



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

El problema de Amplitud vs Offset como un polinomio de 5to grado.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Lic. Orlando Silva** para optar al título de Licenciado en Matemática.

**Tutores: Dr. Pedro Contreras.
Dr. Jose Luis Sánchez.**

Caracas, Venezuela

Abril 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**El problema de amplitud vs offset como un polinomio de 5to grado**”, presentado por el **Lic. Orlando Silva**, titular de la Cédula de Identidad **14574299**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Pedro Contreras
Tutor

Jose Luis Sánchez
Tutor

Nelson Merentes
Jurado

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Conceptos preliminares	3
1. Bases Teóricas	3
2. Fundamentos básicos de propagación de ondas	13
3. Ecuación de la Onda	21
4. Ecuación de un medio elástico bidimensional en un medio isótropo.	23
Capítulo 2. Reflexión de una onda elastica entre un medio isótropo y el vacío	26
1. Cálculo de las condiciones de borde	26
2. Derivación del coeficiente de reflexión	30
3. Derivación del polinomio de 2do grado	32
Capítulo 3. Reflexión y Transmisión de una onda elastica entre dos medios isótropos	34
1. Cálculo de las condiciones de borde	34
2. Derivación del coeficiente de reflexión y transmisión	39
3. Derivación del polinomio de 5to grado	42
Capítulo 4. Solución numérica del polinomio para el caso de una onda $p_{\downarrow}p_{\uparrow}$	47
1. Raíces de un polinomio	47
2. Cálculo Numérico	48
3. Modelo AVO como un polinomio de quinto grado.	54
Conclusión	57
Bibliografía	59
Índice alfabético	60

Introducción

Uno de los procesos vitales de la industria petrolera es la exploración, pues de él depende el hallazgo de hidrocarburos (gaseosos y no gaseosos) en el subsuelo. La Exploración, es el primer eslabón de la cadena, lo que lo convierte en la base fundamental de la industria petrolera. Desde sus inicios hasta la actualidad se han ido desarrollando nuevas y complejas tecnologías. Sin embargo este avance, que ha permitido reducir algunos factores de riesgo, no ha logrado hallar un método que permita de manera indirecta definir la presencia de hidrocarburos. Es por ello que para comprobar la existencia de hidrocarburos se debe recurrir a la perforación de pozos exploratorios. Los métodos empleados son muy variados: desde el estudio geológico de las formaciones rocosas que están aflorando en superficie hasta la observación indirecta, a través de diversos instrumentos y técnicas de exploración.

La mayoría de estas técnicas se basan en el estudio de la propagación de ondas sísmicas, pues a través de este es posible conocer las características que presenta el subsuelo. Esto se lleva a cabo, empleando distintos métodos de prospección, basados en la propagación de ondas acústicas, elásticas y electromagnéticas, de esta manera, se pueden inferir las propiedades del interior de la tierra. Para ello, se construyen modelos que describen las propiedades intrínsecas de los materiales por las cuales está conformado el subsuelo, se simulan los datos sísmicos y se comparan con las observaciones.

Una de las técnicas que se basan en el estudio de propagación de ondas sísmicas es llamada por sus siglas en inglés. AVO(Amplitude Variation with Offset)¹ en el cual se asume que la amplitud de reflexión es función del ángulo de incidencia, R_θ y puede ser aproximada usando la ecuación de Zoeppritz, también llamada el modo inverso ²de la ecuación de Zoeppritz.

¹método de detección indirecta de hidrocarburos en el cual se compara la variación de las amplitudes de las respuestas sísmicas en función de la distancia fuente-receptor.

²El problema inverso consiste en usar el resultado real de algunas de las medidas para inferir los valores de los parámetros que caracterizan el sistema.

Este fenómeno presenta interés exploratorio cuando consideramos que la relación $\frac{v_s}{v_p}$ cambia en función del tipo de fluido presente en un yacimiento. Los cambios en los valores de amplitud en función de la distancia entre fuente y receptor, observados en los registros sísmicos de reflexión, deben entonces servir como indicador de fluido (agua, gas, petróleo) presentes en el yacimiento bajo estudio.

En el caso de este trabajo nos enfocamos en el problema de reflexión y transmisión de ondas producidas en dos medios elásticos e isótropicos con diferentes parámetros elásticos usando la técnica de AVO sin necesidad de una aproximación de la ecuación de Zoeppritz; es decir, nosotros mostraremos la sorprendente forma de invertir la ecuación usando para ello un polinomio de 5to grado y como este polinomio podría convertirse en una inversión exacta que ofrezca un procedimiento alternativo para conocer las propiedades del subsuelo.

Para la obtención del polinomio de 5to grado, fue necesario manipular a través de un conjunto de operaciones algebraicas complicadas la expresión:

$$R = \frac{A-B}{A+B}$$

Donde A y B contienen los ángulos y demás parámetros de la roca para transformarla en el polinomio:

$$P(y_1) = A_5y_1^5 + A_4y_1^4 + A_3y_1^3 + A_2y_1^2 + A_1y_1 + A_0 = 0,$$

los A_i contienen los parámetros de la roca y representan los coeficientes del polinomio. La variable desconocida y_1 viene dada por la razón:

$$y_1 = \frac{v_{s2}}{v_{p1}},$$

v_{s2} representa la velocidad de la onda transversal en el medio 2 y v_{p1} representa la velocidad de la onda compresional en el medio 1. (Paul M. Krail, the Leading Edge, October 2004, 986-988.)[1]

CAPÍTULO 1

Conceptos preliminares

1. Bases Teóricas

Las ecuaciones en derivadas parciales son de gran interés a causa de su conexión con fenómenos del mundo físico, estas deben interpretarse en el sentido de la descripción de los fenómenos de la naturaleza en términos matemáticos, es decir las ecuaciones en derivadas parciales se obtienen por aplicación de principios básicos del análisis matemático y del análisis en forma detallada de una situación física concreta. Entre las ecuaciones en derivadas parciales o también llamadas ecuaciones de la física matemática vamos a hacer énfasis en las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden y lineales.

1.1. Clasificación de las EDP de segundo orden.

DEFINICIÓN 1.1. Sea la expresión general de una Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden en dos variables, definida en un dominio Ω del plano en coordenadas cartesianas.[2]

$$(1.1) \quad \boxed{a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y)u + g(x, y) = 0}$$

donde los coeficientes $a, b, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de dos variables y continuas que no se anulan simultáneamente en Ω y d, e, f son también funciones de dos variables y continuas.

diremos que 1.1 es en Ω :

- (1) Hiperbólica si y solo si $b^2 - ac > 0$
- (2) Parabólica en si y solo si $b^2 - ac = 0$
- (3) Elíptica en si y solo si $b^2 - ac < 0$

Veremos en lo que sigue que siempre es posible reducir los coeficientes de las derivadas de segundo orden de la ecuación 1.1 a constantes muy simples mediante un cambio de coordenadas definidas por un sistema de ecuaciones de la forma:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \text{ para todo } (x, y) \in \Omega$$

Pues, usando la regla de la cadena y cambiando la notación se obtiene que las derivadas parciales respecto de x y y , están dadas por las expresiones:

$$(1.3) \quad \begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \end{cases}$$

Que al reemplazar en la ecuación 1.1 se obtiene la siguiente expresión en las coordenadas (ξ, η) :

$$(1.4) \quad Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + Du_\xi + Eu_\eta + Fu + G = 0$$

donde los coeficientes están dados por:

$$(1.5) \quad \begin{cases} A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\ B = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ D = a\xi_{xx} + b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + E\xi_y \\ E = a\eta_{xx} + b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + E\eta_y \\ F = f \\ G = g \end{cases}$$

Luego con un calculo simple se verifica la siguiente identidad:

$$B^2 - AC \equiv (b^2 - ac)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2 \equiv (b^2 - ac) \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^2$$

La identidad anterior, demuestra que el signo de la expresión $b^2 - ac$ es invariante bajo cambio de coordenadas pues:

$$\text{Signo}(B^2 - AC) = \text{Signo}(b^2 - ac) \text{ si y solo si } \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^2 \neq 0$$

Ahora bien la ecuación 1.4 la podemos transformar en el tipo canónico mas simple que es propio para cada tipo de la ecuación como lo indica la definición 1.1, es decir.

(1) Si la ecuación 1.4 es de tipo hiperbólico ($\Delta > 0$), entonces ésta se transforma en la forma:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

(2) Si la ecuación 1.4 es de tipo parabólico ($\Delta = 0$), entonces ésta se transforma en la forma:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$

(3) Si la ecuación 1.4 es de tipo elíptico ($\Delta < 0$), entonces ésta se transforma en la forma:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$

1.2. Condiciones de contorno o frontera. Condiciones iniciales. Dada una EDP de la forma:

$$(1.6) \quad F(x, D^\alpha u) = 0$$

Donde F es una función que depende de $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, ($n > 1$) y de un número finito de derivadas $D^\alpha u$ [3]

DEFINICIÓN 1.2 (Dominios. Fronteras). En general cuando consideramos la EDP 1.6, la función incógnita $u = u(x)$ se supone definida sobre un conjunto dado Ω de \mathbb{R}^n . Supondremos siempre que Ω satisface las dos condiciones siguientes:

- (1) Ω es un conjunto abierto, es decir, para todo punto $a \in \Omega$ existe un radio $r > 0$ tal que todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a a es inferior a r pertenece a Ω . ($d(x, a) < r$) $\in \Omega$.
- (2) Ω es conexo, es decir, no es posible encontrar dos conjuntos abiertos no vacíos $\Omega_{1,2}$, tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

En tal caso diremos que Ω es un dominio de \mathbb{R}^n . La frontera $S(\Omega)$ es el conjunto formado por los puntos $a \in \mathbb{R}^n$ tales que para todo radio $r > 0$, existen puntos x , tanto en $x \in \Omega$ como fuera ($x \notin \Omega$, tales que $d(x, a) < r$). Obviamente la propiedad 1 significa que no tiene puntos en común con su frontera $S(\Omega)$. En cuanto a la propiedad 2, podemos interpretarla como la prohibición de que Ω pueda dividirse en dos sectores separados. El conjunto union $\bar{\Omega} = \Omega \cup S(\Omega)$, se denomina el cierre de Ω .

DEFINICIÓN 1.3 (Condiciones de contorno o de fronteras). Dada la EDP 1.6 sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Normalmente se pide encontrar una función $u = u(x)$ que satisfice la EDP en todo punto de Ω , además tal función debe satisfacer una serie de condiciones:

$$(1.7) \quad f_i(x, D^\alpha u) = 0, \quad x \in S_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

donde los símbolos S_i denotan partes de la frontera $S(\Omega)$ y las f_i son funciones dependientes de las variables x_i , y de un numero finito de derivadas $D^\alpha u$ con $|\alpha| \geq 0$. Condiciones de esta clase se denominan **condiciones de contorno**

Algunas de las condiciones de contorno mas simples sobre una superficie $S \in S(\Omega)$ son:

(1) Condición de Dirichlet

$$(1.8) \quad u|_s = g$$

(2) Condición de Neumann

$$(1.9) \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_s = g$$

Siendo $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \nabla u = n_1 u_x + n_2 u_y$, donde \mathbf{n} es el campo de vectores normales a la superficie S

(3) Condición mixta

$$(1.10) \quad \left(au + b \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) |_s = g$$

aquí a,b denotan funciones dadas.

DEFINICIÓN 1.4 (Condiciones iniciales). Otro tipo de condiciones que se suelen exigir a las soluciones de una EDP son las denominadas *condiciones iniciales* respecto de una de las variables independientes que denotaremos t . Normalmente son un conjunto de condiciones de la forma:

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u|_{t=t_0} = f_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = f_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}|_{t=t_0} = f_{r-1} \end{array} \right.$$

donde $r \geq 0$ y las funciones f_i dependen del resto de variables independientes. En general, las condiciones iniciales no son condiciones de contorno ya que también se consideran situaciones en las que el conjunto determinado por la ecuación $t = t_0$ puede estar en el interior de Ω .

1.3. Existencia local de soluciones de EDP. Dada una EDP 1.6 sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la primera cuestión natural a considerar es la existencia de soluciones $u = u(x)$. Al igual que con las ecuaciones diferenciales ordinarias debemos intuir que los resultados generales que podemos esperar han de ser locales. Es decir, resultados asegurando la existencia de soluciones en algún abierto alrededor de cada punto de Ω .

Un aspecto importante a considerar es el tipo de soluciones que buscamos. Es decir, las propiedades que exigimos a $u = u(x)$. Nuestra decisión en este aspecto esta condicionada por las propiedades de la propia función $F = F(x, D^\alpha u)$ que define la EDP. En este sentido vamos a concentrarnos ahora en una clase de problemas en que es posible deducir un importante resultado sobre la existencia de soluciones analíticas. En este punto es importante comentar la noción de función analítica.

DEFINICIÓN 1.5 (Funciones Analíticas). El espacio $A(\Omega)$ de **funciones analíticas** en un abierto Ω esta formado por las funciones $f = f(x)$ tales que para todo punto $a \in \Omega$ existe un radio $r > 0$ y un desarrollo en serie múltiple de potencias de f .

$$(1.12) \quad f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x-a)^\alpha, \quad (x-a)^\alpha = (x_0 - a_0)^\alpha (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - a_n)^{\alpha_{n-1}},$$

convergente en la bola $|x - a| < r$.

Las propiedades de las funciones analíticas que mas nos interesan ahora son:

- (1) Toda función analítica en Ω es también una función diferenciable en Ω . Además sus desarrollos en serie de potencias alrededor de cualquier $a \in \Omega$ coincide con sus

desarrollos de Taylor. Es decir

$$(1.13) \quad f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - a)^\alpha, \quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a).$$

(2) Si $f, g \in A(\Omega)$ entonces las funciones

- $\lambda f(x) + \mu g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)}$, ($g(x) \neq 0$),

también pertenecen a $A(\Omega) \forall \lambda, \mu \in \mathcal{C}$

(3) La composición de dos funciones analíticas es también una función analítica.

Pasemos a introducir la noción de EDP en forma normal o de Kovalevskaya.

DEFINICIÓN 1.6. Sea la EDP 1.6 con variables independientes $x = (x_0 = t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Decimos que la EDP posee forma normal (o de Kovalevskaya) de orden $r > 0$ respecto de la variable t si puede escribirse como:

$$(1.14) \quad \frac{\partial^r u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), \quad r > 0,$$

siendo G una función que depende polinómicamente de un número finito de derivadas:

$$(1.15) \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}},$$

pero debe ser independiente de las siguientes

$$(1.16) \quad \frac{\partial^r u}{\partial t^r}; \quad D^\alpha u, \quad \text{con } |\alpha| > r.$$

Es decir, para analizar si una EDP posee la forma normal respecto de una de sus variables independientes t , lo primero que hay que hacer es despejar la derivada respecto de t de orden más alto y después comprobar que en el segundo miembro no aparezcan derivadas de orden estrictamente superior.

DEFINICIÓN 1.7. Dada una EDP normal de orden r respecto de una variable t .

$$(1.17) \quad \frac{\partial^r u}{\partial t^r} = G(x, D^\alpha u), \quad x \in \Omega,$$

definida sobre un dominio $\Omega = I \times \Lambda$, siendo I un intervalo abierto de \mathbb{R} y Λ un abierto de \mathbb{R}^{n-1} , un problema de Cauchy con valores iniciales consiste en determinar una solución

$u = u(x)$ de (1.17) que satisfaga las r condiciones iniciales.

$$(1.18) \quad \begin{cases} u(t_0, \mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \\ \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u}{\partial t^{r-1}}(t_0, \mathbf{x}) = f_{r-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ y $f_i = f_i(\mathbf{x})$ son una serie de funciones dadas, que reciben el nombre de valores iniciales del problema.

TEOREMA 1.8 (Cauchy-Kovaleskaya). *sea un problema normal de Cauchy con valores iniciales (1.17)-(1.18) para una EDP normal y $x_0 = (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ un punto de su dominio tal que:*

- (1) *Condición de analiticidad de la EDP.*

Como función de x la función $G(x, D^\alpha u)$ del segundo miembro de (1.17) es analítica en x_0 .

- (2) *Condición de analiticidad de los valores iniciales.*

Los valores iniciales $f_i(x)$, con $(i = 0, \dots, r - 1)$ son funciones analíticas en \mathbf{x}_0 . Entonces existe una función $u = u(x)$ definida sobre un abierto $\Omega_0 \subset \Omega$ que contiene a x_0 tal que:

- *la función $u = u(x)$ satisface la EDP en Ω_0 y las condiciones iniciales en todo punto $(t_0, \mathbf{x}) \in \Omega_0$.*
- *La función $u = u(x)$ es la única función analítica en Ω_0 que satisface tales propiedades.*

El teorema anterior garantiza la existencia y unicidad locales de una solución analítica de un problema de Cauchy con datos iniciales, siempre que se verifique que la EDP es normal y que tanto la EDP como los datos iniciales dependan analíticamente de las variables independientes.

1.4. Unicidad de soluciones. En la sección anterior hemos construido soluciones en el marco de problemas de cauchy con datos y coeficientes analíticos y siempre que la superficie donde se dan los datos sea analítica y no característica. Sin embargo, el resultado de unicidad que el teorema (1.8) proporciona no siempre es de aplicación.

Conviene entonces desarrollar herramientas adicionales que permitan abordar el problema de la unicidad de manera más sistemática. Una de estas herramientas esta dado por el siguiente teorema:

TEOREMA 1.9 (Teorema de Holmgren). *En el marco del Teorema (1.8), es decir, para ecuaciones con coeficientes y datos analíticos sobre una superficie analítica y no característica la solución proporcionada por el teorema (1.8) es la única no sólo en la clase de funciones analíticas sino que es única en toda la clase de funciones localmente integrables.*

El teorema de Holmgren es válido en el contexto del teorema (1.8) siendo un corolario de este último ¹.

1.5. Solución de D'Alembert. Veamos el siguiente ejercicio interesante.

Encontrar la solución de la ecuación de onda unidimensional:

$$(1.19) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $k > 0$ es una constante, tal que satisface las condiciones iniciales de Cauchy:

$$(1.20) \quad \begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad \text{con } f, g \in \mathcal{C}^1$$

Solución: Si el coeficiente k es distinto de uno, ($k \neq 1$) en la ecuación de onda, entonces dicha ecuación no esta escrita en su forma canónica, por otro lado, tenemos que el discriminante $\Delta(x, y) = b^2 - ac = 0^2 - k^2(-1) = k^2 > 0$ y en consecuencia la ecuación de onda es de tipo hiperbólica.

Sean las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(1.21) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1}{k} \\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

Entonces las respectivas soluciones generales son:

¹El teorema de Holmgren es más general pues garantiza la unicidad de las soluciones generalizadas en el sentido de las características

$$(1.22) \quad \begin{cases} x - ky = c_1 \\ x + ky = c_2, \end{cases}$$

Donde c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Luego existe el cambio de coordenadas:

$$(1.23) \quad \begin{cases} \xi = x - ky \\ \eta = x + ky, \end{cases}$$

Donde la ecuación de ondas es de forma hiperbólica. Ahora bien, usando el cambio de coordenadas (1.3) y usando las ecuaciones (1.4 y 1.5) convenientemente se obtiene la forma canónica hiperbólica:

$$(1.24) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Toda función que depende sólo de una de las variables es anulada por la derivada mixta quien se supone de clase \mathcal{C}^2 . Entonces:

$$(1.25) \quad u = \phi(\xi) + \psi(\eta),$$

con $\phi, \psi \in \mathcal{C}^2$ funciones arbitrarias, son soluciones de la forma hiperbólica. en consecuencia, regresando a las variables originales por el cambio de coordenadas, tenemos:

$$(1.26) \quad u(x, y) = \phi(x - ky) + \psi(x + ky)$$

son soluciones arbitrarias de la ecuación de onda.

Busquemos ahora las funciones ϕ, ψ tales que las soluciones satisfacen las condiciones iniciales de Cauchy, es decir, las soluciones satisfacen las condiciones 1.20, entonces tomando $y = 0$ en 1.26 se tiene que ϕ, ψ , satisfacen el sistema:

$$(1.27) \quad \begin{cases} f(x) = \phi(x) + \psi(x) \\ g(x) = -k\phi'(x) + k\psi'(x) \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación del sistema anterior respecto de x se tiene que las derivadas de ϕ, ψ , satisfacen el sistema:

$$(1.28) \quad \begin{cases} \phi'(x) + \psi'(x) = f'(x) \\ -k\phi'(x) + k\psi'(x) = g(x) \end{cases}$$

Despejando del sistema las derivadas de ϕ, ψ , tenemos:

$$(1.29) \quad \begin{cases} \phi'(x) = \frac{kf'(x) - g(x)}{2k} \\ \psi'(x) = \frac{kf'(x) + g(x)}{2k} \end{cases}$$

Integrando respecto de x se tienen las identidades:

$$(1.30) \quad \begin{cases} \phi(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi \\ \psi(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Reemplazando $x \rightarrow x - ky$ y $x \rightarrow x + ky$ en la primera y segunda identidad respectivamente se obtiene:

$$(1.31) \quad \begin{cases} \phi(x - ky) = \frac{f(x - ky)}{2} - \frac{1}{2k} \int_0^{x - ky} g(\xi) d\xi \\ \psi(x + ky) = \frac{f(x + ky)}{2} + \frac{1}{2k} \int_0^{x + ky} g(\xi) d\xi \end{cases}$$

Finalmente, sumando las dos identidades anteriores encontramos la solución llamada de D'Alambert del problema de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales de Cauchy.

$$(1.32) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} [f(x + ky) + f(x - ky)] + \frac{1}{2k} \int_{x - ky}^{x + ky} g(\xi) d\xi$$

2. Fundamentos básicos de propagación de ondas

Los medios en los cuales se propagan perturbaciones que implican movimiento de partículas pueden clasificarse de forma muy general en dos grandes tipos: Los medios acústicos (líquidos) y los medios elásticos (sólidos). En medios acústicos se puede propagar un solo tipo de onda, la onda compresional, la cual implica movimientos hacia adelante y hacia atrás de las partículas Fig1.2.

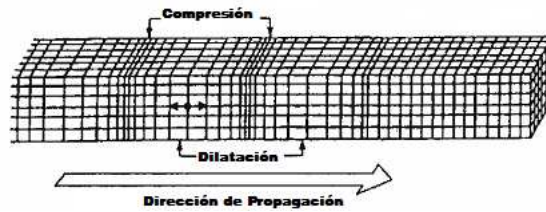


FIGURA 1.1. Movimiento de ondas compresional

La ley que gobierna dicha propagación esta dada por la siguiente ecuación.

$$(1.33) \quad \sigma_{ij} = -P \delta_{ij}.$$

P es la presión del medio (generalmente dada en Barios), σ_{ij} es el tensor de esfuerzos y δ_{ij} es el símbolo de Kronecker

La ecuación que gobierna la propagación de las ondas acústicas puede ser la ecuación elástica si el medio es solido(ecuación tipo hiperbólico)[4] o la ecuación de Navies Stokes(ecuación no lineal) si el medio es liquido [5]

En medios elásticos se propagan dos tipos de ondas, la onda compresional (figura 2) y la onda transversal, que implica movimientos perpendiculares de las partículas a la dirección de propagación (dando origen al concepto de polarización) ² de la perturbación Fig1.3.

La ley que gobierna este tipo de movimiento es la ley de Hooke [4].

² La polarización elástica es un fenómeno que puede producirse en las ondas elásticas debido al cual el campo elástico oscila solo en un plano determinado denominado plano de polarización, este plano puede definirse por tres vectores, uno de ellos paralelo a la dirección de propagación de la onda y los otros dos perpendiculares a esa misma dirección los cuales indican la dirección del campo elástico

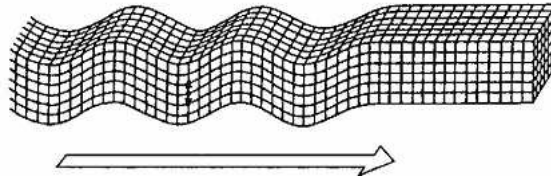


FIGURA 1.2. Movimiento de ondas transversales

$$(1.34) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$$

- C_{ijkl} es un tensor ³ de rigidez de cuarto orden que representa a los módulos elásticos o constantes elásticas del material.
- e_{kl} es un tensor simétrico de segundo orden y representa el tensor de deformaciones.

En general los medios elásticos se dividen en:

(1) Medios elásticos isótropicos donde existen dos constantes elásticas a considerar:

•

$$\lambda = \rho (v_p^2 - 2v_s^2)$$

la cual caracteriza la dilatación o compresión elástica del cuerpo

•

$$\mu = \rho v_s^2$$

que caracteriza la torsión en el régimen elástico del material

La ecuación que describe un medio elástico isótropico viene dado por:

$$(1.35) \quad \sigma_{ij} = \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

(2) Medios elásticos anisótropicos donde varían las propiedades físicas de un cuerpo con respecto al cambio de la dirección y polarización en la que se realiza la medición, las componentes de esfuerzo y deformación se encuentran relacionados por medio del tensor de Rigidez C_{ijkl} que posee 81 componentes^(3⁴), pero debido a la simetría

³un tensor es una función multilineal que generaliza los conceptos de escalar, vector y matriz de una manera que sea independiente de cualquier sistema de coordenadas elegido

intrínseca que existe entre los tensores de esfuerzos y deformación solamente 21 coeficientes elásticos en C_{ijkl} son independientes. ($C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$).

2.1. Ley de Snell. Consideremos la reflexión y refracción de una onda elástica plana y monocromática ⁴ en la superficie de separación entre dos medios elásticos diferentes. En este caso, debe tenerse presente que, en general, durante la reflexión o refracción se altera la naturaleza de la onda. Si una onda transversal pura o longitudinal pura incide sobre una superficie de separación, el resultado será una onda que contiene una componente longitudinal y una componente transversal.

Las relaciones que dan las direcciones de las ondas reflejadas y transmitidas pueden obtenerse inmediatamente de la constancia de la frecuencia y de los componentes tangenciales del vector de onda.[4]

La ley de Snell proporciona información sobre las trayectorias de los rayos sísmicos ⁵, los tiempos de llegada y la posición de los refractores. Fig 1.4

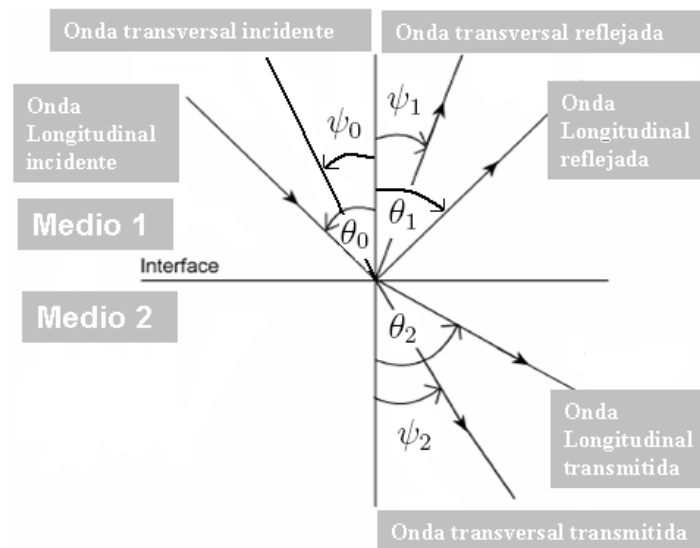


FIGURA 1.3. ley de Snell

⁴ Es una onda sinusoidal de frecuencia ω constante y de duración infinita

⁵ Llamamos rayo sísmico a la línea perpendicular a la superficie de onda a lo largo de la cual se desplaza la energía.

$$(1.36) \quad \frac{\sin \theta_1}{v_{p1}} = \frac{\sin \theta_2}{v_{p2}} = \frac{\sin \psi_1}{v_{s1}} = \frac{\sin \psi_2}{v_{s2}} = p$$

Donde p es una constante llamada parametro de rayo

2.2. Reflexión y Refracción Sísmica. La sísmica de reflexión nace de los primeros trabajos realizados por Reginald Fessenden en 1913, con el fin de detectar icebergs. Solo en 1927 cuando el método de reflexión se convierte en una técnica comercial de exploración geofísica. En 1919, Ludger Mindtrop aplicó la patente sobre el método de refracción y ya hacia 1930 decenas de domos salinos superficiales habían sido descubiertos mediante esta técnica de exploración.

Rieber(1939) introduce la idea del procesamiento de datos sísmicos usando una grabación de densidad variable y foto celdas para la reproducción de las trazas sísmicas. Sin embargo, es en 1953, cuando las cintas magnéticas se hicieron comercialmente disponibles, que se dio el paso al inicio del procesamiento de datos; difundándose rápidamente en los años siguientes. Hasta este momento no se empleaba la geometría de punto de reflectores comunes (CMP)⁶, la cual es usada por primera vez en 1956.

A finales de los 70, coincidiendo con el auge informático y el desarrollo tecnológico, los nuevos soportes digitales y la nueva instrumentación representaron otro cambio significativo en el campo de la sísmica. Desde entonces se trabaja la mejora de las técnicas de adquisición y procesamiento de datos. En la actualidad, toda la adquisición se realiza en formato digital y los datos son procesados antes de su interpretación.

Cuando una onda sísmica encuentra un cambio en las propiedades elásticas del material, como es el caso de una interfase entre dos capas geológicas; parte de la energía incidente se refleja (ondas reflejadas), y el resto se transmite al otro medio (ondas transmitidas) con cambios en la dirección de propagación, en la velocidad y en el modo de vibración. (ver figura 2.1)

Las leyes de reflexión y refracción se derivan por el principio de Huygens ⁷ [6], cuando se considera un frente de onda plano que incide sobre una interfase plana y lisa. Ambas leyes

⁶La posición media entre las fuentes y los reflectores con un punto común en profundidad se conoce como punto medio común (PMC) o por sus siglas en Inglés (CMP)

⁷El principio de Huygens es un método de análisis aplicado a los problemas de ondas en el que se afirma que todo punto de un frente de onda inicial puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias

se combinan en un único planteamiento: en una interfase el parámetro de rayo debe tener el mismo valor para las ondas incidentes, reflejadas y transmitidas. Si el medio consta de un cierto número de capas paralelas, la ley de Snell (1.36) establece que el parámetro de rayo tiene que ser el mismo para todos los rayos reflejados y transmitidos resultantes de un rayo inicial dado.

2.3. Ecuación de Zoeppritz. La amplitud de reflexión versus el ángulo de reflexión en medio de dos rocas elásticas es dado por la ecuación de Zoeppritz[7](1919).

La ecuación de Zoeppritz predice la amplitud de la reflexión, dado el ángulo, las velocidades de las ondas y la densidad de la roca. Un resumen de la ecuación de Zoeppritz está descrito por Aki y Richards [8](1980 “Quantitative seismology”), en donde utilizaron la continuidad de desplazamientos y continuidad de los esfuerzos en la interface de reflexión como condiciones de borde para resolver las ecuaciones de coeficientes de reflexión y transmisión como función del ángulo de incidencia, apoyándose en los parámetros de los medios elásticos (densidades, tipos de módulos y relación de Poisson), obteniendo como resultados ecuaciones notoriamente complejas[9]

Estas ecuaciones representan la solución exacta al problema de reflexión y refracción en la interface entre dos medios elásticos e isotrópicos. Sin embargo estas ecuaciones son difíciles de invertir para obtener los valores de los parámetros elásticos (v_p , v_s y densidades) involucrados en el proceso. A continuación se presentan algunos autores que han estudiado las ecuaciones originales de Zoeppritz . Shuey[10], Aki and Richards [8], Hilterman[11], Pan y Garner[12], Bortfeld[13], etc.

Luego de realizar ciertas aproximaciones y suposiciones, estos autores han propuesto soluciones aproximadas para el caso de medios isotrópicos, veamos algunas de ellas.

2.4. Algunas Aproximaciones de la Ecuación de Zoeppritz. Entre las aproximaciones más usadas, encontramos:

- Aproximación de Shuey[10].

Shuey propone unas ecuaciones que aproximan los resultados obtenidos aplicando las ecuaciones originales de Zoeppritz bajo las siguientes suposiciones:

que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden

- (1) Los cambios porcentuales en las propiedades elásticas de las rocas son pequeños. esto viene dado por la condición de que R_0 , el coeficiente de reflexión para incidencia normal, sea menor que 0,2.
- (2) Los ángulos de reflexión deben ser menores de 80 grados, para el caso de una disminución de velocidad, y menor que el ángulo crítico -10 grados, para el caso de un aumento de velocidad.

Bajo estas suposiciones, las ecuaciones se reducen a:

$$(1.37) \quad R_\theta = R_0 + [A_0 R_0 + \frac{\Delta\sigma}{(1-\sigma)^2}] \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{\Delta v_p}{v_p (\tan^2 \theta - \sin^2 \theta)},$$

Donde R_0 , es la amplitud de reflexión para incidencia normal ($\theta = 0$)

$$(1.38) \quad A_0 = B - 2(1+B) \frac{1-2\sigma}{1-\sigma},$$

$$(1.39) \quad B = \frac{\frac{\Delta v_p}{v_p}}{\frac{\Delta v_p}{v_p} + \frac{\Delta \rho}{\rho}},$$

Las ondas incidentes y reflejadas están relacionadas con el medio 1 y las ondas transmitidas con el medio 2.

Las velocidades y densidades vienen dadas por:

$$(1.40) \quad \begin{cases} v_p = \left(\frac{v_{p2} + v_{p1}}{2}\right), & \Delta v_p = (v_{p2} - v_{p1}), \\ v_s = \left(\frac{v_{s2} + v_{s1}}{2}\right), & \Delta v_s = (v_{s2} - v_{s1}), \\ \rho = \left(\frac{\rho_2 + \rho_1}{2}\right), & \Delta \rho = (\rho_2 - \rho_1), \end{cases}$$

El ángulo θ viene dado por el promedio entre los ángulos de incidencia y transmisión.

$$(1.41) \quad \theta = \frac{(\theta_2 + \theta_1)}{2},$$

Estos ángulos están relacionados por la ley de Snell y el modulo o radio de Poisson viene dado por la formula:

$$(1.42) \quad \Delta\sigma = (\sigma_2 - \sigma_1); \quad \sigma = \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right),$$

- Aproximación de Pan y Gardner[12]

Estos autores, partieron de las ecuaciones simplificadas de Shuey, e introdujeron los módulos elásticos de ondas P (M) y de rigidez(μ), simplificaron aun mas las ecuaciones originales de Zoeppritz a la forma:

$$(1.43) \quad R(i) \cos^2 i = \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta M}{M}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} + 4\frac{\Delta\mu}{M}\right) \sin^2 i + 2\left(\frac{\Delta\mu}{M}\right) \sin^4 i,$$

Donde, si se toma, $y = R \cos^2 i$, $x = \sin^2 i$

Podemos escribir una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$, la cual es una ecuación que describe una parábola y por consiguiente permite hallar de manera mas fácil su comportamiento, así como sus raíces.

- Aproximación de Hilterman[11]

Fred Hilterman, presenta una aproximación mucho mas simplificada que las dos anteriores. Las suposiciones hechas por Hilterman son:

- (1) ángulos de incidencia menores que 30 grados.
- (2) coeficiente de reflexión para incidencia normal menores de 0.15.
- (3) una relación $\frac{v_p}{v_s}$ del orden de 2.0

Para este caso, las ecuaciones se representan como una simple relación lineal:

$$(1.44) \quad R_\theta = R(0) \cos^2 \theta + 2,25\Delta\sigma^2\theta.$$

Esta ecuación del tipo $y = a + bx$, es fácilmente invertida para obtener $a = R(0)$ que es el coeficiente de incidencia normal, y $b = \Delta\sigma$ que representa el contraste de los módulos de Poisson.

2.5. Amplitude Variation with Offset(AVO). La técnica de amplitud versus distancia (AVO) es una herramienta geofísica que utiliza los datos de la onda compresional antes del apilamiento, es decir, antes de apilar las trazas y se basa en el hecho de que la amplitud de la señal sísmica reflejada varia con la distancia entre la fuente y el receptor y,

bajo ciertas condiciones, esta variación es asociada con la presencia de hidrocarburos y/o agua.[15]

Estas variaciones dependerán de parámetros que se encuentran directamente asociados con las propiedades del objetivo; como son su litología ⁸y el tipo de fluido presente.(ver figura 1.5)

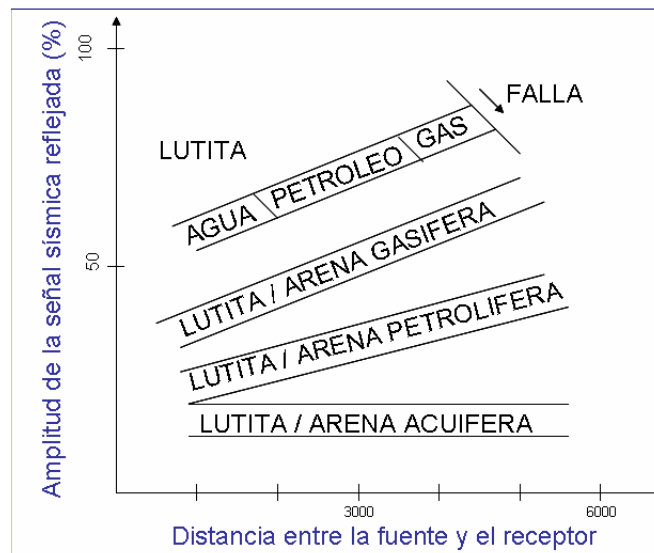


FIGURA 1.4. Modelaje directo AVO

La comprensión del fenómeno de variación de la amplitud en función del ángulo de incidencia de las ondas reflejadas en una interfase entre dos medios elásticos, comienza con el entendimiento del proceso de reflexión de dicha interfase. considerando dos medios sólidos, isótropos y homogéneos en contacto por medio de una interfase en la cual incide una onda plana compresional, la partición de energía se observa en la (figura 1.4).

El coeficiente de reflexión como función del ángulo de incidencia $R_{pp}(\Theta)$ se define como la razón entre la amplitud de la onda P reflejada y la amplitud de la onda P incidente. La variación del coeficiente de reflexión con el ángulo de incidencia (distancia fuente- receptor) es la base fundamental del análisis AVO y esta descrito matemáticamente por las ecuaciones de Zoeppritz. Estas ecuaciones permiten derivar las amplitudes exactas de onda P en función del ángulo de incidencia. Sin embargo, son difíciles de invertir para obtener los valores de los

⁸La litología es la parte de la geología que trata de las rocas, especialmente de su porosidad, permeabilidad y del tamaño de su grano, tamaño de las partículas y de sus características físicas y químicas

parámetros elásticos y a través de ellas no es trivial interpretar como las amplitudes están relacionadas con los diversos parámetros elásticos.[1][4][8]

3. Ecuación de la Onda

3.1. Ecuaciones de Movimiento. Si una perturbación pasa a través de un cuerpo, el desplazamiento de un punto $A(x_1, x_2, x_3)$ en cualquier tiempo t , estará especificado por el vector $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$. este vector, **u**, se denomina desplazamiento (ver figura 1.6).

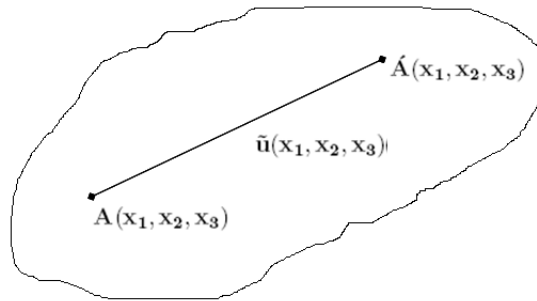


FIGURA 1.5. Vector Desplazamiento

Ahora bien, si partimos de la segunda ley de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$, o en su forma integral:

$$(1.45) \quad \iiint_V \vec{F}_i dV + \iint_S \vec{\sigma}_i d\sigma = \iiint_V \rho \ddot{u}_i dV$$

y utilizando el teorema de Gauus,

$$(1.46) \quad \iint_S \vec{\sigma}_i d\sigma = \iiint_V \vec{\sigma}_{ij,j} dV$$

de tal manera que nos quedaría que:

$$(1.47) \quad \iiint_V (\vec{F}_i + \vec{\sigma}_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i) dV = 0$$

Lo que al final nos da la ecuación de movimiento:

$$(1.48) \quad F_i + \sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i = 0$$

Luego, usando la ecuación 1.35 que representa la relación esfuerzo-deformación para medios isotrópicos y sustituyéndola en 1.48 que representa la ecuación de movimiento, obtenemos:

$$(1.49) \quad F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}) - \rho \ddot{u}_{ij} = 0$$

$$(1.50) \quad F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} u_{ll} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} u_{ij} - \rho \ddot{u}_{ij} = 0$$

Luego, usando que $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right)$ entonces:

$$(1.51) \quad F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} u_{ll} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right) \right] - \rho \ddot{u}_i = 0$$

$$(1.52) \quad F_i + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} u_{ll} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_i - \rho \ddot{u}_i = 0$$

por otro lado $u_{ll} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} u_l + \frac{\partial}{\partial x_l} u_l \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} u_l = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$, lo que implica que:

$$(1.53) \quad F_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} u_{ll} + \mu \nabla^2 u_i - \rho \ddot{u}_i = 0$$

Que en forma vectorial, y asumiendo que las fuerzas externas son cero, es decir, descartando fuentes sísmicas ($F_i = 0$). Entonces podemos escribir la ecuación de ondas de la siguiente manera:

$$(1.54) \quad \boxed{(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} u_{ll} + \mu \nabla^2 u_i = \rho \ddot{u}_i}$$

Ahora bien, nuestro interés es conocer el desplazamiento en todos los puntos $u_i = (u_x, u_y, u_z)$, por lo que es conveniente escribir la ecuación de manera de obtener u_i directamente. Para ello vamos a enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 1.10 (Helmholtz). *Cualquier vector puede escribirse en términos de un escalar Θ y otro vector arbitrario Ψ de la siguiente manera:*

$$\vec{u} = \text{div } \Theta - \text{rot } \vec{\Psi}$$

donde:

$$(1.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \Theta = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right), \\ \operatorname{rot} \vec{\Psi} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \end{vmatrix}, \end{array} \right.$$

Usando el teorema 1.10 y las ecuaciones 1.55, podemos escribir los desplazamientos u_i en términos de los potenciales de la siguiente manera:

$$(1.56) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right), \\ u_y = \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right), \\ u_z = \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

Donde Θ (*escalar*) representa el potencial de desplazamiento dilatacional o longitudinal y $\vec{\Psi}$ (*vector*) representa el potencial de desplazamiento rotacional o torsional.[15]

4. Ecuación de un medio elástico bidimensional en un medio isótropo.

Partamos de la ecuación de onda elástica en forma tensorial; para un cuerpo sólido e isótropo[4].

$$(1.57) \quad \boxed{\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}$$

luego, al expandir en (x, y, z) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(1.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \ddot{u}_x = \frac{\partial \sigma_{xk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{u}_y = \frac{\partial \sigma_{yk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \end{array} \right.$$

Por otro lado, usando la ecuación 1.35 obtenemos:

$$(1.59) \quad \begin{cases} \sigma_{xx} = 2u_{xx} + \lambda u_{ll} \delta_{xx}, & \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu u_{xy}, \\ \sigma_{yy} = 2u_{yy} + \lambda u_{ll} \delta_{yy}, & \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu u_{xz}, \\ \sigma_{zz} = 2u_{zz} + \lambda u_{ll} \delta_{zz}, & \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu u_{yz}, \end{cases}$$

Que al sustituir en las ecuaciones 1.58 se obtienen:

$$(1.60) \quad \rho \ddot{u}_x = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right)$$

análogamente.

$$(1.61) \quad \rho \ddot{u}_y = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right)$$

$$(1.62) \quad \rho \ddot{u}_z = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} \right)$$

Lo que implica:

$$(1.63) \quad \begin{cases} \ddot{u}_x = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\lambda+\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \\ \ddot{u}_y = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\lambda+\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \\ \ddot{u}_z = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\lambda+\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial x} \right) \end{cases}$$

Ahora bien, usando las ecuaciones 1.56 solo en términos de los potenciales de desplazamiento longitudinal.

$$(1.64) \quad u_x = \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

Y sustituyendo estos en \ddot{u}_x de las ecuaciones 1.63 obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ddot{\Theta}) = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x} (\Theta) + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \right)$$

Luego, sabemos que $\lambda = \rho (v_p^2 - 2v_s^2)$ y $\mu = \rho v_s^2$ entonces despejando en función de las velocidades longitudinales y transversales obtenemos:

$v_p^2 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)$ que representa la velocidad longitudinal o velocidad de la onda P y $v_s^2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)$ representa la velocidad transversal o velocidad de la onda S que al sustituir y simplificar en la ecuación anterior obtenemos la siguiente ecuación de onda longitudinal que se propaga con velocidad v_p . [4][14]

$$(1.65) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \Theta}$$

Cualquier función de $(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$, es decir, $f(\vec{k} \vec{r} - \omega t)$, es una solución, siempre y cuando f y sus primeras dos derivadas no tengan discontinuidades (solución de D'Alembert).

Así pues, la expresión:

$$(1.66) \quad \Theta(x, t) = A e^{i(\vec{k} \vec{r} - v_p t)}$$

Describe una onda sinusoidal plana y longitudinal en el espacio tridimensional.

Análogamente, si tomamos la ecuación 1.56 solo en términos de los potenciales de desplazamiento transversal.

$$(1.67) \quad \mathbf{u}_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \mathbf{u}_y = \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \mathbf{u}_z = \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

Para así, obtener la ecuación de onda transversal que se propaga con velocidad v_s [4][14]

$$(1.68) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \Psi}$$

Y la Onda sinusoidal plana y transversal viene dada por la expresión:

$$(1.69) \quad \Psi(x, t) = C e^{i(\vec{k} \vec{r} - v_s t)}$$

En conclusión, podemos decir que los potenciales Θ y Ψ pueden ser usados para separar la ecuación de ondas en términos de cada una de las velocidades de propagación y así hacerla mas simple.

Reflexión de una onda elástica entre un medio isótropo y el vacío

1. Cálculo de las condiciones de borde

En esta sección estudiaré el efecto del tipo de condición de borde entre un medio isótropo y el vacío que están a lo largo del plano $z = 0$. considerando para ello el caso de una onda plana propagándose a través de una interfase, en el plano xz .

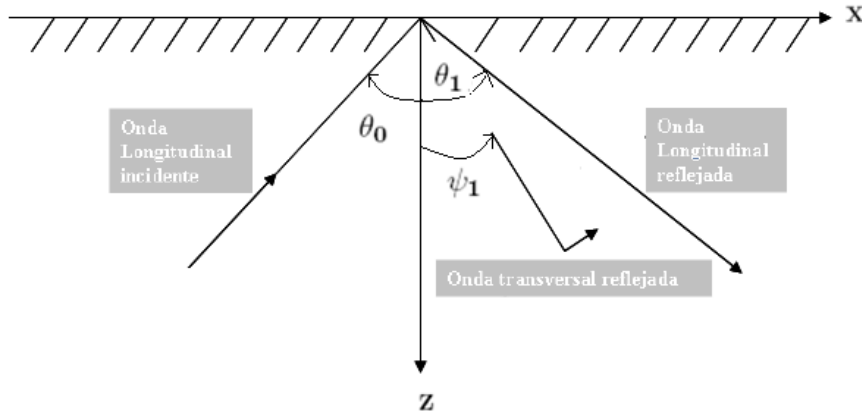


FIGURA 2.1. Onda plana propagándose

La primera condición de borde tiene que ver con el desplazamiento asociado a la propagación de la onda, también llamada condición cinemática ¹ de borde. Para una onda-P u onda longitudinal, el desplazamiento esta dado por $\nabla \Theta = (\frac{\partial \Theta}{\partial x}, 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z})$ y para una onda-S u onda transversal, el desplazamiento esta dado por $rot \vec{\Psi} = (-\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x})$ considerando $\vec{\Psi} = (0, \Psi, 0)$. (ver Aki and Richards) [8]

La segunda condición de borde tiene que ver con la tracción o esfuerzo de los componentes, también llamada condición dinámica ² de borde. Para una onda-P el esfuerzo esta asociado

¹La cinemática estudia las leyes del movimiento, limitándose, al estudio de la trayectoria en función del tiempo

²la dinámica describe los factores capaces de producir alteraciones de un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento o ecuaciones de evolución para dicho sistema

por $\sigma(\theta) = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ en función de Θ y para la onda-S por $\sigma(\Psi) = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ en función de Ψ (ver Aki and Richards) [8]

Del capítulo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad \sigma_{xz} &= 2\rho v_s^2 u_{xz}, \\
 (2.2) \quad &= 2\rho v_s^2 \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \right], \\
 (2.3) \quad &= 2\rho v_s^2 \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} + \rho v_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \right], \\
 (2.4) \quad &= 2\mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi,
 \end{aligned}$$

Análogamente.

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \sigma_{zz} &= 2\rho v_s^2 u_{zz} + \rho(v_p^2 - 2v_s^2) u_{ll} \delta_{zz}, \\
 (2.6) \quad &= 2\rho v_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) + \rho v_p^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Theta, \\
 (2.7) \quad &= 2\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + \lambda \nabla \Theta + 2\mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2},
 \end{aligned}$$

luego podemos decir que las condiciones de borde para la onda-P tomando en cuenta que la componente de desplazamiento del eje Y son nulas y están dadas por:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(\Theta) = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}, 0, \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right), \\ \sigma(\Theta) = \left(2\mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z}, 0, \lambda \nabla \Theta + 2\mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right), \end{cases}$$

Y las condiciones de borde para la onda-S están dadas por:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(\Psi) = \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \\ \sigma(\Psi) = \left(\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi, 0, 2\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right), \end{cases}$$

Por otro lado, veamos el comportamiento del vector desplazamiento \vec{k}_i en términos de los ángulos $\theta_0, \theta_1, \psi_1$

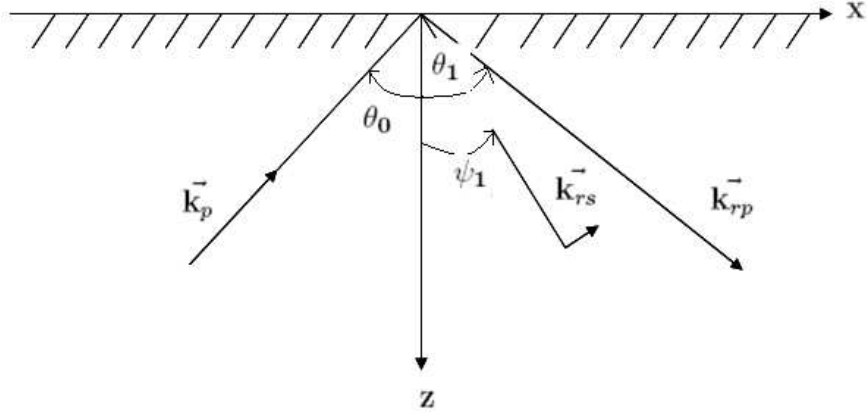


FIGURA 2.2. Vector Desplazamiento

$$(2.10) \quad \begin{cases} \vec{k}_p = (k_p \sin \theta_0, 0, -k_p \cos \theta_0) & \text{el vector desplazamiento de la onda incidente P,} \\ \vec{k}_{rp} = (k_{rp} \sin \theta_1, 0, k_p \cos \theta_1) & \text{el vector desplazamiento de la onda reflejada P,} \\ \vec{k}_{rs} = (k_{rs} \sin \psi_1, 0, k_p \cos \psi_1) & \text{el vector desplazamiento de la onda reflejada S,} \end{cases}$$

Luego, usando que:

$$s = \frac{1}{v_t}, \quad v_t = \frac{\omega}{k}, \quad \text{entonces} \quad s = \frac{k}{\omega} \text{ con } \omega \text{ constante,}$$

Donde s es la lentitud, v_t la velocidad, k es el vector de onda y ω representa la frecuencia.

Entonces, podemos replantear el vector desplazamiento k_i en función de las lentitudes s_i de manera que:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \vec{s}_p = \left(\frac{\sin \theta_0}{v_p}, 0, \frac{-\cos \theta_0}{v_p} \right), \\ \vec{s}_{rp} = \left(\frac{\sin \theta_1}{v_p}, 0, \frac{\cos \theta_1}{v_p} \right), \\ \vec{s}_{rs} = \left(\frac{\sin \psi_1}{v_s}, 0, \frac{\cos \psi_1}{v_s} \right), \end{cases}$$

Y como:

$$i \left(\vec{k} \vec{r} - \omega t \right) = i \omega \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \vec{r} - t \right) = i \omega (\vec{s} \vec{r} - t)$$

Podemos definir los potenciales Θ y Ψ como:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Theta = \Theta_{inc} + \Theta_{ref}; & \text{Potencial de onda P,} \\ \Psi = \Psi_{ref}; & \text{Potencial de onda S,} \end{cases}$$

Donde:

$$(2.13) \quad \Theta_{inc} = Ae^{i\omega(s_p \vec{r}-t)},$$

$$(2.14) \quad = Ae^{i\omega\left(x\frac{\sin\theta_0}{v_p} - z\frac{\cos\theta_0}{v_p} - t\right)}.$$

$$(2.15) \quad \Theta_{ref} = Be^{i\omega(s_{rp} \vec{r}-t)},$$

$$(2.16) \quad = Be^{i\omega\left(x\frac{\sin\theta_1}{v_p} + z\frac{\cos\theta_1}{v_p} - t\right)}.$$

$$(2.17) \quad \Psi_{ref} = Ce^{i\omega(s_{rs} \vec{r}-t)},$$

$$(2.18) \quad = Ce^{i\omega\left(x\frac{\sin\psi_1}{v_s} + z\frac{\cos\psi_1}{v_s} - t\right)}.$$

Es importante resaltar que A , B representan las amplitudes del potencial de onda P y C representa la amplitud del potencial de onda S.

Ahora, Usando la ley de Snell y tomando en cuenta las constantes elásticas λ y μ en función de la densidad y de las velocidades tanto de las ondas P como las ondas S, Entonces, podemos simplificar las ecuaciones 2.8 y 2.9 en términos de

p , Θ , Ψ , $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ de la siguiente manera:

$$(2.19) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(\Theta) = (\omega p \Theta, 0, \frac{\partial\Theta}{\partial z}), \\ \sigma(\Theta) = (2\rho v_s^2 \omega p \frac{\partial\Theta}{\partial z}, 0, -\rho(1 - 2p^2 v_s^2) \omega^2 \Theta), \end{cases}$$

Análogamente

$$(2.20) \quad \begin{cases} \mathbf{u}(\Psi) = (-\frac{\partial\Psi}{\partial z}, 0, \omega p \Psi), \\ \sigma(\Psi) = (\rho(1 - 2v_s^2 p^2) \omega^2 \Psi, 0, 2\rho v_s^2 \omega p \frac{\partial\Psi}{\partial z} \Psi), \end{cases}$$

Ahora bien, para la interface tendremos la siguiente condición de borde:

$$(2.21) \quad \boxed{\sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0}$$

Lo que implica que:

$$(2.22) \quad \begin{cases} \sigma_{xz} = 2\rho v_s^2 \omega p \left(\frac{\partial \Theta_{inc}}{\partial z} + \frac{\partial \Theta_{ref}}{\partial z} \right) + \rho (1 - 2v_s^2 p^2) \omega^2 \Psi_{ref} = 0, \\ \sigma_{zz} = -\rho (1 - 2v_s^2 p^2) \omega^2 (\Theta_{inc} + \Theta_{ref}) + 2\rho v_s^2 \omega p \frac{\partial \Psi_{ref}}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

luego al evaluar Θ y Ψ en $z=0$ obtenemos.

$$(2.23) \quad \begin{cases} \Theta|_{z=0} = Ae^{\omega(xp-t)} + Be^{\omega(xp-t)}, \\ \Psi|_{z=0} = C \omega \frac{\cos \psi_1}{v_s} \Psi, \end{cases}$$

$$(2.24) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \omega \frac{\cos \theta_1}{v_p} (-A + B), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = C \omega \frac{\cos \psi_1}{v_s},$$

Entonces, sustituyendo en 2.22 se obtiene:

$$(2.25) \quad \begin{cases} \sigma_{xz}|_{z=0} = 2\frac{v_s^2}{vp} p \cos \theta_1 (A - B) + (1 - 2p^2 v_s^2) C = 0 \\ \sigma_{zz}|_{z=0} = (1 - 2p^2 v_s^2) (A + B) + 2v_s p \cos \psi_1 C = 0 \end{cases}$$

2. Derivación del coeficiente de reflexión

Despejando C de la ecuación (2) de la sección anterior, ecuación 2.25. Obtenemos:

$$(2.26) \quad C = \frac{(2p^2 v_s^2 - 1)(A + B)}{2v_s p \cos \psi_1},$$

y sustituyendo en (1) tenemos:

$$(2.27) \quad 2\frac{v_s^2}{vp} p \cos \theta_1 (A - B) + (1 - 2p^2 v_s^2) \left[\frac{(2p^2 v_s^2 - 1)(A + B)}{2v_s p \cos \psi_1} \right] = 0$$

$$(2.28) \quad 4\frac{v_s^3 p^2 \cos \theta_1 \cos \psi_1 (A - B)}{vp} + (1 - 2p^2 v_s^2)(2p^2 v_s^2 - 1)(A + B) = 0$$

$$(2.29) \quad 4 \frac{v_s^4 p^2 \cos \theta_1 \cos \psi_1 (A - B)}{v_p v_s} - (1 - 2p^2 v_s^2)^2 (A + B) = 0$$

$$(2.30) \quad A \left[4v_s^4 p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} - (1 - 2p^2 v_s^2)^2 \right] - B \left[4v_s^4 p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} + (1 - 2p^2 v_s^2)^2 \right] = 0$$

$$(2.31) \quad \frac{B}{A} = \frac{4v_s^4 p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} - (1 - 2p^2 v_s^2)^2}{4v_s^4 p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} + (1 - 2p^2 v_s^2)^2}$$

Se define R como el coeficiente de reflexión, $R = \frac{B}{A}$ donde A y B son las amplitudes de las ondas P_{inc} , P_{ref} en función de los potenciales. Ahora si queremos representar el coeficiente de reflexión en función del desplazamiento, es necesario dividir entre $\frac{1}{v_p}$ a los diferentes potenciales de amplitud de onda P, $R = \frac{B \frac{1}{v_p}}{A \frac{1}{v_p}} = \frac{B}{A}$ y de ahora en adelante vamos a llamar a el coeficiente de reflexión de la onda $P_{inc} P_{ref}$ en función de los desplazamiento como $R_{(P \downarrow P \uparrow)}$ y la expresión nos queda de la siguiente manera:

$$(2.32) \quad R_{(P \downarrow P \uparrow)} = \frac{-\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}}{\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}}$$

Ahora despejando B de la ecuación (1) y sustituyendo en (2) obtenemos:

$$(2.33) \quad 2 \frac{v_s^2 p \cos \theta_1}{v_p} v_p \left[A - \left(\frac{-2v_s p \cos \psi_1 C + (2pv_s^2 - 1)}{(1 - 2pv_s^2)} \right) A \right] + (1 - 2v_s^2 p^2) A$$

$$(2.34) \quad A \left[2 \frac{v_s^2}{v_p} p \cos \theta_1 + \frac{(1 - 2pv_s^2)}{(1 - 2pv_s^2)} \right] + C \left[4 \frac{v_s^3 p^2 \cos \theta_1 \cos \psi_1}{v_p (1 - 2pv_s^2)} + (1 - 2pv_s^2) \right] = 0$$

$$(2.35) \quad \frac{C}{A} = \frac{-4 \left[\frac{v_s^2}{v_p} p \cos \theta_1 (1 - 2v_s^2 p^2) \right]}{4v_s^4 p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} + (1 - 2v_s^2 p^2)^2}$$

Sea $R = \frac{C}{A}$ donde C es la amplitud de onda S_{ref} en función de los potenciales si queremos representarla en función del desplazamiento debemos dividir entre $\frac{1}{v_p}$ a la amplitud de onda P y entre $\frac{1}{v_s}$ a la amplitud de onda S de manera que $R = \frac{C}{A} = \frac{C \frac{1}{v_p}}{A \frac{1}{v_p}} = \frac{C v_p}{A v_s}$ y de ahora

en adelante vamos a llamar a el coeficiente de reflexión de la onda $P_{inc}S_{ref}$ en función del desplazamiento como $R_{(P\downarrow S\uparrow)}$ y la expresión nos que da de la siguiente manera:

$$(2.36) \quad R_{(P\downarrow S\uparrow)} = \frac{4 \frac{v_p}{v_s} p \frac{\cos \theta_1}{v_p} \left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2 \right)}{\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}}$$

3. Derivación del polinomio de 2do grado

A continuación, vamos a convertir la expresión $\frac{B}{A}$ como un polinomio de 2do grado en función de las velocidades $\frac{v_s}{v_p}$, cabe destacar que para el caso de el artículo [1] solamente se estudia el caso de dos medios elásticos de diferentes densidades con sus respectivos coeficientes de reflexión y transmisión, caso que trabajaremos en el capítulo 3.

Sea:

$$(2.37) \quad R_{(P\downarrow P\uparrow)} = \frac{B}{A}$$

$$(2.38) \quad = \frac{-\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}}{\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}}$$

El coeficiente de reflexión de la onda P.

Luego.

$$(2.39) \quad R \left[\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} \right] = - \left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2 \right)^2 + 4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s}$$

$$(2.40) \quad (R + 1) \left[\left(\frac{1}{v_s^2} - 2p^2 \right)^2 \right] + (R - 1) \left[4p^2 \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} \right] = 0$$

Usando la ley de Snell (1.2) se tiene que:

$$\sin \theta_1 = \frac{v_p}{v_s} \sin \psi_1, \quad \sin \psi_1 = \frac{v_s}{v_p} \sin \theta_1$$

Así pues:

$$(2.41) \quad (R + 1) \left[\frac{1}{v_s^2} - \frac{2 \sin^2 \psi_1}{v_s^2} \right]^2 + (R - 1) \left[4 \frac{\sin \theta_1}{v_p} \frac{\sin \psi_1}{v_s} \frac{\cos \theta_1}{v_p} \frac{\cos \psi_1}{v_s} \right] = 0$$

$$(2.42) \quad (R+1) \frac{1}{v_s^4} (1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2 + (R-1) \left[\frac{2 \sin \theta_1 \cos \theta_1}{v_p^2} \frac{2 \sin \psi_1 \cos \psi_1}{v_s^2} \right] = 0$$

$$(2.43) \quad (R+1) (1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2 + (R-1) v_s^4 \left[\frac{\sin 2\theta_1}{v_p^2} \frac{\sin 2\psi_1}{v_s^2} \right] = 0$$

$$(2.44) \quad (R+1) (1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2 + (R-1) \left(\frac{v_s}{v_p} \right)^2 (\sin 2\theta_1 \sin 2\psi_1) = 0$$

Luego, tomando $y = \frac{v_s}{v_p}$ Obtenemos el siguiente polinomio.

$$(2.45) \quad \boxed{y^2(R-1) \sin 2\theta_1 \sin 2\psi_1 + (R+1)(1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2 = 0}$$

Cuyas raíces son las siguientes:

$$(2.46) \quad y = \pm \sqrt{\frac{(1+R)(1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2}{(1-R) \sin 2\theta_1 \sin 2\psi_1}}$$

Ahora veamos que si.

$$(2.47) \quad \lim_{\substack{\theta \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{4} \\ \psi \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{4}}} \pm \sqrt{\frac{(1+R)(1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2}{(1-R) \sin 2\theta_1 \sin 2\psi_1}} = \pm \sqrt{\frac{(1+R)}{(1-R)}} \quad \text{con } 1 - R > 0$$

Lo que implica que para este caso R debe tomar valores entre $-1 \leq R < 1$. Si tomamos el coeficiente de reflexión $R = 0$, esto implica que $y = \pm 1$, es decir que $\frac{v_s}{v_p} = \pm 1$ entonces $v_s = \pm v_p$.

Ahora bien, si

$$(2.48) \quad \lim_{\substack{\theta \rightarrow (2k)\frac{\pi}{4} \\ \psi \rightarrow (2k)\frac{\pi}{4}}} \pm \sqrt{\frac{(1+R)(1 - 2 \sin^2 \psi_1)^2}{(1-R) \sin 2\theta_1 \sin 2\psi_1}} = \infty$$

Lo que implica que $y = \frac{v_s}{v_p} = \infty$, caso que no representa interés para nuestro estudio.

CAPÍTULO 3

Reflexión y Transmisión de una onda elastica entre dos medios isótropos

1. Cálculo de las condiciones de borde

Consideremos 4 ondas propagándose a través de dos medios elásticos en una interface del plano xz como se muestra en la figura.

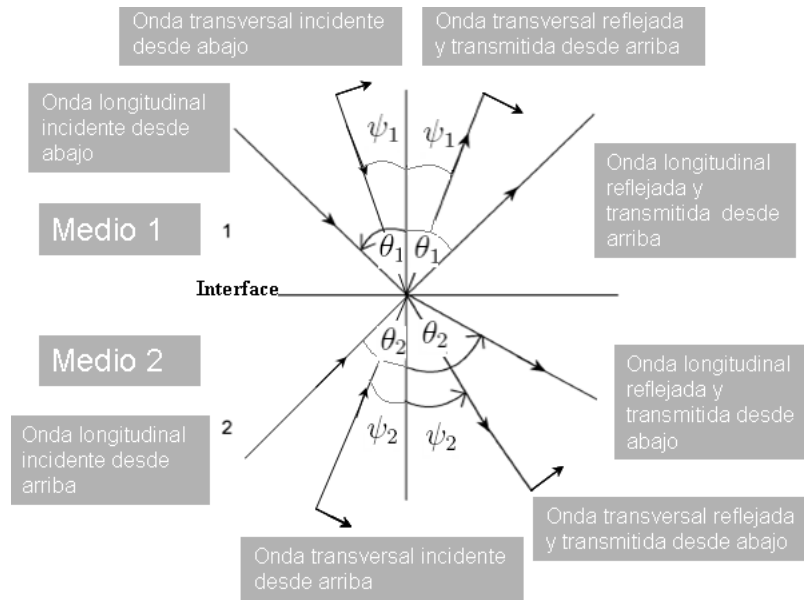


FIGURA 3.1. Ondas reflejándose y transmitiéndose a través de dos medios elásticos isótropos de diferentes densidades ρ_1 y ρ_2

Al igual que en el capítulo 2 tenemos que:

$$(3.1) \quad u_x = \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

Así pues:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sigma_{xz} = 2\mu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi, \\ \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} + \lambda \nabla \Theta + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \end{cases}$$

Por otro lado tenemos que:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \Theta^1 = \Theta_{inc\downarrow} + \Theta_{ref\uparrow} & \text{Potencial de onda P en el medio 1,} \\ \Theta^2 = \Theta_{inc\uparrow} + \Theta_{ref\downarrow} & \text{Potencial de onda P en el medio 2,} \\ \Psi^1 = -\Psi_{inc\downarrow} + \Psi_{ref\uparrow} & \text{Potencial de onda S en el medio 1,} \\ \Psi^2 = \Psi_{inc\uparrow} - \Psi_{ref\downarrow} & \text{Potencial de onda S en el medio 2,} \end{cases}$$

donde:

$$(3.4) \quad \Theta_{inc\downarrow} = A \exp i\omega \left(x \frac{\sin \theta_0}{v_{p1}} + z \frac{\cos \theta_0}{v_{p1}} - t \right); \quad \Psi_{inc\downarrow} = C \exp i\omega \left(x \frac{\sin \psi_1}{v_{s1}} + z \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} - t \right),$$

$$(3.5) \quad \Theta_{ref\uparrow} = \acute{A} \exp i\omega \left(x \frac{\sin \theta_0}{v_{p1}} - z \frac{\cos \theta_0}{v_{p1}} - t \right); \quad \Psi_{ref\uparrow} = \acute{C} \exp i\omega \left(x \frac{\sin \psi_1}{v_{s1}} - z \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} - t \right),$$

$$(3.6) \quad \Theta_{inc\uparrow} = B \exp i\omega \left(x \frac{\sin \theta_2}{v_{p2}} - z \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} - t \right); \quad \Psi_{inc\uparrow} = D \exp i\omega \left(x \frac{\sin \psi_2}{v_{s2}} - z \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} - t \right),$$

$$(3.7) \quad \Theta_{ref\downarrow} = \acute{B} \exp i\omega \left(x \frac{\sin \theta_2}{v_{p2}} + z \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} - t \right); \quad \Psi_{ref\downarrow} = \acute{D} \exp i\omega \left(x \frac{\sin \psi_2}{v_{s2}} + z \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} - t \right),$$

Las ecuaciones para determinar las amplitudes de reflexión y transmisión¹ de las ondas P y S respectivamente vienen dadas por las siguientes condiciones de contorno.

$$(1) \quad u_x^1 = u_x^2$$

donde:

¹el coeficiente de transmisión relaciona la amplitud de la onda transmitida con la amplitud de la onda incidente

$$(3.8) \quad \begin{cases} u_x^1 = u_x(\Theta^1) + u_z(\Psi^1), \\ u_x^2 = u_x(\Theta^2) + u_z(\Psi^2), \end{cases}$$

Ahora, sustituyendo en ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$(3.9) \quad \frac{\partial (\Theta_{inc} \downarrow + \Theta_{ref} \uparrow)}{\partial x} - \frac{\partial (-\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow)}{\partial z} = \frac{\partial (\Theta_{inc} \uparrow + \Theta_{ref} \downarrow)}{\partial x} - \frac{\partial (\Psi_{inc} \uparrow - \Psi_{ref} \downarrow)}{\partial z}$$

Luego, tomando en cuenta como están definidos los potenciales y derivando se obtiene:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \omega p (\Theta_{inc} \downarrow + \Theta_{ref} \uparrow) - \omega \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} (-\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow) = \\ \omega p (\Theta_{inc} \uparrow + \Theta_{ref} \downarrow) - \omega \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} (\Psi_{inc} \uparrow - \Psi_{ref} \downarrow) \end{aligned}$$

Y al dividir en ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{\omega}$ se obtiene:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} p (\Theta_{inc} \downarrow + \Theta_{ref} \uparrow) + \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} (\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow) = \\ p (\Theta_{inc} \uparrow + \Theta_{ref} \downarrow) + \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} (\Psi_{inc} \uparrow + \Psi_{ref} \downarrow) \end{aligned}$$

Luego al sustituir el parámetro de rayo p usando la ley de Snell convenientemente, es decir, para el lado izquierdo de la ecuación se toma $p = \frac{\sin \theta_1}{v_{p1}}$ y para el lado derecho se toma $p = \frac{\sin \theta_2}{v_{p2}}$ para así obtener la siguiente ecuación que representa la continuidad tangencial en términos de los potenciales.

$$(3.12) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\sin \theta_1}{v_{p1}} (\Theta_{inc} \downarrow + \Theta_{ref} \uparrow) + \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} (\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow) = \\ \frac{\sin \theta_2}{v_{p2}} (\Theta_{inc} \uparrow + \Theta_{ref} \downarrow) + \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} (\Psi_{inc} \uparrow + \Psi_{ref} \downarrow) \end{aligned}}$$

$$(2) u_z^1 = u_z^2$$

donde:

$$(3.13) \quad \begin{cases} u_z^1 = u_z(\Theta^1) + u_x(\Psi^1) \\ u_z^2 = u_z(\Theta^2) + u_x(\Psi^2) \end{cases}$$

Entonces:

$$(3.14) \quad \frac{\partial(\Theta^1)}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi^1)}{\partial x} = \frac{\partial(\Theta^2)}{\partial z} + \frac{\partial(\Psi^2)}{\partial x}$$

Análogamente se obtiene la ecuación que representa la continuidad normal en términos de los potenciales.

$$(3.15) \quad \boxed{\begin{aligned} & \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} (\Theta_{inc} \downarrow - \Theta_{ref} \uparrow) - \frac{\sin \psi_1}{v_{s1}} (\Psi_{inc} \downarrow - \Psi_{ref} \uparrow) = \\ & \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} (\Theta_{inc} \uparrow - \Theta_{ref} \downarrow) - \frac{\sin \psi_2}{v_{s2}} (\Psi_{inc} \uparrow - \Psi_{ref} \downarrow) \end{aligned}}$$

$$(3) \sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & 2\rho_1 v_{s1}^2 \omega p \frac{\partial(\Theta^1)}{\partial z} + \rho_1 \omega^2 (1 - 2v_{s1}^2 p^2) \Psi^1 = \\ & 2\rho_2 v_{s2}^2 \omega p \frac{\partial(\Theta^2)}{\partial z} + \rho_2 \omega^2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) \Psi^2 \end{aligned}$$

Derivando se obtiene:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} & 2\rho_1 v_{s1}^2 \omega p \left(\omega \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} (\Theta_{inc} \downarrow - \Theta_{ref} \uparrow) \right) + \rho_1 \omega^2 (1 - 2v_{s1}^2 p^2) (-\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow) = \\ & 2\rho_2 v_{s2}^2 \omega p \left(\omega \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} (\Theta_{inc} \uparrow - \Theta_{ref} \downarrow) \right) + \rho_2 \omega^2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) (\Psi_{inc} \uparrow - \Psi_{ref} \downarrow) \end{aligned}$$

Luego, dividiendo por $-\omega^2$ en ambos lados de la igualdad se obtiene la siguiente

ecuación que representa la continuidad del esfuerzo normal en función de los potenciales:

$$(3.18) \quad \boxed{2\rho_1 \frac{v_{s1}^2}{v_{p1}} p \cos \theta_1 (\Theta_{inc} \downarrow - \Theta_{ref} \uparrow) + \rho_1 (1 - 2v_{s1}^2 p^2) (\Psi_{inc} \downarrow - \Psi_{ref} \uparrow) = 2\rho_2 \frac{v_{s2}^2}{v_{p2}} p \cos \theta_2 (\Theta_{inc} \uparrow - \Theta_{ref} \downarrow) + \rho_2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) (\Psi_{inc} \uparrow - \Psi_{ref} \downarrow)}$$

$$(4) \quad \sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$$

$$(3.19) \quad -\rho_1 \omega^2 (1 - 2v_{s1}^2 p^2) \Theta^1 + 2\rho_1 v_{s1}^2 \left(i\omega p \frac{\partial \Psi^1}{\partial z} \right) = -\rho_2 \omega^2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) \Theta^2 + 2\rho_2 v_{s2}^2 \left(i\omega p \frac{\partial \Psi^2}{\partial z} \right)$$

Análogamente, se obtiene la ecuación que representa la continuidad del esfuerzo tangencial en función de los potenciales.

$$(3.20) \quad \boxed{\rho_1 (1 - 2v_{s1}^2 p^2) (\Theta_{inc} \downarrow + \Theta_{ref} \uparrow) - 2\rho_1 v_{s1} \cos \phi_1 (\Psi_{inc} \downarrow + \Psi_{ref} \uparrow) = \rho_2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) (\Theta_{inc} \uparrow + \Theta_{ref} \downarrow) - 2\rho_2 v_{s2} \cos \psi_2 (\Psi_{inc} \uparrow + \Psi_{ref} \downarrow)}$$

Las ecuaciones están representadas en función de la amplitud de los potenciales, ahora para representar en función de los desplazamientos debemos multiplicar por $\frac{1}{v_p}$ al potencial de onda P y $\frac{1}{v_s}$ al potencial de onda S; es decir.

Sea.

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_{1\downarrow} = \frac{1}{v_{p1}} \Theta_{inc\downarrow}, & P_{1\uparrow} = \frac{1}{v_{p1}} \Theta_{ref\uparrow}, \\ P_{2\downarrow} = \frac{1}{v_{p2}} \Theta_{ref\downarrow}, & P_{2\uparrow} = \frac{1}{v_{p2}} \Theta_{inc\uparrow}, \\ S_{1\downarrow} = \frac{1}{v_{s1}} \Psi_{inc\downarrow}, & S_{1\uparrow} = \frac{1}{v_{s1}} \Psi_{ref\uparrow}, \\ S_{2\downarrow} = \frac{1}{v_{s2}} \Psi_{ref\downarrow}, & S_{2\uparrow} = \frac{1}{v_{s2}} \Theta_{inc\uparrow}, \end{array} \right.$$

Luego, al sustituir estas ecuaciones en los resultados anteriores y reestructurando estas obtenemos los siguientes resultados importantes:

- (1) Continuidad del desplazamiento tangencial.

$$(3.22) \quad \boxed{\begin{aligned} -\sin \theta_1 P_{1\uparrow} - \cos \phi_1 S_{1\uparrow} + \sin \theta_2 P_{2\downarrow} + \cos \phi_2 S_{2\downarrow} = \\ \sin \theta_1 P_{1\downarrow} + \cos \phi_1 S_{1\downarrow} - \sin \theta_2 P_{2\uparrow} - \cos \phi_2 S_{2\uparrow} \end{aligned}}$$

(2) Continuidad del desplazamiento normal.

$$(3.23) \quad \boxed{\begin{aligned} \cos \theta_1 P_{1\uparrow} - \sin \psi_1 S_{1\uparrow} + \cos \theta_2 P_{2\downarrow} - \sin \psi_2 S_{2\downarrow} = \\ \cos \theta_1 P_{1\downarrow} - \sin \psi_1 S_{1\downarrow} + \cos \theta_2 P_{2\uparrow} - \sin \psi_2 S_{2\uparrow} \end{aligned}}$$

(3) Continuidad de la tracción tangencial.

$$(3.24) \quad \boxed{\begin{aligned} 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \theta_1 P_{1\uparrow} + \rho_1 v_{s1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) S_{1\uparrow} \\ + 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \theta_2 P_{2\downarrow} + \rho_2 v_{s2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) S_{2\downarrow} = \\ 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \theta_1 P_{1\downarrow} + \rho_1 v_{s1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) S_{1\downarrow} \\ + 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \theta_2 P_{2\uparrow} + \rho_2 v_{s2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) S_{2\uparrow} \end{aligned}}$$

(4) Continuidad de la tracción normal.

$$(3.25) \quad \boxed{\begin{aligned} -\rho_1 v_{p1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) P_{1\uparrow} + 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \psi_1 S_{1\uparrow} \\ + \rho_2 v_{p2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) P_{2\downarrow} - 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \psi_2 S_{2\uparrow} = \\ \rho_1 v_{p1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) P_{1\downarrow} - 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \psi_1 S_{1\downarrow} \\ - \rho_2 v_{p2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) P_{2\uparrow} + 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \psi_2 S_{2\uparrow} \end{aligned}}$$

2. Derivación del coeficiente de reflexión y transmisión

Ahora de las ecuaciones 3.22,3.23,3.24,3.25 obtenemos el siguiente sistema matricial.

$$M \begin{pmatrix} P_{1\uparrow} \\ S_{1\uparrow} \\ P_{2\downarrow} \\ S_{2\downarrow} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} P_{1\downarrow} \\ S_{1\downarrow} \\ P_{2\uparrow} \\ S_{2\uparrow} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$M = \begin{pmatrix} -v_{p1}p & -\cos \psi_1 & v_{p2}p & \cos \psi_2 \\ \cos \theta_1 & -v_{s1}p & \cos \theta_2 & -v_{s2}p \\ 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \theta_1 & \rho_1 v_{s1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) & 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \theta_2 & \rho_2 v_{s2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) \\ -\rho_1 v_{p1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) & 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \psi_1 & \rho_2 v_{p2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) & -2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \psi_2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} v_{p1}p & \cos \psi_1 & -v_{p2}p & -\cos \psi_2 \\ \cos \theta_1 & -v_{s1}p & \cos \theta_2 & -v_{s2}p \\ 2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \theta_1 & \rho_1 v_{s1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) & 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \theta_2 & \rho_2 v_{s2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) \\ \rho_1 v_{p1} (1 - 2v_{s1}^2 p^2) & -2\rho_1 v_{s1}^2 p \cos \psi_1 & -\rho_2 v_{p2} (1 - 2v_{s2}^2 p^2) & 2\rho_2 v_{s2}^2 p \cos \psi_2 \end{pmatrix}$$

Luego, a través de métodos numéricos para resolución de matrices se llegó al siguiente resultado.[8]

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} P_{\downarrow}P_{\uparrow} & S_{\downarrow}P_{\uparrow} & P_{\uparrow}P_{\uparrow} & S_{\uparrow}P_{\uparrow} \\ P_{\downarrow}S_{\uparrow} & S_{\downarrow}S_{\uparrow} & P_{\uparrow}S_{\uparrow} & S_{\uparrow}S_{\uparrow} \\ P_{\downarrow}P_{\downarrow} & S_{\downarrow}P_{\downarrow} & P_{\uparrow}P_{\downarrow} & S_{\uparrow}P_{\downarrow} \\ P_{\downarrow}S_{\downarrow} & S_{\downarrow}S_{\downarrow} & P_{\uparrow}S_{\downarrow} & S_{\uparrow}S_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

Afortunadamente las similitudes de las matrices M y N conducen a formulas relativamente simples para cada componente de la matriz anterior. estas formulas hacen uso repetido de las variables:

$$(3.26) \quad \begin{cases} a = \rho_2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) - \rho_1 (1 - 2v_{s1}^2), & E = b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} + c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \\ b = \rho_2 (1 - 2v_{s2}^2 p^2) + 2\rho_1 v_{s1}^2 p^2, & F = b \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} + c \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} \\ c = \rho_1 (1 - 2v_{s1}^2) + 2\rho_2 v_{s2}^2 p^2, & G = a - d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} \\ d = 2(\rho_2 v_{s2}^2 - \rho_1 v_{s1}^2) & H = a - d \frac{\cos \theta_2 \cos \psi_1}{v_{p2} v_{s1}} \\ D = EF + GHp^2 = (\det M) / (v_{p1} v_{p2} v_{s1} v_{s2}) \end{cases}$$

A continuación se presentan dichas formulas en función de las variables 3.26

$$(3.27) \quad P_{\downarrow}P_{\uparrow} = \left[\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} - c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \right) F - \left(a + d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1}v_{s2}} \right) Hp^2 \right] / D$$

$$(3.28) \quad P_{\downarrow}S_{\uparrow} = -2 \left[\frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} \left(ab + cd \frac{\cos \theta_2 \cos \psi_2}{v_{p2} v_{s2}} \right) p \frac{v_{p1}}{v_{s1}} \right] / D$$

$$(3.29) \quad P_{\downarrow}P_{\downarrow} = 2 \left[\rho_1 \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} F \frac{v_{p1}}{v_{p2}} \right] / D$$

$$(3.30) \quad P_{\downarrow}S_{\downarrow} = 2 \left[\rho_1 \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} Hp \frac{v_{p1}}{v_{s2}} \right] / D$$

$$(3.31) \quad S_{\downarrow}P_{\uparrow} = -2 \left[\frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} \left(ab + cd \frac{\cos \theta_2 \cos \psi_2}{v_{p2} v_{s2}} \right) p \frac{v_{s1}}{v_{p1}} \right] / D$$

$$(3.32) \quad S_{\downarrow}S_{\uparrow} = - \left[\left(b \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} - c \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} \right) E - \left(a + d \frac{\cos \theta_2 \cos \psi_1}{v_{p2}v_{s1}} \right) Gp^2 \right] / D$$

$$(3.33) \quad S_{\downarrow}P_{\downarrow} = -2 \left[\rho_1 \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} Gp \frac{v_{s1}}{v_{p2}} \right] / D$$

$$(3.34) \quad S_{\downarrow}S_{\downarrow} = 2 \left[\rho_1 \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} E \frac{v_{s1}}{v_{s2}} \right] / D$$

$$(3.35) \quad P_{\uparrow}P_{\uparrow} = 2 \left[\rho_2 \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} F \frac{v_{p1}}{v_{p1}} \right] / D$$

$$(3.36) \quad P_{\uparrow}S_{\uparrow} = -2 \left[\rho_2 \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} Gp \frac{v_{p2}}{v_{s1}} \right] / D$$

$$(3.37) \quad P_{\uparrow}P_{\downarrow} = - \left[\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} - c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \right) F + \left(a + d \frac{\cos \theta_2 \cos \psi_1}{v_{p2}v_{s1}} \right) Gp^2 \right] / D$$

$$(3.38) \quad P_{\uparrow}S_{\downarrow} = 2 \left[\frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \left(ac + bd \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_1}{v_{p1} v_{s1}} \right) p \frac{v_{p2}}{v_{s2}} \right] / D$$

$$(3.39) \quad S_{\downarrow}P_{\uparrow} = 2 \left[\rho_2 \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} H p \frac{v_{s2}}{v_{p1}} \right] / D$$

$$(3.40) \quad S_{\uparrow}S_{\uparrow} = 2 \left[\rho_2 \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} E \frac{v_{s2}}{v_{s1}} \right] / D$$

$$(3.41) \quad S_{\uparrow}P_{\downarrow} = 2 \left[\frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} \left(ac + bd \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_1}{v_{p1} v_{s1}} \right) p \frac{v_{s2}}{v_{p2}} \right] / D$$

$$(3.42) \quad S_{\uparrow}S_{\downarrow} = \left[\left(b \frac{\cos \psi_1}{v_{s1}} - c \frac{\cos \psi_2}{v_{s2}} \right) E + \left(a + d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} \right) H p^2 \right] / D$$

Estas 16 formulas representan la solución exacta al problema de reflexión y transmisión en la interface entre dos medios elásticos isótropicos, homogéneos y elásticos. Cada uno de ellos hacen referencia a los diferentes coeficientes de reflexión que se derivan de las ondas P y S en los distintos medios, todas estas formulas pueden ser manipuladas para obtener 16 polinomios. Sin embargo, de estos 16 polinomios, generalmente tienen interés geofísicos los que están relacionados con la ondas $P_{\downarrow}P_{\uparrow}$, $P_{\uparrow}P_{\downarrow}$, $P_{\downarrow}S_{\uparrow}$, $P_{\uparrow}S_{\downarrow}$.

Para el caso nuestro solo vamos a trabajar con el coeficiente de reflexión relacionado con la onda $P_{\downarrow}P_{\uparrow}$, la cual trabajaremos en detalle a continuación.

3. Derivación del polinomio de 5to grado

Sea:

$$(3.43) \quad R = \left[\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} - c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \right) F - \left(a + d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} \right) H p^2 \right] / D$$

Entonces:

$$(3.44) \quad RD = \left[\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} - c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \right) F - \left(a + d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} \right) H p^2 \right]$$

$$(3.45) \quad R [EF + GHp^2] = \left[\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} - c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} \right) F - \left(a + d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} \right) Hp^2 \right]$$

$$(3.46) \quad R \left[\overbrace{\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} F - d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} Hp^2 \right)}^A + \overbrace{\left(c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} F + aHp^2 \right)}^B \right] =$$

$$\left[\overbrace{\left(b \frac{\cos \theta_1}{v_{p1}} F - d \frac{\cos \theta_1 \cos \psi_2}{v_{p1} v_{s2}} Hp^2 \right)}^A - \overbrace{\left(c \frac{\cos \theta_2}{v_{p2}} F + aHp^2 \right)}^B \right]$$

Entonces podemos decir que:

$$(3.47) \quad R = \frac{A - B}{A + B}$$

Expresión plasmada en el trabajo realizado por Paul M. Krail, Rock Properties and Amplitude versus Angle.[1] donde A y B contienen los ángulos y demás parámetros de la roca.

Ahora utilizando un conjunto de operaciones algebraicas, se logro transformar la expresión anterior en los siguientes polinomios de 5to grado.

$$(3.48) \quad \boxed{A_5 y_1^5 + A_4 y_1^4 + A_3 y_1^3 + A_2 y_1^2 + A_1 y_1 + A_0 = 0}$$

$$(3.49) \quad \boxed{Á_5 y_2^5 + Á_4 y_2^4 + Á_3 y_2^3 + Á_2 y_2^2 + Á_1 y_2 + Á_0 = 0}$$

$$\text{Donde: } \begin{cases} y_1 = \frac{v_{s2}}{v_{p1}} \\ y_2 = \frac{v_{s1}}{v_{p2}} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_5 = B_1, & \acute{A}_5 = B_{11}, \\ A_4 = y_2 B_2, & \acute{A}_4 = y_1 B_9 + B_{12}, \\ A_3 = y_2^2 B_3 + y_2 B_4 + B_5, & \acute{A}_3 = y_1^2 B_6 + B_{13}, \\ A_2 = y_2^3 B_6 + y_2^2 B_7 + y_2 B_7, & \acute{A}_2 = y_1^3 B_3 + y_1^2 B_7 + y_1 B_{10}, \\ A_1 = y_2^4 B_9 + y_2^2 B_{10}, & \acute{A}_1 = y_1^4 B_2 + y_1^3 B_4 + y_1^2 B_8 + B_{14} \\ A_0 = y_2^5 + B_{11} + y_2^4 B_{12} + y_2^3 B_{13} + y_2 B_{14}, & \acute{A}_0 = y_1^5 B_1 + y_1^3 B_5, \end{array} \right.$$

Además,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = C_1, \\ B_2 = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_6 + C_{13}, \\ B_3 = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{19} + C_3, \\ B_4 = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_{12}, \\ B_5 = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_2, \\ B_6 = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_7 + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{20} + C_{14}, \\ B_7 = C_{22}, \\ B_8 = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_8 + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{21} + C_{15}, \\ B_9 = C_4, \\ B_{10} = C_5, \\ B_{11} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_9 + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{23} + C_{16}, \\ B_{12} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{25}, \\ B_{13} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_{10} + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{24} + C_{17}, \\ B_{14} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_1} C_{11} + \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} C_{26} + C_{18}, \end{array} \right.$$

Y también,

$$\left\{ \begin{array}{l}
C_1 = (4D_1 - 2D_{12}) \sin^4 \theta_1, \\
C_2 = (-4D_1 + D_{12} + D_{20}) \sin^2 \theta_1, \\
C_3 = (-2D_3 - 2D_5 - 2D_{20}) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \\
C_4 = (D_6 - 2D_{14}) \sin^4 \theta_2, \\
C_5 = (D_3 + D_5 + D_{14}) \sin^2 \theta_2, \\
C_6 = -2D_{11} \sin^4 \theta_1, \\
C_7 = 4D_9 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \\
C_8 = (-2D_9 + D_{11}) \sin^2 \theta_1, \\
C_9 = -2D_3 \sin^4 \theta_2, \\
C_{10} = (-2D_9 + D_{13}) \sin^2 \theta_2, \\
C_{11} = D_9, \\
C_{12} = D_{22} \sin^2 \theta_1, \\
C_{13} = D_{21} \sin^4 \theta_1 \\
, C_{14} = -2D_{19} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \\
C_{15} = D_{19} \sin^2 \theta_1, \\
C_{16} = D_{23} \sin^4 \theta_2, \\
C_{17} = -4D_{23} \sin^2 \theta_2, \\
C_{18} = D_{23}, \\
C_{19} = D_{16} \sin^4 \theta_1, \\
C_{20} = (-2D_4 + 4D_8 + 4 \sin \theta_1 \sin \psi_2) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2, \\
C_{21} = (-2D_8 - 2 \sin \theta_1 \sin \psi_2 D_{10} + D_{18}) \sin^2 \theta_1, \\
C_{22} = D_{17} \sin^2 \theta_1, \\
C_{23} = 4D_{24} \sin^4 \theta_2 \sin \theta_1 \sin \psi_2, \\
C_{24} = (D_4 - 2D_8 - 2D_{10} \sin \theta_1 \sin \psi_2 - 4D_{24} \sin \theta_1 \sin \psi_2) \sin^2 \theta_2, \\
C_{25} = D_7 \sin^2 \theta_2, \\
C_{26} = D_2 \sin \theta_1 \sin \psi_2 + D_{10} \theta_1 \sin \psi_2
\end{array} \right.$$

Finalmente,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 D_1 = \rho_2^2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_2 = R + 1, \\
 D_3 = 4\rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_4 = 8\rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_2, \\
 D_5 = 8\rho_1\rho_2(R + 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_6 = 4\rho_1^2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_7 = 4\rho_1^2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1 \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_8 = \rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_2, \\
 D_9 = \rho_1\rho_2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_1, \\
 D_{10} = -2\rho_1\rho_2(R + 1), \\
 D_{11} = 2\rho_2^2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_1, \\
 D_{12} = -2\rho_2^2(R + 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_{13} = 2\rho_1^2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_1, \\
 D_{14} = -2\rho_1^2(R + 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_{15} = 4\rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_2, \\
 D_{16} = 4\rho_1\rho_2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_1, \\
 D_{17} = -\rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1 \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_{18} = 2\rho_1\rho_2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_2, \\
 D_{19} = 4\rho_1\rho_2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_{20} = 2\rho_1\rho_2(R + 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1, \\
 D_{21} = 4\rho_2^2(R + 1) \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_{22} = 4\rho_2^2(R - 1) \cos \theta_1 \cos \psi_1 \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_{23} = \rho_1^2(R - 1) \cos \theta_2 \cos \psi_2, \\
 D_{24} = \rho_1^2(R - 1),
 \end{array} \right.$$

CAPÍTULO 4

Solución numérica del polinomio para el caso de una onda $p_{\downarrow}p_{\uparrow}$

1. Raíces de un polinomio

Un Polinomio de grado n tiene la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

donde las a_i , denominadas coeficientes de P , son constantes y $a_n \neq 0$. La función cero, $P(x) = 0$ para todos los valores de x , se considera un polinomio, pero sin que se le asigne grado alguno.[16]

TEOREMA 4.1 (Teorema Fundamental del Algebra). *Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos, entonces $P(x) = 0$ tiene al menos una raíz (posiblemente compleja).*

COROLARIO 4.2. *Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos, entonces existen constantes únicas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ posiblemente complejas, y enteros positivos $m_1, m_1, m_2, \dots, m_k$ tales que $\sum_{j=1}^k m_i = n$ y*

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

Es decir, todo polinomio en una variable tiene tantas raíces como su grado, (contando sus multiplicidades). Aun así, las raíces de los polinomios reales no son necesariamente reales; algunas de ellas, o incluso todas, pueden ser complejas. Es por ello que enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3. *Si $z = a + ib$ es una raíz de multiplicidad m del polinomio $P(x)$, entonces $\bar{z} = a - ib$ también será una raíz de multiplicidad m del polinomio $P(x)$*

Tomando en cuenta que el polinomio a tratar es un polinomio de quinto grado, es decir con cinco raíces reales o complejas, el teorema anterior nos permite inferir que por lo menos existe una raíz real.

2. Cálculo Numérico

Los polinomios constituyen una clase de funciones de gran importancia, debido a que son fáciles de evaluar y, sobre todo, a que toda función continua en un intervalo cerrado puede aproximarse mediante polinomios.[17]

Curiosamente, a pesar de la sencillez y las buenas propiedades de los polinomios, solamente se pueden resolver mediante formulas exactas las ecuaciones polinómicas de grado no superior a 4. En su lugar se utilizan métodos numéricos.

En esta sección recordaremos las operaciones y propiedades de los polinomios y algunas funciones del programa MATLAB 7.0 ¹ que actúan sobre ellos.[16]

El polinomio de grado n .

$$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx + a_{n+1}$$

se representa en MATLAB mediante el vector de longitud $n + 1$ de la siguiente manera:

$$p = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ a_{n+1}]$$

cuyos elementos son los coeficientes del polinomio ordenados de mayor a menor. Incluimos los coeficientes nulos para conservar el grado del polinomio.

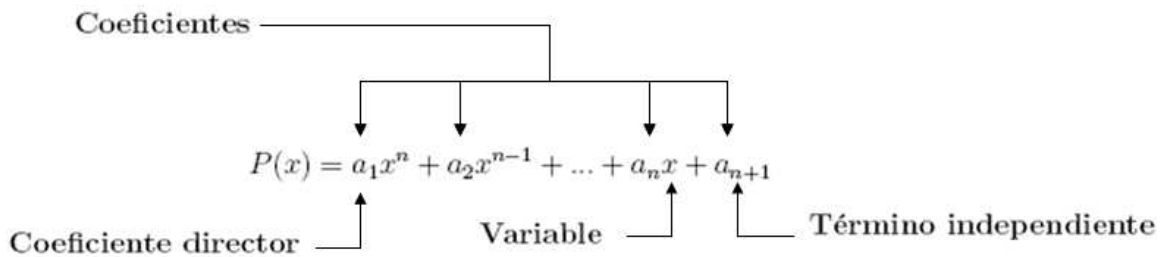


FIGURA 4.1. Nomenclatura de Polinomios

¹Es un programa de calculo técnico y científico que permitió realizar los cálculos con vectores de forma rápida y efectiva, además de poseer una optima capacidad para la obtención de los gráficos.

EJEMPLO 4.4. El polinomio x^2 se representa mediante el vector:

$$[1 \ 0 \ 0]$$

mientras que

$$[1]$$

representa al polinomio constante 1.

Para operar con polinomios en MATLAB, hay que traducir a operaciones con vectores las correspondientes operaciones con polinomios. Como la suma, resta y producto por un escalar se efectúan término a término, basta operar con los coeficientes de cada término. Para sumar o restar en MATLAB polinomios de distinto grado, hay que representarlos como vectores en la misma longitud.

EJEMPLO 4.5. Si sumamos $p(x) = x^2$ con $q(x) = 3$ en MATLAB hacemos:

```
>> p=[1 0 0];
>> q=[0 0 3];
>> p+q
ans =
1     0     3
```

La manera más habitual de iniciar un polinomio es utilizando la función *poly* la cual inicia un polinomio. Si el argumento del polinomio es una matriz cuadrada devuelve el polinomio característico, si es un vector devuelve un polinomio cuyas raíces son los elementos del vector. También son muy útiles las funciones *polyval* la cual calcula el valor del polinomio en el punto dado, *conv* multiplica dos polinomios, *polyder* deriva un polinomio, *polyint* integra analíticamente un polinomio, *roots* devuelve las raíces del polinomio cuyos coeficientes son los elementos del vector argumento.

El procedimiento que se utilizó para realizar los cálculos del polinomio en MATLAB son:

- (1) Función coeficientes: función que permite obtener los valores de los coeficientes del polinomio cuya variable viene dada por la relación $y_1 = \frac{v_{s2}}{v_{p1}}$ mediante un vector columna.

function

```

[A]=Coeficientes(ro1,ro2,theta1,theta2,phi1,phi2,R,vs1,vp2)
D=zeros(1,24); C=zeros(1,26); B=zeros(1,14); A=zeros(1,6);
D(24)=ro1^2*(R-1);
D(23)=ro1^2*(R-1)*cos(theta2)*cos(phi2);
D(22)=4*ro2^2*(R-1)*cos(theta1)*cos(theta2)*cos(phi1)*cos(phi2);
D(21)=4*ro2^2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi2);
D(20)=2*ro1*ro2*(R+1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(19)=4*ro1*ro2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi2);
D(18)=2*ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi2);
D(17)=-ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(theta2)*cos(phi1)*cos(phi2);
D(16)=4*ro1*ro2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi1);
D(15)=4*ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi2);
D(14)=-2*ro1^2*(R+1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(13)=2*ro1^2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi1);
D(12)=-2*ro2^2*(R+1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(11)=2*ro2^2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi1);
D(10)=-2*ro1*ro2*(R+1);
D(9)=ro1*ro2*(R+1)*cos(theta2)*cos(phi1);
D(8)=ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi2);
D(7)=4*ro1^2*(R-1)*cos(theta1)*cos(theta2)*cos(phi1)*cos(phi2);
D(6)=4*ro1^2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(5)=8*ro1*ro2*(R+1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(4)=8*ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi2);
D(3)=4*ro1*ro2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi1);
D(2)=R+1;
D(1)=ro2^2*(R-1)*cos(theta1)*cos(phi1);
C(26)=D(2)*sin(theta1)*sin(phi2)+D(8)
+D(10)*sin(theta1)*sin(phi2)+sin(theta1)*sin(phi2)*D(24);
C(25)=D(7)*(sin(theta2))^2;
C(24)=[D(4)-2*D(8)-2*sin(theta1)*sin(phi2)*D(10)
-4*D(24)*sin(theta1)*sin(phi2)]*(sin(theta2))^2;

```

$$\begin{aligned}
C(23) &= 4 * D(24) * (\sin(\theta_2))^4 * \sin(\theta_1) * \sin(\phi_2); \\
C(22) &= (\sin(\theta_1))^2 * D(17); \\
C(21) &= (-2 * D(8) - 2 * \sin(\theta_1) * \sin(\phi_2) * D(10) + D(18)) * (\sin(\theta_1))^2; \\
C(20) &= [-2 * D(4) + 4 * D(8) + 4 * \sin(\theta_1) * \sin(\phi_2) \\
&+ D(15) - 2 * D(18)] * (\sin(\theta_1))^2 * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(19) &= D(16) * (\sin(\theta_1))^4; \\
C(18) &= D(23); \\
C(17) &= -4 * D(23) * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(16) &= D(23) * (\sin(\theta_2))^4; \\
C(15) &= D(19) * (\sin(\theta_1))^2; \\
C(14) &= -2 * D(19) * (\sin(\theta_1))^2 * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(13) &= D(21) * (\sin(\theta_1))^4; \\
C(12) &= D(22) * (\sin(\theta_1))^2; \\
C(11) &= D(9); \\
C(10) &= (-2 * D(9) + D(13)) * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(9) &= -2 * D(3) * (\sin(\theta_2))^4; \\
C(8) &= (-2 * D(9) + D(11)) * (\sin(\theta_1))^2; \\
C(7) &= 4 * D(9) * (\sin(\theta_1))^2 * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(6) &= -2 * D(11) * (\sin(\theta_1))^4; \\
C(5) &= (D(3) + D(5) + D(14)) * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(4) &= (D(6) - 2 * D(14)) * (\sin(\theta_2))^4; \\
C(3) &= (-2 * D(3) - 2 * D(5) - 2 * D(20)) * (\sin(\theta_1))^2 * (\sin(\theta_2))^2; \\
C(2) &= (-4 * D(1) + D(12) + D(20)) * (\sin(\theta_1))^2; \\
C(1) &= (4 * D(1) - 2 * D(12)) * (\sin(\theta_1))^4; \\
B(14) &= (\sin(\phi_2) / \sin(\phi_1)) * C(11) + C(18) + (\sin(\theta_2) / \sin(\theta_1)) * C(26); \\
B(13) &= (\sin(\phi_2) / \sin(\phi_1)) * C(10) + C(17) + (\sin(\theta_2) / \sin(\theta_1)) * C(24); \\
B(12) &= (\sin(\theta_2) / \sin(\theta_1)) * C(25); \\
B(11) &= (\sin(\phi_2) / \sin(\phi_1)) * C(9) + C(16) + (\sin(\theta_2) / \sin(\theta_1)) * C(23); \\
B(10) &= C(5); \\
B(9) &= C(4); \\
B(8) &= (\sin(\phi_2) / \sin(\phi_1)) * C(8) + (\sin(\theta_2) / \sin(\theta_1)) * C(21) + C(15);
\end{aligned}$$

```

B(7)=C(22);
B(6)=(sin(phi2)/sin(phi1))*C(7)+C(14)+(sin(theta2)/sin(theta1))*C(20);
B(5)=C(2);
B(4)=(sin(phi2)/sin(phi1))*C(12);
B(3)=C(3)+(sin(theta2)/sin(theta1))*C(19);
B(2)=(sin(phi2)/sin(phi1))*C(6)+C(13);
B(1)=C(1);
y2=vs1/vp2;
A(1)=B(1);
A(2)=y2*B(2);
A(3)=y2^2*B(3)+y2*B(4)+B(5);
A(4)=y2^3*B(6)+y2^2*B(7)+y2*B(8);
A(5)=y2^4*B(9)+y2^2*B(10);
A(6)=y2^5*B(11)+y2^4*B(12)+y2^3*B(13)+y2*B(14)
return

```

La función de MATLAB que se uso para obtener los valores de los coeficientes es:

- zeros(m,n): Crea una matriz de ceros de m filas y n columnas.

- (2) Función Polinomio: función que permite expresar el polinomio con los coeficientes dados.

```

function [w]=polinomio(x,A)
w=[A(1)*x^5+A(2)*x^4+A(3)*x^3+A(4)*x^2+A(5)*x+A(6)]/3000;
return

```

- (3) Función main: función que permite calcular los coeficientes del polinomio y sus raíces, además de crear un gráfico del comportamiento del polinomio.

```

clear all
close all
clc

```

```

[M]=Coeficientes
(2,1.9,0.698131701,0.685291296,0.301205034,0.435612018,-0.054,4267,6500);

```

```

x=-0.9:3.3/10000:2.5;

for i=1:length(x)
    y(i)=polinomio(x(i),M);
end

u=-1:3.5/10000:2.5;

v=zeros(1,length(u));

plot(x,y,'green');

plot(u,v,'black')

r=roots(M)

```

Las funciones que se utilizaron son:

- length: Describe la longitud del entorno en el que se desea trabajar.
- roots: Obtiene todas las raíces de un polinomio construyendo la matriz asociada al polinomio (considerado característico) y obteniendo los valores propios de dicha matriz.

```
A = diag(ones(n-1,1),-1);
```

```
A(1,:) = -c(2:n+1)./c(1);
```

```
eig(A)
```

El algoritmo transforma el polinomio $P(x)$ en un polinomio característico ${}^2P(\lambda)$ para así hallar los autovalores propios ³ del mismo que a su vez son las raíces del polinomio $P(x)$.

²Sea \mathbb{K} un cuerpo y $A_{n \times n}$ una matriz cuadrada sobre \mathbb{K} el polinomio característico de A denotado por $P(\lambda)$, es el polinomio definido por $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ donde $I_{n \times n}$ denota la matriz identidad

³Los autovalores propios son las raíces del polinomio $P(\lambda)$

EJEMPLO 4.6. Sea $P(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36$,

Luego la matriz asociada a $P(x)$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 36 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

luego

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\begin{aligned} &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 24 & 36 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 36 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)\lambda^2 - 1(-24\lambda - 36) \end{aligned}$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - 24\lambda - 36$$

Luego, haciendo $P(\lambda) = 0$ se obtienen los autovalores $\lambda = 6, \lambda = -3, \lambda = -2$. que a su vez son las raíces del polinomio $P(x)$.

- plot2: Permite graficar curvas en 2 Dimensiones.

3. Modelo AVO como un polinomio de quinto grado.

Como hemos visto, los procesos de reflexión y transmisión sísmica están controlados por los parámetros elásticos de los medios en contacto, específicamente, densidades y velocidades de propagación de las ondas, tanto de las ondas P (v_p) como de las ondas S (v_s), así como sus ángulos de incidencia, reflexión y transmisión.

Geofísicamente queremos estudiar un modelo que nos permita entender los fenómenos sísmicos, es por ello que consideraremos un modelo de arena-gas basado en la ecuación de Zoeppritz y que nos muestra el coeficiente de reflexión para cuatro ángulos de incidencia diferentes, usando como datos del modelo las densidades de la roca en los distintos medios y las velocidades de las ondas correspondientes al modelo. Todos estos datos están descritos a continuación en la siguiente tabla.

Coefficiente de Reflexión (R_{pp}) para un medio Arena-Gas

θ_1°	θ_1^{rad}	ρ_1	ρ_2	v_{p1}	v_{p2}	v_{s1}	v_{s2}	R
10	0,087	2	1,9	6500	6400	3000	4267	-0.019
20	0,174	2	1,9	6500	6400	3000	4267	-0.027
30	0,523	2	1,9	6500	6400	3000	4267	-0.039
40	0,698	2	1,9	6500	6400	3000	4267	-0.054

Estos datos fueron suministrados por el Consortium for Research in Elastic Wave Exploration Seismology (CREWES)[18]

luego, usando estos datos y la ley de Snell, podemos hallar:

- (1) El ángulo de incidencia y reflexión de la onda P en el medio 2 que viene dado por la expresión

$$(4.1) \quad \theta_2 = \arcsin\left(\frac{v_{p2}}{v_{p1}} \sin \theta_1\right).$$

- (2) El ángulo de incidencia y reflexión de la onda S en el medio 1 que viene dado por la expresión

$$(4.2) \quad \psi_1 = \arcsin\left(\frac{v_{s1}}{v_{p1}} \sin \theta_1\right).$$

- (3) El ángulo de incidencia y reflexión de la onda S en el medio 2 que viene dado por la expresión

$$(4.3) \quad \psi_2 = \arcsin\left(\frac{v_{s2}}{v_{p1}} \cos \theta_1\right).$$

De esta manera se obtienen todos los datos necesarios para calcular los coeficientes del polinomio:

$$A_5 y_1^5 + A_4 y_1^4 + A_3 y_1^3 + A_2 y_1^2 + A_1 y_1 + A_0 = 0$$

Cuya variable depende de la relación $y_1 = \frac{v_{s2}}{v_{p1}}$.

Estos datos se muestran a continuación en la siguiente tabla.

Tabla de datos para la relación $\left(\frac{v_{s2}}{v_{p1}}\right)$

ρ_1	ρ_2	θ_1°	θ_1^{rad}	θ_2^{rad}	ψ_1^{rad}	ψ_2^{rad}	R	v_{p2}	v_{s1}
2	1,9	10	0,174	0,171	0,080	0,114	-0.019	6400	3000
2	1,9	20	0,349	0,343	0,158	0,226	-0.027	6400	3000
2	1,9	30	0,523	0,514	0,232	0,334	-0.039	6400	3000
2	1,9	40	0,698	0,685	0,301	0,435	-0.054	6400	3000

Ahora usando los datos referidos a el ángulo $\theta_1 = 40^\circ$ e introduciéndolos en el programa de MATLAB usando la función main se obtiene el siguiente gráfico que describe el comportamiento del polinomio para dicho ángulo.

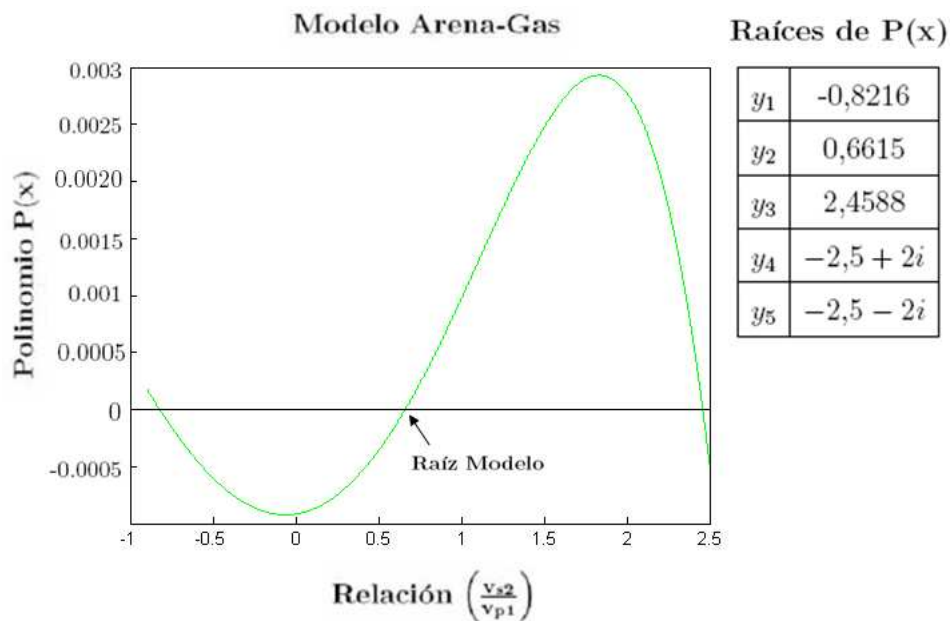


FIGURA 4.2. gráfica de la relación $\frac{v_{s2}}{v_{p1}}$ con respecto a P(x)

En el gráfico de la figura 4.2 se observa el polinomio de 5to grado como una función de la relación $\frac{v_{s2}}{v_{p1}}$ en el cual los puntos que intersectan al eje x son los ceros del polinomio, es decir, representan las raíces reales del mismo y por tanto sus soluciones. En este caso vemos como de las tres raíces reales halladas, una de ellas se aproxima a la raíz modelo del trabajo realizado por Paul M. Krail, en Rock Properties and Amplitude versus Angle.

Conclusión

Para los geofísicos la solución exacta al problema de reflexión y transmisión de ondas en la interface entre dos medios isótropicos, homogéneos y elásticos representa un trabajo complicado ya que no es fácil invertir la ecuación de Zoeppritz para obtener los parámetros elásticos relacionados con las velocidades de las ondas en los distintos medios y las densidades involucradas en el proceso; es por ello que la obtención de esta información es obtenida a través de soluciones aproximadas a la ecuación de Zoeppritz, cabe destacar que estas aproximaciones están sujetas a ciertas limitaciones. El presente trabajo especial de grado tiene como objetivo fundamental ofrecer a los geofísicos un procedimiento alternativo, practico y eficiente para conocer las propiedades del subsuelo. A continuación se presenta una descripción general del trabajo por capítulos.

Para el Capítulo 1 se trataron conceptos preliminares que constituyen el asiento para el estudio del problema de AVO (Amplitude Variation with Offset), entre estos conceptos resaltan las Ecuaciones en Derivadas Parciales de segundo orden del tipo hiperbólico la cual representan una base fundamental para el estudio de la propagación de Ondas, así como los métodos sísmicos que se basan en el fenómeno de propagación de ondas en medios elásticos, se analizó la propagación de ondas del tipo compressional u ondas P y las ondas de cizalla u ondas S utilizando los conceptos de divergencia y rotacional para obtener los potenciales de desplazamiento dilatacional y de cizalla que permitió obtener la ecuación de ondas en términos de los potenciales.

En el Capítulo 2 se introdujo un problema en el cual se propaga una onda elastica a través de un medio isótropo y el vacío, se estudió la reflexión de esta en la interface, usando para ello las condiciones de borde tales como la continuidad de los esfuerzos y/o desplazamientos normales y tangenciales, los datos obtenidos generaron 2 expresiones algebraicas que representan los coeficientes de reflexión de las ondas $P_{\downarrow}P_{\uparrow}$ y $P_{\downarrow}S_{\uparrow}$ la cual representan las ondas directas y convertidas respectivamente. Estas Expresiones son manipuladas algebraicamente para obtener en el caso de la onda directa la expresión:

$$R = \frac{A-B}{A+B}$$

Donde A y B contienen los ángulos y demás parámetros de la roca (velocidades de las ondas P y S, densidades de la roca, etc). Es importante destacar que esta expresión es publicada en el artículo [1], sin embargo no se detalla como se obtuvo. Además de esto, se logró una expresión para el caso de la onda convertida. Luego se realizó una operación algebraica que permitió expresar el coeficiente de reflexión $P_{\downarrow}P_{\uparrow}$ como un polinomio de 2do grado en el cual la variable desconocida depende de la relación de los parámetros elásticos $\frac{v_s}{v_p}$.

En el Capítulo 3 se presentó el problema de la propagación de una onda elástica, plana a través de dos medios isótropos y en el cual se estudió la reflexión y transmisión de las diferentes ondas derivadas de las ondas P y S, obteniendo así 16 formulas que representan 16 coeficientes entre reflexión y transmisión. Es importante destacar que de los 16 coeficientes, generalmente se tienen interés geofísico en los que están relacionados con las ondas directas ($P_{\downarrow}P_{\uparrow}$) y las ondas convertidas ($P_{\downarrow}S_{\uparrow}$). Luego, al igual que en el artículo [1], obtuve la expresión:

$$R = \frac{A-B}{A+B}$$

Donde al igual que en el capítulo 2 los valores de A y B contienen los ángulos y demás parámetros de la roca. Y luego a través de operaciones algebraicas complicadas convertí esta expresión en dos polinomios de 5to grado la cual van a representar 2 formas de inversión exacta de la ecuación de Zoeppritz y tiene como finalidad ofrecer a los geofísicos un procedimiento alternativo, práctico y eficiente para conocer las propiedades del subsuelo.

En el Capítulo 4 se explica porque el polinomio de 5to grado constituye una herramienta útil para obtener una solución real al problema de AVO (Amplitude Variation with Offset), al mismo tiempo se elaboró un gráfico a partir de un modelo Arena-Gas, en el que se evidenciaron tres raíces reales, de las cuales una de estas es idéntica a la raíz hallada en el artículo [1], es importante destacar que la raíz coincide con el cociente de $\frac{v_s^2}{v_p^1}$ para dicho modelo, destacando con esto la validez del polinomio y del trabajo realizado.

Para una próxima publicación, tengo el interés de trabajar con el coeficiente de reflexión de la onda compartida, además de establecer una relación de simetría con los restantes coeficientes de reflexión y transmisión que se generan a partir de las ecuaciones de Zoeppritz. Esto motivado a que hasta ahora no hay resultados en ese sentido.

Bibliografía

- [1] PAUL M. KRAIL, Rock Properties and Amplitude versus Angle, Geo Design Services, Houston, Texas, U.S, p. 986-988. 2, 21, 32, 43, 58
- [2] EDUARDO SAEZ S, Formas normales de Ecuaciones Diferenciales Parciales, Departamento de Matemática UTFSM, Valparaiso, Chile, 2009. 3
- [3] MANUEL MAÑAS BAENA AND LUIS MARTÍNEZ ALONSO, Ecuaciones Diferenciales II, Departamento de Física teorica II, Universidad Complutense de Madrid, España, 2003. 5
- [4] LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M. Teoria de la Elasticidad. Volumen 7. *Editorial Reverte, Barcelona*, 1969. 13, 15, 21, 23, 25
- [5] LANDAU L. D., LIFSHITZ E. M. Hydrodynamics. Volumen 6. *Pergamon Press, New York*, 1987. 13
- [6] BEVAN B. BAKER, E. T., The Mathematical Theory of Huygens Principle, *Copson, American Mathematical Society*, New York, Chelsea, 1987. 16
- [7] KARL. ZOEPPRITZ, on reflection and propagation of seismic waves, *Gottinger Nachrichten*, 1919. 17
- [8] KEIITI AKY AND PAUL G. RICHARDS Quantitative Seismology. theory and methods. volumen I. *W.H.Freeman and Company, New York*, 1980. 17, 21, 26, 27, 40
- [9] CASTAGNA 1993 17
- [10] SHUEY, R.T., A simplification of the Zoeppritz equations, *Geophysical* 50,p. 609-614. 17
- [11] HILTERMAN, F.J. Elastic moduli to seismic velocity, Part of and seg continuing education course on seismic lithologic, Huston, Texas, 1985. 17, 19
- [12] PAN, N.D; AND GARDNER, G.H.F, Aproximation of reflection coefficients with application to amplitude versus offset analysis, *Seismic Acustics Laboratory Semi-Annual Progrees Review*, 1985. 17, 19
- [13] BORTFELD, R;, Aproximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves, *Geophysical Prospecting*,1961. 17
- [14] ARNOLD SOMMERFELD, Mechanics of deformable bodies, *illustrated, Academic Press*, 1950. 25
- [15] JOSE REGUEIRO S Amplitud Vs. Offset. Centro Internacional de Educación y desarrollo, Filial de Petroleos de Venezuela S.A, 1997. 20, 23
- [16] RICHARD L. BURDEN AND J. DOUGLAS FAIRES, Analisis numerico, *Cengage Learning Editores*, 2002. 47, 48
- [17] ALICIA CORDERO BARBERO, Metodos numericos con Matlab, *Universidad Politecnica de Valencia*, 2005. 48
- [18] CREWES, Consortium for Research in Elastic Wave Exploration Seismology, *www.crewes.org*. 55

Índice alfabético