathcal{E}'_i\right\| \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto, $\sum_{i<m} a_i^{(k)}\mathcal{E}'_i \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \sum_{i<m} b_i^{(m')}\mathcal{E}'_i$, es decir, para todo $m \leqslant m'$ se tiene que $\sum_{i<m} b_i^{(m')}\mathcal{E}'_i = \sum_{i<m} b_i^{(m)}\mathcal{E}'_i$.

Un fácil argumento inductivo demuestra que para todo $i < m \leqslant m'$ se tiene que $b_i^{(m')} = b_i^{(m)}$. Sea pues, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\ b_i = b_i^{(i+1)}$. Ahora, haciendo $k \longrightarrow \infty$ en la penúltima desigualdad obtenemos

$$\left\|\sum_{i<m} b_i\mathcal{E}'_i - \sum_{i<m} a_i^{(l)}\mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K\|x - x_l\|,$$

Como $\sum_{i<m} a_i^{(l)}\mathcal{E}'_i \overset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_l$, la desigualdad anterior implica que

$$\sum_{i<m} b_i\mathcal{E}'_i \overset{m\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x$$

y por tanto $x \in \mathcal{X}'$.

Como $span((\mathcal{E}'_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset \mathcal{X}'$ y como $\mathcal{X}'$ es cerrado, se tiene que

$$\mathcal{X} = \overline{span((\mathcal{E}'_n)_{n\in\mathbb{N}})}.$$

Por lo tanto, cada $x \in \mathcal{X}$ se puede escribir de la forma $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\mathcal{E}'_n$. Demostremos que esta escritura es única: Supongamos que $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\mathcal{E}'_n$ y supongamos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\}$$

Entonces $(ii)$ implica que para todo $n \geqslant n_0 + 1$,

$$|a_{n_0} - b_{n_0}|\|\mathcal{E}'_{n_0}\| = \left\|\sum_{i\leqslant n_0}(a_i - b_i)\mathcal{E}'_i\right\| \leqslant K\left\|\sum_{i<n} a_i\mathcal{E}'_i - \sum_{i<n} b_i\mathcal{E}'_i\right\|$$

Haciendo $n \longrightarrow \infty$ y usando $(i)$ $\ x_{n_0} \neq 0\ $ se tiene que

$$0 < |a_{n_0} - b_{n_0}|\|\mathcal{E}'_{n_0}\| \leqslant K\|x - x\| = 0,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, $(a_n)_n$ es única.

□

Corolario 3.52. *Una sucesión* $(\mathcal{E}'_n)_n$ *en un espacio de Banach* $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ *es una sucesión basica si y solamente si*

(i) $\mathcal{E}'_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *Existe una constante* $K$ *tal que para todo* $m \leqslant n$ *y toda sucesión de escalares* $(\lambda_i)_{i<n}$ *se tiene que*

$$\left\| \sum_{i<m} \lambda_i \mathcal{E}'_i \right\| \leqslant K \left\| \sum_{i<n} \lambda_i \mathcal{E}'_i \right\|$$

## 8. Existencia de Bases.

No es cierto que todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene una base de Schauder. De hecho, el espacio $c_0$ tiene subespacios sin base de Schauder (ver [**5**]).

Aceptemos el siguiente hecho:

Corolario 3.53. *Sea* $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ *un espacio normado y sea* $x_0 \in \mathcal{X}$, $x_0 \neq 0$. *Entonces existe* $F \in \mathcal{X}^*$ *tal que* $F(x_0) = \|x_0\| \neq 0$ *y* $\|F\| = 1$.

($\mathcal{X}^* = \{F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $F$ es un funcional lineal contínuo $\}$)

La demostración de este corolario depende de resultados previos como el teorema de Hahn-Banach para espacios normados, los mismos no serán abordados en esta investigación, pues requieren de cierta rigurosidad en su desarrollo que se escapa de nuestro propósito.

Lema 3.54 (Mazur). *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ *un subespacio vectorial de dimensión finita y sea* $\varepsilon > 0$. *Entonces existe* $x \in \mathcal{X}$ *con* $\|x\| = 1$ *tal que*

$$\|y\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

*para cada* $y \in \mathcal{Y}$ *y todo escalar* $\lambda$.

Demostración. Sean $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ elementos de norma 1 en $\mathcal{Y}$ tal que para todo $y \in \mathcal{Y}$ con $\|y\| = 1$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ para el cual $\|y - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (Estos elementos existen por el hecho de que la esfera en $\mathcal{Y}$ es compacta).

Por corolario anterior, existen $(x_i^*)_{1\leqslant i\leqslant m} \subset \mathcal{X}^*$ funcionales lineales contínuos tales que $\|x_i^*\| = 1$ y $x_i^*(x_i) = 1$.

Sea $x \in \mathcal{X}$ tal que $x_i^*(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si no fuese posible encontrar tal $x$, entonces el operador $H : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dado por $H(x) = (x_i^*(x))_{1\leqslant i\leqslant m}$ sería un isomorfismo, y por tanto $\mathcal{X}$ sería de dimensión finita.

Es suficiente probar la desigualdad propuesta para todo $y \in \mathcal{Y}$ tal que $\|y\| = 1$. Sea $i$ tal que $\|y - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $\lambda$ un escalar, entonces

$$\|y - \lambda x\| \geqslant \|x_i - \lambda x\| - \|y - x_i\| \geqslant x_i^*(x_i - \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{\|y\|}{(1+\varepsilon)}$$

$\Longrightarrow$

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y - \lambda x\|.$$

□

TEOREMA 3.55 (Banach, Mazur). *Todo espacio de Banach de dimensión infinita contiene una sucesión básica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(\varepsilon_n)_n$, con $\varepsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n) \leqslant 1+\varepsilon$$

Por el lema anterior podemos construir inductivamente una sucesión de vectores unitarios $(x_n)_n$ tal que para todo $n \geqslant 1$

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon_n)\|y - \lambda x_{n+1}\|$$

para todo $y \in span(x_1, \ldots, x_n)$ y todo escalar $\lambda$.

Probemos que $(x_n)_n$ es una sucesión básica en $\mathcal{X}$, con constante básica $\leqslant 1+\varepsilon$.

Para ello, fijemos $m < n$ y una sucesión de escalares $(a_i)_{i\leqslant n}$. Entonces, un uso repetido del lema anterior da

$$\left\|\sum_{i=0}^{m} a_i x_i\right\| \leqslant \left(\prod_{i=m+1}^{n}(1+\varepsilon_i)\right)\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i x_i\right\|$$

y por tanto,

$$\left\|\sum_{i=0}^{m} a_i x_i\right\| \leqslant \left(\prod_{i=m+1}^{n}(1+\varepsilon_i)\right)\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=0}^{n} a_i x_i\right\|$$

□

CAPíTULO 4

# Teoría de Ramsey.

En este breve capítulo introduciremos la noción de la propiedad de Ramsey, el marco en que ésta se define, y un importante resultado.

## 1. Nociones previas.

$\mathbb{N}^{[\infty]}$ denota a el conjunto de todos los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}^{[<\infty]}$ denota al conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$.

Sea $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$, utilizaremos $A^{[\infty]}$ para denotar al conjunto de todos los subconjuntos infinitos de $A$.

Análogamente, utilizaremos $A^{[<\infty]}$ para denotar a el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $A$.

Dados $s, t \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$ y $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$. Basándonos en la definición (2.38), se tiene que $s$ es un segmento inicial de $t$, si $t = \{n_0, n_1, \ldots, n_m\}$, con $n_0 < n_1 < \cdots < n_m$, y $s = \{n_0, n_1, \ldots, n_i\}$ donde $i \leqslant m$. Describimos de una manera análoga cuándo $s$ es segmento inicial de $A$, en este caso consideramos $A$ de la forma $A = \{n_0, n_1, \ldots, n_m, n_{m+1}, \ldots\}$.

Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$, sea entonces

$$\mathcal{F} \restriction A = \{s \in \mathcal{F} \,:\, s \subseteq A\} = \mathcal{F} \cap \mathcal{P}(A).$$

Definición 4.1. Dado un conjunto $A \in \mathbb{N}^{[\infty]}$, una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}^{[<\infty]}$ es una *barrera* en $A$ si

(*i*) $\mathcal{B}$ es una anticadena respecto la orden parcial dado por $\subset$, es decir, $s \not\subset t$ para cada par $s$, $t$ de elementos distintos de $\mathcal{B}$,

y

(*ii*) $\bigcup_{s \in \mathcal{B}} s$ es infinito y cada $B \in A^{[\infty]}$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{B}$.

El siguiente teorema, sólo será enunciado, no expondremos su demostración, la misma requiere de resultados previos que necesitan cierta rigurosidad en su estudio que se escapa de nuestro propósito.

Teorema 4.2 (Nash-Williams, Galvin). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, entonces,*

a) *existe $Z \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $\mathcal{F} \upharpoonright Z$ es vacío,*

*o*

b) *existe $Z \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $\mathcal{F} \upharpoonright Z$ contiene una barrera.*

## 2. La Propiedad de Ramsey.

Definición 4.3. Un conjunto $\sigma \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ es *Ramsey* si existe $Y \in \mathbb{N}^{[\infty]}$ tal que $Y^{[\infty]} \subseteq \sigma$ ó $Y^{[\infty]} \cap \sigma = \emptyset$. Si la segunda opción siempre ocurre, decimos que $\sigma$ es *Ramsey nulo.*

Teorema 4.4 (Galvin-Prikry). *Todo abierto de $\mathbb{N}^{[\infty]}$ es Ramsey.*

Demostración. Dado $\sigma \subseteq \mathbb{N}^{[\infty]}$ abierto, existe una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{[<\infty]}$ tal que $X \in \sigma$ si y solamente si $X$ tiene un segmento inicial en $\mathcal{F}$. Esto se debe a que cada abierto es unión de abiertos básicos disjuntos dos a dos. Usando el teorema (4.2) podemos encontrar $Y$ tal que $\mathcal{F} \upharpoonright Y$ es vacío o contiene una barrera. En el primer caso, $Y^{[\infty]} \cap \sigma = \emptyset$; en el segundo, $Y^{[\infty]} \subseteq \sigma$. En conclusión, $\sigma$ es Ramsey.

□

CAPíTULO 5

# Conjuntos Débilmente Ramsey.

En este capítulo se concentra la esencia de nuestro trabajo. El poder palpar la misma, o el sentido de ésta, es una situación que, gracias a toda la temática abordada y asimilada en los capítulos anteriores, se torna abiertamente accesible.

Primero se expondrán algunas nociones y algunos resultados, seguido a esto se introducirá la noción de la propiedad *débilmente Ramsey* y por último, como un ejemplo concreto para el cual se verifica dicha propiedad, se hará la prueba para los abiertos del espacio de sucesiones que será definido en este capítulo. Tal y como hemos venido trabajando, se tomarán en cuenta la mayor cantidad de detalles posibles con la finalidad de facilitar una mejor comprensión de lo que se está manejando.

## 1. Nociones Previas.

Sea $(\mathcal{X}, \| \|)$ un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) con base de Schauder $(\mathcal{E}_n)_n$. Cuando no exista confusión, escribiremos $\mathcal{X}$ para referirnos al espacio $(\mathcal{X}, \| \|)$. Supondremos siempre que $\|\mathcal{E}_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $x \in \mathcal{X}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n$, para escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

Sabemos que todo espacio de Banach de dimensión infinita no necesariamente tiene base de Schauder. Sin embargo, por el teorema (3.55), se tiene que todo espacio de Banach de dimensión infinita tiene una sucesión básica.

Para nuestro propósito, como trabajaremos con espacios de Banach arbitrarios de dimensión infinita, simplemente restringiremos, de ser necesario, dichos espacios a sus correspondientes subespacios para los cuales la sucesión básica es una base de Schauder.

Definición 5.1. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathcal{E}_n \in \mathcal{X}$. Definimos el *soporte* de $x$ como

$$supp(x) := \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \neq 0\}$$

DEFINICIÓN 5.2. Un vector $x \in \mathcal{X}$ es un *vector bloque* si tiene soporte finito. Es decir, $x$ es de la forma $x = \lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}$, donde $n_1 < n_2 < \ldots < n_m \in \mathbb{N}$ y $\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_m}$ son escalares no nulos.

Un vector bloque $x \in \mathcal{X}$ lo llamaremos *vector bloque normalizado* si $\|x\| = 1$.

PROPOSICIÓN 5.3. *La combinación lineal finita no nula de vectores bloques es un vector bloque.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x = \lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}$ y $y = \alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + \alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}$ dos vectores bloques. La prueba para una cantidad mayor de vectores bloques es análoga.

Si $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$ entonces, para escalares $a$, $b$ , no todos nulos, se tiene que $ax + by = a(\lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}) + b(\alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + \alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}) = a\lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + a\lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m} + b\alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + b\alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}$.

(1) Si $a \neq 0$ y $b = 0$. Entonces, $supp(ax + by) = supp(ax) = supp(x)$.
(2) Si $a = 0$ y $b \neq 0$. Entonces, $supp(ax + by) = supp(by) = supp(y)$.
(3) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces, $supp(ax+by) = supp(ax) \cup supp(by) = supp(x) \cup supp(y)$ $= \{n_1, \ldots, n_m\} \cup \{p_1, \ldots, p_k\}$.

Supongamos $supp(x) \cap supp(y) \neq \emptyset$. Las condiciones (1) y (2) se repiten. Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces, $supp(ax + by) \subseteq supp(ax) \cup supp(by) = supp(x) \cup supp(y)$.

En todos los casos, el soporte siempre será finito. Por lo tanto la combinación lineal no nula de vectores bloques es un vector bloque.

□

COROLARIO 5.4. *Si $x$ es combinación lineal de los vectores bloques $x_1, \ldots, x_n$ entonces $supp(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} supp(x_i)$*

Sabemos que todo subconjunto finito $D$ de números naturales posee un elemento máximo y un elemento mínimo. Denotemos dichos elementos con $\max D$, y $\min D$ respectivamente.

Supongamos que $x, y$ son dos vectores bloques. Escribiremos $x < y$ si

$$\max supp(x) < \min supp(y)$$

Es decir, si $x = \lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}$ y $y = \alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + \alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}$. Tenemos que $supp(x) = \{n_1, \ldots, n_m\}$ y $supp(y) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. Luego $x < y \iff n_m < p_1$.

Definición 5.5. Sea $\mathcal{X}^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}$. Es decir, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathcal{X}$.

Decimos que $(y_n)_n \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ es una *sucesión básica de bloques* (con respecto a $(\mathcal{E}_n)_n$ ) si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n$ es un vector bloque y $y_n < y_{n+1}$.

Por otro lado, decimos que $(y_n)_n$ es una *sucesión básica de bloques normalizados* (con respecto a $(\mathcal{E}_n)_n$ ) si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n$ es un vector bloque normalizado y $y_n < y_{n+1}$.

Ejemplo 5.6. Un ejemplo trivial de sucesión básica de bloques normalizados es la misma $(\mathcal{E}_n)_n$. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $supp(\mathcal{E}_n) = \{n\}$, con coeficiente igual a 1, y para todo $n$, se tiene que $n = \max supp(\mathcal{E}_n) < \min supp(\mathcal{E}_{n+1}) = n + 1$.

Observación 5.7. Nótese que toda sucesión básica de bloques es un conjunto de vectores linealmente independiente, es decir, todo subconjunto finito de ésta es linealmente independiente. La prueba de ello es muy sencilla. Sin pérdida de generalidad, tomemos dos vectores bloques $x = \lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}$ y $y = \alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + \alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}$ tales que $x < y$ (la prueba para una cantidad mayor de vectores es análoga). Entonces $ax+by = a(\lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + \lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m}) + b(\alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + \alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k}) = a\lambda_{n_1}\mathcal{E}_{n_1} + \cdots + a\lambda_{n_m}\mathcal{E}_{n_m} + b\alpha_{p_1}\mathcal{E}_{p_1} + \cdots + b\alpha_{p_k}\mathcal{E}_{p_k} = 0$ $\iff a = b = 0$.

El ejemplo (5.6) hace que tenga sentido hablar del siguiente e importante conjunto:

DEFINICIÓN 5.8. Llamaremos $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$ al conjunto de todas las sucesiones básicas de bloques normalizados (con respecto a la base de Schauder fijada $(\mathcal{E}_n)_n$) del espacio $\mathcal{X}$.

Entre los elementos de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$ también se encuentran las sucesiones básicas de bloques normalizados finitas.

Si el espacio $\mathcal{X}$ ha sido previamente fijado , cuando no exista confusión escribiremos $\mathbf{B_1}$ en vez de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$.

A partir de este momento, restringiremos nuestro estudio únicamente a $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$, es decir, cuando hablemos de sucesiones básicas de bloques, estará implícito que nos refirimos sólo a elementos de $\mathbf{B_1}(\mathcal{X})$.

<u>Notación</u>

Utilizaremos letras mayúsculas $A, B, X, Y, Z, \widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}, \ldots$ para referirnos a sucesiones básicas de bloques normalizados infinitas; y letras minúsculas $s, t, \widetilde{s}, \widetilde{t}, \ldots$ para referirnos a sucesiones básicas de bloques finitas.

Dada $s$, una sucesión básica de bloques finita, y $A$ una sucesión básica de bloques infinita, $span(s)$ y $span(A)$ denotan los espacios lineales generados por $s$ y $A$ respectivamente. Es decir, los elementos de $span(s)$ y $span(A)$ se pueden expresar como combinaciones lineales finitas de elementos de $s$ y $A$ respectivamente.

Dada una sucesión de bloques finita $s$, escribiremos $|s|$ para referirnos al número de elementos de $s$.

Dada una sucesión de números reales $\Delta = (\delta_n)_n$, escribiremos $\Delta > 0$ para abreviar que $\delta_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Letras mayúsculas del alfabeto griego $\Gamma, \Delta, \ldots$ representarán sucesiones de números reales. Y las minúsculas $\gamma, \delta, \lambda, \ldots$ representarán los elementos de éstas o cualquier número real.

Sean $s$, $Y$ dos sucesiones cualesquiera. Supongamos que $s$ es finita. La concatenación de $s$ y $Y$ la denotaremos $s^\frown Y$. Es decir, si $s$ es de la forma $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)$ y $Y$ es de la forma $Y = (y_1, y_2, \ldots)$, entonces $s^\frown Y = (s_1, s_2, \ldots, s_m, y_1, y_2, \ldots)$.

Fijemos un espacio de Banach $\mathcal{X}$.

Definición 5.9. Para $A$ y $B$ sucesiones básicas de bloques (finitas o infinitas) definimos:

$$A \preccurlyeq B \text{ si y sólo si } span(A) \subseteq span(B).$$

$A \prec B$ si y sólo si $A \preccurlyeq B$ y $A \neq B$.

Nótese que $\preccurlyeq$ es una relación transitiva, y $\prec$ es un orden parcial estricto. Esto es inmediato por el hecho de que la relación $\subseteq$ es transitiva, y la relación $\subset$ es una relación de orden parcial estricta.

Nótese además que si $t$ y $s$ son sucesiones básicas de bloques finitas y $t \prec s$, entonces $|t| < |s|$.

En efecto, si $t \prec s = (x_1, \ldots, x_k) \Longrightarrow span(t) \subset span((x_1, \ldots, x_k))$. Quiere decir que la base de $span(t)$ es un conjunto de vectores linealmente independiente de $span((x_1, \ldots, x_k))$. Por teorema (3.10) entonces $|t| < k = |(x_1, \ldots, x_k)| = |s|$.

Definición 5.10. Sean $Z$ , $Y$ sucesiones básicas de bloques infinitas, sea $s$ una sucesión básica de bloques finita.

Supongamos que $Y = (y_n)_n$ y que $s = (x_1, \ldots, x_k)$. Definamos:

(1) $Y \preccurlyeq^* Z$ si y sólo si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(y_n)_{n \geqslant n_0} \preccurlyeq Z$.

(2) $Y \backslash s = Y \backslash (x_1, \ldots, x_k) := (y_n)_{n \geqslant m}$ donde $m$ es el menor entero positivo tal que $\max supp(x_k) < \min supp(y_m)$.

Nótese que si $s$ es un segmento inicial de $Y$ entonces $Y \backslash s$ es exactamente la diferencia de conjuntos clásica entre $(y_n)_n$ y $(x_1, \ldots, x_k)$.

(3) Diremos que $s < Y$ cuando $x_k < y_1$, es decir, $\max supp(x_k) < \min supp(y_1)$, (donde $Y = (y_n)_n = (y_1, y_2, \ldots))$.

(4) Para $m \in \mathbb{N}$, $Y|m := (y_1, \ldots, y_m)$, $Y \backslash m := (y_n)_{n \geqslant m}$.

(5) $[Z] := \{X \in \mathbf{B_1} : X \preccurlyeq Z\}$. Los elementos de $[Z]$ son sucesiones básicas de bloques que pueden ser finitas o infinitas. Para $s = (x_1, \ldots, x_k)$ escribiremos $[x_1, \ldots, x_k]$ para denotar $\{t \in \mathbf{B_1} : t \preccurlyeq (x_1, \ldots, x_k)\}$.

(6) Definamos al subconjunto $[s;Y] \subseteq \mathbf{B_1}$ como:

$$[s;Y] := \{X \in \mathbf{B_1} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } X|m = s \text{ y } X\backslash s \preccurlyeq Y\}$$

(7) $[Y]^{<\mathbb{N}} := \{t \preccurlyeq Y : t \text{ es finito }\} \cup \{\emptyset\}$.

Observación 5.11. Una consecuencia inmediata de (5) es que $[(\mathcal{E}_n)_n] = \mathbf{B_1}$.

Proposición 5.12. $[s;Y] = [s;Y\backslash s]$

Demostración. $(\Longrightarrow)$ Sea $Z \in [s;Y] \Longleftrightarrow$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Z|m = s$ y $Z\backslash s \preccurlyeq Y$ $\Longleftrightarrow$ $span(Z\backslash s) \subseteq span(Y)$, como ningún elemento de $span(s)$ pertence a $span(Z\backslash s)$, esto debido a que $s < Z\backslash s$ y por el corolario (5.4) $\Longrightarrow span(Z\backslash s) \subseteq span(Y\backslash s) \Longrightarrow$ $Z\backslash s \preccurlyeq Y\backslash s \Longrightarrow Z \in [s;Y\backslash s]$.

$(\Longleftarrow)$ Es inmediato. Si $X\backslash s \preccurlyeq Y\backslash s$, como $Y\backslash s \preccurlyeq Y$ y $\preccurlyeq$ es una relación transitiva entonces $X\backslash s \preccurlyeq Y$.

□

Observación 5.13. Nótese que la definición de $[s;Y]$ es más general que $[Y]$. En efecto, podemos ver a $[Y]$ como $[\emptyset;Y]$, considerando a $\emptyset$ como una "sucesión básica de bloques vacía."

Proposición 5.14. *Supongamos que $(\mathcal{E}_n)_n$ tiene constante básica $C$. Entonces, para cada $(y_n)_n \in [(\mathcal{E}_n)_n]$, se tiene que $(y_n)_n$ es una sucesión básica con constante básica $K \leqslant C$.*

Demostración. Esta proposición es una consecuencia del corolario (3.52). En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|y_n\| = 1$, por lo que $y_n \neq 0$, y además, $y_n$ es combinación lineal finita de elementos de $(\mathcal{E}_n)_n$.

Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \in \overline{span((y_n)_n)}$. Como $y_n < y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces reescribir $x$ como una serie de la forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \mathcal{E}_k$, para el cual evidentemente se cumple la condición $(ii)$ del corolario.

Por otro lado, el valor de la constante básica $C$ depende de la base $(\mathcal{E}_n)_n$, mientras que la constante básica $K$ de $(y_n)_n$, considerando lo anterior, viene a depender de un subconjunto de $(\mathcal{E}_n)_n$. Por definición de constante básica, se tiene que $K \leqslant C$.

$\square$

Definición 5.15. Sea $\Delta = (\delta_n)_n$ una sucesión de números reales positivos. Para $Y = (y_n)_n$ y $Z = (z_n)_n$ sucesiones básicas de bloques infinitas definimos:

(1) $d(Y; Z) \leqslant \Delta$ si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|y_n - z_n\| \leqslant \delta_n$.
(2) Si $s$ y $t$ son sucesiones básicas de bloques finitas tales que $|s| = |t|$, definimos $d(s; t) \leqslant \Delta|k = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$ de manera análoga. Es decir, si $s = (s_1, \ldots, s_k)$ y $t = (t_1, \ldots, t_k)$. Para todo $n = 1, \ldots, k$ se tiene que,

$$d((s_1, \ldots, s_k); (t_1, \ldots, t_k)) \leqslant \Delta|k \text{ si y sólo si } \|s_n - t_n\| \leqslant \delta_n$$

Cuando no exista confusión, escribiremos $d(s; t) \leqslant \Delta$ en vez de $d(s; t) \leqslant \Delta|k$ pues podriamos ver a $s = (s_1, \ldots, s_k)$ y a $t = (t_1, \ldots, t_k)$ como $s = (s_1, \ldots, s_k, 0, 0, \ldots)$ y $t = (t_1, \ldots, t_k, 0, 0, \ldots)$ respectivamente.

La igualdad $supp(Z) = supp(Y)$ la utilizaremos para expresar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $supp(z_n) = supp(y_n)$. Utilizaremos la misma expresión para el caso $s$ y $t$. Es decir, $supp(s_n) = supp(t_n)$ para todo $n = 1, \ldots, k$

A modo de recordatorio, a partir de la siguiente definición, tal y como hemos venido trabajando, cuando hablemos de vectores bloques, supondremos siempre que se tratan de vectores bloques <u>normalizados</u>. Se reitera, sin que esto genere confusión, las expresiones "vectores bloque" y "vectores bloque normalizados" significarán lo mismo.

Al mismo tiempo, dada $Y \in \mathbf{B_1}$, el símbolo "$x \in span(Y)$" no se referirá a un vector cualquiera en $span(Y)$, se asumirá que es un vector bloque normalizado. Es decir $x \in \mathcal{S}_{span(Y)}$, donde $\mathcal{S}_{span(Y)}$ denota a la esfera unitaria del $span(Y)$. De manera análoga, esto se aplica para el caso de una sucesión de bloques finita.

## 2. Noción de juego en subconjuntos de $\mathbf{B_1}$.

Lo siguiente es un conjunto de reglas (juego) que nos permite construir de manera algorítmica sucesiones de bloques normalizados.

DEFINICIÓN 5.16. Dado $Y \in \mathbf{B_1}$ y $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$, definimos el *juego* $\mathbf{J}_\sigma[Y]$ como sigue:

(1) Hay dos jugadores, I y II.
(2) I siempre juega un vector bloque de $span(Y)$.
(3) II juega un vector bloque de $span(Y)$, o juega el vector 0.
(4) El juego comienza con I, jugando un vector bloque $x_1^{(1)} \in span(Y)$.
(5) II responde jugando un vector bloque $y_1 \in span(x_1^{(1)})$ ó 0.
(6) Si II juega un vector bloque, entonces el juego vuelve a comenzar con I jugando un vector bloque cualquiera $x_1^{(2)} \in span(Y)$.
(7) Si II juega 0, entonces I debe jugar un vector bloque $x_2^{(1)} > x_1^{(1)}$. Luego de ésto, II respondería jugando un vector bloque $y_2 \in span(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ ó 0, y así sucesivamente.
(8) También es necesario que si $y_n$ y $y_m$, con $n < m$, son vectores jugados por II, entonces $y_n < y_m$.

De este modo, el juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$ luce así:

$$\begin{array}{c|cccccccccc} \mathrm{I} & x_1^{(1)} & < \cdots < & x_{n_1-1}^{(1)} & < x_{n_1}^{(1)}; & x_1^{(2)} & < \cdots < & x_{n_2-1}^{(2)} & < x_{n_2}^{(2)}; & \cdots \\ \hline \mathrm{II} & 0 & \cdots & 0 & y_1 & 0 & \cdots & 0 & y_2 & \cdots \end{array}$$

donde $y_1 \in span(x_1^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)})$, $y_2 \in span(x_1^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)})$, ...

DEFINICIÓN 5.17. Decimos que la sucesión $x_1^{(1)}, 0, x_2^{(1)}, 0, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, y_1, x_1^{(2)}, 0, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, y_2, 0, \ldots$ es una *corrida* del juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$.

A los segmentos iniciales finitos de una corrida los llamaremos *corridas finitas.*

DEFINICIÓN 5.18. Decimos que II *gana el juego* $\mathbf{J}_\sigma[Y]$ si éste produce una sucesión básica de bloques normalizados infinita $(y_n)_n$ que pertenece al conjunto $\sigma$. (los ceros jugados no se consideran, solamente los vectores bloques).

Si II no produce una sucesión de bloques infinita, o si $(y_n)_n \notin \sigma$ decimos que I *gana.*

## 3. Estrategias de juego. Estrategias ganadoras.

Antes de definir lo que es una *estrategia* para el juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$ dada una sucesión de bloques $Y$ y $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$, consideremos lo siguiente:

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los vectores bloque normalizados del espacio $\mathcal{X}$ más el vector cero.

Sea $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de $\mathcal{A}$.

Aclaratoria: Un elemento de $\mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ es una sucesión finita de vectores bloque normalizados cualesquiera de $\mathcal{X}$. Sin embargo, no necesariamente es una sucesión básica de bloques, es decir, que sus vectores no están ordenados como los de las sucesiones básicas de bloques, ó algunos de ellos son iguales a 0.

Definición 5.19. Sea $Y$ una sucesión básica de bloques y $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$.

Supongamos que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ es una corrida finita jugada en el juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$. Definamos al subconjunto $T \subseteq \mathcal{A}^{<\mathbb{N}}$ como aquel que contiene a las sucesiones finitas de vectores ( que son extensión de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ) que se construyen de la siguiente forma:

(1) Para $n$ par. Si $x_n \neq 0$, I juega un vector bloque normalizado $y \in span(Y)$ cualquiera. Si $x_n = 0$, I debe escojer un vector bloque $y \in span(Y)$ tal que $x_{n-1} < y$.

(2) Para $n$ impar. Tomemos, si existe, $m = \max\{2k : x_{2k} \neq 0\}$, en otro caso, tomemos 0. Entonces, podemos extender $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ con el vector 0 ó con algún vector bloque $y \in span((x_k)_{k>m})_{k\,\mathrm{impar}}$ tal que $y > x_m$.

$T$ es el conjunto de todas las posibles corridas finitas del juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$. La manera de contruir los elementos de éste determinan un *orden parcial*. Más aún, $T$ es un *árbol*, es decir, es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada elemento, el conjunto de predecesores está bien ordenado.

Las ramas infinitas de $T$ son las corridas completas del juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$.

Definición 5.20. Sea $T_n \subseteq T$ el conjunto de las corridas finitas de tamaño $n$. Una *estrategia* para I en $Y$ es una función

$$\mathrm{S} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_{2n} \longrightarrow span(Y)$$

tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo $s \in T_{2n}$, se tiene que $s^\frown \mathrm{S}(s) \in T_{2n+1}$.

Una *estrategia* para II, es una función

$$\mathrm{S} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_{2n+1} \longrightarrow span(Y) \cup \{0\}$$

tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, y todo $s \in T_{2n+1}$, se tiene que $s^\frown \mathrm{S}(s) \in T_{2n+2}$.

Definición 5.21. Una estrategia S para II es *no trivial* si para algún $r \in T_{2n+1}$ existen $m \geqslant n$ y $t' \in T_{2m+1}$ tal que $\mathrm{S}(t') \neq 0$. Es decir, si II juega de acuerdo a S, entonces produce siempre una sucesión de bloques infinita.

Una estrategia S para II es una *estrategia ganadora* si II, siempre que juegue de acuerdo a S, gane el juego.

La definición de estrategia ganadora para I es análoga.

Definición 5.22. Sea S una estrategia para I en Y, decimos que una sucesión, de 0's o vectores bloques $(q_1, \ldots, q_n)$ es *coherente* con S si y sólo si $(q_1, \ldots, q_n)$ es una sucesión jugada por II en una corrida del juego en la cual I juega de acuerdo a S. Es decir, $(q_1, \ldots, q_n)$ aparece en los lugares impares de alguna sucesión $(x_1, \ldots, x_m) \in T$ tal que para todo $k \leqslant m$, si $k$ es impar, entonces $x_{k+1} = \mathrm{S}(x_1, \ldots, x_k)$.

Una sucesión finita, solamente de vectores bloques $(y_1, \ldots, y_n)$, es *coherente* con S si existen $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ tal que $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m_1 \text{veces}}, y_1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_2 \text{veces}}, y_2, \ldots, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m_n \text{veces}}, y_n)$ es coherente con S.

Una sucesión infinita de bloques $(y_n)_n$ es *coherente* con S si y sólo si para todo $n \in \mathbb{N}$, $(y_1, \ldots, y_n)$ es coherente.

Para una sucesión $Z$ coherente con S, sea $\mathrm{S}^* Z$ la sucesión de vectores jugados por I siguiendo la estrategia S contra $Z$.

Para una estrategia S para II en $Y$ y una sucesión finita, de vectores bloques $(x_1, \ldots, x_n)$, (no necesariamente una sucesión básica de bloques), la definición de ser coherente es análoga, reemplazando I por II, par por impar.

Un resultado importante, que será usado más adelante es el siguiente:

Proposición 5.23. *Supongamos que II tiene una estrategia ganadora para el juego* $\mathbf{J}_\sigma[Y]$ *y* $Z \preccurlyeq^* Y$*. Entonces, II tiene una estrategia ganadora para el juego* $\mathbf{J}_\sigma[Z]$*.*

Demostración. Sea S una estrategia ganadora para II en el juego $\mathbf{J}_\sigma[Y]$.

Supongamos que $Y = (y_n)_n$ y $Z = (z_n)_n$.

$(Z \preccurlyeq^* Y \iff$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(z_n)_{n \geqslant n_0} \preccurlyeq Y)$

Definamos la siguiente estrategia (llamémosla R) para II en el juego $\mathbf{J}_\sigma[Z]$ de la siguiente manera:

Supongamos que I juega un vector bloque $x_1^{(1)} \in span(Z|(n_0-1)) = span((z_1, \ldots, z_{n-1}))$. Si II juega 0, I debe jugar un vector bloque $x_2^{(1)} > x_1^{(1)}$.

II se mantendrá jugando 0 hasta que I es forzado a jugar algún vector $x_1^{(2)} \in span((z_n)_{n \geqslant n_0}) \subseteq span(Y \backslash (Z|(n_0-1))) \subseteq span(Y)$.

Después de esto, II continuará jugando de acuerdo a S. Evidentemente, R es una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_\sigma[Z]$.

□

Definición 5.24. Sea $s$ una sucesión básica de bloques finita. El juego $\mathbf{J}^s_\sigma[Y]$ es el jugado en $Y \backslash s$, es decir $\mathbf{J}_\sigma[Y \backslash s]$, en el cual, si II produce $Z$, éste gana si $s^\frown Z \in \sigma$.

Retomemos ahora el estudio sobre el conjunto $\mathbf{B_1}$. Podemos considerar para éste dos topologías naturales:

(1) La N-topología: Es la topología heredada de $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{X}$ tiene la topología norma y $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ la topología producto.

(2) La D-topología: Es la topología heredada de $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathcal{X}$ tiene la topología discreta y $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ la topología producto. La base para esta topología es la expuesta en (2.39)

Proposición 5.25. $\mathbf{B_1} \subseteq \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ *es N-cerrado.*

Demostración. Sea $(Y_n)_n \subset \mathbf{B_1}$ una sucesión de sucesiones básicas de bloques, con $Y_n = (y_i^n)_{i \geqslant 1}$ para todo $n$. Supongamos que existe $Z = (z_i)_{i \geqslant 1}$ tal que

$$Y_n \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} Z$$

entonces $y_i^n \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} z_i$ para todo $i$.

Debemos probar que $Z$ es una sucesión básica de bloques normalizados.

Veamos que $\|z_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

En efecto, $\|z_i\| = \|\lim_{n \longrightarrow \infty} y_i^n\|$, por ser $\| \, \|$ contínua se tiene que $\|\lim_{n \longrightarrow \infty} y_i^n\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_i^n\| = \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 = 1$. Luego, para todo $i \in \mathbb{N}$, $z_i$ es un vector normalizado.

Veamos que para todo $k$ y $l$, con $k < l$, se cumple que $z_k < z_l$, y como consecuencia, $z_i$ tiene soporte finito para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos el funcional lineal, $\mathcal{E}_n^* : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\mathcal{E}_n^*(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \mathcal{E}_j) = \lambda_n$. Entonces, si $n \in supp(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \mathcal{E}_j)$ se tiene que $\mathcal{E}_n^*(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \mathcal{E}_j) \neq 0$. Por teorema (3.45), sabemos que $\mathcal{E}_n^*$ es contínuo.

Supongamos que existen $k < l$ tal que $z_k \not< z_l$, es decir, existen $n \in supp(z_l)$ y $m \in supp(z_k)$ tal que $n \leqslant m$, es decir, $\mathcal{E}_n^*(z_l) \neq 0$ y $\mathcal{E}_m^*(z_k) \neq 0$.

Sabemos que $y_l^r \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} z_l$ y $y_k^r \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} z_k$.

Como $\mathcal{E}_n^*$ y $\mathcal{E}_m^*$ son funcionales contínuos, entonces

$$\mathcal{E}_n^*(y_l^r) \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_n^*(z_l) \neq 0 \text{ y } \mathcal{E}_m^*(y_k^r) \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}_m^*(z_k) \neq 0$$

entonces existe $r_0$ y $r_1$ tales que para todo $r \geqslant r_0$, $\mathcal{E}_n^*(y_l^r) \neq 0$, y para todo $r \geqslant r_1$, $\mathcal{E}_m^*(y_k^r) \neq 0$.

Sea $r_2 = \max\{r_0, r_1\} \Longrightarrow \mathcal{E}^*_n(y^r_l) \neq 0$ y $\mathcal{E}^*_m(y^r_k) \neq 0$, para todo $r \geqslant r_2 \Longrightarrow n \in supp(y^r_l)$ y $m \in y^m_k$ con $n \leqslant m$ lo cual es una contradicción pues $y^r_k < y^r_l$.

Por lo tanto, $Z \in \mathbf{B_1}$.

□

La siguiente relación jugará un papel clave en nuestros argumentos:

Definición 5.26. Dado $Y \in \mathbf{B_1}$, sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}(Y)$ el conjunto de pares $(s; A)$ donde $s, A \in [Y]$, $s$ finita y $A$ infinita, tales que $s < A$.

La relación está dada por:

$(s; A) \leq (t; B)$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) $t$ es segmento inicial de $s$.
(2) $A \preccurlyeq B$.
(3) $s \backslash t \in [B]$.

Definición 5.27. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* si y sólo si para todo $(t; B) \in \mathbb{P}$ existe $(s; A) \in D$ tal que $(s; A) \leq (t; B)$.

Dada $s$ una sucesión básica de bloques normalizados finita. Denotemos con $\mathcal{S}_{span(s)}$ a la esfera unitaria del $span(s)$.

Definición 5.28. Dada $s$ una sucesión básica de bloques finita y $\delta > 0$, un conjunto $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq \mathcal{S}_{span(s)}$ de vectores bloques es un $\delta$-*cubrimiento* de $\mathcal{S}_{span(s)}$ si y sólo si, para todo vector bloque normalizado $y \in \mathcal{S}_{span(s)}$, existe $1 \leqslant i \leqslant k$ tal que $supp(y) = supp(y_i)$ y $\|y - y_i\| \leqslant \delta$.

Proposición 5.29. *Para toda sucesión finita de bloques* $s$, *y todo* $\delta > 0$, *existe un* $\delta$-*cubrimiento de* $\mathcal{S}_{span(s)}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\delta > 0$. Supongamos que $s = (x_1, \ldots, x_n)$.

Dado $x = \alpha_1 x_{i_1} + \cdots + \alpha_k x_{i_k} \in \mathcal{S}_{span(s)}$, consideremos los abiertos de la forma

$$B_x = \left\{ z = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{i_j} \ : \ \beta_j \neq 0, j = 1, \ldots, k, \ \max_{j=1,\ldots,k} |\beta_j - \alpha_j| < \frac{\delta}{n} \right\}$$

Nótese que si $z \in B_x$, se tiene que $supp(z) = supp(x)$.

Se tiene además que $\mathcal{B} = \{B_x \ : \ x \in \mathcal{S}_{span(s)}\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathcal{S}_{span(s)}$. Es decir, $\mathcal{S}_{span(s)} \subseteq \bigcup_{x \in \mathcal{S}_{span(s)}} B_x$.

Como $s$ es finito, entonces, la dimensión de $span(s)$ es finita.

Sabemos que una caracterización de los espacios de dimensión finita es que la esfera es compacta, por lo que existe un subcubrimiento finito de $\mathcal{B}$.

O lo mismo que, existen $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{S}_{span(s)}$ tal que $\mathcal{S}_{span(s)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{y_i}$.

Luego, para todo $x \in \mathcal{S}_{span(s)}$ existe $y_i$ tal que $x \in B_{y_i}$.

Supongamos que $x = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j x_{i_j}$ y $y_i = \sum_{j=1}^{k} \delta_j x_{i_j}$.

Luego,

$$\|x - y_i\| = \| \sum_{j=1}^{k} (\gamma_j - \delta_j) x_{i_j} \| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\gamma_j - \delta_j| \|x_{i_j}\| \leqslant n \max_{j=1,\ldots,k} |\gamma_j - \delta_j| = n \frac{\delta}{n} = \delta.$$

Por lo tanto, $\{y_1, \ldots, y_m\}$ es un $\delta$-cubrimiento de $\mathcal{S}_{span(s)}$.

$\square$

DEFINICIÓN 5.30. Sea $\Delta = (\delta_n)_n > 0$ , y $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$. Definimos

$$\sigma_\Delta = \{(x_n)_n \in \mathbf{B_1} \ : \ d((x_n)_n; (y_n)_n) \leqslant \Delta \text{ para algún } (y_n)_n \in \sigma\}$$

OBSERVACIÓN 5.31. Sea $X \in \sigma$ entonces $d(X; X) = (0, 0, \ldots) \leqslant \Delta$. Por lo tanto, $\sigma \subseteq \sigma_\Delta$.

Definición 5.32. Sea $Y$ una sucesión básica de bloques. Un conjunto $\sigma \subset \mathbf{B_1}$ es *grande* en $[Y]$ si para todo $Z \in [Y]$, se tiene que $[Z] \cap \sigma \neq \emptyset$.

Sea $s$ una sucesión básica de bloques finita, y $Y$ una sucesión básica de bloques infinita. Decimos que $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$ es *grande* en $[s; Y]$ si y sólo si para todo $Z \in [Y]$, se tiene que $[s; Z] \cap \sigma \neq \emptyset$.

Considerando la observación (5.13), la definición de grande en $[s; Y]$ es más general que la definición de grande en $[Y]$. Es decir, grande en $[Y]$ es un caso particular de grande en $[s; Y]$, tomando a $s = \emptyset$.

## 4. Conjuntos débilmente Ramsey.

Finalmente podemos definir lo que es un conjunto débilmente Ramsey.

Definición 5.33 (Débilmente Ramsey). Sea $\Delta > 0$. Un conjunto $\sigma \subseteq \mathbf{B_1}$ es $\Delta$-*débilmente Ramsey* si y sólo si existe $Y \in \mathbf{B_1}$ tal que $[Y] \cap \sigma = \emptyset$ ó II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}[Y]$.

Decimos que $\sigma$ es *débilmente Ramsey* si y sólo si es $\Delta$-débilmente Ramsey para todo $\Delta > 0$.

Nótese que sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Delta > 0$ es decreciente y $\Delta < 1$.

Observación 5.34. Por definición, decir que $\sigma$ es $\Delta$-débilmete Ramsey es equivalente a decir que si $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1}$, entonces existe algún $X$ tal que II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}[X]$.

Teorema 5.35. *Supongamos que $\sigma \subset \mathbf{B_1}$ es D-abierto, y sea $X \in \mathbf{B_1}$. Entonces, el juego $J_\sigma[X]$ es determinado, es decir, I o II tienen una estrategia ganadora.*

Demostración. Supongamos que II no tiene una estrategia ganadora. Entonces I juega un vector bloque $x_1$ tal que no pierde el juego que comienza con $x_1$.

Supongamos que $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_{n-1}, x_n$ es una corrida finita que ha sido jugada en $J_\sigma[X]$, donde $y_1, \ldots, y_{n-1}$ son los vectores jugados por II (alguno de ellos puede ser 0), tal que I no pierde el juego que comienza con $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_{n-1}, x_n$. Ahora, supongamos que II juega $y_n$. Entonces I puede escoger algún vector $x_{n+1}$ tal que no pierde el juego que comienza con $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_{n-1}, x_n, y_n, x_{n+1}$. Ésta es una estrategia ganadora para I.

En otro caso, al final de la corrida, II ha jugado alguna sucesión $Z \in \sigma$. Sea n tal que $\langle Z|n\rangle \subseteq \sigma$, donde $\langle Z|n\rangle$ es el conjunto de todas las sucesiones básicas de bloques normalizados que comienzan con $Z|n$, el cual es un abierto básico en la D-topología, ver (2.39), y sea $m \geqslant n$ el mínimo tal que $Z|n$ está en $y_1, \ldots, y_m$. Entonces en el juego que comienza con $x_1, y_1, x_2, \ldots, y_m, x_{m+1}$, I siempre pierde, lo que es una contradicción.

□

Proposición 5.36. *Supongamos que $\sigma$ es D-abierto, y $\Delta \geqslant 0$. Sea*

$$\tau = \{X \in \mathbf{B_1} \ : \ \text{existe } Y \in \sigma \text{ tal que } supp(X) = supp(Y) \text{ y } d(X;Y) \leqslant \Delta\}$$

*entonces $\tau$ es también D-abierto.*

Demostración. Sea $X \in \tau$, es decir, $X \in \mathbf{B_1}$ tal que $supp(X) = supp(Y)$ y $d(X;Y) \leqslant \Delta$ para algún $Y \in \sigma$. Fijemos $n$ tal que $\langle s\rangle \subseteq \sigma$, donde $s = Y|n$.

( $\langle s\rangle$ es un abierto básico en la D-topología, ver (2.39) ).

Sea $\langle t\rangle \subseteq \sigma_\Delta$, donde $t = X|n$.

Si $t < W$ entonces $s < W$, ya que $supp(s) = supp(t)$. Luego, $supp(t^\frown W) = supp(s^\frown W)$, $d(t^\frown W; s^\frown W) \leqslant \Delta$ y $s^\frown W \in \sigma$. Esto implica que $t^\frown W \in \tau$. Es decir, existe un abierto básico que contiene a $X$ y está contenido en $\tau$, por el teorema (2.12), se tiene que $\tau$ es abierto.

□

Proposición 5.37. *Supongamos que $(\mathcal{E}_k)_k$ es una base de Schauder normalizada de $\mathcal{X}$ con constante básica $C$, y sea $(x_1, \ldots, x_n) \in [(\mathcal{E}_k)_k]^{<\mathbb{N}}$. Si $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ es un vector normalizado, entonces para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, se tiene que $|\lambda_i| \leqslant 2C$.*

Demostración. Sea $m = \max supp(x_n)$. Entonces $(x_1, \ldots, x_n)^\frown(\mathcal{E}_k)_{k>m} \in \mathbf{B_1}$. Supongamos que ésta última tiene constante de la base $K$. Por proposición (5.14), $K \leqslant C$. Por lo tanto, por proposición (3.50) queda demostrada la proposición.

□

Definición 5.38. Sean $Y = (y_n)_n$ y $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}_n)_n$ sucesiones de bloques, y sea $Z = (z_n)_n \in [Y]$. Decimos que $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_n)_n \in [\widetilde{Y}]$ *está definido como* $Z \in [Y]$ si y sólo si,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ si } z_n = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k, \text{ entonces } \widetilde{z}_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{y}_k,$$

donde, $\lambda = \| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \widetilde{y}_k \|$.

Proposición 5.39. *Sea* $\Delta = (\delta_n)_n > 0$. *Entonces existe una sucesión decreciente* $0 < \Gamma < \frac{\Delta}{2}$ *la cual satisface lo siguiente:*

*Para todo* $Y$, $\widetilde{Y}$ *tal que* $d(Y; \widetilde{Y}) \leqslant \Gamma$, *si* $Z \in [Y]$, *y* $\widetilde{Z} \in [\widetilde{Y}]$ *está definida como* $Z \in [Y]$, *entonces* $d(Z; \widetilde{Z}) \leqslant \Delta$.

Demostración. Para cada $n \geqslant 1$, definimos

$$\gamma_n = \frac{\min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}}{2^{n+3} C},$$

donde $C$ es la constante de la base de $(\mathcal{E}_n)_n$.

Luego, $\Gamma = (\gamma_n)_n < \frac{\Delta}{2}$ y es decreciente.

Ahora, sea $Y = (y_n)_n$ y sea $Z = (z_n)_n \in [Y]$. Supongamos que $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}_n)_n$ es tal que $d(Y; \widetilde{Y}) \leqslant \Gamma$ y $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_n)_n \in [\widetilde{Y}]$ esta definido como $Z \in [Y]$. Fijemos $j$ y supongamos que $z_j = \lambda_{i_1} y_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m} y_{i_m}$ y $\widetilde{z}_j = \frac{\widetilde{\widetilde{z}}_j}{\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\|}$, donde $\widetilde{\widetilde{z}}_j = \lambda_{i_1} \widetilde{y}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m} \widetilde{y}_{i_m}$. Note que $j \leqslant i_1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|z_j - \widetilde{\widetilde{z}}_j\| &= \|\lambda_{i_1} y_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m} y_{i_m} - (\lambda_{i_1} \widetilde{y}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_m} \widetilde{y}_{i_m})\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} |\lambda_{i_k}| \gamma_{i_k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} 2C \frac{\min\{\delta_1, \ldots, \delta_{i_k}\}}{2^{i_k+3} C} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{\delta_j}{2^{i_k+2}} \\
&\leqslant \frac{\delta_j}{2}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
\|z_j - \widetilde{z}_j\| \leqslant \|z_j - \widetilde{\widetilde{z}}_j\| + \|\widetilde{\widetilde{z}}_j - \widetilde{z}_j\| &\leqslant \frac{\delta_j}{2} + \left\| \widetilde{\widetilde{z}}_j - \frac{\widetilde{\widetilde{z}}_j}{\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\|} \right\| \\
&= \frac{\delta_j}{2} + \left\| \frac{\widetilde{\widetilde{z}}_j}{\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\|} (\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\| - 1) \right\| = \frac{\delta_j}{2} + |\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\| - 1| \\
&= \frac{\delta j}{2} + |\|\widetilde{\widetilde{z}}_j\| - \|z_j\|| \\
&\leqslant \frac{\delta_j}{2} + \|\widetilde{\widetilde{z}}_j - z_j\| \\
&\leqslant \delta_j.
\end{aligned}$$

□

## 5. Conjuntos D-abiertos de $\mathbf{B_1}$ y la propiedad débilmente Ramsey.

TEOREMA 5.40. *Todo subconjunto D-abierto $\sigma$ de $\mathbf{B_1}$ es débilmente Ramsey.*

Antes de demostrar este teorema es necesario que consideremos algunas definiciones y lemas previos.

Dada $s$ una sucesión básica de bloques normalizados finita, denotemos con $\langle s \rangle$ al conjunto de sucesiones básicas de bloques normalizados que comienzan con $s$.

DEFINICIÓN 5.41. Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$. Definamos el conjunto $I$ como

$$I = \{\, s \,:\, \langle s \rangle \subseteq \sigma \}$$

Observación 5.42. Como $\sigma$ es D-abierto, por observación (2.39), entonces $\sigma = \bigcup_{s\in I}\langle s\rangle$.

Podemos suponer que los elementos $s$ de $I$ son de tamaño mínimo. En efecto, si $s$ es segmento inicial de algún $s'$ entonces $\langle s'\rangle \subseteq \langle s\rangle$.

Lema 5.43. *Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$, y sea $\Delta > 0$. Entonces existe una sucesión básica de bloques normalizados finita (que denotaremos $\overline{s}$) tal que:*

(a) $d(\overline{s}; s) < \frac{\Delta}{2}$, *para algún $s \in I$.*

*y*

(b) *No existe $t \prec \overline{s}$ con $d(t; u) < \frac{\Delta}{2}$, para algún $u \in I$.*

Demostración. Sea $s \in I$. Se tiene que $d(s; s) = 0 < \frac{\Delta}{2}$, luego, se cumple (a).
Si satisface (b), tomemos $\overline{s} = s$ y queda demostrado el lema.

En otro caso, supongamos que existe $t^{(1)} \prec s$ tal que $d(t^{(1)}; u^{(1)}) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u^{(1)} \in I$.

Supongamos nuevamente que existe $t^{(2)} \prec t^{(1)}$ tal que $d(t^{(2)}; u^{(2)}) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u^{(2)} \in I$.
Repitiendo este mismo proceso un número finito y suficiente de veces podríamos toparnos con lo siguiente:

Supongamos que llegamos hasta cierto $t^{(n)} \prec \cdots \prec t^{(1)} \prec s$ tal que $d(t^{(n)}; u^{(n)}) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u^{(n)} \in I$.

Estudiemos los siguientes casos:

Si no existe $t^{(n+1)} \prec t^{n}$ tal que $d(t^{(n+1)}; u^{(n+1)}) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u^{(n+1)} \in I$, entonces se satisface (b).

En caso contrario podemos repetir nuevamente el proceso anterior hasta encontrar un $t^{(m)} \prec \cdots \prec t^{(n)} \prec \cdots t^{(1)} \prec s$, $(m > n)$ tal que se cumpla la propiedad (b). Y tiene sentido suponerlo pues $s$ es finita por lo que el proceso se repetiría un número finito de veces. De hecho, supongamos que llegamos hasta $t^{(m)}$, y supongamos además que éste tiene un solo elemento. Es obvio que no existe $t^{(m+1)} \prec t^{(m)}$ tal que $d(t^{(m+1)}; u^{(m+1)}) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u^{(m+1)} \in I$, pues de lo contrario $t^{m+1} = (0)$, pero 0 no es vector bloque normalizado.

Por lo tanto, es posible encontrar un $\overline{s}$ suficientemente pequeño tal que $d(\overline{s}; s) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $s \in I$ y tal que no existe $t \prec \overline{s}$ tal que $d(t; u) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $u \in I$.

$\square$

Tiene sentido entonces definir el siguiente conjunto:

Definición 5.44. Definamos $I_0$ como:

$$I_0 = \{\overline{s} : d(s, \overline{s}) \leq \frac{\Delta}{2} \text{ para algún } s \in I \text{ y no existe}$$
$$t \prec \overline{s} \text{ con } d(u, t) \leq \frac{\Delta}{2} \text{ para algún } u \in I\}$$

Definición 5.45. Definamos $\sigma_0$ como:

$$\sigma_0 = \bigcup_{\overline{s} \in I_0} \langle \overline{s} \rangle.$$

Lema 5.46. *Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$, supongamos que $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1}$, entonces $\sigma_0$ es grande en $\mathbf{B_1}$. Es decir, dado $Z \in \mathbf{B_1}$, entonces $\sigma_0 \cap [Z] \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $Z \in \mathbf{B_1}$.

Por hipótesis, $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1} \implies [Z] \cap \sigma \neq \emptyset \implies$ existe $\widetilde{Z} \in \mathbf{B_1}$ tal que $\widetilde{Z} \in [Z]$ y $\widetilde{Z} \in \sigma = \bigcup_{s \in I} \langle s \rangle \implies \widetilde{Z} \in \langle s \rangle$ para algún $s \in I$.

$\widetilde{Z} \in \langle s \rangle \implies \widetilde{Z}$ es de la forma $\widetilde{Z} = s^\frown \widetilde{\widetilde{Z}}$ para algún $\widetilde{\widetilde{Z}} \preccurlyeq Z$ tal que $s < \widetilde{\widetilde{Z}}$.

Si $s \in I_0 \implies \widetilde{Z} \in \sigma_0$ ya que $\widetilde{Z}$ comienza con $s$.

Supongamos que $s \notin I_0 \implies$ existe $t \prec s$ tal que $d(t; u) < \frac{\Delta}{2}$ para algún $u \in I$.
Si $t \notin I_0$ entonces existe $t^{(1)} \prec t$ tal que $d(t^{(1)}; v) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $v \in I$ y así sucesivamente. Obviamente este proceso tiene un tope por lo que se dijo anteriormente para definir $I_0$. De no ser así llegaríamos hasta un cierto $t^{(k)}$ compuesto por un solo vector, y si suponemos nuevamente que $t^{(k)} \notin I_0$ tendremos que asumir que existe otro $t^{(k+1)}$ tal que cumple la propiedad anterior, pero el único que la satisface es el vector nulo, pero éste no es un vector bloque normalizado. Por lo tanto, para algun $j = 1, \ldots, k$ se tiene que $t^{(j)} \in I_0$.

Llamemos $w = t^{(j)}$.

Sea $\widehat{Z} = w^\frown(\widetilde{Z}\backslash s)$, o lo mismo que $\widehat{Z} = w^\frown(\widetilde{\widetilde{Z}})$.

Tiene sentido hablar de esta concatenación pues $w < (\widetilde{Z}\backslash s)$, ya que esto último es una consecuencia del corolario (5.4) y del hecho de que $w \prec t \prec s$. Luego, $\widehat{Z} \in \langle w \rangle$, como $w \in I_0$ entonces $\widehat{Z} \in \langle w \rangle \subseteq \bigcup_{\overline{s} \in I_0} \langle \overline{s} \rangle = \sigma_0 \implies \sigma_0 \cap [Z] \neq \emptyset$, para todo $Z \in \mathbf{B_1}$.

Por lo tanto, $\sigma_0$ es grande en $\mathbf{B_1}$.

□

Lema 5.47. *Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$. Sea $\Delta > 0$ y sea $\Gamma > 0$ tal que $\Gamma < \frac{\Delta}{2}$. Entonces, $(\sigma_0)_\Gamma \subseteq \sigma_\Delta$.*

Demostración. Sea $Y \in (\sigma_0)_\Gamma$, entonces $d(Y; \widetilde{Y}) \leqslant \Gamma < \frac{\Delta}{2}$ para algún $\widetilde{Y} \in \sigma_0$.

Si $\widetilde{Y} \in \sigma_0 = \bigcup_{\overline{s} \in I_0} \langle \overline{s} \rangle$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ y $\overline{s} \in I_0$ tal que $\widetilde{Y}|m = \overline{s}$ y $d(\overline{s}; s) \leqslant \frac{\Delta}{2}$ para algún $s \in I$.

Sea $\widetilde{\widetilde{Y}} = s^\frown(\widetilde{Y}\backslash\overline{s})$. Entonces, $\widetilde{\widetilde{Y}} \in \langle s \rangle \subseteq \bigcup_{s \in I} \langle s \rangle = \sigma$ y además $d(Y; \widetilde{\widetilde{Y}}) \leqslant d(Y; \widetilde{Y}) + d(\widetilde{Y}; \widetilde{\widetilde{Y}}) \leqslant \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2} = \Delta$.

Luego, $Y \in \sigma_\Delta$. Por lo tanto, $(\sigma_0)_\Gamma \subseteq \sigma_\Delta$.

□

Dado $\Delta > 0$, sea $\Gamma = (\gamma_k)_k > 0$ definida como en la proposición (5.39). Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$.

Definición 5.48. Supongamos que $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots)$. Dado $n \geqslant 0$ sean:

$$\Gamma_n^- = (\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{2}, 0, 0, \ldots)$$

$$\Gamma_n^+ = (\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{2}, \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots)$$

Definimos:

$$\sigma_n^+ = \{X \in \mathbf{B_1} : \text{ existe } Y \in \sigma_0 \text{ tal que } suppX = suppY \text{ y } d(X, Y) \leq \Gamma_n^+\}$$

$$\sigma_n^- = \{X \in \mathbf{B_1} \ : \ \text{existe } Y \in \sigma_0 \text{ tal que } suppX = suppY \text{ y } d(X,Y) \leq \Gamma_n^-\}$$

Observación 5.49. Ambos conjuntos ($\sigma_n^+$ y $\sigma_n^-$) son distintos de vacío pues $\sigma_0$ está contenido en ellos.

Nótese que si $X$ e $Y$ son tales que $d(X,Y) \leq \Gamma_n^-$, entonces $d(X,Y) \leq \Gamma_n^+$ , y si $supp(X) = supp(Y)$ entonces $\sigma_{n-1}^- \subseteq \sigma_n^- \subseteq \sigma_{n+1}^+ \subseteq \sigma_n^+$.

Por otro lado, $\sigma_n^- \subseteq \sigma_{\Gamma_n^-}$ y $\sigma_n^+ \subseteq \sigma_{\Gamma_n^+}$.

Lema 5.50. *Sea $\sigma$ un subconjunto D-abierto de $\mathbf{B_1}$, supongamos que $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1}$ y supongamos además que II no tiene estrategia ganadora para el juego $\boldsymbol{J}_{\sigma_\Delta}[Y]$ para todo $Y \in \mathbf{B_1}$. Entonces, existen dos sucesiones $(x_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbf{B_1}$, $(X_n)_{n\geqslant 0} \subseteq \mathbf{B_1}$ con las siguientes propiedades:*

*Para todo $n \geqslant 0$,*

a) *$\sigma_n^-$ es grande en $[x_1, x_2, \ldots, x_n; X_n]$*

*y*

b) *II no tiene estrategia ganadora para $\boldsymbol{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[Z]$, para todo $Z \in [X_n]$.*

Demostración. La existencia de estas sucesiones se prueba por inducción.

1) **Caso** $n = 0$:

Es inmediato, pues $\sigma_0^- = \sigma_0$.

Por lema (5.46), $\sigma_0$ es grande en $\mathbf{B_1}$, es decir, para todo $Y \in \mathbf{B_1}$, $[Y] \cap \sigma_0 \neq \emptyset$, o lo mismo que $[\emptyset; Y] \cap \sigma_0 \neq \emptyset$.

Por hipótesis, II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}[Y]$, lo cual, es equivalente a decir que II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}^{\emptyset}[Y]$. Por lema (5.47), se tiene que $(\sigma_0)_\Gamma \subseteq \sigma_\Delta$. Luego, II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_0^+}^{\emptyset}[Y]$, para todo $Y \in \mathbf{B_1}$, ya que $\sigma_0^+ \subseteq (\sigma_0)_\Gamma$.

Fijemos un $X \in \mathbf{B_1}$.

Sea $X_0 = X$.

2) **Caso** $n \longrightarrow n+1$:

Hipótesis inductiva: Para cierto $n \geq 0$

a) $\sigma_n^-$ es grande en $[x_1, \ldots, x_n; X_n]$.
Es decir, para todo $Z \in [X_n]$, $[x_1, \ldots, x_n; Z] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$.
En particular, como $X_n \in [X_n]$, $[x_1, \ldots, x_n; X_n] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$.

y

b) II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[Z]$, para todo $Z \in [X_n]$.
En particular, como $X_n \in [X_n]$, II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_0^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[X_n]$

Supongamos que no podemos continuar, ( denotaremos este hecho con la expresión $n \not\longrightarrow n+1$), es decir, para todo $x$ vector bloque tal que $x_n < x$, y para todo $Y \in \mathbf{B_1}$, existe $Z \in [Y]$ tal que,

a) $[x_1, \ldots, x_n, x; Z] \cap \sigma_{n+1}^- = \emptyset$ (es decir, $\sigma_{n+1}^-$ no es grande en $[x_1, \ldots, x_n, x; Y]$)

ó

b) II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_{n+1}^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[Z]$.

Una consecuencia inmediata que se deduce de ésta suposición es la siguiente:

Como $\sigma_n^- \subseteq \sigma_{n+1}^-$, entonces,

$$[x_1, \ldots, x_n, x; Z] \cap \sigma_n^- = \emptyset$$

ó

Como $\sigma_{n+1}^+ \subseteq \sigma_n^+$, entonces, II tiene una estrategia ganadora para $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[Z]$.

Dado $k \geq 1$, consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{P}(X_n)$:

$$D_k = \{(s, A) \in \mathbb{P}(X_n) : |s| \geq k \text{ y para todo } x \in \mathit{span}(s) \text{ con } x > x_n,$$

$$[x_1, \ldots, x_n, x; A] \cap \sigma_n^- = \emptyset \text{ ó II tiene una estrategia}$$

$$\text{ganadora para el juego } \mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[A]\}$$

Sub-lema 5.51. *$D_k$ es un subconjunto denso de $\mathbb{P}(X_n)$.*

Dado $(s,A) \in \mathbb{P}(X_n)$ debemos probar que existe $(t,B) \in D_k$ tal que $(t,B) \leq (s,A)$. (De ser cierta tal existencia, lógicamente estamos probando que $D_k \neq \emptyset$.)

Demostración

Sea $(s,A) \in \mathbb{P}(X_n)$, $s$ y $A$ son sucesiones de bloques de $X_n$, $s$ finita y $A$ infinita, tales que $s < A$.

Si $|s| \geqslant k$, y si para todo $x \in \mathcal{S}_{span(s)}$ se tiene que $x \not> x_n$ entonces $(s,A) \in D_k$. En efecto, si $(s,A) \notin D_k$, por definición de $D_k$ entonces existe $x > x_n$ tal que no se cumple la dicotomía interna de $D_k$, pero tal existencia contradice nuestra hipótesis, por lo tanto $(s,A) \in D_k$.

Tiene sentido entonces hablar de la existencia de vectores $x \in \mathcal{S}_{span(s)}$ tal que $x > x_n$.

Por otro lado, si $|s| < k$, podemos extender $s$ y restringir $A$ de tal manera que $|s| \geqslant k$.

Supongamos que $s$ es de la forma $s = (s_1, \ldots, s_m)$ y $A$ es de la forma $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Sea $s' = (s_1, \ldots, s_m, a_1, \ldots, a_p)$, donde $p$ es un entero positivo suficientemente grande tal que $|s'| \geq k$, y sea $A' = (a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots)$.

Obviamente se tiene que $s'$ , $A' \in [X_n]$, $s' < A'$, $A' \preccurlyeq A$, $s$ es segmento inicial de $s'$ y además $s' \backslash s \in [A]$. Luego, $(s', A') \leq (s,A)$.

Por proposición (5.29) existe un $\frac{\gamma_{n+1}}{2}$*−cubrimiento* de $\mathcal{S}_{span(s')}$, es decir, existe $\{y'_1, \ldots, y'_r\} \subseteq \mathcal{S}_{span(s')}$ tal que para todo $x \in \mathcal{S}_{span(s')}$, y en particular para $x > x_n$, existe $1 \leqslant i \leqslant j$ tal que $supp(x) = supp(y_i)$ y $\|x - y_i\| < \frac{\gamma_{n+1}}{2}$.

Consideremos solamente al subconjunto $\{y_1, \ldots, y_j\} \subseteq \{y'_1, \ldots, y'_r\}$ de vectores bloque que "cubren" a los $x \in \mathcal{S}_{span(s')}$ tal que $x > x_n$.

Por suponer $n \not\longrightarrow n+1$, podemos tomar $A' = A_0 \succcurlyeq A_1 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq A_j$ tal que

$$[x_1, \ldots, x_n, y_i, A_i] \cap \sigma_{n+1}^- = \emptyset$$

ó

II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_{n+1}^+}^{(x_1,\ldots,x_n,y_i)}[A_i]$.

$\Longrightarrow$

Como $\sigma_n^- \subseteq \sigma_{n+1}^-$, sucede que

$$[x_1, \ldots, x_n, y_i, A_i] \cap \sigma_n^- = \emptyset$$

ó

Como $\sigma_{n+1}^+ \subseteq \sigma_n^+$ sucede que II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,y_i)}[A_i]$.

Como $X_n \succcurlyeq A' = A_0 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq A_j \Longrightarrow A_j \preccurlyeq X_n$.

Sabemos que si $s' < A'$ entonces, para todo $B \preccurlyeq A'$, se tiene que $s' < B$.

Por lo tanto, se tiene que $(s', A_j) \leq (s', A') \leq (s, A)$.

Veamos que $(s', A_j) \in D_k$.

Sea $x \in span(s')$ tal que $x > x_n$.

Supongamos que $[x_1, \ldots, x_n, x; A_j] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$, (debemos probar entonces que II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[A_j]$).

Esto implica que existe $Z \preccurlyeq A_j$ tal que $(x_1, \ldots, x_n, x)^\frown Z \in \sigma_n^-$.

Por definición de $\sigma_n^-$, existe $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{x})^\frown Z \in \sigma_0$ tal que

$$supp((x_1, \ldots, x_n, x)^\frown Z) = supp((\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{x})^\frown Z)$$

y

$$d((x_1, \ldots, x_n, x)^\frown Z; (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{x})^\frown Z) \leqslant \Gamma_n^-$$

De esto se obtiene en particular que $supp(x) = supp(\widetilde{x})$.

Como $x$ y $\widetilde{x}$ están en la "posición" $n+1$ de sus respectivas sucesiones y $\Gamma_n^-$ es de la forma $\Gamma_n^- = (\frac{\gamma_1}{2}, \ldots, \frac{\gamma_n}{2}, 0, 0, \ldots)$ entonces $\|x - \widetilde{x}\| = 0$ ($\Longleftrightarrow x = \widetilde{x}$ , por ser $\| \ \|$ una norma).

Para este $x \in span(s')$ existe $1 \leq i \leq j$ tal que $supp(x) = supp(y_i)$ y $\|x - y_i\| < \frac{\gamma_{n+1}}{2}$.

Luego, $\|y_i - \widetilde{x}\| = \|y_i - x\| < \frac{\gamma_{n+1}}{2}$.

$\Longrightarrow$

$(x_1, \ldots, x_n, y_i)^\frown Z \in \sigma^-_{n+1}$

Como $A_j \preccurlyeq A_i$ y $\sigma^-_n \subseteq \sigma^-_{n+1}$, entonces, $[x_1, \ldots, x_n, y_i; A_i] \cap \sigma^-_{n+1} \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$

II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}^{(x_1,\ldots,x_n,y_i)}_{\sigma^+_{n+1}}[A_i])$.

Como $A_j \preccurlyeq A_i$, por proposición (5.23).

$\Longrightarrow$

II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}^{(x_1,\ldots,x_n,y_i)}_{\sigma^+_n}[A_j])$, y por lo tanto, para el juego $\mathbf{J}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}_{\sigma^+_n}[A_j])$.

Luego, $(s', A_j) \in D_k$. ■

Ahora definamos $(q_k)_k$ con $q_k \in D_k$ como sigue:

a) $q_1 = (s_1, A_1) \in D_1$.

b) Supongamos que $q_k = (s_k, A_k)$ ha sido definido. Sea $q_{k+1} = (s_{k+1}, A_{k+1}) \in D_{k+1}$ tal que $(s_{k+1}, A_{k+1}) \leq (s_k|k, A_k)$.

Lo que garantiza la existencia de esta sucesión "decreciente" es el hecho de que los $D_k$ son densos.

Por como está definido $D_k$, sabemos que para todo $k \geqslant 1$, $|s_k| \geqslant k$.

Por otro lado, si $(s_{k+1}, A_{k+1}) \leq (s_k|k, A_k) \Longrightarrow (s_{k+1}|k+1; A_{k+1}) \leq (s_k|k; A_k)$. En efecto, como $s_k|k$ es segmento inicial de $s_{k+1}$, al restringir $s_{k+1}$ a $s_{k+1}|k+1$ entonces $s_k|k$ sigue siendo segmento inicial de $s_{k+1}|k+1$. Se mantiene que $A_{k+1} \preccurlyeq A_k$ y también es cierto que $(s_{k+1}|k+1)\backslash(s_k|k) \in [A_k]$ pues $s_{k+1}\backslash s_k|k \in [A_k]$ y por lo tanto todos sus segmentos iniciales también están, en particular $(s_{k+1}|k+1)\backslash(s_k|k)$.

Sea

$$Y = \bigcup_{k \geq 1} s_k|k$$

Sub-lema 5.52. *Para todo $x \in span(Y)$ con $x > x_n$ y todo $Z \preccurlyeq Y$, la siguiente dicotomía es válida:*

$$[x_1,\dots,x_n,x;Z]\cap\sigma_n^-=\emptyset$$

*ó*

*II tiene una estrategia ganadora para el juego* $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\dots,x_n,x)}[Z]$

Demostración

Supongamos que $Y=(y_i)_i$.

Fijemos $x\in span(Y)=span((y_i)_i)$, $x>x_n$ y $Z\preccurlyeq Y$.

Sea $k$ el menor entero tal que $x\in span(s_k|k)$, donde $s_k|k$ es de la forma $s_k|k=(y_1,\dots,y_k)$.

Si $x\in span(s_k|k)$, entonces $x$ es combinación lineal de elementos de $s_k|k$, es decir, $x=a_1y_1+\cdots+a_ky_k$, con $a_1,\dots,a_k$ escalares.

Como $k$ es el menor entero tal que $x\in span(s_k|k)$, entonces, $a_k\neq 0$. Como $y_1<\cdots<y_k$, por corolario (5.4) entonces $\max supp(x)=\max\bigcup_i^k supp(y_i)=\max supp(y_k)$.

Por lo tanto, las sucesiones $Y\backslash(s_k|k)$ y $Y\backslash(x)$ son equivalentes.

$$Y\backslash(s_k|k)=(y_i)_{i\geq m}=Y\backslash(x)$$

donde $m$ es el menor entero tal que $\max supp(x)<\min supp(y_m)$ o lo mismo que ( $\max supp(y_k)<\min supp(y_m)$).

Se probó que si $(s_{k+1};A_{k+1})\leq(s_k|k;A_k)$ entonces, $(s_{k+1}|k+1;A_{k+1})\leq(s_k;A_k)$.

Inductivamente se obtiene, por la definición de la sucesión de $q_k\in D_k$ que

$$\cdots\leq(s_n|n;A_n)\leq\cdots\leq(s_{k+1}|k+1;A_{k+1})\leq(s_k|k;A_k)$$

$\Longrightarrow$ para todo $n>k$, se tiene que $(s_n|n;A_n)\leq(s_k|k;A_k)\quad\Longrightarrow\quad(s_n|n)\backslash(s_k|k)\in[A_k]$, es decir, $(s_n|n)\backslash(s_k|k)\preccurlyeq A_k$

$\Longrightarrow(\bigcup_{n\geqslant k}(s_n|n))\backslash(s_k|k)=Y\backslash(s_k|k)\preccurlyeq A_k$ o lo mismo que $Y\backslash(x)\preccurlyeq A_k$.

Por otro lado, recordemos que $(s_k;A_k)\in D_k$. Por definición de $D_k$ se tiene que,

II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\dots,x_n,x)}[A_k]$.

ó

$$[x_1, \ldots, x_n, x; A_k] \cap \sigma_n^- = \emptyset$$

Si II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[A_k]$, como $Z \preccurlyeq Y$ y $Y\backslash(x) \preccurlyeq A_k$ (es decir, $Y \preccurlyeq^* A_k$).

$\Longrightarrow Z \preccurlyeq^* A_k$, o lo mismo que $Z\backslash(x) \preccurlyeq A_k$, entonces, por proposición (5.23), II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[Z]$.

En otro caso, $[x_1, \ldots, x_n, x; A_k] \cap \sigma_n^- = \emptyset$.

Por proposición (5.12), $[x_1, \ldots, x_n, x; Z] = [x_1, \ldots, x_n, x; Z\backslash(x)]$. Como $Z\backslash(x) \preccurlyeq A_k$, entonces $[x_1, \ldots, x_n, x; Z] \subseteq [x_1, \ldots, x_n, x; A_k]$, por lo tanto $[x_1, \ldots, x_n, x; Z] \cap \sigma_n^- = \emptyset$. ■

Sabemos que $Y \preccurlyeq X_n$.

Sea $Z \preccurlyeq Y$, por hipótesis inductiva se tiene que $[x_1, \ldots, x_n; Z] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$.

Es decir, existe $(x_1, \ldots, x_n)^\frown Z' \in \mathbf{B_1}$, con $Z' \preccurlyeq Z$ tal que

$$(x_1, \ldots, x_n)^\frown Z' \in [x_1, \ldots, x_n; Z] \text{ y } (x_1, \ldots, x_n)^\frown Z' \in \sigma_n^-$$

Supongamos que $Z' = (z'_n)_n$, entonces $(x_1, \ldots, x_n)^\frown Z'$ es de la forma $(x_1, \ldots, x_n)^\frown (z'_n)_n$, el cual podemos reescribirlo como $(x_1, \ldots, x_n, z'_1)^\frown Z'\backslash(z'_1)$, y además, por definición, nótese que $(x_1, \ldots, x_n, z'_1)^\frown Z'\backslash(z'_1) \in [x_1, \ldots, x_n, z'_1; Z\backslash(z'_1)]$, ya que $Z'\backslash(z'_1) \preccurlyeq Z\backslash(z'_1)$, o lo mismo que, $(x_1, \ldots, x_n, z'_1)^\frown Z'\backslash(z'_1) \in [x_1, \ldots, x_n, z'_1; Z]$.

$\Longrightarrow$

$[x_1, \ldots, x_n, z_1; Z] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$.

Lo anterior podemos resumirlo en lo siguiente: Para todo $Z \preccurlyeq Y$ existe $x \in span(Z)$, con $x > x_n$ tal que $[x_1, \ldots, x_n, x; Z] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$.

Por la dicotomía (5.52) para $Y$, se tiene que para todo $Z \preccurlyeq Y$ existe $x \in span(Z)$, con $x > x_n$ tal que II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[Z]$.

Nótese que I no puede tener una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[Y]$.

En efecto, fijemos una estrategia S para I.

Sea $Z = S^*(0,0,\ldots) \in [Y]$ la sucesión de vectores bloque jugados por I siguiendo la estrategia S contra $(0,0,\ldots)$ y sea $x \in span(Z)$ tal que II tiene una estrategia para $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n,x)}[Z]$, llamémosla R.

Entonces, si II juega 0 hasta que éste pueda jugar $x$, y más tarde juega de acuerdo a R, entonces éste produce una sucesión $(x_1,\ldots,x_n,x)^\frown W \in \sigma_n^+$.

Por proposición (5.36), $\sigma_n^+$ es D-abierto. Y el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[Y]$ es análogo al juego $\mathbf{J}_\tau[Y\backslash x_n]$, donde $\tau = \{X : (x_1,\ldots,x_n)^\frown X \in \sigma_n^+\}$, el cual también es D-abierto.

Luego, por el teorema (5.35), II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1,\ldots,x_n)}[Y]$.

Pero este resultado contradice la hipótesis inductiva.

Por lo tanto, sí existen las sucesiones $(x_n)_n$, $(X_n)_n$ con las propiedades que se expusieron.

$\square$

**Demostración del Teorema (5.40):**

Fijemos $\Delta > 0$. Debemos probar que existe $Y \in \mathbf{B_1}$ tal que $[Y] \cap \sigma = \emptyset$ o II tiene una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}[Y]$.

Supongamos lo contrario, supongamos que $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1}$, es decir, para todo $Y \in \mathbf{B_1}$, entonces $[Y] \cap \sigma \neq \emptyset$, y supongamos además que II no tiene estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_\Delta}[Y]$ para todo $Y \in \mathbf{B_1}$.

Por lema (5.50), existen $(x_k)_k \in \mathbf{B_1}$ y $(X_k)_k \subseteq \mathbf{B_1}$ que satisfacen las propiedades (a) y (b) del mismo.

Probaremos que $[(x_k)_k] \cap \sigma = \emptyset$. Esto nos debe llevar a una contradicción.

Supongamos lo contrario, supongamos que $[(x_k)_k] \cap \sigma \neq \emptyset$.

Entonces existe $Y \in \mathbf{B_1}$ tal que $Y \in [(x_k)_k]$ y $Y \in \sigma = \bigcup_{s\in I} \langle s \rangle$. Luego $Y$ es de la forma $Y = s^\frown Z$ para algún $s \in I$ y $s < Z$.

Como $Y \in [(x_k)_k]$ cada elemento de $Y$ es combinación lineal finita de elementos de $(x_k)_k$, por lo tanto cada elemento de $s$ es combinación lineal finita de elementos de $(x_k)_k$, luego, existe $n$ suficientemente grande donde $s$ es una sucesión básica de bloques finita del espacio generado por $x_1,\ldots,x_n$, es decir, $s \in [x_1,\ldots,x_n]$.

Por propiedad a) $\sigma_n^-$ es grande en $[x_1, \ldots, x_n; X_n]$, es decir, para todo $X \in [X_n]$,

$$[x_1, \ldots, x_n; X] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$$

En particular, $X_n \in [X_n]$, por lo tanto,

$$[x_1, \ldots, x_n; X_n] \cap \sigma_n^- \neq \emptyset$$

Ello implica que existe $(x_1, \ldots, x_n)^\frown Z \in [x_1, \ldots, x_n; X_n]$, con $Z \in [X_n]$ y $(x_1, \ldots, x_n) < Z$, tal que $(x_1, \ldots, x_n)^\frown Z \in \sigma_n^-$.

Por definición de $\sigma_n^-$, existe $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown Z \in \sigma_0$ tal que

$$supp((x_1, \ldots, x_n)^\frown Z) = supp((\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown Z)$$

y

$$d((x_1, \ldots, x_n)^\frown Z; (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown Z) \leq \Gamma_n^-$$

Como $\sigma_0 = \bigcup_{\overline{s} \in I_0} \langle \overline{s} \rangle$, entonces existe $t \in I_0$ y $k > 0$ tal que

$$t = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_k)$$

donde $t$ es segmento inicial de $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown Z$.

Si esto no fuera cierto, entonces II tendría una estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_0}^{(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)}[X_n]$ y por lo tanto para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_n^+}^{(x_1, \ldots, x_n)}[X_n]$.

La razón es la siguiente, para que II tenga estrategia ganadora para el juego $\mathbf{J}_{\sigma_0}^{(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)}[X_n]$ se debe poder construir una sucesión básica de bloques $W \preccurlyeq X_n \backslash (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ tal que $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown W \in \sigma_0$. Para que esto último sea cierto debe existir $\overline{s} \in I_0$ tal que $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown W \in \langle \overline{s} \rangle$. Ahora bien, si $\overline{s}$ es segmento inicial de $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ se tiene que toda sucesión que comience con $\overline{s}$, en particular, $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown W$, pertenece a $\langle \overline{s} \rangle$ y por lo tanto pertenece a $\sigma_0 = \bigcup_{\overline{s} \in I_0} \langle \overline{s} \rangle$. Si $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$ es segmento inicial de $\overline{s}$, entonces $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)^\frown W$ no necesariamente pertenece a $\langle \overline{s} \rangle$. Por lo tanto, es necesario que $\overline{s}$ sea segmento inicial de $(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$.

Por lo tanto $t$ es de la forma

$$t = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_k)$$

Sea $\widetilde{s} \in [\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n]$ definido como $s \in [x_1, \ldots, x_n]$. Por proposición (5.39) $d(\widetilde{s}; s) \leq \frac{\Delta}{2}$, pero esto contradice la $\prec -$ minimalidad de t.

Luego, $[(x_k)_k] \cap \sigma = \emptyset$.

Pero esto contradice nuestra suposición inicial de que $\sigma$ es grande en $\mathbf{B_1}$.

Por lo tanto, $\sigma$ es *Débilmente Ramsey.*

# Bibliografía


[1] J. Bagaria, J. López Abad, *Weakly Ramsey Sets in Banach Spaces*, Advances in Mathematics. **160** (2001), 133-174. Citado en página(s): 2

[2] K. Hoffman, R. Kunze, *Algebra Lineal*, Editorial Prentice/Hall International, 1979. Citado en página(s): 20, 23

[3] Dugundji, James, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc; Boston, 1966.

[4] H. Elton Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[5] Lindenstrauss, Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, 1977. Citado en página(s): 44

[6] Fabian et al., *Functional Analisys and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] J. López Abad , C. Di Prisco, *Teoría de Ramsey y espacios de Banach*, XXI Escuela venezolana de matemáticas, EMALCA-Venezuela 2008, Ediciones IVIC, Caracas, 2008.

[8] B. Z. Vulikh, *Introduction to Funtional Analysis for Scientists and Technologists*, Addison-Wesley, 1963.

[9] M. Spivak, *Calculus*, editorial Reverté, Bogotá, 1978.

[10] C. Di Prisco, *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas*, Coleção CLE; v.20, Brasil, 1997.

[11] R. Bruzual, M. Domínguez, *Espacios de Banach*, guía del curso, Escuela de matemáticas Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2005.

[12] W. T. Gowers, *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies*, Annals of Mathematics. **156** (2002), 797-833. 2

[13] F. Galvin, K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's theorem*, J. Symbolic Logic. **38** (1973), 193-198. Citado en página(s): 1

[14] J. Silver, *Every analytic set is Ramsey*, J. Symbolic Logic. **35** (1970), 60-64. Citado en página(s): 1

[15] E. Ellentuck, *A new proof that analyitic sets are Ramsey*, J. Symbolic Logic. **39** (1974), 163-165. Citado en página(s): 1

[16] Odell and Th. Schlumprecht, *The distortion problem*, Acta Math. **173** (1994), 259-281. Citado en página(s): 2

[17] F. Galvin, *A generalization of Ramsey's theorem*, Notices of the Amer. Math. Soc. **15** (1968). Citado en página(s): 1

# Índice alfabético