UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Funciones de Variación Acotada Generalizada y un Teorema de Representación Canónica de Chistyakov.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Thaiser V. Barrantes F.** para optar al título de Licenciada en Matemática.
Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
2010.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Funciones de Variación Acotada Generalizada y un Teorema de Representación Canónica de Chistyakov.**" presentado por la **Br. Thaiser V. Barrantes F.**, titular de la Cédula de Identidad **18.073.222**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes
Tutor

Dr. Jóse Luis Sánchez
Jurado

Dr. Hugo Leiva
Jurado

Dedicatoria

A mi bella mamá: Nuvia Farias,

a mis hermanos Sergio y Hillary.

Agradecimiento

Primeramente a Jehová Dios por ser el creador del Universo, la fuente de la vida y mi Plaza fuerte.

Agradezco el esfuerzo y la confianza de mi bella Mamá, Nuvia Farias, por ser luchadora, mi ejemplo para crecer, luchar, perdonar y emprender la carrera de la vida.

A mis hermanos Sergio Barrantes y Hillary Tovar, son mis tesoros, mis ojos, siempre me brindaron una sonrisa cuando más la necesite.

Agradezco a mi tutor Dr. Nelson Merentes por haber aceptado la dirección de este Trabajo Especial de Grado, por su apoyo incondicional tanto para la ejecución como para la reproducción del material, también por estar atento a mis circunstancias y brindarme esa mano amiga en momentos difíciles, compartir sus conocimientos y, además, por toda la colaboración prestada durante la realización de está investigación a pesar del sin número de obligaciones y compromisos adquiridos en otras dimensiones.

También, a los profesores de la escuela, quienes contribuyeron en mi formación acádemica, entre ellos los Drs. Jóse Luis Sánchez, Jóse Benito Hernández, Ángel Padilla y Cristina Balderrama.

Al Dr. Hugo Leiva por sus sugerencias y tiempo dedicado para la revisión de este Trabajo.

A la familia Maza por ser hospitalaria, brindarme cariño, apoyarme, tenerme paciencia, confianza y hacerme un miembro más de ella.

A la familia Lobelo por ser parte mi corazón y darle alegría a mi vida.

Agradezco los sabios consejos de Petra Flores.

Asi como también, a Mayra Román por su dulzura y sincera amistad, a Marifer Agostino por sus sugerencias en la redacción de este Trabajo Especial de Grado.

Agradezco a mis compañeros Expedito Cedeño, Lysis Gonzáles, Karelys Medina, Gari Roa y especialmente a Elías Chacón, Zorely Jesús, Odalis Mejia y Ronaldys Rosario quienes me apoyaron durante la carrera, su amistad fue y seguira siendo valiosa, que Jehová los ayude a alcanzar sus metas.

En fin agradezco todos los que compartieron su tiempo, esfuerzos y dedicación a mi lado, mientras se llevo a cabo el Trabajo Especial de Grado y a lo largo de mi formación profesional.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En el siglo XIX más precisamente en 1807 Fourier (ver [14]) estudió el problema de la transferencia del calor en placas bidimensionales, mediante el cual conjeturó que toda función (lo que se entendía en aquel entonces por función) podía tener una representación por medio de series trigonométricas, esta conjetura fue respondida formalmente mediante una prueba matemática en 1829 por Dirichlet (ver [12]) quien demostró que toda función real a valores en $\mathbb{R}$ definida por medio de un número finito de partes monótonas tiene serie de Fourier puntualmente convergente en $\mathbb{R}$. Este resultado es hoy conocido como el criterio de Dirichelt sobre la convergencia de las series de Fourier. Así por primera vez y rigurosamente se obtuvo una demostración de la conjetura planteada en el año 1807 por Fourier (ver [14]).

En el año 1881 Jordan (ver [15]) realiza un estudio crítico del Trabajo de Dirichelt y descubre en dicho Trabajo, la noción de función de Variación Acotada, la cual introduce y demuestra que para esta clase de funciones es válida la conjetura de Fourier. Además demuestra que la función: $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene Variación Acotada en $[a, b]$ si y sólo si u es diferencia de funciones monótonas (actualmente este resultado es conocido como el Teorema de Representación de Jordan). Esta noción ha sido generalizada de varias maneras, dependiendo del espacio que se este considerando.

Resultados y propiedades de las funciones de variación acotada y sus generalizaciones aparecen en forma dispersa en libros y artículos de investigación y algunos de ellos (ver [18]) son obtenidos recientemente.

Entre los objetivos de este Trabajo Especial de Grado esta presentar de manera sencilla y en una sola monografía, varios resultados que aparecen en diferentes artículos de investigación, algunos de vieja data y otros recientes, por ejemplo las tres formas conocidas de caracterizar las funciones de Variación Acotada: el primero de ellos es el clásico Teorema de Representación de Jordan de 1881 (ver [15]) como diferencia de funciones monótonas, luego la caracterización hecha por el Gran Banach en 1925 (ver [1]) mediante el llamado indicatriz de Banach y por último un resultado reciente logrado por Chistyakov en 2001 (ver [8]) que relaciona las funciones de Variación Acotada por medio de lo que se conoce como la representación canónica como composición de funciones no decreciente con funciones Lipschizianas. **A nuestro juicio esto es un aporte didáctico en la presentación del tema.**

El Trabajo Especial de Grado lo hemos divido en tres capítulos: en el primero se define la noción de funciones de Variación Acotada dadas en un intervalo cerrado y expondremos propiedades como la monotonía, acotación, semi-aditividad, cambio de variable, entre otras. Además, expondremos que se puede dotar de una estructura de espacio de Banach y álgebra de Banach.

En el segundo Capítulo estudiamos una generalización del concepto de Variación Acotada introduciendo la clase llamada *φ- Variación Acotada en el sentido de Wiener* donde φ es una φ-función, se exponen algunas propiedades de estas φ-funciones, también demostraremos que ésta clase es un espacio de Banach en algunos casos se preservan las propiedades dadas en el Capítulo 1, considerando el rango es un espacio métrico o un espacio de Banach. Además presentamos relaciones entre las φ-funciones de tal manera de tener comparación de inclusiones en esta clases $V_\varphi(I; M)$. Es de hacer notar que la llamada condición Δ_2 es necesaria y suficiente para que sea un espacio vectorial. También expondremos al final del capítulo que el espacio $BV_\varphi[I; M]$ generado por la clase anterior se puede dotar de una estructura de espacio de Banach.

Concluimos el Trabajo Especial de Grado en el tercer Capítulo donde veremos una nueva representación canónica que generaliza el resultado clásico de Sierpinski (ver [20]) quien demostró, que toda función regular en un intervalo es la composición de una función interna monótona no decreciente con una función continua.

El resultado de Sierpinski fue demostrado por Chistyakov (ver [8]) al caso de funciones de Variación Acotada sustituyendo la continuidad por la Lipschitzidad local, con la demostración de este resultado concluimos el capítulo 3 y el Trabajo Especial de Grado.

CAPÍTULO 1

NOCIONES DE VARIACIÓN DE FUNCIONES

En el año de 1881 C. Jordan [15] introduce la noción de funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ y demuestra el llamado Teorema de Descomposición de Jordan, el cual asegura que una función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a, b]$ si, y sólo si, es diferencia de funciones monótonas. En este Capítulo expondremos varias propiedades de las funciones de variación acotada, como por ejemplo, acotación, monotonía, cambio de variable, regularidad, entre otras; demostrando que ésta clase de funciones se puede dotar de una estructura de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y álgebra de Banach.

Concluimos el capítulo exponiendo un resultado de Banach del año 1925 (ver [1]) que caracteriza las funciones de variación acotada mediante la indicatriz de Banach, el cual es utilizado para obtener resultados referentes a la convergencia de las series de Fourier de funciones de variación acotada.

1.1 Funciones de Variación Acotada

Definición 1.1.1. *(El espacio $BV[a,b]$) En el año de 1881 C. Jordan [15] presenta el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a,b]$, como aquellas funciones $u:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, tales que el número:*

$$v(u)=v(u;[a,b])=\sup_{\pi}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|$$

es finito, donde el supremo es tomado sobre el conjunto Π de todas las particiones

$$\Pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b.$$

Ésta clase de funciones es denotada por $BV[a,b]$ y, con las operaciones usuales de funciones, tiene una estructura de álgebra. Más aún, es un espacio de Banach con la norma siguiente:

$$\|u\|_{BV[a.b]}=|u(a)|+V(u),\qquad u\in BV[a,b].$$

A continuación se presentaran ejemplos que ilustran la definición de $BV[a,b]$.

Ejemplo 1.1.1. *Consideremos $c\in\mathbb{R}$ y la función constante u en $[a,b]$, definida por*

$$u(t)=c,\qquad t\in[a,b].$$

Entonces la **variación acotada** *de la función u en el intervalo $[a,b]$ viene dada por*

$$\begin{aligned} V(u)=V(u;[a,b]) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=i}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|c-c| \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $\Pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos* $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, la función identidad, es decir,*

$$u(t) = t \qquad t \in [a,b].$$

Entonces, la variación de la función u *en el intervalo* $[a,b]$ *es dada por:*

$$\begin{aligned} V(u;[a,b]) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |t_j - t_{j-1}| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \\ &= (t_n - t_0) \\ &= b - a, \end{aligned}$$

donde el supremo es considerado sobre el conjunto Π *formado por las particiones de* $[a,b]$.

Observación 1.1.1. *Los conjuntos de* $\mathcal{C}[a,b]$ *de las funciones continuas en* $[a,b]$ *y* $BV[a,b]$*, de las funciones de variación acotada en* $[a,b]$*, no son comparables respecto a la inclusión.*

Daremos ejemplos de una función continua que no es de variación acotada, y una función acotada que no es de variación acotada

Ejemplo 1.1.3. *Consideremos la función* $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & si \quad t = 0 \\ t \sin\left(\dfrac{1}{t}\right), & si \quad t \neq 0. \end{cases}$$

Considerando la partición:

$$\Pi : t_0 = 0 < t_1 = \frac{2}{(2n+1)\pi} < \cdots < t_{n-1} = \frac{2}{\pi} < t_n = \frac{1}{\pi}\ .$$

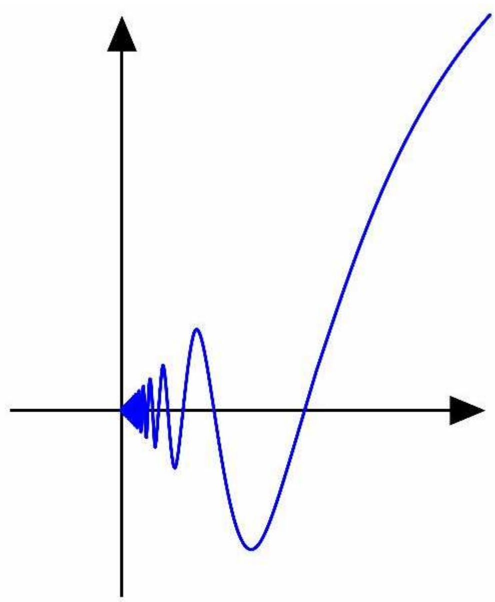

Figura 1.1:

Entonces, u es continua en $[0, 2\pi]$ y no es de variación acotada en $[0, 2\pi]$.

Ejemplo 1.1.4. *Consideremos $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$u(t) = \begin{cases} 1, & si \quad t = racional, \quad t \in [a, b], \\ 0, & si \quad t = irracional, \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Entonces, u es acotada y no es de variación acotada.

En efecto, sea $n > 0 \in \mathbb{N}$ y $[a, b]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, vamos a construir una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n+2}\}$ de $[a, b]$ tal que $V(u, [a, b]) \geq \sum_{i=1}^{n+2} |u(t_i) - u(t_{i-1})| > n$ de la manera siguiente:

Definimos $t_0 = a$. Como entre dos cualesquiera números reales existe un número racional y uno irracional, escojemos t_1 como un número irracional entre a y b.

t_2 como un número racional entre t_1 y b y así sucesivamente, t_{2i+1} lo escojemos como un número irracional entre t_{2i} y b. Elegimos t_{2i} como un número racional entre t_{2i-1} y b y finalmente $t_{n+2} = b$.

Así hemos construido una partición que comienza con a, luego se alternan números racionales e irracionales hasta que finalmente termina en b. Ahora consideremos la suma $\sum_{i=1}^{n+2} |u(t_i) - u(t_{i-1})|$ *de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} V(u;[a,b]) &\geq \sum_{i=1}^{n+2} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= |u(t_2) - u(t_1)| + \cdots + |u(t_{n+1}) - u(t_n)| \\ &= |1-0| + |0-1| + \cdots |1-0| \\ &= 1+1+1+\cdots+1 \\ &= n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $V(u;[a,b])$ *es arbitrariamnete grande por lo tanto* $V(u;[a,b]) = \infty$.

Es decir u no es de variación acotada.

1.2 Propiedades de Funciones de Variación Acotada

A continuación, enunciaremos y demostraremos varias propiedades de las funciones de variación acotada, las cuales permiten darle una estructura de espacio normado a la clase $BV[a,b]$ de funciones de variación acotada.

Estas propiedades, conjuntamente con la dadas en la proposición 3, nos permiten obtener el Teorema de Representación Canónica dado por Chistyakov por medio de funciones monótonas y Lipschitzianas (ver [7]).

Proposición 1.2.1. *Para $u \in BV[a,b]$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $V(u;[a,b]) \geq 0$.

(b) $V(u;[a,b]) = 0$ *si y solo si* $u = cte$.

(c) $V(u;[a,b]) = V(-u,[a,b])$.

(d) $|u(a) - u(b)| \leq V(u;[a,b])$.

(e) $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + V(u;[a,b])$.

(f) $V(u+v;[a,b]) \leq V(u;[a,b]) + V(v;[a,b])$.

(h) Cada función monótona u pertenece a $BV[a,b]$ *con* $V(u;[a,b]) = |u(b) - u(a)|$.

Demostración.

Propiedad (a).

En primer lugar, por definición del módulo se tiene que $|u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0$ *para cualquier* $j = 0, 1, \ldots, n$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *por lo tanto*

$$V(u;[a,b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0,$$

donde el supremo es considerado sobre todas la particiones $\Pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ *del intervalo* $[a,b]$.

Propiedad (b).

Supongamos que $V(u,[a,b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| = 0$, *entonces por la definición de variación acotada se tiene que*

$$V(u;[a,b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0,$$

donde el supremo es considerado sobre todas las posibles particiones

$$\Pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b, \quad \text{del intervalo} \quad [a,b].$$

En consecuencia, considerando $x \in [a, b]$ *y la partición*

$$\Pi_x : a = t_0 < t_1 = x < t_2 = b,$$

resulta que

$$|u(x) - u(a)| = 0 \quad y \quad |u(b) - u(x)| = 0;$$

por lo tanto

$$u(a) = u(x) = u(b) \quad \textit{para todo} \quad x \in [a, b],$$

y de esta manera obtenemos que u es constante en [a,b].

Recíprocamente, si $u = c$ *es constante, entonces del ejemplo (1) obtenemos que* $V(u; [a, b]) = 0$.

Propiedad (c).

Consideremos $u \in BV[a, b]$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} V(-u; [a, b]) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(-u(t_j)) - (-u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} | - (u(t_j) - u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= V(u; [a, b]). \end{aligned}$$

Propiedad (d).

Consideremos la partición $\Pi_{a,b}$ *definida por* $\Pi_{a,b} : a = t_0 < t_1 = b$ *del intervalo* $[a, b]$ *y de la definición de variación, se tiene que*

$$|u(b) - u(a)| \leq V(u; [a, b]).$$

Propiedad (e).

Supongamos que $u \in BV[a, b], t \in (a, b]$ *y consideremos la partición*

$$\Pi_t : a = t_0 < t_1 = t < t_2 = b.$$

Entonces, de la definición de la noción de variación acotada se deduce que

$$|u(t) - u(a)| + |u(b) - u(t)| \leq V(u; [a, b]).$$

Así,

$$|u(t) - u(a)| \leq V(u; [a, b]),$$

y en consecuencia

$$|u(t)| \leq |u(a)| + V(u; [a, b]);$$

luego la función u es acotada y además

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |u(t)| \leq |u(a)| + V(u; [a, b]).$$

Propiedad (f).

La variación es subaditiva, es decir,

$$V(u + v; [a, b]) \leq V(u; [a, b]) + V(v; [a, b]), \quad \forall\, u, v \in BV[a, b]$$

para $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
En efecto, para $u, v \in BV[a, b]$ se considera

$$\begin{aligned} V(u + v; [a, b]) &= \sum_{j=1}^{n} |(u + v)(t_j) - (u + v)(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) + v(t_j) - u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j) - u(t_{j-1})) + (v(t_j) - v(t_{j-1}))| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n} |v(t_j) - v(t_{j-1})| \\ &= V(u; [a, b]) + V(v; [a, b]). \end{aligned}$$

Propiedad (g).

Cada función monótona $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *pertenece a* $BV[a, b]$*, y*

$$V(u; [a, b]) = |u(b) - u(a)|.$$

En efecto, la función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es monótona creciente. Entonces,*

$$\begin{aligned} V(u, [a, b]) &= \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} u(t_j) - u(t_{j-1}) \\ &= u(b) - u(a). \end{aligned}$$

Así,

$$V(u) = u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)|.$$

Ahora, si la función $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es monótona decreciente. Usando el mismo argumento anterior obtenemos que la variación es:*

$$V(u) = u(a) - u(b) = |u(a) - u(b)| = |u(b) - u(a)|.$$

Lo cual concluye la demostración.

□

A continuación ilustraremos con un ejemplo que en la propiedad (f) puede no cumplirse la igualdad.

Ejemplo 1.2.1. *Para* $u(t) = t$ *y* $v(t) = -t$ *se tiene*

$$V(u; [0, 1]) = V(v; [0, 1]) = 1,$$

pero,

$$V(u + v; [0, 1]) = 0.$$

En la propiedad (g) demostramos que cada función monótona pertenece a $BV[a,b]$, cabe preguntarse si ocurre lo contrario.

El próximo ejemplo ilustra que existen funciones de variación acotada que no son monótonas.

Ejemplo 1.2.2. *Sea* $\{q_1, q_2 \ldots\}$ *una numeración del conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *con* $0 < q < 1$*. Definimos* $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *por:*

$$u(t) = \begin{cases} 2^{-k}, & \textit{para} \quad t = r_k \ , \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera que u *no es monótona en cualquier intervalo* $[a,b] \subseteq [0,1]$*. Por otra parte, se tiene que* $V(u;[0,1]) = 2$*, por lo tanto* $u \in BV[0,1]$*.*

Para visualizar esto, sea $\Pi : \{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m\}$ *una partición arbitraria de* $[0,1]$*.*

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ *nos encontramos con un índice* $j = j(k)$ *de manera que* $r_k \in (t_{j-1}, t_{j+1})$*, esto implica que*

$$\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \ + \ |u(t_{j+1}) - u(t_j)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} u(x) - \inf_{t_{j-1} \leq x \leq t_j} u(x) + \sup_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} u(x) - \inf_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} u(x) \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{m-1} 2^{-k} = 2 \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $V(u;[0,1]) \leq 2$*, entonces* $u \in BV[0,1]$*.*

Para demostrar que $V(u;[0,1]) = 2$ *construiremos una partición. Fijemos* $n \in \mathbb{N}$ *y reorganicemos los primeros* n *puntos racionales* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *en orden creciente,* *entonces* $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. *Luego, definimos la partición*

$$s_0 := 0,\ s_1 := r_1,\ s_3 = r_2,\ s_5 = r_3, \ldots, s_{2n-1} := r_n,\ s_{2n} := 1,$$

y un punto irracional,

$$s_2 \in (s_1, s_3),\ s_4 \in (s_3, s_5),\ s_6 \in (s_5, s_7), \ldots, s_{2n-2} \in (s_{2n-3}, s_{2n-1}).$$

Para la partición correspondiente $\tilde{P} = \{s_0, s_1, \ldots, s_{2n}\} \in \mathfrak{P}([0,1])$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} V(u;\tilde{P}) &= \sum_{j=1}^{2n} |u(s_j) - u(s_{j-1})| = 2\sum_{j=1}^{2n} 2^{-j} \\ &= \frac{1-(\frac{1}{2})^{2n}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2(1-2^{-2n}). \end{aligned}$$

Que puede tomarse arbitrariamente cerca de 2, *eligiendo* n *lo suficientemente grande.*

Concluimos que la variación total de u *en* $[0,1]$ *es precisamente* 2.

Las funciones de variación acotada satisfacen otras propiedades, las cuales estan contenidas en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Supongamos que* $u \in BV[a,b]$. *Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) **Propiedad de acotación.** *Para* $t, s \in [a,b]$ *se tiene que*

$$|u(s) - u(t)| \leq \sup\{|u(s') - u(t')| : s', t' \in [a,b]\} \leq V(u;[a,b]).$$

(ii) **Propiedad de monotonía.** *Sean* $t, s \in [a,b]$ *tales que* $t \leq s$. *Entonces* $V(u;[a,t]) \leq V(u;[a,s]), V(u;[s,b]) \leq V(u;[t,b])$ *y* $V(u;[t,s]) \leq V(u;[a,b])$.

(iii) **Propiedad de semi-aditividad.** *Consideremos $u \in BV[a,b]$ y $t \in (a,b]$. Entonces*

$$V(u;[a,t]) + V(u;[t,b]) \leq V(u;[a,b]).$$

(iv) **Propiedad de cambio de variable.** *Sean $u \in BV[a,b], [c,d] \subset [a,b]$ y una función $\psi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ tal que ψ es monótona. Entonces*

$$V(u;\psi([c,d])) = V(u \circ \psi;[c,d]).$$

Demostración:

(i) **Propiedad acotación.**

Veamos que para $t,s \in [a,b]$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$|u(s) - u(t)| \leq \sup\{|u(s') - u(t')| : s',t' \in [a,b]\}.$$

Ésta desigualdad es directa de la definición del supremo.

Sean $t', s' \in [a,b]$ y $\Pi_{[a,b]}$ una partición dada por:

$$\Pi_{[a,b]} : a = t_0 \leq t_1 = t' < t_2 = s' \leq t_3 = b,$$

del intervalo [a,b]. Entonces,

$$|u(s') - u(t')| \leq \sup_{\Pi_{[a,b]}} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|.$$

Por lo tanto

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \{|u(s) - u(t)|\} \leq \sup_{\Pi_{[a,b]}} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|.$$

En consecuencia

$$\sup\{|u(s') - u(t')| : s',t' \in [a,b]\} \leq V(u;[a,b]).$$

Así, se tiene

$$|u(s) - u(t)| \leq \sup\{|u(s') - u(t')| : s',t' \in [a,b]\} \leq V(u;[a,b]).$$

(ii) **Propiedad de monotonía**

Consideremos $t, s \in [a,b]$ *tales que* $t \leq s$ *y las particiones* Π_t *y* $\Pi_{[t,s]}$*, dadas por:* $\Pi_t : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ *y* $\Pi_{[t,s]} : \Pi_t \cup \{s\}$.

Entonces,

$$\begin{aligned} V(u;[a,t]) &= \sup_{\Pi_t} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq \sup_{\Pi_t} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + |u(s) - u(t)| \\ &\leq \sup_{\Pi_{t,s}} \sum_{j=1}^{n+1} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq V(u;[a,s]). \end{aligned}$$

Ahora comprobemos que

$$V(u;[s,b]) \leq V(u;[t,b]).$$

Consideremos $t, s \in [a,b]$*, tales que* $t \leq s$*, y las particiones* $\Pi_{[s,b]}$ *y* $\Pi_{[t,b]}$ *dadas por:*

$$\Pi_{[s,b]} : s = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,$$

y

$$\Pi_{[t,b]} : t = t_0 \leq t_1 = s < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(u;[s,b]) &= \sup_{\Pi_{[a,b]}} \sum_{j=2}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq |u(s) - u(t)| + \sup_{\Pi[a,b]} \sum_{j=2}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq V(u;[t,b]). \end{aligned}$$

Finalmente, comprobemos que

$$V(u;[t,s]) \leq V(u;[a,b]).$$

Consideremos $t, s \in [a,b]$ *tal que* $t \leq s$, *y las particiones* $\Pi_{[t,s]}$ *y* $\Pi_{[a,b]}$ *dadas por*

$$\Pi_{[t,s]} : t = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} = s,$$

y

$$\Pi_{[a,b]} : a = t_0 \leq t_1 = t \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} = s \leq t_n = b.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V(u;[t,s]) &= \sup_{\Pi_{[t,s]}} \sum_{j=2}^{n-1} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq |u(t) - u(a)| + \sup_{\Pi_{[t,s]}} \sum_{j=2}^{n-1} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + |u(b) - u(s)| \\ &\leq \sup_{\Pi_{[a,b]}} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\leq V(u;[a,b]). \end{aligned}$$

(iii) **Propiedad de semi-aditividad.**

Consideremos $t \in (a,b]$ *y las siguientes particiones* $\Pi_{[a,t]}$, $\Pi_{[t,b]}$ *dadas por:*

$$\Pi_{[a,t]} : a =< t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$$

y

$$\Pi_{[t,b]} : t = s_0 < s_1 < \cdots < t_m = b.$$

Como $\Pi_{[a,t]} \subset \Pi_{[a,b]}$ *y* $\Pi_{[t,b]} \subset \Pi_{[t,b]} \subset \Pi_{[a,b]}$, *se tiene que:*

$$\sup_{\Pi_{[a,t]}} \sum_{j=1}^{k} |u(t_j) - u(t_{j-1})| + \sup_{\Pi_{[t,b]}} \sum_{j=k+1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \leq \sup_{\Pi_{[a,b]}} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|,$$

donde el supremo es escogido sobre el conjunto de todas las particiones $\Pi_{[a,b]}$.

En consecuencia, por la definición de variación acotada, concluimos que

$$V(u,[a;t])+V(u;[t,b])\leq V(u;[a,b]).$$

(iv) **Propiedad cambio de variable.**

Probemos que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} V(u\circ\psi;[c,d]) &\leq V(u;\psi([c,d]));\\ V(u;\psi([c,d])) &\leq V(u\circ\psi;[c,d]). \end{aligned}$$

Sean $u\in BV[a,b]$ *y* ψ *una función monótona, la cual podemos suponer que es no-decreciente en* $[c,d]$*. Si consideramos la partición* $\Pi_{[c,d]}$ *dada por:*

$$\Pi_{[c,d]}:c=t_0<\cdots<t_n=d,$$

del intervalo $[c,d]$*, tenemos por la monotonía de* ψ *que*

$$a\leq\psi(t_0)<\psi(t_1)<\cdots<\psi(t_n)\leq t_{n+1}=b,$$

constituyen una partición del intervalo $[a,b]$*. De modo que*

$$\begin{aligned} V(u\circ\psi;[c,d]) &= \sup_{\Pi_{[c,d]}}\sum_{j=1}^{n}|u\circ\psi(t_j)-u\circ\psi(t_{j-1})|\\ &= \sup_{\Pi_{[c,d]}}\sum_{j=1}^{n}|u(\psi(t_j))-u(\psi(t_{j-1}))|\\ &\leq \sup_{\Pi_{\psi([c,d])}}\sum_{j=1}^{n}|u(\hat{t})-u(\hat{t}_{j-1})|\\ &\leq V(u;\psi([c,d]))\,, \end{aligned}$$

donde el supremo $\left(\sup\limits_{\Pi_{\psi([c,d])}}\right)$ *es considerado sobre el conjunto de todas las particiones* $\Pi_{\psi([c,d])}$ *de la forma:*

$$a=\psi(t_0)=\hat{t}_0<\cdots<\psi(t_{n-1})=\hat{t}_{n-1}\leq\psi(\hat{t}_n)=\hat{t}_n=b.$$

Veamos que

$$V(u;\psi([c,d])) = \sup_{\Pi_{([c,d])}} \sum_{j=1}^{n} |u(\hat{t}_j) - u(\hat{t}_{j-1})|.$$

Consideremos la partición $\Pi_{\psi([c,d])}$ *dada por* $\Pi_{\psi([c,d])} : a \le \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \cdots < \hat{t}_n = b.$

Entonces, existe $t_j \in [c,d]$ *tal que* $\psi(t_j) = \hat{t}_j$*, de nuevo por la monotonía de la aplicación* ψ*, se obtiene* $\Pi_{\psi([c,d])} \subset \Pi_{[c,d]}$ *y por lo tanto,*

$$\begin{aligned}
V(u;\psi([c,d])) &= \sup_{\Pi_{\psi([c,d])}} \sum_{j=1}^{n} |u(\hat{t}_j) - u(\hat{t}_{j-1})| \\
&= \sup_{\Pi_{\psi([c,d])}} \sum_{j=1}^{n} |u(\psi(t_j)) - u(\psi(t_{j-1}))| \\
&= \sup_{\Pi_{\psi([c,d])}} \sum_{j=1}^{n} |u \circ \psi(t_j) - u \circ \psi(t_{j-1})| \\
&\le \sup_{\Pi_{[c,d]}} \sum_{j=1}^{n} |u \circ \psi(t_j) - u \circ \psi(t_{j-1})| \\
&\le V(u \circ \psi; [c,d]).
\end{aligned}$$

□

En todo lo anterior, el dominio de las funciones u consideradas son intervalos cerrados, es decir, el Dominio $u = [a,b]$. La noción de variación acotada es posible también extenderla a otro tipo de dominio, por ejemplo, un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ no vacío (el subconjunto E no necesariamente es cerrado).

Definición 1.2.1. *Sea* $u : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Entonces, la variación de una función u *en un subconjunto* E *de* $\mathbb{R}$ *no vacío, se define de la manera siguiente:*

$$V(u;E) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|,$$

donde Π *es el conjunto de las particiones de* E*, dadas de la manera siguiente:*

$$\Pi(E) = \{\{t_j\}_{j=0}^n \subset E : t_{j-1} < t_j, con \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 1.2.2. *Se dice que* $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tiene variación acotada si* $V(u, E) < \infty$*.*

Ésta clase de funciones se denota por $BV[E]$*.*

Para $t, a, b \in E$ *se definen* E_t^-, E_t^+, E_a^b *de la manera siguiente:*

$$\begin{aligned} E_t^- &= \{s \in E : s \leq t\}, \\ E_t^+ &= \{s \in E : s \geq t\}, \\ E_a^b &= E_a^+ \cap E_b^- = E \cap [a, b]. \end{aligned}$$

Las funciones de variación acotada en $E \subset \mathbb{R}$ no vacío, también satisfacen las propiedades de las proposiciones (1) y (2) dadas anteriormente, así como la siguiente.

Proposición 1.2.3. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a \leq b$ *y* $u \in BV[E]$*. Entonces:*

(v) **(Regularidad)** $V(u; E) = \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}$.

Demostración.

Al igual que la propiedad (iv) de la proposición anterior, demostraremos que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} V(u; E) &\geq \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}, \\ V(u; E) &\leq \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}. \end{aligned}$$

Por la monotonía de $V(\bullet)$ *(demostrada en la propiedad (ii)) y por estar* $E_a^b \subset E$*, es inmediato que*

$$V(u; E) \geq \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}.$$

Ahora veamos que

$$V(u; E) \leq \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}.$$

Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha < V(u; E)$, *se tiene que existe una partición* $\Pi_\alpha = \{t_j\}_{i=0}^n \in \Pi(E)$ *tal que* $t_{j-1} \leq t_j$ *y, además,*

$$\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq \alpha.$$

De esta manera, si $\Pi \in \Pi(E_{t_0}^{t_n})$, *obtenemos que*

$$V(u; E_{t_0}^{t_n}) \geq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq \alpha.$$

En particular, si consideramos $t_0 = a$ *y* $t_n = b$, *resulta que*

$$V(u; E_a^b) \geq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sup_{\Pi(E)} \{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\} &\geq \sup_{\Pi(E)} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &\geq V(u; E). \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$V(u; E) = \sup\{V(u; E_a^b) : a, b \in E, a \leq b\}.$$

□

(vi) Denotemos que: $i = \inf E \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *y* $s = \sup E \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *entonces son válidas las siguientes propiedades de los límites:*

(a) Si $s \notin E$, *se tiene que*

$$V(u; E) = \lim_{E \ni t \longrightarrow s} V(u; E_t^-).$$

Demostración.

Igual que en la propiedad anterior, verifiquemos que se cumple

$$\begin{aligned} V(u;E) &\geq \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-), \\ V(u;E) &\leq \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-). \end{aligned}$$

Como $s = \sup E \notin E$*, entonces* s *es un punto límite de* E*. Debido a la propiedad de monotonía, la función* $E \ni t \longmapsto V(u;E_t^-) \in [0,\infty)$ *es no decreciente y esto implica que,*

$$\lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-) \quad \textit{existe en} \ [0,\infty)\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-) \leq V(u;E).$$

Ahora verifiquemos que

$$V(u;E) \leq \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-).$$

Adicionalmente, usando la propiedad de Regularidad, obtenemos que para cualquier $\alpha < V(u;E)$ *se cumple lo siguiente:*

$$V(u;E_a^b) \geq \alpha, \quad \textit{con} \quad a,b \in E \quad \textit{y} \quad a \leq b < s.$$

Entonces

$$V(u;E_t^-) \geq V(u;E_a^b) \geq \alpha,$$

para cualquier $t \in E \cap (b,s) \neq \emptyset$*. Luego*

$$\begin{aligned} \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^-) &\geq \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_a^b) \\ &\geq \sup\{V(u;E_a^b) : a,b \in E, a \leq b\} \\ &\geq V(u;E). \end{aligned}$$

$\square$

(b) Consideremos $i \notin E$*, entonces:*

$$V(u;E) = \lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+).$$

Demostración.

Verifiquemos que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} V(u;E) &\geq \lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+) \\ V(u;E) &\leq \lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+). \end{aligned}$$

Como $i = \inf E \notin E$*,entonces* i *es un punto límite de* E*, luego de la monotonía de la función* $E \ni t \longmapsto V(u;E_t^+) \in [0,\infty)$ *es no decreciente y esto implica que*

$$\lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+) \quad \textit{existe} \quad \textit{en} \;\; [0,\infty)\,.$$

De éste modo

$$\lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+) \leq V(u;E).$$

Ahora comprobemos que

$$V(u;E) \leq \lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+).$$

Usando la propiedad de Regularidad, se tiene que para cualquier $\alpha < V(u;E)$ *se cumple*

$$V(u;E_a^b) \geq \alpha, \quad \textit{con} \quad a,b \in E \quad \textit{y} \quad i < a \leq b.$$

De esa forma

$$V(u;E_t^+) \geq V(u;E_a^b) \geq \alpha$$

para cualquier $t \in E \cap (i,a) \neq \emptyset$*.*

$$V(u;E_t^+) \geq V(u;E_a^b),$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{E\ni t\longrightarrow s} V(u;E_t^+) &\geq \lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_a^b) \\ &\geq \sup\{V(u;E_a^b)\ : a,b\in E, a\leq b\} \\ &\geq V(u;E). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$V(u;E)=\lim_{E\ni t\longrightarrow i} V(u;E_t^+).$$

□

(c) *Consideremos $i\notin E$ y $s\notin E$. Ésto implica que en adición a las propiedas (a) y (b) resulta:*

$$\begin{aligned} V(u;E) &= \lim_{E\ni t\longrightarrow s}\ {}_{E\ni b\longrightarrow s}V(u;E_a^b)=\lim_{E\ni b\longrightarrow s}\ \lim_{E\ni a\longrightarrow i} V(u;E_a^b). \\ &= \lim_{E\ni a\longrightarrow i}\ \lim_{E\ni b\longrightarrow s} V(u;E_a^b). \end{aligned}$$

Demostración.

Por hipótesis se tiene que $s=\sup E\notin E$; entonces, debido a la propiedad (a) tenemos:

$$V(u;E)=\lim_{E\ni b\longrightarrow s} V(u;E_b^-).$$

Como $i=\operatorname{ínf} E\notin E$, $E_a^b=(E_b^-)_a^+$, utilizando (b) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} V(u;E) &= \lim_{E\ni a\longrightarrow i}\big(\lim_{E\ni b\longrightarrow s} V(u;E_b^-)\big)_a^+ \\ &= \lim_{E\ni a\longrightarrow i}\ \lim_{E\ni b\longrightarrow s}\big(V(u;E_b^-)\big)_a^+ \\ &= \lim_{E\ni a\longrightarrow i}\ \lim_{E\ni b\longrightarrow s} V(u;E_a^b). \end{aligned}$$

□

1.3 $BV[a,b]$ es un espacio de Banach.

En esta sección se prueba que el conjunto $BV[a,b]$ tiene estructura de espacio vectorial, con las propiedades usuales de funciones, espacio normado y espacio de Banach. Además, mostraremos explícitamente el Teorema de Representación de Jordan (ver [15]), el cual asegura que una función u tiene variación acotada en un intervalo $[a,b]$ si y solo si la función u es diferencia de funciones monótonas.

Veamos la estructura de espacio vectorial. Para ello es necesario que se cumplan ocho propiedades, que están expresadas en el siguiente resultado:

Teorema 1.3.1. *Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, entonces $BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración.

Como $BV[a,b]$ es un subconjunto del espacio vectorial de todas las funciones definidas en $[a,b]$, entonces es suficiente demostrar que

$$\forall\, \alpha, \beta \quad y \quad u, v \in BV[a,b] \qquad \alpha u + \beta v \in BV[a,b].$$

Sin embargo, para un mejor entendimiento del lector, demostraremos todos los axiomas que definen un espacio vectorial.

Para verificar que $BV[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, deben cumplirse los siguientes axiomas:

(i) *Para todo u, v se cumple que $u + v \in BV[a,b]$.*

(ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, *para todo $u, v, w \in BV[a,b]$.*

(iii) *Hay un 0 en $BV[a,b]$, tal que $u + 0 = 0 + u = u$, para todo $u \in BV[a,b]$.*

(iv) *Para todo $u \in BV[a,b]$ hay un $-u$ en $BV[a,b]$, tal que $u + (-u) = 0$.*

(v) *Para todo α, β en $\mathbb{R}$ y u en $BV[a,b]$, se tiene que $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.*

(vi) *Para todo* α, β *en* $\mathbb{R}$ *y* u *en* $BV[a,b]$, *se tiene que* $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

(vii) *Para todo* α *en* $\mathbb{R}$ *y* u *en* $BV[a,b]$, *se tiene que* $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.

(viii) *Para todo* u *en* $BV[a,b]$, *se tiene que* $1 \cdot u = u$.

(i) *Sean* $u, v \in BV[a,b]$, *entonces*

$$\begin{aligned}
V(u+v) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j)+v(t_j)) - (u(t_{j-1})+v(t_{j-1}))| \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j)-u(t_{j-1})) + (v(t_j)-v(t_{j-1}))| \\
&\leq \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j)-u(t_{j-1})| + \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |v(t_j)-v(t_{j-1})| \\
&= V(u;[a,b]) + V(u;[a,b]) < \infty,
\end{aligned}$$

luego

$$u+v \in BV[a,b].$$

(ii) *Sean* $u, v, w \in BV[a,b]$, *entonces*

$$\begin{aligned}
V(u+(v+w)) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j)+[v(t_j)+w(t_j)]) - (u(t_{j-1})+[v(t_{j-1})+w(t_{j-1})])| \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |([u(t_j)+v(t_j)]+w(t_j)) - ([u(t_{j-1})+v(t_{j-1})]+w(t_{j-1}))| \\
&= V((u+v)+w).
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
V((u+v)+w) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |([u(t_j)+v(t_j)]+w(t_j)) - ([u(t_{j-1})+v(t_{j-1})]+w(t_{j-1}))| \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |([u(t_j)+v(t_j)] - [u(t_{j-1})+v(t_{j-1})] + (w(t_j)-w(t_{j-1})))| \\
&\leq \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j)+v(t_j)) - (u(t_{j-1})+v(t_{j-1}))| + \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |w(t_j)-w(t_{j-1})|.
\end{aligned}$$

Luego por (i) $V((u+v)+w)<\infty$, *y por la hipótesis* $V(w)<\infty$, *entonces*

$$V((u+v)+w)\leq V(u+v)+v(w)<\infty.$$

Así

$$u+(v+w)=(u+v)+w\in BV[a,b].$$

(iii) Sean 0 *y* u *en* $BV[a,b]$, *entonces la siguiente expresión es válida*

$$\begin{aligned} V(u+0) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(u(t_j)+0)-(u(t_{j-1})+0)| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(0+u(t_{j-1}))-(0+u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)-u(t_{j-1})|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(u+0) &= V(0+u) \\ &= V(u)<\infty\,; \end{aligned}$$

en consecuencia

$$u+0=0+u\in BV[a,b].$$

(iv) Sea $u\in BV[a,b]$, *entonces*

$$\begin{aligned} V(u+(-u)) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(u(t_j)+(-u(t_j)))-(u(t_{j-1})+(u(t_{j-1})))| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(u(t_j)-u(t_j))-(u(t_{j-1})-u(t_{j-1}))| \\ &= 0<\infty\,; \end{aligned}$$

por lo tanto $u+(-u)=0 \quad \in BV[a,b]$.

(v) *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in BV[a,b]$, *entonces*

$$\begin{aligned} V(\alpha\cdot(\beta\cdot u)) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|\alpha\cdot(\beta\cdot u(t_j)) - \alpha\cdot(\beta\cdot u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(\alpha\cdot\beta)(u(t_j)) - (\alpha\cdot\beta)u(t_{j-1})| \\ &= V((\alpha\cdot\beta)\cdot u). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V((\alpha\cdot\beta)\cdot u) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(\alpha\cdot\beta)u(t_j) - (\alpha\cdot\beta)u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(\alpha\cdot\beta)\cdot(u(t_j) - u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(\alpha\cdot\beta)|\cdot|(u(t_j) - u(t_{j-1}))| \\ &= |(\alpha\cdot\beta)|\cdot\sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(u(t_j) - u(t_{j-1}))| < \infty\,; \end{aligned}$$

como resultado $\alpha\cdot(\beta\cdot u) = (\alpha\cdot\beta)\cdot u \in BV[a,b]$.

(vi) *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in BV[a,b]$, *entonces*

$$\begin{aligned} V((\alpha+\beta)\cdot u) &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|(\alpha+\beta)\cdot u(t_j) - (\alpha+\beta)\cdot u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|[\alpha\cdot u(t_j) + \beta\cdot u(t_j)] - [\alpha\cdot u(t_{j-1}) + \beta\cdot u(t_{j-1})]| \\ &= \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|[\alpha\cdot u(t_j) - \alpha\cdot u(t_{j-1})] + [\beta\cdot u(t_j) - \beta\cdot u(t_{j-1})]| \\ &\leq \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|\alpha\cdot u(t_j) - \alpha\cdot u(t_{j-1})| + \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|\beta\cdot u(t_j) - \beta\cdot u(t_{j-1})| < \infty \\ &\leq V(\alpha\cdot u) + V(\beta\cdot u) < \infty. \end{aligned}$$

Consiguientemente

$$(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot u \in BV[a,b].$$

(vii) Sean $u, w \in BV[a,b]$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$\begin{aligned} V(\alpha \cdot (u+w)) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |\alpha \cdot (u(t_j) + w(t_j)) - \alpha \cdot (u(t_{j-1}) + w(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(\alpha \cdot u(t_j) - \alpha \cdot w(t_j)) - (\alpha \cdot u(t_{j-1}) + \alpha \cdot w(t_{j-1}))| \\ &= V(\alpha \cdot u \, + \, \alpha \cdot w). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} V(\alpha \cdot u + \alpha \cdot w) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(\alpha \cdot u(t_j) - \alpha \cdot w(t_j)) - (\alpha \cdot u(t_{j-1}) + \alpha \cdot w(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(\alpha \cdot u(t_j)) - \alpha \cdot u(t_{j-1}) \, + \, (\alpha \cdot w(t_j) - \alpha \cdot w(t_{j-1}))| \\ &\leq \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |\alpha \cdot u(t_j) - \alpha \cdot u(t_{j-1})| - \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |\alpha \cdot w(t_j) + \alpha \cdot w(t_{j-1})| < \infty, \\ &= V(\alpha \cdot u) \, + \, V(\alpha \cdot w) < \infty\,; \end{aligned}$$

así

$$\alpha \cdot (u+w) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot w \qquad \in BV[a,b].$$

(viii) Sea $u \in BV[a,b]$ *y* $1 \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{aligned} V(1 \cdot u) &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |1 \cdot u(t_j) - 1 \cdot u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= V(u)\,; \end{aligned}$$

concluyendo que

$$1 \cdot u = u \qquad \in BV[a,b].$$

$\square$

Hemos visto hasta este momento que $BV[a,b]$ es un espacio vectorial.

Ahora probaremos que $BV[a,b]$ es un espacio normado, para lo cual definiremos la siguiente función $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ del espacio $BV[a,b]$ a valores en $\mathbb{R}$ por

$$\|u\|_{BV[a,b]} = |u(\alpha)| + V(u;[a,b]), \quad \text{para todo } u \in BV[a,b].$$

Teorema 1.3.2. *El funcional $\|\cdot\|_{BV[a,b]} : BV[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma, es decir, $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$ satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\|u\|_{BV[a,b]} \geq 0$ *para todo* $u \in BV[a,b]$,

(b) $\|u\|_{BV[a,b]} = 0$ *si y sólo si* $u = 0$,

(c) $\|\lambda u\|_{BV[a,b]} = |\lambda|.\|u\|_{BV[a,b]}$ *para todo* $u \in BV[a,b]$ *y para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$,

(d) $\|u+w\|_{BV[a,b]} \leq \|u\|_{BV[a,b]} + \|w\|_{BV[a,b]}$ *para todo* $u, w \in BV[a,b]$.

Demostración.

(a) Sea $u \in BV[a,b]$, *entonces*

$$\|u\|_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u;[a,b]).$$

De la definición del módulo $|u(a)| \geq 0$ *y por la proposición (1.2.1) de funciones con variación acotada, se tiene que* $V(u;[a,b]) \geq 0$, *obteniendo así*

$$\|u\|_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u;[a,b]) \geq 0.$$

(b) Si $\|u\|_{BV[a,b]} = 0$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} |u(a)| + V(u;[a,b]) &= 0 \quad \textit{si y sólo si} \\ |u(a)| &= 0 \quad \textit{y} \quad V(u;[a,b]) = 0. \end{aligned}$$

De esta forma por la proposición (1), obtemos que u es constante e igual a cero. En consecuencia,

$$\|u\|_{BV[a,b]} = 0 \quad \textit{si y solo si} \quad u = 0.$$

(c) Como $u \in BV[a,b]$ *y* $\lambda \in BV[a,b]$*, entonces*

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= |\lambda u(a)| + V(\lambda u; [a,b]) \\ &= |\lambda|.|u(a)| + |\lambda|.V(u; [a,b]) \\ &= |\lambda|.(|u(a)| + V(u; [a,b])) \\ &= |\lambda|.\|u\|_{BV[a,b]} \ . \end{aligned}$$

(d) Supongamos que $u, w \in BV[a,b]$.

Como $BV[a,b]$ *es un espacio vectorial, se tiene*

$$\begin{aligned} \|u+w\|_{BV[a,b]} &= |u(a)+w(a)| + V(u+w) \\ &= |u(a)+w(a)| + \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |(u(t_j)+w(t_j)) - (u(t_{j-1})+w(t_{j-1}))| \\ &= |u(a)+w(a)| + \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j)-u(t_{j-1})| + \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^{n} |w(t_j)-w(t_{j-1})| \\ &= |u(a)+w(a)| + V(u; [a,b]) + V(w; [a,b]). \end{aligned}$$

Luego, debido a la desigualdad triangular, tenemos:

$$\begin{aligned} \|u+w\|_{BV[a,b]} &\leq |u(a)| + |w(a)| + V(u; [a,b]) + V(w; [a,b]) \\ &\leq (|u(a)| + V(u; [a,b])) + (|w(a)| + V(w; [a,b])) \\ &\leq \|u\|_{BV[a,b]} + \|w\|_{BV[a,b]} \ . \end{aligned}$$

$\square$

A continuación demostraremos que el espacio $BV[a,b]$ es completo.

Teorema 1.3.3. *El espacio $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV[a,b]})$ es un espacio de Banach.*

Demostración.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(BV[a,b], \|\cdot\|_{BV})$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe N, tal que si $n, m \geq N$, se tiene

$$\|u_n - u_m\|_{BV[a,b]} < \epsilon.$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $u_n(a) = 0, n \geq 1$. De la desigualdad anterior resulta:

$$V(u_n - u_m) < \epsilon\,, \quad n, m \geq N.$$

Usando la definición de variación y la relación anterior tenemos:

$$|(u_n - u_m)(t) - (u_n - u_m)(s)| < \epsilon, \quad n, m \geq N, \quad t, s \in [a,b].$$

En particular, tomando $s = a$, obtenemos que

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| < \epsilon \quad n, m \geq \forall\, t \in [a,b].$$

Como resultado, la sucesión $\{u_n\}$ es una suseción uniforme de Cauchy en el intervalo $[a,b]$.

Como $\mathbb{R}$ es completo, existe una función $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$u(t) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(t), \quad t \in [a,b].$$

De igual modo, se tiene que $V(u_n - u_m) < \dfrac{\epsilon}{2}\,, \quad n, m \geq N$ resulta

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} V(u_n - u_m) \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq N$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u_n(t_j) - (u(t_{j-1}) - u_n(t_{j-1}))| + \sum_{j=1}^{n} |u_n(t_j) - u_n(t_{j-1})| \\
&\leq V(u_n - u) + V(u_n) \\
&\leq \epsilon + M.
\end{aligned}$$

$V(u_n)$ está acotada por ser $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $BV[a,b]$.

Así,

$$V(u_n - u) \leq \epsilon + M \quad n \geq N.$$

Luego,

$$u \in BV[a,b] \;\; y \;\; u_n \;\; converge \; a \;\; u \;\; en \; la \; norma \; \|\cdot\|_{BV[a,b]}.$$

□

Ahora presentamos la demostración del resultado de Jordan (ver [15]) en 1881:

Teorema 1.3.4. *La función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si existen funciones u_1, u_2 monótonas en $[a,b]$ tales que $u = u_1 - u_2$.*

Demostración.

Si u_1, u_2 son monótonas no es difícil verificar que $u = u_1 - u_2 \in BV[a,b]$.

Ahora, supongamos que $u \in BV[a,b]$ y definamos las siguientes funciones $p_u, \eta_u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$\begin{aligned} p_u(t) &:= \frac{1}{2}(V_u(t) + u(t) - u(a)), \quad t \in [a,b], \\ \eta_u(t) &:= \frac{1}{2}(V_u(t) - u(t) + u(a)), \quad t \in [a,b], \end{aligned}$$

donde $V_u(t) = V(u; [a,t))$.

Sean $t, s \in [a,b], t \leq s$. Entonces usando las propiedades (d) y (g):

$$\begin{aligned} p_u(s) - p_u(t) &= \frac{1}{2}(V_u(s) + V_u(t) + u(t) - u(s)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u; [t,s]) + u(t) - u(s)) \geq 0\,. \end{aligned}$$

Luego p_u es una función creciente y como $p_u(a) = 0$, resulta que $p_u \geq 0$.

De manera similar se verifica que η_u es no negativa y creciente.

$$\begin{aligned} \eta_u(s) - \eta_u(t) &= \frac{1}{2}\,(V_u(s) - V_u(t) + u(t) + u(s)) \\ &= \frac{1}{2}\,(V[u; [t,s]] + u(t) + u(s)) \geq 0. \end{aligned}$$

Ahora bien de las definiciones de p_u y η_u resulta que

$$u = p_u - (\eta_u - u(a)).$$

También,

$$V_u(t) = p_u(t) + \eta_u(t).$$

□

Definición 1.3.1. *(Álgebra compleja asociativa)*

Se dice que $(A, \cdot)$ es una álgebra compleja, si A es un espacio vectorial complejo, $\cdot : A \times A \longrightarrow A$ es una operación binaria bilineal (distributiva y homogénea) con respecto a las operaciones lineales en A.

Se dice que $(A, \cdot)$ es asociativa, si la operación $\cdot$ es asociativa.

Se dice que $(A, \cdot)$ es conmutativa, si la operación $\cdot$ es conmutativa.

Definición 1.3.2. *(Álgebra con unidad)*

Sean A una álgebra asociativa y $e \in A$. Se dice que e es el elemnento unidad de A si $ae = ea = a \;\; \forall \;\; a \in A$.

Si existe una unidad en A, se dice que A es una álgebra con unidad.

Definición 1.3.3. *(Álgebra de Banach)*

Se dice que $(A, \|\cdot\|)$ es una álgebra de Banach si:

(i) $(A, \cdot)$ *es un espacio de Banach complejo,*

(ii) $(A, \|\cdot\|)$ *es una álgebra compleja asociativa;*

(iii) $\|\alpha \cdot \beta\| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \quad \forall \;\; \alpha, \beta \in A$.

En 1987 L. Maligranda y M. Orlicz (ver [17]) obtienen un resultado que puede ser utilizado para probar que ciertos espacios de funciones de variación acotada es un álgebra de Banach. De hecho, estos matemáticos demuestran que los espacios

$RBV[a,b]$ y $BV_\varphi[a,b]$ tienen este tipo de estructura, donde $RBV[a,b]$ se define con la *$p-$variación acotada en el sentido de Riesz* y $BV_\varphi[a,b]$ corresponde al clásico espacio de *$\varphi-$variación acotada en el sentido de Wiener* (para mas detalles ver [18]).

A continuación enunciaremos el resultado anteriormente mencionado.

Lema 1.3.1. *(Maligranda-Orlicz [17]) Sea$(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de funciones acotadas $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que X es invariante bajo el producto usual de funciones y*

$$\|u \cdot v\| \leq \|u\|_\infty \cdot \|v\| + \|u\| \cdot \|v\|_\infty\,, \quad u, v \in X.$$

Entonces el espacio de X con la norma

$$\|\cdot\|_1 = \|\cdot\| + \|\cdot\|_\infty$$

es un álgebra de Banach. Adicionalmente, si la convergencia en la norma $\|\cdot\|_1$ implica la convergencia en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

Por otra parte, si existe $c > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq c\|u\|$, $u \in X$, entonces X con la norma $\|\cdot\|_2 = 2c\|\cdot\|$ es un álgebra de Banach.

Corolario 1.3.1. *$BV[a,b]$ es un álgebra de Banach respecto de la norma $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$.*

Demostración.

Apliquemos el Lema de Maligranda-Orlicz para deducir que $BV[a,b]$ es un álgebra de Banach.

Sean $u, v \in BV[a,b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} |u(x)v(x) - u(y)v(y)| &= |u(x)| \cdot |v(x) - v(y)| + |v(y)| \cdot |u(x) - u(y)| \\ &\leq \|u\|_\infty |v(x) - v(y)| + \|v\|_\infty |u(x) - u(y)|. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|u\cdot v\|_{BV[a,b]} &\leq 2|u(a)|\cdot|v(a)| + \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)v(t_j)-u(t_{j-1})v(t_{j-1})| \\
&= 2|u(a)|\cdot|v(a)| + \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)(v(t_j)-v(t_{j-1}))-v(t_j)(u(t_j)-u(t_{j-1}))| \\
&= 2|u(a)|\cdot|v(a)| + \sup_{\Pi}\sum_{j=1}^{n}|u(t_j)v(t_j)-u(t_j)v(t_{j-1})-(v(t_{j-1})u(t_{j-1})-v(t_{j-1})u(t_j)) \\
&\leq \|u\|_\infty|v(a)| + \|v\|_\infty|u(a)| + \|v\|_\infty|u(a)| + \|u\|_\infty V(v) + \|v\|_\infty V(u) \\
&\leq \|u\|_\infty\|v\|_{BV[a,b]} + \|v\|_\infty\|u\|_{BV[a,b]}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$|u(t)-u(a)| \leq \|u\|_{BV[a,b]}, \quad t\in[a,b].$$

Entonces,

$$|u(t)| \leq |u(a)| + \|u\|_{BV[a,b]} \leq 2\|u\|_{BV[a,b]}, \quad t\in[a,b].$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_{BV[a,b]}.$$

Así pues, por el Lema de Maligranda-Orlicz, resulta que el espacio $BV[a,b]$ es un álgebra de Banach con cualquiera de las normas

$$\begin{aligned}
\|\cdot\|_1 &= \|\cdot\|_{BV[a,b]} + \|\cdot\|_\infty \\
\|\cdot\|_2 &= 4\|\cdot\|_{BV[a,b]},
\end{aligned}$$

las cuales son equivalentes a la norma $\|\cdot\|_{BV[a,b]}$.

$\square$

Hemos comprobado que las funciones de variación acotada se pueden caracterizar por medio de diferencia de funciones monótonas. En el caso que u además sea continua, Banach establecio la llamada indicatriz y obtiene otra caracterización.

En 1925 Banach (ver [1]) introduce la indicatriz de una función continua u, la cual se denota por I_u, y es una función definida como sigue:

$$I_u : [\text{ínf}\, u, \sup u] \longrightarrow [0, \infty)$$

donde $I_u(x)$ es igual al número de valores de $x \in [0, 2\pi]$ para el cual $u(x) = y$.

Ejemplo 1.3.1. *Sea* $u = \sin(x)$, *entonces para* $x \in [-1, 1]$ *la indicatriz de Banach resulta:*

$$I_u : [-1, 1] \longrightarrow [0, \infty), \quad \forall \ x \in [-1, , 1].$$

$$I_u(-1) = 1$$

$$I_u(0) = 3$$

$$I_u(1) = 1.$$

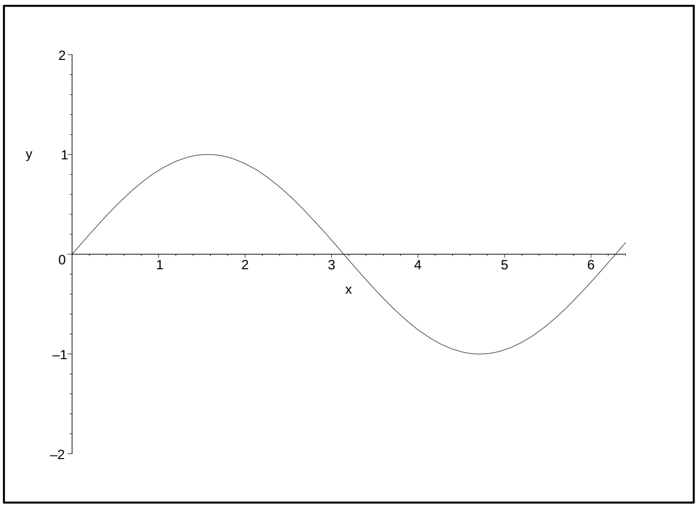

Figura 1.2: Función $I_u(x)$

Teorema 1.3.5. *(Teorema de Beppo-Leví) Sea* $(\mathbb{X}, A, \mu)$ *un espacio de medida y sean*

$$u_n : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty]$$

con $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles Borel no negativa, es decir,*

$$u_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} u_n d\mu.$$

Proposición 1.3.1. *Sea* $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, y* $I_u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *la indicatriz de Banach. Entonces la igualdad*

$$Var(u;[a,b]) = \int_{-\infty}^{\infty} I_u(x)dx$$

es cierta. En particular, $u \in BV[a,b]$ *si y solo si* $I_u \in L_1(\mathbb{R})$.

Demostración.

Para $n = 1,2,3,\ldots$ *y* $k = 1,2,\ldots,2^{\,n-1}$, *hacemos* $\delta_{k,n} := k\dfrac{(b-a)}{2^n}$ *y*

$$\Delta_{1,n} := [a, a+\delta_{1,n}), \quad \Delta_{2,n} := [a+\delta_{1,n}, a+\delta_{2,n}), \ldots$$

$$\ldots, \Delta_{2^{n-1},n} := [a+\delta_{2^{n-1}-1\,,\,n}, a+\delta_{2^{n-1},n}), \quad \Delta_{2^n,n} := [a+\delta_{2^{n-1},n}].$$

Ádemas, para $k = 1,2,\ldots,2^n$ *denotamos*

$$m_{k,n} := \inf\{u(x) : x \in \Delta_{k,n}\}, \quad M_{k,n} := \sup\{u(x) : x \in \Delta_{k,n}\},$$

y definimos las funciones:

$$g_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\} \;\; y \;\; g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

por

$$g_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} = \begin{cases} 1, & si \;\; u(x) = y \;\; para\ algún \;\; x \in \Delta_{k,n}\,, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

y

$$g_n(y) := \sum_{k=1}^{2^n} g_{k,n}(y).$$

La monotonía resulta de $2^{n+1} > 2^n$ *es decir,* $g_{n+1}(y) \geq g_n(y)$.

Afirmamos que la sucesión $(g_n)_n$ *converge puntualmente en* $\mathbb{R}$ *a la indicatriz de Banach* $I_u(x)$ *de* u.

En efecto, supongamos primero que $I_u(y) = m$, *y sea* $u^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *denotado como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación* $u(x) = y$.

Escogemos $N \in \mathbb{N}$ *tan grande que* $2^{-N} < \text{mín}\{x_i - x_j : 1 \leq i, j \leq m, i \neq j\}$; *entonces para* $n > N$ *todos los elementos en* $u^{-1}(x)$ *pertenece a diferentes intervalos* $\Delta_{k,n}$ *y así,* $g_n(x) = m$.

Similarmente, en el caso $I_u(y) = \infty$ *un razonamiento análogo demuestra que* $g_n(x) \longrightarrow \infty$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$.

Ádemas,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)dy = \sum_{k=1}^{2^n} (M_{k,n} - m_{k,n}) \ ,$$

El lado derecho de la igualdad tiende a la integral de I_u *por el teorema de Beppo Levi, y el lado derecho tiende a la* $V[u; [a, b]]$.

$\square$

CAPÍTULO 2

FUNCIONES DE $\varphi-$VARIACIÓN ACOTADA GENERALIZADA EN EL SENTIDO DE WIENER

En el año 1924 N. Wiener [21] generaliza el concepto de variación acotada dado por Jordan, hoy es conocido como *p-variación acotada* en el intervalo $[a,b]$. Trece (13) años mas tarde, en el año 1937, L.C. Young [22] generaliza la noción de Wierner al caso de *φ-variación acotada* en el intervalo $[a,b]$, donde φ es una *φ-función.*

A continuación, presentaremos la definición de *φ-función* y algunas propiedades de las funciones de *φ-variación acotada en el sentido de Wiener,* dadas por Chistyakov (ver [9]).

2.1 $\varphi-$*función*

Definición 2.1.1. *Se dice que la función* $\varphi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ *es una* $\varphi-$función *si satisface las siguientes condiciones:*

(i) φ *es continua en* $[0,+\infty)$*,*

(ii) $\varphi(t)=0$ *sólo para* $t=0$*,*

(iii) $\varphi(t) \longrightarrow \infty$ *cuando* $t \longrightarrow \infty$,

(iv) φ *es no decreciennte* $(t_1 < t_2 \Longrightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2))$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de $\varphi-$*funciones*.

Ejemplo 2.1.1. *Consideremos* $p \in (0, +\infty), C > 0$ *y definamos* $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *mediante la expresión:*

$$\varphi(t) = C.t^p,$$

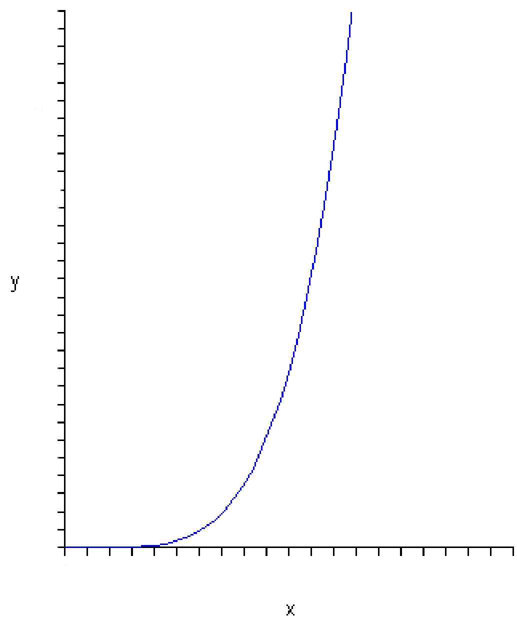

Figura 2.1: Función $\varphi(t) = C.t^p$ para $p > 1$.

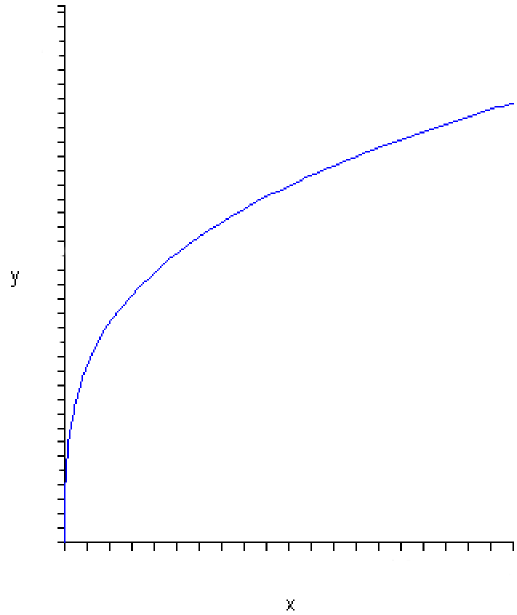

Figura 2.2: Función $\varphi(t) = C.t^p$ para $p < 1$.

Entonces φ satisface las condiciones de la definición de $\varphi-$función, ya que:

(i) $\varphi(t)$ *es continua en* $[0, \infty)$.

(ii) $\varphi(0) = C \cdot 0^p = 0$ *como* $p \neq 0$ *tenemos* $\varphi(0) = 0$.

(iii) Dado que $p > 0$, *entonces* $\lim_{t \longmapsto \infty} C.t^p = \infty$.

(iv) Supongamos que $t_1 < t_2$, *como la función* $\ln(t)$ *es creciente entonces* $\varphi(t) = C.t^p$ *es creciente.*

Así pues, $\varphi(t) \leq \varphi(t+1)$.

Ejemplo 2.1.2. *Sea* $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por*

$$\varphi(t) = e^t - 1,$$

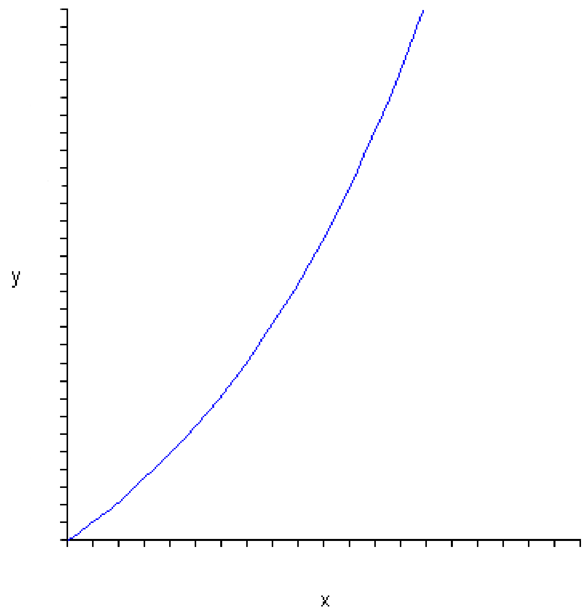

Figura 2.3: Función $\varphi(t) = e^t - 1$.

Entonces φ satisface las condiciones de la definición (2.1.1) ya que

(i) $\varphi(t)$ *es continua en* $[0, +\infty)$.

(ii) $\varphi(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

(iii) $\lim\limits_{t \longmapsto \infty} (e^t - 1) = \infty$.

(iv) Veamos que φ es no decreciente

$$\begin{aligned} t_1 &\leq t_2 \\ e^{t_1} &\leq e^{t_2} \\ e^{t_1} - 1 &\leq e^{t_2} - 1. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\varphi(t) \leq \varphi(t+1).$$

Ejemplo 2.1.3. *Sea* $\varphi(t) = \ln(t+1)$.

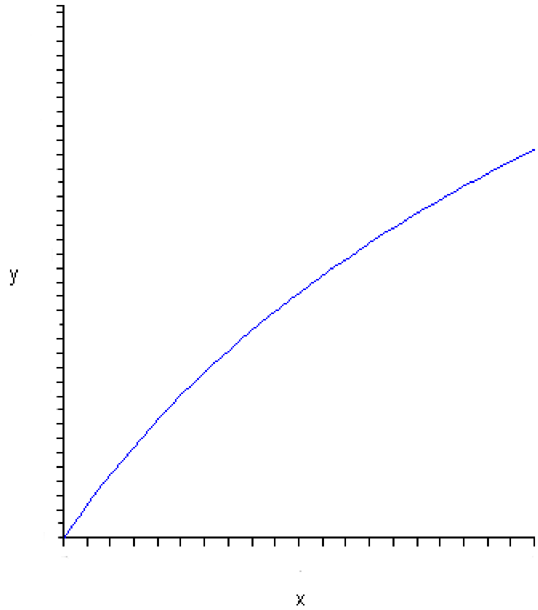

Figura 2.4: Función $\varphi(t) = \ln(t+1)$.

Veamos si $\varphi(t)$ *satisface la definicón de* $\varphi-$*función:*

(i) $\varphi(t)$ *es continua en* $[0, +\infty)$.

(ii) $\varphi(0) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{t\longmapsto\infty} (ln(t+1)) = \infty$.

(iv) Supongamos que $\varphi(t)$ *no es no decreciente, entonces*

$$\begin{aligned} \varphi(t) &> \varphi(t+1) \\ \ln(t+1) &> \ln((t+1)+1) \\ \ln(t+1) &> \ln(t+2) \\ t+1 &> t+2. \end{aligned}$$

Esto es una contracción.

Entonces $\varphi(t)$ es no decreciente.

Ejemplo 2.1.4. *Consideremos* $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *definida como*

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2, & si \quad t \in [0,1] \\ 1, & si \quad t \in (1,2] \\ t-1, & si \quad t > 2. \end{cases}$$

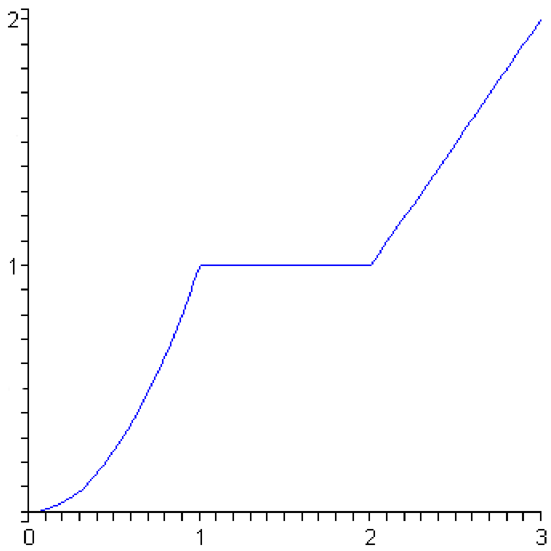

Figura 2.5: Función $\varphi(t)$.

Efectivamente φ *es una* $\varphi-$*función:*

(i) $\varphi(t)$ *es continua en* $[0,+\infty)$.

(ii) $\varphi(t) = t^2$ *en* $0 \le t \le 1$, *y* $\varphi(0) = 0$.

(iii) $\lim\limits_{t\longmapsto\infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t\longmapsto\infty} (t-1) = \infty.$

(iv) Notemos que $\varphi(t)$ es no decreciente.

Caso 1: $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \varphi(t+1)\\
t^2 &\leq (t+1)^2\\
t^2 &\leq t^2+2t+1\\
1 &\leq 2t+1.
\end{aligned}$$

Entonces $\varphi(t) \leq \varphi(t+1)$.

Caso 2: $t \in (1,2]$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \varphi(t+1)\\
1 &\leq 1.
\end{aligned}$$

Caso 3: $t > 2$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &\leq \varphi(t+1)\\
t-1 &\leq (t+1)-1\\
t-1 &\leq t\\
-1 &\leq 0.
\end{aligned}$$

De esta manera, por los casos 1, 2 y 3 se tiene que

$$\varphi(t) \leq \varphi(t+1).$$

Definición 2.1.2. *Sea Φ el conjunto de todas las funciones convexas $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que se anulan sólo en $x=0$ (y son continuas en $\mathbb{R}^+$),*

$$\phi_0 = \left\{\varphi \in \Phi : \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(s)}{s} = 0\right\} \quad y \quad I=[a,b]\subset \mathbb{R}$$

un intervalo fijo cerrado con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definición 2.1.3. *Dada $\varphi \in \Phi$ y $\lambda > 0$, se define la siguiente función:*

$$\varphi_\lambda(s) = \varphi\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

2.2 $\varphi-$Variación Acotada en el sentido de Wiener

La clase de las funciones de *$p-$variación acotada en el sentido de Wiener*, donde $1 < p < \infty$, fue introducida por N. Wiener en 1924 (ver [21]) y posteriormente, en el año 1937, fue generalizada por L. C. Young para el caso de funciones de *$\varphi-$variación acotada*, (ver [22]) donde φ es una $\varphi-$función (ver Definición 2). En esta sección expondremos el concepto de las funciones generalizadas de *$\varphi-$variación acotada en el sentido de Wiener,* estudiadas por Chistyakov (ver [9].)

También queremos hacer notar que el rango de acción de las funciones estudiadas en el capítulo I estaban contenidas en el conjunto de los números reales, en esta sección expondremos la noción y algunos resultados en el caso de funciones a valores en un espacio métrico o normado.

Definición 2.2.1. *($\varphi-$variación)*

Si (M, d) es un espacio métrico y $\varphi \in \Phi$, decimos que una función $f : I \longrightarrow M$ es de:

(a) $\varphi-$variación acotada en el sentido de Wiener si

$$\nu_\varphi(f) \equiv \nu_{\varphi,d}(f, I) = \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} \varphi\bigg(d\,\Big(f(x_i), f(x_{i-1})\Big)\bigg) < \infty.$$

Donde el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas $\xi = \{x_i\}_{i=0}^m$ del intervalo I, es decir, $m \in \mathbb{N}$ y

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b;$$

(b) *$\varphi-$variación acotada generalizada en el sentido de Wiener, si existe una constante $\lambda > 0$ (generalmente dependiente de f) tal que $\nu_{\varphi_\lambda}(f) < \infty$; en este caso definimos la $\varphi-$variación de f por:*

$$p_\varphi(f) \equiv p_{\varphi,d}(f, I) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \nu_{\varphi_\lambda}(f) \leq 1\}.$$

Para $\varphi(s) = s^q$ $(s \geq 0, q \geq 1)$, el valor $\nu_\varphi(f)$ con $q = 1$ corresponde a la clásica variación en el sentido de Jordan (Ver Definición 1.1.1), con $1 \leq q < \infty$, sin pérdida de generalidad, haciendo $q = p$ se tiene otro tipo de variación de funciones que generaliza el concepto dado por Jordan y fue presentado por N. Wiener en 1924 [21], y actualmente conocido como *$p-$variación en el sentido de Wiener* $(1 \leq p < \infty)$. Este espacio vectorial está constituido por aquellas funciones $u : [a, b] \longrightarrow M$, tales que el número

$$V_p^W(u) = V_p^W(u; [a, b]) := \sup_\pi \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|^p$$

es finito, donde el supremo es considerado sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$.

Al número $V_p^W(u)$ se le denomina *$p-$variación en el sentido de Wiener de la función u, en el intervalo* $[a, b]$. La clase de funciones $u : [a, b] \longrightarrow M$ que tienen *$\varphi-$variación finita en el sentido de Wiener* en el intervalo $[a, b]$, se denota por $V_\varphi[a, b]$.

2.3 Algunas propiedades de las funciones de $\varphi-$Variación Acotada en el sentido de Wiener.

Esta sección presentamos algunas propiedades de la clase de funciones de *$\varphi-$variación acotada genealizada en el sentido de Wiener,* dadas por Chistyakov en [9]

Proposición 2.3.1. *Sean φ una φ-función y $u : [a,b] \longrightarrow M$, entonces:*

(i) La función $V_\varphi^W(\cdot) : V_\varphi^W[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es par, es decir,

$$V_\varphi^W(u) = V_\varphi^W(-u).$$

(ii) $V_\varphi^W(u) = 0$ si y sólo si u es constante.

(iii) Si $V_\varphi^W < \infty$, entonces u es acotada en $[a,b]$.

(iv) φ es convexa si y sólo si $V_\varphi^W(\cdot;[a,b])$ es convexa.

Demostración.

(i) Se deduce de la definición de φ-variación.

(ii) Si u es constante, entonces de la definición de φ-variación resulta que $V_\varphi^W(u) = 0$.

Como $V_\varphi^W(u) = 0$, tenemos que:

$$0 = V_\varphi^W(u) \geq \varphi(|u(t) - u(a)|) \geq 0, \quad t \in [a,b].$$

Luego,

$$\varphi(|u(t) - u(a)|) = 0, \quad t \in [a,b].$$

Como esta función se anula solamente en cero, resulta que

$$u(t) = u(a), \quad t \in [a,b]$$

y por lo tanto u es constante. En particular, si $u(a) = 0$ tenemos que $V_\varphi^W(u) = 0$ si y sólo si $u = 0$.

(iii) Supongamos que $u \in V_\varphi^W[a,b]$ y que u no es acotada, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}, t_n \in (a,b], \quad n = 1, ...,$ tal que $|u(t_n)| \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Así ocurre que:

$$\varphi(|u(t_n) - u(a)|) \leq V_\varphi^W(u), \quad n = 1, 2, ...$$

y

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi(|u(t_n)-u(a)|) \leq V_\varphi^W(u), \quad n=1,2,...$$

En consecuencia, $V_\varphi^W(u)=\infty$, *ya que* $|u(t_n)-u(a)| \longrightarrow \infty$ $\varphi(|u(t_n)-u(a)|) \longrightarrow \infty$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$, *lo cual es una contradicción.*

Por lo tanto u *es acotada.*

(iv) Supongamos que φ *es convexa y sean* $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *y* $\alpha, \beta \in [0,1]$, *tales que* $\alpha+\beta=1$.

Dada una partición $\pi : a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ *de* $[a,b]$ *resulta:*

$$\begin{aligned}\alpha V_\varphi^W(u)+\beta V_\varphi^W(v) &= \alpha \sup_\pi \sum_{k=1}^n \varphi(|u(t_k)-u(t_{k-1})|)+\beta \sup_\pi \sum_{k=1}^n \varphi(|v(t_k)-v(t_{k-1})|)\\ &\geq \sup_\pi \sum_{k=1}^n [\alpha\varphi(|u(t_k)-u(t_{k-1})|)+\beta\varphi(|v(t_k)-v(t_{k-1})|)].\end{aligned}$$

Como φ *es convexa y no decreciente tenemos:*

$$\begin{aligned}&\sup_\pi \sum_{k=1}^n [\alpha\varphi(|u(t_k)-u(t_{k-1})|)+\beta\varphi(|v(t_k)-v(t_{k-1})|)]\\ \geq\ & \sup_\pi \sum_{k=1}^n \varphi(|\alpha(u(t_k)-u(t_{k-1}))+\beta(v(t_k)-v(t_{k-1}))|)\\ =\ & \sup_\pi \sum_{k=1}^n \varphi(|(\alpha u+\beta v)(t_k)-(\alpha u+\beta v)(t_{k-1})|)\\ =\ & V_\varphi^W(\alpha u+\beta v).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V_\varphi^W(\alpha u+\beta v) \leq \alpha V_\varphi^W(u)+\beta V_\varphi^W(v),$$

para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$*, tales que* $\alpha + \beta = 1$

y así,

$$V_\varphi^W(\cdot), \quad \textit{es convexa.}$$

Supongamos que $V_\varphi^W(\cdot)$ *es convexa.*

Sean $\ x, y \in [0, +\infty)\ $ *y* $\ u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida por:*

$$u(t) := \begin{cases} 0 & si \quad t = a, \\ x & si \quad t \in (a,b]\,. \end{cases}$$

$$v(t) := \begin{cases} 0 & si \quad t = a, \\ y & si \quad t \in (a,b]\,. \end{cases}$$

De la definición de u tenemos

$$\begin{aligned} V_\varphi^W(u) &= \sup_\pi \sum_{k=1}^{n} \varphi(|u(t_k) - u(t_{k-1})|) \\ &= \sup_\pi (\varphi|u(t_1) - u(t_0)|) + \sum_{k=2}^{n} \varphi(|u(t_k) - u(t_{k-1})|) \\ &= \sup_\pi \varphi(x) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

De manera similar resulta

$$V_\varphi^W(v) = \varphi(y) \quad y \quad V_\varphi^W(\alpha u + \beta v) = \varphi(\alpha x + \beta y); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $V_\varphi^W(\cdot)$ *es convexa, se tiene*

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = V_\varphi^W(\alpha u + \beta v) \leq \alpha V_\varphi^W(u) + \beta V_\varphi^W(v) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),$$

para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$ *tales que* $\alpha + \beta = 1$ *es decir,* φ *es convexa.*

$\square$

Observación 2.3.1. *En la proposición anterior, la función φ no necesariamente tiene que ser convexa. Si φ es una función convexa, tenemos que:*

$$\varphi(|u(t) - u(a)|) \leq V_\varphi^W(u), \quad t \in [a, b],$$

luego

$$|u(t) - u(a)| \leq \varphi^{-1}(V_\varphi^W(u)), \quad t \in [a, b],$$

por lo tanto,

$$\|u\|_\infty = \sup\{|u(t)| : t \in [a, b]\} \leq \varphi^{-1}(V_\varphi^W(u)) + |u(a)|.$$

2.4 Inmersión de los conjuntos $V_\varphi(I; M)$.

En está sección estudiaremos la inmersión de los conjuntos $V_\varphi(I; M)$ correspondientes a diferentes funciones $\varphi \in \Phi$. Tal análisis nos motiva a la definición del espacio $W_\varphi(I; M)$.

Para nuestra finalidad, enuciaremos las siguientes dos proposiciones que son resultados de Orlicz, y cuyos detalles de la demostrarción se encuentran en ([19]).

Posteriormente se demuestran tres lemas que orientan el resultado de esta sección.

Proposición 2.4.1. *Si $\varphi \in \Phi/\Phi_0$, entonces:*

1. $\varphi'(0) = \inf\limits_{s>0} \dfrac{\varphi(s)}{s} > 0.$

2. $V_\varphi(I; M) = V(I; M).$

3. $\varphi(t) + \varphi(s) \leq \varphi(t + s) \quad t, s \in \mathbb{R}^+$ *siempre que* $\upsilon_\varphi(u) \leq \varphi(\upsilon((u)).$

Proposición 2.4.2. *Las siguientes propiedades de υ_φ son conocidas:*

1. $\upsilon_\varphi(u, J) \leq \upsilon_\varphi(u, I)$ *si* $J \subseteq I.$

2. $\upsilon_\varphi(u,[a,x]) + \upsilon_\varphi(u,[x,b]) \leq \upsilon_\varphi(u,[a,b])$ *si* $a \leq x \leq b$.

3. $\upsilon_\varphi(u,I) \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \upsilon_\varphi(f_k,I)$ *si* $u_k \subset M^I$ *converge puntualmente en* I, $u \in M^I$ *y* $\varphi_k \subset \Phi$ *converge puntualmente en* $\mathbb{R}^+$ *a* $\varphi \in \Phi$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$.

Proposición 2.4.3. *Sean* $\varphi, \psi \in \Phi$ *y* (M,d) *un espacio métrico. Dada la siguiente condición:*

$$\text{sí existe } c > 0 \text{ y } s_0 > 0 \text{ tal que } \psi(s) \leq c\varphi(s) \text{ para todo } s \in [0,s_0] \tag{2.1}$$

entonces $V_\varphi(I;M) \subset V_\psi(I;M)$. *Recíprocamente, si* $(M,|\bullet|)$ *es un espacio lineal normado y* $V_\varphi(I;M) \subset V_\psi(I;M)$, *entonces la condición (2.1) es cierta.*

Demostración:

Demostraremos primero que para cualquier $s_1 > 0$ *existe un* $c_1(s_1) > 0$, *tal que* $\psi(s) \leq c_1(s_1)\varphi(s)$ *para todo* $s \in [0,s_0]$.

Si $s_1 \leq s_0$, *en virtud de (2.1) consideremos* $c_1(s_1) = c$ *y si* $s_1 > s_0$ *podemos tomar* $c_1(s_1) = c\dfrac{\psi(s_1)}{\psi(s_0)}$.

Como para todo $s \in [s_0,s_1]$ *tenemos,*

$$\begin{aligned} \frac{\psi(s_1)}{s_1} &> \frac{\psi(s)}{s} \\ \frac{\varphi(s)}{s} &> \frac{\varphi(s_0)}{s_0} \\ \frac{\psi(s_1)}{\psi(s)}\cdot\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_0)} &> 1. \end{aligned}$$

De aquí resulta:

$$\psi(s) \leq \frac{\psi(s_1)}{\psi(s)}\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_0)}\psi(s) = \frac{\psi(s_1)}{\varphi(s_0)}\varphi(s) \leq c\frac{\psi(s_1)}{\psi(s_0)}\varphi(s).$$

Dado que $u \in V_\varphi(I;M)$, *es acotada, es decir,* $\omega(u) = \sup_{x,y\in I} d(u(x),u(y))$ *es finita, se tiene*

$$\psi(d(u(x),u(y))) \leq c_1(\omega(u))\varphi(d(u(x),u(y))) \quad \forall\, x,y \in I.$$

Lo cual nos da

$$v_{\psi}(u) \leq c_1(\omega(u))v_{\varphi}(u) \quad ó \quad u \in V_{\psi}(I, M).$$

Ahora supongamos que la condición (2.1) no es cierta.

Dado $n \in \mathbb{N}$, *se define* $s_{o_n} \in \mathbb{R}^+$ *por:* $\varphi\left(s_{o_n} = \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Entonces existe $s_n \in [0, s_{0_n}]$ *tal que* $\psi(s_n) > n\varphi(s_n)$, *denotemos* $k_n = min\left\{k \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n^2} \leq k\varphi(s_n) < \dfrac{2}{n^2}\right\}$, *para* $n \in \mathbb{N}$ *y* $k_0 = 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *son tales que* $k_1+k_2+\cdots+k_{m-1} < n \leq k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}+k_m$ *denotemos* $s'_n = s_m$ *y* $s'_0 = 0$ *de aqui se tiene que la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(s'_n)$ *converge. Mientras que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \psi(s'_n)$ *diverge.*

Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión creciente fija en el intervalo abierto* (a, b) *y* $f \in M$ *con* $|f| = 1$, *definimos la función* $u : [a, b] \longrightarrow M$ *por:*

$$u(x_n) = s'_n f \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; y \;\; u(x) = 0 \quad para \quad x \neq x_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

denotaremos los conjuntos A, B, C, D *de la siguiente manera:*

$A = \{i : t_{i-1} \neq x_j \;\; y \;\; t_i \neq x_j, \;\; donde\, j = 1, \ldots, n\}$

$B = \{i : t_{i-1} = x_j \;\; y \;\; t_i \neq x_j, \;\; donde\, j = 1, \ldots, n\}$

$C = \{i : t_{i-1} \neq x_j \;\; y \;\; t_i = x_j, \;\; donde\, j = 1, \ldots, n\}$

$D = \{i : t_{i-1} = x_j \;\; y \;\; t_i = x_j, \;\; donde\, j = 1, \ldots, n\}$

Como para cualquier partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} = b$ *de* $[a, b]$ *tenemos*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right) &= \sum_{i\in A} \varphi\left(|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right) \\
&+ \sum_{i\in B} \varphi\left(|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right) \\
&+ \sum_{i\in C} \varphi\left(u(t_i) - u(t_{i-1})\right) \\
&+ \sum_{i\in D} \varphi\left(u(t_i) - u(t_{i-1})\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|s'_{t_i} - s'_{t_{i-1}}| \ \ |f|\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|s'_{t_i}|\right) \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|s'_{t_{i-1}}|\right) \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|s'_{t_i}|\right) + \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(|s'_{t_i} - s'_{t_{i-1}}|\right)
\end{aligned}
$$

Así

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(|u(t_i) - u(t_{i-1})|) \leq 2\sum_{i=1}^{m} \varphi(s'_{l_i}) + \sum_{i=1}^{m} \varphi(|s'_{l_i} - s'_{l_{i-1}}|) \leq 4\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(s'_i)$$

entonces $v_\varphi(u, [a, b]) < \infty$.

Por otra parte, en la partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_{2m} = b$ *de* $[a, b]$ *tal que* $t_{2i-1} = x_i, \quad i = 0, 1, 2 \ldots, m-1$ *y* $t_{2i} = \dfrac{(x_{i-1} \ + \ x_i)}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1$ *encontramos que*

$$\sum_{i=1}^{2m} \psi\left(|u(t_i) - u(t_{i-1})|\right) \geq 2\sum_{i=0}^{m-1} \psi(s'_{t_i}) \ \ \textit{donde} \ \ V_\psi(u; [a, b]) = \infty.$$

$\square$

Observación 2.4.1. *En particular la proposión (2.4.3) implica que si* $\displaystyle\lim_{s\longrightarrow 0^+} \frac{\varphi(s)}{s} > 0$, *entonces* $V_\varphi(I, M) = V(I, M)$.

Si $\varphi \in \Phi$ satisface la condición Δ_2, entonces

$$\limsup_{\rho\to 0} \frac{\varphi(2\rho)}{\varphi(\rho)} < \infty$$

es equivalente a:

Existen constantes $c > 0$ y $s_0 > 0$ tal que $\varphi(2s) \leq c\varphi(s) \quad \forall\, s \in [0, s_0]$.

Observación 2.4.2. *La condición (2.1) es equivalente a la siguiente:*

$$\forall\, s_1 > 0 \; \exists\, c_0(s_1) > 0 \;\; \textit{tal que} \;\; \varphi(2s) \leq c_0(s_1)\varphi(s) \quad \forall\, s \in [0, s_1] \tag{2.2}$$

en efecto, para $s_1 \leq s_0$ y si $s_1 > s_0$ y $s_0 \leq s \leq s_1$ entonces

$$\varphi(2s) \leq \frac{\varphi(2s_1)}{\varphi(2s)}\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_0)}\varphi(2s) = \frac{\varphi(2s_1)}{\varphi(s_0)}\varphi(s) \leq c\frac{\varphi(2s_1)}{\varphi(2s_0)}\varphi(s).$$

El siguiente lema demuestra que $V_\varphi(I; M)$ no es un espacio lineal, en general cuando M es un espacio normado. Al mismo tiempo la convexidad de $\varphi \in \Phi$ implica que $V_\varphi(I; M)$ es convexa y $u \mapsto \upsilon_\varphi(u)$ es un funcional convexo es decir:

$$\upsilon_\varphi(\theta u + (1-\theta)g) \leq \theta\upsilon_\varphi(u) + (1-\theta)\upsilon_\varphi(g), \qquad u, g \in V_\varphi(I; M), \quad \theta[0, 1].$$

Así, si (M, d) es un espacio métrico y $\varphi \in \Phi$, entonces por la proposión (2.4.3), se tiene que:
si $0 < \lambda \leq 1$

$$V_{\varphi_\lambda}(I, M) \subset V_\varphi(I, M)$$

si $\lambda > 1$

$$V_\varphi(I, M) \subset V_{\varphi_\lambda}(I, M).$$

En efecto, para demostrar que la inclusión contraria es cierta

$$V_{\varphi_\lambda}(I, M) \subset V_\varphi(I, M) \;\; \text{con} \;\; \lambda > 1$$

por la proposión (2.4.3) es suficiente que φ satisface la condición Δ_2^0.

Esta es la motivación que hemos intoducido para el espacio de interes como lo es el espacio de funciones de $\varphi-$*variación acotada generalizada en el sentido de Wiener* para cualquier $\varphi \in \Phi$:

$$W_\varphi(I, M) = \bigcup_{\lambda>0} V_{\varphi_\lambda}(I, M) = \bigcup_{\lambda>1} V_{\varphi_\lambda}(I, M).$$

Proposición 2.4.4. *Sea M un espacio normado y $\varphi \in \Phi$. Entonces $V_\varphi \equiv V_\varphi(I, M)$ es un espacio lineal si y sólo si φ satisface la condición Δ_2^0.*

Demostración:

Si V_φ es lineal, entonces $2u \in V_\varphi$ para toda $u \in V_\varphi$, por lo tanto $V_\varphi \subset V_\psi$ con $\psi(s) = \varphi(2s);\ s \geq 0$ por la proposión (2.4.3) anterior, existen constantes

$$c > 0 \text{ y } s_0 > 0 \text{ tal que } \varphi(2s) = \psi(s) \leq c\varphi(s)\ \forall\ s \in [0, s_0].$$

Ahora, supongamos que φ satisface la condición Δ_2^0.

Sean $u, g \in V_\varphi$ tal que $\omega(u) \leq \gamma_0\, \omega(g) \leq \gamma_0$, $c \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$ el entero más pequeño para que $|c| \leq 2^m$.

De las siguientes desigualdades:

$$\upsilon_\varphi(u + g) \leq c_0(\gamma_0)(\upsilon_\varphi(u) + \upsilon_\varphi(g)),$$
$$\upsilon_\varphi(c\, u) \leq (c_0(2^{m-1}r_0))^m \upsilon_\varphi(f).$$

Obtenemos la linealidad de V_φ donde la función $c_0(s_1)$ está definida en (2.1).

$\square$

Proposición 2.4.5. *Si φ satisface la condición Δ_2^0, entonces $V_\varphi(I, M) = W_\varphi(I, M)$.*

Recíprocamente, si M es un espacio normado y $V_\varphi(I, M) = W_\varphi(I, M)$, entonces φ satisface la condición Δ_2^0.

Demostración:

La inclusión $V_{\varphi_2}(I,M) \subset V_{\varphi}(I,M)$ y el Lema 3 nos lleva a la existencia de

$$c > 0 \;\text{ y }\; s_0 > 0,$$

tal que

$$\varphi(s) \leq c\,\varphi(\frac{s}{2}) \qquad \forall \; s \in [0, s_0].$$

Dado $u \in W_{\varphi}(I,M)$, la *$\varphi-$variación precisa* $p_{\varphi}(f)$ está bien definida, como $V_{\varphi_\lambda}(u) \leq \dfrac{V_{\varphi}(f)}{\lambda}, \quad \lambda \geq 1.$

□

2.5 Propiedades Principales de p_{φ}.

Las principales propiedades de p_{φ} son presentadas por Chistyakov (ver [9]), sin embargo, las desarrollaremos en el siguiente lema donde la función φ es $\varphi-$función.

Proposición 2.5.1. *Dado (M,d) un espacio métrico, $\varphi \in \Phi$ y $u \in W_{\varphi}(I,M)$, tenemos:*

(a) $d(u(x),u(y)) \leq \varphi^{-1} p_{\varphi}(u) \;\; \forall \;\; x,y \in I.$

(b) *Si $\lambda = p_{\varphi}(u) > 0$, entonces $\upsilon_{\varphi_\lambda}(u) \leq 1$.*

(c) *Si $\lambda > 0$, entonces $p_{\varphi}(u) \leq \lambda$, si y sólo si $\upsilon_{\varphi_\lambda}(u) \leq 1$.*

(d) *Si $\lambda > 0$ y $V_{\varphi_\lambda}(u) = 1$, entonces $p_{\varphi}(u) = \lambda$.*

(e) *Si una sucesión $\{u_k\} \subset W_{\varphi}(I,M)$ converge puntualmente en el intervalo I a u cuando $k \longrightarrow \infty$, entonces $p_{\varphi}(u) \leq \liminf\limits_{k\longrightarrow\infty} p_{\varphi}(u_k)$.*

(f) $p_{\varphi}(u) \leq \upsilon(u)/\varphi^{-1}(1)$, *si $u \in V(I;M)$.*

(g) *Si $x \in I = [a,b]$, entonces $p_{\varphi}(u,[a,b]) \leq p_{\varphi}(u,[a,x]) + p_{\varphi}(u,[x,b])$.*

(h) *Si M es un espacio normado, entonces $W_{\varphi}(I;M)$ es un espacio lineal y $p_{\varphi}(\bullet)$ es una semi norma en $W_{\varphi}(I;M)$.*

Demostración:

(a) *Si $\varphi \in \Phi$ y $\lambda > 0$ se tiene $\varphi_{\lambda}(s) = \varphi\left(\frac{s}{\lambda}\right)$, esto es,*

$$\varphi_{\lambda}(d(u(x),u(y))) = \varphi\left(\frac{d(u(x),u(y))}{\lambda}\right).$$

Además,

$$\varphi_{\lambda}\left(d(u(x),u(y))\right) \leq \sup_{\xi} \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{(u(x),u(y))}{\lambda}\right) = \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u).$$

De manera que,

$$\varphi\left(\frac{d(u(x),u(y))}{\lambda}\right) \leq \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u).$$

Por definición, $p_{\varphi}(f) = \operatorname{ínf}\{\lambda > 0 : \ \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1\}$. Entonces,

$$\varphi\left(\frac{d(u(x),u(y))}{\lambda}\right) \leq \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1 \quad \forall\ \lambda > p_{\varphi}(u).$$

Como φ es convexa, tiene inversa φ^{-1} y aplicando φ^{-1} en la desigualdad tenemos

$$\frac{d\left(u(x),u(y)\right)}{\lambda} \leq \varphi^{-1}\left(\upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u)\right) \leq \varphi^{-1}(1) \quad \forall\ \ x,y \in I.$$

Entonces $d\left(u(x),u(y)\right) \leq \lambda\varphi^{-1}(1)$.

Tomando infimo sobre λ, tenemos

$$d(u(x),u(y)) \leq p_{\varphi}(u)\varphi^{-1}(1).$$

(b) *Elegimos $\lambda(k) > 1$; $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$.*

Por definición de $p_{\varphi}(f)$, tenemos que

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda(k)}}(u) \leq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Así,

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) < \upsilon_{\varphi_{\lambda(k)}}(u) \leq 1,$$

en virtud de la proposión (2.4.3),

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda}} \leq \liminf_{k \longrightarrow \infty} \upsilon_{\varphi_{\lambda(k)}}(u) \leq 1.$$

(c) *Supongamos $p_{\varphi}(u) \leq \lambda$. Veamos que $\upsilon_{\varphi_{\lambda}} \leq 1$.*

Siendo $p_{\varphi}(f) = \inf\left\{\lambda > 0 : \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1\right\}$. Como $\lambda > 0$ entonces $\upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1$.

Ahora, supongamos que $\upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1$ y notemos que $p_{\varphi}(u) \leq 1$.

Si $p_{\varphi}(u) = \lambda$ por la parte (b) resulta $\upsilon_{\varphi}(u) \leq 1$.

Tomemos $\mu = p_{\varphi}(u)$ entonces por la parte (b) tenemos $\upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) \leq 1$, por lo que nos queda demostrar que

$$\text{Si} \quad p_{\varphi}(f) < \lambda, \ \text{entonces} \quad \upsilon_{\varphi_{\lambda}}(u) < 1. \tag{2.3}$$

En efecto, considerando $\mu = p_{\varphi}(u)$ y teniendo en cuenta la convexidad de φ y la inclusión de (b), tenemos,

$$\upsilon_{\varphi}(u) \leq \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \upsilon_{\varphi_{\mu}}(u) \leq \frac{\mu}{\lambda} < 1.$$

(d) *Por* **(c)**, *$p_{\varphi}(u) \leq \lambda$ y por (2.3) tenemos $p_{\varphi}(u) = \lambda$.*

(e) *Es suficiente suponer que $\lambda = \liminf_{k \longrightarrow \infty} p_{\varphi}(u_k)$ es finita.*

Entonces $p_{\varphi}(u_{k_\ell})$ tiende a λ cuando $\ell \longrightarrow \infty$ para alguna subsusesión $\{u_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ de $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Así, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\ell_o(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $p_{\varphi}(u_{k_\ell}) < \lambda + \epsilon$ para *todo* $\ell \geq \ell_0(\epsilon)$.

La definición de $p_\varphi(u_{k_\ell})$ *implica que* $\upsilon_{\varphi_{\lambda+\epsilon}}(u_{k_\ell}) \leq 1$, *si* $\ell \geq \ell_0(\epsilon)$. *De esa manera* u_{k_ℓ} *converge puntualmente a* u *en* I *cuando* $\ell \longrightarrow \infty$, *obteniendo:*

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda+\epsilon}}(f) \geq \liminf_{\ell \longrightarrow \infty} \upsilon_{\varphi_{\lambda+\epsilon}}(u_{k_\ell}) \leq 1,$$

donde,

$$p_\varphi(u) \leq \lambda + \epsilon \ \ \textit{para todo } \epsilon > 0.$$

(f) *Sea* $\lambda = \dfrac{\upsilon(u)}{\varphi^{-1}(1)}$, *supongamos* $\upsilon(u > 0)$, *observemos que*

$$\upsilon_{\varphi_\lambda}(u) \leq \varphi_\lambda(\upsilon(u)) = 1,$$

aplicando (c) se tiene el resultado deseado.

(g) *Sean* $a < x < b$, $\lambda = p_\varphi(u, [a, x])$ *y* $\mu = p_\varphi(u, [x, b])$.

Si $\lambda \cdot \mu = 0$, *entonces por* **(a)**, *la desigualdad (actualmente la igualdad) es notorio.*

Sea $\lambda \cdot \mu > 0$. *Por* **(b)** $\upsilon_{\varphi_\lambda}(u, [a, x]) \leq 1$ *y* $\upsilon_{\varphi_\mu}(u, [x, b]) \leq 1$.

Por **(c)** *obtenemos que* $p_\varphi(u, I) \leq \lambda + \mu$ *es equivalente a* $\upsilon_{\varphi_{\lambda+\mu}}(u, I) \leq 1$. *Por lo tanto se demuestra la desigualdad.*

Sea $\xi = \{x_i\}_{i=0}^m$ *una partición de* I, *tal que* $x_{k-1} \leq x < x_k$ *para algún* $k \in \{1, ..., m\}$.

Por la convexidad y la monotonía de φ, *tenemos:*

$$\begin{aligned}
\varphi_{\lambda+\mu}\left(d(u(x_i), u(x_{i-1}))\right) &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi_\lambda\left(d(u(x_i), u(x_{i-1}))\right) \quad i = \{1, \cdots, k-1\}, \\
\varphi_{\lambda+\mu}\left(d(u(x_k), u(x_{k-1}))\right) &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\varphi_\lambda\left(d(u(x), u(x_{k-1}))\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi_\mu\left(d(u(x_k), u(x))\right), \\
\varphi_{\lambda+\mu}\left(d(u(x_i), u(x_{i-1}))\right) &\leq \frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi_\mu\left(d(u(x_i), u(x_{i-1}))\right), \quad i = k+1, ..., m.
\end{aligned}$$

De ello se desprende

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_{\lambda+\mu}\left(d\left(u\left(x_i\right),u\left(x_{i-1}\right)\right)\right)\leq\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\upsilon_{\varphi_\lambda}\left(u,[a,x]\right)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\upsilon_{\varphi_\mu}\left(f,[x,b]\right)\leq 1,$$

así,

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda+\mu}}(u,I)\leq 1.$$

(h) Supongamos que M es un espacio normado.

Si $u,g\in W_\varphi(I;M)$, entonces existe $\lambda>0$ y $\mu>0$ tal que

$u\in V_{\varphi_\lambda}(I;M)$ y $g\in V_{\varphi_\mu}(I;M)$ y así por la convexidad de υ_λ, tenemos que

$$\upsilon_{\varphi_{\lambda+\mu}}(u+g)\leq\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\upsilon_{\varphi_\lambda}(u)+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\varphi_{\varphi_\mu}(g), \tag{2.4}$$

donde $u+g\in W_\varphi(I;M)$.

También es claro que $c\,u\in W_\varphi(I;M)$, si c es un escalar y $p_\varphi(cf)=|c|p_\varphi(u)$.

Ahora bien sea el conjunto $\lambda=p_\varphi(f)$ y $\mu=p_\varphi(g)$. Si $\lambda\cdot\mu=0$, de modo que $p_\varphi(f+g)\leq\lambda+\mu$, y si $\lambda\cdot\mu>0$.

En virtud de (2.3) y (b) obtenemos:

$$\upsilon_\varphi\left(\frac{(u+g)}{\lambda+\mu}\right)\leq 1.$$

Así por la definición de p_φ, y $p_\varphi(u+g)\leq\lambda+\mu$ obtenemos la prueba.

$\square$

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE CHISTYAKOV

W. Serpinski (ver [20]) demuestra que si u es una función regular en $\mathbb{R}$ si y sólo si es la composición de dos funciones g y φ, g continua en $\mathbb{R}$ y φ monótona, es decir, $u(t) = (g \circ \varphi)(t), \quad t \in \mathbb{R}$ donde g es continua en $\mathbb{R}$ y φ es monótona.

En este capítulo se hará la demostración del Teorema de Representación de Chistyakov ([10]) expondremos dos lemas y algunas definiciones que se usan para obtener la demostración del Teorema de Representación Canónica de Chistyakov.

3.1 Variación acotada localmente

Definición 3.1.1. *(Variación acotada localmente)*

Una función $u : E \longrightarrow X$ es de variación acotada localmente si $V(u; E_a^b) < \infty$ para todo $a, b \in E, a \leq b$ y se denota $u \in \mathcal{V}_{loc}(E; X)$. Claramente $\mathcal{V}(E, X) \subset \mathcal{V}_{loc}(E, X)$.

Presentaremos un ejemplo de una función de variación acotada localmente.

Ejemplo 3.1.1. *La función $u(t)$ definida:*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & si \quad t = 0 \\ t \sin\left(\dfrac{1}{t}\right), & si \quad t \neq 0. \end{cases}$$

$u(t)$ es de variación acotada localmente con $u \in \mathcal{V}_{loc}(u; (0,1])$. Representaremos dicha función en la siguiente figura:

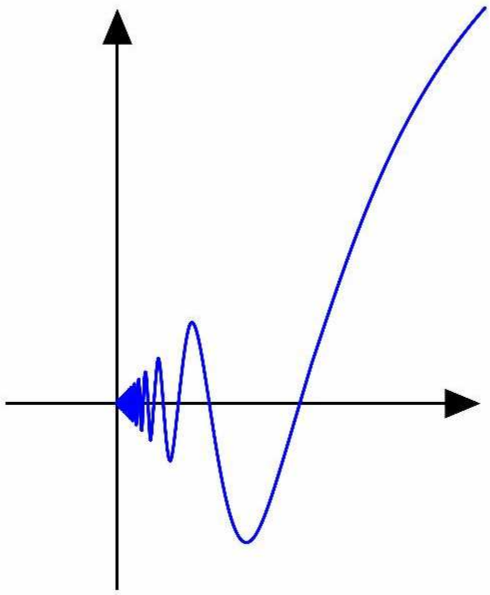

Figura 3.1: $t \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$

Definición 3.1.2. *(Función Lipschitziana)*

Una función u es Lipschitziana en E si existe un número $C \in \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$d(u(t), u(s)) \leq C|t - s|,$$

para todo $t, s \in E$.

A continuación daremos ejemplos de funciones Lipschitzianas:

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos* $u(t) = t$ *en el intervalo* $[a, b]$ *entonces*

$$|u(t_1) - u(t_2)| = |t_1 - t_2|,$$

esto implica que u *es Lipschitziana.*

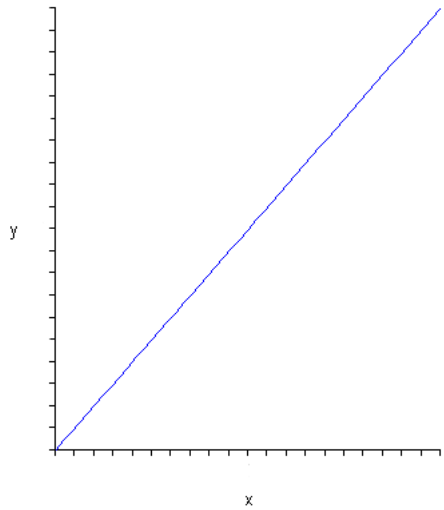

Figura 3.2: $u(t) = t$

Ejemplo 3.1.3. *Veamos que la función* $u(t) = t^2$ *en el intervalo* $[a, b]$ *es Lipschitziana.*

$$|u(t_1) - u(t_2)| = |t_1^2 - t_2^2| = |t_1 - t_2||t_1 + t_2| \leq M|t_1 - t_2|$$

con $M = 2\,\text{máx}(|a|, |b|)$.

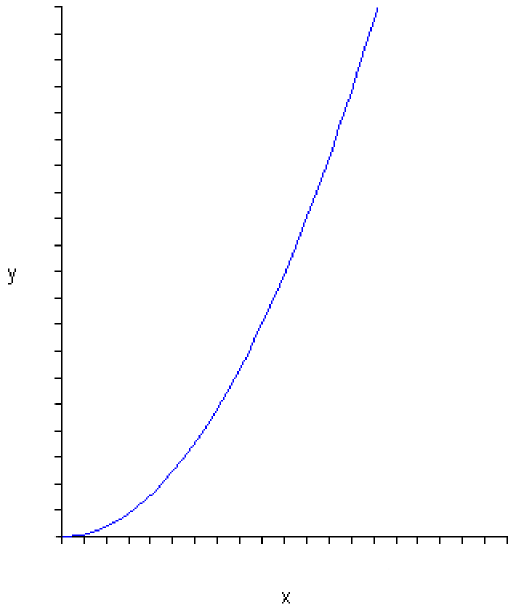

Figura 3.3: $u(t) = t^2$

Definición 3.1.3. *(Constante de Lipschitz)*

El número mínimo que satisface la desigualdad $d(u(t), u(s)) \leq C|t-s|$ es llamada la constante de Lipschitz de u y se denota por $Lip(u)$.

Definición 3.1.4. *(Función naturalizada)*

Una función $u : E \longrightarrow X$ es naturalizada si $V(u, E_a^b) = b - a$ para todo $a, b \in E$, $a \leq b$.

La función naturalizada $u : E \longrightarrow X$ es de variación acotada localmente y es Lipschitz con $Lip(u) \leq 1$, entonces en virtud de la propiedad de minimalidad, tenemos

$$d(u(t), u(s)) \leq V(u, E_t^s) = s - t, \quad t, s \in E, \quad t \leq s.$$

Los siguientes ejemplo son una muestra de la definición anterior.

Ejemplo 3.1.4. *Sea* $u(t) = \dfrac{t^2}{b+a}$ *con* $t \in [a,b]$ *como* u *es convexa se tiene que* $V(u;[a,b]) = u(b) - u(a)$ *es decir:*

$$\begin{aligned} V\left(\frac{t^2}{b+a};[a,b]\right) &= \frac{b^2}{b+a} - \frac{a^2}{b+a} \\ &= \frac{b^2-a^2}{b+a} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{b+a} \\ &= b-a. \end{aligned}$$

Entonces $u(t)$ *es una función naturalizada.*

Ejemplo 3.1.5. *Sea* $u(t) = \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$, *con* $t \in [0,\pi]$ *entonces la variación de* u *viene dada por:*

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{2}\sin(t);[0,\pi]\right) &\leq V\left(\frac{\pi}{2}\sin(t);[0,\frac{\pi}{2}]\right) + V\left(\frac{\pi}{2}\sin(t);[\frac{\pi}{2},\pi]\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \left|\frac{-\pi}{2}\right| \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Así $u(t)$ *es una función naturalizada.*

3.2 Teorema de Representación de Chistyakov

W. Serpinski (ver [20]) demuestra que u es una función regular en $\mathbb{R}$ si y solo si es la composión de dos funciones g y φ, con g continua en $\mathbb{R}$ y φ monótona, es decir, $u(t) = (g \circ \varphi)(t) \quad t \in \mathbb{R}$.

En el año 1998 (117 años despues de lo hecho por Jordan) V.V. Chistyakov obtiene un Teorema de Representatividad por medio de funciones Lipschitzianas y funciones monótonas, más precisamente V. V. Chistyakov demuestra lo siguiente: que una función $u : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ con X un espacio métrico tiene variación acotada si y solo si existen funciones como las definidas por Serpinski.

La demostración del Teorema de Representación de Chistyakov (ver [10]) la vamos a presentar en los dos lemas que enunciaremos y demostraremos. El primer lema demuestra la suficiencia y contiene un gran número de ejemplos de función de variación acotada (localmente).

El segundo lema demuestra la otra implicación, es decir, la necesidad del Teorema de Representación de Chistyakov y contiene la descomposición canónica de una función de variación acotada (localmente).

Teorema 3.2.1. *Una función $u : E \longrightarrow X$ es de variación acotada localmente si y sólo si existe una función $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ no decreciente y una función naturalizada $g : \varphi(E) \longrightarrow X$ (donde g es Lipschitz con $Lip(g) \leq 1$) tal que $u = g \circ \varphi$ en E.*

Lema 3.2.1. *Si $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona $g : \varphi(E) \longrightarrow X$ es Lipschitz y además $u = g \circ \varphi$, entonces $u \in \mathcal{V}_{loc}(E; X)$. Adicionalmente, si φ es acotada, entonces $u \in \mathcal{V}(E; X)$.*

Demostración.

Supongamos que φ es no decreciente. Entonces

$$\varphi(E \cap [a, b]) = \varphi(E) \cap [\varphi(a); \varphi(b)] \quad a, b \in E, a \leq b. \tag{3.1}$$

Por la propiedad de cambio de variable y la monotonía de φ tenemos:

$$V(u; E_a^b) = V(g \circ \varphi; E_a^b) = V(g; \varphi(E_a^b)) = V(g; \varphi(E)_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}).$$

Si $T = \{t_i\}_{i=0}^m$ es una partición del conjunto (3.1) entonces

$$V(g; T) \leq Lip(g) \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1}) \leq Lip(g) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a))$$

así que,

$$V(u; E_a^b) \leq Lip(g) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) < \infty.$$

Por la propiedad de Regularidad y monotonía de φ obtenemos:

$$V\,(u;E) \leq Lip(g)\cdot\left(\sup_{t\in E}\varphi(t) - \inf_{t\in E}\varphi(t)\right) = Lip(g)\,\omega(\varphi,E).$$

Por consiguiente, sí φ es acotada ($\omega(\varphi,E)<\infty$) entonces $u\in\mathcal{V}(E;X)$.

Ahora supongamos que φ es no creciente. Por lo tanto:

$$\varphi(E\cap[a,b]) = \varphi(E)\cap[\varphi(b)-\varphi(a)] \quad a,b\in Ea\leq b \tag{3.2}$$

debido a la propiedad cambio de variable se tiene:

$$V\left(u;E_a^b\right) = V\left(g\circ u, E_a^b\right) = V\left(g;\varphi\left(E_a^b\right)\right) = V\left(g;\varphi\left(E\right)_{\varphi(b)}^{\varphi(a)}\right).$$

Consideremos $T=\{t_i\}_{i=0}^m$ la partición del conjunto (3.2) entonces

$$V\,(g;T) \leq Lip\,(g)\sum_{i=1}^{m}(t_i - t_{i-1}) \leq Lip\,(g)\,(\varphi(a)-\varphi(b)) < \infty.$$

Asi mismo, por la propiedad de regularidad y la monotonía de φ obtenemos:

$$V(u;E) \leq Lip(g)\cdot\left(\sup_{t\in E}\varphi(t) - \inf_{t\in E}\varphi(t)\right) = Lip(g)\cdot\omega\,(\varphi,E)\,.$$

Además sí φ es acotada, es decir, $\omega(\varphi,E)<\infty$ tenemos $u\in V(E;X)$.

□

Observación 3.2.1. *(a) Si la función u del lema 6 es naturalizada, tenemos*

$$V\left(u,E_a^b\right) = |\varphi(b)-\varphi(a)|, \quad a,b\in E \quad a\leq b$$

y

$$V\,(u,E) = \omega\,(\varphi,E)\,.$$

En particular, sí $u:E\longrightarrow\mathbb{R}$ es monótona entonces los conjuntos:

$X=\mathbb{R},\varphi=u$ y $g(s)=s$ con $s\in u(E)$ en el lema anterior, obtenemos que $u\in\mathcal{V}_{loc}(E,\mathbb{R})$.

(b) Sí $u : E \longrightarrow X$ *es Lipschitz y* E *es acotada. Entonces* $u \in \mathcal{V}_{loc}(E, X)$ *y también*

$$\begin{aligned} V(u; E_a^b) &\leq Lip(u) \cdot (b - a) \quad a, b \in E, a \leq b. \\ V(u; E) &\leq Lip(u) \cdot (\sup E - \inf E). \end{aligned}$$

El siguiente lema contiene la otra implicación (necesidad) así como también, la descomposición canónica de una función de variación acotada (localmente).

Lema 3.2.2. *Sea* $u \in \mathcal{V}_{loc}(E, X)$*. Entonces existe una función no decreciente* $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *y una función naturalizada* $g : E_1 = \varphi(E) \longrightarrow X$ *tal que*

(a) $u = g \circ \varphi$ *en* E.

(b) $g(E_1) = u(E)$ *en* X.

(c) $V(g; E_1) = V(u; E)$ *en* $[0, \infty)$.

Sí además, $u \in \mathcal{V}(E, X)$ *entonces, la función* φ *es acotada y los valores en (c) son finitos.*

Demostración.

Fijemos un punto $a \in E$*, y un conjunto*

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(u; E_a^t), & si \quad t \in E_a^+, \\ -V(u; E_t^a), & si \quad t \in E_a^-. \end{cases}$$

Definamos la función $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *no decreciente, por la propiedad de monotonía, y* $\varphi(a) = 0$.

Si, $\tau \in E_1$*, denotaremos por* $\varphi^{-1}(\tau) = \{t \in E : \varphi(t) = \tau\}$ *a la inversa de la imagen de un punto del conjunto* $\{\tau\}$ *para la función* φ.

Definimos la función $g : E_1 \longrightarrow X$ *como:*

Si, $\tau \in E_1$ *por el conjunto*

$$g(\tau) = u(t) \quad para\ cualquier\ punto \quad t \in \varphi^{-1}(\tau), \tag{3.3}$$

es decir, $u(t)$ *es el mismo elemento de* X *para todo* $t \in \varphi^{-1}(\tau)$ *entonces, en virtud de la minimalidad y la aditividad tenemos*

$$d\left(u(s), u(t)\right) \leq V\left(u, E_t^s\right) = \varphi(s) - \varphi(t), \quad t \in E, s \in E_t^+; \tag{3.4}$$

en efecto, si $t, s \in \varphi^{-1}(\tau), t \leq s$*, entonces* $\varphi(t) = \tau = \varphi(s)$*, así que (3.1) implica* $u(t) = u(s)$.

Ahora, la representación de u *en (a) es* $u = g \circ \varphi$ *considerando (3.3) se tiene lo siguiente:*

Si $t \in E$*, entonces* $\tau = \varphi(t) \in E_1$ *y* $t \in \varphi^{-1}(\tau)$*, por lo tanto (3.4) implica que* $u(t) = g(\tau) = g(\varphi(t)) = (g \circ \varphi)(t)$.

Para la parte (b) demostremos que g *es naturalizada.*

Como $\varphi(E \cap [a, b]) = \varphi(E) \cap [\varphi(a), \varphi(b)] \quad a, b \in E, a \leq b$. *Tenemos*

$$E_1 \cap [0, \tau] = \varphi(E \cap [a, t]), \quad 0 \leq \tau \in E_1, \quad t \in \varphi^{-1}(\tau),$$

aplicando la propiedad cambio de variable se tiene

$$V(g; (E_1)_0^\tau) = V(g; \varphi(E_a^t)) = V(g \circ \varphi; E_a^t) = V(f; E_a^t) = \varphi(t) = \tau.$$

De la misma manera

$$V(g; (E_1)_\alpha^\beta) = V(g; (E_1)_\tau^0) = -\tau \quad \textit{sí} \quad 0 \geq \tau \in E_1.$$

Entonces, si $\alpha, \beta \in E_1, 0 \leq \varphi \leq \beta$*, por la propiedad de aditividad tenemos:*

$$V(g; (E_1)_\alpha^\beta) = V(g; (E_1)_0^\beta) - V(g; (E_1)_0^\alpha) = \beta - \alpha.$$

□

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el Capítulo 1 del presente Trabajo Especial de Grado, hemos expuesto de manera explícita la noción de Variación Acotada en el sentido de Jordan dando la definición, algunos ejemplos, propiedades tanto para un intervalo cerrado $[a, b]$ como para un subconjunto arbitrario $E \subset \mathbb{R}$ no vacío a valores reales. Este Capítulo se culmina con el estudio de la clase de funciones $BV[a, b]$, demostrando que la misma posee una estructura de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y de álgebra de Banach. Además se expuso de manera explícita el famoso Teorema de Representación de Jordan el cual afirma que una función u es de Variación Acotada si y sólo si dicha función se escribe como diferencia de funciones monótonas.

En el Capítulo 2 se trabajó con una genealización de la Variación Acotada clásica la cual es conocida como φ-Variación Acotada en el sentido de Wiener donde φ pertenece a la clase de φ-funciones y se considera una función $u : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Enunciando y demostrando propiedades de estas funciones, cabe destacar que dichas propiedades se plantearon para un intervalo cerrado $[a, b]$ a valores en espacio métrico. Esta clase de funciones $BV_\varphi[a, b]$ también puede dotarse de espacio vectorial, espacio normado, espacio de Banach y de álgebra de Banach.

En el Capítulo 3 demostramos el Teorema de Representación de Chistyakov presentando de manera explícita el desarrollo de dicha demostración.

Finalmente el trabajo con estos espacios de funciones de Variación Acotada brinda la oportunidad de introducirse en una linea de investigacion con gran campo, ya que es conocido que existen otros tipos de generalizaciones de estos espacios de funciones con Variación Acotada, como lo son la Variación en el sentido de Waterman, Variación en el sentido de Schrammm, Variación en el sentido de Riesz, entre otras.

Además recientemente (ver [2], [3],[4],[5],[6]) la escuela Polaca, considera la resolución de ecuaciones intregrales del tipo de Voltera-Hammerstein en este tipo de espacio de variacion acotada y en el seminario de ecuaciones diferenciales de la escuela de matemática en colaboracion con el Dr Hugo Leiva de la universidad de los Andes se está estudiando la aplicabilidad de estos resultados en la teoría de control (ver [16]).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Banach, S. *Sur les Lignes Rectifiables et les Surface dont l'aire est finite* , fund. Math. 7 (1925), 225-236.

[2] D. Bugajewska, D. Bugajewski and G. Lewicki, *On nonlinear integral equation in the space of funtions of bounded generalized* IMUJ Preprint (2006).

[3] D. Bugajewska and D. O´regan *On nonlinear integral equations and* Λ*-bounded variation*, Acta Math. Hungar 107 (4)(2005), 295-306.

[4] D. Bugajewska, D. Bugajewski and H. Hudzik, BV_ϕ*-solutions of nonlinear integral equations,* J. Math. Anal. Appl. 287 (2003), 265-278.

[5] D. Bugajewski, *On BV - solutions of some nonlinear integral equations*, Intergr. equ. oper. theory 46 (2003), 387-398.

[6] D. Bugajewski, Poznán, *On the Volterra Integral equation and axiomatic measure of weak noncompactness*, Mathematica Bohemica 1 (2001), 183-190.

[7] V.V. Chistyakov, *On mappings of finite generalized variation and nonlinear operators*, Real Anal. Exchange 24 th Summer Symp. Conf. Reports (2000), pp. 39-43.

[8] V.V. Chistyakov, *Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifuntions*, Positivity 5, 4 (2001), pp. 323-358.

[9] V.V. Chistyakov, *Lipschitzian Nemytskii Operators in the Cones of Mappings of Bounded Wiener $\varphi-$variation*, Follia Mathematica. 11, 1, pp. 17-22.(2004)

[10] V.V. Chistyakov, *On Mappings of bounded varition*, journal of dynamical and control systems. 3,2 (1997) pp.267-269.

[11] J. Ciemnoczolowski, W. Matuszewska, W. Orlicz, *Some properties of functions of bounded $\varphi-$variation and of bounded $\varphi-$variation in the sense of Wiener*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. 35, 3-4 (1987), pp. 185-194.

[12] Dirichelt, P. L. *Sur la convergence des séries trigonemétriques que servent á représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte Mathemait, 4, (1829), pp. 157-159.

[13] Fourier, J. *The analytical of Heat*, translated by A. Freeman, Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[14] Fourier, J. *Memoire sur la propagation de la chauler dans les corpes solides (extrait)*, Nouvean Bulletin dies Sciences, par la Société philomatique de París 1, (1808), pp. 112-116.

[15] Jordan, C. *Sur la série de Fourier*. CR. Acad. Sci. París, 2(1881), 228-230.

[16] L.A Azocar, H. Leiva and N. Merentes *Controllability of semilinear Volterra-Stieltjes equation in the space* $G([0,\tau],X)$ por aparecer.

[17] L. Maligranda, W. Orlicz, *On some properties of functions of generalized variation*, Monastsh. Math. 104, (1987), pp. 53-65.

[18] N. Merentes, S. Rivas, *El Operador de composición en espacios con algún tipo de variación acotada*. Novena escuela venezolana de Matemática. (1996), pp.11-45.

[19] J. Musielak, W. Orlicz, *On generalized variations.* I, Studia Math. 18, (1959), pp. 11-41.

[20] W. Serpinski, *Sur Une proprieté des foction qui nont quedes discontinuités de premiere espece.* Bulletin de la section scintifique de L Academie Roumaine XVI eme, (1993), 1/3, 1-4.

[21] N. Wiener, *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, Massachusetts J. Math. And Phys. 3, (1924), pp. 72-94.

[22] L.C. Young, *Sur une generalization de la notion de variation de puissanc* $p-$*iéme bornée au sens de N.Wiener*, et sur la convergence des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci., Paris 204, 7 (1937), pp. 470-472.