UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

El criterio del Cociente para la integral de Henstock-Kurzweil

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Jhony Rojas Burguillo** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Prof. Maicol Ochoa.

Caracas, Venezuela
2 de octubre de 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**El criterio del Cociente para la integral de Henstock-Kurzweil**", presentado por el **Br. Jhony Rojas**, titular de la Cédula de Identidad **18.271.539**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Maicol Ochoa
Tutor

Mayra Montilla
Tutora administrativa

Marisela Domínguez
Jurado

Ramón Bruzual
Jurado

Agradecimiento

Agradezco a Dios, a mis padres, a mi tutor y a mi tutora administrativa.

Índice general

Introducción

Para que una función pertenezca al conjunto de las funciones Riemann integrables, ésta debe ser definida y acotada en un intervalo cerrado, y es integrable en el sentido Riemann si y sólo si el conjunto de discontinuidades de la función tiene medida nula. La integral de Lebesgue posee ciertas ventajas respecto a la integral de Riemann, a continuación se enumeran unas de ellas:

1. Para que una función sea Lebesgue integrable, ésta no debe ser continua necesariamente. Aunque una función no necesita ser continua para ser Riemann integrable, esta condición es suficiente, pero no necesaria.
2. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones acotadas uniformemente que convergen a f en el intervalo $[a,b]$, entonces f es Lebesgue integrable en $[a,b]$, y se tiene que

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

3. Si F tiene derivada acotada en el intervalo $[a,b]$, entonces F' es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y para cada $x \in [a,b]$ se tiene que

$$\int_{[a,x]} F' = F(x) - F(a).$$

A pesar de estas ventajas significativas de la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann, y que quede en evidencia que el conjunto de funciones Lebesgue integrables es mucho más amplio que el conjunto de las funciones Riemann integrables, al comparar la integral de Lebesgue con la integral impropia de Riemann, queda en evidencia que ninguna integral es más general que la otra.

Para que la propiedad 3. se cumpla, es necesario tener como hipótesis que F' sea Lebesgue integrable en $[a,b]$. Por este motivo en 1912 A. Denjoy da una nueva teoría de integración, generalizando las definiciones de funciones Lebesgue integrables (ver [3], [5] y [13]).

Aunque la integral de Denjoy resuelve algunos problemas que la definición de la integral de Lebesgue no puede, la definición de la integral de Denjoy es complicada y también hay funciones que no pueden ser integrables por medio de esta teoría.

De manera independiente en 1914, O. Perron da otra generalización de la integral de Lebesgue, donde muestra que toda función derivable es Perron integrable. La definición de esta integral está sustentada en gran parte sobre la teoría de derivación (ver [3], [5], [9] y [13]).

La integral de Henstock-Kurzweil es equivalente a la integral de Denjoy y Perron, pero a diferencia de estas, su definición no es tan complicada, y esta definición surge de una pequeña pero muy significante variación en la integral de Riemann, y por este motivo se dice que la integral de Henstock-Kurzweil es una generalización de la integral de Riemann.

En esta teoría de integración se consideran particiones con un punto distinguible de un intervalo, la cual es llamada partición etiquetada. Al igual que Riemann, en la integral de Henstock-Kurzweil se consideran las sumas de Riemann, y por tal motivo, se da una caracterización de esta integral respecto al criterio de Cauchy, la cual es una característica bastante peculiar de esta integral.

Por último, se da un criterio de integrabilidad por comparación de las funciones Henstock-Kurzweil integrables, considerando dos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrables en $[a, c]$, para todo $a \leq c < b$. Para $f(t) \geq 0$ y $g(t) > 0$ para cualquier $t \in [a, b]$, y suponiendo que el límite

$$\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = L$$

existe para $L \in [-\infty, \infty]$ y analizando el valor de L, se deduce que

(1) Si $L = 0$ y g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

(2) Si L es finito y positivo, entonces g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ si y solo si f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

(3) Si L es infinito y f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, entonces g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

El cual es un ejercicio de alta dificultad propuesto en la referencia principal de este trabajo de grado (ver [3]), y es el ejercicio a resolver.

Además se prueba la equivalencia entre la integral de Lebesgue y la integral de Henstock-Kurzweil y otras propiedades en el espacio de las funciones Henstock-Kurzweil integrables.

CAPíTULO 1

La integral de Lebesgue abstracta

En este capítulo no se construye la integral de Lebesgue comenzando desde la construcción de una medida, para una referencia de esto se pueden ver los libros [1], [3], [5], [9], [13] y [15]. Para construir la integral de Lebesgue en abstracto, deben verse una serie de definiciones, lemas y teoremas que son de gran importancia para poder definir esta integral, pasando por el Teorema de Aproximación el cual marca de manera significativa la teoría de integración de Lebesgue, hasta llegar al Teorema de Beppo-Levy que se usa para demostrar una ventaja significante que tiene la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann.

Considérese X un conjunto cualquiera. Se denota por $\mathcal{P}(X)$ a la clase de todos los subconjuntos de X.

Definición 1.1.

Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X, si ocurre que

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$.
2. Si $A \in \mathcal{C}$, entonces $A^c \in \mathcal{C}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{C}$.
4. Para $i \in \mathcal{I}$ y $A_i \in \mathcal{C}$, se tiene que

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{C},$$

donde $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices.

Definición 1.2.

Sea X un conjunto cualquiera y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra de súbconjuntos de X. El par $(X, \mathcal{A})$ se define como espacio medible.

Definición 1.3.

Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. μ es positiva si para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\mu(A) \geq 0.$$

3. μ es σ-aditiva si dada una sucesión disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y tal que si $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_i\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

Se dice que una propiedad se cumple en *casi todo punto* respecto a la medida μ, si el conjunto donde no se cumple la propiedad está contenido en un conjunto de medida nula. Esta propiedad se denota por $c.t.p - \mu$.

Definición 1.4.

Sea X un conjunto cualquiera, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una σ-álgebra de súbconjuntos de X y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida. La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se define como espacio de medida.

Definición 1.5.

Sean X e Y espacios cualesquiera y $A \subset X$, $B \subset Y$ conjuntos cualesquiera y $f : X \to Y$ una función, se define:

1. La *imagen directa* de A a través de f como el conjunto

$$f[A] = \{f(x) : \ x \in A\}.$$

2. La *imagen inversa* de B a través de f como el conjunto

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : \ f(x) \in B\}.$$

El siguiente es un resultado clsico de la teoría elemental de conjuntos, su prueba puede verse en [9].

Lema 1.6.

Sean X, Y espacios cualesquiera y $f : X \to Y$ una función. Entonces:

a. *Si* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de subconjuntos de* Y*, entonces:*

$$f^{-1}\left[\bigcap_{n\geq 1} B_n\right] = \bigcap_{n\geq 1} f^{-1}[B_n].$$

b. *Si* $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de subconjuntos de* Y*, entonces:*

$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\geq 1} B_n\right] = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}[B_n].$$

c. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección numerable de subconjuntos de* X*, entonces:*

$$f\left[\bigcup_{n\geq 1} A_n\right] = \bigcup_{n\geq 1} f[A_n].$$

d. *Si* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección de subconjuntos de* X*, entonces:*

$$f\left[\bigcap_{n\geq 1} C_n\right] \subset \bigcap_{n\geq 1} f[C_n].$$

e. *Si* $B \subset Y$*, entonces*

$$f^{-1}[B^c] = \left(f^{-1}[B]\right)^c$$

Definición 1.7.

Sean $(X, \mathcal{A}_x), (Y, \mathcal{A}_y)$ dos espacios medibles y $f : X \to Y$ una función.

Se dice que f es $\mathcal{A}_x/\mathcal{A}_y - medible$ si ocurre que $f^{-1}[A] \in \mathcal{A}_x$ para todo $A \in \mathcal{A}_y$.

En particular se tratan los casos:

1. Si $(Y, \mathcal{A}_y) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces las funciones $\mathcal{A}_x/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medibles, se llaman $Borel - medibles$.

2. Si $(Y, \mathcal{A}_y) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$, entonces las funciones $\mathcal{A}_x/\mathcal{L}(\mathbb{R})$-medibles, se llaman $Lebesgue - medibles$.

Teorema 1.8.

Sean $(X, \mathcal{A}_x), (Y, \mathcal{A}_y)$ *dos espacios medibles. Supóngase que* $\mathcal{A}_y = \sigma(\mathcal{C})$ *para cierta clase* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* Y*. Sea* $f : X \to Y$ *una función. Entonces* f *es* $\mathcal{A}_x/\mathcal{A}_y$*-medible si y solo si* $f^{-1}[C] \in \mathcal{A}_x$ *para toda* $C \in \mathcal{C}$*.*

Demostración.

Sean $(X, \mathcal{A}_x), (Y, \mathcal{A}_y)$ dos espacios medibles y $f : X \to Y$ una función.

Supóngase que $\mathcal{A}_y = \sigma(\mathcal{C})$ para cierta clase $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Y.

Si f es $\mathcal{A}_x/\mathcal{A}_y$-medible por definición se tiene para toda $C \in \mathcal{C}$

$$f^{-1}[C] \in \mathcal{A}_x.$$

Supóngase ahora que $f^{-1}[C] \in \mathcal{A}_x$ para toda $C \in \mathcal{C}$.

Sea $H = \{B \subset Y : \ f^{-1}[B] \in \mathcal{A}_x\}$.

Se prueba que H es σ-álgebra y que $\mathcal{C} \subset H$.

Por hipótesis se tiene que $\mathcal{C} \subset H$. Por otro lado

1. Es claro que $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \in \mathcal{A}_x$, por lo que $\emptyset \in H$.

2. Para $B \in H$
$$f^{-1}[B^c] = (f^{-1}[B])^c \in \mathcal{A}_x,$$
por lo que $B^c \in H$.

3. Para $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$
$$f^{-1}\left[\bigcup_{n\geq 1} B_n\right] = \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}[B_n] \in \mathcal{A}_x,$$
por tanto $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in H$.

Así se prueba que $\mathcal{A}_y \subset H$ y para todo $A \in \mathcal{A}_y$ se cumple que

$$f^{-1}[A] \in \mathcal{A}_x,$$

por lo que f es $\mathcal{A}_x/\mathcal{A}_y$-medible.

De esta manera se prueba el teorema. □

Corolario 1.9.

Sean $(X, \mathcal{A}_x)$ un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es Borel-medible si y solo si:

1. $\{f^{-1}[(-\infty, c)] : \ c \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}_x$.

2. $\{f^{-1}[(c, \infty)] : \ c \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{A}_x$.

Este resultado se obtiene de forma inmediata aplicando el teorema previo.

Teorema 1.10.

Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones Borel-medibles y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Entonces:

a. *El conjunto $\{x \in X : \ f(x) > g(x)\}$ es medible.*

b. *$f + \alpha$ es Borel-medible.*

c. *$\alpha.f$ es Borel-medible.*

d. *$f + g$ es Borel-medible.*

e. *f^2 es Borel-medible.*

f. *$f.g$ es Borel-medible.*

Demostración.

Para una prueba de este teorema, ver [9]. □

Definición 1.11.

Sean $(X, \mathcal{A}_x)$ un espacio medible y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones Borel-medibles, tales que $f_n : X \to \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $c \in \mathbb{R}$ se define:

1. El *límite superior* de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como

$$\limsup_{n\geq 1} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n}(f_k) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{x \in X : \ f_k(x) < c\}.$$

2. El *límite inferior* de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como

$$\liminf_{n\geq 1} f_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n}(f_k) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{x \in X : \ f_k(x) < c\}.$$

Se dice que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene *límite*, si ocurre que

$$\limsup_{n\geq 1} f_n = \liminf_{n\geq 1} f_n,$$

y se denota por

$$\lim_{n\geq 1} f_n.$$

TEOREMA 1.12.

Sea $(X, \mathcal{A}_x)$ un espacio medible. Supóngase que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ es una función Borel-medible. Entonces:

1. $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ *e* $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ *son Borel-medibles.*

2. $\limsup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ *y* $\liminf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ *son Borel-medibles.*

3. *El límite puntual de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuando exista, es Borel-medible.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $(X, \mathcal{A}_x)$ un espacio medible. Supóngase que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones Borel-medibles tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n : X \to \mathbb{R}$.

1. Sea $h(x) = \sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

   Para toda $c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}\{x \in X : h(x) < c\} &= \{x \in X : f_n(x) < c,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}\\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < c\} \in \mathcal{A}_x.\end{aligned}$$

   Sea $g(x) = \inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\{x \in X : g(x) < c\} &= \{x \in X : f_n(x) < c, \text{para algún } n \in \mathbb{N}\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < c\} \in \mathcal{A}_x.\end{aligned}$$

   Así pues $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ e $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ son Borel-medibles.

2. Para $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$, se tiene por definición que

$$\limsup_{n\geq 1} f_n(x) = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{x \in X : f_k(x) < c\}$$

y

$$\liminf_{n\geq 1} f_n(x) = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} \{x \in X : f_k(x) < c\}.$$

Usando el resultado anterior, se tiene que $\limsup_{n\geq 1} f_n(x)$ y $\liminf_{n\geq 1} f_n(x)$ son Borel-medibles.

3. Si existe $\lim_{n\geq 1} f_n(x)$ por definición se tiene que

$$\lim_{n\geq 1} f_n(x) = \limsup_{n\geq 1} f_n(x).$$

De esta manera $\lim_{n\geq 1} f_n(x)$ es Borel-medible.

De esta manera se demuestra el teorema. □

Definición 1.13.
Sea $(X, \mathcal{A}_x, \mu)$ un espacio de medida.
Sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones. Se define como:

1. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a f en ctp-μ* si existe un conjunto $A \subset X$ tal que $\mu(A) = 0$ y para todo $x \in A^c$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$.

2. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en $ctp - \mu$* si existe un conjunto $A \subset X$ tal que $\mu(A) = 0$ y para toda $x \in A^c$ la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

3. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a f* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para toda $n > N_\varepsilon$ para toda $x \in X$.

4. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a f uniformemente en ctp-μ* si existe $A \subset X$ tal que $\mu(A) = 0$ y f_n converge uniformemente en A^c.

5. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a f* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $A_\varepsilon \subset \mathcal{A}_x$ tal que $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ y f_n converge a f uniformemente en A^c.

6. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a f en medida* si para todo $\delta > 0$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} = 0.$$

Definición 1.14.

Si A es un subconjunto cualquiera del espacio X, la *función indicatriz de A* es la aplicación $\chi_A : X \to \{0,1\}$ tal que

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Definición 1.15.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida.

Una función $s : X \to [-\infty, \infty]$ se dice *simple* si s tiene rango finito.

Sea $s : X \to [-\infty, \infty]$ una función simple y supóngase que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los distintos valores que toma s. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $A_i = \{x \in X : \ s(x) = \alpha_i\}$. Se tiene que

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Nótese que s es Borel-medible si y solo si cada A_i es un conjunto medible. Además se tiene que

$$A_i = s^{-1}[\{\alpha_i\}],$$

por lo que los conjuntos A_i son mutuamente disjuntos y compactos, por lo que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Se denota por $\mathcal{S}$ al conjunto de las funciones simples con coeficientes no negativos definidas en X.

Lema 1.16.

Si $f, g \in \mathcal{S}$ entonces:

1. $f + g \in \mathcal{S}$.
2. *Para todo $c \in [0, \infty)$ se tiene que $cf \in \mathcal{S}$.*

Demostración.

Para una prueba de este lema, ver [9]. $\square$

Teorema 1.17 (Aproximación).

Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función Borel-medible. Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ tal que $f_n \geq 0$ y para $x \in X$ se cumple que $f_n(x) \uparrow f(x)$. Si f es acotada, entonces la convergencia es uniforme.

Demostración.

Sean X un espacio y $f : X \to [0, \infty]$ una función Borel-medible.

Considérese el intervalo $[0, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Dividiendo el intervalo dado, en subintervalos de longitud $\dfrac{1}{2^n}$, se obtienen $n2^n$ subintervalos en total.

Sea $k \in [1, 2^n]$, y defínanse los conjuntos $A_{n,k}$ y B_n como

$$A_{n,k} = f^{-1}\left[\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right]$$

y

$$B_n = f^{-1}[[n, \infty)].$$

Como f es Borel-medible, se sigue que los conjuntos $A_{n,k}$ y B_n son medibles para todos n, k.

Definiendo las funciones f_n como

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} + n\chi_{B_n}(x)$$

de donde se obtiene que $0 \leq f_n(x) \leq n$.

Se prueba que $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n \in \mathbb{N}$ fijo, se tienen tres casos:

1. Si $f(x) < n$, existe $k \in \{1, \dots, n2^n\}$ tal que

$$f(x) \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right) = \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \bigcup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right).$$

De modo que

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = f_n(x),$$

o

$$f_{n+1}(x) = \frac{2k-1}{2^{n+1}} \geq f_n(x).$$

Así pues

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

2. Si

$$n < f(x) < n+1,$$

entonces existe un k tal que

$$n2^{n+1} \geq k \geq (n+1)2^{n+1} - 1$$

y

$$f(x) \in \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right).$$

De donde se tiene que

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x).$$

3. Si $n+1 < f(x)$ entonces

$$f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x).$$

Así para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n \leq f_{n+1}$.

Se prueba que para $x \in X$, $f_n(x) \to f(x)$.

Sea $x \in X$, entonces

(a) Si $f(x) = \infty$ entonces

$$f_n(x) = n \to \infty.$$

(b) Si $f(x) < \infty$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$.

Ahora para $n \geq N$ se cumple que $f(x) < n$, luego

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^n} = f_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

por lo que se obtiene la siguiente desigualdad

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } x \in X.$$

De esta manera f_n converge uniformemente a f.

Así se demuestra el teorema enunciado. □

Una pregunta natural es si el Teorema de Aproximación se puede generalizar al caso en que la función f sea medible y no necesariamente positiva.

Definición 1.18.

Sea $f : X \to [-\infty, \infty]$ se define:

1. La *parte positiva de* f como

$$f^+(x) = \text{máx}\{0, f(x)\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}.$$

2. La *parte negativa de* f como

$$f^-(x) = \text{máx}\{0, -f(x)\} = (-f)^+(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Es claro que para todo $x \in X$ se tiene que $f^+(x) \geq 0$ y $f^-(x) \geq 0$.

Nótese además que a la función f se puede expresar como

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

y

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Supóngase que f es una función Borel-medible, entonces las parte positiva y negativa de f también lo son.

Para extender el Teorema de Aproximación, basta notar que existen sucesiones $\{f_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{f_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $x \in X$ se tiene que $f_{1,n}(x) \uparrow f^+(x)$ y $f_{2,n}(x) \uparrow f^-(x)$.

Definiendo

$$h_n(x) = f_{1,n}(x) - f_{2,n}(x),$$

entonces $h_n \in \mathcal{S}$ y además h_n converge uniformemente a f.

Se define ahora la integral de Lebesgue para las funciones indicatriz, simple positiva, medible positiva y medible en general. Se adopta la convención $0.\infty = 0$.

Definición 1.19.

Sean X un espacio y A un subconjunto de X.

Sea $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ un función indicatriz.

Para todo $x \in X$ la integral de χ_A respecto a la medida μ, se define como

$$\int_X \chi_A(x)d\mu(x) := \mu(A).$$

Más aún

$$\int_X \chi_A(x)d\mu(x) = \int_A d\mu(x) = \mu(A).$$

DEFINICIÓN 1.20.

Sea $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función simple y no negativa, es decir

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

con $\alpha_i \geq 0$.

Para todo $x \in X$ se define la integral de f respecto a la medida μ como

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Véase que la integral de f está bien definida.

Supóngase que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$$

Basta notar que si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j (B_j)
\end{aligned}$$

Así pues la integral de f no depende de los coeficientes α_i, β_j.

TEOREMA 1.21.

Sean $f, g \in \mathcal{S}$ y $c \in [0, \infty)$. Entonces para todo $x \in X$ se tiene que:

1. $\displaystyle\int_X cf(x)d\mu(x) = c\int_X f(x)d\mu(x).$

2. $\displaystyle\int_X [f(x) + g(x)]d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x).$

3. *Si* $0 \leq f \leq g$, *entonces*
$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x).$$

Demostración.

Para una prueba ver [1], [3], [5] y [9]. □

Definición 1.22.

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to [0, \infty]$ una función Borel-medible.

Se define la integral de f respecto a la media μ como

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \sup\left\{\int_X s(x)d\mu(x) :\ s \in \mathcal{S},\ 0 \leq s \leq f\right\}.$$

Se dice que f es integrable, si este valor es finito.

Teorema 1.23.

Sean $f, g : X \to [0, \infty]$ *funciones Borel-medibles. Entonces:*

a. *Si* f *es integrable y* $c \geq 0$ *entonces* $c.f$ *es integrable y se cumple que*
$$\int_X cf(x)d\mu(x) = c\int_X f(x)d\mu(x).$$

b. *Si* f, g *son integrables, entonces* $f + g$ *es integrable y se cumple que*
$$\int_X [f(x) + g(x)]d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x).$$

c. *Si* $f \leq g$ *y son intagrables, entonces*
$$\int_X f(x)d\mu(x) \leq \int_X g(x)d\mu(x).$$

d. *Si* f *es integrable, entonces* $f < \infty$ *en c.t.p-*μ.

Demostración.

Para una prueba ver [3], [5] y [9]. □

Definición 1.24.

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función.

Usando la descomposición $f = f^+ - f^-$, la integral de f respecto a la medida μ se define como

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X f^+(x)d\mu(x) - \int_X f^-(x)d\mu(x)$$

siempre que la expresión tenga sentido.

Se dice que f es integrable si su integral es finita.

Se define el conjunto $\mathcal{L}_1(\mu)$ como

$$\mathcal{L}_1(\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es Borel medible y } \int_X f(x)d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Es decir, $\mathcal{L}_1(\mu)$ es el conjunto de las funciones medibles respecto a la medida μ.

Teorema 1.25.

Sean $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ funciones Borel-medibles. Entonces:

a. *Si $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $cf \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y además*

$$\int_X cf(x)d\mu(x) = c\int_X f(x)d\mu(x).$$

b. *Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ entonces $f + g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y se cumple que*

$$\int_X [f(x) + g(x)]d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x) + \int_X g(x)d\mu(x).$$

c. *Si $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y $f(x) \le g(x)$ para toda $x \in X$ entonces*

$$\int_X f(x)d\mu(x) \le \int_X g(x)d\mu(x).$$

d. *$f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ si y solo si $|f| \in \mathcal{L}_1(\mu)$y además*

$$\left|\int_X f(x)d\mu(x)\right| \le \int_X |f(x)|d\mu(x).$$

Demostración.

Para una prueba ver [3], [5] y [9]. □

A continuación se enuncia y demuestra un teorema que se usa para mostrar una de las ventajas de la Integral de Lebesgue respecto a la Integral de Riemann.

Teorema 1.26 (Beppo-Levy).

Sea $f_n : X \to [0, \infty]$ *una función medible tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $f_n \leq f_{n+1}$. *Entonces existe* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *es medible y además*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Demostración.

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f_n : X \to [0, \infty]$ una función medible tal que para $f_n \leq f_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por definición se observa que para todo $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, por lo que se tiene que el límite puntual existe, es no negativo y es medible.

Además se tiene que

$$f_n \leq f_{n+1} \leq f$$

Usando la monotonía de la integral

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \leq \int_X f(x) d\mu(x).$$

Tomando el límite cuando n tienda a infinito, se obtiene la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \leq \int_X f(x) d\mu(x).$$

Por otro lado, sea $s \in \mathcal{S}$ una función simple tal que

$$0 \leq s \leq f.$$

Para $0 < r < 1$, considérese el conjunto

$$B_n = \{x \in X : rs(x) \leq f_n(x)\}.$$

Por hipótesis se tiene que $f_n \uparrow f$. Ahora para cada $x \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$X = \bigcup_{n\geq 1} B_n,$$

es decir $B_n \uparrow X$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} s(x) d\mu(x) = \int_X s(x) d\mu(x).$$

Usando la monotonía de la integral

$$r \int_{B_n} s(x) d\mu(x) \leq \int_{B_n} f_n(x) d\mu(x) \leq \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Luego

$$\int_X s(x)d\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Tomando el supremo en la desigualdad anterior, se obtiene el resultado del teorema. $\square$

Después de ver estas propiedades de la integral de Lebesgue, es inevitable hacer una comparación respecto a la integral de Riemann. Al observar la definición de la integral de Riemann (se asume conocida por el lector) y al ver cómo se define la integral de Lebesgue se nota que ambas integrales están definidas para funciones en un intervalo $[a, b]$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Es fácil probar que todos los teoremas válidos para la integral de Riemann también son válidos para la integral de Lebesgue, además se demuestra que la integral de Riemann coincide con la integral de Lebesgue. Pero si esto es así, es natural preguntarse ¿para qué se inventó esta nueva teoría de integración si es igual a la teoría de integración de Riemann?.

A partir de 1890 las deficiencias que presenta la integral de Riemann se hicieron mucho más notorias, por este motivo Lebesgue realizó una nueva teoría de integración que lleva su nombre. A continuación se enumeran algunas de las limitaciones que presenta la integral de Riemann.

1. La clase de funciones Riemann integrables es pequeña, solo alcanza al conjunto cuyas funciones tienen una cantidad finita numerable de puntos de discontinuidades.
2. La integral de Riemann no tiene satisfactorias propiedades del límite, sin hipotesis adicionales no se puede pasar el límite por la integral.
3. En muchos casos la derivada de una función no es Riemann integrable.

Estas deficiencias de la integral de Riemann son resueltas por la integral de Lebesgue. Pero no basta con solo decirlo, véase lo siguiente.

Defínase la función $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales.

Ahora

- No importa cuán fina se tome una partición del intervalo $[0,1]$, todo subintervalo contendrá al menos un número racional y otro número irracional, puesto que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son densos en $\mathbb{R}$.

  De modo que toda suma superior es 1 y cualquier suma inferior es 0; en particular el ínfimo de toda suma superior es 1 y el supremo de toda suma inferior es 0.

  Como el supremo y el ínfimo mencionado no coinciden, se tiene que no existe la integral de Riemann para $\chi_{\mathbb{Q}}$.
- Por otro lado, dado que $\chi_{\mathbb{Q}}$ es una función indicadora, usando la teoría de integración de Lebesgue abstracta, se tiene que

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}} d\mu = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0,$$

  ya que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Así pués, $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es una función Riemann integrable pero sí es una función Lebesgue integrable.

De esta manera queda en manifiesto que existen funciones que no son Riemann integrables pero que sí son Lebesgue integrables, de modo que el conjunto de funciones Lebesgue integrable es mucho más grande que el de las funciones Riemann integrables.

Nótese ahora otra de las ventajas de la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann.

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles definidas en X con valores en $[0,\infty]$.

Para todo $x \in X$ se define

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x).$$

Nótese que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, defínase

$$h_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, se tiene que h_k es una función medible, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo que se construye una sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles.

Como cada f_n es positiva, puesto que $f : X \to [0,\infty]$, entonces h_k también es positiva, puesto que es suma finita de funciones positivas. Cada h_k está definida en el espacio X a valores de $[0,\infty]$.

Se observa que la familia de funciones $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Para toda $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} h_k(x) &= \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \\ &\leq \sum_{n=1}^{k} f_n(x) + f_{k+1}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{k+1} f_n(x) \\ &= h_{k+1}(x). \end{aligned}$$

De modo que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} h_k.$$

Así

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \lim_{k\to\infty} h_k(x)d\mu(x).$$

Por el Teorema de Beppo-Levy, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_X f(x)d\mu(x) &= \int_X \lim_{k\to\infty} h_k(x)d\mu(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_X h_k(x)d\mu(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_X \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n(x)d\mu(x) \\ &= \sum_{n\geq 1} \int_X f_n(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

De esta manera se tiene que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles definidas en X a valores de $[0,\infty]$, y para todo $x \in X$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x),$$

entonces

$$\int_X f(x)d\mu(x) = \int_X \sum_{n\geq 1} f_n(x)d\mu(x) = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n(x)d\mu(x).$$

Con esto se nota que la deficiencia de la integral de Riemann respecto al límite, queda resuelta con la integral de Lebesgue.

De esta manera se nota que la integral de Lebesgue es más versátil que la integral de Riemann presentando grandes ventajas respecto a ésta, además queda en evidencia que por éstas y por otras razones, la integral de Lebesgue es más general que la integral de Riemann.

CAPíTULO 2

Las integrales de Denjoy, Perron y Henstock-Kurzweil

1. La integral de Denjoy

En 1912, A. Denjoy desarrolló un proceso de integración que satisface el comentario hecho sobre la propiedad 3. de la introducción. Denjoy llamó al valor de su proceso como "totalización integral", y demostró que todos los criterios de las derivadas coincidian con el valor de la función original. Pero esta totalización es un proceso muy complicado puesto que involucra números transfinitos, por lo que pocos meses después del trabajo de Denjoy, Lusin usó la noción de continuidad absoluta para dar un nuevo enfoque de la integral de Denjoy. Este es el enfoque que se seguirá respecto a la integral de Denjoy en este capítulo (Ver [13]).

Definición 2.1.

Sea $X \subset [a,b]$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* en X, o de clase AC(X), si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda sucesión finita o infinita de intervalos disjuntos $\{[a_i,b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ se cumple que si $\sum_i |b_i - a_i| < \delta$ entonces

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

para todos $a_i, b_i \in X$ y para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2.

Sea $X \subset [a,b]$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que es *completamente continua* en X, o de clase $AC^*(X)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y para toda sucesión disjunta de intervalos en X, $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^n$ tal que si $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ entonces

$$\sum_{i=1}^n w(f;[a_i,b_i]) < \varepsilon.$$

Donde w denota las *oscilacione* de f en $[a,b]$, es decir

$$w(f;[a_i,b_i]) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \ x,y \in [a_i,b_i]\}.$$

Lema 2.3.

Sea $X \subset [a,b]$ *y* $(a,b)\backslash X$*, la unión de* (c_k, d_k) *para cada* $k \in \{1,2,\dots\}$*. Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua en* $[a,b]$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $f \in AC^*(X)$

(b) $f \in AC^*(X)$ *y*

$$\sum_{k\geq 1} w(f;[c_k,d_k]) < \infty.$$

(c) $f \in AC(X)$ *para* $a_i \in X$ *ó* $b_i \in X$*.*

Demostración.

Sea $X \subset [a,b]$ y $(a,b)\backslash X$ la unión de intervalos (c_k,d_k) para $k \in \{1,2,\dots\}$.

Sea f una función continua de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

Ahora:

1. Se prueba que $(a) \Rightarrow (b)$.

   Supóngase que $f \in AC^*(X)$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^n \subset X$ una sucesión de intervalos disjuntos, se tiene que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ entonces

$$\sum_{i=1}^n w(f;[a_i,b_i]) < n\varepsilon,$$

   más aún

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n w(f;[a_i,b_i]) < n\varepsilon = \sum_{i=1}^n &\sup\{|f(x)-f(y)| : \ x,y \in [a_i,b_i]\}\\ &< n\varepsilon.\end{aligned}$$

   Luego por definición de supremo, se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x)-f(y)| < \sum_{i=1}^n &w(f;[a_i,b_i])\\ &< n\varepsilon.\end{aligned}$$

   Tomando $n \to \infty$, se tiene que $f \in AC(X)$ y

$$\sum_{i\geq 1} w(f;[a_i,b_i]) < \infty.$$

2. Se prueba que $(b) \Rightarrow (c)$.

Para todo $\varepsilon > 0$, se elige un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k \geq N+1} w(f; [c_k, d_k]) < \varepsilon.$$

Puesto que $f \in AC(X)$, existe $\delta > 0$ tal que para toda sucesión finita o infinita de intervalos disjuntos $\{[a_i, b_i]\}_{i \in \mathbb{N}} \subset X$ con $a_i, b_i \in X$, satisface que $\sum_i |b_i - a_i| < \delta$ y entonces

$$\sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como f es continua, eligiendo el mismo $\delta > 0$ se tiene que si z es uno de los puntos de c_k, d_k para $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, y $|z - t| < \delta$ se tiene que

$$|f(z) - f(t)| < \varepsilon.$$

Sea $\{p_i, q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos disjuntos, tales que $|p_i - q_i| < \delta$ tales que p_i o q_i estén en X para toda $i \in \mathbb{N}$.

<u>Caso 1</u>

Si $p_i \in X$ y $q_i \notin X$ entonces para $a_i \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(p_i) - f(q_i)| &= |f(p_i) - f(q_i) + f(a_i) - f(a_i)| \\
&\leq |f(p_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(q_i)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

<u>Caso 2</u>

Si $p_i, q_i \in X$ entonces se obtiene el resultado.

<u>Caso 3</u>

Si $p_i, q_i \notin X$, por la continuidad de la función f, se tiene que

$$\sum_{i \geq 1} |f(p_i) - f(q_i)| < \varepsilon.$$

De esta manera, se obtiene en general que

$$\sum_{i \geq 1} |f(p_i) - f(q_i)| < \varepsilon.$$

3. Se prueba que $(c) \Rightarrow (a)$.

Puesto que la función f es continua, para $x_i, y_i \in [a_i, b_i]$, se tiene que

$$w(f; [a_i, b_i]) = |f(x_i) - f(y_i)|.$$

Sumando y restando por $f(a_i)$ y usando la desigualdad triangular, se sigue que

$$w(f; [a_i, b_i]) \geq |f(x_i) - f(a_i)| + |f(y_i) - f(a_i)|.$$

De donde se obtiene el resultado.

De esta manera se da por finalizada la demostración del lema. $\square$

Definición 2.4.

Sea $X \subset [a, b]$. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua generalizada* en X, o de clase $ACG(X)$, si X es la unión de una sucesión de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que en cada X_i la función $f \in AC^*(X_i)$.

Definición 2.5.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $X \subset [a, b]$, se dice que f es *completa absolutamente continua generalizada* en X, o de clase $ACG^*(X)$, si X puede ser expresada como una unión numerable de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, tales que en cada X_i, f es de clase $AC^*(X_i)$.

Teorema 2.6.

Sea $X \subset [a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y de clase $AC^*(X)$, entonces f es de clase $AC^*(\overline{X})$, donde $\overline{X}$ es la clausura de X.

Demostración.

Sea $X \subset [a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y de clase $AC^*(X)$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda sucesión de intervalos disjuntos de X, $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, tal que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ entonces

$$\sum_{i=1}^n w(f; (a_i, b_i)) < \varepsilon.$$

Para $k_{i_j} > 0$, considérese la clausura de (a_i, b_i) definida como

$$\overline{(a_i, b_i)} = \bigcap_{j\geq 1} [a_i - k_{i_j}, b_i + k_{i_j}].$$

Como $\sum_{i=1}^{n} \ell[(a_i, b_i)] < \delta$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \ell[\overline{(a_i, b_i)}] < \delta.$$

Como f es continua en $[a, b]$, se tiene que

$$w(f; \overline{(a_i, b_i)}) = |f(x_i) - f(y_i)| < \frac{\varepsilon}{n},$$

para $x_i, y_i \in \overline{(a_i, b_i)}$.

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w(f; \overline{(a_i, b_i)}) &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $f \in AC^*(\overline{X})$.

Así se demuestra el teorema enunciado. □

Teorema 2.7.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y de clase $ACG^*([a, b])$, y su derivada $f'(x) \geq 0$ en $ctp - m$ de $[a, b]$, entonces f es monótona creciente.

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y de clase ACG^* en $[a, b]$, con derivada $f'(x) \geq 0$, para $x \in [a, b] \backslash S$, donde S tiene medida de Lebesgue nula.

Sea $x \in [a, b] \backslash S$.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(x) > 0$ tal que si $x \in [u, v] \subset (x - \delta(x), x + \delta(x))$, se tiene que

$$f(u) - f(v) > -\varepsilon(v - u).$$

Supóngase ahora que $x \in S$.

Como f es continua y de clase ACG^* en $[a, b]$, por el inciso (c) del lema anterior, se tiene que el intervalo $[a, b]$ es la unión de una sucesión de intervalos cerrados $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tales que $f \in AC^*(X_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen $\delta_i > 0$ tales que para toda sucesión de intervalos disjuntos $\{(u_k, v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ con al menos un punto perteneciente a X_i tales que $\sum_{k\geq 1} |v_k - u_k| < \delta_i$, se tiene que

$$\sum_{k\geq 1} |f(v_k) - f(u_k)| < \frac{\varepsilon}{2\tilde{i}}.$$

Escribiendo $S_i = S \cap Y_i$, donde

$$Y_1 = X_1$$

y

$$Y_i = X_i - (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_{i-1}),$$

para $i \in \{2, 3, \dots\}$.

Eligiendo intervalos abiertos (u_{ij}, v_{ij}), $j \in \{1, 2, \dots\}$, tales que

$$\sum_{j\geq 1} |v_{ij} - u_{ij}| < \delta_i$$

y

$$S_i \subset \bigcup_{j\geq 1} (u_{ij}, v_{ij}).$$

Ahora para $x \in S$ se hace

$$(x - \delta(x), x + \delta(x)) \subset (u_{ij}, v_{ij}),$$

para algún $j \geq 1$.

Por lo que se ha definido una función positiva $\delta(x)$.

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} -2\varepsilon - \varepsilon(v - u) &< \sum_{i\geq 1} \sum_{j\geq 1} (f(v_{ij}) - f(u_{ij})) \\ &< f(v) - f(u) \\ &< f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, tomando $\varepsilon \to 0$, se obtiene que

$$f(b) > f(a).$$

Esto mismo ocurre para cualquier subintervalo de $[a, b]$, por lo que f es monótona creciente.

Así queda demostrado el teorema. $\square$

Definición 2.8.

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *Denjoy integrable* en $[a, b]$, si existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que F es de clase $ACG^*([a, b])$ y su derivada $F'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

La diferencia $F(b) - F(a)$ es llamada la integral de Denjoy de f en $[a, b]$, se denota como

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = (D)\int_a^b f(x)dx.$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable en $[a, b]$.

Supóngase que F y G son funciones continuas de clase ACG^* en $[a, b]$, tales que en $ctp - m$ de $[a, b]$, se tiene que

$$F'(x) = G'(x) = f(x).$$

Luego

$$F'(x) - G'(x) = 0.$$

Puesto que la derivada de la resta es la resta de las derivadas, se tiene que

$$(F(x) - G(x))' = 0.$$

Más aún

$$(F - G)'(x) = 0.$$

Por lo que $F - G = C$ para $C \in \mathbb{R}$.

Si $C \leq 0$, por el teorema anterior, se tiene que $F - G$ es una funcón monótona creciente por lo que $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Análogamente sucede si $C > 0$.

De esta manera se observa que la integral de Denjoy de un función, está bien definida.

Teorema 2.9.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si f es diferenciable en $ctp - m$ de $[a, b]$ entonces f' es Denjoy integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a),$$

para cada $x \in [a, b]$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en $c.t.p - m$ de $[a, b]$ y $X \subset [a, b]$. Por el Lema 2.3, se tiene que f es de clase $ACG^*(X_i)$, para $X_i \subset X$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para que f' sea Denjoy integrable debe existir una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que F sea de clase $ACG^*([a, b])$ y $F'(x) = f'(x)$. Tomando $F = f$, satisface las condiciones y se tiene que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Así se demuestra el teorema. □

TEOREMA 2.10.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* $c \in (a, b)$.

(a) *Si* f *es Denjoy integrable en* $[a, b]$, *entonces* f *es Denjoy integrable en todo subintervalo de* $[a, b]$.

(b) *Si* f *es Denjoy integrable en* $[a, c]$ *y* $[c, b]$, *entonces* f *es Denjoy integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable y $c \in (a, b)$.

(a) Como f es Denjoy integrable, existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase $ACG^*([a, b])$ tal que en $ctp - m$ de $[a, b]$, se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

Como F es de clase $ACG^*([a, b])$, se tiene que al intrervalo $[a, b]$ puede ser expresado como una unión numerable de intervalos $\{[a_i, b_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$, tales que en cada $[a_i, b_i]$ f es de clase AC^*. De modo que

$$[a, b] = \bigcup_{i\geq 1}[a_i, b_i].$$

Como F es de clase ACG^* en $[a, b]$ se tiene que F es continua en cada $[a_i, b_i]$ y además de clase ACG^* en cada $[a_i, b_i]$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $F'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$, entonces $F'(x_i) = f(x_i)$ en $ctp - m$ de $[a_i, b_i]$.

Por lo que f es Denjoy integrable en cada $[a_i, b_i]$.

(b) Supóngase que f es Denjoy integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$.

Se prueba que f es Denjoy integrable en $[a, b]$.

Obsérvese que $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$.

Ahora para $x \in [a, b]$, se tiene que $x \in [a, c]$ ó $x \in [c, b]$.

Si $x \in [a, c]$, por hipótesis se tiene que existe una función $F : [a, c] \to \mathbb{R}]$ ACG^* en $[a, c]$ tal que en $ctp - m$ de $[a, c]$ se tiene que

$$F'(x) = f(x).$$

Si $x \in [c, b]$, por hipótesis se tiene que existe una función $G : [c, b] \to \mathbb{R}]$ ACG^* en $[c, b]$ tal que en $ctp - m$ de $[c, b]$, se tiene que

$$G'(x) = f(x).$$

Así pues, si f es Denjoy integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ entonces f es Denjoy integrable en $[a, b]$.

Ahora se prueba que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ya se probó que f es Denjoy integrable en $[a, b]$, por lo que existe una función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase ACG^* en $[a, b]$, tal que $H'(x) = f(x)$, en $ctp - m$ de $[a, b]$, y

$$\int_a^b f(x)dx = H(b) - H(a).$$

Como f es Denjoy integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ y dado que la integral de Denjoy está bien definida, se tiene que $H = F$ en $[a, c]$, y $H = G$ en $[c, b]$, además

$$H(c) = F(c) = G(c).$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= H(b) - H(a) \\
&= G(b) - F(a) \\
&= G(b) - F(a) + F(c) - F(c) \\
&= [F(c) - F(a)] + [G(b) - F(c)] \\
&= [F(c) - F(a)] + [G(b) - G(c)] \\
&= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx
\end{aligned}$$

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Así se demuestra el teorema enunciado. □

Teorema 2.11.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Denjoy integrables en $[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

(a) *kf es Denjoy integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

(b) *$f + g$ es Denjoy integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(c) *Si $f \leq g$ en ctp $[a, b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(d) *Si $f = g$ en ctp de $[a, b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Demostración.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Denjoy integrables en $[a, b]$, y sea $k \in \mathbb{R}$.

(a) Se prueba que kf es Denjoy integrable.

Como f es Denjoy integrable, existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ACG^* en $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Como F es continua, entonces kF es continua.

Como F es de clase ACG^* en $[a, b]$, claramente kF es de clase ACG^* en $[a, b]$.

Por hipótesis se tiene que $F'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$, entonces en $ctp - m$ de $[a, b]$ se tiene que

$$kF'(x) = kf(x).$$

Más aún

$$(kF)'(x) = (kf)(x)$$

en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Por tanto kf es Denjoy integrable en $[a, b]$.

Luego

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Entonces

$$\begin{aligned} k\int_a^b f(x)dx &= k[F(b) - F(a)] \\ &= (kF)(b) - (kF)(a) \\ &= \int_a^b (kf)(x)dx \\ &= \int_a^b kf(x)dx \end{aligned}$$

(b) Se prueba que $f + g$ es Denjoy integrable.

Como f es Denjoy integrable, existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase ACG^* en $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Como g es Denjoy integrable, existe una función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase ACG^* en $[a, b]$ tal que $G'(x) = g(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

En $[a, b]$, se tiene que F y G son de clase ACG^*, entonces $F + G$ es de clase ACG^*.

En $ctp - m$ de $[a, b]$, se tiene que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$.

Luego

$$F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Así

$$[F + G]'(x) = [f + g](x).$$

Por lo que si f y g son Denjoy integrables en $[a, b]$ entonces $f + g$ es Denjoy integrable en $[a, b]$.

Luego

$$\begin{aligned}\int_a^b [f + g](x)dx &= [F + G](b) - [F + G](a)\\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a)\\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)]\\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

(c) Supóngase que $f \leq g$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Ahora $g - f \geq 0$, denótese por $h = g - f$, entonces $h \geq 0$.

Como f y g son Denjoy integrables entonces h es Denjoy integrable, este resultado se obtiene por lo demostrado en los incisos (a) y (b); y se tiene que existen funciones $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase ACG^* en $[a, b]$, tales que en $ctp - m$ de $[a, b]$, se tiene que $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$.

Como $f \leq g$ entonces

$$F'(x) = f(x) \leq g(x) = G'(x).$$

Luego

$$[G - F]'(x) \geq 0.$$

Denótese por $H = G - F$.

Claramente H es de clase ACG^* en $[a, b]$.

Como $H'(x) \geq 0$ por el Teorema 2.7, H es monótona creciente, por tanto

$$H(b) - H(a) \geq 0.$$

Así

$$[G - F](a) \leq [G - F](b),$$

por tanto

$$F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a).$$

De donde

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(d) Supóngase que $f = g$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Por el apartado anterior, se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

De esta manera se demuestra el teorema enunciado. □

TEOREMA 2.12.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para toda $x \in [a, b]$, entonces:

(a) *F es continua en $[a, b]$.*

(b) *F es diferenciable en $ctp - m$ de $[a, b]$ y $F' = f$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.*

(c) *f es medible en $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable en $[a, b]$ y sea

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

para todo $x \in [a, b]$.

(a) Se prueba que F es continua en $[a, b]$.

Como f es Denjoy integrable en $[a, b]$, existe una función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clase ACG^* en $[a, b]$, tal que $G'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Como $G \in ACG^*([a, b])$, existe una familia de intervalos $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^n$ tales que

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i],$$

donde en cada $[a_i, b_i]$, G es de clase AC^*.

Como $G \in AC^*[a_i, b_i]$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} w(G;[a_i,b_i]) < \varepsilon.$$

Luego

$$w(G;[a_i,b_i]) \leq \sum_{i=1}^{n} w(G;[a_i,b_i]) < \varepsilon$$

Entonces

$$|G(x) - G(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} w(G;[a_i,b_i]) < \varepsilon.$$

Se tiene que G es una función continua y puesto que $G'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a,b]$, G' es Denjoy integrable.

Por el Teorema 2.9, se tiene que

$$\int_a^x G'(x)dx = G(x) - G(a).$$

Como $G'(x) = f(x)$, entonces

$$\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a).$$

Por definición

$$F(x) = \int_a^x G'(x)dx = G(x) - G(a).$$

De la desigualdad

$$|G(x) - G(y)| < \varepsilon,$$

se tiene que

$$|G(x) - G(y) + G(a) - G(a)| < \varepsilon$$

Luego

$$|[G(x) - G(a)] + [G(a) - G(y)]| < \varepsilon,$$

entonces

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon$$

Como $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$, se obtiene que $|x - y| < \delta$.

Por tanto F es una función continua.

(b) Se prueba que F es diferenciable y $F' = f$, en $ctp - m$ de $[a, b]$.

Por hipótesis se sabe que $G'(x) = f(x)$ en $ctp - m$ de $[a, b]$, además

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Ahora

$$F'(x) = G'(x) = f(x),$$

en $ctp - m$ de $[a, b]$.

De este modo F es diferenciable en $ctp - m$ de $[a, b]$.

(c) Se prueba que F es medible.

Como f es una función Denjoy integrable en $[a, b]$, se tiene que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que F es de clase $ACG^*([a, b])$ y su derivada

$$F'(x) = f(x),$$

en $c.t.p - m$ de $[a, b]$.

Puesto que toda función diferenciable es Lebesgue medible y F es de clase $ACG^*([a, b])$ y $F'(x) = f(x)$, se tiene que f es medible.

De esta manera se demuestra el teorema enunciado. $\square$

Teorema 2.13.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable en $[a, b]$.

(a) *Si f es acotada en $[a, b]$, entonces f es Lebesgue integrable en $[a, b]$.*

(b) *Si f es no negativa en $[a, b]$, entonces f es Lebesgue integrable en $[a, b]$.*

(c) *Si f es Denjoy integrable en todo subconjunto medible de $[a, b]$, entonces f es Lebesgue integrable en $[a, b]$.*

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Denjoy integrable en $[a, b]$.

Si f es acotada en $[a, b]$ entonces f es Lebesgue integrable en $[a, b]$, puesto que f es acotada y medible en $[a, b]$.

Si f es no negativa en $[a, b]$, entonces la función

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx,$$

es monótona creciente en $[a, b]$.

Así F es no decreciente y su derivada es Lebesgue integrable.

De esta manera se demuestran los incisos (a) y (b).

Si f es Denjoy integrable en el conjunto $\{x \in [a,b]/\ f(x) \geq 0\}$, entonces f^+ es Lebesgue integrable.

Análogamente, f^- es Lebesgue integrable en $[a,b]$ si f es Denjoy integrable en el conjunto $\{x \in [a,b]/\ f(x) \leq 0\}$.

Por tanto, $f = f^+ - f^-$ es Lebesgue integrable en $[a,b]$ si f es Denjoy integrable en todo subconjunto de $[a,b]$.

De esta manera se demuestra el teorema. □

¿Es posible dar una diferencia entre una función Lebesgue integrable y una función Denjoy integrable?

Se sabe que una función medible f es Lebesgue integrable en $[a,b]$ si y solo si $|f|$ es Lebesgue integrable en $[a,b]$.

Supóngase que f es Denjoy integrable en $[a,b]$, pero no Lebesgue integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ no necesariamente es Denjoy integrable en $[a,b]$.

Pero si $|f|$ es Denjoy inetgrable en $[a,b]$, entonces por el Teorema 2.13 inciso (b), $|f|$ es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y se sigue que f es Lebesgue integrable en $[a,b]$. Por esta razón, la integral de Denjoy es conocida como la integral no absoluta.

Así pues, si f es Denjoy integrable en $[a,b]$ no implica que $|f|$ es Denjoy integrable en $[a,b]$.

2. La integral de Perron

En 1914, O. Perron dió otra extensión de la integral de Lebesgue y mostró que su integral tiene la propiedad de que toda función derivable es integrable. Su trabajo fué independiente de Denjoy y aunque la definición de su integral es muy diferente, más tarde se mostraría que las integrales de Perron y Denjoy son iguales. La teoría de integración dada por Perron, está fundamentada en la teoría de derivación (Ver [3], [5] y [9]).

Definición 2.14.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, y sea $c \in [a,b]$. Entonces:

(1) La derivada superior de f en c es

$$\overline{D}f(c) = \lim_{x \to c} \sup \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(2) La derivada inferior de f en c es

$$\underline{D}f(c) = \lim_{x \to c} \inf \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si $c < b$, entonces:

(3) La derivada superior por la derecha de f en c es

$$D^+ f(c) = \lim_{x \to c^+} \sup \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(4) La derivada inferior por la derecha de f en c es

$$D_+ f(c) = \lim_{x \to c^+} \inf \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Si $a < c$, entonces:

(5) La derivada superior por la izquierda de f en c es

$$D^- f(c) = \lim_{x \to c^-} \sup \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

(6) La derivada inferior por la izquierda de f en c es

$$D_- f(c) = \lim_{x \to c^-} \inf \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ahora se enuncian las propiedades más importantes de estas derivadas, enunciadas en el siguiente teorema. La demostración no es complicada y puede verse en [9].

TEOREMA 2.15.
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones finitas. Entonces para todo $x \in [a, b]$ las desigualdades

(1) $\overline{D}[f(x) + g(x)] \leq \overline{D}f(x) + \overline{D}g(x)$
(2) $\underline{D}[f(x) + g(x)] \geq \underline{D}f(x) + \underline{D}g(x)$
(3) $\overline{D}[f(x) + g(x)] \geq \overline{D}f(x) + \underline{D}g(x)$
(4) $\underline{D}[f(x) + g(x)] \leq \underline{D}f(x) + \overline{D}g(x)$
(5) $\overline{D}[f(x) - g(x)] \leq \overline{D}f(x) - \underline{D}g(x)$
(6) $\overline{D}[f(x) - g(x)] \geq \overline{D}f(x) - \overline{D}g(x) \geq \underline{D}[f(x) - g(x)]$
(7) $\underline{D}[f(x) - g(x)] \geq \underline{D}f(x) - \overline{D}g(x)$
(8) $\overline{D}[f(x) - g(x)] \geq \underline{D}f(x) - \underline{D}g(x) \geq \underline{D}[f(x) - g(x)]$

se satisfacen, siempre que las adiciones y diferencias estén definidas.

Si $x < b$, *se puede sustituir* $\overline{D}$ *y* $\underline{D}$ *por* D^+ *y* D_+ *en todas las desigualdades anteriores.*

Si $a < x$, *se puede sustituir* $\overline{D}$ *y* $\underline{D}$ *por* D^- *y* D_- *en todas las desigualdades anteriores.*

Definición 2.16.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que el conjunto de cuatro funciones

$$A = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\}$$

es tetra adjunto de f en $[a, b]$ si:

(1) ψ_j es continua en $[a, b]$, y $\psi_j(a) = 0$, para toda $j \in \{1, 2, 3, 4\}$;

(2) excepto para un conjunto numerable de valores de x, las relaciones

$$-\infty \neq D_+\psi_1 \geq f, \qquad -\infty \neq D_-\psi_2 \geq f,$$

$$-\infty \neq D^-\psi_3 \leq f, \qquad -\infty \neq D^+\psi_4 \leq f,$$

son validas en $[a, b]$.

En caso que las funciones ψ_j también satisfagan la condición

$$|\psi_i(b) - \psi_j(b)| < \varepsilon$$

para $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, el conjunto A es llamado tetra ε-adjunto de f.

Las funciones que satisfagan las condiciones anteriores sobre ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 son llamadas función principal derecha, principal izquierda, secundaria izquierda y secundaria derecha, respectivamente.

En términos de las definiciones anteriores, se da la definición de integrabilidad según Perron.

Definición 2.17.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. f es Perron integrable en el intervalo $[a, b]$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto tetra ε-adjunto a f en $[a, b]$.

Antes de observar como se define la integral de Perron, se darán las siguientes proposiciones.

Proposición 2.18.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función. Si* $\psi(x)$ *es cualquier función principal de* f *y* $\phi(x)$ *cualquier función secundaria de* f*, entonces la diferencia*

$$\psi(x) - \phi(x)$$

es una función monótona creciente.

Demostración.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.

Sean ψ y ϕ una función principal y secundaria por la derecha de f respectivamente.

Para un conjunto numerable de valores de x la diferencia $D_+\psi - D^+\phi$ está definida por definición. Excepto para un conjunto numerable de valores de x, esta diferencia es no negativa, para $D_+\psi \geq f$ y $D^+\phi \leq f$.

De las propiedades de las derivadas se sigue que

$$D_+(\psi - \phi) \geq D_+\psi - D^+\phi \geq 0.$$

De modo que $\psi - \phi$ es monótona creciente.

Análogamente se obtiene si ψ y ϕ son funciones principal y secundaria de f por la izquierda.

De esta manera se demuestra la proposición.

□

Proposición 2.19.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de valores finitos, excepto para un conjunto* E *de valores numerable de* x*, se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$D^+f(x) \geq D_-f(x) \qquad y \qquad D^-f(x) \geq D_+f(x)$$

Demostración.

Para una prueba, ver [9]. □

Proposición 2.20.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Si la tetra* $\{\psi_j\}_{j=1}^4$ *es* ε*-adjunta de* f *en* $[a,b]$*, entonces ésta es* ε*-adjunta a* f *en* $[a,x]$*, para todo* $a < x \leq b$*.*

Demostración.

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función y $\varepsilon > 0$ y sea $\{\psi_j\}_{j=1}^{4}$ el conjunto tetra ε-adjunto de f en $[a,b]$.

Para la prueba de esta proposición, sólo basta tomar la función principal derecha ψ_1 y la función secundaria izquierda ψ_3, del conjunto tetra ε-adjunto de f en $[a,b]$, entonces para $a < x \leq b$ se tiene que

$$0 \leq \psi_1(x) - \psi_3(x) \leq \psi_1(b) - \psi_3(b) < \varepsilon.$$

Y esto mismo ocurre para todo ψ_j.

De esta manera se demuestra la proposición. □

Un resultado inmediato de la proposición anterior, se dá en el siguiente corolario, su prueba es análoga a la anterior.

Corolario 2.21.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Perron integrable en $[a,b]$, entonces f es Perron integrable en $[a,x]$ para todo $a < x \leq b$.

Teorema 2.22.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Perron integrable en $[a,b]$ entonces existe una función F la cual es el ínfimo de todas las funciones principales por la derecha ψ_1, el ínfimo de todas las funciones principales por la izquierda ψ_2, el supremo de todas las funciones secundarias por la izquierda ψ_3 y el supremo de todas las funciones secundarias por la derecha ψ_4. En este caso se define

$$\int_{[a,b]} f \equiv F(b).$$

Demostración.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en el intervalo $[a,b]$.

Como f es Perron integrable, por definición se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto tetra ε-adjunto a f.

Sea ψ_0 cualquier función secundaria de f.

Para toda función principal por la derecha ψ_1 se tiene para toda $x \in [a,b]$ que

$$\psi_0(x) \leq \psi_1(x).$$

Para $x \in [a, b]$ se define $F(x)$ como el ínfimo de todas las funciones principales por la derecha de f, por lo que

$$\psi_0(x) \leq F(x).$$

De este modo se tiene que $F(x)$ es una cota superior de todas las ψ_0.

Por definición se tiene que

$$0 \leq \psi_1(b) - \psi_3(b) < \varepsilon$$

y

$$0 \leq \psi_1(b) - \psi_4(b) < \varepsilon.$$

Entonces para todo $x \in [a, b]$ se sigue que

$$0 \leq F(x) - \psi_4(x) \leq \psi_1(x) - \psi_4(x) \leq \psi_1(b) - \psi_4(b) < \varepsilon,$$

$$0 \leq F(x) - \psi_3(x) \leq \psi_1(x) - \psi_3(x) \leq \psi_1(b) - \psi_3(b) < \varepsilon.$$

Por tanto $F(x)$ es el supremo de todas las funciones secundarias por la derecha ψ_4 y de todas las funciones secundarias por la izquierda ψ_3.

De forma análoga se obtiene que $F(x)$ es el ínfimo de todas las funciones principales por la izquierda ψ_2.

De esta manera se demuestra el teorema. □

La definición de la integral en el teorema anterior, equivale a la de Perron, una consecuencia de este teorema es considerar de la definición un conjunto tetra ε-adjunto a una función, tal que $\psi_1 \equiv \psi_2$ y $\psi_3 \equiv \psi_4$.

Corolario 2.23.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Perron integrable en el intervalo $[a, b]$ y F está definida como en el teorema anterior, entonces

$$\int_{[a,x]} f = F(x)$$

para todo $a < x \leq b$.

Demostración.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en el intervalo $[a,b]$.

Por definición se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto tetra ε-adjunto de f en $[a,b]$, por definición este conjunto también es tetra ε-adjunto de f en el intervalo $[a,x]$, para todo $a < x \leq b$.

Del teorema anterior, se sigue que

$$\psi_1(x) - \varepsilon \leq \psi_4(x) \leq \int_{[a,x]} f \leq \psi_1(x).$$

Entonces

$$\psi_4(x) \leq F(x) \leq \psi_1(x).$$

De donde

$$\left| F(x) - \int_{[a,x]} f \right| < \varepsilon.$$

Como el ε es arbitrario, se obtiene que

$$F(x) = \int_{[a,x]} f.$$

De esta manera se demuestra el teorema. $\square$

Ahora se enuncian las propiedades más importantes de la integral de Perron.

Teorema 2.24.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.

Si f es Perron integrable en $[a,b]$, la función

$$F(x) = \int_{[a,x]} f$$

es continua.

Demostración.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en el intervalo $[a,b]$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ es posible elegir una función principal por la derecha ψ_{1_n} y una función secundaria por la derecha ψ_{4_n} tal que para todo $x \in [a,b]$ se tiene que

$$\psi_{1_n}(x) - \psi_{4_n}(x) < \frac{1}{n}.$$

Por lo demostrado anteriormente, se sigue que

$$0 \leq F(x) - \psi_{4_n}(x) \leq \psi_{1_n}(x) - \psi_{4_n}(x) \leq \psi_{1_n}(b) - \psi_{4_n}(b) < \frac{1}{n}.$$

De manera que la función $\psi_{4_n}(x)$ converge uniformemente a $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$. De modo que $F(x)$ es continua.

De esta manera se demuestra el teorema enunciado. □

Proposición 2.25.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es Perron integrable en $[a, b]$, entonces f es Perron integrable en todo subintervalo de $[a, b]$.

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en $[a, b]$.

Para $\varepsilon > 0$ sea $\{\psi_j\}_{j=1}^{4}$ un conjunto tetra $\frac{\varepsilon}{2}$-adjunto de f en el intervalo $[a, b]$.

Considerando el intervalo $[c, d] \subset [a, b]$, defínase para $x \in [c, d]$ la función

$$\phi_j(x) \equiv \psi_j(x) - \psi_j(c)$$

para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Por como se definen las funciones ϕ_j se tiene que son continuas en el intervalo $[c, d]$ y además $\phi_j(c) = 0$ y satisface las condiciones de las derivadas de la definición de la integral de Perron.

Ahora

$$|\phi_i(d) - \phi_j(d)| < |\psi_i(d) - \psi_j(d)| + |\psi_i(c) - \psi_j(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por lo que se ha construido un conjunto $\{\phi_j\}_{j=1}^{4}$ tetra ε-adjunto de f en $[c, d]$, y por ende f es Perron integrable en $[c, d]$.

De esta manera se demuestra la proposición. □

Proposición 2.26.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $c \in (a, b)$. Si f es Perron integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ entonces f es Perron integrable en $[a, b]$ y se tiene que

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, para $c \in (a, b)$.

Para $\varepsilon > 0$ sean $\{\psi_j\}_{j=1}^4$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^4$ conjuntos tetra $\frac{\varepsilon}{2}$-adjuntos de f en los intevalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente.

Definiendo para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ la función

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \psi_j(x) & \text{si } a \le x \le c \\ \psi_j(x) + \beta_j(x) & \text{si } c < x \le b \end{cases}$$

se tiene que $\phi_j(a) = 0$, es continua en $[a, b]$ y por como se define, se cumplen las condiciones de las derivadas en la definición de una función Perron integrable.

Luego

$$\begin{aligned} |\phi_i(b) - \phi_j(b)| &\equiv |\psi_i(b) + \beta_i(b) - \psi_j(b) - \beta_j(b)| \\ &< |\psi_i(b) - \psi_j(b)| + |\beta_i(b) - \beta_j(b)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, se tiene que f es Perron integrable sobre el intervalo $[a, b]$.

Como f es Perron integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ se tiene que

$$\psi_4(c) \le \int_{[a,c]} f \le \psi_1(c)$$

y

$$\beta_4(b) \le \int_{[c,b]} f \le \beta_1(b).$$

Sumando las dos desigualdades anteriores y teniendo en cuenta como se define la función ϕ_j, se obtiene que

$$\phi_4(b) \le \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \le \phi_1(b).$$

Como f es Perron integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\phi_4(b) \le \int_{[a,b]} f \le \phi_1(b).$$

Puesto que $|\psi_i(c) - \psi_j(c)|, |\beta_i(b) - \beta_j|, |\phi_i(b) - \phi_j(b)|$ son menores que ε y como este es arbitrario se obtiene que

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

De esta menera se demuestra la proposición enunciada. □

PROPOSICIÓN 2.27.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en $[a,b]$. Si $k \in \mathbb{R}$ es una constante finita, entonces kf es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_{[a,b]} kf = k \int_{[a,b]} f.$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Perron integrable en $[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$ una constante finita.

Véanse los siguientes casos:

(1) Si $k = 0$ el resultado es directo.

(2) Si $k < 0$.

Para $\varepsilon > 0$ sea $\{\psi_j\}_{j=1}^{1}$ un conjunto tetra $\frac{\varepsilon}{|k|}$-adjunto de f en el intervalo $[a,b]$. Para $x \in [a,b]$ sean

$$\phi_1(x) = k\psi_4(x) \quad , \quad \phi_4(x) = k\psi_1(x)$$

$$\phi_3(x) = k\psi_2(x) \quad , \quad \phi_2(x) = k\psi_3(x).$$

Es claro que las funciones ϕ_j forman un conjunto tetra ε-adjunto de kf en $[a,b]$, y $\phi_j(a) = 0$ para $j \in \{1,2,3,4\}$.

Luego para $x \in [a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned} D_+\phi_1(x) &= D_+k\psi_4(x) \\ &= kD_+\psi_4(x). \end{aligned}$$

Como $\infty \neq D^+\psi_4(x) \leq f(x)$, excepto para un conjunto numerable de valores de x, y como k es negativo se sigue que

$$-\infty \neq kD^+\psi_4 \geq kf(x),$$

salvo para el mismo conjunto numerable de valores de x. Así pues ϕ_1 es una función principal derecha de kf en $[a,b]$. De manera análoga se deduce que ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 son funciones principal izquierda, secundaria izquierda y secundaria derecha de kf en $[a,b]$ respectivamente.

Luego

$$\begin{aligned} |\phi_i(b) - \phi_j(b)| &= |k|.|\psi_i(b) - \psi_j(b)| \\ &< |k|.\frac{\varepsilon}{|k|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

De este modo se demuestra que $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ es un conjunto tetra ε-adjunto de kf en $[a,b]$, por lo que se obtiene que kf es Perron integrable en el intervalo $[a,b]$.

Como f es Perron integrable se tiene que

$$\psi_4(b) \leq \int_{[a,b]} f \leq \psi_1(b).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi_1(b) &= k\psi_4(b) \\ &\geq k \int_{[a,b]} f \\ &\geq k\psi_1(b) \\ &= \phi_4(b). \end{aligned}$$

Como kf es Perron integrable en $[a,b]$ se obtiene que

$$\phi_1(b) \geq \int_{[a,b]} kf \geq \phi_4(b).$$

Puesto que $|\psi_i(b) - \psi_j(b)|$ y $|\phi_i(b) - \phi_j(b)|$ son menores que ε, y este es arbitrario, se sigue que

$$\int_{[a,b]} kf = k \int_{[a,b]} f.$$

(3) Para el caso $k > 0$, se procede de manera análoga al caso anterior, o se considera $(-1)(-kf)$ y se aplica el caso anterior.

De esta manera se demuestra la proposición. $\square$

Proposición 2.28.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funciones Perron integrables en* $[a, b]$. *Si para* $x \in [a, b]$ *la suma* $f(x) + g(x)$ *está definida en* $[a, b]$ *entonces* $f(x) + g(x)$ *es Perron integrable en* $[a, b]$ *y se cumple que*

$$\int_{[a,b]} (f + g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

Demostración.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Perron integrables en $[a, b]$ tales que para $x \in [a, b]$ la suma $f(x) + g(x)$ está definida en $[a, b]$

Para $\varepsilon > 0$ sean $\{\psi_j\}_{j=1}^4$ y $\{\phi_j\}_{j=1}^4$ conjuntos tetra $\frac{\varepsilon}{2}$-adjuntos de f y g en $[a, b]$ respectivamente.

Defínase para $x \in [a, b]$ la función $\xi_j(x) = \psi_j(x) + \phi_j(x)$, para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Claramente la función $\xi_j(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $\xi_j(a) = 0$.

Salvo para un conjunto numerable de valores de x, se tiene que

$$-\infty \neq D_+\psi_1(x) \geq f(x) \quad \text{y} \quad -\infty \neq D_+\phi_1(x) \geq g(x).$$

De las propiedades de la derivada, se sigue que

$$-\infty \neq D_+\xi_1(x) \geq D_+\psi_1(x) + D_+\phi_1(x) \geq f(x) + g(x),$$

De manera similar se obtiene que las $\xi_j(x)$, para $j \in \{2, 3, 4\}$, satisfacen la definición de las derivadas de un conjunto tetra adjunto a $f + g$ en $[a, b]$.

Ahora

$$\begin{aligned}
|\xi_i(b) - \xi_j(b)| &= |\psi_i(b) + \phi_i(b) - \psi_j(b) - \phi_j(b)| \\
&\leq |\psi_i(b) - \psi_j(b)| + |\phi_i(b) - \phi_j(b)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

De este modo se construye un conjunto $\{\xi_j\}_{j=1}^4$ tetra ε-adjunto de $f + g$. Por lo que si f y g son funciones Perron integrables en $[a, b]$ entonces $f + g$ es Perron integrable en $[a, b]$.

Puesto que f y g son Perron integrables en $[a, b]$, se tienen las siguientes desigualdades

$$\psi_4(b) \leq \int_{[a,b]} f \leq \psi_1(b),$$

y

$$\phi_4(b) \leq \int_{[a,b]} g \leq \phi_1(b).$$

Sumando las dos expresiones anteriores y observando como está definida la función ξ_j se tiene que

$$\xi_4(b) = \psi_4(b) + \phi_4(b) \leq \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g \leq \psi_1(b) + \phi_1(b) = \xi_1(b)$$

Como la función $f + g$ es Perron integrable en $[a, b]$ se tiene que

$$\xi_4(b) \leq \int_{[a,b]} (f + g) \leq \xi_1(b).$$

Como las diferencias $|\psi_4(b) - \psi_1(b)|$, $|\phi_4(b) - \phi_1(b)|$ y $|\xi_4(b) - \xi_1(b)|$ son menores que ε y este es arbitrario, se tiene que

$$\int_{[a,b]} (f + g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g.$$

De esta manera se demuestra la proposición enunciada. □

Proposición 2.29.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones. Si f y g son Perron integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$$

Demostración.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Perron integrables en $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Supóngase que para $k \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{[a,b]} g < k.$$

Entonces existe una función secundaria derecha ψ_4 adjunta a g tal que para $x \in [a, b]$ se tiene que $\psi_4(x) > k$. Pero ψ_4 también se puede tomar como una función secundaria izquierda de f, por tanto

$$\int_{[a,b]} f > \psi_4(b) > k.$$

De modo que

$$\int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g.$$

De esta manera, se demuestra la proposición. □

Ahora se enunciará el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Perron.

Teorema 2.30.

Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, y excepto para un conjunto numerable de valores de $x \in [a,b]$ la derivada, F', está definida y es finita, entonces $F'(x)$ es Perron integrable y

$$\int_{[a,x]} F' = F(x) - F(a).$$

Demostración.

Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, y excepto para un conjunto numerable de valores de $x \in [a,b]$ la derivada, F', está definida y es finita.

Para $x \in [a,b]$ y $j \in \{1,2,3,4\}$, defínase la función

$$\psi_j(x) = F(x) - F(a).$$

Es fácil verificar que el conjunto $\{\psi_j\}_{j=1}^4$ es un conjunto tetra ε-adjunto de F' en el intervalo $[a,b]$, para cualquier $\varepsilon > 0$.

Luego

$$\begin{aligned} F(x) - F(a) &= \psi_4(x) \\ &\leq \int_{[a,x]} F' \\ &\leq \psi_1(x) \\ &= F(x) - F(a). \end{aligned}$$

De donde se obtiene que

$$\int_{[a,x]} F' = F(x) - F(a).$$

De esta manera queda demostrado el teorema. □

3. La integral de Henstock-Kurzweil

En las dos secciones anteriores, se observa que las integrales de Denjoy y Perron son generalizaciones de la integral de Lebesgue, las cuales ofrecen una respuesta mucho más satisfactoria en cuanto al Teorema Fundamental del Cálculo, y es que permite obtener una función a partir de su derivada.

La integral presentada en esta sección, es la integral de Henstock-Kurzweil, la cual resulta ser equivalente a la integral de Denjoy y Perron, pero a diferencia de estas integrales donde la definición es complicada, la integral de Henstock-Kurzweil se obtiene realizando un pequeño cambio en la definición de la integral dada por Riemann, el cual se basa específicamente en cambiar o modificar la $\delta > 0$ que acota la longitud de las particiones del intervalo $[a, b]$ para que ya no sea un escalar, sino una función que parta del intervalo y tome valores reales positivos, de la cual surge otra perspectiva de tomar las particiones de intervalos y motivando así una nueva teoría de integración. Por este motivo es que a la integral de Henstock-Kurzweil se le conoce como la generalización de la integral de Riemann.

Definición 2.31.

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Una *partición etiquetada*, es un conjunto finito de pares ordenados de la forma

$$\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) : \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

tales que I_i es un subintervalo cerrado de I; y $t_i \in I_i$, donde $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ y el interior de los intervalos disjuntos es vacío; es decir $I_i^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset$ si $i \neq j$.

El punto t_i es llamado etiqueta de asociada al intervalo I_i.

Definición 2.32.

Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Si γ está definido sobre I, γ es llamado un *indicador* si existe una función $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ tal que para $t \in [a, b]$ se tiene que

$$\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$$

Si $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) : \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ es una partición etiquetada de I y γ es un indicador de I, se dice que $\mathcal{D}$ es γ-*fina*, si $I_i \subset \gamma(t_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sean $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y $\{y_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de puntos tales que $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Si $\gamma(t) = (t - \delta, t + \delta)$ para $\delta > 0$ y para $t \in [a, b]$, entonces $[x_{i-1}, x_i] \subset \gamma(y_i)$ así que $\mathcal{D} = \{(y_i, [x_{i-1}, x_i]) : \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ es una partición etiquetada γ-fina de $[a, b]$.

De modo que este es el indicador usado para la integral de Riemann. Así pues, las construcciones usadas para la integral de Riemann son compatibles con indicadores.

Recuérdense las siguientes definiciones.

Definición 2.33.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto finito de números

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

tales que $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{i-1} < x_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se define su *longitud* por

$$\ell([x_{i-1}, x_i]) = x_i - x_{i-1}.$$

La *norma de la partición* $\mathcal{P}$ está dado por la longitud del subintervalo más grande $[x_{i-1}, x_i]$, el cuál está denotado por

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} : \ i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $t - i \in [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. La *suma de Riemann* está dada por

$$S(f, \mathcal{P}, \{t_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definición 2.34.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, decimos que f es *Riemann integrable* en $[a, b]$ si existe un $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$, con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$|S(f, \mathcal{P}, \{t_i\}_{i=1}^n) - A| < \varepsilon.$$

Donde

$$A = \int_a^b f(t)dt.$$

A continuación se expresa la definición de la integral de Riemann en términos de las particiones etiquetadas.

Definición 2.35.

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *Riemann integrable* sobre $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ y $\mathcal{D} = \{(t_i, [x_{i-1}, x_i]) : \ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ una partición etiquetada de $[a, b]$ tal que $[x_{i-1}, x_i] \subset (t_i - \delta, t_i + \delta)$ entonces

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| < \varepsilon.$$

Es facil notar que la norma de la partición etiquetada $\mathcal{D}$ de la definición anterior es a lo sumo 2δ.

Ahora se da la definición de la integral de Henstock-Kurzweil.

Definición 2.36.

Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, se dice que f es *Henstock-Kurzweil integrable* en I si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un indicador γ en I tal que para toda partición etiquetada γ-fina $\mathcal{D}$ de I, se tiene que

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| < \varepsilon.$$

El número A es llamada la *integral de Henstock-Kurzweil* de f en I y se denota por

$$A = \int_I f = (HK) \int_I f$$

De la definición anterior se observa que dado un indicador γ, este tiene asociado una partición etiquetada γ-fina, por lo que se tienen sumas de Riemann que definen a la integral de Henstock-Kurzweil, por lo que dicha integral está bien definida.

Por esta razón es que la integral de Henstock-Kurzweil es una generalización de la integral de Riemann.

Supóngase que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función Riemann integrable, de la definición de la integral de Riemann sea δ el ε dado en dicha definición.

Fijando $\gamma(t) = \left(t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}\right)$, se observa que cualquier partición etiquetada γ-fina tiene engrane menor que δ, por lo que queda probado que si f es Riemann integrable entonces f es Henstock-Kurzweil integrable y ambas integrales coinciden.

Pero no todas las funciones Henstock-Kurzweil integrables son Riemann integrables, un ejemplo sencillo de verificar es considerando la función de Dirichlet.

Teorema 2.37.

La integral de Henstock-Kurzweil de una función, cuando existe, es única.

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

Sean $A, B \in \mathbb{R}$ tales que satisfacen la definición de la integral de Henstock-Kurzweil.

Sean $\varepsilon > 0$ y γ_A, γ_B indicadores de A y B respectivamente, y $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$.

Sean $\gamma(t) = \gamma_A(t) \cap \gamma_B(t)$ y $\mathcal{D}$ una partición etiquetada de $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} |A - B| &= |A - S(f, \mathcal{D}) + S(f, \mathcal{D}) - B| \\ &\leq |A - S(f, \mathcal{D})| + |S(f, \mathcal{D}) - B| \\ &< \varepsilon' + \varepsilon' \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, tomando $\varepsilon \to 0$ se tiene que $A = B$.

Por lo que queda demostrada la unicidad de la integral de Henstock-Kurzweil. □

Véanse ahora algunas propiedades de la integral de Henstock-Kurzweil, enunciadas en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.38.

Sean $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables. Si $k, w \in \mathbb{R}$, entonces $kf + wg$ es Henstock-Kurzweil integrable y

$$\int_I (kf + wg) = k \int_I +w \int_I g.$$

Demostración.

Sean $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables, $k, w \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$.

Sea γ_f un indicador tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_f-fina de I, entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |k|)},$$

y γ_g un indicador tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_g-fina de I, entonces

$$\left| S(g, \mathcal{D}) - \int_I g \right| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |w|)}.$$

Considerando $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$ y supongamos que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de I. Entonces

$$\begin{aligned}
\left| S(kf + wg, \mathcal{D}) - \left(k \int_I f + w \int_I g \right) \right| &= \left| [kS(f,\mathcal{D}) + wS(g,\mathcal{D})] - \left(k \int_I f + w \int_I g \right) \right| \\
&= \left| k \left(S(f,\mathcal{D}) - \int_I f \right) + w \left(S(g,\mathcal{D}) - \int_I g \right) \right| \\
&\leq \left| k \left(S(f,\mathcal{D}) - \int_I f \right) \right| + \left| w \left(S(g,\mathcal{D}) - \int_I g \right) \right| \\
&= |k| \left| S(f,\mathcal{D}) - \int_I f \right| + |w| \left| S(g,\mathcal{D}) - \int_I g \right| \\
&< \frac{\varepsilon |k|}{2(1+|k|)} + \frac{\varepsilon |w|}{2(1+|w|)} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Puesto que ε es arbitrario, se sigue que $kf + wg$ es Henstock-Kurzweil integrable y además que

$$\int_I (kf + wg) = k \int_I f + w \int_I g.$$

De esta manera se demuestra la proposición. □

Proposición 2.39.

Sean $f, g : [a,b] = I \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$, si $f \leq g$ entonces

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Demostración.

Sean $f, g : [a,b] = I \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a,b]$ tales que $f \leq g$ y $\varepsilon > 0$.

Sea γ_f un indicador tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_f-fina de I, tal que

$$\left| S(f,\mathcal{D}) - \int_I f \right| < \varepsilon,$$

y γ_g un indicador tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_g-fina de I, tal que

$$\left| S(g,\mathcal{D}) - \int_I g \right| < \varepsilon.$$

Tomando $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$ y $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ-fina de I, entonces

$$S(f, \mathcal{D}) \leq S(g, \mathcal{D}).$$

De las dos desigualdades anteriores, se tiene que

$$\int_I f - \varepsilon \leq S(f, \mathcal{D}) \leq S(g, \mathcal{D}) \leq \int_I g + \varepsilon.$$

Luego

$$\int_I f \leq g + 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, tomando $\varepsilon \to 0$ se obtiene que

$$\int_I f \leq \int_I g.$$

Por lo que queda demostrada la proposición. $\square$

Corolario 2.40.

Sea $f : [a, b] = I \to \mathbb{R}$ una función. Si f y $|f|$ son Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, entonces

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Demostración.

Sea $f : [a, b] = I \to \mathbb{R}$ una función tal que f y $|f|$ son Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

Se sabe que

$$-|f| \leq f \leq |f|.$$

Por la proposición anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_I -|f| &= -\int_I f \\ &\leq \int_I f \\ &\leq \int_I |f|. \end{aligned}$$

De donde

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|.$$

Así queda demostrado el corolario enunciado. $\square$

Teorema 2.41.

Si f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$ entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, además se cumple que

$$\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

Demostración.

Supóngase que f es Henstock-Kuzweil integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$ y sea $\varepsilon > 0$.

Sea γ_1 un indicador tal que $\mathcal{D}_1$ es una partición etiquetada γ_1-fina de $[a,c]$ entonces

$$\left| S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,c]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y γ_2 un indicador tal que $\mathcal{D}_2$ es una partición etiquetada γ_2-fina de $[c,b]$ y

$$\left| S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq c \\ \gamma_2(t) & \text{si } c < t \leq b \end{cases}$$

se tiene que γ es un indicador y $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de $[a,b]$.

Es claro que

$$S(f,\mathcal{D}) = S(f,\mathcal{D}_1) + S(f,\mathcal{D}_2),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \left| S(f,\mathcal{D}) - \left(\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right) \right| &= \left| [S(f,\mathcal{D}_1) + S(f,\mathcal{D}_2)] - \left(\int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f \right) \right| \\ &= \left| \left(S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,c]} f \right) + \left(S(f,\mathcal{D}_2)] - \int_{[c,b]} f \right) \right| \\ &\leq \left| S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,c]} f \right| + \left| S(f,\mathcal{D}_2)] - \int_{[c,b]} f \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y además se tiene que

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

De esta manera se da por terminada la demostración del teorema. □

Lema 2.42 (Straddle).

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* y, *para* $y \in [a, b]$. *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$, *que depende de* y, *tal que*

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u)$$

para cualquier $u, v \in [a, b]$, $u \neq v$ *y*

$$y - \delta < u \leq y \leq v < y + \delta.$$

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en y, para $y \in [a, b]$.

Para cualquier $\varepsilon > 0$, supóngase que

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u),$$

tomando u o v igual a y, se tiene que

$$|f(v) - f(y) - f'(y)(v - y)| \leq \varepsilon(v - y),$$

$$|f(y) - f(u) - f'(y)(y - u)| \leq \varepsilon(y - u).$$

De las dos desigualdades anteriores, la condición de suficiencia es evidente.

Para la condición de necesidad, se sigue que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$y - \delta < u \leq y \leq v < y + \delta$$

y

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| \leq \varepsilon(v - u).$$

Entonces

$$|f(v) - f(u) - f'(y)(v - u)| < \varepsilon(v - x) + \varepsilon(y - u).$$

Así se demuestra el lema enunciado. □

Teorema 2.43.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable en* $[a, b]$, *entonces* f' *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$ *y*

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a).$$

Demostración.

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $[a, b]$, y $\varepsilon > 0$.

Para cada $t \in [a, b]$, tómese $\delta(t) > 0$ por el Lema de Straddle y defínase el indicador γ sobre el intervalo $[a, b]$, dado por $\gamma(t) = (t - \delta(t), t + \delta(t))$.

Supóngase que $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ es una partición etiquetada γ-fina de $[a, b]$, sin pérdida de generalidad, supóngase que los subintervalos I_i están ordenados de manera usual; es decir, $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Entonces la diferencia $f(b) - f(a)$ se puede expresar como la siguiente serie telescópica

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})].$$

Por el Lema de Straddle, se tiene que

$$\begin{aligned}
|S(f', \mathcal{D}) - [f(b) - f(a)]| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \{f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [f(x_i) - f(x_{i-1})]\} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f'(t_i)(x_i - x_{i-1}) - [f(x_i) - f(x_{i-1})]| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&= \varepsilon(b - a)
\end{aligned}$$

De modo que f es diferenciable en $[a, b]$ entonces se tiene que f' es Henstock-Kurzweil integrable, y además se prueba que

$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a).$$

De esta manera se da por finalizada la demostración del teorema. □

El teorema anterior, es conocido como la Primera versión del Teorema Fundamental.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y continua a la izquierda de c, para $a < c \leq b$, y sea

$$F(x) = \int_{[a,x]} f.$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función positiva δ, tal que para $c - \delta < t \leq c$ se tiene que

$$f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon.$$

Por el Lema de Straddle se tiene para $c - \delta < x \leq c$, que

$$|F(x) - F(c) - f(c)(c - x)| < \varepsilon(c - x).$$

Esto muestra que $F'_{-}(c)$ existe y es igual a $f(c)$.

Usando un argumento análogo se demuestra que $F'_{+}(c) = f(c)$ si f es continua por la derecha de c y $a \leq c < b$.

De esta manera se ha demostrado la Segunda versión del Teorema Fundamental, enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 2.44.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y sea F definida por $F(x) = \int_{[a,x]} f$, entonces:

(a) *Para $a \leq c < b$ y f continua por la derecha se tiene que F tiene derivada por la derecha y además $F'_{+} = f(c)$.*

(b) *Para $a < c \leq b$ y f continua por la izquierda se tiene que F tiene derivada por la izquierda y además $F'_{-} = f(c)$.*

Demostración. □

Véase en el siguiente teorema, una caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil, dada por el Criterio de Cauchy.

Teorema 2.45.

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un indicador γ tal que si $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son dos particiones etiquetadas γ-finas de $[a, b]$, entonces

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}_2)| < \varepsilon.$$

Demostración.

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y $\varepsilon > 0$.

Sea γ un indicador tal que si $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de $[a,b]$, entonces

$$\left| S(f,\mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérese $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ dos particiones etiquetadas γ-finas de $[a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned}
|S(f,\mathcal{D}_1) - S(f,\mathcal{D}_2)| &= \left| \left(S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,b]} f \right) + \left(\int_{[a,b]} f - S(f,\mathcal{D}_2) \right) \right| \\
&\leq \left| S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,b]} f \right| + \left| \int_{[a,b]} f - S(f,\mathcal{D}_2) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

De modo que si f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ entonces existen dos particiones $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ tal que

$$|S(f,\mathcal{D}_1) - S(f,\mathcal{D}_2)| < \varepsilon.$$

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$ se eligen indicadores γ_k tales que para cualesquieras particiones etiquetadas γ_k-fina $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ de $[a,b]$ se tiene que

$$|S(f,\mathcal{D}_1) - S(f,\mathcal{D}_2)| < \frac{1}{k}.$$

Se toma ahora $\bigcap_{j=1}^{k} \gamma_j$ (en vez de γ_k) y se supone, sin pérdida de generalidad, que

$$\gamma_{k+1} \subset \gamma_k.$$

Para cada k, se construye una partición etiquetada γ_k-fina $\mathcal{D}_k$. Nótese que para $j > k$, se tiene que $\gamma_j \subset \gamma_k$ y $\mathcal{D}_j$ es una partición etiquetada γ_k-fina de $[a,b]$. Así pues

$$|S(f,\mathcal{D}_k) - S(f,\mathcal{D}_j)| < \frac{1}{k},$$

lo que implica que la sucesión $\{S(f,\mathcal{D}_k)\}_{k\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que dicha sucesión converge. Sea A el límite de esta sucesión, de la desigualdad anterior, se tiene que

$$|S(f,\mathcal{D}_k) - A| < \frac{1}{k}.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ y $K > \frac{2}{\varepsilon}$, y considerando $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ_k-fina del intervalo $[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - A| &= |[S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}_k)] + [S(f, \mathcal{D}_k) - A]| \\ &\leq |S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}_k)| + |S(f, \mathcal{D}_k) - A| \\ &< \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De modo que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

De esta manera se demuestra el teorema enunciado.

$\square$

Despues de ver esta caracterización de la integral de Henstock-Kurzweil, véase como se comporta esta integral respecto a las funciones medibles, y así obtener una relación entre la integral de Lebesgue y la integral de Henstock-Kurzweil.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa y acotada.

Supóngase que f es acotada por la constante M e $I = [a, b]$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Entonces existe una sucesión de funciones $\{g_k\}_{k \geq 1}$ tales que $g_k \to f$ en c.t.p-m y

$$|g_k(x)| \leq M$$

para toda $k \in \mathbb{N}$ y $x \in I$.

Así pués

$$(L) \int_{[-k,k]} g_k = (HK) \int_{[-k,k]} g_k.$$

Como el Teorema de Beppo-Levy se satisface para las integrales de Lebesgue y Henstock-Kurzweil, se tiene que

$$(L) \int_{[a,b]} f = (HK) \int_{[a,b]} f.$$

Supóngase ahora que f no es acotada, es decir, $f : I \to \mathbb{R}$ es una función medible y no negativa.

Defínase la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \geq 1}$ definida por

$$f_k(x) = \text{mín}\{f(x), k\}\chi_{[-k,k]}(x).$$

Cada f_k es una función medible, no negativa y acotada, así pués por el caso expuesto anteriormente se tiene que

$$(L)\int_{[-k,k]} f_k = (HK)\int_{[-k,k]} f_k.$$

De modo que la sucesión $\{f_k\}_{k\geq 1}$ crece a f.

Como el Teorema de Convergencia Monótona se satisface para ambas integrales se obtiene que

$$(L)\int_{[a,b]} f = (HK)\int_{[a,b]} f.$$

De este modo se concluye que f es Lebesgue integrable si y solo si f es Henstock-Kurzweil integrable.

Por otro lado se tiene que si f es una función Lebesgue entonces f^+ y f^- también lo son, consecuentemente f^+ y f^- son Henstock-Kurzweil integrables, y por linealidad se obtiene que f es absolutamente Henstock-Kurzweil integrable.

De esta manera se obtiene que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es Lebesgue integrable si y solo si f es absolutamente Henstock-Kurzweil integrable. Y en este caso las integrales coinciden.

En conclusión, de la teoría de integración de Henstock-Kurzweil se observa en principio que esta integral es una variación de la integral de Riemann pero mucho más general que esta.

Del último resultado obtenido que dice que una función f es Lebesgue integrable si y solo si f es absolutamente Henstock-Kurzweil integrable, esto no indica que todas las funciones Henstock-Kurzweil integrables son absolutamente Henstock-Kurzweil integrables, para ello véase lo siguiente:

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos(\frac{\pi}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por la Primera versión del Teorema Fundamental, se tiene que f' es Henstock-Kurzweil integrable en $[0,1]$ y el valor de su integral es -1, es decir

$$\int_{[0,1]} f' = -1.$$

Sin embargo, $|f'|$ no es Henstock-Kurzweil integrable.

Una prueba rápida y práctica de demostrar que $|f'|$ no es Henstock-Kurzweil integrable, es suponer que sí lo es, y definir

$$f_k = \begin{cases} |f'| & \text{en } (\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{1}{\sqrt{k}}) \equiv (a_k, b_k) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f_k &= \int_{[a_k,b_k]} f_k \\ &= \int_{[a_k,b_k]} |f'| \\ &\geq \left| \int_{[a_k,b_k]} f' \right| \\ &= |f(b_k) - f(a_k)| \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \\ &\geq \frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in [0,1]$, se tiene que

$$|f'| \geq \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

De modo que

$$\int_{[0,1]} |f'| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{k+1}.$$

Puesto que la suma del lado derecho de la desigualdad anterior, diverge cuando $n \to \infty$, se obtiene una contradicción.

De modo que $|f'|$ no es Henstock-Kurzweil integrable.

Por lo que la Henstock-Kurzweil integrabilidad de f no implica la Henstock-Kurzweil integrabilidad de $|f|$.

Aunque todas las funciones Lebesgue integrables son absolutamente Lebesgue integrables y no ocurra lo mismo con todas las funciones Henstock-Kurzweil integrables, no significa que la integral de Lebesgue sea más general que la integral de Henstock-Kurzweil, puesto que todas las funciones Lebesgue integrables están incluidas en el conjunto de funciones Henstock-Kurzweil integrables y por ende es más general que la integral de Lebesgue.

CAPíTULO 3

Criterios de integrabilidad de la integral de Hestock-Kurzweil

Sea $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $I' \subset I$. Si se sabe que la función es Henstock-Kurzweil integrable en I', ¿existe una manera de saber si f es Henstock-Kurzweil integrable en I?.

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y en este capítulo se dan a conocer algunos teoremas que permiten saber si la función es Henstock-Kurzweil integrable en todo su dominio, dado que es Henstock-Kurzweil integrable en parte del mismo.

Antes de enunciar y demostrar los teoremas, véase el siguiente lema, que será de gran utilidad en las demostraciones siguientes.

Lema 3.1 (Lema de Henstock).

Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en I. Para $\varepsilon > 0$, sea γ un indicador de I, tal que si $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de I, entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_I f \right| < \varepsilon.$$

Supóngase que $\mathcal{D}' = \{(x_1, J_1), \ldots, (x_k, J_k)\}$ es una subpartición etiquetada γ-fina de I, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right) \right| \le \varepsilon,$$

y

$$\sum_{i=1}^{k} \left| f(x_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right| \le 2\varepsilon.$$

Demostración.

Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en I.

Sea γ un indicador de I, tal que $\mathcal{D}$ es una patición etiquetada γ-fina de I, tal que para $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_I f \right| < \varepsilon.$$

Supóngase que $\mathcal{D}' = \{(x_1, J_1), \ldots, (x_k, J_k)\}$ es una subpartición etiquetada γ-fina de I.

El conjunto $I \backslash \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ es una unión finita de intervalos disjuntos.

Sean $K_1, \ldots, K_m$ la clausura de esos intervalos.

Como f es Henstock-Kurzweil integrable en I, también lo será en cada K_j, para $j \in \{1, \ldots, m\}$, de modo que existe una partición etiquetada γ-fina $\mathcal{D}_j$ de K_j, tal que para $n > 0$ fijo, se tiene que

$$\left| S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{K_j} f \right| < \frac{n}{m}.$$

Es posible encontrar particiones, eligiendo indicadores γ_j para intervalos K_j con un margen de error de $\frac{n}{m}$, con particiones $\gamma \cap \gamma_j$-finas.

Nótese que el conjunto $\mathcal{D}$ se puede expresar de la forma $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_m$, de modo que $\mathcal{D}$ es una partición γ-fina de I.

Puesto que

$$S(f, \mathcal{D}) = S(f, \mathcal{D}') + \sum_{j=1}^{m} S(f, \mathcal{D}_j),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\left| S(f, \mathcal{D}') - \sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} f \right| &= \left| S(f, \mathcal{D}') - \sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} f + \sum_{j=1}^{m} \left(S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{K_j} f \right) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{j=1}^{m} \left(S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{K_j} f \right) \right| \\
&\leq \left| S(f, \mathcal{D}) - \int_I f \right| + \sum_{j=1}^{m} \left| S(f, \mathcal{D}_j) - \int_{K_j} f \right| \\
&< \varepsilon + m \frac{n}{m} \\
&= \varepsilon + n.
\end{aligned}$$

Puesto que $n > 0$ es arbitrario, tomando $n \to 0$, se obtiene que

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_i) \ell(J_i) - \int_{J_i} f \right) \right| \leq \varepsilon \qquad (1)$$

Para probar la otra estimación, considérense los conjuntos

$$\mathcal{D}^+ = \left\{(a_i, J_i) \in \mathcal{D}' : \ f(x_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \geq 0\right\}$$

y

$$\mathcal{D}^- = \mathcal{D}' \backslash \mathcal{D}^+.$$

Nótese que los conjuntos $\mathcal{D}^+$ y $\mathcal{D}^-$ son particiones etiquetadas γ-finas de I, que satisfacen la desigualdad (1), entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \left| f(x_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right| &= \sum_{(x_i,J_i)\in\mathcal{D}^+} \left(f(x_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right) \\ &+ \sum_{(x_i,J_i)\in\mathcal{D}^-} \left(\int_{J_i} f - f(x_i)\ell(J_i) \right) \\ &\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

Así queda demostrado el Lema de Henstock. □

Teorema 3.2.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[c, b]$, para todo $a < c < b$. Entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ si y solo si $\lim_{c\to a^+} \int_{[c,b]} f$ existe.

Demostración.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[c, b]$, para todo $a < c < b$.

Supóngase que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

Sea $\varepsilon > 0$, γ un indicador del intervalo $[a, b]$ y $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ-fina de $[a, b]$, como f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$, se tiene que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para cada $c \in (a, b)$, existe un indicador γ_c para un intervalo $[c, b]$, tal que si $\mathcal{D}_c$ es una partición γ_c-fina de $[a, b]$, entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}_c) - \int_{[c,b]} f \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\gamma_c \subset \gamma$ y tómese $c \in \gamma(a)$ tal que

$$|f(a)|(c - a) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sean $k \in (a,c)$ y $\mathcal{D}_c$ una partición etiquetada γ_k-fina de $[k,b]$.

Nótese que $\mathcal{D} = \{(a,[a,s])\} \cup \mathcal{D}_c$.

Ahora

$$\begin{aligned}\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[k,b]} f\right| &\leq \left|\int_{[a,b]} -S(f,\mathcal{D})\right| + \left|\int_{[k,b]} -S(f,\mathcal{D}_c)\right| + |f(a)|(c-a)\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Así pues

$$\lim_{c\to a^+} \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

Supóngase ahora que el límite existe.

Sea $\{c_k\}_{k\geq 1} \subset [a,b]$ tal que $c_0 = b$, $c_k > c_{k+1}$ y $c_k \to a$.

Defínase γ_1 un indicador del intervalo $[c_1, c_0]$, tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_1-fina de $[c_1, c_0]$, entonces

$$\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_{[c_1,c_0]} f\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para $k > 1$, se definen indicadores γ_k sobre los intervalos $[c_k, c_{k-2}]$ tales que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_k-fina de $[c_k, c_{k-2}]$, entonces

$$\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_{[c_k,c_{k-2}]} f\right| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Denótese por $A = \lim\limits_{c\to a^+} \displaystyle\int_{[c,b]} f$.

Para $s \in (a, c_k)$, sea K una partición etiquetada γ_s-fina de $[s, c_0]$, tal que

$$\left|\int_{[s,c_0]} f - A\right| < \varepsilon.$$

Defínase un indicador γ de $[a,b]$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (-\infty, c_K) & \text{si } t = a\\ \gamma_1(t) \cap (c_1, \infty) & \text{si } c_1 < t \leq c_0\\ \gamma_k(t) \cap (c_k, c_{k-2}) & \text{si } c_k < t \leq c_{k-1};\ \text{para } k > 1\end{cases}$$

Sea $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ-fina de $[a,b]$, y $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ para $(c_k, c_{k-1}]$, de modo que la dimensión de $\mathcal{D}$ es finita si $\mathcal{D}_k \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Sea $J_k = \bigcup_{k>1} \mathcal{D}_k$.

Entonces $\mathcal{D}_k$ es γ_k-fina en J_k y $J_1 \subset (c_1, c_0]$ y $J_k \subset (c_k, c_{k-2})$.

Usando el Lema de Henstock, para $k \geq 1$ se tiene que

$$\left| \int_{J_k} f - S(f, \mathcal{D}_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Sea $(x, [a,d]) \in \mathcal{D}$, por definición se tiene que $a \in \gamma(t)$ si y solo si $t = a$, de modo que $x = a$. Por tanto

$$S(f, \mathcal{D}) = f(a)(d-a) + \sum_{k \geq 1} S(f, \mathcal{D})$$

y

$$\int_{[d,b]} f = \sum_{k \geq 1} \int_{J_k} f,$$

luego

$$\begin{aligned} |A - S(f, \mathcal{D})| &\leq |f(a)|(d-a) + \left| \sum_{k \geq 1} \left(\int_{J_k} f - S(f, \mathcal{D}_k) \right) \right| + \left| A - \int_{[a,b]} f \right| \\ &< \varepsilon + \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon \\ &= \varepsilon' \end{aligned}$$

De modo que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y además

$$\int_{[a,b]} f = A.$$

De esta manera se demuestra el teorema enunciado. □

Teorema 3.3.

Sea $f : I = [a, \infty] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, para todo $a < b < \infty$. Entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ si y solo si $\lim_{b \to \infty} \int_{[a,b]} f$ existe.

Demostración.

Sea $f : I = [a, \infty] \to \mathbb{R}$ una función Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, para todo $b \in (a, \infty)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y γ un indicador tal que $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de I. Entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_I f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supóngase que $\gamma(\infty) = (T, \infty]$. Para cada $c > \max\{T, a\}$, existe un indicador γ_c de $[a, c]$ tal que si $\mathcal{D}_c$ es una partición etiquetada γ_c fina de $[a, c]$, tal que para todo $x \in [a, c]$ se tiene que $\gamma_c(x) \subset \gamma(x)$, entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}_c) - \int_{[a,c]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $c > \max\{T, a\}$ fijo, y $\mathcal{D}_c$ una partición etiquetada γ_c-fina de $[a, c]$.

Nótese que $\mathcal{D} = \{(\infty, [c, \infty])\} \cup \mathcal{D}_c$. Entonces $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de I, por tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_I f - \int_{[a,c]} \right| &\leq \left| \int_I f - S(f, \mathcal{D}) \right| + \left| S(f, \mathcal{D}_c) - \int_{[a,c]} f \right| + |f(\infty)|\ell([c, \infty]) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 0 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Así pues

$$\lim_{b \to \infty} \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f.$$

Supóngase ahora que el límite existe.

Sea $\{c_k\}_{k \geq 1} \subset [a, \infty)$ tal que $c_0 = a$, $c_k < c_{k+1}$ y $c_k \to \infty$.

Sea γ_0 un indicador de $[c_0, c_1]$ tal que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_{[c_0,c_1]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2^2},$$

para toda partición etiquetada $\mathcal{D}$ γ_0-fina de $[c_0, c_1]$.

Para $k \geq 1$, sea γ_k un indicador de $[c_{k-1}, c_{k+1}]$ tal que si $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ_k-fina de $[c_{k-1}, c_{k+1}]$, entonces

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_{[c_{k-1},c_{k+1}]} f \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

Denótese por

$$A = \lim_{b \to \infty} \int_{[a,b]} f.$$

Eligiendo una partición etiquetada K tal que

$$\left| \int_{[a,b]} f - A \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para $b \geq c_k$.

Defínase un indicador γ de $[a, b]$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (c_K, \infty] & \text{si } x = \infty \\ \gamma_0(t) \cap (-\infty, c_1) & \text{si } c_0 \leq t < c_1 \\ \gamma_k(t) \cap (c_{k-1}, c_{k+1}) & \text{si } c_k \leq t < c_{k+1}; \text{ para } k \geq 1 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ-fina de I.

Si $I_i = [\alpha, \infty] \subset \mathcal{D}$, entonces $t_i = \infty$ y $\alpha > c_K$.

Para $k \geq 0$, sea $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ con etiquetas en los intervalos de la forma $[c_k, c_{k+1})$, donde $\mathcal{D}_k \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Sea $J_k = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{D}_k$.

Entonces $\mathcal{D}_k$ es γ_k-fina en J_k y además $J_0 \subset [c_0, c_1)$ y $J_k \subset (c_{k-1}, c_{k+1})$.

Usando el Lema de Henstock, para $k \geq 0$ se tiene que

$$\left| \int_{J_k} f - S(f, \mathcal{D}_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Puesto que $\alpha > c_k$, se sigue que

$$\begin{aligned} |A - S(f, \mathcal{D})| &\leq \left| A - \int_{[a,\alpha]} f \right| + \left| \int_{[a,\alpha]} f - S(f, \mathcal{D}) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k \geq 0} \int_{J_k} f - \sum_{k \geq 0} S(f, \mathcal{D}_k) + f(\infty)\ell(I_i) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

De donde se obtiene que f es Henstock-Kurzweil integrable en I y además se tiene que

$$A = \int_I f.$$

De esta manera se demuestra el teorema enunciado. $\square$

Teorema 3.4.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, c]$ para $a \leq c < b$, y $f(t) \geq 0$ y $g(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Asúmase que el siguiente límite existe

$$\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = L,$$

entonces:

1. *Si* $L = 0$ *y* g *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$*, entonces* f *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$*.*
2. *Si* $0 < L < \infty$*, entonces* g *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$ *si y solo si* f *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$*.*
3. *Si* $L = \infty$ *y* f *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$*, entonces* g *es Henstock-Kurzweil integrable en* $[a, b]$*.*

Demostración.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones Henstock-Kurzweil integrables en $[a, c]$ para $a \leq c < b$, tales que para todo $t \in [a, b]$ se tiene que $f(t) \geq 0$ y $g(t) > 0$.

Supóngase que

$$\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = L,$$

para $L \in \mathbb{R}^*$.

Usando propiedades del límite, se tiene que

$$\lim_{t \to b^-} f(t) = L. \lim_{t \to b^-} g(t),$$

integrando en el intervalo $[t, b]$, se obtiene que

$$\int_{[t,b]} \lim_{t \to b^-} f(t) = \int_{[t,b]} L. \lim_{t \to b^-} g(t).$$

Como el límite depende del parámetro de las funciones, se puede aplicar el intercambio del límite con la integral, de modo que

$$\lim_{t \to b^-} \int_{[t,b]} f(t) = L. \lim_{t \to b^-} \int_{[t,b]} g(t). \qquad (1)$$

Sea γ un indicador de $[a, b]$ y $\mathcal{D}$ una partición etiquetada γ-fina de $[a, b]$.

Se observa que si $\mathcal{D}$ es una partición etiquetada γ-fina de $[a, b]$ entonces para indicadores γ_1, γ_2 de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente, se tiene $\mathcal{D}_1$ una partición etiquetada γ_1-fina de $[a, c]$ y $\mathcal{D}_2$ una partición etiquetada γ_2-fina de $[c, b]$, tal que para una función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$S(h, \mathcal{D}) = S(h, \mathcal{D}_1) + S(h, \mathcal{D}_2).$$

La observación anterior es muy importante para la demostración del teorema y se usa sin volver a mencionarla.

1. Supóngase que g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y $L = 0$. De esta suposición se tiene que el producto

$$L.\lim_{t\to b^-}\int_{[t,b]} g(t),$$

está bien definido, y de la igualdad dada en (1) se tiene que

$$\lim_{t\to b^-}\int_{[t,b]} f(t) = 0. \qquad (2)$$

Ahora, usando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,c]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f\right| &= \left|S(f,\mathcal{D}_1) + S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[a,c]} f - \int_{[c,b]} f\right| \\
&= \left|\left(S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,c]} f\right) + \left(S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f\right)\right| \\
&\leq \left|S(f,\mathcal{D}_1) - \int_{[a,c]} f\right| + \left|S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f\right| \\
&< \varepsilon + \left|S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f\right|
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $c \to b^-$, usando la desigualdad triangular, teniendo en cuenta que por definición se tiene que $\lim\limits_{c\to b^-} S(f,\mathcal{D}_2) \to 0$ y usando la igualdad dada en (2), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f\right| &= \lim_{c\to b^-}\left|S(f,\mathcal{D}) - \int_{[a,b]} f\right| \\
&< \lim_{c\to b^-}\left(\varepsilon + \left|S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f\right|\right) \\
&= \varepsilon + \lim_{c\to b^-}\left|S(f,\mathcal{D}_2) - \int_{[c,b]} f\right| \\
&= \varepsilon + \left|\lim_{c\to b^-} S(f,\mathcal{D}_2) - \lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} f\right| \\
&< \varepsilon + \left|\lim_{c\to b^-} S(f,\mathcal{D}_2)\right| + \left|\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} f\right| \\
&< \varepsilon + 0 + 0 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

De modo que si g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$ y $L=0$ entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$.

2. Supóngase que $0 < L < \infty$.

   Si f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, de la igualdad dada en (1) se tiene que
$$\lim_{t\to b^-}\int_{[t,b]} g(t) = \frac{1}{L}.\lim_{t\to b^-}\int_{[t,b]} f(t), \qquad (3)$$
donde el lado derecho de la igualdad dada en (3) está bien definido.

   Luego, usando la desigualdad triangular y como g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,c]$, se tiene que
$$\begin{aligned}\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right| &= \left|S(g,\mathcal{D}_1)+S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[a,c]} g-\int_{[c,b]} g\right|\\ &= \left|\left(S(g,\mathcal{D}_1)-\int_{[a,c]} g\right)+\left(S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} g\right)\right|\\ &\leq \left|S(g,\mathcal{D}_1)-\int_{[a,c]} g\right|+\left|S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} g\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\left|S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} g\right|\end{aligned}$$

   Tomando límite cuando $c\to b^-$, usando la desigualdad triangular, teniendo en cuenta que por definición $\lim_{c\to b^-} S(g,\mathcal{D}_2)\to 0$, usando la igualdad dada en (3) y teniendo en cuenta la Henstock-Kurzweil integrabilidad de f en $[a,b]$, se tiene que
$$\begin{aligned}\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right| &= \lim_{c\to b^-}\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right|\\ &< \lim_{c\to b^-}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\left|S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} g\right|\right)\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\lim_{c\to b^-}\left|S(g,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} g\right|\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\left|\lim_{c\to b^-} S(g,\mathcal{D}_2)-\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} g\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\left|\lim_{c\to b^-} S(g,\mathcal{D}_2)\right|+\left|-\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} g\right|\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\left|-\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} g\right|\end{aligned}$$

Usando la igualdad dada en (3), la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right| &< \frac{\varepsilon}{2}+\left|-\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} g\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\left|-\frac{1}{L}\lim_{c\to b^-}\int_{[c,b]} f\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\left|\lim_{c\to b^-} -\int_{[c,b]} f\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\left|\lim_{c\to b^-}\left(S(f,\mathcal{D}_2)-S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right)\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\left|\lim_{c\to b^-}\left(S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right)-\lim_{c\to b^-} S(f,\mathcal{D}_2)\right|\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\left|\lim_{c\to b^-}\left(S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right)\right|+\frac{1}{L}\left|\lim_{c\to b^-} S(f,\mathcal{D}_2)\right|\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\lim_{c\to b^-}\left|S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right|+0\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\lim_{c\to b^-}\left|S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right|
\end{aligned}$$

Dada la Henstock-Kurzweil integrabilidad de f en $[a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right| &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}\lim_{c\to b^-}\left|S(f,\mathcal{D}_2)-\int_{[c,b]} f\right|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{L}.\frac{\varepsilon.L}{2}\\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Así se obtiene que

$$\left|S(g,\mathcal{D})-\int_{[a,b]} g\right|<\varepsilon.$$

De modo que si f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, se tiene que g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$.

Con un razonamiento análogo al anterior, se obtiene que si g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a,b]$.

3. Supóngase que $L = \infty$ y f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

   De la igualdad dada en (1), se tiene que

$$\lim_{t \to b^-} \int_{[t,b]} g(t) = \frac{1}{L} \cdot \lim_{t \to b^-} \int_{[t,b]} f(t),$$

   el lado derecho de la igualdad anterior está bien definida, puesto que f es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$ y $L = \infty$. Entonces

$$\lim_{t \to b^-} \int_{[t,b]} g(t) = 0.$$

   Usando el resultado obtenido en el inciso 1., se obtiene que g es Henstock-Kurzweil integrable en $[a, b]$.

De modo que queda demostrado el teorema, el cual es conocido como el Criterio del Cociente para la integral de Henstock-Kurzweil. $\square$

De esta manera se observa que estos criterios de integrabilidad presentados en la integral de Henstock-Kurzweil son mucho más poderosos y contundentes que los presentados por la integral de Riemann.

A lo largo de estos tres capítulos se observa que la integral de Henstock-Kurzweil posee las propiedades básicas de las integrales de Riemann y Lebesgue, es decir, la integral de Henstock-Kurzweil es lineal, monótona, etc.

También quedó evidenciado que todas las funciones Riemann y Lebesgue integrables son Henstock-Kurzweil integrables y hay funciones Henstock-Kurzweil integrables que no son ni Riemann ni Lebesgue integrables.

Por otro lado se observa una ventaja significativa de la integral de Henstock-Kurzweil sobre la integral de Lebesgue que yace en su construcción. Para definir la integral de Lebesgue se tuvo que construir nuevos conjuntos, y lo más importante se tuvo que construir una medida para poder integrar, en cambio la integral de Henstock-Kurzweil es una extensión a la construcción intuitiva y natural de la integral de Riemann, donde predomina la importancia de la inclusión de un indicador que se utiliza para restringir las etiquetas que se pueden elegir en las particiones de los intervalos; además los indicadores se pueden utilizar en intervalos donde la función a integrar varíe poco y no es necesario exigir que el tamaño de dicho intervalo en la partición tienda a cero. También es importante acotar que sin importar el indicador elegido, hay maneras de dividir un intervalo de forma tal que la partición etiquetada sea γ-fina.

Otra ventaja significativa de la integral de Henstock-Kurzweil se ve reflejada en el Teorema Fundamental del Cálculo, donde en las hipótesis del teorema no se pide que la función sea Henstock-Kurzweil integrable, a diferencia del teorema enunciado para la integral de Riemann donde es necesario suponer que la función sea Riemann integrable.

Los teoremas de Convergencia Monótona y de Convergencia Dominada de funciones Lebesgue integrables son extendidos de manera natural a funciones Henstock-Kurzweil integralbles, notándose menos condiciones en la postulación del mismo y sin la necesidad de usar teorías complicadas o sofisticadas.

Una desventaja que podría presentar la integral de Henstock-Kurzweil es que debido a su generalidad los cálculos pertinentes para resolver una integral de este estilo sean en algunos casos un poco más complicados a los cálculos presentados al resolver una integral de Riemann. Otra desventaja que presenta la integral de Henstock-Kurzweil es que no es sencillo presentar funciones que no sean Henstock-Kurzweil integrables, pero esto no significa que todas las funciones sean Henstock-Kurzweil integrables.

Así pués, la integral de Henstock-Kurzweil preserva la forma intuitiva de la integral de Riemann pero tiene la fortaleza de la teoría de Lebesgue de una manera más solidificada, donde dicha solidez se basa en que la integral de Henstock-Kurzweil, es equivalente a la integral de Denjoy y Perron.

Bibliografía

[1] Barra, Giroid De. *INTRODUCTION TO MEASURE THEORY*. Van Nostrand Reinhold, 1974.

[2] Dieudonne, Jean Alexandre. *FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MODERNO*. Reverté, 1966.

[3] Douglas, S. Kurtz., Swartz, Charles S. *THEORIES OF INTEGRATION*. World Scientific.

[4] Folland, Gerald. *REAL ANALYSIS*. Wiley, 1999.

[5] Gordon, Russell A. *THE INTEGRALS OF LEBESGUE, DENJOY, PERRON, AND HENSTOCK*. American Mathematical Society.

[6] Haaser, Norman. *ANÁLISIS MATEMÁTICO*. Trillas, 2005.

[7] Haaser, Norman., Sullivan, Joseph A. *ANÁLISIS REAL*. Trillas, 1978.

[8] Harwood, Clarke. *PURE MATHEMATICS AT ADVANCED LEVEL*. Heinemann Educational, 1982.

[9] McShane, Edward James. *INTEGRATION*. Princeton University Press, 1947.

[10] McShane, Edward James. *ORDER-PRESERVING MAPS AND INTEGRATION PROCESSES*. Princeton University Press, 1955.

[11] McShane, Edward James. *UNIFIED INTEGRATION*. Academic Press, INC. 1983.

[12] McShane, Edward James., Botts, Truman Arthur. *REAL ANALYSIS*. Van Nostrand, 1959.

[13] Peng-Yee, Lee. *LANZHOU LECTURES ON HENSTOCK INTEGRATION*. World Scientific.

[14] Peng-Yee, Lee., VÝbornÝ, Rudolf. *THE INTEGRAL: AN EASY APPROACH AFTER KURZWEIL AND HENSTOCK*. Crambridge University Press.

[15] Rudin, Walter. *FUNCTIONAL ANALYSIS*. McGraw-Hill Education (India) Pvt Ltd, 2006.