



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Aplicación de la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica a la Gestión de Acuíferos

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por
la **Br. Cynthia V. Carnero R.** para optar
al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Prof. Luis Antonio Azócar Bates

Tutor: Prof. José Luis Sánchez

Caracas, Venezuela

02 de Diciembre de 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aplicación de la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica a la Gestión de Acuíferos**”, presentado por la **Br. Cynthia V. Carnero R.**, titular de la Cédula de Identidad **82.238.167**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Prof. Luis Antonio Azócar Bates

Tutor

Dr. José Luis Sánchez

Tutor

Dr. Nelson Merentes

Jurado

Prof. Antonio Acosta

Jurado

Dedicatoria

A toda mi familia, A mis abuelos, A mis
Padres, A mis hermanos, A todos los que me
acompañaron durante la carrera.

Agradecimiento

A Dios por ponerme a personas tan valiosas en el camino.

A mi familia, por la ayuda, la colaboración y por darme las herramientas para seguir adelante.

A mis amigos, por compartir horas dentro y fuera de un salón de clases.

A mis profesores, Antonio Azócar, por ser mi tutor, por regalarme su tiempo, su colaboración, y por haberme presentado este hermoso tema de tesis. A José Luis y Nelson Merentes por toda su ayuda, y colaboración. A Eddy Pariguán por ser más que una profesora, por sentarse a conversar y darme los mejores consejos para la vida.

A todos Gracias por ayudarme a conseguir este logro profesional.

El hombre y el agua

Si el hombre es un gesto
el agua es la historia.

Si el hombre es un sueño
el agua es el rumbo.

Si el hombre es un pueblo
el agua es el mundo.

Si el hombre es recuerdo
el agua es memoria.

Si el hombre está vivo
el agua es la vida.

Si el hombre es un niño
el agua es París.

Si el hombre la pisa
el agua salpica.

Cuídala
como cuida ella de ti....

Joan Manuel Serrat

Resumen

El objetivo principal de esta tesis de grado es el estudio y aplicación de la ecuación diferencial parcial **Hamilton-Jacobi-Bellman** (HJB). La ecuación diferencial parcial HJB es muy importante en la teoría de control pues sirve para verificar si un control es óptimo. Aplicamos ésta ecuación al problema de la gestión de un recurso hídrico: **Acuíferos**. Describimos brevemente las distintas formas de gestión de un acuífero, basándonos en cómo están definidos los derechos de propiedad. Luego se expone un modelo teórico que integra los elementos hidrológicos y económicos presentes en un acuífero, con el objeto de obtener las trayectorias de equilibrio tanto de la extracción de aguas subterráneas, como del stock del acuífero. Además se desarrolla una de las aplicaciones pioneras de la programación dinámica estocástica, dentro del campo de la economía de los recursos hídricos, el trabajo de Oscar Burt. También se presenta un modelo de tiempo continuo que investiga el nivel del acuífero en el cual se detiene la extracción neta, y se restringe, el bombeo futuro al ritmo previsto de recarga. Por último se analiza una versión estocástica del modelo en tiempo continuo y se deriva una nueva regla de parada en el caso de que el volumen de las aguas subterráneas evolucione como un proceso de Itô.

Palabras Claves: Acuíferos, Gestión de acuíferos, Ecuación HJB, Principio del Máximo de Pontryagin, Programación Dinámica, Principio de Optimalidad de Bellman, función valor, Proceso de Wiener, Lema de Itô

Abstract

The main purpose of this thesis is the study and application of the differential partial equation **Hamilton-Jacobi-Bellman** (HJB). This equation is very relevant to the theory of control because it functions as a measure for verifying the best quality of control. We apply this equation to the issue of the management of water resource: **Aquifers**. We describe briefly the different ways to manage an aquifer based in the delimitation of the property rights. Then we expose a theory that integrates hydrologic and economic elements that exist in an aquifer, with the intention of obtain the balance trajectories in the extraction of groundwaters and aquifer stock. Also, we develop one of the pioneers applications of stochastic dynamic programming, in the field of water resources economy, as seen in the work of Oscar Burt. As well, we present a model on continuous time that reviews the level of the aquifer in which the net extraction stops and restricts the future bombing at the provided rate of recharge. Finally, we analyze a stochastic version of the model on continuous time and we generate a new rule for stopping in case the groundwaters volume evolves as an Wiener process.

Key words: Groundwater, aquifers management, HJB Equation, The Pontryagin Maximum Principle, Dynamic Programming, Bellman Principle of Optimality, Value function, Wiener Process, Ito's Lemma.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	vi
Introducción General	7
1 Aguas Subterráneas	15
1.1 El agua en movimiento	19
1.2 El agua subterránea en Movimiento:	23
1.2.1 Pérdidas de carga	31
1.3 Importancia del Agua subterránea	35
1.4 Desventajas del Agua subterránea	36
1.5 Tipos de acuíferos	40
1.6 Ley de Darcy	44
1.6.1 Conductividad hidráulica y permeabilidad intrínseca	48
1.7 Aplicaciones de la Ley de Darcy	49
1.7.1 Flujo a un pozo	53
1.7.2 Velocidad del agua subterránea en movimiento	60
1.8 Calidad del Agua Subterránea	64
1.9 Descarga de los acuíferos	65
1.10 Pozos para agua	67
1.10.1 Bombas	68

2	Valoración Económica del Agua	72
2.1	La cobertura de la medida	78
2.2	Abastecimiento Municipal	79
2.3	Regadío	85
2.3.1	Métodos de valoración del agua de regadío	89
2.4	Actividades recreativas, disfrute estético, habitat natural	90
2.4.1	Metodología de valoración	90
3	Optimización Dinámica	92
3.1	Principio de Máximo de Pontryagin	97
3.1.1	Extensiones	105
3.1.2	Interpretación Económica del Principio del Máximo	106
3.2	Control Bang- Bang	111
3.3	Control Estocástico	120
3.3.1	Procesos estocásticos	124
3.3.2	Proceso de Wiener o Movimiento Browniano	125
3.3.3	Integral estocástica	127
3.3.4	Lema de Itô	131
3.3.5	Ecuaciones Diferenciales Estocásticas	133
3.4	El Método de Programación Dinámica	137
3.4.1	Principio de Optimáldad de Bellman	138
3.4.2	Ecuación Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB)	154
4	Gestión de Recursos hídricos	159
4.1	Asignación intertemporal del agua en un acuífero	160
4.2	Las reglas de parada y la gestión del acuífero	166
4.3	Literatura económica de los recursos naturales	169
4.3.1	Derechos de propiedad del recurso agua subterránea	170
4.4	Principio fundamental de Hotelling	173
4.4.1	Análisis gráfico de la regla de Hotelling	177
4.5	Modelo de gestión de un acuífero	179

5 Aguas Subterráneas en Venezuela	187
5.1 Los recursos hídricos de América Latina en el Contexto Mundial.	187
5.2 Visión de los recursos hídricos en Venezuela	188
5.3 Marco Jurídico del Agua en Venezuela	192
5.3.1 Estructura de la Ley de Aguas	193
5.3.2 Provincias Hidrogeológicas	197
5.4 Acuíferos transfronterizos	200
 Matemáticos Importantes	 204
 Conclusiones y Recomendaciones Generales	 210
 Bibliografía	 217

INTRODUCCIÓN GENERAL

“un país sin agua es un país sin vida”

Presidente Hugo Chávez Frías

El presente trabajo de grado propone resaltar la importancia y aplicación de las técnicas matemáticas: Teoría de Control Óptimo, Programación Dinámica (PD), Optimización Dinámica y Control Óptimo Estocástica. Dado el amplio y creciente uso de dichas técnicas en la dinámica económica, como así la dificultad de acceder a dichos tópicos, se desarrollan las ideas de una manera clara e intuitiva sin pérdida de rigor matemático. Se intenta con ello llenar el vacío existente en cuanto a bibliografía accesible. La programación dinámica estocástica tiene una gran aplicación en el campo de la economía de los recursos hídricos. En particular esta tesis trata sobre la gestión sustentable de los recursos hídricos: acuíferos.

Bajo el suelo se esconde un tesoro, hasta hoy, poco atendido: las **aguas subterráneas\acuíferos**, las aguas subterráneas constituyen uno de los eslabones de un complejo sistema multifásico, a través del cual, la naturaleza ha puesto a nuestra disposición el recurso del agua y que el hombre, para su estudio y manejo ha denominado “Ciclo del agua”. El agua es, junto con el aire que se respira, el patrimonio máspreciado de la humanidad. El agua incide en todos los aspectos de la vida humana, desde la salud y el saneamiento hasta los alimentos que comemos, y del entorno natural y los ecosistemas a la industria y la energía que impulsan el desarrollo. Si bien existe suficiente agua dulce en el planeta para mantener una población

más numerosa que la actual, y a pesar de que se recicla constantemente debido a la evapotranspiración provocada por el sol, el agua escasea en muchos lugares. Aunque en los últimos años se ha venido desarrollando programas para el manejo y gestión de este recurso todavía falta mucho por hacer.

La explotación de las aguas subterráneas constituye un clásico ejemplo de la problemática asociada a los bienes comunes, en los que la ausencia de exclusividad en el uso opera como un estímulo para alcanzar una tasa de explotación superior a la socialmente óptima.

El agua es uno de los recursos potencialmente más vulnerables a los cambios climáticos. A pesar del enorme volumen de agua que existe en el planeta, 1,41 mil millones de km^3 , sólo el 5 % es agua dulce, la mayor parte de la cual (alrededor del 87 %), se encuentra en capas de hielo, glaciares y aguas subterráneas, y un 13 % (unos 2000 km^3) es la cantidad de agua disponible, que se encuentra en ríos, lagos y otros cuerpos de agua dulce. Una de las principales fuentes de extracción de agua y fuente de estudio son los **acuíferos**, que se puede definir, dados unos parámetros hidrológicos (superficie, nivel piezométrico, escorrentía, recarga, infiltración, etc.), como un embalse de agua subterránea susceptible de ser extraída y que, por tanto, podemos considerarlo como un recurso o factor productivo, pero con diferencias sustanciales. Por otro lado, los acuíferos se distinguen de los demás recursos porque tienen una tasa de regeneración (la recarga) que no depende del stock del recurso, lo que nos permite decir que el recurso agua subterránea se configura como un recurso diferenciado de los demás, sirviendo de lazo de unión entre los renovables y los no renovables.

Existen dos tipos de problemas relacionados con el impacto de las actividades humanas sobre las aguas subterráneas: los que se refieren a la cantidad de agua disponible y los que se relacionan con su calidad.

Una amenaza importante para la sostenibilidad de los acuíferos es el deterioro de la calidad del agua. El problema más extendido es el de los fertilizantes y los agroquímicos aplicados en áreas de cultivo, regados o no, y también donde hay explotaciones ganaderas intensivas y extensivas, o los problemas creados por los herbicidas aplicados a lo largo de vías de comunicación.

Las aguas subterráneas suelen ser más difíciles de contaminar que las superficiales, pero cuando esta contaminación se produce, es más difícil de eliminar. Esto sucede porque las aguas del subsuelo tienen un ritmo de renovación muy lento. Se calcula que mientras el tiempo de permanencia medio del agua en los ríos es de días, en un acuífero puede ser desde decenas hasta cientos de años, lo que hace muy difícil su purificación.

Dado que el agua subterránea conforma la mayor cantidad de agua dulce disponible en el planeta, se han comenzado a realizar explotaciones de este recurso en las zonas que presentan carencia de aguas superficiales. Sin embargo, se ha observado una sobreexplotación de este recurso, que excede la recarga de los acuíferos, y por tanto se ha producido un descenso de la cantidad y de la calidad de las aguas extraídas.

La gestión de los recursos naturales es un sector sensiblemente sujeto a diferentes impactos. El agua es un recurso natural limitado y constituye bien de dominio público. Como tal, necesita de instrumentos adecuados de gestión que sean aplicados en la cuenca hidrográfica que es la unidad territorial fundamental. Tales instrumentos aseguran a las actuales y futuras generaciones agua disponible en calidad y cantidad adecuadas, mediante su uso racional y previniendo situaciones hidrológicas críticas.

Objetivos Generales

El objetivo general de este trabajo es estudiar problemas de control óptimo determinista cuyo sistema evolutivo o dinámico está gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias. El principio de la programación dinámica (debido a Bellman) es una de las principales herramientas en el estudio de estos problemas de control óptimo que involucran soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquí trataremos el caso especial de problemas dinámicos con horizonte infinito sin restricciones. Para las diferentes variantes (problemas con horizonte finito, con restricciones de estado, con tiempo mínimo, tiempo óptimo, control impulsional, etc.) se verifican resultados similares a los que obtendremos en nuestro caso modelo. Se trata de “aplicar” la teoría a problemas de Gestión Sustentable de Acuíferos.

Objetivos Especificos

- Resolver un problema de optimización: minimizar un cierto coste.
- Exponer cómo a partir del argumento de la programación dinámica se obtiene el llamado principio de optimalidad.
- Estudiar una ecuación en derivadas parciales de primer orden denominada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)
- Analizar la gestión óptima de un acuífero mostrando donde están los diferentes puntos de equilibrio mediante un modelo de control óptimo, y comparar esta estrategia con una donde los agentes se comportan competitivamente utilizando la regla de captura.

Metodología utilizada

Esta tesis es una investigación en la que concurren varias ramas del saber de las Matemáticas: Teoría de control, Programación Dinámica, Ecuaciones en Derivadas Parciales, Economía, Ecología, Estadística y todas ellas conectadas por las matemáticas. El objetivo de cualquier ciencia o trabajo científico como la tesis es adquirir y producir (episteme) conocimientos y la elección del método adecuado que nos permita conocer la realidad es por tanto fundamental. Entre los métodos que se van a usar tenemos:

- Ecuación Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB).
- Principio del Máximo de Pontryagin.
- Principio Fundamental de Hotelling.
- Programación Dinámica Estocástica.
- Lema de Itô.
- Control “Bang-Bang”.

Este Trabajo especial de Grado está estructurada en 5 capítulos:

- Capítulo 1: **Aguas Subterráneas**

En la elaboración de este capítulo se hizo uso importante de la siguiente bibliografía:

- Price, M., *Aguas Subterráneas*. España, Editorial Limusa, (2003).
- Robin, N., Cicneros, J. & Castaner, M., *¿Qué es el Agua?*. Minneapolis, Lerner Publications Company, (2003).

Se desarrolla toda la dinámica de las aguas subterráneas iniciando con el ciclo hidrológico ya que el agua subterránea es uno de los eslabones del ciclo hidrológico, hasta la extracción del agua perforando un pozo y extrayendo el agua mediante bombas.

- Capítulo 2: **Valoración económica del agua**

En la elaboración de este capítulo se hizo uso importante de la siguiente bibliografía:

- Azqueta D. & Ferreiro A., *Análisis Económico y Gestión Recursos Naturales*. España, Alianza Editorial, (1994).

Se identifican conceptualmente los componentes del valor total del agua (uso, opción, herencia e intrínseco). También se examinan los elementos de valoración y procedimientos de estimación en los usos de: abastecimiento municipal, riego, y disfrute estético recreativo *in situ*. Los sectores y actividades citados no constituyen una relación exhaustiva de las funciones de valor del agua.

- Capítulo 3: **Optimización Dinámica**

En la elaboración de este capítulo se hizo uso importante de la siguiente bibliografía:

- Cerdá, E., *Optimización Dinámica*. Madrid, Pearson Educación, (2001).
- Kamien, M., & Schwartz, N., *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York, North-Holland, (1991).
- Rodríguez, M., Perez, B. & Alonso, S., *Optimización Dinámica - Teoría del Control Óptimo*. España, servicio de publicaciones Universidad de Oviedo. (1997).
- Uribe, D., *Economía Matemática*. Colombia, Ediciones Uniandes, (2001.)

En este capítulo nos enfocaremos en abordar dos técnicas de optimización: la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica. Veremos la relación que hay entre ellas y la aparición de la ecuación diferencial parcial de Hamilton - Jacobi - Bellman. Y dentro de la Teoría de Control vamos a ver una condición necesaria de primer orden conocida como el Principio del Máximo de Pontryagin, un ejemplo de problemas de Control de tipo Bang - Bang, y una breve introducción al cálculo estocástico.

- Capítulo 4: **Modelo de gestión de las aguas subterráneas**

En la elaboración de este capítulo se hizo uso importante de la siguiente bibliografía:

- Azqueta, D., & Ferreiro, A., *Análisis Económico y Gestión Recursos Naturales*. España, Alianza Editorial, (1994).
- Romero, C., *Economía de los Recursos Ambientales y Naturales*. Madrid, Alianza Editorial S.A., (1997).

Primero se desarrolla una de las aplicaciones pioneras de la programación dinámica estocástica, dentro del campo de la economía de los recursos hídricos, el trabajo de Oscar Burt y se deduce la Política de Control de Retroalimentación Aproximadamente Óptima (PCRAO). Se presenta un modelo de tiempo continuo que investiga el nivel del acuífero en el cual se detiene la extracción neta, y se restringe, por vez primera, el bombeo futuro al ritmo previsto de recarga. También se analiza una versión estocástica del modelo en tiempo continuo y se deriva una nueva regla de parada en el caso de que el volumen de las aguas subterráneas evolucione como un proceso de Itô. Luego describiremos brevemente las distintas formas de gestión de un acuífero, basándonos en como estén definidos los derechos de propiedad. Por último se expone un modelo teórico que integre los elementos hidrológicos y económicos presentes en un acuífero, con el objeto de obtener las trayectorias de equilibrio tanto de la extracción de aguas subterráneas, como del stock del acuífero.

- Capítulo 5: **Aguas Subterráneas en Venezuela**

En este capítulo se encuentra la visión de los recursos hídricos en Venezuela. Se reconoce que el agua no puede ser “simplemente” un bien económico en el sentido de los mercados

“normales”. Primero, porque el acceso al agua debe ser un derecho humano que no puede condicionarse con cualquier sistema de precios, segundo porque el agua no es sólo un “bien mercancía”, sino un valor social, cultural y un elemento constitutivo de un ecosistema. Además se muestra el marco jurídico en Venezuela, la ley de aguas su estructura y los principales artículos de esta ley que están relacionados con el agua subterránea.

CAPÍTULO 1

AGUAS SUBTERRÁNEAS

“El agua es el elemento y principio de las cosas”

Thales de Mileto (640a.C. - 545a. C.)¹

Cada año caen aproximadamente 110 billones (10^{12}) de metros cúbicos (m^3) de agua en forma de precipitaciones pluviales sobre los continentes del globo terráqueo. La población del planeta se estima en más de 6.000 millones de habitantes, lo que significa que cada uno recibe en promedio cerca de 53.000 litros, o 53 toneladas, de agua dulce por día, y esto sin considerar el agua que cae en forma de lluvia o nieve en los océanos. Ciertamente, el agua debería alcanzar para todos.

Sin embargo, a pesar de esta aparente abundancia de agua, a diario mueren miles de personas por enfermedades asociadas con esquemas inadecuados de abastecimiento de agua limpia. Por supuesto, el problema no es la cantidad de agua ni el número de personas, sino la distribución relativa de ambos, así como el hecho de que el agua no llega de manera regular a través del tiempo.

¹Fue el iniciador de la indagación racional sobre el universo. Fue el primero y más famoso de los Siete Sabios de Grecia (el sabio astrónomo) tuvo como discípulo y protegido a Pitágoras. También es considerado uno de los más grandes astrónomos y matemáticos de su época.

Una solución que el hombre ha aplicado a estos problemas ha sido levantar sus asentamientos cerca de fuentes confiables de agua, donde existe una característica natural que corrige de algún modo la distribución irregular de la lluvia. Quizá un lago que la almacene o un río que conduzca el agua desde una región donde hay más precipitaciones, o donde éstas son más reguladas. Resultaría difícil nombrar una ciudad importante de cualquier parte del mundo que no se haya establecido en la ribera de un río. Cabe reconocer que existen otras razones para ello. La defensa y las comunicaciones son las más obvias, pero la disponibilidad de agua siempre a sido un factor imperativo.

Por supuesto, existen áreas del mundo donde, por razones climáticas o geológicas, no existen corrientes permanentes ni ríos; sin embargo, muchas de ellas han estado habitadas durante miles de años. Los habitantes de los primeros asentados dependían del abastecimiento del agua que se encuentra en el subsuelo, a menudo a pocos metros de la superficie, la cual explotaban cavando pozos.

En la actualidad, mucha gente no sólo no está consciente de que gran parte del abastecimiento de agua se extrae del subsuelo, sino que tampoco sabe que el agua subterránea es un recurso de uso común y generalizado. Debido a que la mayoría de la gente da por sentado el abastecimiento de agua y de energía, difícilmente se detendrán a pensar de dónde proviene el agua hasta el día en que deje de llegar; *“nadie echa de menos el agua hasta que se seca el pozo”* reza un proverbio popular a cuyo sentido literal se agrega el figurado. La falta de conciencia tal vez sea inevitable, ya que las fuentes de agua subterráneas son invisibles y no pueden tener el mismo impacto sobre los sentidos que la inmensidad de un lago o el rugir de una catarata. Sin embargo, esto es lamentable, pues las fuentes subterráneas representan el almacenamiento de agua dulce más grande del planeta. Asimismo, con frecuencia ofrecen la mayor solución en algunos casos la única, para el problema de abastecimiento de agua potable y para riego en los países en desarrollo.

¿Cómo se presenta el agua subterránea? ¿Qué tan amplia es su distribución y qué tan confiable es como fuente de abastecimiento? ¿Cómo puede protegerse y utilizarse mejor en beneficio de la población? estas y otras interrogantes se responden en las siguientes secciones

de este capítulo.

El agua es uno de los recursos fundamentales para la vida en la Tierra, siendo el componente básico de los ciclos ecológicos. El agua dulce es considerada un recurso renovable, su formación y renovación está regida por el ciclo hidrológico y las condiciones fisiográficas, que a su vez distribuye el agua de forma irregular en toda la superficie terrestre. La escasez de agua dulce es un factor limitante para el desarrollo regional, donde las condiciones fisiográficas limitan la disponibilidad del recurso.

La cuestión de la disponibilidad de agua para el consumo humano en el mundo, es un tema que hoy provoca discusión, aunque existe unanimidad en cuanto a la necesidad de su gestión sostenible y racional. El vertiginoso crecimiento de las actividades humanas, acompañado por el crecimiento poblacional, por el consumo, por la producción de bienes y por la contaminación generada, ha comprometido la disponibilidad de los recurso hídricos.

El agua subterránea es de esencial importancia porque supone la mayor reserva de agua potable en las regiones habitadas por los seres humanos. Puede aparecer en la superficie en forma de manantiales, o puede ser extraída mediante pozos. En tiempos de sequía, puede servir para mantener el flujo de agua superficial, pero incluso cuando no hay escasez, es preferible utilizar agua subterránea porque no tiende a estar contaminada por residuos o microorganismos. Aunque el agua subterránea está menos contaminada que la superficial, la contaminación de este recurso también se ha convertido en una preocupación en casi todos los países.

Para comprender la forma en que el agua se presenta en el subsuelo, primero es preciso considerar el suelo en sí. La corteza terrestre está constituida de rocas de varios tipos; en muchos lugares estas rocas no están expuestas, pues están ocultas por la tierra y el paisaje está cubierto por vegetación. Pero las rocas se pueden ver en los acantilados en la orilla del mar, en las laderas de las montañas, en las canteras. Dondequiera que vivamos, si perforamos lo suficiente debajo de la superficie de la Tierra, encontraremos finalmente roca. Una de las característica de las rocas: es que casi todas las rocas de la parte superior de la corteza terrestre, cualquiera que sea su tipo, edad u origen, contienen aberturas llamadas **poros** o **espacios**. Estos espacios tienen

formas y tamaños variados. Algunos de ellos son demasiado pequeños para verlos a simple vista. Sin embargo en casos excepcionales, las aberturas pueden tener decenas de metros, como las cavernas.

Una roca común, la arenisca, tiene poros más fáciles de visualizar. Si se toma un puñado de arena y se mira de cerca, a través de una lupa, se verán los numerosos espacios entre los granos de arena. En caso de que no se disponga de arena, puede observarse un puñado de azúcar granulada, que es exactamente esa misma característica. La arenisca es simplemente arena que se convirtió en roca debido a que los granos de la arena se aglutinaron por medio de un cementante, y muchas de las aberturas se conservaron en el proceso; es como si el azúcar granulada se hubiera convertido en un terrón de azúcar.

A la propiedad de una roca de poseer poros o espacios se le llama **porosidad**. A las rocas que contienen grandes proporciones relativas de espacios vacíos se les describe como “porosas”, o se dice que poseen “alta porosidad”. Los suelos también son porosos. En un día caluroso, la superficie del suelo puede parecer bastante seca, pero si cavamos un poco la tierra se siente húmeda, y si pudieramos cavar más hasta llegar a la roca, ésta también estaría húmeda.

La razón de esto es que los poros no están vacíos; algunos de ellos están llenos total o parcialmente de agua. En general, son los poros pequeños los que están llenos, y los grandes los que están vacíos. A profundidades mayores se descubrirá que todos los poros están llenos de agua, y se describe a este material como “saturado”. En términos científicos, se ha pasado de la **zona no saturada** a la **zona saturada**. (Figura 1.1)

Si se cava una noria o se perfora un pozo, desde la superficie del suelo hacia abajo, y se penetra en la zona saturada, el agua fluirá del material saturado (que puede ser roca o material no sólido), hasta alcanzar un nivel constante. Este estará cerca del nivel debajo del cual todos los poros están llenos de agua, es decir, el nivel superior de la zona saturada, llamado: **nivel freático**.

La distancia que es necesaria perforar o cavar para llegar al nivel freático varía de lugar a lugar; puede ser de menos de un metro a más de cien metros. En general, el nivel freático no

es plano: se eleva y baja con la superficie del terreno, pero en una forma desigual, de modo que es más profundo por abajo de las montañas y somero debajo de planicies y valles (figura 1.1). Incluso puede coincidir con la superficie del suelo. Si es así, se puede establecer fácilmente debido a que el suelo estará húmedo y pantanoso, o quizá haya una acumulación de agua, un manantial o un río. En los lugares donde el nivel freático está debajo de la superficie del suelo, como es común, su profundidad podrá medirse en un pozo.



Figura 1.1: (a) En **Época húmeda** el nivel freático sube y corta a la superficie del terreno. (b) En **Época de sequía** el nivel freático desciende. Se secan los ríos y zonas húmedas superficiales.

Toda el agua que se encuentra en forma natural por abajo de la superficie terrestre se llama **agua subsuperficial**. Independientemente de que esté en la zona saturada o en la no saturada (se incluye el adjetivo “natural” para excluir de la definición el agua en tuberías, por ejemplo). El agua en la zona saturada, es decir, la que se encuentra debajo del nivel freático, se le llama **Agua subterránea**.

1.1 El agua en movimiento

Es tan sólo cuestión de observación percatarse de que prácticamente todos los ríos descargan sus aguas en los océanos. Como el nivel de los mares permanece más o menos constante, y como los ríos no manifiestan signos de interrupción de su flujo, es lógico pensar en la existencia de un mecanismo por medio del cual el agua regresa al océano hacia tierra firme aproximadamente a la misma velocidad promedio con que fluye por los ríos hacia el mar.

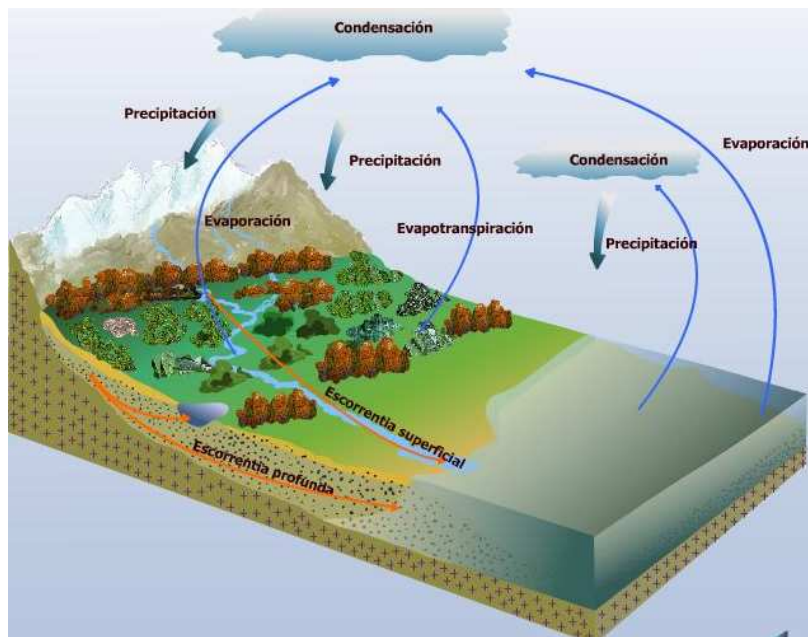


Figura 1.2: Ciclo hidrológico o Ciclo del agua

Se sabe que la trayectoria de retorno que sigue el agua es a través de la atmósfera. La energía de los rayos solares ocasiona que el agua se evapore de la superficie de los océanos (figura 1.2). El vapor de agua que se produce de esta manera es una parte esencial de la atmósfera de la Tierra, y permanece en la atmósfera completamente invisible, a menos que se enfríe lo suficiente como para que se condense y forme gotitas de agua. Cuando se acumula una cantidad suficiente de gotitas, es posible observarlas en forma de nubes.

Una gran cantidad de lluvia cae directamente sobre los océanos, situación que restringe el ciclo del agua. En contraste, la precipitación en tierra firme puede tomar diversas rutas para completarlo. Una porción de la lluvia nunca llega a la superficie del terreno, ya que es **interceptada** por la vegetación, y se mantiene en las hojas de plantas y árboles hasta que se evapora nuevamente.

La precipitación sobre el suelo tiene tres opciones:

1. Evaporarse, ya sea directamente o por transpiración de la vegetación después de ser tomada por las raíces de las plantas.
2. Escurrirse, ya sea sobre la superficie del suelo o viajar a poca profundidad por los diferentes estratos del suelo hasta alcanzar una corriente pequeña.
3. Infiltrarse, en estratos más profundos o formaciones geológicas subyacentes.

Cuando la lluvia comienza a caer en suelo relativamente seco, se sabe por experiencia que es rápidamente absorbida. En términos populares se dice que el suelo “chupa” el agua; en términos científicos se habla de **infiltración**, que es el proceso por el cual el agua se incorpora en la superficie.

Si el suelo está seco y la lluvia es ligera, toda el agua que llega a su superficie se infiltrará en el suelo, donde se mantendrá como una película de humedad que rodeará a las partículas que componen dicho suelo. El agua se mantiene ahí hasta que se evapora directamente del suelo o es tomada por las raíces de las plantas. Una pequeña fracción del agua que toman las raíces se incorpora a las plantas durante el proceso de crecimiento, pero la mayor parte se evapora a través de las pequeñas aberturas existentes en hojas y tallos, proceso al cual se denomina **transpiración**. Los efectos combinados de la evaporación y transpiración devuelven agua a la atmósfera, por lo que comúnmente se agrupan en un término conocido como **evapotranspiración**.

En la medida que cada estrato del suelo absorbe agua, el proceso de infiltración la desplaza a través del suelo y subsuelo hasta que llega a unidades geológicas más profundas. Si este material geológico es permeable, el proceso de infiltración continuará por toda la zona no saturada, hasta que el agua llegue al nivel freático y se incorpore al agua subterránea en la zona saturada. La porción de la precipitación que alcanza el nivel freático se denomina **recarga**, debido a que contribuyen a la renovación del almacenamiento de agua subterránea.

La velocidad máxima a la que el agua puede incorporarse al suelo se denomina **capacidad de infiltración** del suelo. Si la precipitación es muy intensa, se presenta una situación en donde el agua llega a la superficie del suelo más rápidamente de lo que es capaz de incorporarse al

mismo; en este caso, se dice que la capacidad de infiltración fue rebasada por la intensidad de la lluvia. En estas circunstancias, el suelo se comporta como una superficie impermeable; las depresiones (término para designar la zona del relieve situada a un nivel inferior que la superficie vecina) se llenan, y se presenta **flujo superficial** (agua que corre por la superficie del suelo, generalmente como pequeños escurrimientos y riachuelos). El **escurrimiento superficial** es la porción del **escurrimiento total** (el flujo de los ríos que sale de un área) que resulta del flujo superficial.

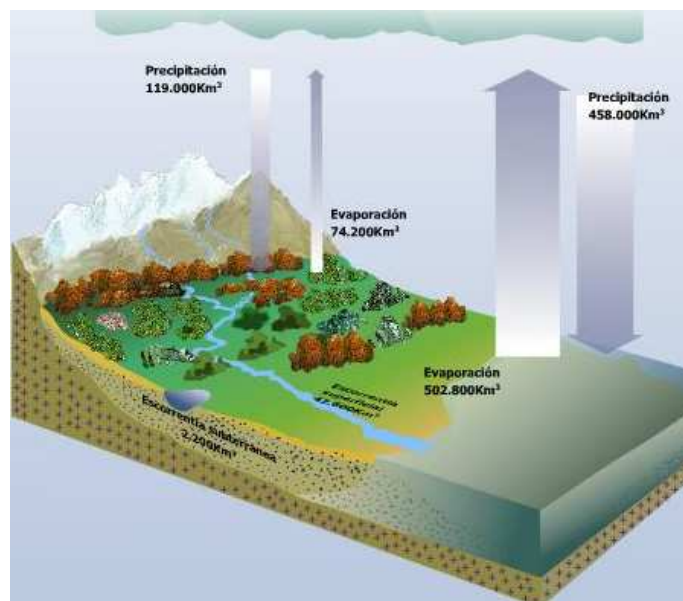


Figura 1.3: **Fuente:** Datos tomados de Igor A. Shildomanov, State Hydrological Institute y United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

No toda el agua que se infiltra en el suelo alcanza el nivel freático. Si las rocas debajo del suelo son impermeables, o si existen en el suelo estratos o capas de permeabilidad variada, el agua tenderá a moverse en forma lateral en la zona no saturada, hasta que finalmente alcance una corriente superficial. A este tipo de flujo se le denomina **interflujo**, por ser intermedio entre el flujo superficial y el flujo subterráneo saturado.

La cantidad de agua que se evapora de mares y océanos (figura 1.3) es de 502.800 km^3 y sobre ellos precipita una cantidad menor, 458.000 km^3 . Esta cantidad de agua se desplaza por la atmósfera hasta los continentes. En los continentes ocurre lo contrario, la evaporación, 74.200 km^3 , es menor que la precipitación 119.000 km^3 (74.200 más 44.800). Por lo tanto la evaporación y la precipitación global media del planeta son iguales. El agua que precipita sobre los continentes y que no se evapora 44.800 km^3 , se desplaza por la escorrentía subterránea (2.200 km^3) y por la escorrentía superficial (42.600 km^3), siendo devuelta de nuevo a los océanos. Puesto que las cantidades globales de agua no varían se dice que el balance está en equilibrio y puede ser, en teoría, un proceso que continúa indefinidamente.

El agua que llega al nivel freático se convierte en agua subterránea. A partir de ese momento inicia una lenta percolación a través de los acuíferos, con una velocidad que en condiciones naturales varía entre más de un metro por día a sólo unos cuantos milímetros en un año. El agua subterránea fluye hacia una salida natural del acuífero, que generalmente es un punto de intersección del nivel freático con la superficie del terreno. En estos lugares, el agua descarga o fluye del acuífero a la superficie terrestre, por lo que determina su condición de agua subterránea y se convierte nuevamente en agua superficial, que por lo general llega al cauce de un río. Para así completar el **ciclo del agua** o también conocido como el **Ciclo hidrológico**.

1.2 El agua subterránea en Movimiento:

Antes de tratar de comprender cómo se mueve el agua subterránea, es necesario razonar acerca del agua en general. En realidad, es necesario pensar acerca de lo que ocasiona el movimiento de cualquier cosa. Si una persona se mueve y realiza sus actividades rápidamente, se dice que tiene mucha energía; en caso contrario, se dice que le falta energía. En términos simples, la energía es, la capacidad para realizar un trabajo. Una forma muy general de medir la energía de una persona consiste en contar los peldaños de una escalera que puede subir; en otras palabras, ver qué tanto puede elevar su cuerpo a partir de un nivel de referencia. Subir escaleras es una forma de trabajo.

Al igual que las personas, el agua requiere de energía para moverse; una forma de medir

la energía del agua, de manera semejante que en el caso de las personas, consiste en observar la altura a la que se eleva por encima de un nivel de referencia arbitrario. A la altura sobre el nivel de referencia se le denomina **carga hidráulica**, o **carga**. El nivel de referencia puede ser seleccionado en forma arbitraria porque, como se verá posteriormente, sólo interesa comparar la energía del agua en un punto con respecto a otro. Como las energías se evalúan en relación con el mismo nivel de referencia, la posición de éste es irrelevante.

Considérese la distribución que se presenta en la figura 1.4. El tubo B contiene una mayor cantidad de agua que el tubo A, pero los expertos indican que al abrir la válvula C, el agua fluirá de A hacia B, hasta que el nivel del agua sobre la referencia sea idéntica en ambos tubos. Se sabe que el flujo se establecerá de A a B por que inicialmente el nivel del agua en A es mayor que el de B. En términos comunes se dice que “el agua encuentra su propio nivel”. En términos científicos puede señalarse que existe una diferencia de cargas entre A y B, y que la carga de A es mayor que la de B.

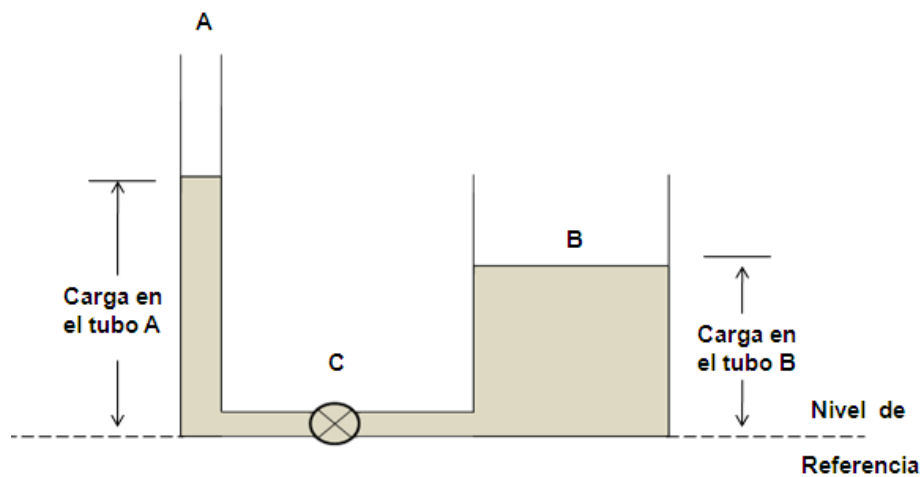


Figura 1.4: **Diferencia de cargas.** Existe una diferencia de cargas entre el tubo A y B. La carga de agua en A es mayor que en B, aún cuando B contiene un mayor volumen de agua. Si la válvula C se abre, el agua fluirá de A hacia B.

El flujo se presenta para igualar las cargas. De lo anterior surge una pregunta: ¿se relaciona la carga simplemente con la altura sobre la superficie del suelo? En otras palabras, ¿el agua fluye pendiente abajo? Desafortunadamente no, quizá sea apropiado decir que por suerte no sucede así, debido a que si el agua no tuviera la capacidad de fluir cuesta arriba, sería muy difícil su distribución para satisfacer las necesidades de tipo doméstico industrial y agropecuario. Considérese el caso relativamente simple de abastecimiento de agua a una casa habitación (figura 1.5).

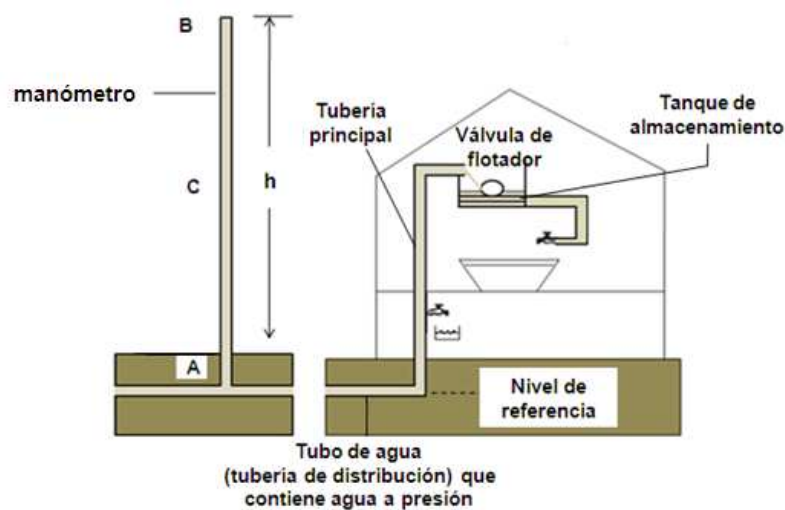


Figura 1.5: **Abastecimiento de agua a la habitación de una casa.** El agua de la tubería de conducción subterránea fluirá hacia arriba por la tubería de distribución hacia la llave y al tanque de almacenamiento porque tiene energía de presión. La altura h a la cual se elevaría en un manómetro colocado en A es una medida de su “carga de presión”

La tubería de reparto de agua está enterrada, pero el agua viaja hacia arriba al sistema de distribución de la casa y posteriormente a las tomas de agua y al tanque de almacenamiento, que por lo general se ubica en la azotea de la vivienda. Es claro que esto no ocurriría si la carga simplemente estuviera en función de la altura. El flujo hacia arriba se presenta, por que el agua en la tubería está sujeta a presión. Sí se coloca un **manómetro** (instrumento que sirve para

medir la presión de los fluidos) en la tubería de distribución justo en el punto A, el agua se elevaría por el tubo hasta el punto B, con lo que se obtiene una medida de la carga de presión en A. Como el punto B se encuentra por arriba del nivel de la válvula principal, el agua puede fluir hacia el tanque de almacenamiento y hacia cualquier otra toma de agua en la vivienda.

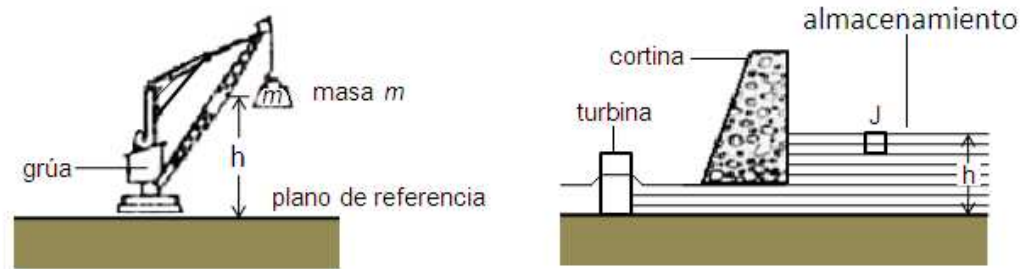


Figura 1.6: **Energía de elevación.** Una masa m a una altura h por arriba del nivel de referencia posee una energía de elevación mgh unidades con respecto al plano de referencia adoptado. Éste es el trabajo que una grúa tiene que realizar para elevar dicha masa desde el plano de referencia (en este caso, el nivel del terreno natural) hasta la altura señalada: también es la cantidad de trabajo que tiene que realizar para regresar la masa desde la altura h hasta el plano de referencia. El agua de un almacenamiento también posee energía. La cantidad de trabajo que cada unidad de volumen de agua puede realizar cuando pasa a través de una turbina es proporcional a h . Una unidad de volumen de agua tiene masa δ , por lo que la unidad de volumen en J tiene una energía de elevación δgh . Su peso es δg , por lo que su *carga* (energía/unidad de peso) es simplemente h .

En la figura 1.5 se observa que la diferencia de carga puede ser resultado de la diferencia de presión, o de una diferencia en la elevación. Para distinguir entre ellas, comúnmente se habla de *carga de elevación* y de *carga de presión*. Pero, ¿en realidad estos tipos de carga son diferentes? Para contestar esta pregunta es necesario recordar el concepto de que la carga es una medida de la energía.

Es posible definir la carga hidráulica del agua como la energía del agua por unidad de peso. El agua posee energía que se expresa de diferentes maneras; una de estas formas es la energía de elevación, que es la energía que tiene con base en su posición (figura 1.6). Una masa m que se encuentra a una distancia vertical h sobre el nivel de referencia, tiene una energía de elevación igual a mgh unidades en relación con dicho nivel de referencia, mgh unidades es la cantidad de trabajo que se requiere para elevar la masa m desde el nivel de referencia hasta su posición actual, o la cantidad de trabajo que se puede hacer que la masa realice al permitirle que se desplace desde su posición hasta el nivel de referencia (g es la aceleración debida a la gravedad). Una unidad de volumen de agua tiene una masa δ , en donde δ es la densidad del agua; entonces, una unidad de volumen de agua a una altura h tiene una energía de elevación a δgh unidades. Como el peso de una unidad de volumen de agua es δg , entonces se deduce de la definición de carga hidráulica (energía por unidad de peso) que el agua a una altura h sobre el nivel de referencia está a una carga de elevación igual $\frac{\delta gh}{\delta g}$ o sea h .

Consideremos ahora la presión. En la figura 1.5 se observa que cuando se inserta un manómetro en la tubería de distribución en el punto A, el agua se eleva en el tubo del manómetro. Así, es claro que el agua bajo presión posee energía y, por lo tanto una carga hidráulica. Ahora es necesario expresar este hecho en términos cuantitativos.

En la figura 1.5, cuando se conecta en manómetro y el agua ya no fluye, se da una situación en la cual el agua que se desplazó de A hacia B intercambió la energía de presión que tenía en A por la energía de elevación que ahora tiene en B. Con base en la ley de la conservación de energía, se deduce que las cantidades de energía intercambiadas deben ser iguales; como el agua en B tiene una energía igual a δgh por unidad de volumen, y por lo tanto tiene una carga igual a h unidades, entonces el agua en A debe tener la misma energía y, en consecuencia, la misma carga, h . Si esta situación no fuera así, habría flujo a lo largo del tubo del manómetro.

En general, la presión a cualquier profundidad z por abajo de la superficie de un líquido es mayor por una cantidad p que la presión atmosférica que se ejerce sobre la superficie del líquido, en donde

$$p = \delta gz$$

Por facilidad, se adopta la convención de medir todas las presiones en relación con la presión atmosférica. Así, en la figura 1.5 la presión δ en el punto A es igual a δgh por que A está a una profundidad h por abajo de la superficie del agua. Como la carga en A es igual a la carga en B, que a su vez es igual a h , entonces se deduce que la carga en A es igual a:

$$h = \frac{p}{\delta g}$$

Esta es la fórmula general para el cálculo de la carga de presión. La energía de presión y la energía de elevación son formas de **energía potencial**, que en términos generales es la energía que un cuerpo posee debido a su posición o estado.

El agua posee ambos tipos de energía simultáneamente; por ejemplo, el agua en el punto C en el tubo del manómetro de la figura 1.5 posee energía de elevación como resultado de su altura sobre el nivel de referencia, y además posee energía de presión como resultado de su profundidad por abajo de la superficie del líquido. La energía de elevación es energía potencial que se obtiene a partir de la posición. La energía de presión es energía potencial que se tiene con base en el principio de estado. En forma análoga, en la figura 1.5 el agua fluye por la tubería de distribución hacia el tanque de almacenamiento convierte su energía de presión en energía de elevación.

En un cuerpo de agua almacenada, la energía de presión se incrementa con la profundidad bajo la superficie del agua, y la energía de elevación aumenta con la altura; la suma de las dos formas de energía es constante, si no fuera así, el agua estaría en movimiento. Esta relación se describe en la figura 1.7, donde se representa un cuerpo de agua estancada.

En cualquier punto K , la suma de la carga de presión h_p y la carga de elevación h_e es igual a la carga estática h_s , que además es igual a la altura de la superficie del agua estancada por arriba del nivel de referencia. Existe una tercera forma en que el agua manifiesta su energía: el movimiento. Es claro que cuando el agua se mueve posee energía; por ejemplo, un chorro horizontal de agua puede realizar trabajo al mover una turbina. A ésta energía se le denomina **energía cinética** y la contribución que realiza al total de la carga hidráulica se le llama **carga de velocidad** o **carga dinámica**.

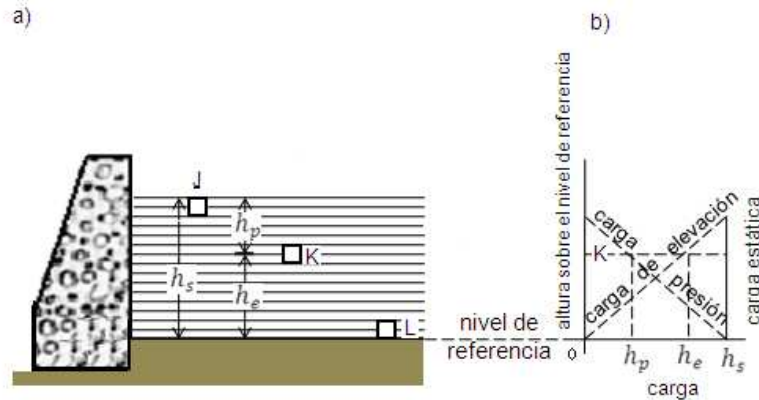


Figura 1.7: Carga de presión y carga de elevación en agua estancada como la que se encuentra en un almacenamiento. (a) Una unidad de volumen de agua en la superficie (el volumen J) posee carga de elevación pero no carga de presión; en el nivel horizontal de referencia (que en este ejemplo se presenta en el fondo del almacenamiento), una unidad de volumen posee carga de presión pero no carga de elevación (el volumen L). En cualquier punto intermedio (el punto K) el agua posee carga de presión h_p y carga de elevación h_e . La suma de las dos componentes es la carga estática, h_s , que es igual a la altura de agua sobre el nivel de referencia. (b) Representación gráfica de las condiciones de carga en (a). La carga de elevación disminuye con la profundidad, mientras que la carga de presión se incrementa; a cualquier profundidad la suma de las dos cargas es igual a la suma a cualquier otra profundidad y a la carga estática, h_s . Debido a que la presión se incrementa con la profundidad, la presa es más ancha hacia su base.

Una masa m que se mueve a una velocidad v , tiene una energía cinética de $(\frac{1}{2})mv^2$. En la definición de carga hidráulica, la contribución de la carga de velocidad por unidad de volumen de agua (de masa δ) será igual a $\frac{1}{2}(\frac{\delta v^2}{\delta g})$ o $\frac{v^2}{2g}$. Es posible comprobar que la fórmula anterior es correcta, utilizando la ley de la conservación de energía.

Supongamos que dirigimos un chorro de agua verticalmente hacia arriba (figura 1.8). El nivel horizontal de referencia se coloca justo en la boquilla del tubo, sitio en donde el agua

tiene una velocidad v . Cuando el agua ya se ha alejado de la boquilla se encuentra a presión atmosférica, por lo que no se producen cambios presión - energía adicionales.

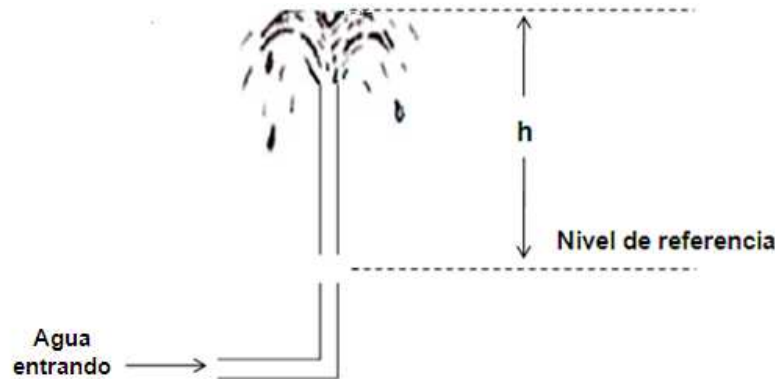


Figura 1.8: **Cambios de energía en un chorro vertical de agua** Cuando se aleja de la boquilla, el agua no posee energía de elevación con respecto al plano de referencia, pero posee cierta energía cinética. En la parte elevada del chorro, la velocidad del agua (y por lo tanto su energía cinética) es momentáneamente cero, pero su energía cinética se ha convertido en energía de elevación. La energía de presión (el agua se mantiene a la presión atmosférica desde que sale de la boquilla) se mantiene sin cambio en todo el recorrido analizado

Como el punto por donde el agua sale del tubo coincide con el nivel de referencia de la energía de elevación, únicamente posee una energía cinética igual a $(\frac{1}{2})\delta v^2$ por unidad del volumen. En la parte más elevada del chorro, la velocidad del agua es nula, por lo que solamente posee energía de elevación que en este caso será igual a δgh por unidad del volumen. Suponiendo que no existe energía que se utilice para vencer la fricción, por ejemplo del aire, entonces estas cantidades deben ser iguales:

$$\frac{1}{2}\delta v^2 = \delta gh$$

de donde

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

que es justamente lo que se deseaba demostrar.

1.2.1 Pérdidas de carga

Supongamos ahora que construimos una tubería larga con diámetro constante, que se coloca en forma horizontal (figura 1.9).

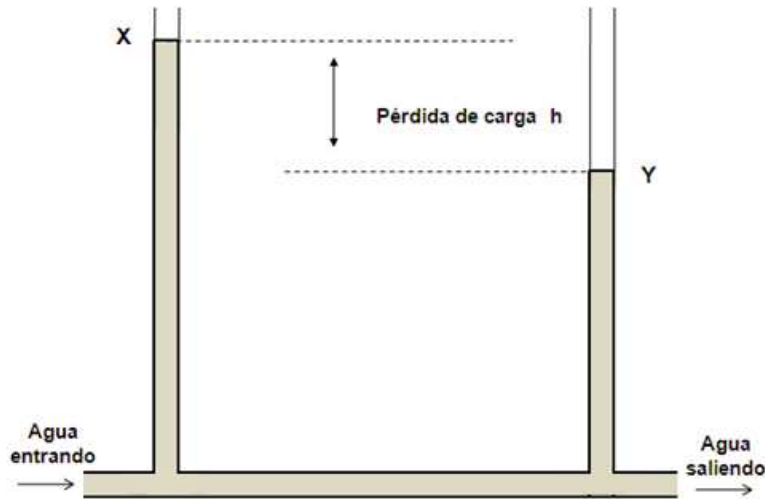


Figura 1.9: **Flujo establecido a través de una tubería horizontal.** La pérdida de carga entre X y Y representa la energía que se ha convertido en calor

En las inmediaciones de sus extremos se colocan sendos manómetros, y luego se hace circular un flujo estable de agua a través de la tubería (por flujo estable se quiere decir que el volumen de agua que entra a la tubería es igual en cualquier instante, y que el volumen que sale de la tubería es igual al que entra).

Si observamos cuidadosamente los niveles de agua en los manómetros, observaremos que el nivel de agua en el manómetro más cercano a la salida del agua está por abajo del nivel de agua en el manómetro cercano a la entrada. En primera instancia, esto puede parecer extraño. La tubería es horizontal, por lo que no existe cambio en la energía de elevación cuando el agua fluye por ella; el flujo es estable y el diámetro de la tubería es constante, de tal modo que la velocidad también es constante, al igual que la energía cinética. Sin embargo, existe una disminución de

la carga, que seguramente está relacionada con la reducción de la presión. La disminución de energía de presión no ha sido balanceada por un incremento en la energía cinética o de elevación, entonces ¿hacia donde se fue esta energía? Por la ley de conservación de la energía sabemos que ésta no puede ser destruida.

La respuesta es que la energía se ha transformado en calor, como resultado de la fricción entre las moléculas de agua y, en una proporción menor, por la fricción entre el agua y el interior de la tubería. Básicamente, el calor es una forma de energía cinética: cuando una sustancia se calienta, sus moléculas vibran más rápidamente. Por esta razón, es fácil observar cómo la fricción, que consiste en la interacción entre moléculas, incrementa la energía cinética de las moléculas, además de que genera calor.

Exactamente en la misma forma en que una persona incrementa su temperatura cuando se mantiene en movimiento, o como una biela en un motor se calienta cuando está funcionando, así el agua y la tubería se calientan, aunque el incremento es tan pequeño que no es posible medirlo fácilmente. Cuando la energía se convierte de esta manera en calor, es imposible recuperarla. Por ejemplo, no es posible recuperar la presión original del agua enfriando el tubo. Por lo tanto, aunque estrictamente la energía no ha sido destruida, el sistema ha “perdido” la energía útil: por esta razón, en la figura 1.9 el descenso de la carga entre los dos manómetros se denomina **pérdida de carga**.

Entre más rápido corra una persona, más calor genera en sus músculos; entre más rápidamente se mueva el agua en la tubería, más energía se convertirá en calor y mayor será la pérdida de carga a lo largo de la tubería. La carga tiene unidades de longitud, por lo que es posible dividir la pérdida de carga que hay entre los extremos de la tubería por la longitud de la misma, con lo que se obtiene una cantidad denominada **gradiente hidráulico** o **gradiente de carga**. Si las condiciones son las mismas que en el ejemplo analizado, entre más rápido se mueva el agua en la tubería, más pronunciado será el gradiente hidráulico. Desde este punto de vista, el agua siempre se mueve pendiente abajo, pero la cuesta que baja es el gradiente hidráulico. Entre más pronunciado sea el gradiente, mayor será la velocidad de flujo del agua. Si en la figura 1.9, se detiene el flujo del agua, el gradiente será cero. En otras palabras, las cargas en

los manómetros serán iguales: el agua “habrá encontrado su propio nivel” nuevamente.

Si se cierra la salida de la tubería en la figura 1.9, el nivel del agua en los manómetros se elevaría; si la carga hidráulica en la entrada fuera mayor que la elevación de los manómetros, entonces el agua escaparía por su extremo superior. Vamos a suponer que los manómetros tienen una altura mayor que la carga en la entrada, por lo que ahora se tiene una condición de no flujo, donde la altura del agua en ambos manómetros es la misma. ¿Por qué ahora la altura del agua en los manómetros es mayor que la que se observó cuando el agua estaba fluyendo por la tubería? Para contestar esta pregunta, es necesario analizar las diferentes condiciones de energía existente.

Cuando el agua fluía por la tubería, además de que parte de la energía se desperdiciaba como pérdida de carga, el agua tenía energía cinética al fluir. Los manómetros no registran la carga total sino la **carga estática**, que a su vez es proporcional a la energía potencial. Cuando el agua comienza a moverse, una parte de la energía potencial se convierte en energía cinética; la carga total (excepto aquella disipada en forma de calor) permanece constante, pero la carga estática disminuye.

Es posible observar claramente esta situación cuando el agua fluye en forma constante a través de una tubería horizontal que tiene una reducción en el diámetro (figura 1.10). Para que el agua que corre a través de dicha reducción mantenga el mismo flujo que en el resto del tubo, su velocidad tiene que acelerarse, de modo que el volumen que fluye por ese estrechamiento por unidad de tiempo sea el mismo volumen de agua que fluye en cualquier otra parte del tubo por unidad de tiempo. El incremento en la velocidad significa un aumento de la energía cinética, lo que a su vez representa una disminución en la energía potencial. Esto se registra como una reducción de la carga estática entre el manómetro A y el manómetro B, pero en este caso sólo una parte de la pérdida de carga es ocasionada por la fricción; el resto es producido por el cambio de energía potencial a cinética.

La energía de elevación del agua es constante, por lo que la reducción de la energía potencial se deriva de la disminución de la presión. Puede parecer extraordinario que la presión disminuya

en el interior del estrechamiento, pero es un hecho. El cambio de presión en el agua que fluye por la reducción del diámetro en la tubería provee una medida de la velocidad del flujo del agua, utilizando un instrumento denominado **tubo o medidor Venturi**.

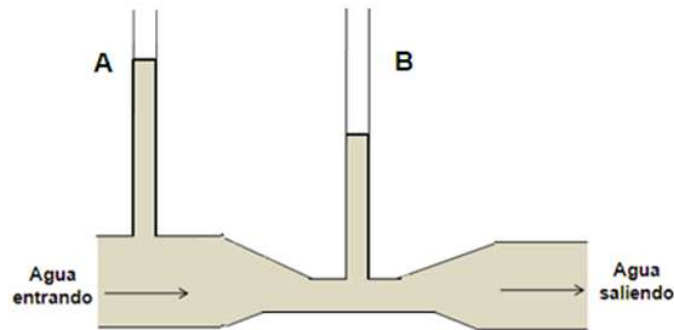


Figura 1.10: **Disminución de la presión en una reducción.** Cuando el agua fluye a través de una reducción, su velocidad (y por lo tanto su energía cinética) se incrementa. Sí, la tubería es horizontal, la carga de elevación se mantiene sin cambios, por lo que la presión debe disminuir para compensar el incremento de energía cinética. Esta reducción de presión se observa en la diferencia de cargas que presentan los manómetros A y B.

A primera vista, esto puede parecer complejo. La situación parece aún más complicada cuando recordamos que hasta aquí se ha analizado el agua que fluye por una tubería circular; entonces se piensa que la situación será mucho más difícil al estudiar el agua que se mueve a través del intrincado camino que constituye un medio poroso en una arenisca, por ejemplo. Paradójicamente, las cosas son mejores y peores a la vez. Si tratamos de describir el movimiento del agua a lo largo de los trayectos individuales que conforman los espacios entre partículas de arena, el asunto se complica. Afortunadamente, no es necesario analizarlo desde ese punto de vista; lo que interesa es el flujo total que resulta del movimiento del agua a través de la combinación de todas las trayectorias existentes. Esto es más sencillo. Otro hecho que simplifica la investigación es que el agua generalmente se mueve muy lentamente, tan lentamente que su energía cinética (y por lo tanto su carga de velocidad) generalmente es insignificante.

1.3 Importancia del Agua subterránea

¿Por qué es importante las aguas subterráneas? Una de las razones, es que en muchas áreas es la única fuente de agua. Una segunda razón es que el agua subterránea representa una porción importante de los recursos potenciales de agua que existen en la Tierra. Se estima que la cantidad total de agua sobre la Tierra es un poco más de 1.400 millones de kilómetros cúbicos km^3 . De este volumen, aproximadamente 1.370 millones de km^3 , es decir cerca del 95 % es agua de mar. Gran parte del resto, un 2 % del total, se encuentra en forma sólida en los glaciares y casquetes polares.



Figura 1.11: Distribución del agua en la Tierra

Virtualmente toda el agua restante que no es de mar o está congelada es agua subterránea. El agua en ríos y lagos, en la atmósfera y en la zona no saturada, comprende en conjunto sólo 1/50 de 1 % del agua total susceptible como recurso de abastecimiento. Las estimaciones acerca del volumen de agua subterránea varían de 7 millones de km^3 aproximadamente a unos 60 millones de km^3 . No toda esta agua puede utilizarse: una parte está contenida en espacios porosos que son muy pequeños, o en rocas que se encuentran a grandes profundidades, lo que limita su uso como recurso. De manera similar, parte de esta agua existe en un suelo permanentemente

congelado en altas latitudes o es salada. El agua subterránea no está distribuida de manera uniforme en los continentes.

En términos simples de cantidad, el agua subterránea es consecuentemente de gran importancia. Pero la cantidad no lo es todo, y desde el punto de vista del abastecimiento, el agua subterránea tiene otras ventajas sobre el agua superficial. Un depósito superficial generalmente debe ser embalsado en algún momento, en algún lugar, aún cuando su capacidad total no sea necesaria por varios años. El agua subterránea puede a menudo extraerse donde y cuando se necesita por medio de pozos que se perforan y construyen en los lugares deseados. Los depósitos de agua superficial que ocupan áreas amplias, frecuentemente de gran valor para la agricultura, la presencia y utilización del agua subterránea no presenta conflictos por el uso del suelo bajo el cual se encuentra localizada en las profundidades debajo del suelo, no queda a la vista, está resguardada de los cambios de temperatura y protegida de la evaporación que un verano caliente puede causar pérdidas sustanciales de agua en presas y lagos. Debido a la profundidad a la que se encuentra el agua subterránea, es menos vulnerable a la contaminación, que es un riesgo potencial del agua en la superficie. Aunque sería ingenuo imaginar que el agua subterránea es inmune a la contaminación, la cubierta natural del suelo y roca le proporciona una protección considerable.

Sí el agua subterránea tiene tales ventajas, abundancia, disponibilidad en climas áridos, y relativamente salvo de la contaminación, uno podría preguntarse por que no se le usa exclusivamente, o por qué sacrificar gran cantidad de terrenos en áreas de belleza extraordinaria como sitios para los embalses de las presas. ¿Será que hay algunas desventajas? Sí las hay.

1.4 Desventajas del Agua subterránea

La desventaja del agua subterránea es que no está distribuida uniformemente en la corteza terrestre. Existen grandes áreas en el mundo en donde el agua subterránea no puede ser obtenida en cantidades suficientes para justificar el gasto de perforar, construir norias y pozos. A primera vista, esto parecería contradecir lo que se señaló anteriormente: que casi todas las rocas contienen poros, y que más allá de cierta profundidad, los poros están llenos de agua

subterránea. Como las rocas están ampliamente distribuida, sería razonable concluir que el agua subterránea está disponible en cualquier lugar. Parece razonable, pero es incorrecto. Tres aspectos importantes complican el problema:

1. El primero es hasta qué punto las rocas son porosas. Si sólo contienen unos cuantos espacios pequeños, entonces la cantidad de agua contenida en un volumen dado de roca será muy seca. Para poder hacer comparaciones cuantitativas entre diferentes tipos de roca, se define porosidad como la relación que se expresa usualmente como un porcentaje y, por lo tanto, se hace referencia a rocas con 20 o 30 % de porosidad, lo que significa que los espacios ocupan respectivamente 20 o 30 % del volumen total de la roca. En notación algebraica,

$$n = \frac{V_p}{V_b} \quad (1.1)$$

lo que se puede expresar como:

$$n = \frac{V_p}{V_b} \times 100 \%$$

donde n =porosidad, V_p = volumen de espacios, V_b = volumen de roca.

2. La combinación del tamaño de los poros y el grado en que los poros están intercomunicados, por que esta combinación controlará la facilidad con que el agua fluirá a través de la roca. A esta propiedad se le llama **permeabilidad**. A los materiales que permiten pasar fácilmente el agua a través de ellos se les llama **permeables**; aquellos que permiten pasar el agua con dificultad o que no permiten el paso del agua se denominan **impermeables**. Una roca puede ser porosa pero relativamente impermeable, ya sea por que los poros no están comunicados o porque son tan pequeños que el agua apenas puede pasar a través de ellos con dificultad. Por el contrario, una roca no tiene espacios, excepto una o dos aberturas, tendrá una porosidad baja y almacenará agua en cantidades muy limitadas, pero como el agua puede pasar fácilmente por las fracturas, su permeabilidad será alta. A las capas de rocas o material no consolidado, lo suficientemente porosas para almacenar aguas, y con la permeabilidad necesaria para permitir que el agua fluya a través de ellas en cantidades económicas y de calidad deseable, se les denomina **acuíferos**.

A grandes profundidades, aproximadamente 10 Km. por debajo de la superficie terrestre, se cree que las rocas están tan comprimidas y alteradas como resultado de su profundo

entierro que se han cerrado los espacios. Sí se conociera la porosidad de los diversos tipos de formación rocosa que conforman la corteza terrestre, y la profundidad hasta las que son porosas, se podría hacer una estimación con cierta exactitud del volumen de agua subterránea en el planeta. Como no conocemos los valores de estos parámetros, los cálculos son muy imprecisos. Básicamente, lo que se hace es multiplicar el área total de los continentes (149 millones de km^2) por la profundidad a la que se espera que existan rocas porosas. Esto da como resultado el volumen de la roca que es factible que contenga agua. Luego se multiplica este volumen por el valor de la porosidad (expresado como fracción), lo cual da el valor del agua almacenada. Este valor se puede depurar excluyendo áreas como la Antártica, donde las rocas están cubiertas por un gran espesor de hielo, y otras áreas donde es posible que el agua subterránea esté congelada y, en consecuencia, no disponible.

Una de las primeras personas que intentaron realizar este cálculo con cierta precisión fue Raymond Nace, del Servicio Geológico de Estados Unidos. Excluyendo la Antártida y las zonas permanentemente congeladas, estimó un volumen almacenado de agua dulce subterránea de 7 millones de km^3 ; esta estimación se basó en la suposición de una porosidad promedio de 5% a una profundidad de 1.000 m. Raymond Nace reconoce que existe la probabilidad de que al menos exista ese volumen de agua por debajo de los 1000 m., y concluye, probablemente en forma correcta, que mucha de esta agua es salada. Sus cálculos excluyen el agua retenida en los poros de materiales como las arcillas y lutitas; estos materiales son porosos pero no permeables, por lo que el agua que contienen no es un recurso disponible.

Es posible que en algunas áreas existan materiales de baja permeabilidad (como las arcillas y las lutitas) cerca de la superficie del suelo, o que el suelo mismo esté compuesto por estos materiales. Ninguno de ellos es totalmente impermeable, pero si se encuentra en la superficie restringirán la cantidad de lluvia que puede humedecer el suelo. De manera similar, si una de estas capas relativamente impermeables está presente por abajo de un acuífero, restringirá el movimiento de agua por debajo del acuífero. Si parte del acuífero está cubierto por una de estas capas (como en el caso de la figura 1.12), el movimiento del agua en el acuífero se restringe tanto que el agua subterránea en el acuífero queda

confinado bajo presión. En la figura 1.12, por ejemplo, el agua de lluvia puede entrar al acuífero entre X y Y; como resultado de esta entrada de agua, el espacio de almacenamiento del acuífero se llena y produce el nivel freático que se conserva en la figura 1.12. El nivel freático debe estar arriba de la posición X, puesto que este punto es el único donde el agua puede fluir del acuífero. Hacia la derecha de Z, el agua subterránea está confinada entre capas impermeables.

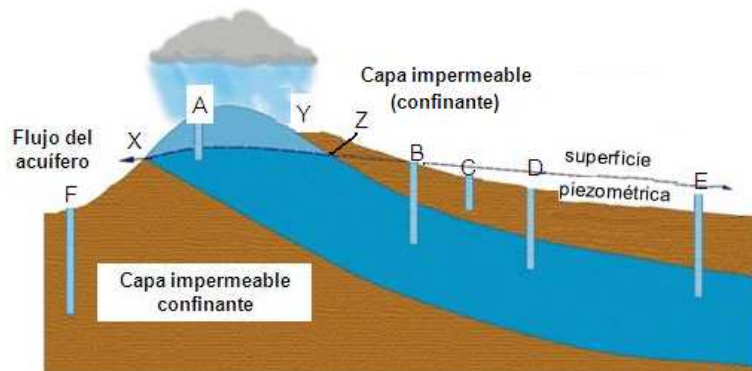


Figura 1.12: Acuífero confinado y su presión piezométrica

Las capas de baja permeabilidad se denominan **capas confinadas** o **estrato confinante**; al acuífero se le llama **Acuífero Confinado**. Sin embargo, es importante señalar que el agua subterránea entre X y Y se encuentra en un **Acuífero libre**. A la derecha de Z, donde el acuífero es confinado, no existe nivel freático ni zona no saturada: todo el espesor del material permeable se encuentra saturado. Si se construye un pozo o una noria en la capa confinante superior (por ejemplo, el pozo C en la figura 1.12), no se encontrará agua subterránea (excepto cantidades pequeñas provenientes del material “impermeable”). Sí el pozo es lo suficientemente profundo para llegar al acuífero (como en B y D en la figura 1.12), el agua subirá en el pozo porque el acuífero está bajo presión. El nivel al que llegará el agua en el pozo define una superficie imaginaria cuya altura arriba del acuífero depende de la presión en éste; a esta superficie se le llama **superficie piezométrica**. En algunas ocasiones la superficie piezométrica puede ascender por arriba del nivel del

suelo, en cuyo caso el pozo (E en la figura 1.12) rebosará. Los casos de acuíferos libres y confinados se tratarán con más detalle más adelante; por el momento, sólo se han señalado algunos aspectos de la influencia de la permeabilidad en la disponibilidad del agua subterránea.

3. El tercer elemento que determina la cantidad de agua subterránea disponible en los materiales geológicos de un sitio es el factor de reposición: el grado en que el agua extraída del acuífero es renovada. La reposición puede provenir de arriba, de la lluvia que humedece el suelo, o bien de los lados o de abajo de acuíferos adyacentes que transmiten el agua a otros lugares. El funcionalismo del agua subterránea se torna un reto fundamental. El factor de reposición depende no solo de la naturaleza de las rocas o materiales geológicos sino también del suelo y la vegetación que los cubre, así como del clima de la región. Es una parte del **balance del agua** de un área: el equilibrio entre el agua que entra en el área que es usada o aquella que sale del área. Conocer con exactitud el balance de agua en una región es tan vital como conocer la porosidad de las unidades geológicas involucradas. Esto se debe a que el agua subterránea no se encuentra aislada de otras aguas, sino que es parte de la totalidad del agua del planeta.

1.5 Tipos de acuíferos

Una definición más formal indica que un **acuífero** es una formación geológica, grupo de formaciones o parte de una formación que contiene material saturado y suficientemente permeable para proveer de cantidades significativas de agua a pozos y manantiales. En el caso de un **acuífero libre** queda implícito que el término incluye también la parte no saturada del material permeable, es decir tanto la parte por arriba del nivel freático como por la parte saturada.

No todos los acuíferos presentan las mismas condiciones ni las mismas características. De acuerdo al movimiento del agua los acuíferos pueden ser: **Isótropos** si el agua que circula mantiene las mismas propiedades en todas direcciones, es decir, este material carente de estratificación presenta una permeabilidad uniforme tanto para el flujo de agua horizontal como

vertical; y **Anisótropo** si sus propiedades para la circulación del agua varían según la dirección del flujo subterráneo, es decir, el flujo vertical y horizontal no suceden con la misma velocidad, esto sucede cuando el acuífero comprende estratos con permeabilidad diferente.

Acuífero Colgados: En ocasiones se presentan por debajo del nivel freático una o más capas de material de baja conductividad hidráulica. El agua que se infiltra es detenida por esta capa para formar una lente de agua, la cual es generalmente de extensión limitada y se encuentra sobre la zona de saturación del acuífero principal (figura 1.13). A este tipo de cuerpo se le llama **acuífero colgado** (y a su límite superior, **nivel freático colgado**) debido a que el agua subterránea en el lente está colgada por arriba de la zona saturada. Los acuíferos colgados son más comunes de lo que en ocasiones se piensa; aunque a veces miden unos cuantos centímetros de espesor, o sólo se presentan después de una gran infiltración, en otros casos puede tener varios metros de grosor y extenderse por distancias considerables. Los acuíferos colgados no constituyen fuentes de abastecimiento confiable para largos períodos; a menudo sucede que la perforación de estos acuíferos, o la profundidad de los pozos, traspasa la capa de baja permeabilidad subyacente y ocasiona que el agua se escape al drenar por esa vía.

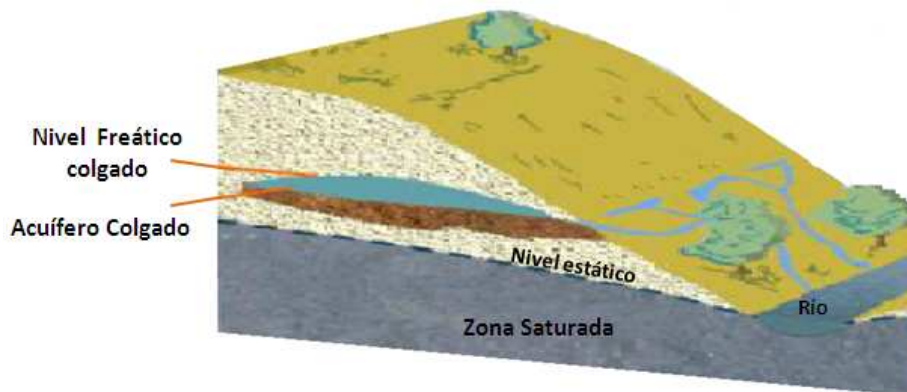


Figura 1.13: Los **acuíferos colgados** son resultado de la presencia de material de baja permeabilidad

Acuíferos Confinados: En un **acuífero no confinado o libre**, la parte superior de la zona no saturada, (nivel freático) está a la presión atmosférica. A cualquier profundidad por debajo

del nivel freático, la presión es más grande que la atmosférica, y en cualquier punto arriba de este nivel la presión es menor que la atmosférica (figura 1.14).

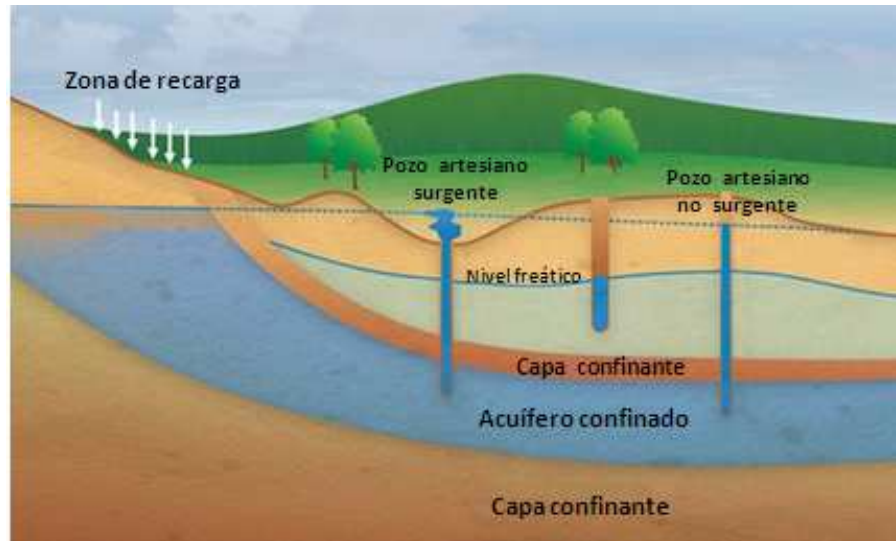


Figura 1.14: Acuífero Confinado

En un **acuífero confinado**, el espesor efectivo del acuífero se encuentra entre dos capas de baja permeabilidad, y en cualquier lugar la presión es mayor que la atmosférica. Si se perfora un pozo a través de la capa confinante superior, el agua ascenderá por el pozo hasta que la columna de agua sea lo suficientemente grande para contrarrestar la presión del acuífero. Si imaginamos muchos pozos perforados en ese acuífero, con sus niveles unidos por una superficie imaginaria, esa superficie mostrará la dimensión de la carga en esos puntos del acuífero. El nivel freático es una **superficie potenciométrica**, puesto que la carga puede variar con la profundidad de un acuífero como resultado de flujo vertical ascendente o descendente, cada nivel del acuífero podrá tener su propia superficie potenciométrica.

En ocasiones a los acuíferos confinados se les llama **acuíferos artesianos**. El término artesianos se aplicó originalmente a los pozos que penetraban acuíferos en los que la superficie

potenciométrica se encontraba por arriba del nivel del terreno, de manera que al construirse el pozo éste rebosa o producía agua sin necesidad de bombear.

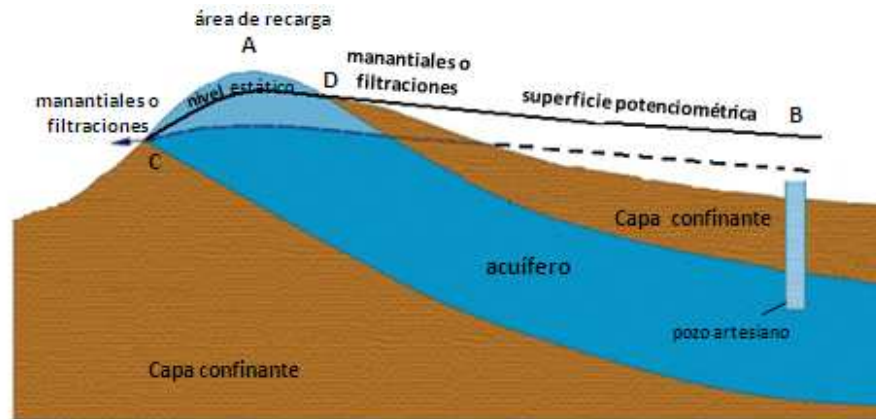


Figura 1.15: Explicación clásica de un pozo artesiano

La explicación clásica de un pozo artesiano es la que se muestra en la figura 1.15, este tipo de corte transversal es común para explicar el efecto en términos simples que “el agua encuentra su propio nivel”. Al precipitarse el agua de lluvia sobre el afloramiento del acuífero en A (**área de recarga**) percola a través del acuífero hacia el pozo en el sitio B. Debido a la diferencia de elevación entre A y B, la superficie potenciométrica en B se encuentra por arriba del nivel del terreno. La lluvia mantiene al acuífero “lleno”, y el exceso de agua se descarga por los manantiales de los puntos C y D. Si se construyeran muchos pozos en el área del punto B, la descarga podrá exceder la cantidad de flujo de reposición hacia esta área. Entonces, la superficie potenciométrica bajaría (línea punteada), los manantiales en D dejarían de fluir y los pozos ya no producirían agua en forma natural. Si los pozos se bombardean, la superficie potenciométrica se abatiría más por debajo del techo del acuífero, por lo que éste dejaría de ser confinado.

La explicación clásica de los acuíferos confinados y pozos brotantes (figura 1.15) es razonablemente exacta, pero está incompleta. Trata al acuífero como un conducto de flujo, que

transmite el agua del área de recarga a los pozos que la extraen. Este concepto ignora el almacenamiento en el acuífero, así como que el acuífero tiene áreas de recarga y descarga que están topográficamente controladas. El flujo de los acuíferos artesianos es, de muchas maneras, un ejemplo extremo de los efectos de “zona de descarga” que se observan en los acuíferos libres.

Intrusión Salina

La intrusión salina es el proceso por el cual los acuíferos costeros están conectados con el agua del mar. Esto supone que el agua salada (procedente del mar) fluye hacia el subsuelo continental mezclándose con las reservas de agua dulce. En las zonas costeras la intrusión de agua de mar puede ocurrir en forma natural o bien inducida por la explotación inadecuada de los acuíferos. Si las extracciones de agua superan la recarga, o los pozos se construyen muy cerca de la playa, el equilibrio agua dulce - agua salada se rompe, la interfase se desplaza, y el agua salada penetra en zonas en las que sólo había agua dulce hasta entonces. Cuando pasa esto no sólo se ve amenazado el suministro de agua para la población, sino que también se producen daños en los ecosistemas que dependían de la descarga de agua de estos acuíferos.

1.6 Ley de Darcy

Cuando se estudia el flujo del agua o de cualquier otro líquido a través de una unidad acuífera, se utiliza una ley denominada **Ley de Darcy**, fue ideada hace más de cien años por un francés. Henry Darcy (1803 - 1858) nació en la ciudad de Dijon y estudió ingeniería. En esos tiempos, la ciudad de Dijon tenía problemas por la falta de una fuente de agua para abastecimiento de la población. Por lo que inmediatamente después de graduarse Darcy comenzó a trabajar en un proyecto para resolver dicho problema. Diseñó un sistema para captar agua de una gran fuente que se encontraba a más de 10 Km. de distancia de Dijon, entubar el agua hacia la ciudad y distribuirla hacia algunas tomas públicas. Ésta fue la primera vez que la ciudad de Dijon tuvo un abastecimiento de agua seguro.

Esta acción práctica por sí sola es un logro muy importante, pero Darcy fue más lejos. En París llevó a cabo un gran trabajo científico relacionado con problemas de distribución de agua,

que incluyó estudios de flujo en tuberías y la medición del flujo de agua. En 1856 se publicó un informe de su trabajo en Dijon, y muchos de sus descubrimientos experimentales, con el título de *Les fontaines publiques de la ville de Dijon* (El abastecimiento público de agua de la ciudad de Dijon). En uno de los capítulos, Darcy relata las acciones utilizadas para clarificar agua por medio de filtros de arena. Fue precisamente durante el desarrollo de este trabajo que Darcy propuso la relación que lleva su nombre.

Si quisiéramos probar dicha relación, sería necesario utilizar un dispositivo como el que se muestra en la figura 1.16 donde se presenta un cilindro con un área de la sección transversal A , lleno de arena que se mantiene entre dos cedazos colocados en los extremos del tubo. El agua fluye por el cilindro a un caudal constante Q , registrado, por ejemplo, en litros por día. También se utilizan manómetros en los puntos X y Y, separados por una distancia l , para medir la carga del agua con respecto a un nivel horizontal de referencia; la diferencia entre las dos cargas es la pérdida de carga h_L .

Si el caudal Q se duplica, entonces se observará en el dispositivo que h_L también se duplica, es decir, es necesario utilizar el doble de energía para lograr que el agua fluya por la tubería con el doble de velocidad. Si el caudal Q disminuye a la mitad, entonces h_L decrece a la mitad, de donde se deduce que el volumen de flujo por unidad de tiempo es directamente proporcional a la pérdida de carga, es decir:

$$Q \propto h_L$$

Supóngase que variamos la longitud de la columna de arena, pero mantenemos la misma pérdida de carga entre los extremos. Se encontrará que, en la medida que l se incrementa, Q disminuye y viceversa, en estricta proporción. Si l es el doble, entonces Q es la mitad, de acuerdo con la siguiente relación:

$$Q \propto \frac{1}{l}$$

Al combinar las dos relaciones anteriores se tiene que:

$$Q \propto \frac{h_L}{l}$$

El término $\frac{h_L}{l}$ se definió cuando se comentó acerca de la figura 1.9, y se le llamó gradiente

hidráulico. Por lo tanto, la velocidad del flujo a través de la arena es proporcional al gradiente hidráulico.

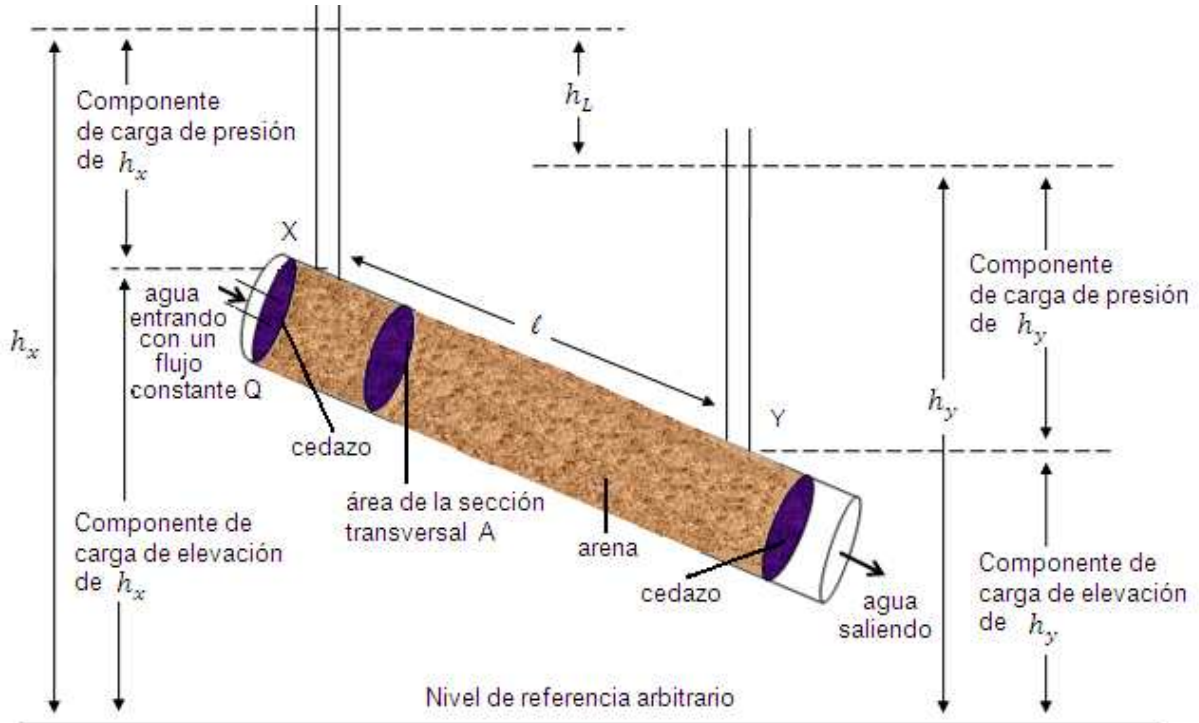


Figura 1.16: **Verificación experimental de la ley de Darcy.** El volumen de flujo por unidad de tiempo Q es proporcional a la sección transversal A y a la pérdida de carga h_L , e inversamente proporcional a la longitud l , es decir, es proporcional a A y al gradiente hidráulico $\frac{h_L}{l}$. La pérdida de carga h_L es la diferencia de carga entre los manómetros X e Y, que están separados a una distancia l (l se mide a lo largo de la dirección de flujo). La carga h_x en el punto X consta de un componente de carga de elevación y otra componente de carga de presión; lo mismo sucede con h_y en Y. Obsérvese que en este ejemplo el agua fluye de la región de menor presión a la de mayor presión.

Si se pone un cilindro adicional a un lado del primero, lleno con el mismo tipo de arena y con el flujo escurriendo en la misma forma, entonces circulará en total el doble del flujo a través

del doble de la sección transversal. Entonces, al igual que Darcy lo pensó, es razonable suponer sin la necesidad de realizar físicamente el experimento que:

$$Q \propto A$$

En resumen, considerando las relaciones anteriores se llega a:

$$Q \propto KA \frac{h_L}{l}$$

que es lo mismo que

$$Q = KA \frac{h_L}{l} \quad (1.2)$$

donde K es una constante de proporcionalidad.

Cuando se realiza el experimento, es posible medir Q , A , h_L y l , por lo que es posible calcular el valor de K . Si hacemos esta operación y posteriormente vaciamos la arena del cilindro, la reemplazamos con una arena más fina, repetimos el experimento y calculamos nuevamente el valor de K , entonces detectaremos (como Darcy lo hizo) que el nuevo valor de K es menor que el primero. Si utilizamos una arena más gruesa, entonces K será mayor. K es la permeabilidad, o, en forma más estricta, la **conductividad hidráulica** de la arena; una arena gruesa es más permeable que una arena fina, porque los espacios entre las partículas de la arena gruesa son también mayores, lo que permite que el agua se desplace fácilmente.

La ecuación 1.2 representa la ley de Darcy, que expresada en términos simples establece que un fluido pasa a través de un medio poroso a una velocidad proporcional al producto del área de la sección transversal por la cual el flujo circula, el gradiente hidráulico y la conductividad hidráulica.

Si el experimento se repite con un cilindro lleno de arena, pero utilizando miel en lugar de agua, es lógico esperar que manteniendo iguales condiciones, el flujo sea mucho menor que cuando se utiliza agua. Esto significa que, puesto que los parámetros no se modificaron, el valor de K calculado con la ecuación de Darcy será menor. De este modo, se deduce que la conductividad hidráulica depende no sólo del material poroso, sino también del fluido que llena los espacios porosos y que pasa a través de ellos, un hecho que Darcy probablemente comprendió, puesto que describió K como “dependiente de la permeabilidad de la arena”

La viscosidad cinemática es la propiedad del fluido que afecta la conductividad hidráulica; en la mayoría de las ocasiones se representa por la letra griega ν . A medida que la viscosidad cinemática del fluido en un medio poroso se incrementa, la conductividad hidráulica disminuye. La velocidad cinemática del agua disminuye conforme se incrementa la temperatura.

Es posible demostrar la ley de Darcy en un laboratorio, pero una derivación matemática a partir de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos es otra cosa. Marion King Hubbert (1903 – 1989), un geólogo estadounidense realizó investigaciones relacionadas con el movimiento del agua subterránea y la migración del petróleo, fue tal vez la primera persona que trató de realizar dicha derivación con cierto éxito (en 1956, para conmemorar el centenario de la publicación de Darcy). A pesar de los intentos de Hubbert y otros, la ley de Darcy permanece como una ley empírica, cuya validez descansa en evidencia experimental.

1.6.1 Conductividad hidráulica y permeabilidad intrínseca

Debido a que la viscosidad del agua subterránea (que depende principalmente de la temperatura y de la materia disuelta) no varía en gran medida entre un acuífero y otro, es muy útil el concepto de conductividad hidráulica. Cuando se analiza el agua que se encuentra a grandes profundidades, donde normalmente es caliente y salina, o en rocas que contienen fluidos diferentes del agua, es necesario separar las propiedades de la roca de las propiedades del fluido. Por esta razón se creó el concepto de **permeabilidad intrínseca** (k). La relación entre la conductividad hidráulica y la permeabilidad intrínseca es:

$$k = \frac{K\nu}{g} = \frac{K\mu}{\delta g}$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido, μ la viscosidad dinámica, δ la densidad y g la aceleración gravitacional. De este modo, k tiene unidades de área. Diferentes unidades como cm^2 o mm^2 son factibles, también se utiliza la unidad denominada **darcy** (en plural darcys), que se define como la permeabilidad que permite el flujo de 1 ml por segundo de fluido de 1 centipoise² que satura completamente el medio poroso, a través de un área de sección transversal de $1cm^2$ bajo un gradiente de 1 atm/cm.³

²Unidad de medida de la viscosidad

³Unidad de presión denominada atmósfera (atm)

Cuando se utiliza el término “permeabilidad”, estrictamente se refiere a k , no a K . Pero en la práctica hidrogeológica, generalmente la variación de viscosidad es muy pequeña, por lo que la distinción tiene importancia mínima, excepto en casos de agua con contraste de temperatura. Cuando se dice que una unidad acuífera es más permeable que otra, se supone que ambas contienen agua subterránea con características similares, y no que una está saturada con agua y la otra con miel, por ejemplo.

1.7 Aplicaciones de la Ley de Darcy

¿Cómo se utiliza la ley de Darcy? De muchas maneras: una de las más frecuentes es el cálculo del flujo natural a través de un acuífero. Imaginando una franja de acuífero (figura 1.17) donde la dirección de flujo es del pozo X hacia el pozo Y. La conductividad hidráulica es K m/día. ¿Cuál es la cantidad de agua que fluye en un día?

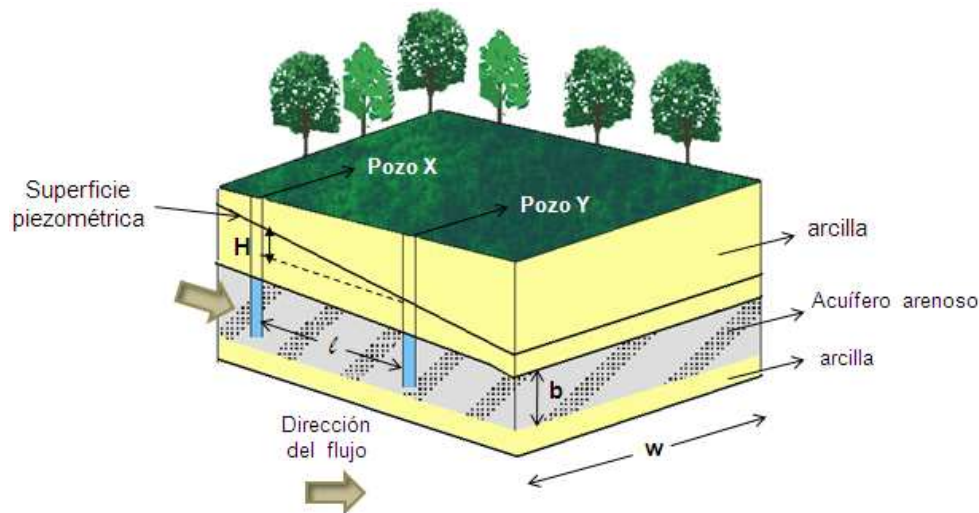


Figura 1.17: **Flujo a través de acuíferos.** En un acuífero confinado el espesor saturado b es constante. El flujo Q a través del acuífero es (con base en la ley de Darcy) igual a $KbwH/l$.

El área de la sección transversal A es simplemente bw . Si el flujo es tan lento que la energía cinética del agua es insignificante, el gradiente hidráulico puede calcularse a partir de las

diferencias de los niveles de agua en los pozos, que en este caso son equivalentes a manómetros. La diferencia es H , por lo que el gradiente hidráulico es $\frac{H}{l}$, que en este caso es la pendiente de la superficie piezométrica.

A partir de la ley de Darcy, el flujo Q está regido por

$$Q = KAH = \frac{KbwH}{l}$$

Obviamente, la efectividad de una unidad geológica como acuífero depende no sólo de la conductividad hidráulica sino de su área de sección transversal perpendicular a la dirección de flujo es decir, de su espesor b y ancho w . En particular, para hacer llegar el agua a un pozo, lo importante es el producto de la conductividad hidráulica K por el espesor productivo b . A este producto Kb se le llama **transmisividad** y suele representarse con la letra T . Para el caso que se presenta en la figura 1.17, la ley de Darcy puede ser escrita de la siguiente manera:

$$Q = \frac{TwH}{l}$$

La transmisividad tiene las unidades de la conductividad hidráulica multiplicadas por el espesor, por lo que comúnmente se expresa en $(m^3/d)/m$, que se reduce a m^2/d . Algunas veces el gradiente hidráulico $\frac{H}{l}$ puede escribirse como I , por lo que la ley de Darcy también se expresa como

$$Q = KAI \quad \text{o} \quad Q = TIw$$

En el caso de un acuífero libre (figura 1.18a), la pendiente del nivel freático es una medida del gradiente hidráulico. La ley de Darcy es válida, pero el flujo estrictamente horizontal únicamente tiene lugar a través de la porción saturada del acuífero. En este caso, la transmisividad es el producto de la conductividad hidráulica K y b , donde b es el espesor saturado del acuífero. Una complicación es que b no es constante debido a que el gradiente hidráulico tiene cierta pendiente; en casos como este, antes de aplicar la ley de Darcy es necesario utilizar un procedimiento para el cálculo del espesor saturado promedio, o bien aplicar la ley de Darcy a “rebanadas” sucesivas de acuífero, que serán perpendiculares a la dirección del flujo.

Por otra parte, como el nivel freático tiene cierta pendiente, el flujo no es estrictamente horizontal. Como se observa en la figura 1.18b, debe existir una componente vertical del flujo subterráneo en la porción superior de la zona saturada del acuífero, lo que significa que existe un gradiente vertical además del horizontal.

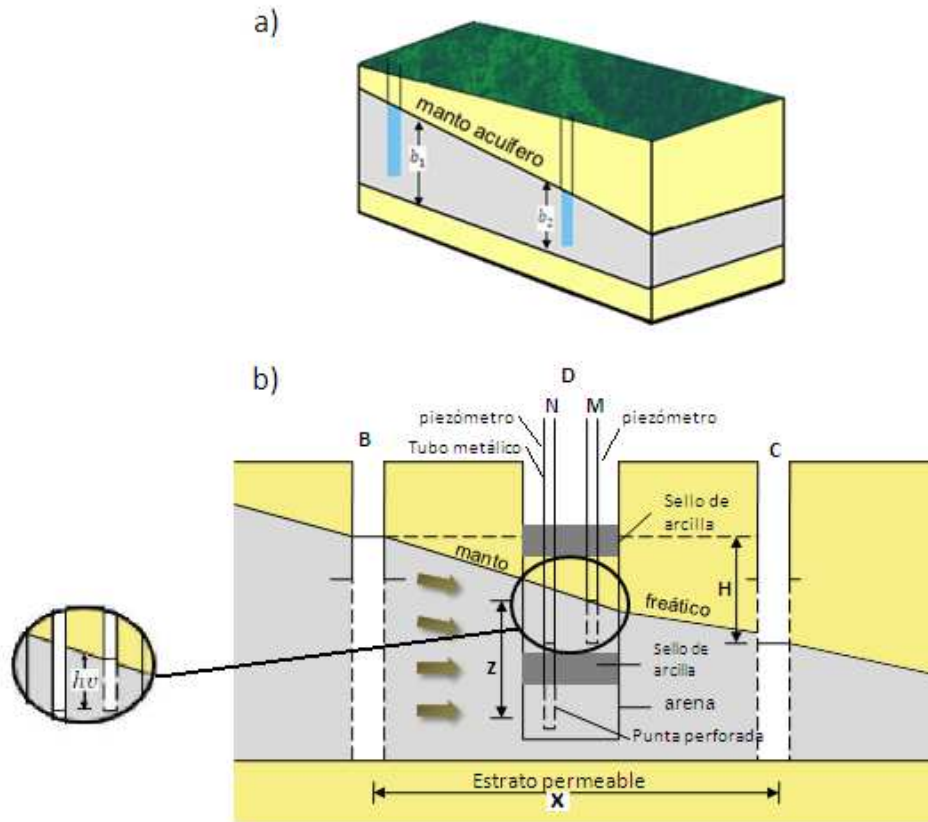


Figura 1.18: a) En un acuífero libre el nivel freático tiene cierta pendiente, lo que origina un cambio en el espesor saturado y , por lo tanto, en el área por donde el flujo pasa. b) Cuando existe flujo en un acuífero libre, el nivel freático debe presentar cierto declive. Debido a esta inclinación existe una componente vertical de flujo en la porción superior de la zona saturada, lo que significa que existe un gradiente hidráulico vertical además del gradiente hidráulico horizontal. El gradiente hidráulico vertical puede medirse comparando los niveles de agua en los piezómetros M y N, que están abiertos a sólo una pequeña porción de acuífero; la diferencia de cargas en los piezómetros es h_v , por lo que en este caso el gradiente hidráulico vertical es h_v/z en donde z es la separación vertical entre las puntas de los piezómetros. El gradiente hidráulico horizontal puede averiguarse comparando los niveles de agua en B y C, y es igual a H/x .

Si se observa el nivel del agua (que es una medida de la carga hidráulica) en los pozos B y C, se encontrará una diferencia de H, que permite calcular el gradiente hidráulico horizontal entre B y C. Si los pozos M y N se construyen en la misma posición horizontal D, pero abriéndose cada uno hacia el acuífero a una profundidad específica y distinta, se determinará que existe una diferencia en el nivel del agua de dicho pozo. A los pozos M y N, que están sellados casi en toda su longitud de tal modo que registran la carga a una profundidad en particular, se les denomina **pozos piezométricos**. La diferencia de carga h_v dividida por la distancia vertical (en este caso z) que hay entre los puntos en donde se registran las cargas hidráulicas, representan el gradiente hidráulico vertical en el punto D.

Debido a la presencia de gradientes hidráulicos verticales, el nivel del agua en pozos profundos puede no coincidir con el nivel freático. Si el flujo es hacia abajo, la carga decrecerá con la profundidad, por lo que el nivel del agua en un pozo profundo se ubicará por abajo del nivel freático. Si el flujo es hacia arriba, la carga hidráulica se incrementará con la profundidad, y el nivel del agua estará por arriba del nivel freático. La presencia de estratos de baja conductividad hidráulica tiende a exagerar estos gradientes verticales; muchos de los denominados pozos artesianos son un ejemplo extremo de la condición de flujo vertical ascendente, donde el nivel del agua en el pozo se ubica por arriba de la superficie del terreno natural.

La relación $T = Kb$ es perfectamente válida y clara para un acuífero homogéneo e isótropo. Sin embargo, la mayoría de los acuíferos del mundo real consisten en una combinación de estratos de diferentes conductividades hidráulica y espesor; en este caso, desde un punto de vista estricto, la transmisividad debe ser estimada calculando la contribución de cada estrato individual (su conductividad hidráulica individual por su espesor) y sumando todas las contribuciones individuales. La conductividad hidráulica “promedio” puede determinarse dividiendo la transmisividad total entre el espesor total. El problema se torna particularmente complicado en acuíferos cuyo flujo subterráneo pasa a través de fracturas, en donde la masa rocosa por sí misma tiene una conductividad hidráulica insignificante y casi todo el flujo tiene lugar por unas cuantas fisuras. En este caso, la idea de la conductividad hidráulica “promedio” tiene escaso valor, ya que fluctuará mucho de acuerdo con el espesor de la roca considerado.

1.7.1 Flujo a un pozo

Una de las aplicaciones más importantes de la ley de Darcy consiste en el análisis del flujo hacia un pozo. Considérese un pozo que atraviesa totalmente un acuífero confinado, homogéneo e isótropo de conductividad hidráulica K (figura 1.19a); a este tipo de pozo se le denomina **pozo totalmente penetrante**. Supóngase que la superficie piezométrica es originalmente horizontal, de tal modo que el agua subterránea se encuentra estática (una suposición poco probable, pero que facilita el análisis). Entonces, por medio de una bomba que se introduce en el pozo, se comienza a extraer agua a un caudal constante de $Q \text{ m}^3/d$.

La acción de la bomba al extraer agua del pozo ocasiona una reducción de la presión alrededor de su zona de admisión, lo que crea una diferencia de carga entre el agua del pozo y la del agua subterránea (figura 1.19b). El agua fluye del acuífero hacia el pozo para reponer la que ha sido extraída, por lo que una vez que entra es a su vez expulsada a la superficie de la bomba. Esta situación ocasiona que el agua fluya de una porción de acuífero cada vez más alejada del pozo, por lo que el bombeo produce una disminución de la superficie piezométrica que se extiende en forma concéntrica a partir del pozo. Finalmente, se puede llegar a una situación donde la superficie piezométrica se abate de manera estable y forma una pendiente suave hacia el pozo en toda la región analizada.

Cuando esta situación se presenta, parecería razonable esperar que el gradiente hidráulico (la pendiente de la superficie piezométrica) sea constante. Pero no es así. En realidad, la forma que toma la superficie piezométrica es como la de la figura 1.19c, donde el gradiente hidráulico se hace cada vez más pronunciado a medida que se aproxima al pozo. Para explicar esta situación considérese la figura 1.20. En este diagrama se dibujaron dos cilindros imaginarios coaxiales con el pozo. Debido a que el agua se extrae del pozo a una velocidad $Q \text{ m}^3/d$, ya que se ha logrado una condición de equilibrio, el gasto de $Q \text{ m}^3/d$ debe fluir a través de las superficies de ambos cilindros. El cilindro exterior tiene un radio r_2 , por lo que su circunferencia es de $2\pi r_2$ y el área de la superficie curva del cilindro (el área a través de la cual tiene lugar el flujo subterráneo) es $2\pi r_2 b$, en donde b es el espesor del acuífero. En forma similar, el cilindro interior de radio r_1 tiene una superficie curva de área $2\pi r_1 b$.

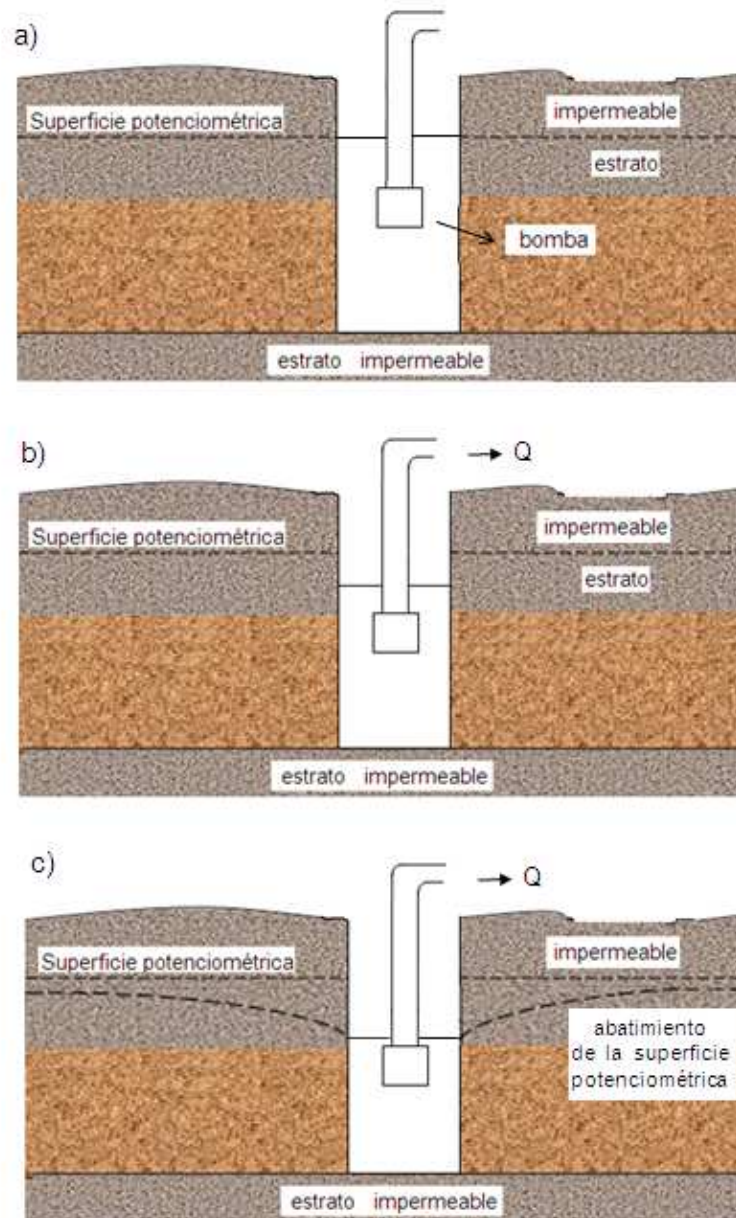


Figura 1.19: **El desarrollo de un cono de abatimiento** a) Si no existe flujo, la superficie potenciométrica inicial es horizontal. b) Si la bomba inicia la extracción de agua, la carga en el pozo disminuye. c) Esto hace que el agua fluya desde el acuífero hacia el pozo, lo cual produce el abatimiento de la superficie potenciométrica.

Con base en la ley de Darcy es posible proponer la siguiente relación:

$$Q = K2\pi r_1 b I_1 = K2\pi r_2 b I_2 \quad (1.3)$$

donde I_1 es el gradiente hidráulico en el radio r_1 e I_2 el gradiente hidráulico en el radio r_2 . La expresión $k2\pi b$ es una constante, por lo que como r_2 es mayor que r_1 , I_1 debe ser mayor que I_2 en una cantidad proporcional, para mantener la ecuación balanceada y que Q se mantenga invariable. De este modo, a medida que el agua se aproxima al pozo, el gradiente hidráulico se hace cada vez más pronunciado y ocasiona el característico abatimiento del nivel freático o superficie piezométrica denominado **cono de abatimiento**.

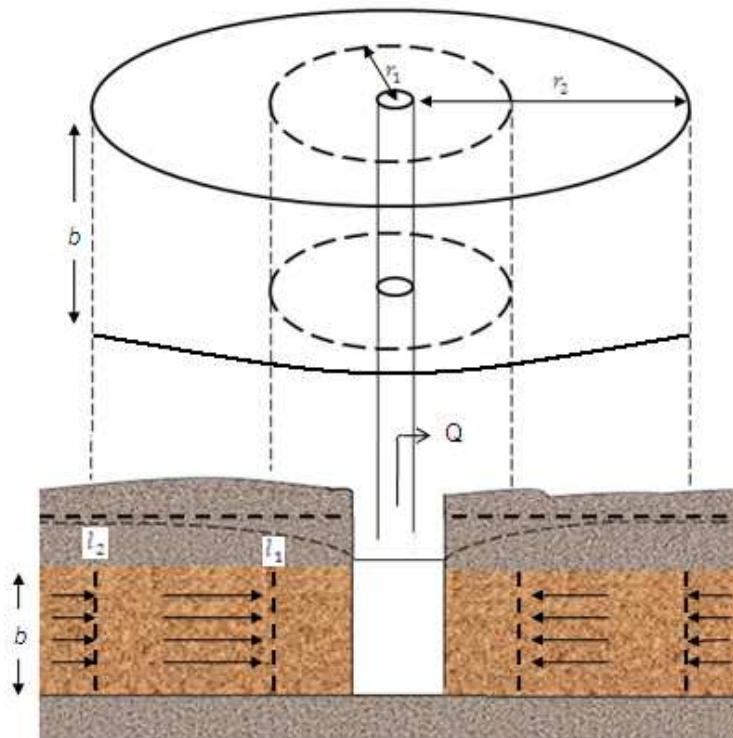


Figura 1.20: **Flujo a un pozo.** Cuando el agua fluye hacia un pozo, el mismo volumen de agua debe salir a través de áreas sucesivas cada vez más pequeñas. Para que esto ocurra, el gradiente hidráulico debe hacerse más pronunciado, lo que origina la forma característica de cono de abatimiento.

Puede haber también otras razones. Para que el mismo flujo pase en el mismo tiempo por una sección transversal menor, no sólo el gradiente hidráulico debe hacerse más pronunciado sino que la velocidad real de flujo debe incrementarse en forma paralela. En algunos casos, la velocidad puede aumentar a tal punto que la energía cinética, y por lo tanto la carga dinámica, se vuelve importante. Como se observó en la figura 1.10, el incremento en la energía cinética debe ser compensado por una disminución de la energía potencial y, por lo tanto, de la carga estática; por esta razón la superficie piezométrica, que es una medida de la carga estática, se abate.

En acuíferos libres se presenta otra complicación. Como el nivel freático desciende en el cono de abatimiento, el espesor saturado del acuífero, b , se reduce. El análisis de la ecuación 1.3 muestra que si se reduce b , debe incrementarse I para compensarlo. Pero si el gradiente hidráulico se hace más pronunciado, el nivel freático en el centro del cono de depresión se abate aún más, y b sigue disminuyendo, por lo que I debe incrementarse nuevamente. En este punto entran en juego componentes verticales de flujo y gradientes hidráulicos verticales. Estos efectos se refuerzan unos a otros, por lo que el análisis del comportamiento de los acuíferos libres es más complicado que el de los acuíferos confinados, donde el espesor saturado es constante.

Bajo la influencia de gradientes hidráulicos artificialmente creados alrededor del pozo, el agua subterránea percola a través del acuífero hasta que alcanza la vecindad del pozo. Aquí tiene un último obstáculo que salvar: tiene que cruzar la pared del pozo y, antes de viajar hacia arriba o abajo a la zona de admisión de la bomba, es necesario que se incorpore al espacio abierto del pozo propiamente dicho. Cuando alcanza la pared del pozo, el agua puede viajar a tal velocidad que tiene una considerable energía cinética. Cuando entra al pozo, gran parte de dicha energía cinética se disipará como turbulencia, ya que las moléculas de agua cambian de dirección cuando se dirigen hacia la bomba; este movimiento requiere que una parte de la energía potencial se convierta en energía cinética. Por otra parte, al entrar el agua al pozo, ésta tiene que atravesar la tubería ranurada, o una porción de acuífero cuya conductividad hidráulica inicial ha sido reducida por efectos de la perforación, por lo que la pérdida de carga en esta última porción del recorrido puede ser una fracción importante de la pérdida total.

Esta naturaleza bipartita de la pérdida de carga ocasiona el incremento de la pendiente del cono de abatimiento en la vecindad del pozo. El nivel del agua en el pozo durante el bombeo generalmente está más profundo que la superficie piezométrica abatida, justo fuera de la pared del pozo. La pérdida de carga total (la diferencia entre el nivel dinámico y el nivel estático o inicial previo al bombeo) se denomina **abatimiento**; a la parte del abatimiento que resulta del flujo del agua del agua a través del acuífero hacia el pozo se le denomina **pérdida de acuífero**, y la que se produce por el flujo hacia el pozo a través de la pared se le llama **pérdida de pozo**.

Estas pérdidas de carga son importantes porque, para elevar el agua hacia la superficie del terreno, la bomba debe dar cierta cantidad de energía al agua. A mayor abatimiento, más energía es necesaria. La energía no es gratuita; tiene que ser suministrada a la bomba en forma de electricidad o de combustible para el motor de la bomba. Por lo tanto, para ahorrar dinero es de primordial importancia que el pozo sea tan eficiente como sea posible; en otras palabras, que el abatimiento se mantenga al mínimo posible.

Una manera útil de evaluar el comportamiento de un pozo consiste en bombearlo a diferentes volúmenes de extracción y registrar el abatimiento en cada una de las etapas de bombeo. Los valores resultantes se colocan en una gráfica donde el caudal del pozo (l/s) se coloca en el eje de las abscisas y el abatimiento (m) en las ordenadas, con lo que se obtiene la denominada **curva de caudal - abatimiento**.

En un acuífero confinada, donde el nivel del agua durante el bombeo se mantiene por arriba del techo del acuífero (de tal modo que el espesor saturado y productor se mantiene constante), de acuerdo con la ley de Darcy que señala que el flujo es proporcional al gradiente hidráulico, la curva caudal-abatimiento debe ser en teoría una línea recta. En la práctica, la relación es un poco más curva (figura 1.21a). La complicación en este caso se deriva de que el agua puede fluir de dos maneras diferentes. En el **flujo laminar**, (tipo de movimiento de un fluido cuando éste es perfectamente ordenado, estratificado, suave, de manera que el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse si la corriente tiene lugar entre dos planos paralelos, o en capas cilíndricas coaxiales) las partículas del flujo se mueven suavemente en la misma dirección que la del volumen total del líquido.

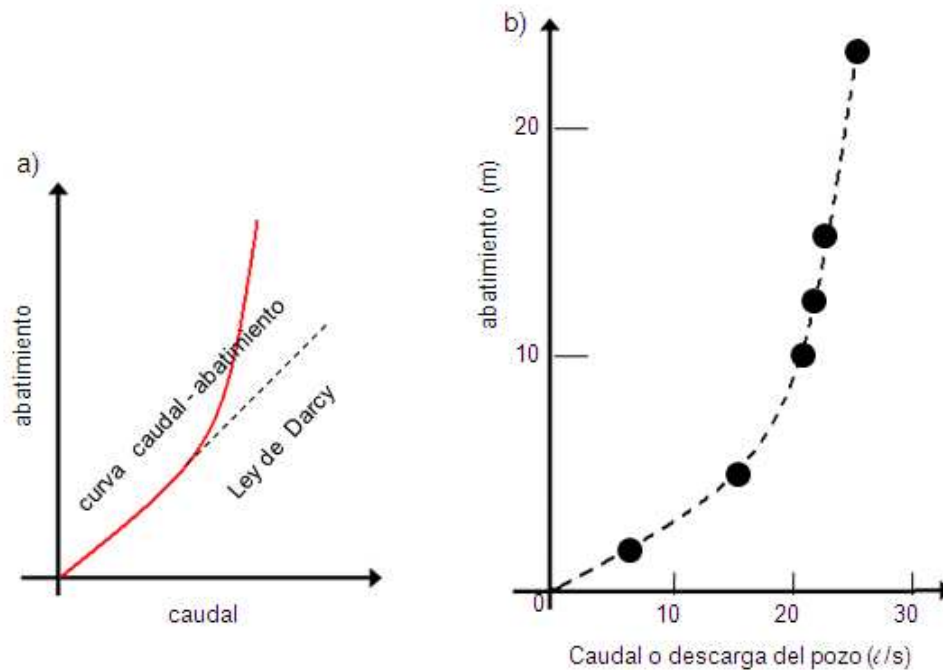


Figura 1.21: **Curva caudal - abatimiento.** a) Curva caudal - abatimiento teórica para un pozo en un acuífero confinado. Si el flujo a través del acuífero y hacia el pozo cumplen la ley de Darcy, se obtendría una línea real. Sin embargo, debido a que cierta energía adicional se disipa cuando el agua entra al pozo y se desplaza hacia arriba o hacia abajo hasta la bomba, el abatimiento es mayor que el predicho por la ley de Darcy, y la relación caudal - abatimiento se convierte en una curva. b) La pronunciada curva es el resultado de la disminución del espesor saturado (y por lo tanto de la productividad) del acuífero a medida que el abatimiento se incrementa

En este caso, las partículas de fluido están constituidas por pequeños “paquete”, de tamaño mayor que las moléculas, pero más pequeños que las aberturas a través de las cuales el flujo tiene lugar. En el otro tipo de flujo, denominado turbulento, el movimiento de las partículas cambia rápidamente en cualquier punto, tanto en dirección como en velocidad. En el flujo laminar las fuerzas viscosas son dominantes; en otras palabras, el flujo tiende a resistirse al movimiento que se produce entre sus partículas. En el flujo turbulento las fuerzas viscosas son rebasadas, por

lo que las partículas se mueven en todas direcciones sin ningún orden preestablecido. El flujo laminar por lo general se presenta cuando el flujo se desplaza lentamente a través de pequeñas aberturas o en láminas de pequeño espesor. Para expresar la importancia relativa de las fuerzas viscosas en cualquier condición de flujo, se utiliza el denominado número de Reynolds (símbolo N_R).

Se calcula con esta fórmula:

$$N_R = \frac{vL}{\nu}$$

donde v es la velocidad del flujo, L es una distancia característica (generalmente el ancho del lugar por donde el flujo pasa o el de algún obstáculo en la trayectoria del flujo) y ν es la viscosidad cinemática del fluido (todos estos parámetros deben presentarse en unidades consistentes, por lo que N_R es un número *adimensional* (es decir, es un número que no tiene unidades físicas que lo definan)).

La ley de Darcy es válida para flujo laminar únicamente, y puede ser errónea para velocidades de flujo que llegan al límite superior válido para el flujo laminar. Cuando se presentan velocidades elevadas, el flujo puede ser proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de cargas, es decir:

$$Q \propto \sqrt{h_L}$$

Aunque la ley de Darcy es aplicable a la mayoría de las condiciones de flujo subterráneo que se encuentran en la naturaleza, las elevadas velocidades de flujo que se presentan en la vecindad de los pozos durante el bombeo generalmente ocasionan pérdidas de carga que se incrementan de acuerdo con la relación señalada previamente. Esto significa que si la descarga del pozo Q se duplica, las pérdidas de carga en esta porción del trayecto del flujo subterráneo se incrementarán cuatro veces. Esto explica por qué la curva caudal - abatimiento de la figura 1.21a presenta un mayor incremento en el abatimiento que en el caudal de extracción del pozo. Además explica por que al diseñar un pozo debe hacerse todo lo que sea necesario para mantener la velocidad de entrada de agua al pozo tan baja como sea posible.

La figura 1.21b muestra un ejemplo real de una curva caudal - abatimiento de un pozo; el incremento de la pendiente es básicamente resultado de la disminución de la productividad a

medida que el nivel freático se abate en este acuífero libre, aunque se considera que la turbulencia y la presencia de flujos verticales también participan de manera importante.

1.7.2 Velocidad del agua subterránea en movimiento

Si conocemos la conductividad hidráulica, el espesor saturado del acuífero y el gradiente hidráulico, es posible utilizar la ley de Darcy para calcular la cantidad de agua que fluye a través del acuífero. Sin embargo, supongamos que no estamos interesados en conocer la velocidad de flujo, es decir, la cantidad de agua que fluye, si no en la velocidad de una molécula de agua o de una sustancia disuelta. Esta pregunta puede surgir, por ejemplo, cuando una sustancia potencialmente peligrosa ha ingresado al agua subterránea y viaja hacia un pozo de abastecimiento (figura 1.22). ¿Cuánto tiempo le tomará al contaminante llegar al pozo?

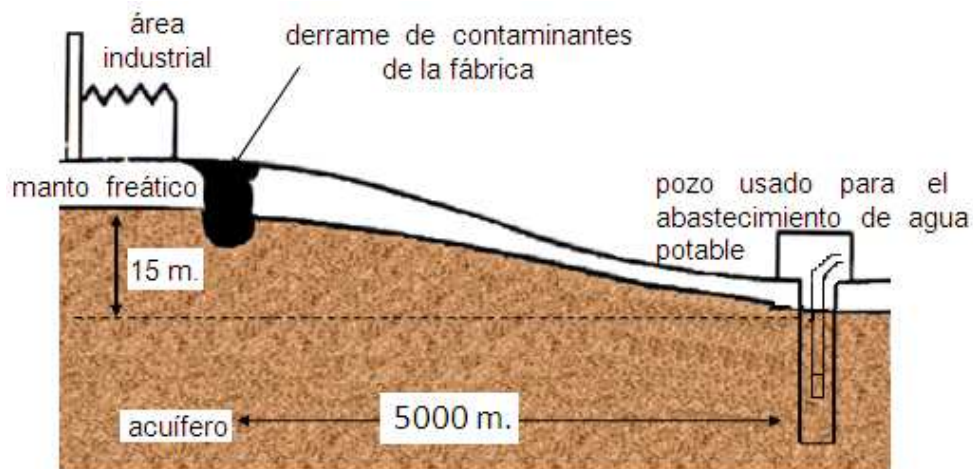


Figura 1.22: Flujo de un contaminante a un pozo

Cuando se analizó la diferencia entre los flujos laminar y turbulento en un acuífero se realizó el concepto de velocidad aparente, $\frac{Q}{A}$. A esta velocidad aparente por lo general se le conoce con el símbolo q y se le denomina **descarga específica**. A partir de la ley de Darcy, es posible escribir la siguiente relación:

$$q = KI$$

donde I es el gradiente hidráulico. Debido a que el gradiente hidráulico es adimensional, la descarga específica tiene las mismas unidades que la conductividad hidráulica K , $(m^3/d)m$, que se reducen a m/d . Aunque son las mismas unidades que la velocidad, q no corresponde a la velocidad real del agua subterránea. Esto es debido, a que A , el área de la sección transversal que se usa en el cálculo de q , es el área de la sección transversal de todo el acuífero analizado, en realidad, el agua se mueve sólo en una porción del acuífero: el espacio poroso.

Es posible observar en la figura 1.23a que para que el mismo volumen de flujo circule a través de un área de sección transversal menor, la velocidad del flujo debe incrementarse. Si la velocidad del flujo a través del área A_1 es q cuando la totalidad del área A_1 está disponible, entonces la velocidad del flujo a través de la sección reducida A_2 será v , en donde:

$$qA_2 = vA_1 = Q$$

En el ejemplo de la figura 1.23a, la relación $\frac{A_2}{A_1}$ es igual a la relación de volumen de los poros con respecto al volumen total, en otras palabras, es la misma que la porosidad. Por lo tanto

$$v = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{nA_1} = \frac{q}{n} \quad (1.4)$$

Desgraciadamente, en acuíferos del mundo real los poros no son tubos cilíndricos perfectos, sino que son de formas variables (figura 1.23b). Por otra parte, no todos los poros permiten el paso del flujo de agua subterránea; algunos están taponados en alguno de sus extremos. Finalmente, el agua no utilizará el ancho total de los poros, y siempre existirá una capa inmóvil (la capa límite) alrededor de las partículas de material. La consecuencia del tamaño variable de las aberturas significa que es necesario considerar una velocidad promedio: la velocidad que ocurriría en los poros, manteniendo la misma porosidad y conductividad hidráulica, si todos fueran del mismo tamaño. El efecto de los poros que no contribuyen al flujo de agua, así como el de la capa límite, es que la porosidad que es necesario utilizar en los cálculos de velocidad de flujo será menor que la obtenida cuando se utiliza la ecuación 4.22. El resultado de lo anterior es que la ecuación para el cálculo de la velocidad del agua subterránea se convierte en:

$$v_i = \frac{q}{n_d} = \frac{KI}{n_d} \quad (1.5)$$

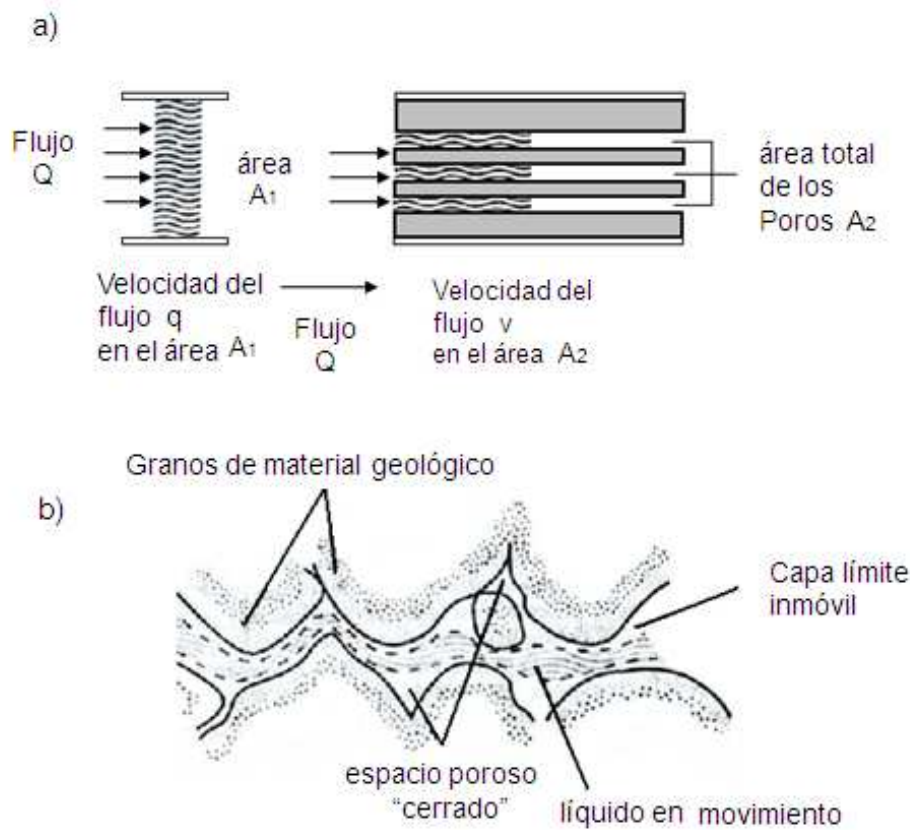


Figura 1.23: **Flujo a través de los poros** a) El agua que fluye a un volumen q por unidad de tiempo por la sección transversal unitaria a través de una tubería, tiene una velocidad de q unidades por unidad de tiempo, y viajará a una distancia qt en el tiempo t . Para que el mismo caudal específico, q , se presente a través de un medio poroso, la velocidad de flujo debe incrementarse a v , debido a que sólo una parte (el área de los poros) de la sección transversal está disponible para el flujo. b) En un medio poroso natural, únicamente una porción del espacio poroso contribuye al movimiento del agua.

en donde v_i es la velocidad promedio del movimiento del agua subterránea y n_d es la llamada **porosidad cinemática** o **porosidad dinámica**, aquella parte de la porosidad que tiene relación directa con el movimiento del agua subterránea. Aunque la determinación de n_d en campo o laboratorio no es fácil, el valor generalmente es muy cercano al del caudal específico,

por lo que éste puede utilizarse como una buena aproximación para n_d en la ecuación 1.5.

En el ejemplo de la figura 1.22 se observa que el nivel freático se abate $15m$. en una distancia de $5000m$. por lo que el gradiente hidráulico promedio, I , es $\frac{15}{5000}$ o $0,003$. Si se supone que el acuífero consiste en un área homogénea con una conductividad hidráulica de $5\frac{m}{d}$ y una porosidad dinámica de $0,15$ o 15% , a partir de la ecuación 1.5 se calcula v_i de la siguiente manera:

$$v_i = \frac{5 \times 0,003}{0,15} = 0,1m/dia \quad (1.6)$$

Esto significa que son necesarios más de 50000 días, o más de 135 años, para que una molécula de agua, y por lo tanto presuntamente un contaminante viaje desde el subsuelo de la zona industrial hasta el pozo de abastecimiento. Sin embargo, deben remarcarse algunos puntos.

1. Los cálculos no consideran el hecho de que el bombeo del pozo incrementará el gradiente hidráulico.
2. La suposición de que el contaminante se desplaza a la misma velocidad que el agua subterránea puede ser incorrecta. Los efectos de la difusión y adsorción en realidad pueden hacer que el contaminante se traslade a una velocidad menor que la del agua subterránea.
3. Si la porosidad dinámica es mayor, la velocidad del movimiento del agua será menor y viceversa.

Este último punto tiene mucha importancia cuando se analizan acuíferos con fracturas. Supóngase que el acuífero de la figura 1.22 es una caliza donde las fisuras contribuyen a la conductividad hidráulica y a la porosidad dinámica. La conductividad hidráulica promedio es de $5m/d$, pero la porosidad dinámica es de sólo $0,001$ o $0,1\%$. Si se utilizan estos valores en la ecuación 1.5, se tiene lo siguiente:

$$v_i = \frac{5 \times 0,003}{0,001} = 15m/dia \quad (1.7)$$

por lo que en este caso el agua se moverá desde la zona industrial hasta el pozo en menos de 1 año.

La diferencia en los tiempos de recorrido puede no ser importante. Si el contaminante finalmente llega al pozo y se produce una degradación de la calidad del agua extraída para el

abastecimiento, ¿qué importancia tiene entonces que el contaminante llegue en forma expedita o después de un largo tiempo? La respuesta depende hasta cierto punto de la naturaleza del contaminante. Algunos contaminantes pueden degradarse o descomponerse en subproductos menos peligrosos si permanecen en el acuífero durante mucho tiempo. En forma similar sólo algunos microorganismos peligrosos pueden vivir en el acuífero por más de un año. En el otro extremo, se tiene que un tiempo de viaje largo puede ocasionar que un contaminante permanezca encubierto en el acuífero por muchos años, y que quizá aparezca súbitamente en el pozo mucho tiempo después de que las condiciones que originaron la contaminación hayan cesado.

Cálculos de este tipo pueden utilizarse para definir **zonas de protección** alrededor de los pozos que se utilizan para abastecer poblaciones. Para proteger el abasto dentro de estas zonas, las actividades que pueden originar la contaminación del agua subterránea deben estar restringidas.

1.8 Calidad del Agua Subterránea

Debido a que el agua subterránea se mueve a través de las rocas y la tierra del subsuelo, puede fácilmente disolver sustancias durante este movimiento. Por dicha razón, el agua subterránea muy frecuentemente puede contener más sustancias que las halladas en el agua superficial. La contaminación del agua puede definirse como la modificación de las propiedades físicas, químicas o biológicas que restringen su uso. Las sustancias que modifican la calidad del agua de los acuíferos se dividen en:

1. Las presentes en la naturaleza y en aquellas producidas por las actividades del hombre (antropogénicas). Dentro de las primeras se encuentran: arsénico, flúor y elementos radiactivos, entre otros; mientras que en las segundas se incluyen bacterias, virus, nitratos, orgánicos sintéticos e hidrocarburos (solventes, pesticidas, etc.)
2. Materiales pesados. Las fuentes de contaminación se pueden originar en la superficie del terreno, por ejemplo, la agricultura; en el subsuelo por arriba del nivel freático, por ejemplo, basureros a cielo abierto; y en el subsuelo por debajo del nivel freático, como es el caso de pozos abandonados. Los acuíferos costeros pueden contaminarse por intrusión

salina y las fosas sépticas son, tal vez, las fuentes de aguas residuales que más contribuyen a la contaminación del agua subterránea.

1.9 Descarga de los acuíferos

Ahora es tiempo de analizar cómo es que el agua sale de un acuífero. Una forma es mediante la extracción de un pozo. Sin embargo, el agua ya entraba y salía de los acuíferos mucho tiempo antes que las personas comenzaran a perforar pozos, por lo que es necesario comprender cómo realiza la naturaleza esta parte del ciclo del agua.

El agua que abandona un acuífero en forma natural generalmente escurre en sistemas fluviales (aunque el agua de un acuífero costero puede descargar directamente al mar). El área de terreno natural que avana hacia un río se denomina **cuenca** del río o simplemente cuenca; la porción topográficamente elevada que separa dos cuencas se denomina **parteaguas**. Cuando el terreno natural es impermeable, la cuenca contribuye con escurrimiento superficial y escurrimiento subsuperficial; sin embargo, en cuencas donde existen materiales geológicos permeables, una porción del escurrimiento del río está compuesta por agua subterránea. En este caso, se considera que el río tiene una **cuenca superficial** y una **cuenca subterránea**; si el nivel freático es una réplica exacta de la topografía, los parteaguas de las cuencas coinciden, como en la figura 1.24a.

Esto sucede cuando los materiales geológicos son homogéneos e isótropos, aunque también puede ocurrir cuando no lo son. Las trayectorias de flujo subterráneo en una cuenca homogénea e isótropa serán similares a las que se presentan en la figura 1.24b. El flujo proviene de las **zonas de recarga**, que se presentan en las porciones topográficamente elevadas, y llega hasta la **zona de descarga**, que están en partes bajas y planas. Obsérvese que el flujo subterráneo tiene lugar a lo largo de todo el acuífero: no existen puntos donde el agua subterránea se estanque a profundidad. Las componentes de flujo vertical revelan que deben existir componentes verticales en los gradientes hidráulicos.

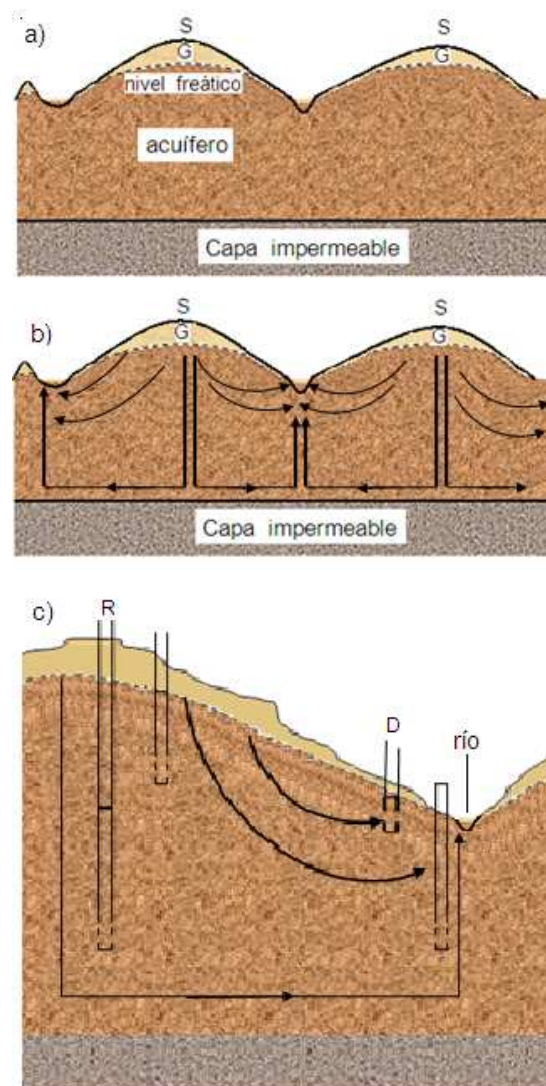


Figura 1.24: **área de recarga y descarga** a) parteaguas superficiales (S) y parteaguas de aguas subterránea (G) entre valles en una región compuesta por materiales geológicos impermeables, homogéneos e isotropos. b) Patrones de flujo de agua subterránea implican gradientes hidráulicos verticales que pueden medirse por medio de piezómetros. Obsérvese que la carga disminuye con la profundidad en las zonas de recarga (R) y se incrementa con la profundidad en las zonas de descarga (D). Estos efectos se manifiestan en los niveles de agua en los piezómetros en R y D. En el piezómetro más profundo ubicado en D, la carga está por arriba de la superficie del terreno natural

Las diferencias de carga entre los puntos ubicados a diferentes niveles dentro del acuífero pueden registrarse por medio de piezómetros. Existe una composición de flujo hacia abajo (y por lo tanto un gradiente hidráulico) bajo las zonas de descarga (figura 1.24c). Estas diferencias de carga se presentan aunque el acuífero sea perfectamente homogéneo e isótropo: sin embargo, es común que en muchos acuíferos las diferencias de carga se incrementen por variaciones de la conductividad hidráulica en el sentido vertical. La clásica situación “artesianas” es un caso extremo de esta condición, cuando se considera un piezómetro profundo como en D (figura 1.24c).

El agua subterránea descarga de un acuífero libre cuando el nivel freático interseca la superficie del terreno natural. Al flujo de descarga que es difuso se le denomina **lloradera**; si la descarga es localizada, por ejemplo a lo largo de una falla o fisura, se la llama **manantial**.

1.10 Pozos para agua

No se conoce cuándo, cómo y dónde fue hecho el primer pozo. Es posible que la fuente de abastecimiento de agua de los primeros miembros de la raza humana haya sido un río o un manantial, y que al presentarse algún periodo de sequía, el manantial paulatinamente haya dejado de fluir o el río haya comenzado a secarse. Seguramente nadie pudo explicar el fenómeno en función del abatimiento del nivel freático. Sin embargo, a alguien pudo habersele ocurrido cavar un agujero cerca de un manantial, o al notar que varias partes del lecho del río permanecían húmedas, pudo haberle llegado la inspiración de cavar un agujero hasta llegar al agua que debió haber estado justamente debajo de la superficie del terreno.

Cuando el río fluye de nuevo, el agujero sin duda se perdió; posteriormente, al secarse el río una vez más, se tuvo que empezar desde el principio. Unos años más tarde se descubriría que no era necesario hacer la excavación en el lecho del río, sino que se podía realizar a cierta distancia del cauce principal, donde seguiría aportando agua sin ser dañado por una avenida del río.

A partir de aquí y por razones de conveniencia se denominarán **norias** a las obras de excavación para obtener agua y **pozos** a las obras de perforación. Es posible hacer otras distinciones con base en el diámetro, o el propósito; sin embargo, se adoptarán otras definiciones.

1.10.1 Bombas

Después de construir un pozo, el agua debe ser llevada a la superficie por medios artificiales, a menudo que el agua fluya en forma natural. Una cubeta y una cuerda eran suficientes para abastecer una casa de campo; sin embargo, ahora los pozos obtienen agua por medio de una bomba. Hace unos cien años las bombas de pozos operaban bajo el principio de pistón recíproco. Un impulso ascendente de un pistón en un cilindro vertical inyectaba agua al cilindro, donde un arreglo simple de válvulas evita que sea desalojada cuando el pistón regresa en su movimiento descendente; el siguiente impulso ascendente desplaza esta agua del cilindro hacia la tubería de acceso a la superficie. Versiones pequeñas de estas bombas pueden manejarse manualmente, tales bombas satisfacen las necesidades básicas de agua de países en desarrollo como por ejemplo Bangladesh. A fines del siglo XIX y principios del siglo XX, las bombas de pistón de mayor tamaño eran movidas por máquinas de vapor.

Con la presencia de unidades rotatorias de alta velocidad, como los motores eléctricos, las bombas que operan bajo ese principio tomaron un lugar preponderante. La categoría más importante de las bombas es la **centrífuga**. En una bomba centrífuga, una rueda con **impulsores** gira y hace que el agua en la bomba se mueva alrededor y hacia fuera (figura 1.25a). Esto causa un aumento de la presión en la pared exterior de la bomba, y un decremento cerca del centro del impulsor. El agua es conducida a través de la bomba, del centro hacia la salida, donde se desplaza por la tubería hacia el exterior. Desde otro punto de vista la bomba transfiere energía del motor al agua.

Las bombas centrífugas pueden montarse en la superficie cerca del pozo con la tubería de succión o toma colocada dentro del pozo por debajo del nivel estático. La operación de la bomba reduce la presión en la tubería de succión (figura 1.25b) por debajo de la presión atmosférica. Debido a que la atmósfera ejerce su presión completa sobre la superficie del agua en el pozo, el

agua es forzada por la tubería de succión. Si la bomba puede reducir la presión en el punto de succión a cero, (en otras palabras crear un espacio perfecto), la presión atmosférica hará subir el agua a una altura de casi 10 m. por arriba del nivel estático en el pozo. En la práctica, debido a limitaciones mecánicas y a la posibilidad de que se formen bolsas de vapor de agua en el agua misma, estas bombas no pueden operar cuando el nivel estático se encuentra a más de 7 m. por debajo de la posición de la bomba.

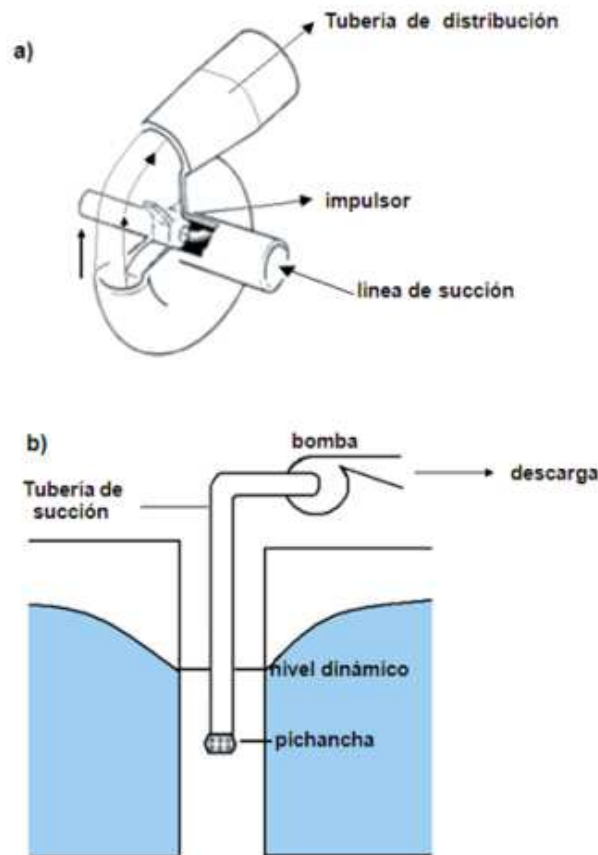


Figura 1.25: **Bombas centrífugas** a) El principio de la bomba centrífuga. b) Una bomba centrífuga que se utiliza para extraer agua de una noria. Cuando se bombea agua de un pozo, la tubería de succión a menudo se fija en la parte superior del ademe (tubo de acero al carbono que se introduce dentro del pozo de agua para evitar que el suelo se separe y taponee nuevamente la perforación) del pozo.

Cuando se requiere elevar el agua a alturas mayores, el problema se resuelve poniendo la bomba centrífuga debajo del agua con el eje de los impulsores colocado en forma vertical. La bomba puede ser instalada en el fondo del pozo, unos metros por arriba del nivel estático, por medio de una guía vertical, y puesta a funcionar por medio de un motor colocado en la superficie. Lo usual en la actualidad es instalar un motor eléctrico a prueba de agua por debajo de la bomba (el cual se enfría por el paso del agua que fluye) y extraer directamente el agua. Este tipo de bomba se denomina **eléctrica sumergible**. Si el agua debe elevarse a más de 10m. por encima del nivel estático, se hace necesario el uso de varios impulsores, uno arriba de otro, y que cada uno aporte energía al agua. Cada grupo de impulsores se denomina **tazón**; el uso de cinco a 10 tazones es lo común, pero pueden ser usados 20 tazones o más para llevar el agua a alturas grandes. Debido a que el diseño de los impulsores de estas bombas es por lo general del tipo denominado **turbina**, estas bombas de pozo profundo son comúnmente llamadas **bombas de turbina**.

Otra forma de bombeo de agua que debe mencionarse es el **bombeo por aire**. En este método (figura 1.26) el aire de un compresor se inyecta a un sistema de conducción que lo lleva por debajo del nivel estático en el pozo, donde escapa como burbuja. La mezcla resultante de aire y agua es menos densa que el agua en el pozo, por lo que esta columna espumosa de agua en la tubería de descarga debe incrementarse en longitud si se quiere que la presión en la base de la tubería sea la misma que la presión en el agua del pozo. Si la columna de la mezcla de agua - aire puede ser lo suficientemente larga, la presión será igual. Si el sistema se diseña correctamente, la mezcla agua - aire descargará a la superficie antes de que este equilibrio ocurra; la presión (y la carga estática) al fondo de la tubería de descarga será siempre menor que la del pozo, y el agua fluirá del pozo hacia la tubería de la descarga. El agua que llega a la tubería se convertirá en una “espuma” y el proceso continuará. Esta descarga causa un abatimiento en el nivel estático del pozo que ocasiona que el agua fluya del acuífero hacia el pozo.

El bombeo por aire es poco eficiente y, consecuentemente, poco económico para ser usado por periodos largos. Este sistema es ideal para bombear un pozo por un periodo corto, tal vez

en forma inmediata después de terminar su construcción, además de que permite bombear sin preocuparse del tamaño de la bomba. A menudo se usa como un método de extracción a largo plazo cuando se extrae agua corrosiva, o cuando ésta contiene arena que dañaría las partes móviles de una bomba convencional.

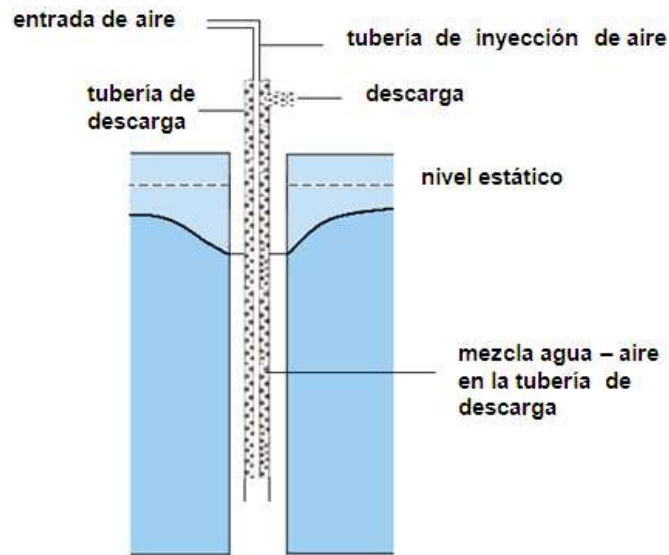


Figura 1.26: **El principio de bombeo con aire.** La menor densidad de la mezcla agua - aire produce que la presión en A sea menor dentro de la tubería de descarga que fuera de ésta; por lo tanto, el agua fluye del pozo hacia la tubería de descarga.

En las secciones anteriores se indicó lo necesario para comprender que las aguas subterráneas son parte del ciclo del agua, como el agua llega a los acuíferos, como se almacena, los factores que gobiernan su movimiento a través del acuífero y por último se señaló cómo es que el agua sale del acuífero. Ahora en el siguiente capítulo se examinan los elementos de valoración y procedimientos de estimación en los usos de: abastecimiento municipal, riego, y disfrute estético recreativo *in situ*. Los sectores y actividades citados no constituyen una relación exhaustiva de las funciones de valor del agua.

CAPÍTULO 2

VALORACIÓN ECONÓMICA DEL AGUA

“El agua es el vehículo de la naturaleza”

Leonardo Da Vinci (1452 - 1519)

Antes de entrar en materia de la valoración económica del agua, vamos a proporcionar ciertas definiciones que serán de utilidad para la comprensión de este capítulo y el siguiente.

Definición 2.1. Bien

Es todo objeto, elemento material o cosa que sirva para satisfacer alguna necesidad humana, tienen alguna demanda por parte de personas u organizaciones que consideran que reciben un beneficio al obtenerlos.

Definición 2.2. Bien económico

Los bienes económicos son aquellos que se adquieren en el mercado pagando por ellos un precio. Los productos sujetos a precio o condiciones restringidas de acceso, son ejemplos de bienes económicos.

Definición 2.3. Bien final

Aquel bien que para ser utilizado no requiere de ninguna transformación adicional. Se clasifican en bienes de consumo y bienes de capital.

Definición 2.4. Bien intermedio

Aquel que es utilizado o está destinado a ser utilizado como materia prima o auxiliar de un proceso de producción y es a su vez, un bien producido. La madera se consideran un bien intermedio, pues se utiliza para fabricar otros bienes, por ejemplo, muebles.

Definición 2.5. Bien libre

Son aquéllos de los que se puede disponer en cantidades ilimitadas y que se pueden consumir, sin necesidad de tener que pagar por ellos un precio. Son bienes que carecen de valor de mercado y no precisan ser racionados, por encontrarse en abundancia en la naturaleza, de forma que todo el mundo tiene acceso a ellos. Un ejemplo de bien libre sería el aire que se respira, que de hecho es necesario pero muy abundante, y por tanto no es susceptible de asignación mediante procedimientos económicos.

Definición 2.6. Bien público

Son de acceso universal, propiedad que puede tomar dos formas. Primero, no suscitan rivalidades, es decir, el hecho de que una persona o empresa utilice un bien público no impide su uso, en parte o total, al mismo tiempo por otros. Segundo, son de uso no competitivo, es decir, es imposible, impedir su uso por parte de los individuos. Un ejemplo claro de bien público son las ondas de radio.

Definición 2.7. Coste alternativo

Designa el coste de la inversión de los recursos disponibles, en una oportunidad económica, a costa de las inversiones alternativas disponibles. El coste alternativo mide el coste de reparar el daño ambiental de un proyecto. Por ejemplo, el coste alternativo del ruido del tráfico podría ser el coste de instalar ventanas dobles, pero no mide el valor estrictamente el valor medioambiental.

Definición 2.8. Coste social

Es la suma de los costos privados más los costos externos, que tiene que ver con el impacto de esta producción en la sociedad. El costo externo es el costo que la producción le genera a otros que no son el productor. Por ejemplo, una empresa que contamina el agua, genera un costo para las demás personas que usan esa agua.

Definición 2.9. Coste variable

Un costo variable o coste variable es aquel que se modifica de acuerdo a variaciones del volumen

de producción (o nivel de actividad), se trata tanto de bienes como de servicios. Es decir, si el nivel de actividad decrece, estos costos decrecen, mientras que si el nivel de producción aumenta, también lo hace esta clase de costos.

Definición 2.10. Elasticidad

El concepto de elasticidad mide la amplitud de la variación de una variable cuando varía otra variable de la que depende. Este concepto se aplica a las curvas de demanda y de oferta para medir la variación de la cantidad demandada u ofertada a raíz de variaciones de las variables que las determinan.

Definición 2.11. Elasticidad - precio de la demanda

Esta elasticidad mide la variación de la cantidad demandada ante una variación del precio. Se calcula dividiendo la variación porcentual de la cantidad demandada por la variación porcentual del precio.

La demanda de un bien es elástica si la cantidad demandada responde significativamente a una variación del precio, e inelástica si la cantidad demandada responde muy levemente a una variación del precio. Según el valor de la elasticidad se puede hablar de:

1. Demanda perfectamente elástica (elasticidad = infinito)
2. Demanda elástica (elasticidad > 1)
3. Demanda con elasticidad unitaria (elasticidad = 1)
4. Demanda inelástica (elasticidad < 1)
5. Demanda perfectamente inelástica (elasticidad < 0)

Definición 2.12. Externalidades Negativas

Se produce cuando las acciones de un agente reducen el bienestar de otros agentes de la economía. Supongamos, por ejemplo, que existe un criadero de truchas en un lugar determinado. Para que las truchas crezcan y se desarrollen correctamente, deben mantenerse en aguas limpias libres de contaminación. Sin embargo, en un lugar cercano, existe un cultivo de flores que utiliza sustancias químicas para controlar las plagas de las flores. Por el viento y las condiciones climáticas, estos compuestos químicos contaminan las fuentes de agua cercanas, por lo

tanto, el criador de truchas se ve seriamente afectado por las acciones del cultivo de flores cercano; es decir, está sufriendo un efecto negativo externo a él (una externalidad negativa).

Definición 2.13. Externalidades positivas

Se produce cuando las acciones de un agente aumentan el bienestar de otros agentes de la economía. Por ejemplo, supongamos que existe un cultivo de árboles frutales en un lugar determinado. Vecino a éste se encuentra una empresa que extrae miel de abejas. Las abejas, para producir miel, necesitan del néctar de las flores; a su vez, para que los árboles den frutas, es necesario que exista una polinización, la cual se facilita por el movimiento de insectos de flor en flor. Por lo tanto, sin haber pagado por ello, el dueño de los árboles está beneficiándose de una externalidad positiva por el hecho de que el vecino produzca miel de abejas y tenga abejas cercanas a su cultivo. De la misma forma, el vecino está recibiendo una externalidad positiva, producida por el cultivo de árboles, por el hecho de tener cerca las flores de estos.

Definición 2.14. Libre mercado

Término que se utiliza para designar una economía cuando en ésta existen escasas o nulas restricciones o controles gubernamentales a los intercambios entre individuos y empresas. Individuos toman las principales decisiones respecto a la producción y el consumo. Un sistema de precios y mercados regula el que, como y el para quien producir.

Definición 2.15. Precio Sombra de un producto

Es el precio de referencia que se establecería para cualquier bien en condiciones de competencia perfecta, incluyendo los costos sociales además de los privados. También cuando un bien o servicio no tiene precio en el mercado se suele asignarsele un precio sombra con lo cual se pueden realizar análisis de costo o beneficios, los cuales representan el costo de oportunidad de producir o consumir una mercancía aún cuando esta no sea intercambiada en el mercado o no tenga precio en el mismo.

Definición 2.16. Productividad marginal

Límite de la relación incremental entre productividad total y cantidad de input o, dicho de otra manera, primera derivada de la productividad total. En sentido aproximado, productividad de la última unidad de input utilizada. Si la productividad marginal física se multiplica por el precio del output o producto obtenido, se obtiene el valor de la productividad marginal.

Definición 2.17. Recurso Común

Son de libre acceso (no se puede restringir su uso) pero son limitados puede ser disminuido o afectado (su uso por una persona sí limita el uso por otros interesados). Por ejemplo: La pesca, la caza.

Definición 2.18. Valor Actual Neto (VAN)

Es un procedimiento que permite calcular el valor presente de un determinado número de flujos de caja futuros. El método, además, descuenta una determinada tasa o tipo de interés igual para todo el período considerado. La obtención del VAN constituye una herramienta fundamental para la evaluación y gerencia de proyectos, así como para la administración financiera.

Con estos conceptos podemos continuar con el estudio de la valoración económica del agua.

La naturaleza de bien económico, en oposición a la de bien libre, que aparece cada vez más reforzada en el caso del agua, constituye el motivo básico del interés por su valoración. Este interés se acrecienta conforme aumenta la escasez relativa del recurso, por cuanto la estimación del valor es un requisito esencial para poder diseñar estrategias de incentivación para su uso eficiente.

Hasta épocas muy recientes, las políticas de abastecimiento de agua se diseñaban casi exclusivamente en el lado de la demanda. Por otro lado, el agua se consideraba demasiado importante como para dejar su provisión al juego del libre mercado. Con todo, aún en el caso de que tales mercados hubieran existido, las dificultades para una asignación eficiente no habrían desaparecido, dado que el agua presenta en gran parte las características de los recursos comunes y de los bienes públicos, campos donde la eficiencia del mercado resulta más cuestionada. Todas estas circunstancias determinaron en gran medida en el pasado una manifiesta parquedad de estimaciones fundadas sobre la valoración del agua.

La superación de la carencia señalada apunta a la necesidad de derivar estimaciones del valor acudiendo a metodologías apropiadas que tengan en cuenta la disponibilidad de información y el balance coste-beneficio, incluidas las externalidades que comportan el suministro y demanda de agua en sus diferentes utilidades. Entre estas metodologías cabe destacar como

más relevantes: la de la disposición a pagar derivada de la curva de demanda, la de la valoración a partir de la productividad física marginal, la del componente residual en las cuentas de valor añadido en que el agua aparece como input productivo, la del coste alternativo de lograr el servicio que el agua presta, la de la valoración contingente y la del coste de viaje.

Entre las dimensiones importantes a considerar en la valoración deben señalarse: la cantidad, la calidad, la pauta temporal y la distribución espacial. La asignación espacial es importante ya que las reservas del recurso y los usos del mismo pueden tener, y con frecuencia tienen, distinta ubicación inicial, lo que conlleva la necesidad de captación, transporte y distribución para satisfacer las necesidades en el punto de demanda. Otro aspecto de primordial importancia es la distribución del recurso en el tiempo, dado que en la mayoría de los usos las variaciones temporales (estacionales) de la demanda resultan difíciles de ajustar a la evolución rígida o incluso contracíclica de la oferta. En esta misma dimensión, el horizonte temporal considerado, y en concreto la distinción entre el corto y el medio plazo, implica diferencias muy significativas en las correspondientes valoraciones del agua. Respecto a la calidad, es importante considerar tanto las exigencias que se plantean en los diversos usos como las consecuencias que sobre la composición del agua effluente aquéllos implican. La valoración respecto a la cantidad debe distinguir en principio entre captación y consumo (agua efectivamente utilizada), y que, dado que el agua es fugitiva y reutilizable, aparecen los ya citados aspectos de su carácter de recurso común y bien público, apreciándose significativamente externalidades, positivas y negativas, entre usos y agentes.

En términos económicos, el proceso de valoración debe tener en cuenta las siguientes especificaciones:

1. El carácter de bien público o de bien intermedio que distingue unos usos de otros; el bien final, por ejemplo, en el agua de bebida y en el agua para actividades de recreo; y final intermedio, por ejemplo, en los usos industriales y en la generación de energía hidroeléctrica. La distinción anterior tiene implicaciones directas sobre los métodos de valoración.
2. La diferencia entre el valor marginal y el valor medio: el primero relevante en la deter-

minación de las condiciones de optimalidad; el segundo, más ampliamente utilizado en la presupuestación financiera.

3. La vinculación de la valoración a corto y largo plazo con la imputación de los costes variables o totales, respectivamente, de la oferta del agua. La distinción implica que, en términos de valoración neta, se deberá tomar el excedente sobre los costes variables o sobre los costes totales según que el horizonte de la valoración sea corto el corto o largo plazo.

2.1 La cobertura de la medida

Al identificar las funciones que confieren valor al agua, debe considerarse, por un lado, el *componente de uso*, que corresponde a la medida de bienestar que le reporta al individuo (sociedad) la utilización del recurso en una u otra forma y, por otro lado, el *componente de no-uso*, que recoge correspondientemente todas aquellas fuentes del valor que no implican una utilización propiamente dicha del agua.

La valoración de uso del agua puede a su vez desdoblarse en los bloques de uso directo y uso indirecto, cuya suma configura el valor de uso actual. Otro elemento distinto lo constituye el valor de opción, que surge como una reserva de uso para un momento en el futuro, al no poder contar con seguridad con la existencia futura del recurso considerado. La suma del valor de uso directo más el indirecto y el de opción de uso constituyen el agregado de valor de uso total.

El segundo componente que puede denominarse también valor intrínseco, o valor de existencia, vendría ligado a los valores más inmanentes de los objetos, con independencia, parcial o total, de la proyección que sobre ellos tenga el ser humano. Es obvio que tal componente dista mucho de tener aceptación generalizada pero, en una u otra medida, su sombra planea sobre el campo de la valoración.

Buscando la mayor cobertura conceptual, puede plantearse que el valor total es la suma del valor de uso total y del valor de existencia. En condiciones de riesgo ante la disponibilidad

futura de un bien o servicio ambiental, se formula el concepto de precio de opción como la suma de la esperanza del excedente del consumidor y del valor de opción. En el cuadro (2.1) se esquematizan las relaciones entre los distintos componentes del valor.

Cuadro 2.1 *Elementos componentes del valor total*

$$\text{Valor de uso actual} = \text{Valor de uso directo} + \text{Valor de uso indirecto}$$

$$\text{Valor total de uso} = \text{Valor de uso actual} + \text{Valor de Opción}$$

$$\text{Valor económico total} = \text{Valor de uso total} + \text{Valor intrínseco}$$

$$\text{Precio de Opción} = \text{Esperanza del Excedente del consumidor} + \text{Valor de Opción}$$

Una vez presentados, de forma general, los componentes del valor, se van a exponer en las secciones siguientes los métodos de valoración del agua de determinadas categorías de uso especialmente representativas.

2.2 Abastecimiento Municipal

El abastecimiento municipal cubre habitualmente una diversidad de usos del agua. Éstos pueden agruparse en las siguientes categorías: residencial, comercial - industrial y servicios públicos. Dentro del bloque residencial, a su vez, puede distinguirse el uso interior (principalmente bebida, cocina, baño, lavado) y el exterior (piscina, jardines, etc.). En la categoría de servicios públicos se encuentran, entre otros, los de limpieza y riego de calles y parques, las fuentes y el servicios de bomberos. En el grupo comercial - industrial se incluyen un buen número de centros de servicios (hoteles, restaurantes, lavado de automóviles), establecimientos comerciales y una considerable proporción de la pequeña y mediana industria localizada dentro o en la proximidad de los núcleos urbanos.

A nivel agregado, la demanda municipal viene influida en gran medida por factores propios de cada localidad, tales como: el clima, la densidad de población, y el precio repercutido por su

consumo. Asimismo, y como elemento clave, debe considerarse la pauta temporal del consumo (especialmente según época del año). En términos generales, niveles más altos de consumo corresponden a climas más cálidos, al período de verano, a mayores niveles de beneficios y a menores densidades de población. En lo que sigue de esta sección se trata de evaluar el beneficio social que comporta acomodar la oferta de agua a los incrementos de la demanda de la misma (por crecimiento vegetativo de la población o por otras razones) teniendo también en cuenta los costes sociales que implica normalmente el aumento de la oferta.

El valor de un incremento en la oferta de abastecimiento debe estimarse por medio de la correspondiente variación neta de utilidad que le reporta a la población en cuestión. En las condiciones habituales de una baja elasticidad - renta de la demanda de agua, y representando la factura del agua sólo una parte pequeña de la renta de la familia tipo, la medida ordinaria del excedente marshalliano del consumidor constituye una buena aproximación a la medida exacta de Hicks del cambio inducido del nivel de utilidad.

Si la curva de demanda de agua se desplaza desde la posición inicial D_1 hasta D_2 , la valoración total que los consumidores realizan del incremento potencial de su consumo desde el punto de equilibrio Q_1 al Q'_1 podrá calcularse por el área $CBQ_1Q'_1$ situada bajo la curva de demanda D_2 , el eje horizontal y las dos verticales que pasan por Q_1 y Q'_1 (Figura 2.1).

Si a la población se le ofrece la posibilidad de poder seguir pagando el consumo adicional al precio P_1 inicial, el valor neto o excedente que obtiene de tal incremento vendrá dado por el área ABC , resultante de restar al área de valor total el pago efectuado por el consumo adicional, pago que viene dado por el área $ABQ_1Q'_1$.

El precio P cargado por el consumo suele establecerse sobre la base del coste medio que le resulta a la entidad gestora por la captación, transporte, potabilización y distribución del agua. En este precio suele recogerse un cargo fijo por el derecho al servicio, un cargo variable por el consumo y, en ciertos casos, un cargo también variable por la depuración del agua residual resultante. Al fijar el precio al nivel del coste medio, la entidad gestora del abastecimiento cubre sus costes de infraestructura, operación - mantenimiento y administración. Estos son los costes

que para la sociedad implica la provisión de la oferta de agua. Por lo tanto, el excedente ABC de los consumidores representa, en el caso de mantenerse el precio P_1 como valoración del coste del aumento de la oferta de agua, la valoración social neta del incremento de la oferta de Q_1 a Q'_1 . Esta cantidad neta corresponde al valor en origen del agua, antes de ser captada, transportada, potabilizada y distribuida.

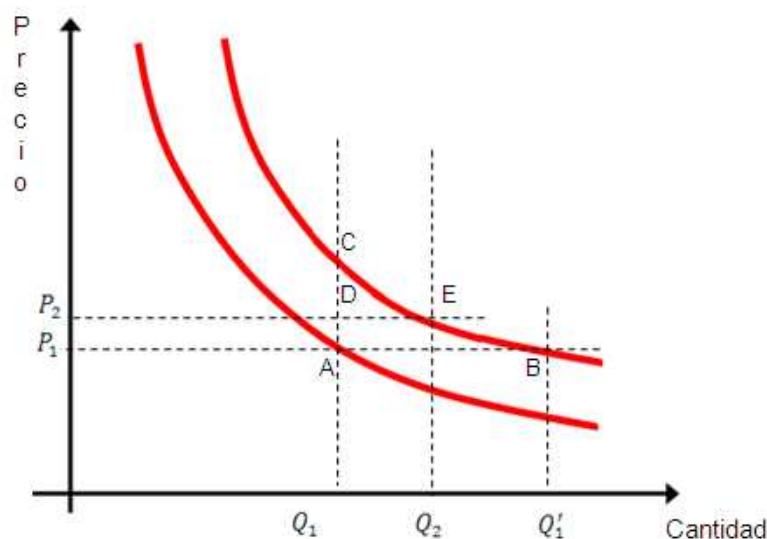


Figura 2.1: Valoración de los cambios en la oferta - demanda de agua de abastecimiento

Para proceder a la valoración anterior se necesita conocer la evolución y perfil de las sucesivas curvas de demanda, al menos en los tramos precio - cantidad relevantes. Pero dado que en el abastecimiento de agua no existe habitualmente una gran variedad de pares precio-cantidad observables, pues el precio fijado por la entidad gestora, que debe ser aceptado por los consumidores (son precios aceptables), no cambia con frecuencia (y si lo hace es en respuesta a cambios en las restantes variables determinantes de la oferta-demanda), no existe mucha disponibilidad de datos para estimar econométricamente la curva de demanda. Es por ello que interesa poder aproximar dicha curva utilizando la limitada información disponible.

Entre la información mínima se dispone siempre de un punto de la curva, el del par inicial precio - cantidad, que se representará por (P_1, Q_1) . En cuanto a la parametrización de la trayectoria de la curva D_1 en el entorno de ese punto, el enfoque paramétricamente más sencillo y con sentido económico es el de suponer una elasticidad - precio constante para la demanda. Una curva de este tipo vendría representada por una **Función Cobb-Douglas** de la forma:

$$Q = kP^\varepsilon \quad (2.1)$$

siendo k el factor de escala y ε el valor (constante) de la elasticidad. Con el conocimiento del par (Q_1, P_1) y del valor de la elasticidad ε , se puede calcular el valor del parámetro de escala k_1 del período 1:

$$k_1 = Q_1 P_1^{-\varepsilon} \quad (2.2)$$

El valor de ε puede, a su vez, obtenerse de una estimación anterior, cuando se cuenta con cierta diversidad de datos sobre pares precio - consumo, o bien por adopción del parámetro estimado para otra población con características semejantes a las del municipio en cuestión.

Una vez que se ha identificado D_1 , pueden obtenerse las curvas de demanda de los períodos siguientes D_2, D_3, \dots , si se postula un desplazamiento de dichas curvas conforme a una tasa de crecimiento g (en función del crecimiento de la población y/o de la renta), tal que:

$$k_t = k_1(1 + g)^{t-1} \quad t = 2, \dots, T \quad (2.3)$$

siendo t el índice representativo de los períodos futuros.

En el caso de situarse la curva de demanda ya en D_2 (segundo período), la valoración total, VT, del incremento de oferta de agua desde Q_1 a Q'_1 (valor que es igual a la integral de la función inversa de demanda, $P(Q)$, a lo largo de D_2 , entre los citados puntos de variación de la oferta, Q) puede calcularse de la forma siguiente:

$$VT = \int_{Q_1}^{Q'_1} P[Q_{D_2}]dQ = \int_{Q_1}^{Q'_1} \left(\frac{Q}{k_2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} dQ = \frac{1}{k_2} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \left| \frac{Q^{\frac{1}{\varepsilon} + 1}}{\frac{1}{\varepsilon} + 1} \right|_{Q_1}^{Q'_1} \quad (2.4)$$

y, haciendo $x = -\frac{1}{\varepsilon}$, resulta:

$$\frac{k_2^x}{1-x} \cdot \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right] = \frac{(1+g)^x k_1^x}{1-x} \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right] = \frac{(1+g)^x P_1 Q_1^x}{1-x} \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right] \quad (2.5)$$

En el caso de que el aumento de la oferta venga acompañada de un incremento del precio desde P_1 a P_2 , por que el coste medio del abastecimiento adicional sea superior al del abastecimiento inicial, la integral anterior debe calcularse entre el punto Q_1 y el Q_2 , donde $Q_2 = \max[Q_1, \min[Q'_1, k_2 P_2^\varepsilon]]$, siendo Q_2 el nivel de consumo efectivo al nuevo precio P_2

Por su parte, el valor neto, VN, del excedente social atribuible al incremento de consumo vendría dado por la diferencia entre el valor VT y el producto $P_2(Q_2 - Q_1)$, que representa el coste social del abastecimiento adicional. Así pues:

$$VN = \frac{(1+g)^x P_1 Q_1^x}{1-x} \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right] - P_2(Q_2 - Q_1) \quad (2.6)$$

Para establecer comparaciones sobre la valoración del incremento de la oferta de agua de abastecimiento en diferentes contextos poblacionales interesa expresar tanto VT como VN en términos unitarios (por unidad de incremento de la oferta de agua). Los valores unitarios correspondientes, simbolizados respectivamente por VTu y VN_u, resultan de dividir VT y VN entre $(Q_2 - Q_1)$, es decir:

$$VTu = \frac{\frac{(1+g)^x P_1 Q_1^x}{1-x} \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right]}{Q_2 - Q_1} \quad (2.7)$$

$$VN_u = \frac{\frac{(1+g)^x P_1 Q_1^x}{1-x} \left[\frac{Q'_1}{Q_1^{1-x}} - \frac{Q_1}{Q_1^x} \right]}{Q_2 - Q_1} - P_2 \quad (2.8)$$

Para variaciones pequeñas de la oferta de abastecimiento, los valores unitarios anteriores se pueden considerar como valores marginales, totales y netos respectivamente, del consumo de agua. La magnitud de estas variables depende del nivel de precio aplicado en el margen y del valor correspondiente de la elasticidad. Respecto a la variable precio la repercusión en el valor es directa y lineal, mientras que la elasticidad (en valor absoluto) incide de forma exponencial e inversa.

Para una posición dada de la curva de demanda, el valor marginal del agua se reduce al aumentar la oferta y se eleva al disminuir ésta. Para niveles bajos de la oferta el valor se puede hacer extraordinariamente elevado. En el límite, cuando las restricciones afectaran a los usos de máxima prioridad doméstica (bebida, cocina) se alcanzarían valores marginales extremos. No obstante, estos usos de máxima prioridad, no suelen representar más allá de un 5 % del consumo del hogar, por lo cual, salvo en el caso de restricciones extremas en el suministro, no se alcanzarán normalmente las valoraciones marginales máximas.

Por otro lado, en las restantes categorías de uso municipal del agua existe un amplio margen para la sustitución del consumo de agua. Las posibilidades de sustitución pueden depender de las inversiones que se realicen, por ejemplo, en bienes de consumo duradero (como lavadoras, lavavajillas, equipos de depuración en piscinas), más sofisticados y eficientes por su bajo consumo de agua, y fundamentalmente de los cambios en ciertos hábitos (sustitución del baño por la ducha, riego más eficiente del jardín, del lavado del automóvil, etc.). En general las posibilidades de ahorro y conservación del agua por estas vías son elevadas, sobre todo cuando se parte de niveles de consumo relativamente altos.

Otro elemento clave en la valoración del agua es la consideración de la pauta estacional de su demanda. En términos generales, el consumo de un día de verano puede más que doblar el de un día de invierno. Ello apunta a la necesidad de desdoblar la estimación agregada anual y considerar curvas de demanda diferenciadas según la época del año (distinguiendo al menos las de invierno de las de verano). La implicación de esta separación es la de tratar normalmente con demandas marginales más elásticas (curvas más horizontales) y de menor valor (marginal) en verano que en invierno, y por lo tanto de poder contar, en general, con márgenes de sustitución

y conservación mayores en la primera estación que en la segunda.

Las diferencias en el consumo y en el valor marginal del agua entre verano e invierno tienen importantes repercusiones sobre la planificación óptima de los abastecimientos. En concreto, si la capacidad de suministro actual sólo presentara restricciones para el período punta del año (de corta duración), interesaría investigar las alternativas de resolver esa escasez puntual sin recurso a grandes inversiones para aumentar la capacidad permanente del abastecimiento, pues esa capacidad adicional quedaría ociosa la mayor parte del año.

El disponer para dicho análisis de estimaciones adecuadas del valor marginal del agua en el período punta es un requisito informativo para valorar correctamente, en términos de coste - beneficio, la rentabilidad social de los proyectos de ampliación de la capacidad de abastecimiento. Por otra parte, en la valoración coste - beneficio de aquella rentabilidad social interesa distinguir el horizonte temporal, pues, según se contemple el corto o largo plazo, el cálculo del excedente social neto se debe efectuar restando al valor total del aumento de la oferta de agua la suma de los costes variables (operación, mantenimiento y administración) de dicho aumento, o de éstos más los costes fijos que resultan de la amortización de las grandes obras de captación y almacenamiento que requiere habitualmente la ampliación a largo plazo.

2.3 Regadío

El manejo y la utilización sostenible de los recursos hídricos es parte de la ecuación para asegurar el abastecimiento de alimentos y mitigar los efectos del cambio climático, y tiene especial importancia en nuestra Región.

El gran reto en la agricultura es producir más alimentos con menos agua. Con el apoyo de la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación (FAO), los países de la Región trabajan por ese objetivo, buscando aumentar la eficiencia del uso del agua a través de iniciativas como la mejora de los esquemas de riego y la reglamentación del tratamiento de aguas servidas y contaminadas para su reutilización en la producción agrícola.

La demanda de agua para la agricultura depende en gran medida de factores como: el tipo de cultivo y las características del suelo, la localización de la zona de regadío respecto a la de la reserva de agua, el clima, la época del año y la propia calidad del agua.

La demanda de agua para riego es, a diferencia de la de uso personal doméstico, una demanda derivada, su valor resulta de la contribución que, como *input* del proceso agrario, supone el agua de riego para la obtención del valor de la producción agrícola. Adoptado el objetivo de maximización del beneficio, el agricultor utilizará el agua hasta el punto en que su coste marginal iguale al ingreso marginal. En términos de equilibrio parcial y optimización estática, el proceso se puede ilustrar con ayuda de los tres bloques de la figura (2.2)

La parte c) Representa la demanda D (perfectamente elástica) del producto agrícola y la función de oferta S , de pendiente positiva, con el precio del producto P como argumento y parametrizada por el coste C del agua utilizada como *input*.

La parte b) Representa la curva de productividad marginal del agua utilizada en el regadío.

La parte a) Muestra la curva inversa de demanda del agua de regadío: $A = h(C, P^*)$.

La cantidad de agua demandada A depende de su coste (precio) C , para un precio dado P^* del producto agrícola en cuyo riego se usa. Al descender el coste del agua desde C_1 a C_2 , disminuye el coste marginal de uso de la misma y, por lo tanto, de cara a la optimización, debe elevarse su consumo hasta el punto en que se restaure la igualdad entre su coste y el valor de su producto marginal. Este equilibrio se logra en el nuevo punto (A_2, Q_2) de la curva $Q = g(A)$ de la parte b) en el que el valor de la tangente α_2 (productividad física marginal del agua) multiplicada por el precio P del producto iguala a C_2 . El descenso del coste del agua induce el desplazamiento de la curva de oferta desde S_1 a S_2 en la parte c), lo que conlleva un aumento de la producción agrícola de Q_1 a Q_2 , y un aumento del excedente del productor dado por el área sombreada entre ambas curvas de oferta. Este excedente del productor reflejado en la parte c) es igual al representado por el área sombreada de la parte a) expresado en términos de excedente del “consumidor” de agua para riego agrícola.

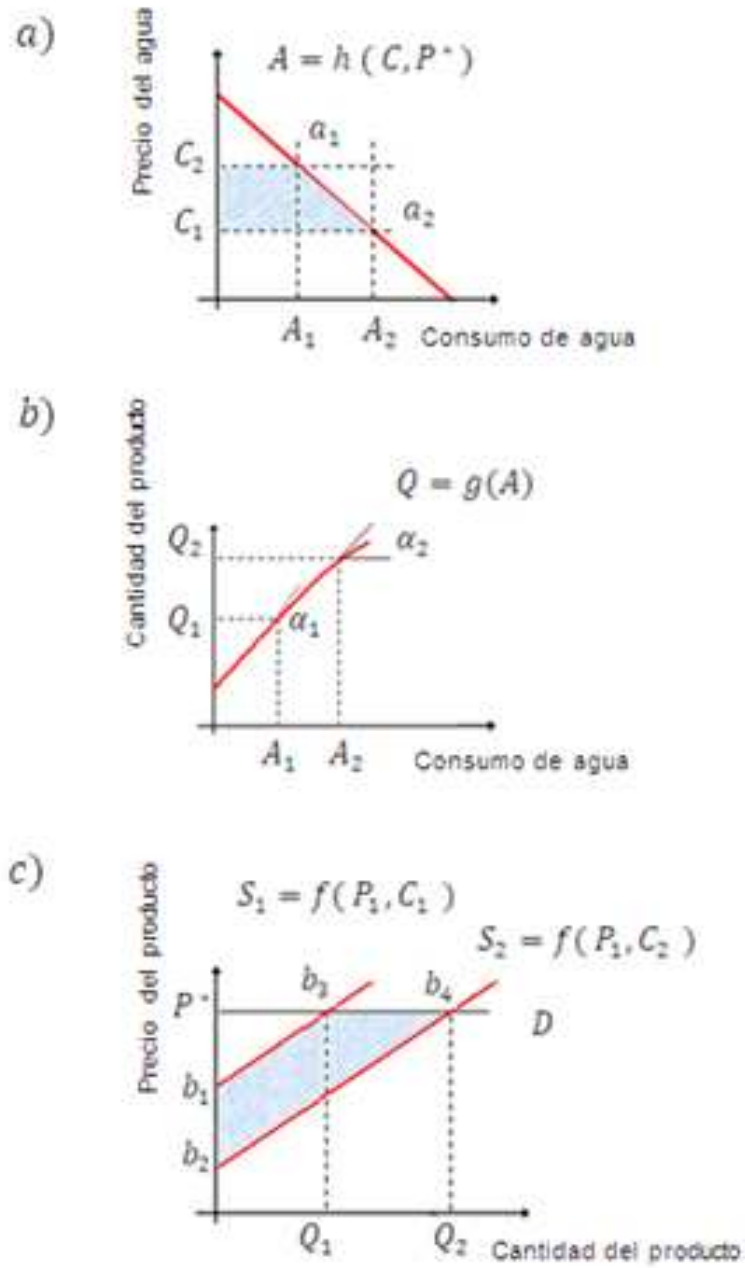


Figura 2.2: Demanda derivada de agua en la agricultura

Sin embargo, en un contexto más general de equilibrio múltiple en los mercados de factores

y productos agrarios, y frente a variaciones en el coste del agua, el agricultor optimizará su beneficio con una estrategia combinada en la que se incluyen, entre otros elementos:

1. Cambios en la mezcla de especies y variedades cultivadas en regadío.
2. Cambios en la proporción de regadío y secano.
3. Cambios en la superficie total cultivada.

La composición de la mezcla óptima de cultivos vendrá determinada por: el precio de venta de los productos, los costes de los *inputs* en los procesos correspondientes, los riesgos de la producción y de la venta y las restricciones agrobiológicas y de entorno de cada tipo de cultivo.

A nivel agregado para el conjunto del sector agrario de una determinada zona, la elasticidad de la demanda de agua para el regadío dependerá de la sensibilidad de la respuesta de los agricultores individuales ante las variaciones en el precio del agua. En general, a corto plazo y dentro del período de crecimiento, la demanda será bastante inelástica. En el más largo plazo, de un año para otro, se presentarán alternativas razonables de sustitución en los cultivos y en los procesos agrícolas, lo que dará lugar a una demanda de agua más elástica.

El hecho de que en el pasado la demanda de agua apareciera como muy inelástica a las variaciones del precio podría venir explicado por el coste artificialmente bajo que dicho recurso comportaba para su aplicación en regadío (subvenciones directas, inputs energéticos baratos), infravaloración que generaba una renta económica en su utilización. En la actualidad, sin embargo, con problemas de escasez y calidad, la elevación de sus costes influirá presumiblemente de forma significativa en la optimización del recurso escaso.

El valor de la elasticidad vendrá determinado también por el margen de incertidumbre sobre las variables (algunas exógenas) que condicionan la economía del sector agrario. En general, el agente adverso al riesgo será menos sensible a la limitación de su demanda (por ejemplo, puede tratar de prevenir con mayor volumen de riego inicial eventuales problemas meteorológicos posteriores) y también menos propicio a avanzar en técnicas alternativas (nuevas tecnologías) economizadoras del recurso tradicionalmente barato. En la medida en que esta actitud adversa

al riesgo sea predominante en el sector, puede reducir significativamente el valor de la elasticidad de la demanda de agua.

Finalmente, aunque quizá de la máxima importancia, debe señalarse que la elasticidad precio de este input viene condicionada por las modificaciones en la oferta - demanda de los mercados de los productos agrarios de regadío. En efecto, si como consecuencia del encarecimiento del agua se reduce la oferta del producto, la presumible elevación en el precio de este último puede paliar o incluso revertir la caída de la demanda de agua de regadío, que en consecuencia aparecerá como menos elástica a la variación de su precio. En esta misma línea debe apuntarse que la elevación inducida en el precio del producto anteriormente comentada puede motivar la dedicación de nuevas tierras a ese tipo de cultivo, lo que a su vez puede aumentar la demanda del agua.

2.3.1 Métodos de valoración del agua de regadío

La especificación precisa del significado de la valoración del agua de regadío requiere la concreción de al menos los siguientes elementos:

1. El cultivo o mezcla de cultivos a que el agua se dedica
2. El horizonte temporal, corto o largo plazo, de la valoración
3. La referencia a la variable de medida seleccionada, valor medio o valor marginal.
4. La locación, en el punto de aplicación o en el punto origen, del flujo de agua utilizado.

La valoración propiamente dicha, integrando los elementos anteriores, se realiza habitualmente siguiendo alguna de las siguientes metodológicas: la de la función de productividad del agua, la del desglose del presupuesto de las explotaciones agrarias representativas o las de la programación matemática, y entre éstas la lineal como más difundida.

2.4 Actividades recreativas, disfrute estético, habitat natural

En las secciones anteriores se examinó la valoración del agua en dos usos que requerían la captación previa del recurso. En esta sección, por el contrario, se analiza la valoración del agua *in situ*, ríos y lagos especialmente, donde sirve de soporte a actividades de recreo, disfrute y al normal desarrollo de la vida natural de numerosas especies. En este sentido, la valoración aparece justificada tanto por usos efectivos como por las opciones de uso, y también por el valor intrínseco del propio recurso y de los ecosistemas a que da soporte.

Esta área de valoración ha ido adquiriendo cada vez más importancia para la población de los países por cuanto la oferta de espacios acuáticos no degradados se ha ido reduciendo progresivamente, al tiempo que por otro lado aumentaba la población y la renta, y, con ella, la presión de la demanda sobre estos recursos considerados como bienes superiores.

Ante la ausencia generalizada de mercados efectivos y eficientes para los servicios que soportan estos espacios acuáticos naturales, la disponibilidad de información observada sobre precios para fundamentar la valoración es extremadamente limitada. Este hecho ha motivado el desarrollo de metodologías específicas de valoración, metodologías que no se circunscriben únicamente al agua, sino en general a los beneficios que se derivan de la disponibilidad de espacios naturales. Entre estas metodologías ocupan un papel importante preeminente las del coste de viaje, basadas en la función de producción de utilidad doméstica, y la de la valoración contingente.

2.4.1 Metodología de valoración

El método del coste de viaje

La metodología de coste de viaje se basa en la relación de complementariedad entre la satisfacción o disfrute que puede proporcionar un bien ambiental, la reserva/flujo de agua existente en un área natural, y la demanda de bienes y servicios de mercado para hacer efectivo aquel disfrute, según la teoría de la función de utilidad.

El método de la valoración contingente

En este método se solicita a una muestra representativa de la población considerada que haga explícita, en términos de su disponibilidad a pagar, la intensidad de su deseo por contar con la disponibilidad del bien ambiental, frente a la alternativa de no poder disfrutarlo o incluso de que el bien como tal dejará de existir. Es éste un método de valoración directa que, a pesar de su interés, presenta notables complicaciones metodológicas. No obstante, su gran atractivo con relación a otros métodos, entre ellos el anteriormente mencionado del coste de viaje, radica en que permite incorporar dentro de la valoración no sólo los beneficios de los usuarios efectivos, sino también las opciones potenciales de uso, así como los valores de herencia hacia generaciones futuras e, incluso, el propio componente del valor intrínseco del bien.

CAPÍTULO 3

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA

“... Toda subestrategia de una estrategia óptima es también óptima”

Richard Bellman (1920 - 1984)

En muchas situaciones de la vida cotidiana se busca una forma adecuada (según nuestras necesidades, restricciones y objetivos), de abordar un problema de forma que se alcance el objetivo deseado, de la mejor manera posible. Un ejemplo de esto es buscar el camino óptimo para desplazarse de un punto A a un punto B dentro de una ciudad. Aquí hay muchas formas de interpretar la frase “camino óptimo”; para algunos, el camino óptimo será en el que se recorra el menor tiempo; para otras personas será el de consumo de menos gasolina, etc.

Gottfried Leibnitz (1646 - 1716) utilizó la palabra óptimo basándose en la palabra latina “optimus” que significa “lo mejor”. La palabra latina deriva del nombre de la diosa romana Ops, diosa de la abundancia agrícola.

En este capítulo se va a exponer una idea muy general de la Optimización Dinámica. La **Optimización Dinámica**, estudia la optimización de sistemas dinámicos, es decir la optimización de sistemas que evolucionan en el tiempo. Dado un sistema que evoluciona en el tiempo, se trata de guiar o controlar el sistema de manera optima a lo largo de un horizonte temporal dado, de acuerdo a un objetivo previamente fijado.

La optimización es el acto de obtener el mejor resultado bajo condiciones dadas (fijas). El acto de optimizar presenta frecuentemente un problema matemático de tal forma que se intenta maximizar o minimizar una cierta función de varias variables con algunas restricciones impuestas en las variables mismas; dicha función que representa el criterio de ejecución del sistema es llamada **función objetivo**.

El optimizador tiene bajo control algunas variables a las que llamaremos **variables de decisión**. Su problema es el de encontrar valores para las variables de decisión considerando las restricciones del problema en cuestión, y de esa forma poder maximizar o minimizar la función objetivo. La secuencia de decisiones que tome el optimizador la llamaremos **política óptima**.

Dentro del amplio abanico de teorías, técnicas y problemas que podemos enmarcar en el contexto de la optimización cabe mencionar:

- La Teoría de juegos
- Método directo de cálculo.
- Método del cálculo diferencial clásico.
- Programación lineal y no lineal.
- El Cálculo de las variaciones.
- Teoría de Control óptimo.
- Programación Dinámica.

En este trabajo de grado nos enfocaremos en abordar las últimas dos técnicas: la Teoría de Control Óptimo y la Programación Dinámica. Veremos la relación que hay entre ellas y la aparición de la ecuación diferencial parcial de Hamilton- Jacobi- Bellman.

La idea de control puede ser expresada como el proceso mediante el cuál se ejerce una influencia sobre el comportamiento de un sistema dinámico para alcanzar un propósito previamente fijado. Si el objetivo es optimizar una función costo que depende del control, estamos hablando de la **Teoría de Control Óptimo**.

Richard Bellman definió la Teoría de Control Óptimo como “una cierta disposición de la mente, más que como un conjunto de teorías y modelos matemáticos”. El objetivo, en sentido amplio, es conseguir que un sistema funcione del modo “más conveniente” se trata de intentar optimizar el comportamiento de un sistema, cuando ello sea posible.

Esta teoría ha sido desarrollada desde principios de los años 50 por un grupo de matemáticos rusos dirigidos por Lev Semenovich Pontryagin (1908 - 1988) y constituye una herramienta fundamental para resolver problemas de optimización dinámica.

A través de la teoría de control óptimo se estudian los sistemas reales, construyendo modelos matemáticos abstractos que, por una parte, los explique y, por otra, permitan regular la evolución del mismo mediante la adopción de decisiones adecuadas: decisiones óptimas. A continuación un ejemplo de la vida real donde queda ejemplificada las variables que interviene en un Problema de Control óptimo. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1. [7]

Consideremos el cuerpo humano de una determinada persona Alejandro. El cuerpo humano es un sistema que evoluciona en el tiempo es por tanto un Sistema dinámico. Un día determinado Alejandro decide ir al médico, pues no se encuentra bien. El médico, tras escuchar al paciente, lo examina para conocer su estado de salud: le toma la temperatura, la presión, y le hace un electrocardiograma. Es decir, el médico mide el estado del sistema en dicho momento y toma nota de él (son las variables de estado en dicho momento). Como el estado del paciente no es el adecuado, hay que tomar medidas para modificar dicho estado: el médico le dice al paciente que debe poner en práctica las siguientes medidas: dormir ocho horas diarias, hacer ejercicio físico tres veces por semana, y dejar de fumar. Cuando el paciente ponga en práctica las recomendaciones hechas por el médico su estado de salud variará, de manera que cuando vuelva al médico un mes más tarde a pasar la revisión, el valor que tomarán las variables de estado será diferente. Los nuevos valores de las variables de estado dependerán de los valores que tenían el mes anterior y de las medidas que se han puesto en práctica (variables de control). Las medidas que propone el médico se entiende que son las óptimas en la situación de Alejandro: llevar una vida normal para un hombre de su edad. Hubieran sido diferentes si el paciente fuera

un deportista que se está preparando para las próximas olimpiadas por ejemplo, es decir, en cada caso la función objetivo sería distinta y, en consecuencia, las medidas a tomar (variables de control) también serían diferentes.

El ejemplo anterior probablemente no se pueda resolver utilizando técnicas de optimización dinámica, al menos en los términos que están expresados, ya que para ello hace falta que el sistema dinámico en cuestión se pueda representar matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales (en caso de tiempo continuo) o de ecuaciones en diferencias (caso de tiempo discreto), conteniendo las variables de estado y las variables de control. Asimismo las condiciones iniciales, las restricciones a las variables y la función objetivo del problema se tienen que poder expresar matemáticamente.

Formalización matemática[28]

Tras la presentación del ejemplo anterior estamos en condiciones de analizar los elementos que intervienen en la descripción formal de un problema genérico de optimización dinámica.

- El **tiempo**, se puede medir en unidades continuas o discretas. Se suele definir en un intervalo que abarca desde un tiempo inicial 0 hasta un tiempo final T no siempre conocido. El intervalo se representa como

$$0 \leq t \leq T$$

- Las **Variables de estado**. Son n números reales que caracterizan el estado del sistema en el intervalo temporal. Denotaremos por $x(t)$ al vector fila o columna (según el contexto) con componentes.

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Cada variable de estado se supone función continua del tiempo, de modo que la *trayectoria de estado* es una función continua de valores vectoriales del tiempo, cuyo valor en cualquier tiempo t perteneciente al intervalo $[0, T]$, es el vector de estado $x(t)$.

- Las **variables de control**. Son m números reales que caracterizan las elecciones que deben hacerse, son las decisiones que permiten llevar el sistema, de un modo óptimo, de un estado a otro si ello fuese posible. Se representan por el vector fila o columnas (según

el contexto):

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

Cada variable de control ha de ser una función del tiempo continua a trozos, de modo que resulte una *trayectoria de estado* que sea también continua a trozos, cuyo valor, en cualquier momento del intervalo correspondiente, es el *vector de control* $u(t) \in \Omega$. Donde Ω es el conjunto de controles admisibles

- Las **ecuaciones de estado**. Son un conjunto de n ecuaciones diferenciales que caracterizan la evolución en el tiempo (trayectoria) de las variables de estado. Su representación es

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Las n funciones se suponen dadas y continuamente diferenciables. Si estas ecuaciones diferenciales no dependen explícitamente del tiempo, se hablará de *ecuaciones de estado autónomas*.

- El **funcional Objetivo**, es una aplicación de las trayectorias de control en puntos de la recta real, cuyo valor debe ser optimizado. Frecuentemente se escribe de la forma

$$J = \int_0^T F(x(t), u(t), t) + S(T, x(T))$$

donde $F(x(t), u(t), t)$ se denomina *función intermedia*, $S(T, x(T))$ función final. Las dos funciones se suponen dadas y diferenciables. Un funcional del tipo anterior se dice que está en la forma de **Bolza**.

En el caso en que la función intermedia sea nula, es decir,

$$J = \int_0^T S(T, x(T))$$

hablaremos de un funcional de la forma de **Mayer**;

Si la función final es nula, estaremos ante un problema de **Lagrange**, es decir;

$$J = \int_0^T F(x(t), u(t), t)$$

- La **función Valor**, proporciona el máximo valor del funcional objetivo del problema de control, para un funcional objetivo de forma Bolza la función valor es;

$$V = \max_{u \in \Omega} \int_0^T F(x(t), u(t), t) + S(T, x(T))$$

En resumen, el **problema general de control** es determinar:

$$\max J = \max \int_0^T F(x(t), u(t), t) + S(T, x(T))$$

sujeto a:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

con:

$$x(0) = x_0$$

$$u \in \Omega$$

3.1 Principio de Máximo de Pontryagin

La clave de la Teoría de Control Óptimo es una condición necesaria de primer orden conocida como el *Principio del Máximo*. El enunciado del principio del máximo implica un enfoque que es afín a la función lagrangiana y a la variable multiplicadora de Lagrange. Para los problemas de control óptimo, éstas se conocen como la *función Hamiltoniana* y la variable de coestado, conceptos que vamos a desarrollar. El término principio del Máximo se atribuye a Lev Pontryagin, en 1959, presentó condiciones necesarias de optimalidad, las cuales han sido llamadas el *Principio del Máximo de Pontryagin*, para problemas de optimización determinados de la siguiente forma:

Considere el siguiente problema general de optimización:

$$\max J = \max \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt \quad (3.1)$$

sujeto a:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (3.3)$$

y

$$u(t) \in \Omega$$

donde tenemos tres variables, t la variable del tiempo, $u(t)$ la variable de control donde Ω es el conjunto de controles admisibles del problema y $x(t)$ la variable de estado. Ahora introducimos una nueva variable, conocida como la *variable de coestado* y la denotamos por $\lambda(t)$. Al igual que el multiplicador de Lagrange, la variable de coestado mide el precio sombra de la variable de estado, y con esta variable podemos ahora definir una nueva función.

Definición 3.2. Función Hamilton o Hamiltoniano:[30]

$$H(x(t), u(t), t, \lambda(t)) = F(x(t), u(t), t) + \lambda(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

El primer componente del Hamiltoniano designa el efecto del vector control sobre el valor instantáneo del objetivo. El segundo componente expresa el aumento futuro del objetivo seguido de la variación del vector estado \dot{x} . Un Hamiltoniano es entonces la suma del valor instantáneo del objetivo y de los valores futuros de este objetivo teniendo en cuenta la variación del vector de estado, ponderada por el precio asociado a esta variación.

Ahora, el principio del máximo debe su nombre a que una condición necesaria de primer orden requiere que escojamos a u de modo que maximice el Hamiltoniano H para todos los instantes de tiempo. Además de la variable de control u , como H implica a la variable de estado x y la variable de coestado λ , el enunciado del Principio del Máximo también estipula como la forma en que x y λ deben cambiar respecto al tiempo, por medio de una ecuación de movimiento para la variable de estado x (ecuación de estado) así como una ecuación de movimiento para la variable de coestado (ecuación de coestado).

La ecuación de estado siempre viene como parte del enunciado del problema, como la ecuación (3.2). En el principio del máximo esta ecuación viene dada de la siguiente forma:

$$\frac{dH}{d\lambda} = f(x(t), u(t), t) = \dot{x} \quad (3.4)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$. Mientras que la ecuación de coestado viene dada por:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dH}{dx} = -\left[\frac{dF}{dx} + \lambda \frac{df}{dx} \right] \quad (3.5)$$

sujeto a una condición de transversalidad que veremos más adelante.

La ecuación (3.4) y (3.5) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales. Así necesitamos dos condiciones de frontera para determinar las dos constantes arbitrarias que van a surgir en el proceso de solución. Para esto podemos utilizar la condición de estado inicial $x(0) = x_0$. Como el estado terminal no está fijo incluimos lo que llamaremos *Condiciones de Transversalidad* como parte del Principio del Máximo para cubrir la brecha dejada por la condición de frontera faltante. Esta condición viene dada de la siguiente manera:

$$\lambda(T) = 0$$

Ahora, si existe un control óptimo u^* que maximice (3.1) sujeto a las ecuaciones (3.2) y (3.3), y que además sea continuo a intervalos en $[0, T]$ y si $x^*(t)$ es la correspondiente trayectoria óptima entonces se cumplen las ecuaciones (3.4) y (3.5) de estado y coestado para $x^*(t)$ y λ , y además:

$$u^*(t) \text{ maximiza a } H \text{ sobre } \Omega \text{ para todo } t \in [0, T]$$

Se ha de tomar en cuenta que en las condiciones necesarias para un óptimo aparecen las tres variables x , λ , y u en un par de ecuaciones diferenciales en x y λ . La tercera ecuación necesaria para resolver el sistema se obtiene del requerimiento de que $u^*(t)$ maximiza a H . Si $u^*(t)$ es un máximo interior (no en la frontera de u) entonces la última condición de transversalidad se reduce a:

$$\frac{dH}{du} \Big|_{u=u^*} = 0$$

que es una ecuación algebraica en λ , $x^*(t)$ y $u^*(t)$

Procedamos ahora, a enunciar el Teorema del Máximo de Pontryagin.

Teorema 3.3. Principio del Máximo de Pontryagin [30]

Supóngamos que en el problema inicial 3.1 $u(t)$ la variable de control varía en el conjunto $\Omega \in \mathbb{R}$ continua por partes en $(0, T)$ y continua en $t=0$ y $t=T$. Sean además F y f funciones C^1 , entonces si $u^(t)$ es un control óptimo y $x^*(t)$ la trayectoria óptima inducida, existe una función $\lambda(t)$ tal que:*

(i) $u^*(t)$ maximiza a $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda)$

(ii) Excepto en los puntos de discontinuidad $\dot{\lambda}(t) = -\frac{dH}{dx}$

(iii) Existe alguna condición para $t = T$

En caso de que $u(t)$ varíe en el interior de Ω , la condición (i) puede escribirse como $\frac{dH}{du} = 0$. Además las derivadas de H_x y H_u se evalúan en $(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t))$

Demostración. Definamos $\varphi(u)$ como:

$$\varphi(u) = \int_0^T \{F(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}]\} dt \quad (3.6)$$

$$= \int_0^T G(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t)) dt \quad (3.7)$$

donde

$$G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) = F(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)[f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}(t)]$$

Nótese que $\varphi(u) = J$ de la ecuación (3.1) debido a que: $f(t, x(t), u(t)) - \dot{x} = 0$ por la condición (3.2) entonces,

$$\lambda(t) [f(t, x(t), u(t)) - \dot{x}] = 0$$

que es la segunda expresión de G .

Desarrollando G alrededor del punto $(x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda)$ mediante el Teorema de Taylor y eliminando los términos no lineales, se tiene que:

$$G(t, x, \dot{x}, u, \lambda) = G(t, x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda) + G_x(t, x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda)\Delta x + G_{\dot{x}}(t, x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda)\Delta \dot{x} + G_u(t, x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda)\Delta u + G_{\lambda}(t, x^*, \dot{x}^*, u^*, \lambda)\Delta \lambda$$

Como no se supuso ningún tipo de restricción terminal, vamos a suponer que tanto T como x_T son libres. Si x y u representan cualquier escogencia válida para el problema de control óptimo general mencionado anteriormente y x^* y u^* los óptimos, entonces se puede afirmar que:

$$\Delta\varphi(u) = \int_0^{T+\Delta T} G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt - \int_0^T G(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t)) dt \leq 0 \quad (3.8)$$

A su vez:

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi(u) &= \int_0^T (G_x\Delta x, G_{\dot{x}}\Delta\dot{x}, G_u\Delta u, G_\lambda\Delta\lambda) dt + \int_T^{T+\Delta T} G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt \\
&= \int_0^T \{[F_x + \lambda f_x]\Delta x + [F_u + \lambda f_u]\Delta u - \lambda\Delta\dot{x}\} dt + \int_T^{T+\Delta T} G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt \\
&= \int_0^T \{H_x\Delta x + H_u\Delta u - \lambda\Delta\dot{x}\} dt + \int_T^{T+\Delta T} G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt
\end{aligned}$$

Estamos suponiendo que x, \dot{x}, u y λ varían en un intervalo $0 \leq t \leq T + \Delta T$ y que todas las derivadas parciales se evalúan en $(t, x^*, \dot{x}, u^*, \lambda)$. Ahora bien el último término de la primera integral puede desarrollarse integrando por partes de la siguiente forma:

$$- \int_0^T \lambda(t)\Delta\dot{x}(t) dt = -\lambda(t)\Delta x(t) \Big|_0^T + \int_0^T \dot{\lambda}\Delta x(t) dt \quad (3.9)$$

Por otro lado la última ecuación de $\Delta\varphi(u)$ puede ser aproximada de nuevo por el Teorema de Taylor

$$\int_0^{T+\Delta T} G(t, x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t)) dt = G(T, x(T), \dot{x}(T), u(T), \lambda(T))\Delta T \quad (3.10)$$

y por consiguiente:

$$\Delta\varphi(u) = \int_0^T \{[H_x + \dot{\lambda}]\Delta x + H_u\Delta u\} dt - \lambda(T)\Delta x(T) + \lambda(0)\Delta x(0) + G(T, x(T), \dot{x}(T), u(T), \lambda(T))\Delta T$$

Nótese que estamos extendiendo la trayectoria de x^* linealmente a $[0, T + \Delta T]$. Se deduce que:

$$\Delta x(T) = \Delta x_T - \dot{x}(T)\Delta T$$

Como Δx y Δu son arbitrarias y x puede terminar en $x(T) = x_T$, la integral debe ser cero. λ también es arbitraria y podemos, por lo tanto, escogerla de tal forma que

$$\dot{\lambda} = -H_x = -F_x - \lambda f_x \quad (3.11)$$

$$F_u + \lambda f_u = 0$$

Donde las derivadas se evalúan en el óptimo. Es decir, tenemos las condiciones (i) y (ii). Finalmente recordemos que $\Delta\varphi(u) \leq 0$ y por lo tanto utilizando la ecuación 3.11 se deduce que:

$$\begin{aligned}
& -\lambda(T) [\Delta x_T - \dot{x}(T)\Delta T] + G(T, x(T), \dot{x}(T), u(T), \lambda(T))\Delta T = \\
& -\lambda(T)\Delta x_T + [G(T), x(T), \dot{x}(T), u(T), \lambda(T)) + \lambda(T)\dot{x}(T)]\Delta T =
\end{aligned}$$

$$-\lambda(T)\Delta x_T + [F(T, x(T), u(T)) + \lambda(T)f(T, x(T), u(T))]\Delta T - \lambda(T)\Delta x_T + H_{t=T}\Delta T \leq 0$$

si tomamos en cuenta que $G + \lambda\dot{x} = F + \lambda f = H$.

En la siguiente figura representamos las relaciones entre las diferentes variables.

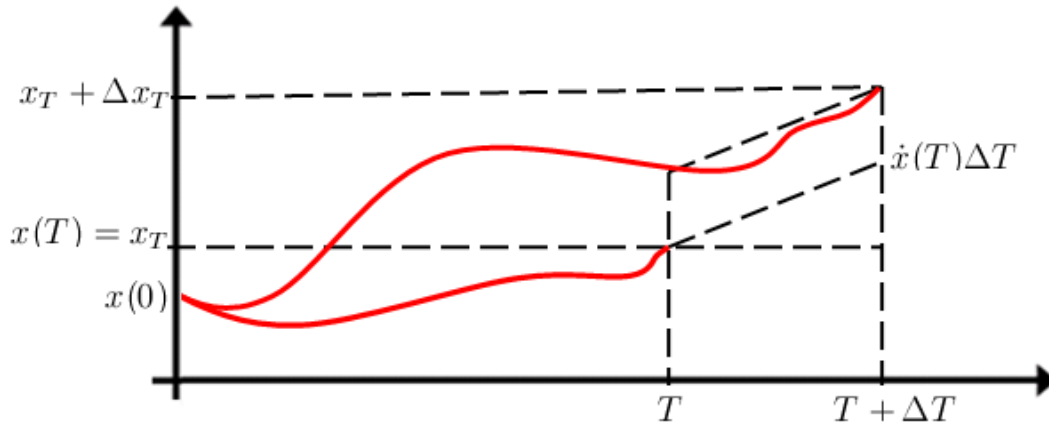


Figura 3.1: Principio del Máximo de Pontryagin

■

La última desigualdad en la demostración anterior es fundamental para determinar según la restricción en $t = T$ diferentes tipos de condiciones, llamadas **Condiciones de transversalidad**, según la condición terminal que se imponga. En la demostración se tomó a T y $x(T) = x_T$ libres. Si este no fuera el caso podemos inferir los casos más usuales para las condiciones de transversalidad:

<u>Condición Terminal</u>	<u>Condición de Transversalidad</u>
(i) $x(T) = x_T$, T fijo, x_T libre	$\lambda(T) = 0$
(ii) $x(T) = x_T$, T libre, x_T fijo	$H _{t=T} = 0$
(iii) $x(T) = x_T$, T libre, x_T libre	$\lambda(T) = 0$ y $H _{t=T} = 0$

- (iv) $x(T) = x_T$, T fijo, x_T fijo no hay restricción.
- (v) $x(T) = x_T \geq \bar{x}$, T fijo $\lambda(T) \geq 0$ ($= 0$ si $x_T > \bar{x}$)
- (vi) $x(T) = x_T$, $T \leq \bar{T}$, x_T fijo $H|_{t=T} \geq 0$ ($= 0$ si $T < \bar{T}$)

Esquemáticamente representamos los diferentes casos enunciados en la figura (3.2)

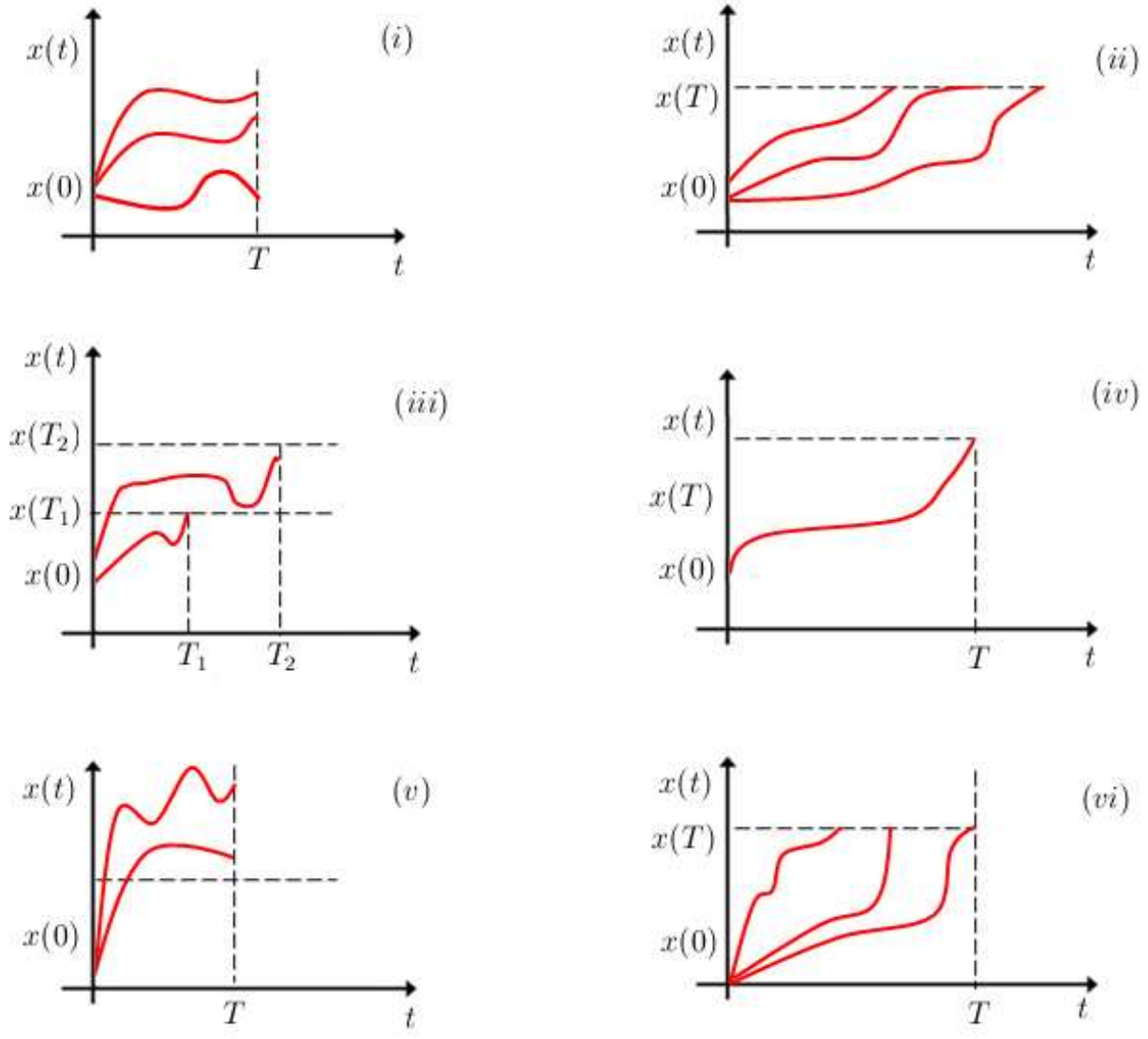


Figura 3.2: Principio del Máximo de Pontryagin

Ahora veremos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.4. [1] Supongamos que se trata de determinar la curva $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ con $x(0) = 0$, cuya pendiente no sea nunca superior a 1 y que encierre un área máxima sobre la misma.

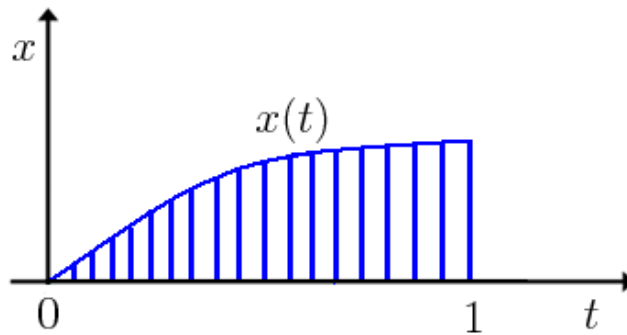


Figura 3.3: Determinación de la curva, de pendiente acotada, que encierra un área máxima bajo ella.

Solución:

La respuesta al problema se resuelve de manera inmediata, con un razonamiento sencillo. Sea $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$ una curva continua con $x(0) = 0$, y sea:

$$J = \int_0^1 x(t) dt \quad (3.12)$$

Se trata de encontrar una función $x(t)$ que maximice J sujeto a:

$$\frac{dx}{dt} = u(t) \quad (3.13)$$

$$x(0) = 0$$

$$u(t) \leq 1 \quad (3.14)$$

Donde la pendiente $u(t)$ es la variable de control.

Definiendo el Hamiltoniano H por:

$$H = x + \lambda u \quad (3.15)$$

la ecuación adjunta necesaria para λ es:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dH}{dx} = -1 \quad (3.16)$$

Con la condición de transversalidad

$$\lambda(1) = 0 \quad (3.17)$$

De las dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$\lambda(t) = 1 - t \quad (3.18)$$

y de ahí.

$$H = x + (1 - t)u \quad (3.19)$$

El Hamiltoniano H se maximiza (para $u \leq 1$) haciendo $u = 1$. Así, en la trayectoria óptima se tiene que $\frac{dx}{dt} = 1$ y por lo tanto $x^* = t$. La curva que maximiza el área bajo $x(t)$ es pues la recta que une $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

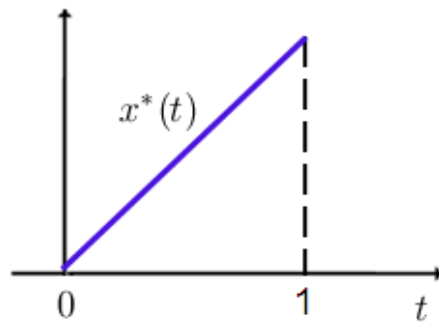


Figura 3.4: Solución óptima.

□

3.1.1 Extensiones

Para los problemas que implican descuento temporal, resulta a menudo más conveniente expresar el principio del máximo en términos del **Hamiltoniano de valor corriente** mediante

la utilización de variables adjuntas de valor corriente. Para el problema general de maximización de:

$$\int_0^T \exp^{-\delta t} r(t, x(t), u(t)) dt + \exp^{-\delta T} R(T, x(T)) \quad (3.20)$$

sujeto a:

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.21)$$

$$u(t) \in \Omega$$

se define el *Hamiltoniano de valor corriente*, \bar{H} , como:

$$\bar{H} = \bar{H}(t, x(t), u(t)\mu(t)) = r(t, x, u) + \mu f(t, x, u) \quad (3.22)$$

La ecuación para la variable adjunta de valor corriente $\mu(t)$ es:

$$\dot{\bar{H}} = \bar{H}(t, x(t), u(t)\mu(t)) = r(t, x, u) + \mu f(t, x, u) \quad (3.23)$$

con la condición de transversalidad:

$$\mu(T) = \frac{dR}{dx} \Big|_T \quad (3.24)$$

El principio del máximo (condición necesaria para optimización) exige que la variable de control, u , maximice \bar{H} para todo valor de t en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Puede probarse este resultado a partir de la definición del Hamiltoniano, haciendo $\mu(t) = \exp^{\delta t} \lambda(t)$.

La variable adjunta de valor corriente $\mu(t)$ tiene una interpretación económica sencilla como el precio sombra del recurso, es decir, representa el incremento en el valor presente (óptimo) del recurso, en ese momento t , consecuencia de un aumento unitario de la existencia, x en ese momento.

3.1.2 Interpretación Económica del Principio del Máximo

La interpretación económica que se presenta en esta sección, se basa en un interesante artículo de Robert Dorfman (1916 - 2002), que constituye una referencia habitual en los libros de control óptimo en economía.

Aspectos Previos

Para el problema básico de control óptimo que se estudia:

$$\max_{u(t)} J = \max \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt + S(T, x(T))$$

sujeito a:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (3.25)$$

$$x(t_0) = x_0$$

y

$$u(t) \in \Omega$$

se define la función valor, de la siguiente forma:

$$V : \mathbb{R}^n \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longrightarrow V(x, t)$$

siendo

$$V(x, t) = \max_{u_\tau} \int_t^T F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x(T))$$

sujeito a:

$$\dot{x} = f(x, u, \tau) \text{ para } t \leq \tau \leq T \quad (3.26)$$

$$x(t) = x$$

y

$$u(\tau) \in \Omega$$

Dados $x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$, por lo tanto $V(x, t)$ proporciona el máximo valor del funcional objetivo del problema de control, que comienza en el tiempo t , con estado x . En particular, $V(x_0, 0)$ da el valor objetivo óptimo del problema original.

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sea:

$$\lambda_i(t) = \frac{dV(x, t)}{dx_i}$$

luego $\lambda_i(t)$ es el ritmo de variación de la función valor, frente a variaciones infinitesimales de la variable de estado x_i , en el instante t .

Interpretación Económica

Se considera el problema de decisión de una empresa, cuyo objetivo es maximizar el flujo de beneficios obtenidos a lo largo de un horizonte temporal dado, que comienza en el tiempo $t = 0$ y termina en el tiempo T .

En cada instante tenemos t tenemos que:

- $x(t)$ representa el stock de capital de la empresa. Se supone conocido el stock de capital inicial, $x(0) = x_0$;
- $u(t)$ representa las decisiones que toma la empresa, como puede ser por ejemplo, la tasa de producción, precio del producto, diseño del producto, etc. Estas son las variables de control. Dichas decisiones estarán sujetas a ciertas restricciones $u(t) \in \Omega$;
- $F(x(t), u(t), t)$ es la tasa de beneficio instantáneo, medida en Bolívares por unidad de tiempo.
- $S[x(T)]$, es el valor en Bolívares de la empresa, en el tiempo final T , cuando el stock de capital final es $x(T)$.

Sea, además, para cada t , $\lambda(t)$, el cambio marginal en la función valor $V(x, t)$ frente a cambios infinitesimales en el stock de capital x . Es decir, es la variación marginal en los beneficios óptimos que se generan, desde t hasta el final, producidos por un cambio en el stock de capital en t . Por lo tanto, es el precio sombra de una unidad de capital.

La empresa puede elegir, dentro de los límites determinados, por el conjunto de restricciones, la trayectoria que quiera para el vector de variables de control $u(t)$, pero no puede decidir independientemente, el stock de capital en cada instante. Se supone que el ritmo de variación del stock de capital en t depende del stock de capital en t , de las decisiones que se toman en t y del tiempo t . Expresado matemáticamente, se supone que:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (3.27)$$

El problema, por lo tanto, es:

$$\max_{u(t)} J = \max \int_0^T F(x, u, t) dt + S[x(T)] \quad (3.28)$$

sujeto a:

$$x(0) = x_0$$

con

$$u(t) \in \Omega$$

en donde en este caso x es escalar y u es vectorial.

Para este problema, el Hamiltoniano es:

$$H(x(t), u(t), t, \lambda(t)) = F(x(t), u(t), t) + \lambda(t) \cdot f(x(t), u(t), t) \quad (3.29)$$

En forma resumida, sin especificar las variables dependientes, se tiene:

$$H = F + \lambda f$$

A partir de un instante cualquiera $t \in [0, T]$, en el que el stock de capital es $x(t)$, y el vector de variables de control es $u(t)$, se considera un incremento de tiempo dt , suficientemente pequeño, de manera que la empresa no cambie $u(t)$ entre t y $t + dt$.

Multiplicando el Hamiltoniano por dt , queda:

$$Hdt = Fdt + \lambda f dt = Fdt + \lambda \dot{x} dt = \underbrace{Fdt}_{(1)} + \underbrace{\lambda \dot{x} dt}_{(2)}$$

en donde se ha utilizado que

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (3.30)$$

y que

$$dx = \dot{x} dt$$

y además,

- (1) $F(x, u, t)dt$, es el beneficio obtenido entre los tiempos t y $t + dt$, si se parte del stock de capital x y se aplica el control u . Representa la contribución directa, en Bolívares, al objetivo desde t a $t + dt$, si se está en el estado x , y se aplica el control u .

(2) $dx = f(x, u, t)$, es el cambio en el stock de capital desde t a $t + dt$, cuando se está en el estado x y se aplica el control u , por lo que: λdx , representa el valor en Bolívares del incremento del stock de capital. Es decir, el cambio de stock de capital de x a $x + dx$, hace que haya un incremento en los beneficios generados hasta el final del horizonte temporal, utilizando las decisiones óptimas, de λdx Bolívares. Por lo tanto, puede ser considerado como la contribución indirecta a J , en Bolívares.

Por lo tanto, $H dt$ puede ser interpretado como la contribución total a J , desde t a $t + dt$, cuando $x(t) = x$ y $u(t) = u$. Se ve claramente, a partir de la interpretación del Hamiltoniano, que lo que hay que maximizar en cada t , es el H y no la función F . En efecto:

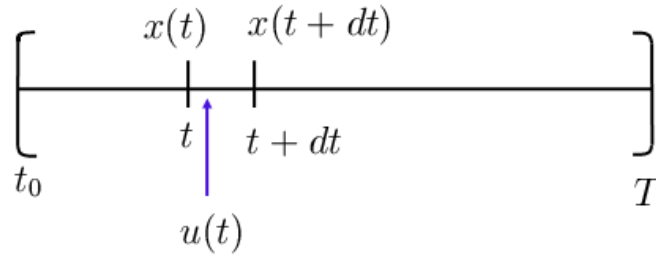


Figura 3.5: Decisiones que se toman en t .

Las decisiones que se toman en t , representadas por $u(t)$, afectan al beneficio que se obtiene en $[t, t + dt]$ (contribución directa), pero también a $x(t + dt)$, y con ello al punto de partida de la empresa en $t + dt$, y por lo tanto a su capacidad de generar beneficios desde $t + dt$ hasta el final del horizonte temporal (contribución indirecta). Es claro que hay que elegir u de manera que se maximice el Hamiltoniano y, con ello, la suma de la contribución directa e indirecta.

Veamos ahora la interpretación de la condición 1:

$$\dot{\lambda} = -\frac{dH}{dx} = -\frac{dF}{dx} - \lambda \frac{df}{dx}, \quad \text{con } \lambda(T) = \frac{dS[x(T)]}{dx}$$

se puede expresar:

$$-d\lambda = H_x dt = F_x dt + \lambda(f_x dt),$$

en donde,

$$H_x = \frac{dH}{dx}, \quad F_x = \frac{dF}{dx} \quad \text{y} \quad f_x = \frac{df}{dx},$$

Por lo que, a lo largo del camino óptimo, el decrecimiento en el precio sombra del capital desde t a $t + dt$, es decir la depreciación del precio sombra del capital desde t a $t + dt$, que puede ser considerado como el coste marginal de mantener dicho capital, se iguala al ingreso marginal de invertir dicho capital, que consiste en la suma de las contribuciones marginales directa e indirecta. Por último, la condición final

$$\lambda(T) = \frac{dS[x(T)]}{dx}$$

resulta evidente a la vista de la interpretación dada a $\lambda(t)$, para cada $t \in [0, T]$. En efecto, en T , final del horizonte temporal, ya no hay que tomar ninguna decisión, el valor de la empresa es $S[x(T)]$ y, por lo tanto, el precio sombra de una unidad de capital es

$$\lambda(T) = \frac{dS[x(T)]}{dx} \tag{3.31}$$

3.2 Control Bang- Bang

Se dice que un control óptimo es **Bang - Bang**, si cada una de las variables de control sólo toma valores en los puntos extremos de un intervalo. Veamos una familia de problemas de control en la que el control óptimo es bang-bang.

Consideremos el siguiente problema de control:

$$\max_u J = \int_0^T [F(x, t) + G(x, t)] dt$$

sujeto a:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u$$

con:

$$x(t_0) = x_0$$

$$a \leq u \leq b$$

La función integrando del funcional objetivo, así como la función que define la ecuación de estado, son lineales en u .

El Hamiltoniano es:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, t) + G(x, t)u + \lambda[f(x, t) + g(x, t)u]$$

$$\max_{a \leq u \leq b} H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (3.32)$$

teniendo en cuenta la expresión de H, la ecuación 3.32 es equivalente a:

$$\max_{a \leq u \leq b} [G(x^*, t) + \lambda^* g(x^*, t)]u$$

cuya solución óptima es:

$$u^*(t) = \begin{cases} b & \text{si } G(x^*, t) + \lambda^* g(x^*, t) > 0 \\ \text{cualquier valor en } [a, b] & \text{si } G(x^*, t) + \lambda^* g(x^*, t) = 0 \\ a & \text{si } G(x^*, t) + \lambda^* g(x^*, t) < 0 \end{cases}$$

Sí $G(x^*, t) + \lambda^* g(x, t) \neq 0$, salvo quizá para instantes de tiempo aislados, el control óptimo del problema, suponiendo que existe, toma, o bien el mayor de los valores posibles, o bien el menor de los valores posibles (pudiendo tomar cualquier valor $[a, b]$ en los posibles instantes aislados). Por lo tanto, el control óptimo es bang-bang.

Si el problema fuera de minimización, el control óptimo, en caso de existir, también sería bang - bang.

A continuación vamos a ilustrar con un ejemplo, una clase de problemas de control bang-bang, llamados de tiempo mínimo, utilizando un análisis gráfico, característico de este tipo de problemas.

Ejemplo 3.5 ([7]). *Hay que conducir un vehículo desde una posición de reposo inicial, a otra posición de repos final, recorriendo una distancia a , en línea recta. Los controles disponibles para el conductor son el acelerador y el freno. La ecuación de movimiento del vehículo es:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

en donde $u = u(t)$ representa la aceleración o desaceleración (frenado), y $x = x(t)$, la distancia recorrida en el instante t . El control u puede tomar cualquier valor comprendido entre $-\alpha$ (frenado máximo) y β (aceleración máxima), siendo $\alpha, \beta > 0$. Se trata de trasladar el vehículo en el mínimo tiempo posible.

Solución.

Con objeto de transformar la ecuación de movimiento, que es una ecuación diferencial de segundo orden, en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se definen las variables.

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$$

El problema a resolver es:

$$\min_{T,u} T = \int_0^T dt \quad (\text{minimizar el tiempo utilizado})$$

sujeito a:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (\text{relación entre } x_1 \text{ y } x_2)$$

$$\dot{x}_2 = u \quad (\text{ecuación de movimiento del vehículo})$$

con:

$$x_1(0) = 0 \quad (\text{la distancia recorrida al principio, es cero}),$$

$$x_2(0) = 0 \quad (\text{la velocidad inicial es cero})$$

$$x_1(T) = a \quad (\text{la distancia total recorrida, debe ser } a)$$

$$x_2(T) = 0 \quad (\text{en el instante final, la velocidad es cero}),$$

$$-\alpha \leq u \leq \beta \quad (\text{valores que puede tomar el control})$$

El Hamiltoniano asociado al problema es:

$$H(x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2, t) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

Vamos a resolver el problema utilizando simultáneamente el principio del máximo y un método gráfico en el plano de fases. Por el principio del máximo:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{por lo que } \lambda_1^*(t) = A)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \quad (\text{por lo que } \lambda_2^*(t) = -At + B)$$

y

$$\min_{-\alpha \leq u \leq \beta} H(x_1^*, x_2^*, u, \lambda_1^*, \lambda_2^*, t) = 1 + \lambda_1^* x_2^* + \lambda_2^* u$$

cuya solución óptima es:

$$u^*(t) = \begin{cases} -\alpha & \text{si } \lambda_2^* > 0 \\ \text{cualquier valor en } [-\alpha, \beta] & \text{si } \lambda_2^* = 0 \\ \beta & \text{si } \lambda_2^* < 0 \end{cases}$$

Si $u^*(t) = \beta$, las ecuaciones de estado serán:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \beta$$

La solución de dicho sistema es:

$$x_2(t) = \beta t + C$$

$$x_1(t) = \frac{\beta}{2}t^2 + Ct + D$$

Se puede expresar:

$$x_1(t) = \frac{1}{2\beta}[x_2(t)]^2 + \left(D - \frac{C^2}{2\beta}\right),$$

es decir:

$$x_1 = \frac{1}{2\beta}x_2^2 + K_1$$

siendo K_1 una constante que depende de las condiciones iniciales.

Representemos, en este caso, las posibles trayectorias de x_1 y x_2 , en el plano de fases en la figura 3.6

Cada parábola corresponde a un valor de K_1 . Las flechas indican el sentido de la evolución a través del tiempo, que se obtiene teniendo en cuenta lo siguiente:

- Como $\dot{x}_2 = \beta > 0$, x_2 es creciente en el tiempo.
- Como $\dot{x}_1 = x_2$
 1. será, $\dot{x}_1 > 0$, y por lo tanto x_1 creciente en el tiempo, si $x_2 > 0$
 2. será, $\dot{x}_1 < 0$, y por lo tanto x_1 decreciente en el tiempo, si $x_2 < 0$

- Si $u^*(t) = -\alpha$, las ecuación de estado serán:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha$$

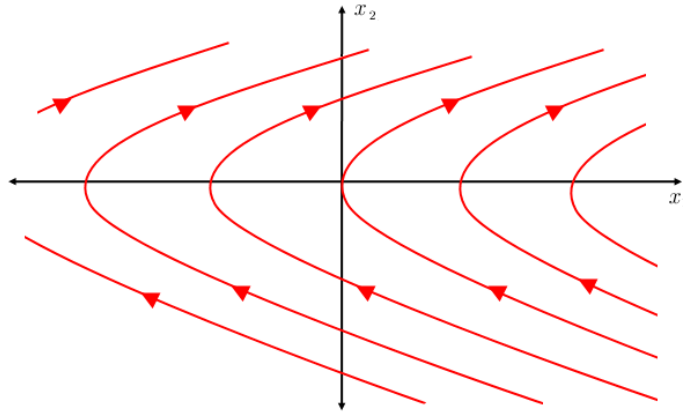


Figura 3.6: Posibles trayectorias de x_1 y x_2 , si $u^*(t) = \beta$

La solución del sistema es:

$$x_2(t) = -\alpha t + E,$$

$$x_1(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + Et + F$$

Se puede expresar

$$x_1(t) = -\frac{1}{2\alpha}[x_2(t)]^2 + \left(F + \frac{E^2}{2\alpha}\right),$$

es decir,

$$x_1 = -\frac{1}{2\alpha}x_2^2 + K_2$$

siendo K_2 una constante que depende de las condiciones iniciales. Representemos, en este caso, las posibles trayectorias de x_1 y x_2 , en el plano de fases, en la figura 3.7

Cada parábola corresponde a un valor de K_2 . Las flechas indican el sentido de la evolución a través del tiempo, que se obtiene teniendo en cuenta que:

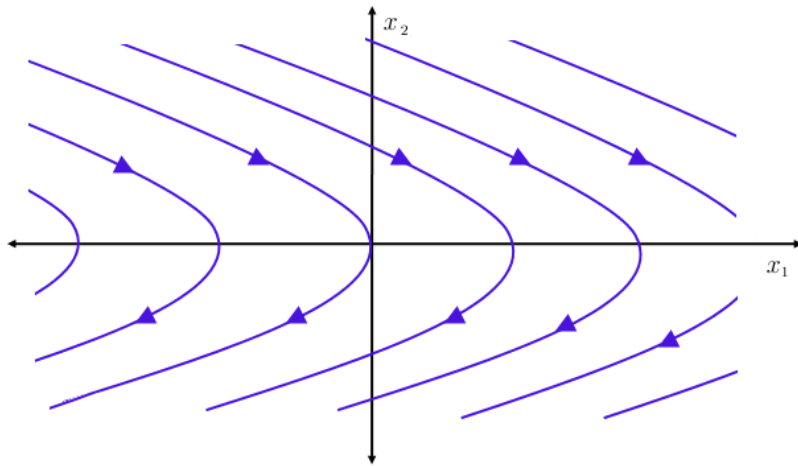


Figura 3.7: Decisiones que se toman en t .

- Como $\dot{x}_2 = -\alpha < 0$, resulta que x_2 es decreciente en el tiempo.
- Como $\dot{x}_1 = x_2$ será,
 1. $\dot{x}_1 > 0$, y por lo tanto x_1 creciente en el tiempo, si $x_2 > 0$
 2. $\dot{x}_1 < 0$, y por lo tanto x_1 decreciente en el tiempo, si $x_2 < 0$

Aunque, hasta ahora, hemos analizado por separado dos posibles valores para la variable de control, puede ocurrir que dicha variable tome un valor para ciertos valores de t , y el otro valor para los restantes valores de t , por lo que ahora se consideran simultáneamente los dos tipos de trayectorias, es decir, se utilizan conjuntamente los dos gráficos anteriores para definir un único gráfico, que aparece en la figura 3.8.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y finales del problema, la trayectoria óptima será OBA, por lo que habrá que aplicar el control $u^*(t) = \beta$ (máxima aceleración) al principio, hasta que cierto instante t_c en el que se cambiará $u^*(t) = -\alpha$ (máximo frenado), que ya se mantiene hasta el instante final.

A continuación se calcula analíticamente el instante t_c en el que cambia el control, y el instante final T^* .

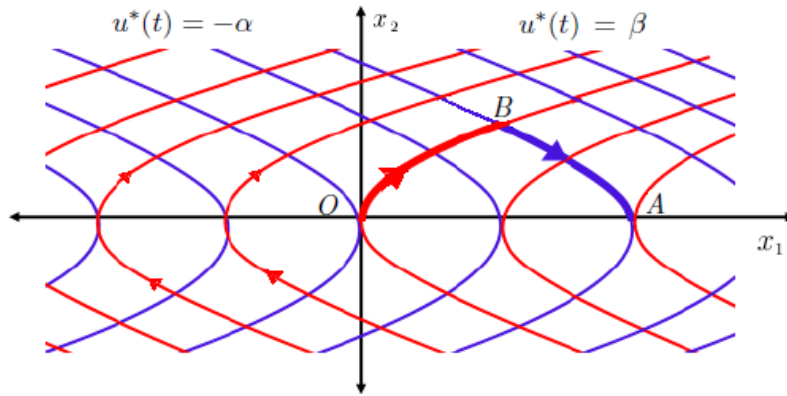


Figura 3.8: Solución óptima en el plano de fases.

La ecuación de la parábola que contiene al tramo OB se calcula teniendo en cuenta que corresponde al control $u^*(t) = \beta$, y que pasa por el punto $(0,0)$, por lo que se verifica que:

$$0 = \frac{1}{2\beta}0^2 + K_1 \Rightarrow K_1 = 0$$

Por lo tanto, su ecuación es:

$$x_1 = \frac{1}{2\beta}x_2^2$$

La ecuación de la parábola que contiene al tramo BA se calcula teniendo en cuenta que pasa por el punto $(a,0)$, y que corresponde al control $u^*(t) = -\alpha$. Se obtiene:

$$x_1 = \frac{-1}{2\beta}x_2^2 + a$$

Las coordenadas del punto B se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2\beta}x_2^2 \\ x_1 = \frac{-1}{2\beta}x_2^2 + a \end{cases}$$

de donde

$$x_2 = +\sqrt{\frac{2a\alpha\beta}{\alpha + \beta}}, \quad x_1 = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta}$$

Como para $u^*(t) = \beta$ se había obtenido que:

$$x_2(t) = \beta t + C,$$

y es $x_2(0)$, resulta que:

$$x_2^*(t) = \beta t, \quad \text{para } 0 \leq t \leq t_c$$

Particularizando en t_c :

$$x_2^*(t_c) = \beta t_c = \sqrt{\frac{2a\alpha\beta}{\alpha + \beta}}, \Rightarrow t_c = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2a\alpha\beta}{\alpha + \beta}} = \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}}$$

Calculemos ahora el instante final, es decir, el instante T^* en el que se alcanza el punto $A = (a, 0)$. En el tramo final se aplica el control $u^*(t) = -\alpha$. Ya conocemos que, en tal caso, es:

$$x_2(t) = -\alpha t + E$$

como

$$x_2(T^*) = 0$$

será

$$-\alpha T^* + E = 0$$

por lo que

$$E = \alpha T^*$$

y

$$x_2^*(t) = \alpha(T^* - t), \quad \text{para } t_c \leq t \leq T^*$$

ya que x_2^* tiene que ser una función continua, será,

$$x_2^*(t_c) = \alpha(T^* - t_c) = \beta t_c$$

por lo que,

$$T^* = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} t_c = \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}}$$

Por lo tanto:

$$u^*(t) = \begin{cases} \beta & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} \\ -\alpha & \text{si } \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} < t \leq \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} \end{cases}$$

con

$$x^*(t) = x_1^*(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{2} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} \\ -\frac{\alpha}{2} t^2 + \alpha \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} t - \frac{a\alpha}{\beta} & \text{si } \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} < t \leq \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} \end{cases}$$

y

$$\dot{x}(t) = x_2^*(t) = \begin{cases} \beta t, & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} \\ -\alpha t + \alpha \sqrt{\frac{2a(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}} & \text{si } \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} < t \leq \sqrt{\frac{2a(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}} \end{cases}$$

Calculemos los valores que toman $\lambda_1^*(t)$ y $\lambda_2^*(t)$. Al aplicar la condición del principio del máximo se había obtenido:

$$\begin{aligned} \lambda_1^*(t) &= A \\ \lambda_2^*(t) &= -At + B \end{aligned}$$

De acuerdo con la solución óptima calculada al aplicar la otra condición del principio del máximo, y con deducciones posteriores, deberá ser:

$$\lambda_2^*(t_c) = 0,$$

es decir:

$$0 = -A \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} + B,$$

Por lo que:

$$\lambda_2^*(t) = A \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} - t \right),$$

Por otra parte, por ser T libre, se tendrá que cumplir la condición de transversalidad:

$$[H]_{t=T^*} = 0$$

que en este caso queda como:

$$1 + \lambda_2^*(T^*) u^*(T^*) = 0$$

es decir:

$$1 + A \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} - \sqrt{\frac{2a(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}} \right) (-\alpha) = 0$$

Por lo que

$$A = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha+\beta)}} - \sqrt{\frac{2a(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}} \right)^{-1}$$

y, por lo tanto, A es negativo.

entonces, para

$$0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}},$$

se tiene que,

$$\lambda_1^*(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} - \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} \right)^{-1}$$

$$\lambda_2^*(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} - \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} \right)^{-1} \left(\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} - t \right)$$

Vemos que, efectivamente, para

$$0 < t < \sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}}, \text{ es } \lambda_2^*(t) < 0,$$

por lo que hay que aplicar $u^*(t) = \beta$, mientras que para

$$\sqrt{\frac{2a\alpha}{\beta(\alpha + \beta)}} < t \leq \sqrt{\frac{2a(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}}, \text{ es } \lambda_2^*(t) > 0$$

por lo que hay que aplicar $u^*(t) = -\alpha$.

El control óptimo es de tipo bang-bang. Se ha encontrado un control admisible que lleva el sistema desde el estado inicial al estado final en un tiempo finito. Ello quiere decir que existe solución al problema formulado. Por otra parte, la solución óptima, que sabemos existe, debe cumplir las condiciones del principio del máximo. Así pues, al aplicar las condiciones del principio del máximo, hemos obtenido que hay un único conjunto de funciones para los que se cumple, por lo que se puede asegurar que constituyen la solución óptima del problema, sin que haya que estudiar condiciones suficientes.

□

3.3 Control Estocástico

En esta sección se hace una introducción al control estocástico, para lo cual necesitamos algunos conceptos de la teoría de probabilidad. El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el espacio de probabilidad, que consta de una terna ordenada $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ en donde Ω es un conjunto arbitrario que convenientemente puede ser interpretado como el conjunto de

todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto Ω se le llama espacio muestral, y a un elemento típico de Ω se le denota por ω . El segundo elemento es una colección no vacía \mathfrak{F} de subconjuntos de Ω , llamada σ -álgebra, que es cerrado bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. A los elementos de \mathfrak{F} , subconjuntos de Ω , se les llama eventos o conjuntos medibles. Finalmente el tercer elemento es una función $P : \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$, llamada medida de probabilidad positiva, que cumple los siguientes axiomas:

$P(\Omega) = 1$ y es σ -aditiva, es decir, si A_1, A_2, \dots es una sucesión de eventos, disjuntos dos a dos, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Las leyes del azar están representadas por las distintas medidas de probabilidad existentes. El número $P(A)$ es una medida de la frecuencia con la que se observa el evento A cuando se realiza el experimento aleatorio. A la pareja (Ω, \mathfrak{F}) se le llama *espacio medible*. En particular, si $B(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} , entonces se tiene el espacio medible $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. A los elementos de la σ -álgebra $B(\mathbb{R})$ se les llama **Borelianos** o conjunto de Borel medibles. Una variable aleatoria real, es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que transforma a los elementos de Ω en números reales y es tal que para cualquier $B \in B(\mathbb{R})$, el conjunto

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

es un elemento de \mathfrak{F} . En este caso también se dice que X es una función medible entre los espacios medibles (Ω, \mathfrak{F}) y $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, o simplemente que es \mathfrak{F} -medible. Mediante una de estas funciones uno puede pensar que el azar no escoge elementos de Ω como resultados del experimento aleatorio, sino números reales.

El espacio medible $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ puede convertirse en un espacio de probabilidad, entre otras formas, con la ayuda de una variable aleatoria (va) X , de la siguiente manera. Para cada $B \in B(\mathbb{R})$ se define $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$. La función P_X resulta ser una medida de probabilidad sobre $B(\mathbb{R})$. Se le llama la distribución de X , si encierra en ella toda la información probabilística de X . Equivalentemente se estudia la función $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ dada por $F(x) = P(X \leq x)$ y llamada función de distribución asociada a la variable aleatoria X .

Si g es una función real de variable real tal que la composición $g(X)$ es una variable aleatoria (va), entonces se define la esperanza de $g(X)$ como sigue $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$, en donde $F(x)$ es la función de distribución de X y la integral involucrada es una integral Riemann-Stieltjes sobre la cual se asume su existencia. En particular, cuando $g(x) = x$ se obtiene la esperanza de X denotada por $E[X]$ y cuando $g(x) = (x - E[X])^2$ entonces se obtiene la varianza de X denotada por $Var[X]$.

Más generalmente, la esperanza condicional de una variable aleatoria integrable X , dada una sub- σ -álgebra $g \subseteq F$, es una variable aleatoria, denotada usualmente por $E[X | g]$, que es integrable, g -medible y satisface la igualdad.

$$\int_g E[x | g]dP = \int_g XdP,$$

para cualquier $g \in G$. Estas tres propiedades caracterizan de manera única (en el sentido casi seguro) a la esperanza condicional. Particularmente haremos uso de las siguientes propiedades: Si X es g -medible, entonces X misma cumple con la definición de esperanza condicional y por lo tanto $E[x | g] = X$. Por otro lado también usaremos el hecho de que si X es independiente de g entonces la esperanza condicional $E[x | g]$ es la constante $E[X]$.

Definición 3.6. Un vector $X = (X_1, \dots, X_n)$ donde X_1, \dots, X_n son variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) es llamado **vector aleatorio**

Definición 3.7. (Función de distribución conjunta) La función de distribución $F = F_{x_1, \dots, x_n}$ de un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) esta definida por

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{X_1, \dots, X_n}(x) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n, \}) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n). \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Si la distribución de un vector aleatorio X tiene densidad f_x , uno puede representar la función de distribución F_X de X como

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_1, \dots, dy_n,$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in R^n,$$

donde la densidad es una función que satisface

$$f_X(x) \geq 0,$$

para todo $x \in R^n$, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_1, \dots, dy_n = 1.$$

Si un vector X tiene densidad f_x , todas sus componentes X_i , los vectores de pares $(X_i, X(j))$, triples (X_i, X_j, X_k) , etc., tienen una función de densidad. Estas son llamadas densidades marginales.

Definición 3.8. La *esperanza o media* de un vector aleatorio X esta dada por

$$\mu_x = E[X] = (E[x_1], \dots, E[x_n]) = (\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n})$$

La matriz de **covarianza** de X esta definida como

$$\sum_X = (\text{cov}(X_i, X_j) : i, j = 1, \dots, n)$$

donde

$$\begin{aligned} (\text{cov}(X_i, X_j)) &= E[(X_i - \mu_{x_i})(X_j - \mu_{x_j})] \\ &= E[(X_i X_j) - \mu_{x_i} \mu_{x_j}] \end{aligned}$$

es la covarianza de X_i y X_j . Nótese que la $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{Var}(X_i) := \sigma^2 x_t$.

Definición 3.9. Vector Gaussiano. Un vector normal (X_1, \dots, X_n) es una colección de variables aleatorias normales cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \mu)\Sigma^{-1}(x - \mu)^t\right\}, \quad x \in R^n$$

donde, μ es la media del vector y Σ es la matriz de covarianza, el vector $(x - \mu) = (X_1 - \mu_{X_1}, \dots, X_n - \mu_{X_n})$ y $(x - \mu)^t$ es su transpuesto.

Definición 3.10. Independencia. Las variables aleatorias X_1, \dots, X_n son independientes si, para toda colección de índices $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ y enteros $1 \leq k \leq n$ y todo subconjunto B_1, \dots, B_n de R ,

$$P(X_{i_1} \in B_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in B_{i_k}) = P(X_{i_1} \in B_{i_1}) \dots P(X_{i_k} \in B_{i_k}).$$

Esto significa que los eventos $\{X_{i_1} \in B_{i_1}\} \{X_{i_k} \in B_{i_k}\}$ son independientes. Las *va* X_1, \dots, X_n son independientes sí y solo si su función de distribución conjunta puede escribirse como sigue:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n),$$

$(x_1 \dots x_n) \in R^n$.

Si el vector aleatorio $X = X_1, \dots, X_n$ tiene densidad f_X , entonces X_1, \dots, X_n son independientes si y solo si:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n),$$

para $(x_1 \dots x_n) \in R^n$.

3.3.1 Procesos estocásticos

Un proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria.

Definición 3.11. *Un proceso estocástico a tiempo continuo es una familia $\{X_t, t \in I\} = \{X_t(\omega), t \in I, \omega \in \Omega, I \subseteq R\}$ de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad Ω . Donde I es un intervalo, un conjunto finito o infinito numerable.*

Un proceso estocástico es una función de dos variables:

- Para un instante de tiempo t fijo, $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria.
- Para un ω fijo es una función del tiempo $X_t(\omega)$, $t \in I$. Esta función es llamada **trayectoria del proceso**.

Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in I)$ puede ser considerado como la colección vectores aleatorios $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ para t_1, \dots, t_n y $n \geq 1$. Para cada uno de ellos podemos determinar la esperanza y la matriz de covarianza.

Definición 3.12. *La función esperanza de un proceso $X = \{X_t, t \in I\}$ esta dada por*

$$\mu_X(t) = \mu_{X_t} = E[X_t], t \in I.$$

Definición 3.13. La **función covarianza** de un proceso $X = \{X_t, t \in I\}$ esta dada por

$$\sum_X(t, s) = \text{cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_{X(t)})(X_s - \mu_{X(s)})], \quad t, s \in I.$$

Definición 3.14. La **función varianza** de un proceso $X = \{X_t, t \in I\}$ esta dada por

$$\sigma_{X(t)}^2 = \sum_X(t, t) = \text{var}(X_t), \quad t \in I.$$

Definición 3.15. Las **distribuciones finito-dimensionales** de un proceso estocástico $X = \{X_t, t \in I\}$ son las distribuciones de los vectores finito-dimensionales $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, para todo $t_1, \dots, t_n \in I$ y $n \geq 1$.

Si dos procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad satisfacen que sus distribuciones finito dimensionales son iguales, entonces ellos son *iguales en ley*.

Definición 3.16. Un proceso $X = \{X_t, t \in I\}$ es **estacionario** si $\{X_t\}$ y $\{X_{t+h}\}$ son iguales en ley para todo t y todo $h \in I$. Esto quiere decir que X es un proceso estacionario si sus características son invariantes respecto a traslaciones en el tiempo. Sea $X = \{X_t, t \in I\}$ un proceso estocástico y $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

Si el estado en que se encuentra el proceso estocástico depende sólo del estado anterior, pero no de los anteriores a éste, estaremos ante un **proceso de Markov**. Cuando t toma valores discretos, diremos que el proceso estocástico es de parámetro discreto y cuando toma valores continuos, diremos que el proceso estocástico es de parámetro continuo.

Un **proceso de Markov** es un tipo particular de proceso estocástico en el que únicamente el estado actual del proceso es relevante a la hora de predecir el estado futuro. Es decir, la historia pasada del proceso y la forma en que el presente ha emergido del pasado son irrelevantes. Un **proceso de Wiener** es un tipo especial de proceso estocástico de Markov.

3.3.2 Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

Definición 3.17. Un proceso estocástico $(W_t, t > 0)$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es un **proceso de Wiener o movimiento Browniano** si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $W_0 = W(0, \omega) = 0$ para casi todo ω .
- (ii) El proceso $\{W(t, \omega) : t > 0\}$ es Gaussiano sobre (Ω, \mathcal{F}, P) y para cualquier t y h con $t + h > 0$, $W(t + h, \omega) - W(t, \omega)$ tiene media 0 y varianza $|h|$.
- (iii) W tiene trayectorias continuas, como se puede apreciar en la figura 3.12

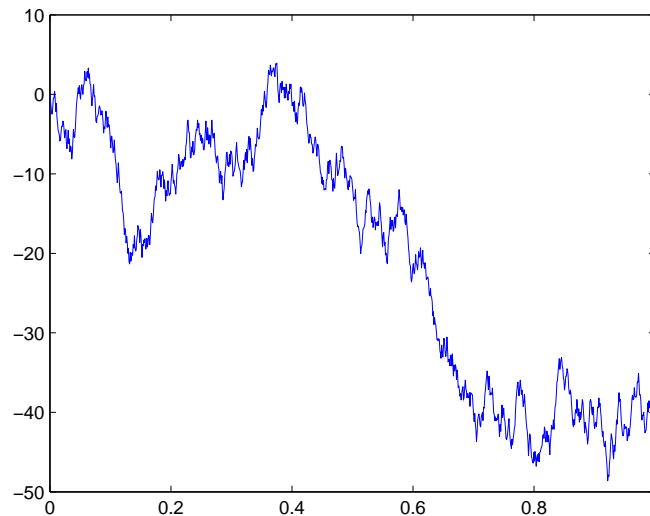


Figura 3.9: Trayectoria de un Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

Propiedades del Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

- (i) $E[W_t] = 0$
- (ii) $E[(W_t)^2] = t$ si $t \geq 0$.
- (iii) $E[W_t W_s] = (s \wedge t)$.
- (iv) $E[(W_t - W_s)^2] = (t - s)$ si $t \geq s$.

3.3.3 Integral estocástica

En esta sección se hace una breve introducción a la noción de la integral estocástica de Itô. Sabemos que las trayectorias del movimiento Browniano no son diferenciables y tienen variación no acotada. Esto tiene su mayor consecuencia en la definición de una integral estocástica con respecto a las trayectorias Brownianas. La integral estocástica de Itô se definirá como el límite en media cuadrática de sumas de Riemann-Stieltjes. También aprenderemos una importante herramienta conocida como el **lema de Itô** que no es más que el análogo estocástico de la regla de diferenciación de la cadena.

Antes de introducir la definición de integral estocástica daremos algunos conceptos importantes:

Definición 3.18. La familia $(F_t, t \geq 0)$ de σ -álgebra sobre Ω es llamada una **filtración** si

$$F_s \subseteq F_t \subseteq F \text{ para todo } 0 \leq s \leq t.$$

Intuitivamente, una filtración representa la evolución de una historia.

Definición 3.19. Sea $X = \{X_t : t \in R_+\}$ un proceso estocástico.

- (i) Se dice que X es un proceso medible si $X : \Omega \times R_+ \rightarrow R$ es una función medible con respecto a la σ -álgebra producto $F \otimes B(R_+)$. Esto es $X^{-1}(B(R)) \subset F \otimes B(R_+)$.
- (ii) X es adaptado a la filtración $\{F_t : t \in R_+\}$ si X_t es F_t -medible (es decir, $X_t^{-1}(B(R)) \subset F_t$), para $t \in R$.
- (iii) La filtración definida por $F_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ es la σ -álgebra más pequeña que contiene a la familia $\{X_s^{-1}(B) : s \in [0, t], B \in B(R)\}$. Esta filtración es llamada la filtración natural del proceso estocástico X .

Si el proceso estocástico Y es adaptado a la filtración Browniana natural $F_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ para todo t , diremos que Y es adaptada al movimiento Browniano. Esto significa que Y_t es una función de $W_s, s \leq t$

Integral estocástica de Itô

Los movimientos Brownianos se basan en la definición del proceso de Wiener. Las trayectorias del proceso de Wiener son continuas pero no derivables. Por tanto el paso de un proceso

estocástico de tiempo discreto a otro de tiempo continuo no es inmediato. Requiere de la construcción de una nueva herramienta matemática: **la integral estocástica**.

Por ejemplo las integrales del tipo

$$\int_0^t f(s, \omega) dW_s(\omega).$$

El hecho de que las trayectorias de los movimientos Brownianos no sean diferenciables ni de variación acotada impide integrar respecto a éste movimiento en el sentido de Riemann - Stieltjes. Surge por tanto la necesidad de crear una nueva integral, que en casos de regularidad del integrando sí coincidirá con la integral de Riemann-Stieltjes.

Definición 3.20. *El proceso estocástico $C = (C_t, t \in [0, 1])$ es simple si satisface las siguientes propiedades: Existe una partición*

$$\tau : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T,$$

y una sucesión $(Z_i, i = 1, \dots, n)$ de variables aleatorias tales que

$$C_t = \sum_{k=1}^n Z_k \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k]}^t + Z_n \delta_T(t),$$

donde la sucesión $(Z_i)_{i=1}^n$ está adaptada a $F_{t_i} = \sigma\{W_{t_j} : t_j \leq t_i\}$; esto es Z_i es una función de un movimiento Browniano para tiempo t_{i-1} y satisface $E[Z_i^2] < \infty$ para todo i y $\delta_T = 1$, si t_T y cero en otro caso.

Un proceso simple es entonces un proceso “constante” a trozos, adaptado a F_t y tiene trayectorias cuadrado integrables. Denotaremos por \mathfrak{L}_0 al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos simples.

Integral estocástica de Itô para procesos simples.

Primero consideremos la clase de procesos cuyas trayectorias toman sólo un número finito de valores. Sea $W = \{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento Browniano y $F_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$ la filtración natural correspondiente.

Definición 3.21. La integral estocástica de Itô para un proceso simple C sobre $[0, T]$ está dada por

$$\int_0^T C_s dW_s = \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n Z_i \Delta_i W.$$

La integral estocástica de un proceso simple C sobre $[0, t]$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, está dada por

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dW_s = \int_0^T C_s 1_{[0, t]}(s) dW_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i W + Z_k (W_t - W_{t_{k-1}}).$$

donde $\sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i W = 0$

Propiedades de la Integral estocástica de Itô para procesos simples.

- La integral estocástica de Itô tiene esperanza cero, esto es $E[I_t(C)] = 0$
- La integral estocástica de Itô es cuadrado integrable y satisface la propiedad de isometría.
- La integral de Itô es lineal: Para constantes c_1, c_2 y procesos simples $C^{(1)}$ y $C^{(2)}$ sobre $[0, T]$.

$$\int_0^t [c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}] dW_s = c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dW_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dW_s$$

La integral estocástica de Itô es lineal sobre intervalos adyacentes: Para $0 \leq t \leq T$,

$$\int_0^T C_s dW_s = \int_0^t C_s dW_s + \int_t^T C_s dW_s$$

- El proceso $I(C)$ tiene trayectorias continuas.

Integral estocástica de Itô (Extensión por aproximación)

Ahora extendemos la integral estocástica a procesos un poco más generales. Sea $\mathfrak{L}_2[0, T]$ el espacio de todos los procesos medible,

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\varphi(t, \omega); t \in R^+, \omega \in \Omega\} \\ &= \{\varphi(\omega)\}_{t \geq 0} \end{aligned}$$

adaptados a $F_t = \omega\{W_s; s \leq t\}$ tales que,

$$\|\varphi\|_{2, T}^2 = E \left[\int_0^T \varphi_s^2(\omega) ds \right] < \infty.$$

la métrica asociada a este espacio es

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|\varphi\|_{2,n} \wedge 1).$$

Este espacio es completo respecto a esta norma, es decir, es un espacio de Banach. Por lo tanto toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él.

Queremos darle sentido a la definición de $\int_0^T \varphi_t(\omega) dW_t$ para toda $\varphi \in \mathfrak{L}_2[0, T]$, para esto recordemos que todo proceso simple es un elemento de \mathfrak{L}_2 , entonces tenemos que $\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_2$, además \mathfrak{L}_0 es denso en \mathfrak{L}_2 respecto a la norma asociada. Esto significa que para cualquier proceso $\varphi \in \mathfrak{L}_2[0, T]$ existe una sucesión de procesos simples

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n_k} C_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(t),$$

donde C_i son procesos simples F_t -medibles y cuadrado integrables, tales que $\varphi_n \uparrow \varphi$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T (\varphi_n(t) - \varphi(t))^2 dt = 0,$$

así definimos

$$\int_0^T \varphi(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW_t,$$

que existe por que $h_n = \int_0^T \varphi_n(t) dW_t$, es una sucesión de Cauchy, puesto que

$$E \left| \int_0^T \varphi_n(t) dW_t - \int_0^T \varphi_m(t) dW_t \right|^2 = \int_0^T E |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

Notemos que esta integral es una variable aleatoria integrable, tal que $E(I(\varphi)) = 0$, además es cuadrado integrable y se puede ver fácilmente, que la definición no depende de la sucesión, de esta manera usando la propiedad de isometría para funciones simples y el Teorema de convergencia dominada tenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T (\varphi_n(t)) dW_t \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T E(\varphi_n(t))^2 dt = \int_0^T E(\varphi^2(t)) dt,$$

luego,

$$E \left[\int_0^T (\varphi_n(t)) dW_t \right]^2 = \int_0^T E(\varphi^2(t)) dt,$$

Definición 3.22. Sea $\varphi \in \mathfrak{L}_2[0, t]$, entonces la **Integral de Itô** de φ de 0 a T está definida por

$$\int_0^T \varphi(t) dW_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dW_t(\omega)$$

donde $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones simples tales que

$$E\left[\int_0^T [\varphi(t) - \varphi_n(t)]^2 dt\right] \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

La integral así definida satisface la propiedad de isometría,

$$E\left[\left(\int_0^T \varphi(t) dW_t\right)^2\right] = \int_0^T E(\varphi^2(t)) dt$$

Así como también todas las demás propiedades que cumple la integral para procesos simples.

3.3.4 Lema de Itô

El matemático japonés Kiyoshi Ito (1951- 2008) en 1942 desarrolló y probó lo que actualmente se conoce como **Lema de Itô**. Este teorema describe un comportamiento aleatorio por medio de una ecuación.

Conocemos la regla de la cadena para diferenciar y sabemos que

$$\int_0^t f'(g(s)) dg(s) = f(g(t)) - f(g(0)) \quad (3.33)$$

donde g es diferenciable en s y f derivable en $g(s)$.

Ahora. ¿Qué pasa si sustituímos $g(t)$ por un movimiento Browniano?

A continuación daremos una caracterización sencilla de la fórmula de Itô.

Lema 3.23. Lema de Itô Sea f una función dos veces continuamente diferenciable.

Entonces

$$f(W_t) - f(W_s) = \int_s^t f'(W_x) dW_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(W_x) dx, \quad s < t.$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de Itô

Demostración. Sea $f \in C^2$, consideremos sin pérdida de generalidad $s = 0$ y $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ una partición de $[0, t]$ luego

$$f(W_t) - f(W_0) = \sum_{i=0}^{m-1} [f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i})].$$

Como $f : [W_0, W_t] \rightarrow R$ es una función tal que f', f'' están definidas en $[W_0, W_t]$, sean a y x distintos puntos del $[W_0, W_t]$, entonces haciendo un desarrollo de Taylor de orden 2 de f en torno a el punto a tenemos

$$f(W_{t_i}) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(W_{t_i} - a) + \frac{f''(a)}{2} (W_{t_i} - a)^2$$

$$f(W_{t_{i+1}}) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(W_{t_{i+1}} - a) + \frac{f''(a)}{2} (W_{t_{i+1}} - a)^2$$

luego

$$\begin{aligned} f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i}) &= f'(a)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2} [(W_{t_i} - a)^2 - (W_{t_{i+1}} - a)^2] \\ &= f'(a)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2} [(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{i+1}} + W_{t_i} - 2a)] \end{aligned}$$

tomando $a = W_{t_i}$ obtenemos

$$\begin{aligned} f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{f''(W_{t_i})}{2} [(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{i+1}} + W_{t_i} - 2W_{t_i})] \\ = f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{f''(W_{t_i})}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, sea G la σ -álgebra generada por $(W_{t+dt} - W_t)$, luego

$$\begin{aligned} (dW_t)^2 &= (W_{t+dt} - W_t)^2 = E[(W_{t+dt} - W_t)^2 | G] \\ &= E[W_{t+dt}^2 | G] - 2E[W_{t+dt}W_t | G] + E[W_t^2 | G] \\ &= E[W_{t+dt}^2] - 2E[W_{t+dt}W_t] + E[W_t^2] \\ &= t + dt - 2[(t + dt) \wedge t] + t \\ &= t + dt - 2t + t = dt \end{aligned}$$

Es decir,

$$(dW_t)^2 = (W_{t+dt} - W_t)^2 = dt$$

luego

$$f(W_{t_{i+1}}) - f(W_{t_i}) = f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \frac{f''(W_{t_i})}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$$

haciendo $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \rightarrow 0$ y sumando tenemos que

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) (dW_s)^2 \\ &= \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds \end{aligned}$$

Lema 3.24. Extensión I del lema de Itô

Sea $f(t, x)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas.

Entonces

$$f(t, W_t) - f(s, W_s) = \int_s^t \left[f_1(x, W_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, W_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x, W_x) dW_s, \quad s < t.$$

Lema 3.25. Extensión II del lema de Itô

Consideramos procesos de la forma $f(t, X_t)$, X se define como un **Proceso de Itô** y está dado por

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dW_s,$$

A^1 y A^2 son adaptados al movimiento Browniano y $f(t, x)$ es una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas. Entonces

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(s, X_s) &= \int_s^t \left[f_1(y, X_y) + A_y^1 f_2(y, X_y) + \frac{1}{2} [A_y^2]^2 f_{22}(y, X_y) \right] dy \\ &\quad + \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y, X_y) dW_y, \quad s < t. \end{aligned}$$

3.3.5 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

La definición de Ecuación diferencial estocástica es análoga a la de ecuaciones diferenciales ordinarias, salvo que la función solución es un proceso estocástico. La motivación para estudiar a ésta clase de Ecuaciones diferenciales consiste en resolver un problema real con determinada precisión. Por ejemplo, sea la ecuación diferencial ordinaria lineal de un sistema de primer orden sin excitación externa,

$$\frac{dX}{dt} = a(t)X \tag{3.34}$$

con

$$X(0) = X_0 \text{ constante}$$

Si $a(t)$ es una función determinista escalar variante en el tiempo, X también lo será. Pero, si $a(t)$ se describe mediante:

$$a(t) = r_t + \text{ruido}$$

entonces X será un proceso estocástico, y la ecuación (3.34) será una **Ecuación Diferencial Estocástica**.

Para hallar una solución de la ecuación 3.34, se debe modelar a la señal “ruido”, es decir proponer características que permitan delimitar el alcance del planteo. Suponiendo que “ruido” sea un proceso estocástico W ruido blanco con las siguientes propiedades:

- (i) Para todo $t_1 \neq t_2$ entonces W_{t_1} y W_{t_2} son independientes.
- (ii) $\{W_t\}$ es estacionario, es decir que la distribución conjunta de $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$ no depende de t .
- (iii) $E[W_t] = 0$ para todo t

Con ésta definición de W , se puede escribir a la ecuación (3.34) como

$$\frac{dX}{dt} = r_t X + \sigma_t W_t X \quad (3.35)$$

donde σ_t es un escalar función del tiempo. Con mayor generalidad, las funciones temporales r_t y σ_t pueden ser función de t y de X . Así, la ecuación 3.35 se convierte en:

$$\frac{dX}{dt} = r(t_k, X_k) X + \sigma(t_k, X_k) W_t X \quad (3.36)$$

Resolviendo, se define el intervalo de integración $[0, t]$ y en el mismo una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$. Se tiene que la ecuación 3.36 puede escribirse como

$$\frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta t_k} = r(t_k, X_k) X_k + \sigma(t_k, X_k) W_k X_k$$

despejando Δt_k

$$X_{k+1} - X_k = r(t_k, X_k) X_k \Delta t_k + \sigma(t_k, X_k) X_k W_k \Delta t_k$$

donde $X_j = X(t_j)$, $W_k = W(t_k)$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

Reemplazando el producto

$$W_k \Delta t_k$$

por

$$\Delta V_k = V(t_{k+1}) - V(t_k)$$

donde $\{V_t, t \geq 0\}$ sugiere que sea un movimiento Browniano. Se demuestra porque es el único problema estocástico con trayectorias continuas y tales características en sus incrementos. Entonces, poniendo al problema estocástico $V_t = B_t$, se tiene que

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} r(t_j, X_j)X_j \Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)X_j \Delta B_j \quad (3.37)$$

Haciendo en la ecuación 3.37 $\Delta t_k \rightarrow 0$, si es que existe límite en algún sentido, se puede escribir la solución X como

$$X_t = X_0 + \int_0^t r(s, X_s)X_s ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)X_s dB_s,$$

donde dB_t es un movimiento browniano que inicia en el origen. Ahora la ecuación puede escribirse incluso en la forma compacta diferencial

$$dX_t = r(t, X_t)X_t dt + \sigma(t, X_t)X_t dB_t,$$

con

$$X(0) = 0 \text{ constante}$$

que es la ecuación estocástica general de la ecuación 3.34

Solución de la ecuación diferencial estocástica

Para hallar la solución de la ecuación diferencial estocástica, una de las herramientas más poderosas es la fórmula de Itô. En ésta sección sólo se desarrollará la aplicación, como motivación del estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas y su utilidad para representar procesos reales.

Suponiendo que, $r, \sigma \in R$, en la ecuación se tiene que

$$dX_t = rdtX_t + \sigma X_t dB_t \quad (3.38)$$

donde se pueden agrupar las variables de la forma

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma dB_t \quad (3.39)$$

integrando ambos miembros, se tiene

$$\int_0^t \frac{dX_s}{X_s} ds = \int_0^t r ds + \int_0^t \sigma dB_s = rt + \sigma B_t \quad (3.40)$$

Para hallar la solución del lado izquierdo, se evaluará mediante la fórmula de Itô la función $\ln(X_t)$. Por lo tanto, se tiene que

$$d(\ln X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{X_t^2}\right) (dX_t)^2 = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2} (dX_t)^2 \quad (3.41)$$

Reemplazando el dX_t de la ecuación 3.38

$$d(\ln X_t) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2X_t^2} (rdtX_t + \sigma X_t dB_t)^2 \quad (3.42)$$

de donde finalmente, usando las reglas de derivación de Itô, se obtiene

$$d(\ln X_t) = \frac{dX_t}{X_t} - \frac{\sigma^2}{2} dt \quad (3.43)$$

integrando ambos miembros respecto al tiempo, se tiene

$$\int_0^t d(\ln X_s) ds = \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} ds - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} ds$$

donde el segundo término del lado derecho es la igualdad de la ecuación 3.40

$$\ln \frac{X_t}{X_0} = rt + \sigma B - \frac{1}{2} \sigma^2 t$$

despejando X_t se tiene la expresión del proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica de la ecuación 3.38

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B \right) \quad (3.44)$$

La esperanza es

$$E[X_t] = E[X_0] \exp(rt)$$

Nótese que la ecuación tiene la misma estructura que las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales determinísticas.

3.4 El Método de Programación Dinámica

El Método de Programación Dinámica (PD), fue introducida el año 1957 por el matemático estadounidense Richard Bellman (1920 - 1984). Este método fue introducido para resolver problemas de control óptimo y básicamente consiste en reemplazar un problema de optimización, el cual contiene una minimización o maximización en el espacio de dimensión infinita, por una ecuación diferencial en derivadas parciales no lineal, llamada *ecuación de programación dinámica* o también *ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB).

Es un método importante que permite determinar de manera eficiente las decisiones que optimizan el comportamiento de un sistema que evoluciona a lo largo de una serie de etapas. En otras palabras trata de encontrar la secuencia de decisiones que optimiza el comportamiento de un proceso de múltiples etapas.

Las situaciones susceptibles de ser representadas mediante programación dinámica pueden describirse como procesos multi-etápicos de decisión. Estos son procesos que pueden dividirse en etapas, en cada una de esas etapas debe tomarse una decisión. Tendremos la solución del problema cuando conozcamos la decisión óptima para cualquier situación que pueda presentarse en la evolución del sistema.

El objetivo de la programación dinámica es encontrar cuál es la política óptima para cada una de las etapas de la evolución del sistema. La política para una determinada etapa es la decisión óptima en cada uno de los posibles estados del sistema en dicha etapa.

La Programación dinámica va asociada a situaciones de cambio de un sistema que va evolucionando a lo largo de varias etapas (de ahí su carácter dinámico). En la mayoría de las ocasiones se tratará de representar el comportamiento de un sistema que evoluciona a lo largo del tiempo. En otros casos, se trata de situaciones en la que las decisiones se toman de manera simultánea en el tiempo, pero en las que se evalúan las decisiones de manera secuencial.

Para cada etapa debe definirse un conjunto de estados. El estado debe sintetizar toda la información que debemos conocer de la evolución del sistema en las etapas anteriores. Los estados posibles para una etapa no tienen por qué ser los mismos para la etapa siguiente (aunque si

deben definirse de la misma manera, los estados aseguran la continuidad entre una y otra etapa) y el número de estados puede ser finito o infinito.

Una vez tomada la decisión en el estado correspondiente, el sistema evolucionará hacia alguno de los posibles estados para la etapa siguiente. Por lo tanto, el comportamiento del sistema puede percibirse como una secuencia de decisiones y evoluciones. Dicha evolución puede ser conocida con certeza, una vez tomada la decisión (Programación dinámica determinista) o bien el sistema puede evolucionar hacia diferentes estados según una ley de probabilidad conocida (Programación dinámica estocástica)

3.4.1 Principio de Optimáldad de Bellman

Como se dijo anteriormente, la PD es una técnica simple pero poderosa, que se ha demostrado muy útil para la resolución de problemas de decisión multietápicos. La idea fundamental que subyace en el método de la PD es el principio del invariante encajado, según el cual un problema difícil de resolver, esta encajado en una clase de problemas más simples de resolver, lo que permite encontrar una solución al problema original.

Supóngamos un problema clásico de maximizar cierto funcional, definimos

$$\begin{aligned}\text{máx } J &= \text{máx} \int_0^T F[x(t), u(t), t] dt \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t))\end{aligned}$$

y definimos

$$\begin{aligned}V(t_0, x_0) &= \text{máx}_u \int_{t_0}^t F[x(t), u(t), t] dt \\ x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t))\end{aligned}$$

es decir, $V(t_0, x_0)$ representa el máximo valor del funcional comenzando en t_0 y estado x_0 . Esta función se define para todo el intervalo $t_0 \leq t \leq T$ y para cualquier estado factible x_0 . En particular tenemos que $V(T, x(T)) = 0$

Partiendo la integral en dos partes, tenemos:

$$V(t_0, x_0) = \max_u \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} F[x(t), u(t), t] dt + \int_{t_0+\Delta_t}^T F[x(t), u(t), t] dt \right\}$$

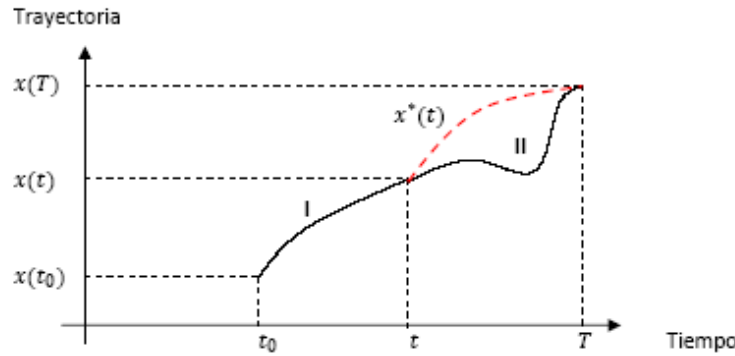
Supongamos que la función de control $u(t)$ (control) en el intervalo $t_0 + \Delta_t \leq t \leq T$ es óptima para el problema que inicia en $t_0 + \Delta_t$ en el estado $x(t_0 + \Delta_t)$.

Sin embargo el estado $x_0 + \Delta_x$ depende del estado anterior y de $u(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta_t$

Por ello tenemos que

$$V(t_0, x_0) = \max_u \int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} F[x(t), u(t), t] dt + \left[\max_u \int_{t_0+\Delta_t}^T F[x(t), u(t), t] dt \right] \quad (3.45)$$

$$= \max_u \int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} F[x(t), u(t), t] dt + V(t_0 + \Delta_t, x_0 + \Delta_x) \quad (3.46)$$



La ecuación 3.45 nos dice que V , en todo el intervalo $[t_0, T]$, se puede interpretar como la suma de lo que se aporta en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta_t]$ más lo que se aporta en forma óptima desde la posición $x_0 + \Delta_x$ a partir del instante $t_0 + \Delta_t$.

Se aproxima la primera expresión de la última ecuación 3.45, la integral $\int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} F(x(t), u(t), t) dt$ que representa el área bajo la curva $F(x(t), u(t), t)$ comprendida entre las rectas t_0 y $t_0 + \Delta_t$.

Con lo cual obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} F(x(t), u(t), t) dt \approx F(x(t_0), u(t_0), t_0) \Delta_t$$

Estamos suponiendo tácitamente que Δ_t es tan pequeño que $u(t)$ el control no cambia en el intervalo $[t_0, t_0 + \Delta_t]$. Ahora, supongamos que V es C^2 de tal manera que podemos desarrollar V en serie de Taylor, alrededor de (t_0, x_0) y eliminando términos no lineales, se tiene:

$$V(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) = V(t_0, x_0) + V_t \Delta t + V_x \Delta x$$

se obtiene entonces que

$$V(t_0, x_0) = \max\{F(t_0, x_0, u)\Delta t + V(t_0, x_0) + V_x \Delta x + V_t \Delta t$$

restando $V(t_0, x_0)$ ambos lados de la igualdad

$$0 = \max\{F(t_0, x_0, u)\Delta t + V_x(t_0, x_0)\Delta x + V_t(t_0, x_0)\Delta t\}$$

dividiendo por Δt y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$

$$0 = \max\{F(t_0, x_0, u) + V_x(t_0, x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + V_t(t_0, x_0)\}$$

sustituyendo

$$0 = \max\{F(t_0, x_0, u) + V_x(t_0, x_0)\dot{x}(t) + V_t(t_0, x_0)\}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= \max\{F(t_0, x_0, u) + V_x(t_0, x_0)f(t, x, u) + V_t(t_0, x_0)\} \Leftrightarrow \\ -V_t(t_0, x_0) &= \max\{F(t_0, x_0, u) + V_x(t_0, x_0)f(t, x, u)\} \end{aligned}$$

que es la Ecuación de Bellman. ■

ésta ecuación se basa en el siguiente principio:

Principio de la Programación dinámica o Principio Fundamental de Optimalidad:

“ Una política óptima tiene la propiedad que sí, en un período dado, cualquiera sea el estado y las decisiones precedentes, las decisiones que quedan por tomar constituyen una política óptima con respecto al resultado de las decisiones precedentes. ”

Para éste caso, el Principio de Programación Dinámica quiere decir que la función de control $u(t)$ en el intervalo $t_0 + \Delta_t \leq t \leq T$ es óptima para el problema que arranca en $t_0 + \Delta_t$ en el estado $x(t_0 + \Delta_t) = X_0 + \Delta x$. Sin embargo el estado $x_0 + \Delta x$ depende de x_0 y de $u(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta_t$.

Ejemplo 3.26. Stock - beneficio [7]

Una mina contiene 80 unidades de mineral. La autoridad responsable de la gestión de la mina debe decidir la cantidad de mineral a extraer en cada uno de los cuatro períodos de que dispone para su explotación, transcurridos los cuales el valor del mineral que queda en la mina es cero. La cantidad de mineral a extraer en cada uno de los períodos puede ser 0, 10, o 20 unidades, debiendo ser obviamente menor o igual que la cantidad de mineral que quede en la mina en el momento de la extracción. El beneficio que se obtiene en un período depende del stock de mineral (x) que hay en la mina y de la cantidad que se extraiga en dicho período (u), según se recoge en la tabla:

x/u	0	10	20	30	40	50	60	70	80
0	-5	-5	-5	-5	-10	-10	-10	-15	-15
10	-	-30	-25	-20	0	5	15	20	25
20	-	-	-35	-25	-15	-10	10	30	40

Cuadro 3.1: Beneficio en función del Stock de mineral y de la cantidad que se extrae

Calcular la cantidad de mineral a extraer en cada uno de los cuatro períodos y el correspondiente stock de mineral que va quedando en la mina en cada período.

Solución:

Comencemos haciendo un esquema, indicando los períodos, y los momentos en que se concretan a los valores de las distintas variables.

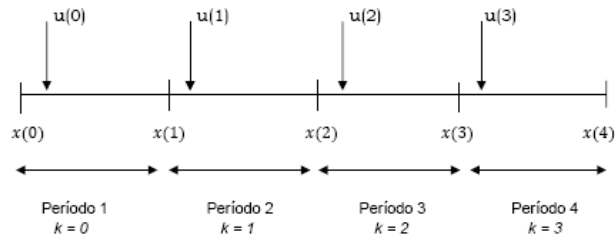


Figura 3.10: Horizonte Temporal

La variable de estado es el stock de mineral, en la mina. La variable de control es la cantidad de mineral a extraer. En concreto, para cada $k = 0, 1, 2, 3$

$x(k)$; es el stock de mineral que hay en la mina, al comienzo del período $k + 1$;

$u(k)$; es la cantidad de mineral a extraer durante el período $k + 1$,

$\Pi[x(k), u(k)]$; beneficio que se obtiene en un período en el que el stock inicial $x(k)$ y la cantidad de mineral que se extrae es $u(k)$, cuyo valor se recoge en el cuadro 3.1

El problema a resolver es el siguiente:

$$\max_{\{u(k)\}_{k=0}^3} J = \sum_{k=0}^3 \Pi[x(k), u(k)]$$

Sujeto a:

$$x(k + 1) = x(k) - u(k)$$

con:

$$x(0) = 80,$$

$$u(k) \in \{0, 10, 20\}, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

$$u(k) \leq x(k), \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Resolvemos el problema por programación dinámica.

Es conveniente empezar calculando los valores que puede tomar la variable de estado en cada uno de los períodos. Teniendo en cuenta la condición inicial, los controles admisibles y la ecuación de estado. (cuadro 3.2)

Final (del período 4): Sea $x(4)$ dado.

Valores que puede tomar $x(k)$
$x(0) = 80$
$x(1) = 80, 70, 60$
$x(2) = 80, 70, 60, 50, 40$
$x(3) = 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20$
$x(4) = 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0$

Cuadro 3.2: Valores posibles de la variables de estado

Al final del período 4 habrá $x(4)$ unidades de mineral en la mina, cantidad que no aporta nada al funcional objetivo (beneficio), por lo que:

$$J_4^*\{x(4)\} = 0 \quad (3.47)$$

Período 4: Sea $x(3)$ dado. Tal como aparece en el cuadro 3.2, será:

$$x(3) \in \{20, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$$

La ecuación de Bellman correspondiente a este período será:

$$J_3^*\{x(3)\} = \max_{u(3) \in [0,10,20]} \{\Pi[x(3), u(3)] + J_4^*\{x(3) - u(3)\}\}$$

que, teniendo en cuenta la expresión 3.47 es:

$$J_3^*\{x(3)\} = \max_{u(3) \in [0,10,20]} \{\Pi[x(3), u(3)]\}$$

En el cuadro 3.3 se resuelve dicha expresión para cada posible valor de $x(3)$.

$x(3)$	$u(3)$	$\Pi[x(3), u(3)]$
80	0	-15
	10	25
	20	40 Máximo
70	0	-15
	10	20
	20	30 Máximo
60	0	-10
	10	15 Máximo
	20	10
50	0	-10
	10	5 Máximo
	20	-10
40	0	-10
	10	0 Máximo
	20	-15
30	0	-5 Máximo
	10	-20
	20	-25
20	0	-5 Máximo
	10	-25
	20	-35

Cuadro 3.3: Información relevante para el período 4

Por lo tanto, las funciones $u^*(3)$ y $J^*(3)$ están definidas en el cuadro 3.4, en función de $x(3)$

$x(3)$	$u^*(3)$	$J_3^*\{x(3)\}$
80	20	40
70	20	30
60	10	15
50	10	5
40	10	0
30	0	-5
20	0	-5

Cuadro 3.4: Funciones, $u^*(3)$ y $J_3^*\{x(3)\}$

Período 3. Sea $x(2)$ dado.

Tal como aparece en el cuadro 3.2, será:

$$x(2) \in \{40, 50, 60, 70, 80\}$$

La ecuación de Bellman correspondiente a este período será:

$$J_2^*\{x(2)\} = \max_{u(2) \in [0, 10, 20]} \{\Pi[x(2), u(2)] + J_3^*\{x(2) - u(2)\}\}$$

En el cuadro 3.5 se resuelve dicha ecuación para cada posible valor de $x(2)$.

$x(2)$	$u(2)$	$\Pi[x(2), u(2)] + J_3^*\{x(2) - u(2)\}$
80	0	-15+40=25
	10	25+30=55 Máximo
	20	40+15=55 Máximo
70	0	-15+30=15
	10	20+15=35 Máximo
	20	30+5+35 Máximo
60	0	-10+15=5
	10	15+5=20 Máximo
	20	10+0=10
50	0	-10+5=-5
	10	5+0=5 Máximo
	20	-10+(-5)=-15
40	0	-10+0=-10
	10	0+(-5)=-5 Máximo
	20	-15+(-5)=-20

Cuadro 3.5: Información relevante para el período 3

Por lo tanto, la función $u^*(2)$ y J_2^* están definidas en el cuadro 3.6, en función de $x(2)$

$x(2)$	$u^*(2)$	$J_2^*\{x(2)\}$
80	10 o 20	55
70	10 o 20	35
60	10	20
50	10	5
40	10	-5

Cuadro 3.6: Funciones $u^*(2)$ y $J^*(2)$

Período 2. Sea $x(1)$ dado.

Tal como aparece en el cuadro de los posibles valores de la variable de estado, será:

$$J_2^*\{x(2)\} \in \{60, 70, 80\}$$

La ecuación de Bellman correspondiente a este período es:

$$J_1^*\{x(1)\} = \max_{u(1) \in [0,10,20]} \{\Pi[x(1), u(1)] + J_2^*\{x(1) - u(1)\}\}$$

En el cuadro 3.7 se resuelve dicha ecuación para cada posible valor de $x(1)$.

$x(1)$	$u(1)$	$\Pi[x(1), u(1)] + J_2^*\{x(1) - u(1)\}$
80	0	-15+55=40
	10	25+35=60 Máximo
	20	40+20=60 Máximo
70	0	-15+35=20
	10	20+20=40 Máximo
	20	30+5=35
60	0	-10+20=10
	10	15+5=20 Máximo
	20	10+(-5)=5

Cuadro 3.7: Información relevante para el período 2

Por lo tanto, la función $u^*(1)$ y J_1^* están definidas en el cuadro 3.8, en función de $x(1)$

$x(1)$	$u^*(1)$	$J_1^*\{x(1)\}$
80	10 o 20	60
70	10	40
60	10	20

Cuadro 3.8: Funciones $u^*(1)$ y $J_1^*\{x(1)\}$

Período 1. Sea $x(0)$ dado.

$$x(1) = 80$$

La ecuación de Bellman correspondiente al período 1 es:

$$J_0^*\{80\} = \max_{u(1) \in [0,10,20]} \{\Pi[80, u(0)] + J_1^*\{80 - u(0)\}\}$$

En el cuadro 3.9 se resuelve dicha ecuación para cada posible valor de $x(0)$.

$x(0)$	$u(0)$	$\Pi[80, u(0)] + J_1^*\{x(0) - u(0)\}$
	0	$-15+60=45$
80	10	$25+40=65$ Máximo
	20	$40+20=60$

Cuadro 3.9: Información relevante para el período 1

Por lo tanto, se ha obtenido que:

$$u^*(0) = 0 \text{ y } J_0^*\{80\} = 65$$

Haciendo ahora un recorrido de principio a final, se obtiene finalmente que:

Para el período 1

$$x^*(0) = 80, \quad u^*(0) = 10, \text{ por lo que } x^*(1) = 70$$

Del cuadro (3.8), y del resultado anterior se obtiene:

Para el período 2

$$x^*(1) = 70, \quad u^*(1) = 10, \text{ por lo que } x^*(2) = 60$$

Del cuadro (3.6) y del resultado anterior se observa que:

Para el período 3

$$x^*(2) = 60, \quad u^*(2) = 10, \text{ por lo que } x^*(3) = 50$$

Del cuadro (3.4), y del resultado anterior se obtiene:

Para el período 4

$$x^*(3) = 50, u^*(3) = 10, \text{ por lo que } x^*(4) = 40$$

El valor objetivo óptimo del problema es:

$$J^* = J_0^*\{80\} = 65$$

En conclusión, la decisión óptima es extraer 10 unidades de mineral en cada uno de los cuatro períodos, quedando en la mina 40 unidades de mineral (stock), y obteniéndose por todo ello un beneficio de 65.

□

Ejemplo 3.27. Recursos [7]

Supongamos que se tiene una cantidad C de un recurso que se debe repartir en su totalidad entre N actividades. Si a la actividad k se le asigna una cantidad u , se obtiene un beneficio $b_k(u)$. Se pide:

1. Plantear el problema como un problema de control óptimo en tiempo discreto.
2. Resolverlo, utilizando la programación dinámica, cuando $b_k(u) = \sqrt{u}$

Solución

1. Se consideran las actividades y las asignaciones siguientes:

Actividades	0	1	2	...	k	...	$N - 1$
Asignación	$u(0)$	$u(1)$	$u(2)$...	$u(k)$...	$u(N - 1)$

$x(k)$; es el stock del recurso C , al comienzo del período $k + 1$;

$u(k)$; controla la cantidad de recurso que se le asigna a cada actividad, para cada $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

$b_k(u)$; beneficio que se obtiene para la actividad k .

El problema es:

$$\max_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} b_k(u(k))$$

sujeto a:

$$x(k+1) = x(k) - u(k), \text{ para } k = 0, 1, \dots, N - 1$$

con:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= C, \\
 x(N) &= 0, \\
 u(k) &\leq u(k) \leq x(k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

2. El problema es ahora:

$$\text{máx}_{\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{u(k)}$$

Sujeto a:

$$x(k+1) = x(k) - u(k), \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1$$

con:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= C, \\
 x(N) &= 0, \\
 u(k) &\leq u(k) \leq x(k) \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Comenzamos haciendo un esquema sobre el horizonte temporal del problema, indicando las etapas así como la sucesión de estados y controles en el tiempo. Para resolver el problema por programación dinámica, empezamos por el final y seguimos analizando sucesivamente las N etapas, empezando por la última y continuando hacia atrás, hasta llegar a la primera etapa.

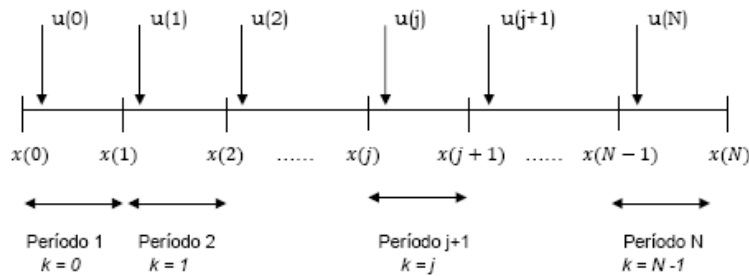


Figura 3.11: Horizonte Temporal

Final. Sea $x(N)$ dado.

Tendrá que ser $x(N) = 0$. De todas formas, como el aporte a la función objetivo de $X(N)$ es cero, ya que no aparece en el funcional objetivo del problema, será:

$$J_N^*\{x(N)\} = 0 \quad (3.48)$$

Período N : Sea $x(N-1)$ dado.

La ecuación de Bellman correspondiente al período N es:

$$J_{N-1}^*\{x(N-1)\} = \max_{u(N-1)} \{\sqrt{u(N-1)} + J_N^*\{x(N-1) - u(N-1)\}\}$$

pero siendo:

$$x(N) = 0 = x(N-1) - u(N-1)$$

con:

$$0 \leq u(N-1) \leq x(N-1) \quad (3.49)$$

Como $x(N)$ tiene que ser cero, resulta que:

$$u^*(N-1) = x(N-1) \quad (3.50)$$

ya que es la única solución factible del problema a resolver en la ecuación de Bellman. Sustituyendo (3.48) y (3.50) en (3.49) se obtiene que

$$J_{N-1}^*\{x(N-1)\} = \sqrt{x(N-1)} \quad (3.51)$$

Período $N-1$: Sea $x(N-2)$ dado.

La ecuación de Bellman correspondiente al período $N-1$ es:

$$J_{N-2}^*\{x(N-2)\} = \max_{u(N-2)} \{\sqrt{u(N-2)} + J_{N-1}^*\{x(N-2) - u(N-2)\}\}$$

$$\text{con : } 0 \leq u(N-2) \leq x(N-2)$$

teniendo en cuenta 3.51, la ecuación de Bellman se puede expresar como:

$$J_{N-2}^*\{x(N-2)\} = \max_{u(N-2)} \{\sqrt{u(N-2)} + \sqrt{x(N-2) - u(N-2)}\}$$

$$\text{con : } 0 \leq u(N-2) \leq x(N-2)$$

Para obtener la solución óptima del problema de optimización a resolver en este período, ignoramos por el momento las restricciones de desigualdad a que está sometida la variable de decisión, considerando el siguiente problema:

$$\max_u F(u) = \sqrt{u} + \sqrt{x-u} \quad (3.52)$$

Imponiendo las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad a (3.52) se tiene que:

$$F'(u) = 0 = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x-u)^{-\frac{1}{2}}(-1) \Rightarrow u^* = \frac{1}{2}x$$

$$F''(u) < 0, \text{ que corresponde a un máximo}$$

Si $x \geq 0$, entonces $u^* \in [0, x]$

Como $x(N-2)$ tiene que ser no negativo, resulta que

$$u^*(N-2) = \frac{1}{2}x(N-2),$$

Ademas,

$$J_{N-2}^*\{x(N-2)\} = \sqrt{2x(N-2)} \quad (3.53)$$

Período $N-2$: Sea $x(N-3)$ dado.

La ecuación de Bellman correspondiente al período $N-2$ es:

$$J_{N-3}^*\{x(N-3)\} = \max_{u(N-3)} \{\sqrt{u(N-3)} + J_{N-2}^*\{x(N-3) - u(N-3)\}\}$$

$$\text{con : } 0 \leq u(N-3) \leq x(N-3)$$

teniendo en cuenta 3.53, la ecuación de Bellman se puede expresar como:

$$J_{N-3}^*\{x(N-3)\} = \max_{u(N-3)} \{\sqrt{u(N-3)} + \sqrt{2}\sqrt{x(N-3) - u(N-3)}\}$$

$$\text{con : } 0 \leq u(N-3) \leq x(N-3)$$

Para obtener la solución óptima del problema de optimización a resolver en este período, ignoramos por el momento las restricciones de desigualdad a que está sometida la variable de decisión, considerando el siguiente problema:

$$\max_u G(u) = \sqrt{u} + \sqrt{2}\sqrt{x-u}. \quad (3.54)$$

imponiendo las condiciones necesarias y suficientes de optimalidad a 3.54 se tiene que:

$$G'(u) = 0 = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-u)^{-\frac{1}{2}}(-1) \Rightarrow u^* = \frac{1}{3}x$$

$G''(u) < 0$, que corresponde a un máximo

Si $x \geq 0$, entonces $u^* \in [0, x]$.

Como $x(N-3)$ tiene que ser no negativo, resulta que

$$u^*(N-3) = \frac{1}{3}x(N-3)$$

Además,

$$J_{N-3}^*\{x(N-3)\} = \sqrt{3x(N-3)}$$

En general, procediendo de esta manera se obtiene que:

$$u^*(N-m) = \frac{1}{m}x(N-m)$$

$$J_{N-m}^*\{x(N-m)\} = \sqrt{mx(N-m)}, \text{ para } m=1, 2, \dots, N.$$

Como

$$\begin{aligned} x(0) = C, \text{ y } u^*(0) = \frac{C}{N} \text{ se tiene que } x^*(1) = C - \frac{C}{N} = \frac{N-1}{N}C, \\ x^*(1) = \frac{N-1}{N}C \text{ y } u^*(1) = \frac{x^*(1)}{N-1} = \frac{C}{N}, \text{ entonces } x^*(2) = \frac{N-2}{N}C \end{aligned}$$

En general, se obtiene que:

$$\begin{aligned} x^*(k) &= \frac{C}{N} \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1 \\ u^*(k) &= \frac{N-k}{N}C, \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1, N \\ \text{con: } J^* &= \sqrt{NC} \end{aligned}$$

Como todas las actividades generan la misma función de beneficios, es lógico que la asignación óptima sea repartir la cantidad total a partes iguales entre las actividades.

□

3.4.2 Ecuación Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB)

La idea fundamental del método de programación dinámica es que la función valor V satisface una ecuación funcional llamada el Principio de Programación Dinámica.

$$V(t_0, x_0) = \max_{u \in \Omega} \left\{ \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} F(x(t), u(t), t) dt + V(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) \right\}$$

Cuando la función de valor V es suficientemente diferenciable, la versión infinitesimal del principio de programación dinámica es la ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden llamada **Ecuación Hamilton - Jacobi - Bellman (HJB)**

$$\begin{aligned} 0 &= V_t + \max_{u \in \Omega} \{ F(x, u, t) + \nabla_x V(x, t) f(x, u, t) \} \\ \text{con: } &V(x, t_f) = S(x) \end{aligned}$$

V_t : Es la derivada parcial de la función valor respecto a t

$\nabla_x V$: Vector de derivadas parciales de la función V respecto a las variables de estado x .

El método de la programación dinámica reduce entonces el problema de control óptimo que es un problema de maximización en el espacio de dimensión infinita u , a resolver una ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden.

Teorema 3.4. ([7], [19])

La función valor V es solución de la ecuación no lineal en derivadas parciales de primer orden HJB y satisface $V(x, T) = S(x, T)$

Demostración: Sean (x, t) fijos. Consideremos $t + \Delta_t$, siendo $\Delta_t > 0$, “pequeño” (casi cero). Suponemos que la definición valor es conocida en $t + \Delta_t$, y vamos un paso hacia atrás en el tiempo como si fuera tiempo discreto.

La función valor se puede aproximar de la siguiente forma:

$$V(x, t) \simeq \max_{u \in \Omega} \{ F(x, u, t) \Delta_t + V(x + \Delta x, t + \Delta_t) \} \quad (3.55)$$

$$V(x, t) = \max_{u \in \Omega} \{ F(x, u, t) \Delta_t + V(x + f(x, u, t) \Delta_t, t + \Delta_t) \} \quad (3.56)$$

Utilizando la fórmula de Taylor:

$$V(x + f(x, u, t) \Delta_t, t + \Delta_t) \simeq V(x, t) + \nabla_x V(x, t) f(x, u, t) \Delta_t + V_t(x, t) \Delta_t \quad (3.57)$$

sustituyendo (1.9) en (1.10) se obtiene:

$$V(x, t) \simeq \max_{u \in \Omega} \{F(x, u, t)\Delta_t + V(x, t) + \nabla_x V(x, t)f(x, u, t)\Delta_t + V_t(x, t)\Delta_t\}$$

$$V(x, t) = V(x, t) + V_t(x, t)\Delta_t + \max_{u \in \Omega} \{F(x, u, t)\Delta_t + \nabla_x V(x, t)f(x, u, t)\Delta_t\}$$

simplificando y dividiendo los dos miembros por Δ_t , queda:

$$0 = V_t + \max_{u \in \Omega} \{F(x, u, t) + \nabla_x V(x, t)f(x, u, t)\}$$

que es la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman. De la definición de la función valor, se obtiene inmediatamente que:

$$V(x, T) = \max_{u(t)} \int_T^T F(x, u, t)dt + S[x(T)] = S[x(T)]$$

entonces

$$V(x, T) = S[x(T)]$$

■

Teorema 3.5 Sea $W(x, t)$ solución de la ecuación HJB , entonces $W(x, t)$ es igual a la función valor, es decir $V(x, t)=W(x, t)$ para todo x y t

Demostración: Sean $W(x, t)$ solución de la ecuación HJB entonces

$$0 = W_t + \max_{u \in \Omega} \{F(x, u, t) + \nabla_x W(x, t)f(x, u, t)\} \quad (3.58)$$

$$W(x, T) = S[x(T)] \quad (3.59)$$

Sean $\hat{u}(t)$, para $t_0 \leq t \leq T$, una trayectoria arbitraria de control admisible, y $\hat{x}(t)$, para $t_0 \leq t \leq T$ la trayectoria de estado correspondiente. En virtud de la ecuación 3.58 y teniendo en cuenta que:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{u}(t), t)$$

$$0 \leq g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \nabla_t V(t, \hat{x}(t)) + \dot{\hat{x}}(t)\nabla_x V(t, \hat{x})$$

$$0 \leq g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \frac{dW(t, \hat{x}(t))}{dt}$$

Integrando ambos lados

$$0 \leq \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + \int_0^T \frac{dW(t, \hat{x}(t))}{dt} dt$$

evaluando

$$0 \leq \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + W(T, \hat{x}(T)) - W(0, \hat{x}(0))$$

despejando, teniendo en cuenta que $\hat{x}(t_0) = x_0$

$$W(0, x_0) \leq \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + W(T, \hat{x}(T))$$

sustituyendo 3.49

$$W(0, x_0) \leq \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + S[\hat{x}(T)]$$

utilizando $u^*(t)$ y $x^*(t)$ en lugar de $\hat{u}(t)$ y $\hat{x}(t)$, respectivamente, las desigualdades anteriores son igualdades, obteniéndose que:

$$W(0, x_0) = \int_0^T g(x^*(t), u^*(t), t)dt + S[x^*(T)]$$

Por lo que se deduce que

$$\int_0^T g(x^*(t), u^*(t), t)dt + S[x^*(T)] \geq \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))dt + S[\hat{x}(T)]$$

Siendo por tanto $u^*(t)$, para $t_0 \leq t \leq T$, la trayectoria óptima del vector de estado. Entonces

$$V(0, x_0) = W^*(0, x_0)$$

La deducción anterior se puede repetir, y es válida para cualquier instante inicial $t \in [t_0, T]$ y cualquier estado inicial x , obteniéndose que:

$$V(x, t) = W^*(x, t)$$

■

Una aplicación clásica de esta ecuación es el problema del Regulador Lineal Cuadrático.

Ejemplo 3.28. *Reacción Química. Regulador Lineal Cuadrático* [14]

Se desea controlar el nivel del pH de una reacción química variando la cantidad u de uno de los ingredientes. Designemos por $x(t)$ al valor del pH en el instante t . Además, supongamos que la

velocidad de cambio del PH Se supone que en cada instante la velocidad de cambio del pH es proporcional a la suma del valor del pH en dicho instante mas la cantidad u del ingrediente de control, es decir

$$\dot{x}(s) = \alpha x(s) + \beta u(s) \quad (3.60)$$

donde α y β son constantes positivas, $x(0) = x_0$ es el valor del pH en el instante inicial de pH. y t varía en un intervalo $[0, T]$

Se sabe que el funcional objetivo razonable para este problema es:

$$J^{u(\cdot)}(x, u, t) = \int_t^T (Kx^2(s) + u^2(s)) ds$$

donde K es una constante conocida.

Solución En éste caso, la función valor está definida por

$$V(x, t) = \min_{u(\cdot) \in U} \int_t^T (Kx^2(s) + u^2(s)) ds$$

Si la función V es C^1 , sabemos que satisface la siguiente ecuación no lineal de primer orden en derivadas parciales HJB

$$0 = V_t(t, x) + \min_{u \in U} \{[\alpha x + \beta u]V_x(t, x) + Kx^2 + u^2\} \quad (3.61)$$

$$= V_t(t, x) + (\alpha x)V_x(t, x) + Kx^2 + u^2 + \min_{u \in U} \{\beta u V_x(t, x) + u^2\} \quad (3.62)$$

minimizando la función cuadrática

$$u \longrightarrow u^2 + \beta u V_x(t, x) + u^2$$

cuyo mínimo es alcanzado en:

$$u^* = \frac{-\beta V_x}{2} \quad (3.63)$$

Reemplazando el valor de u^* dado por 3.63 en la ecuación 3.61, obtenemos

$$0 = V_t(t, x) + Kx^2 + \alpha x V_x(t, x) + \frac{\beta^2}{4} V_x^2(t, x) - \frac{\beta^2}{2} V_x^2(t, x) \quad (3.64)$$

$$= V_t(t, x) + Kx^2 + \alpha x V_x(t, x) - \frac{\beta^2}{4} V_x^2(t, x) \quad (3.65)$$

Ahora, asumimos que la solución de (3.55) es de la forma

$$V(t, x) = C(t)x^2$$

y tratamos de determinar $C(t)$. Las derivadas parciales son

$$V_x(t, x) = 2C(t)x \quad (3.66)$$

$$V_t(t, x) = C'(t)x^2 \quad (3.67)$$

Reemplazando (3.56) y (3.57) en la ecuación (3.55) se obtiene

$$0 = C'(t)x^2 + Kx^2 + 2\alpha C(t)x^2 - \beta^2 C(t)^2 x^2,$$

De aquí se obtiene la ecuación de Ricatti

$$C'(t) = -K - 2\alpha C(t) + \beta^2 C(t)^2, \quad (3.68)$$

con condición final $C(T) = 0$ que se deduce de $C(T)x^2 = V(T, x) = 0$. Combinando (3.53) y (3.56), el control óptimo está dado en términos de la solución de esta ecuación de Ricatti (3.58) por la forma

$$u^*(t) = \frac{-\beta V_x}{2} = -\beta x(t)C(t)$$

□

CAPÍTULO 4

GESTIÓN DE RECURSOS HÍDRICOS

“Gota a gota el agua se agota”

(Anónimo)

El agua es un recurso vital para la supervivencia humana y el desarrollo económico; a medida que la población y la economía van creciendo aumenta la demanda de agua, en tanto que la disponibilidad de ese recurso se mantiene constante. La escasez da lugar a conflictos referentes al uso del agua, que abarcan aspectos cuantitativos y cualitativos. Hay suficiente agua dulce para satisfacer las necesidades de todos, sin embargo los recursos hídricos no están equitativamente distribuidos y, a menudo, no son gestionados de manera adecuada.

El problema a resolver por la economía de los recursos naturales es la asignación intertemporal de los recursos, la sociedad debe decidir en el tiempo, sobre cuanto del stock disponible se consume ahora y cuanto se deja para el futuro. Es por ello que en las secciones siguientes vamos a ver uno de los modelos pioneros de la programación dinámica estocástica, dentro del campo de la economía de los recursos hídricos, el trabajo de Oscar Burt ([3],[4],[5]) sobre la asignación intertemporal óptima del agua subterránea. Burt no solamente resolvió el problema de la optimización del bombeo, dada una distribución de probabilidad de recarga del acuífero, sino que, además, sugirió una Política de Control de Retroalimentación Aproximadamente Óptima (PCRAO, AOFCP siglas en ingles) para establecer el ritmo corriente de bombeo como fun-

ción de la existencia de corrientes de agua subterránea. de la se desarrolla uno de los modelos pioneros de la programación dinámica estocástica, dentro del campo de la economía de los recursos hídricos. También se explica por que los acuíferos son considerados un recurso renovable no biológico. Y por último se define la gestión de un acuíferos respecto a los derechos de propiedad.

4.1 Asignación intertemporal del agua en un acuífero

La PCRAO tiene aplicación potencial en la gestión de otros recursos renovables, *siempre que no haya irreversibilidades en la capacidad del recurso para recuperarse de la explotación*. El enfoque tiene la ventaja de ser relativamente fácil de manejar, al tiempo que permite la actualización de las estimaciones de los parámetros *hidroeconómicos* más importantes.

En esta sección se reconstruye el modelo de Burt [4] y se deduce la Política de Control de Retroalimentación Aproximadamente Óptima (PCRAO). Sea:

X_t el volumen (existencia) de agua en un acuífero,

Y_t el volumen que se extrae del mismo en el año t y

$N(X_t, Y_t)$ el beneficio neto en el año t cuando se bombea la cantidad Y_t del volumen disponible X_t .

El volumen disponible fluirá sobre los costes de bombeo, ya que si baja X_t , caerá la altura del nivel del agua subterránea, aumentando con ello el desnivel con la superficie y consiguientemente los costes de bombeo. En lo que sigue se supondrá que las derivadas parciales de $N(\cdot)$ cumplen las siguientes propiedades: $N_Y(\cdot) > 0$, $N_X(\cdot) > 0$, $N_{YY}(\cdot) < 0$, $N_{XX}(\cdot) < 0$, $N_{YX} = N_{XY} > 0$.

Sea R_t la variable que representa el flujo de recarga del acuífero por precipitación (recarga natural). R_t podría aumentarse en una proporción de Y_t llamada **flujo de retorno**. Cuando se miden X_t, Y_t, R_t en las mismas unidades, se puede escribir la **ecuación de movimiento del sistema** como:

$$X_{t+1} = X_t - (1 - \alpha)Y_t + R_t \quad (4.1)$$

donde $0 < \alpha < 1$ es la proporción de Y_t que retorna al acuífero antes del principio del período $t + 1$. La recarga por precipitación será una variable aleatoria (*va*) que implicará incertidumbre en los valores futuros de X_t , y por tanto en el beneficio neto. El problema de la optimización estocástica se puede formular así:

Maximizar:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \varrho^t N(X_t, Y_t) \quad (4.2)$$

sujeto a:

$$X_{t+1} = X_t - (1 - \alpha)Y_t + R_t \quad (4.3)$$

con:

$$X_0 \text{ dado}$$

Siendo $\varrho = \frac{1}{1+\delta}$ el factor de descuento, y δ la tasa de descuento en este caso anualizada.

Identificando una distribución de probabilidad para R_t , es posible deducir las correspondientes distribuciones condicionadas y resolver el problema con la programación dinámica estocástica. Un planteamiento alternativo consistiría en formular y resolver el problema de *equivalencia de certidumbre* (EC), que resulta de la sustitución de la variable aleatoria por su valor esperado.

Sea $E(R_t) = R$. La formulación de EC del problema de optimización estocástica planteado anteriormente consiste en:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \varrho^t N(X_t, Y_t) \quad (4.4)$$

sujeto a:

$$X_{t+1} = X_t - (1 - \alpha)Y_t + R \quad (4.5)$$

con

$$X_0 \text{ dado}$$

El planteamiento de EC es un problema de optimización determinista y puede resolverse con enfoques diversos. Tal vez el más fácil sea formular el **Hamiltoniano de valor corriente** e imponer las condiciones necesarias de primer orden sobre sus derivadas parciales. El Hamiltoniano de valor corriente para el problema de EC puede expresarse como:

$$H_c = N(X_t, Y_t) + \varrho\lambda_{t+1}[-(1 - \alpha)Y_t + R] \quad (4.6)$$

donde, λ_{t+1} es el **multiplicador de lagrange** o **precio sombra** de una unidad adicional de X_{t+1} . La solución óptima, $Y_t^* > 0$, $X_t^* > 0$, y $\lambda_t^* > 0$, debe satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial H_c}{\partial Y_t} = N_Y(\cdot) - (1 - \alpha)\varrho\lambda_{t+1} = 0 \quad (4.7)$$

$$\varrho\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_c}{\partial X_t} = -N_X(\cdot) \quad (4.8)$$

$$X_{t+1} - X_t = \frac{\partial H_c}{\partial[\varrho\lambda_{t+1}]} = -(1 - \alpha)Y_t + R, \quad (4.9)$$

y las condiciones frontera de: X_0 dado y $\lim \varrho^t \lambda_t X_t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esta última ecuación se conoce como **condición de transversalidad**.

Este problema admite la posibilidad de un **equilibrio de estado estacionario**. Aunque es improbable que tal equilibrio persiste (después de todo, R_t es una variable aleatoria), las condiciones de primer orden, evaluadas en el estado estacionario, proporcionarán una guía potencialmente útil cuando el sistema no esté en equilibrio, sino *cercano* al mismo. En el estado estacionario,

$$Y_{t+1} = Y_t = Y$$

$$X_{t+1} = X_t = X$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t = \lambda$$

Las condiciones de primer orden se convierten entonces en:

$$\varrho^\lambda = \frac{N_Y(\cdot)}{(1 - \alpha)} \quad (4.10)$$

$$\varrho^\lambda [1 - (1 + \delta)] = -N_X(\cdot) \quad (4.11)$$

$$Y = \frac{R}{(1 - \alpha)} \quad (4.12)$$

Sustituyendo la ecuación (4.10) en (4.11) y despejando δ en el lado derecho, se obtiene:

$$\frac{N_X(\cdot)(1 - \alpha)}{N_Y(\cdot)} = \delta \quad (4.13)$$

El lado izquierdo de esta ecuación se puede interpretar como una tasa de beneficio de la disponibilidad del agua subterránea. Este beneficio surge de la reducción en los costes de bombeo

respecto a los que exigiría una mayor elevación del agua asociada a un menor nivel (o volumen) del stock disponible. En equilibrio, esa tasa debe igualarse al tipo de descuento.

Ya que es probable que tanto $N_Y(\cdot)$ como $N_X(\cdot)$ sean funciones de X e Y , la última ecuación puede también plantearse como la definición de la relación óptima en estado estacionario entre X e Y . Supóngase ahora que se pudiera despejar Y como función explícita de X , por ejemplo $Y = \phi(X)$, y, teniendo en cuenta por otro lado que en el estado estacionario $Y = \frac{R}{1-\alpha}$, es decir, que el ritmo de bombeo, en estado estacionario, se iguala a la recarga ajustada por el flujo del retorno, se obtiene por interacción de estas dos curvas el punto de equilibrio de EC a largo plazo. La curva $Y = \phi(X)$, y la recta $Y = \frac{R}{1-\alpha}$ se muestran un ejemplo en la figura (4.1) para un modelo estilizado de una cuenca real.

En la modelización del beneficio neto de la cuenca se supone que el beneficio bruto viene dado por el área situada debajo de la **función lineal inversa de demanda**, $P_t = a - bY_t$, donde $a = 200B_s$ es el precio de corte u ordenada en el origen que indica que la demanda se retrae hasta cero al precio de 200 Bs. (Supongamos en Bolívares) por acre-pie y $b = 500$ es la pendiente tal que con un precio cero la demanda es igual a $\frac{a}{b} = 0,4 \times 10^6$ acres-pie¹. El beneficio bruto asociado al bombeo de Y_t es pues $B_t = aY_t - \frac{b}{2}Y_t^2$.

Supóngase que el coste de bombear Y_t de un acuífero con un volumen disponible de X_t venga dado por $C_t = c\frac{Y_t}{X_t}$, donde c es un parámetro que depende del acuífero concreto de que se trate y de las unidades de medida que se utilicen para X_t e Y_t . Para el ejemplo, cuando se miden X_t y Y_t en 10^6 acres-pie, se ha tomado $c = 1000B_sF$. La expresión del beneficio neto se convierte entonces en:

$$N_t = aY_t - \left(\frac{b}{2}\right)Y_t^2 - c\frac{Y_t}{X_t}, \quad (4.14)$$

cuyas derivadas parciales son

$$N_Y(\cdot) = a - bY_t - \frac{c}{X_t} \quad (4.15)$$

¹Un acre-pie es el volumen de agua que se necesita para cubrir una superficie de un acre, aproximadamente 0,4 hectáreas, y una profundidad de 1 pie aproximadamente 30 cm.

y

$$N_X(\cdot) = c \frac{Y_t}{X_t^2} \quad (4.16)$$

Sustituyendo estas derivadas en la expresión de equilibrio resulta:

$$Y = \phi(X) = \frac{X(aX - c)\delta}{[c(1 - \alpha) + b\delta X^2]} \quad (4.17)$$

La figura 4.1 muestra esta curva con $a = 200$, $b = 500$, $c = 1000$ y $\delta = 0,05$. Para la cuenca que se está estudiando, se ha tomado $R = 0,175 \times 10^6 \text{ acres} - \text{pie}$ y $\alpha = 0,27$, lo cual implica que el ritmo de bombeo en estado estacionario es $Y = \frac{R}{(1-\alpha)} = 0,2397 \times 10^6 \text{ acres} - \text{pie}$. Numéricamente se puede calcular que el equilibrio para la variable de estado se logra en $X^* = 15,328 \times 10^6 \text{ acres} - \text{pie}$.

En un mundo en el cual la recarga es realmente estocástica puede que el concepto de equilibrio no sea realmente muy útil. La curva de equilibrio $Y = \phi(X)$ puede, no obstante, emplearse como una PCRAO cuando X_t varía en función de Y_t y R_t . Esta aproximación también se muestra en la figura 4.1, donde los valores de (no-equilibrio) X_1 y X_2 se proyectan verticalmente sobre $Y = \phi(X)$, y las correspondientes intersecciones horizontalmente sobre el eje Y , para determinar los ritmos respectivos de bombeo aproximadamente óptimos Y_1 e Y_2 . Debe subrayarse que esta manera de operar con $Y = \phi(X)$ proporciona valores que sólo se aproximan a los ritmos de bombeo óptimos que se obtienen a partir de la solución de una sucesión de problemas estocásticos de programación dinámica.

En un estudio empírico de la gestión del agua subterránea. Burt halló que, cuando las reservas X_t estaban en torno al 40% del valor de equilibrio X^* , el ritmo de bombeo calculado según la PCRAO difería menos de un 2% del ritmo de bombeo óptimo. Aunque el grado de suboptimalidad es una cuestión empírica, la facilidad en el uso de una PCRAO tal como indica la relación $Y = \phi(X)$, en comparación con las exigencias de resolver una serie de problemas estocásticos de programación dinámica, puede dotar a estas reglas aproximadas de un gran valor práctico.

No obstante, debe recalarse que, en caso de existir potenciales irreversibilidades, una PCRAO que presuponga una capacidad de volver a X^* desde una X_t situada por encima o por debajo de X^* puede llevar a resultados desastrosos.

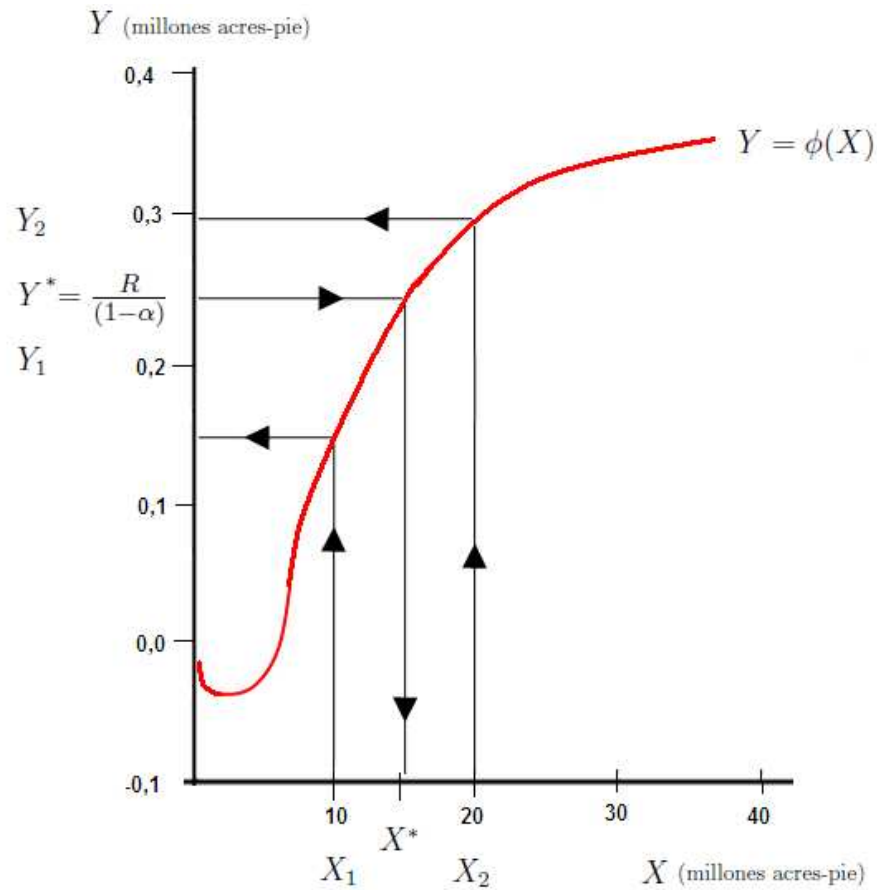


Figura 4.1: La política de control de retroalimentación aproximadamente óptima (PCRAO) con $a = 200$, $b = 500$, $c = 1,000$, y $\delta = 0,05$

En efecto, considérese el caso de un acuífero que se encuentre en una zona litoral. En tal situación, el descenso del nivel de las aguas subterráneas por debajo del nivel del mar podría conllevar la intrusión de agua salada que imposibilitaría el uso del agua para el riego. El coste y el riesgo de intrusión marina se pueden incorporar en la formulación del problema de optimización dinámica, pudiendo desarrollarse reglas de parada para limitar (establecer una cota superior) la probabilidad de intrusión marina en algún horizonte futuro, dada la condición inicial X_0 .

4.2 Las reglas de parada y la gestión del acuífero

En esta sección se analizan dos modelos en tiempo continuo de gestión de aguas subterráneas. El primero es realmente una versión adaptada al modelo en tiempo discreto de la sección anterior. El segundo es una especificación probabilística que emplea el Lema de Itô y la programación dinámica estocástica para identificar el volumen óptimo del acuífero en el que se detiene por primera vez la *minería* (extracción neta del recurso) y se establece el ritmo posterior de bombeo de conformidad con la evolución del sistema.

Modelo en tiempo Continuo

En ambos problemas se supondrá que el valor de una unidad de agua en la superficie viene dado por $p > 0$. Este sería el caso si hubiera unas importantes fuentes alternativas de agua con un coste marginal para los usuarios equivalentes a p . Se mantiene aquí la función de coste del problema en tiempo discreto y se supone que $C = c\frac{Y}{X}$, donde $c > 0$ es un parámetro de coste, y X e Y representan las existencias de agua y el ritmo de bombeo en el momento t . Se supone que el ritmo de bombeo está sujeta a restricciones de la forma:

$$Y_{\text{máx}} \geq Y \geq 0,$$

donde $Y_{\text{máx}}$ es una cota superior del ritmo de extracción.

El problema de EC se puede formular ahora como:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} \left(p - \frac{c}{X}\right) Y \exp^{-\delta t} dt. \quad (4.18)$$

sujeto a:

$$\dot{X} = -(1 - \alpha)Y + R \quad (4.19)$$

$$Y_{\text{máx}} \geq Y \geq 0 \quad (4.20)$$

$$X(0) = X_0 \text{ dado}$$

donde $R = E[R(t)]$ es el retorno esperado en el momento t y α es la proporción de Y que retorna al acuífero.

Definiendo $V(X)$ como la **función de valor corriente**, se puede escribir la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman** (H-J-B), como:

$$\delta V(X) = \text{máx} \left[\left(p - \frac{c}{X}\right) Y + V'(X) [-(1 - \alpha)Y + R] \right] \quad (4.21)$$

La expresión entre corchetes es lineal en Y , por lo que, en vez de tomar una derivada parcial, se define la función de conmutación:

$$\omega = p - \frac{c}{X} - (1 - \alpha)V'(X) \quad (4.22)$$

La linealidad en Y de la expresión entre corchetes da como resultado lo que se ha llamado un **problema de control bang-bang**, o bien un problema de *camino de aproximación más rápido* (CAMR, MRAP en inglés), tal que cuando $\omega = 0$, el stock de agua alcanza su equilibrio hidro - económico X_{EC}^* e $Y = \frac{R}{1-\alpha}$. Si $X(0) > X_{EC}^*$, tendrá lugar, al comienzo de la gestión, un período de *extracción neta* con $Y = Y_{\text{máx}}$ hasta que $X = X_{EC}^*$. Seguidamente se va a intentar determinar una expresión para X_{EC}^* .

Esta es una tarea relativamente fácil, ya que en X_{EC}^* , $Y = \frac{R}{1-\alpha}$. La sustitución de esta expresión en la ecuación H-J-B implica que $\delta V(X) = (p - \frac{c}{X})\frac{R}{1-\alpha}$, o bien:

$$V(X) = \frac{pR}{\delta(1-\alpha)} - \frac{cR}{\delta(1-\alpha)X} \quad (4.23)$$

A su vez, esto implica que $V'(X) = \frac{cR}{\delta(1-\alpha)X^2}$. Sustituyendo esta expresión 4.22 en con $\omega = 0$, y despejando X , resulta:

$$X_{EC}^* = \frac{c}{2p} + \sqrt{\left[\frac{c}{2p}\right]^2 + \frac{cR}{\delta p}} \quad (4.24)$$

Se puede pensar en X_{EC}^* como una regla de parada. Cuando las reservas del acuífero se reducen a X_{EC}^* , lo óptimo es detener la extracción y bombear (al menos temporalmente) al ritmo sostenible esperado, $Y = \frac{R}{1-\alpha}$. Si la recarga futura es aleatoria y X se desvía de X_{EC}^* , entonces períodos cortos con $Y = Y_{\text{máx}}$ o alternativamente con $Y = 0$ restaurarán, teóricamente X_{EC}^* .

Versión estocástica

A continuación se pasa a considerar una versión estocástica de este problema intentando deducir la contrapartida correspondiente de la regla de parada X_{EC}^* . El problema se plantea como:

$$\text{máx } E_0 \int_0^\infty (p - \frac{c}{X})Y \exp^{-\delta t} dt. \quad (4.25)$$

sujeto a:

$$dX = [-(1 - \alpha)Y + R]dt + \sigma X dz \quad (4.26)$$

$$Y_{\text{máx}} \geq Y \geq 0 \quad (4.27)$$

$$X(0) = X_0 \text{ dado}$$

donde z es un proceso de Wiener normalizado y σ el parámetro de dispersión. Simbolizando por $V(X)$ la función de valor corriente, la ecuación H-J-B de este problema se puede escribir como:

$$\delta V(X) = \text{máx}[(p - \frac{c}{X})Y + (\frac{1}{dt})E_t dV] \quad (4.28)$$

Al desarrollar dV en serie de Taylor hasta el segundo orden, y utilizando el lema de Ito, la ecuación H-J-B se convierte, después de tomar la esperanza y multiplicar por $\frac{1}{dt}$, en:

$$\delta V(X) = \text{máx}[(p - \frac{c}{X})Y + [-(1 - \alpha)Y + R]V'(X) + (\frac{1}{dt})\sigma^2 X^2 V''(X)] \quad (4.29)$$

donde la expresión entre corchetes es, una vez más, lineal en Y , dando, lugar a la *función de conmutación*

$$\omega = p - \frac{c}{X} - (1 - \alpha)V'(X) \quad (4.30)$$

Esta es la misma función que se obtenía en el problema de EC e implica la misma dinámica de bang-bang (o CAMR) hasta que se alcanza el equilibrio, donde $Y = \frac{R}{1-\alpha}$. El nivel de equilibrio o valor de parada para X se puede determinar sustituyendo la expresión anterior de Y en la ecuación H-J-B y buscando la forma de $V(X)$ que satisface:

$$\delta V(X) = (p - \frac{c}{X})\frac{R}{1 - \alpha} + (\frac{1}{2})\sigma^2 X^2 V''(X)] \quad (4.31)$$

Para obtener $V(X)$, vamos a probar con la misma forma funcional que fue utilizada en la solución al problema de EC, es decir, $V(X) = \frac{A}{X} + B$, que tiene como derivadas

$$V'(X) = -\frac{A}{X^2} \quad (4.32)$$

y

$$V''(X) = \frac{2A}{X^3} \quad (4.33)$$

De hecho, esta formula funcional, satisface la ecuación H-J-B cuando

$$A = -\frac{cR}{[(\delta - \sigma^2)(1 - \alpha)]} \quad (4.34)$$

y

$$\frac{pR}{[\delta(1-\alpha)]} \quad (4.35)$$

Así, la función de valor corriente vendrá dada por:

$$V(X) = \frac{pR}{\delta(1-\alpha)} - \frac{cR}{(\delta - \sigma^2)(1-\alpha)X} \quad (4.36)$$

Si se compara esta función de valor con la función obtenida en el problema de EC [véase en la ecuación 4.23], se advierte que la única diferencia aparece en el denominador del segundo término del lado derecho. En dicho término, $(\delta - \sigma^2)$ sustituye en la ecuación 4.36 a δ en la ecuación 4.23. La extracción neta del agua debe detenerse cuando X alcance por primera vez el valor:

$$X_S = \frac{c}{2p} + \sqrt{\left[\frac{c}{2p}\right]^2 + \frac{cR}{\Delta p}} \quad (4.37)$$

donde $\Delta = (\delta - \sigma^2)$. Si se comparan las ecuaciones 4.24 y 4.37 se observa, cuando $\delta > \sigma^2 > 0$, que $X_S > X_{EC}^*$, o sea, que el volumen óptimo que hay que mantener en el problema de control estocástico es mayor que en el problema de equivalencia de certidumbre.

4.3 Literatura económica de los recursos naturales

La literatura de los recursos naturales, particularmente la de los recursos renovables (biológicos y no biológicos), pone énfasis en los derechos de propiedad, pues según estén éstos definidos, la regla de decisión de los agentes cambiará desde la situación de una gestión no controlada a otra con control. Así se reconoce una gestión ineficiente cuando los derechos de propiedad no existen o, si existen, no están suficientemente definidos, o se da la fugitividad del recurso. Por otra parte, se daría una gestión controlada cuando los derechos de propiedad son privados.

Estas preocupaciones están presentes en las distintas aportaciones teóricas sobre el recurso *agua subterránea*, aunque se reconozca que en el mismo se dan ciertos derechos de exclusión que lo diferencian de los recursos renovables biológicos, acercándolo a los recursos mineros y forestales. Esa exclusividad queda recogida por el hecho de que solamente los agricultores que

son propietarios de tierras de labor por encima del acuífero extraen agua del mismo, quedando excluidos los agricultores de otras zonas.

Por otro lado, los acuíferos se distinguen de los demás recursos porque tienen una tasa de regeneración (la recarga) que no depende del stock del recurso, lo que nos permite decir que el recurso agua subterránea se configura como un recurso diferenciado de los demás, sirviendo de lazo de unión entre los renovables y los no renovables.

Bajo esta visión del recurso natural agua subterránea analizaremos, mediante un modelo de control óptimo, la situación de equilibrio estacionario de un acuífero cuando los derechos de propiedad están reflejados en una propiedad común con institución. Asimismo pondremos énfasis en explicar situaciones de sobreexplotación o agotamiento, atendiendo particularmente a los parámetros económicos.

4.3.1 Derechos de propiedad del recurso agua subterránea

Un acuífero como ya se dijo en el capítulo 1 se puede definir, como un embalse de agua subterránea susceptible de ser extraída y que, por tanto, podemos considerarlo como un recurso o factor productivo, pero con diferencias sustanciales, sin embargo, con respecto a otros activos económicos, ya que presenta dificultades en el funcionamiento eficiente del sistema de precios. Ello es debido a que la explotación y posterior consumo del recurso agua subterránea produce una serie de externalidades negativas, en términos semejantes a los recursos mineros, de gas o petróleo. Pero además en la gestión de los acuíferos se debe tener en cuenta la particularidad de la recarga. Esto provoca que los acuíferos se puedan considerar como recursos renovables y susceptibles de explotación indefinida, e incluso que, partiendo de una situación de agotamiento, en algún momento posterior del tiempo se puedan explotar nuevamente.

Bajo esta perspectiva del análisis de los recursos naturales, los acuíferos deberían clasificarse separadamente de los recursos renovables y de los no renovables, a pesar de las características semejantes que tienen con ambos. Se puede decir que los acuíferos proveen una transición natural de la categoría de recursos renovables a los no renovables. En consecuencia, se pueden considerar los modelos de aguas subterráneas analíticamente similares a los de recursos biológicos, como

son los de pesquería y forestales, pero, a diferencia de éstos, la tasa de recarga del agua no es biológica. La recarga se produce de forma general, independientemente del stock existente en el acuífero. En este sentido, los modelos de aguas subterráneas se asemejan a los de minerales, gas o petróleo, pero estos últimos se diferencian de los hídricos en que su tasa de crecimiento es igual a cero.

Teniendo en cuenta, las consideraciones anteriores, la modelización de los acuíferos, que se desarrolla en el apartado siguiente, se hará desde el núcleo común de los modelos naturales, pero tomando algunas de las características de los renovables y otras de los no renovables, quedando las aguas subterráneas conceptualizadas como **recursos renovables no biológicos**.

En concordancia con lo anterior, si la tasa de extracción de agua subterránea de un acuífero es igual a la tasa de recarga, la gestión óptima del mismo llevará a una explotación indefinida dada por el estado estacionario del recurso, tal como ocurriría con un recurso renovable. Sin embargo, si la tasa de extracción es mayor que la recarga, el recurso se agotará física o económicamente (el acuífero, en su caso, se salinará por intrusión marina, o su stock se hará cero), según mostraría el estado estacionario de un recurso no renovable. Esta posibilidad refleja una interpretación específica del coste de uso del recurso agua subterránea: la aplicación de la **regla de Hotelling** a los recursos que son agotables, puesto que el consumo del recurso hoy implicará pérdidas de bienestar en el mañana.

Por otra parte, la consideración de la gestión de los acuíferos como un recurso natural está mediatizada por la definición de los derechos de propiedad. La interpretación de los mismos permitirá no sólo aportar alguna luz sobre cuál es la forma de gestionar el recurso, sino que también facilitará una visión de las trayectorias para alcanzar el estado estacionario, tal que cuando lleguemos al mismo, o bien se alcanza una tasa de extracción igual a la recarga, o bien se alcanza un stock cero, o, en su caso, hay intrusión marina. No obstante aquí eludimos cualquier análisis de estructura de mercado distinta a la de competencia perfecta, en la que cualquier imperfección en la estructura ocasionará un retraso en el agotamiento del recurso, o un retraso en alcanzar el estado estacionario de un recurso renovable.

Conceptos Económicos asociados a los acuíferos

La literatura económica centra su análisis en tres conceptos de derechos de propiedad:

1. La **Propiedad privada individual** indica que el recurso pertenece a un solo propietario y el uso queda excluido a otros usuarios. La gestión de los mismos llevaría a explotar el recurso mediante la aplicación del **Principio Fundamental de Hotelling**, por el que el precio del recurso recogería el coste marginal de extracción más el coste de uso. Esto es, el propietario maximizará la corriente de beneficios futuros, actualizada adecuadamente por el tipo de descuento, y atrasará o acelerará su explotación teniendo en cuenta que sus decisiones de hoy afectan al mañana. Desde la perspectiva del recurso agua subterránea, esta gestión se llevaría a cabo siempre que el acuífero fuese de propiedad privada: por ejemplo, pequeños pozos que son propiedad de un solo individuo.
2. La **Propiedad común con institución**, se caracteriza por el hecho de que una agrupación de individuos es poseedora de un recurso. (disfrutando, por tanto, cada individuo de esa propiedad, aunque no la utilice), de cuyo uso excluye a todos aquellos que no tienen derechos de él: por ejemplo, los agricultores propietarios de las parcelas situadas encima del acuífero, y del que extraen el agua para regar sus tierras, quedando excluidos otros agricultores que no tienen tierras por encima del acuífero. La gestión del recurso bajo esta definición de los derechos de propiedad dependerá de si existen acuerdos entre los usuarios o si se actúa de manera competitiva entre ellos. La primera podría conducir a unas reglas de comportamiento de la institución en términos semejantes a cuando los derechos de propiedad son individuales, obteniéndose unos resultados eficientes. La segunda nos llevaría a que cada propietario extrayese el recurso sin pensar que sus decisiones afectan al resto de propietarios, por lo que si cada uno de los propietarios actúa de la misma forma, el recurso se agotará y la gestión será ineficiente.
3. **Propiedad Pública** La gestión la realiza un organismo superior al usuario y en la que no se asigna el uso del recurso exclusivamente por el mercado.

La gestión del acuífero, variará en función de que los derechos de propiedad sobre el mismo sean individuales o comunes con competencia entre usuarios. Así, si el recurso es de propiedad

privada, los acuíferos se gestionarán teniendo en cuenta la maximización del flujo de rentas futuras desconectadas por el parámetro de descuento. Por otro lado, la gestión de los acuíferos se realizará aplicando la regla por la que el valor del producto marginal del agua es igual al coste marginal, si estamos frente a un recurso de propiedad común donde existe competencia entre los propietarios. Estas dos propuestas nos llevarán a un estado estacionario donde la tasa de extracción es igual a la recarga, y el stock óptimo es mayor que cero, o a una situación en la que si la tasa de extracción es siempre mayor que la recarga, terminaremos con un stock igual a cero.

La conclusión general que puede extraerse de la literatura es que la estrategia que iguala el valor de la productividad marginal al coste marginal ocasiona una pérdida de bienestar para la colectividad presente y futura con respecto a la estrategia maximizadora de la corriente de flujos de beneficios futuros. Por ello se proponen algunas medidas de política económica para evitar las posibles ineficiencias que acarrea la competencia entre usuarios de las aguas subterráneas. Sin ser exhaustivos se puede mencionar, entre otras, la redefinición de los derechos de propiedad hacia una situación de propiedad individual o propiedad común con institución, la instrumentación de impuestos por unidad extraída y la imposición de cuotas de extracción. Estas medidas suponen que de alguna forma se tenga en cuenta, en la gestión óptima de los acuíferos, el coste de uso o la renta de escasez que tienen las aguas subterráneas como cualquier otro recurso natural.

4.4 Principio fundamental de Hotelling

Para el matemático estadístico Harol Hotelling (1895 - 1973) los recursos naturales son algo más que un regalo de la naturaleza sujeto a unos usos para cumplir con algún objetivo. Es por ello que publicó en el año 1931 un artículo titulado *The Economics of Exhaustible Resources* en la revista *Journal of Political Economy* Vol. 39. Donde establece un principio básico para la explotación de recursos naturales no renovables a través de una óptima extracción.

El objetivo de Hotelling era encontrar el ritmo adecuado de explotación del recurso, es decir, la tasa óptima de agotamiento o la regla de extracción que permita obtener el máximo bienestar. Para ello consideraba el recurso no renovable como un activo de capital especial, de cuyo disfrute

se derivaban rentas. Como en cualquier otro tipo de inversión, pues, la idea era maximizar el valor actualizado de los rendimientos derivados de la misma. Así, bajo el supuesto más sencillo de costes de extracción nulos, el recurso debería explotarse de forma que la tasa de crecimiento del precio del recurso extraído fuera igual a la tasa de interés de mercado. Es decir, el propietario es indiferente a extraer o dejar el recurso en el suelo cuando la ganancia de capital es igual al tipo de interés de activos alternativos.

Aunque Hotelling supone que las circunstancias bajo las que definimos la senda óptima de extracción son estables en el tiempo (esto es, la tasa de interés, la tecnología disponible, el nivel de las existencias del recurso, el nivel de demanda o los costes de extracción), lo cierto es que ante cualquier cambio en las condiciones iniciales la senda de precios óptimos es extremadamente sensible.

Determinamos el momento para el que el valor actual neto (VAN) de la inversión subyacente es máximo. Para un tipo de descuento δ y una acumulación continua de los intereses, el VAN es igual a:

- $P(t)$ función de crecimiento conocida que representa el precio respecto al tiempo
- δ representa el tipo de interés que mide la tasa de descuento o tasa de preferencias por el dinero presente con respecto al dinero futuro
- Q cantidad existente del recurso

Dentro de este escenario, se plantea determinar el momento de tiempo en el que interesa la extracción del recurso. Por ello, se busca determinar el valor actual neto (VAN) de la inversión subyacente es máximo.

$$VAN = QP(t) \exp^{-\delta t} \quad (4.38)$$

operando (4.38) para encontrar el máximo

$$\frac{dVAN}{dt} = QP'(t) \exp^{-\delta t} - iQP(t) \exp^{-\delta t} = 0 \quad (4.39)$$

dividiendo la ecuación (4.39) entre $q \exp^{-\delta t}$ se obtiene:

$$P'(t) - \delta P(t) = 0 \quad (4.40)$$

se calcula la segunda derivada para verificar la existencia del máximo

$$\frac{d^2VAN}{d^2t} = P''(t) - \delta P'(t) < 0 \quad (4.41)$$

las condiciones suficientes para que se cumpla (4.41) son: que el precio del recurso crezca con el paso del tiempo (es decir, $P'(t) > 0$), pero de una manera menos proporcional (es decir, $P''(t) < 0$). Estas condiciones no están fuera de la realidad ya que en la mayor parte de los casos se cumple.

Ahora la condición de equilibrio (4.40) se puede escribir como:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \delta \quad (4.42)$$

Esta condición se conoce como *Regla de Hotelling* o *Principio básico de explotación de recursos naturales*. He indica cuando conviene extraer el recurso, ya que el propietario del yacimiento tiene la potestad para elegir si quiere extraer el recurso o no. Por lo que se plantean 3 escenarios.

1. Sí $\frac{P'(t)}{P(t)} > \delta \implies$ Conviene extraer el recurso ya que la tasa de cambio es inferior al tipo de interes.
2. Sí $\frac{P'(t)}{P(t)} < \delta \implies$ El crecimiento relativo de la biomasa es inferior al tipo de interés, le interesa mantener su riqueza es decir no conviene extraer el recurso.
3. Sí $\frac{P'(t)}{P(t)} = \delta \implies$ Si el crecimiento relativo iguala al tipo de interés al propietario le resulta indiferente extraer o no extraer el recurso.

De otro modo, sí P_0 es el margen de beneficios actual, en cualquier momento posterior (t) dicho margen deberá ser igual a:

$$P_t = P_0 \exp^{\delta t} \quad (4.43)$$

Si en el sector de la minería opera la libre concurrencia, este margen de beneficio (B_t), será el equivalente al precio de mercado (B_t) menos el coste de extracción (C_t).

$$P_t = B_t - C_t \quad (4.44)$$

Si, como es frecuente, el sector es más o menos monopolista tal margen de beneficios será igual a la ganancia marginal del sector (el ingreso marginal menos el coste marginal), y será éste el precio que tendrá que crecer al mismo ritmo que la tasa de interés. Es evidente, que todo lo anterior implica que el margen de beneficios del sector minero debe ser superior al de las actividades industriales normales y que dicha diferencia debe crecer permanentemente con el paso del tiempo (por ese motivo P_t se define como la *renta de escasez temporal*)

La Regla de Hotelling puede explicar que en todos los períodos de tiempo haya una producción de signo positivo y, al mismo tiempo, que dicha producción no lleve a la extinción de los recursos no renovables en un tiempo igual al que se requiere para extraerlos del suelo. Para que esto ocurra, es indispensable que exista un nivel de explotación inferior al tamaño de las reservas de modo que, considerando el precio de mercado y su evolución futura, los empresarios sean indiferentes entre extraer una unidad adicional o dejarla en su estado natural. Si con cualquier nivel posible de explotación la renta de escasez creciera a un ritmo menor que el tipo de interés, nadie desearía conservar un activo que puede generar un rendimiento mayor convertido en dinero y el recurso natural se agotaría rápidamente. Si dicha renta creciera a un ritmo mayor que el tipo de interés, los yacimientos de mineral serían un buen medio para almacenar riqueza y sus propietarios los conservarían intactos, al menos mientras pudieran obtener de ellos una ganancia extraordinaria.

Por su parte, el valor económico actual de un depósito de mineral (V_0), al menos para su propietario, es igual al valor descontado de todas ventas del mismo después de deducir el coste de extracción y de comercialización (es decir, al margen de beneficio (P_t) multiplicado por la cantidad extraída (Q_t)). Tal valor, o precio de mercado de un depósito de mineral, puede extraerse como:

$$V_0 = \int_0^{\infty} P_t Q_t dt \quad (4.45)$$

Los empresarios de la minería tratarán de encontrar un ritmo de extracción de tal modo que se haga máximo dicho valor con el nivel actual de reservas de mineral que posean (S_0).

Formalmente, esto se reduce al siguiente problema de maximización:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} P_t Q_t dt$$

sujeto a:

$$S_0 = \int_0^{\infty} Q_t dt$$

y

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \delta$$

con

$$P_t, Q_t \geq 0$$

Cualquiera que sea la decisión de los empresarios, el precio de mercado y el ritmo de extracción están conectados por la función de demanda del recurso. Si dicha demanda es estable en el tiempo, la cantidad extraída deberá reducirse a medida que el precio aumente. Como los minerales son un insumo productivo, esto quiere decir que a medida que se reducen las reservas, la productividad marginal de los minerales debe aumentar de un modo sostenido. Sin embargo, en la mayoría de los casos (tal vez en todos ellos), el precio no puede crecer indefinidamente. Es probable que exista un precio máximo a partir del cual la demanda se haga igual a cero; esto ocurre cuando el precio de los minerales alcanza niveles prohibitivos o cuando el recurso natural es sustituible por otros materiales a un coste determinado. Supongamos que existe alguna tecnología en la sombra capaz de sustituir el uso de un material o de una fuente de energía, a un coste relativamente alto, utilizando una fuente más abundante.

4.4.1 Análisis gráfico de la regla de Hotelling

Si por comodidad suponemos un coste de extracción nulo $C = 0$, todo esto puede exponerse con la ayuda de la figura 4.2

El cuadrante I de dicha figura muestra la velocidad del precio a lo largo del tiempo (en este caso el precio de oferta es igual a la renta de escasez, es decir, $P = R$, desde un precio inicial hasta el precio P_R), que hace rentable la utilización de la tecnología de reemplazo.

El cuadrante IV se presenta la función de demanda indicando que los compradores están dispuestos a adquirir una cantidad cada vez menor del recurso a medida que se incrementa

el precio de mercado; es decir, con el paso del tiempo el recurso natural se hace cada vez más escaso, su precio aumenta y la productividad marginal del recurso no renovable aumenta.

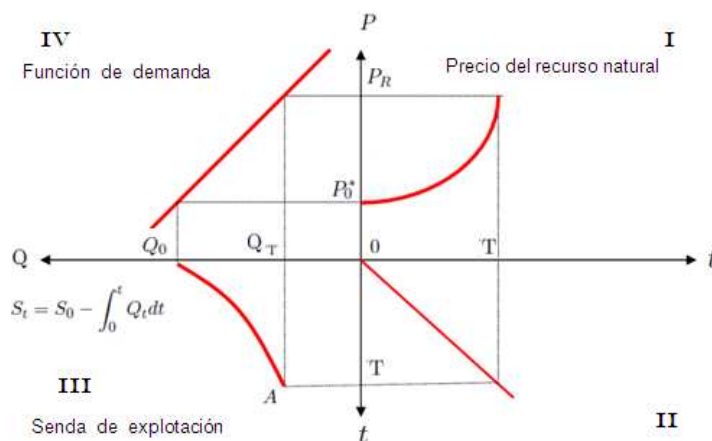


Figura 4.2: Senda eficiente de explotación de un recurso no renovable

El cuadrante II permite trasladar una variable (el tiempo) al tercer cuadrante, en el que se muestra la cantidad de mineral que se extrae en cada momento desde el instante inicial hasta su fecha de extinción (T) (es decir, la senda de explotación Q_0A).

El cuadrante III también muestra la cantidad total que la sociedad habrá utilizado del recurso desde el momento inicial hasta cualquier momento t , tal cantidad es igual al área formada por el eje Q y la senda de explotación Q_0A entre 0 y t . En consecuencia, el stock de mineral que se conserva en cada momento (S_t), es igual al stock inicial (S_0) menos la cantidad extraída desde el instante inicial, es decir:

$$S_t = S_0 - \int_0^t Q_t dt \tag{4.46}$$

Aunque discutible como forma de representar el funcionamiento de los mercados de recursos naturales en el mundo real, la regla de Hotelling es una poderosa herramienta de análisis para

definir la forma en que deben explotarse estos recursos siguiendo criterios de eficiencia intertemporal.

Todo lo anterior nos sirve para proponer, como se señaló anteriormente, un modelo de gestión de un acuífero que ponga de manifiesto muchas de las afirmaciones realizadas hasta este momento. Este modelo será una simplificación de la realidad, pero se ha creído necesario buscar la máxima simplicidad en aras a obtener resultados sencillos y demostrativos de estos modelos y de esta problemática, particularmente de la sobreexplotación de los acuíferos.

4.5 Modelo de gestión de un acuífero

Dentro de un marco de análisis dinámico, el tratamiento formalizado de los acuíferos se puede hacer desde la situación del empresario que explota el recurso y la vende como cualquier bien o servicio o desde la perspectiva del propio agricultor que extrae agua para regar sus tierras. Nosotros hemos decidido modelizar un acuífero bajo esta segunda opción. Así suponemos que el recurso agua subterránea es extraído de un acuífero por un número finito pero grande de agricultores que son propietarios de parcelas situadas encima del acuífero y, por lo tanto, existe una integración de las actividades agrícola y extracción del agua.

En aras de simplificar nuestra exposición, nos centraremos en la modelización de una empresa que gestiona la extracción del recurso agua subterránea. No obstante, si la función de demanda de agua subterránea utilizada es una demanda derivada de los agricultores, la modelización anterior coincidiría con la maximización de beneficios consolidados en una actividad integrada. Para ello la empresa extractiva sería una sociedad que actúa de acuerdo con los intereses de los agricultores propietarios de las tierras por encima del acuífero y trataría de gestionar el recurso de la forma que genere un precio del agua mínimo y tome en consideración el coste del uso del recurso. Esto es, la regla de decisión pasaría por maximizar el beneficio ocasionado por la actividad integrada.

El modelo planteado está basado en la teoría de control óptimo, lo que nos permite obtener las trayectorias temporales de la tasa de extracción y del stock. Para no hacer el tratamiento

excesivamente complejo, se ha considerado un modelo determinista; es decir, se supone un perfecto conocimiento tanto de la demanda como de la oferta, por un lado, y de los elementos hidrogeológicos que afectan al acuífero, por otro.

Suponemos que la función de demanda derivada de agua de los agricultores es linealmente decreciente:

$$G = a + bP, \quad (4.47)$$

donde G y P son, respectivamente, el agua utilizada por los agricultores y el precio de cada unidad de agua subterránea. Siendo los parámetros $a > 0$ y $b < 0$.

Dados los elementos hidrológicos que afectan a un acuífero podremos escribir la función de costes y la dinámica del stock de un acuífero de la siguiente manera.

La función de costes dependerá positivamente del volumen de agua extraído y negativamente del stock del agua del acuífero, de tal manera que suponemos que la función de costes tiene la siguiente forma lineal;

$$C = (C_0 + C_1S)G, \quad (4.48)$$

donde, C_0 , C_1 son parámetros positivo y negativo, respectivamente, y S es el stock de agua. El significado de $C_0 + C_1S$ es el habitual en la literatura. Es decir, es el coste marginal de extraer una unidad que depende tanto del coste de la energía y esfuerzo realizado como de las variaciones del stock, por supuesto este coste marginal es al menos positivo.

La dinámica del stock vendrá dada por los flujos de entrada y salida del acuífero, siendo el flujo de entrada la recarga R que vendrá determinado por las condiciones climáticas (grado de humedad, pluviometría, etc.) y geológicas de la zona, y el de salida el volumen de agua extraído del acuífero (G), Así pues la variación instantánea \dot{S} del stock será igual a:

$$\dot{S} = R - G \quad (4.49)$$

La regla de gestión óptima permite afirmar que los agricultores maximizarán la corriente de los beneficios netos futuros, descontados adecuadamente por el tipo de interés de mercado vigente, sujetos a la restricción de la dinámica del stock y a las condiciones iniciales y de no negatividad. El problema de control óptimo planteado sería:

$$\text{máx} \int_0^{\infty} \pi \exp^{-\delta t} dt \quad (4.50)$$

sujeto a:

$$\dot{S} = R - G, \quad S(0) = S_0 \quad S(t) \geq 0, \quad (4.51)$$

donde $\delta > 0$ es el tipo de interés, t el tiempo y π el beneficio de los agricultores.

Los ingresos (netos del pago del factor variable) vendrán dados por la diferencia entre los ingresos totales de la actividad y los costes del agua utilizada para el riego (input variable) por los agricultores. Los ingresos serán la integral la integral desde cero hasta G de la función inversa de demanda de agua subterránea, por lo que:

$$\pi = \frac{1}{2b}G^2 - \frac{a}{b}G - (C_0 + C_1S)G. \quad (4.52)$$

El problema planteado en (4.50) y (4.51), sustituyendo (4.52) en (4.50), se resuelve por el principio de máximo de Pontryagin, mediante el Hamiltoniano correspondiente:

$$H = \exp^{-\delta t} \left[\frac{1}{2b}G^2 - \frac{a}{b}G - (C_0 + C_1S)G \right] + \lambda(R - G) \quad (4.53)$$

siendo G la variable de control, S la de estado y λ la de coestado. Las condiciones necesarias del Hamiltoniano y la de transversalidad resolverán el problema de control indicado arriba. Estas se satisfacen cuando:

$$\frac{\partial H}{\partial G} = 0 = \exp^{-\delta t} \left[\frac{G}{b} - \frac{a}{b} - C_0 + C_1S \right] - \lambda \quad (4.54)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = \exp^{-\delta t} C_1S \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{S} = R - G \quad (4.56)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)S(t) = 0 \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0 \quad si \quad \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) > 0 \quad (4.57)$$

De la condición (4.54) se obtiene la conocida regla que establece que el beneficio neto marginal es igual al coste de uso. La (4.55) expresa la dinámica de la variable de coestado. La ecuación (4.56) muestra la restricción dinámica del modelo, esto es, que la tasa de extracción en cada momento de tiempo debe ser igual a la recarga. y por último, (4.57) es la condición de transversalidad que señala que el coste de uso cuando el tiempo tiende a infinito debe ser cero si el stock cumple con la restricción normal de la negatividad.

La obtención de las trayectorias temporales de $G(t)$ y $S(t)$ pasa por solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales en G y S que resultan de resolver las condiciones expresadas más arriba.

De (4.54) podemos deducir una expresión para λ :

$$\lambda = \exp^{-\delta t} \left[\frac{G}{b} - \frac{a}{b} - C_0 - C_1 S \right] \quad (4.58)$$

Diferenciando (4.58) con respecto a t , reemplazando $\dot{\lambda}$ y \dot{S} por las condiciones (4.55) y (4.56), respectivamente, y reordenando términos, obtenemos la ecuación diferencial de G como:

$$\dot{G} = \delta G - \delta b C_1 S + (b C_1 R - \delta a - \delta b C_0) \quad (4.59)$$

que junto a la condición (4.56) componen el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo mencionado más arriba. Para poder trabajar con él de forma compacta utilizaremos la siguiente anotación:

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta b C_1 \\ \beta &= b C_1 R - \delta a - \delta b C_0 \\ \mu &= -1 \end{aligned}$$

por lo que podemos reescribirde la siguiente forma simplificada:

$$\dot{G} = \delta G - \alpha S + \beta \quad (4.60)$$

$$\dot{S} = R + \mu G$$

cuyo sistema homogéneo es:

$$\dot{G} = \delta G - \alpha S \quad (4.61)$$

$$\dot{S} = \mu G$$

Para resolver el sistema homogéneo (4.61) se puede reducir el par de ecuaciones lineales a una sola ecuación de segundo orden (en G , por ejemplo), cuya solución es:

$$G(t) = A \exp^{x_1 t} + B \exp^{x_2 t}, \quad (4.62)$$

que a su vez, sustituida en la segunda ecuación del sistema homogéneo, e integrando, permite obtener:

$$S(t) = \frac{\mu A}{x_1} \exp^{x_1 t} + \frac{\mu B}{x_2} \exp^{x_2 t} \quad (4.63)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces del polinomio $x^2 - \delta x + \alpha u = 0$, de tal manera que $x_1 > \delta$ y $x_2 < 0$. Teniendo en cuenta la información adicional que nos da el sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo 4.60, podemos expresar las trayectorias temporales haciendo $\dot{G} = 0$, y $\dot{S} = 0$ como:

$$G(t) = A \exp^{x_1 t} + B \exp^{x_2 t} - \frac{R}{\mu} \quad (4.64)$$

$$S(t) = \frac{\mu A}{x_1} \exp^{x_1 t} + \frac{\mu B}{x_2} \exp^{x_2 t} + \frac{\beta - \delta(\frac{R}{\mu})}{\alpha} \quad (4.65)$$

Por otra parte, si hacemos $t = 0$ en (4.65) tendremos que:

$$B = \frac{x_2}{\mu} \left(S_0 - \frac{\mu A}{x_1} - \frac{\beta - \delta(\frac{R}{\mu})}{\alpha} \right) \quad (4.66)$$

Ahora bien, si nos centramos en la condición de transversalidad (4.57), sustituyendo las trayectorias obtenidas en las expresiones (4.64) y (4.65) en la ecuación (4.58), vemos que para que λ tienda a cero cuando t tiende a infinito se tiene que cumplir necesariamente que la constante arbitraria A sea cero, por lo que finalmente las trayectorias de equilibrio del agua extraída y del stock (4.64) y (4.65) se pueden reescribir como:

$$G(t) = B \exp^{x_2 t} - \frac{T}{\mu} \quad (4.67)$$

$$S(t) = \frac{\mu B}{x_2} \exp^{x_2 t} + \frac{B - \delta(\frac{R}{\mu})}{\alpha} \quad (4.68)$$

donde la raíz x_2 será igual $a - bC_1$, y en la expresión de B 4.66 habrá que eliminar la constante A (es decir, hacer $A = 0$) para que se cumpla la condición de transversalidad (4.57).

Todo lo anterior se puede ilustrar mediante el diagrama de fases correspondiente al problema planteado y particularmente por las ecuaciones del sistema (4.60). Estas se pueden escribir de forma implícita como:

$$\dot{G} = f(G, S)$$

$$\dot{S} = g(G, S)$$

Si hacemos en estas ecuaciones $\dot{G} = 0$ y $\dot{S} = 0$, tendremos dos ecuaciones de movimiento que nos llevarán a un par de equilibrio (G^*, S^*) a largo plazo. La dinámica de S es fácil de analizar, ya que si $\dot{S} = 0$ es por que $G = R$; si $\dot{S} < 0$ es por que $G > R$; y $\dot{S} > 0$ es porque $G < R$.

La dinámica de G vendrá dada por los signos de las derivadas $\frac{dG}{dS}$, $\frac{\partial \dot{G}}{\partial G}$ y $\frac{\partial \dot{G}}{\partial S}$ tomadas en la ecuación primera del sistema 4.60. Así se puede escribir:

$$\frac{dG}{dS} = \frac{\alpha}{\delta} = bC_1 > 0 \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial \dot{G}}{\partial G} = \delta > 0 \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial \dot{G}}{\partial S} = -\alpha = -\delta bC_1 < 0 \tag{4.71}$$

La expresión (4.69) muestra la pendiente de la ecuación de movimiento $\dot{G} = 0$. Las derivadas (4.70) y (4.71) indican cómo se movería la dinámica de G con respecto a G y S .

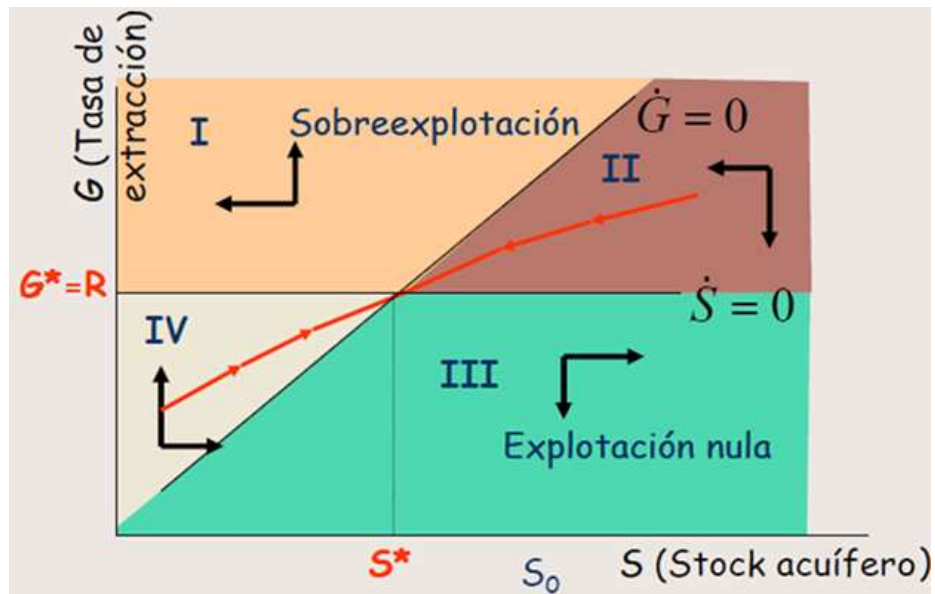


Figura 4.3: Diagrama de fases 1

Todo esto nos permite representar el diagrama de fases del estado estacionario que se alcanzaría en un acuífero. En la figura 4.2 (en la que G^* representa el volumen extraído de equilibrio estacionario; S^* el stock de equilibrio estacionario; y S_0 el stock inicial), nos encontramos, en efecto, con cuatro regiones, de las que dos son convergentes y otras dos divergentes al

equilibrio dado que es un punto de silla. Es decir, si partimos de un $S_0 > S^*$, entonces la tasa de extracción será mayor que la recarga, por lo que iría disminuyendo el stock de agua hasta alcanzar la situación de equilibrio de estado estacionario (G^*, S^*): región II. En términos similares se podría estudiar una situación donde S_0 fuese menor que S^* , caso en que para alcanzar el equilibrio la trayectoria del volumen de agua extraído debería ser menor que la recarga: región IV. Por otro lado, Si la tasa de extracción es siempre mayor que la recarga, alcanzaremos una situación donde $S = 0$, y se dará la sobreexplotación del acuífero: región I. El caso contrario nos llevaría a una explotación nula del acuífero: región II.

Otra explicación de la sobreexplotación, en unas circunstancias de los elementos hidrogeológicos compatibles con el modelo integrado, podría venir del análisis de la variación de la tasa de extracción o del stock del acuífero ante cambios en los parámetros económicos de nuestro modelo. Así, es fácil demostrar que si el tipo de interés aumenta, o si la coordenada en el origen de la función de la demanda de agua aumenta, y/o si el coste marginal de una unidad extraída disminuye (dedido, por ejemplo, a la incorporación de nueva tecnología), la tasa de aceleración se acelerará y el stock de equilibrio estacionario disminuirá: véase la figura 4.4, en la que, al igual que en el caso anterior, G^* es el volumen extraído de equilibrio estacionario; S_0 el stock inicial; S^{**} es ahora el stock de equilibrio estacionario con los parámetros finales; y S^c el stock crítico.

Es decir, bajo estas circunstancias se alcanzará un nuevo stock de equilibrio estacionario menor que el correspondiente a los parámetros iniciales ($S^{**} < S^*$). Por lo tanto, será más fácil alcanzar el estado crítico del acuífero y más pronto se daría el agotamiento del recurso.

Sintetizando, hemos demostrado que la sobreexplotación de los acuíferos puede venir en función de elegir trayectorias de desequilibrio (región I), o aun en el caso de elegir trayectorias de equilibrio óptimas (región II) pueda darse que los parámetros económicos nos lleven a un stock de equilibrio de estado estacionario por debajo o muy próximo al stock crítico del modelo, por lo que se ha ampliado el concepto de sobreexplotación o agotamiento que la literatura al respecto señala.

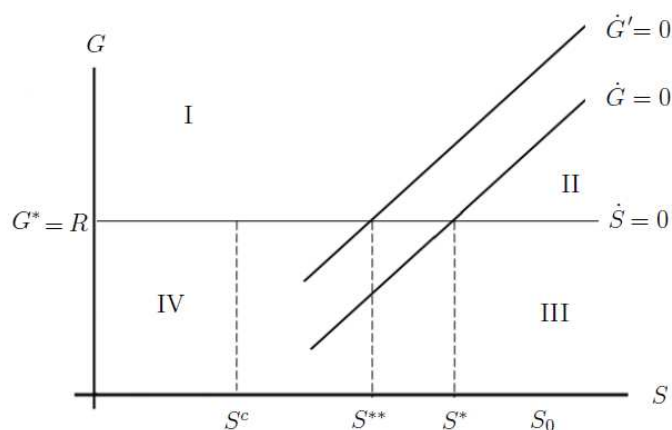


Figura 4.4: Diagrama de fases 2

Así las aportaciones económicas señalan que se produciría una sobreexplotación del acuífero si los derechos de propiedad no están definidos. Es sencillo comprobar en este modelo que si la gestión del acuífero se realiza de forma no controlada, igualando el valor de la productividad marginal al coste marginal, el volumen de agua extraído se acelerará y la trayectoria del stock en el tiempo será más inclinada. Esto indicará que habrá una pérdida de bienestar por parte de los agricultores si su estrategia pasa por ser competitiva entre ellos, y al no tener en cuenta la restricción dinámica el agotamiento del recurso se acelerará aún más.

La situación de sobreexplotación o agotamiento anteriormente señaladas se pueden retrasar si el *flujo de retorno*² es elevado hubiéese recarga artificial en el acuífero. Estudiar esta situación en nuestro modelo no sería complicado, y a lo único que afectaría sería a la restricción dinámica del stock

Una vez realizado el análisis de la gestión óptima de un acuífero desde el momento inicial de su explotación hasta la situación de equilibrio dinámico, de las posibilidades de sobreexplotación y agotamiento del mismo, así como de la comparación de la explotación competitiva. Se muestra en el siguiente capítulo como están definidas las aguas subterráneas en Venezuela.

²Se entiende por flujo de retorno aquella cantidad de agua que vuelve al acuífero una vez utilizada en la superficie para regar.

CAPÍTULO 5

AGUAS SUBTERRÁNEAS EN VENEZUELA

“El agua es un derecho humano que no puede ser privado; eso es propiedad social, de todos”

Hugo Chávez Frías - Aló Presidente N°325

Según cifras de la ONU, dos de cada 10 personas en el mundo carecen de una fuente de agua potable segura. El agua es, junto con el aire que se respira, el patrimonio máspreciado de la humanidad. Esta pequeña molécula se ha infiltrado en todos los terrenos de nuestro universo. Por esto, si bien existe suficiente agua dulce en el planeta para mantener una población más numerosa que la actual, el agua escasea en muchos lugares del país.

5.1 Los recursos hídricos de América Latina en el Contexto Mundial.

América del Sur, conjuntamente con Asia, son las regiones que poseen los mayores recursos hídricos en el contexto mundial. América del Sur con el 28 % de los recursos hídricos del mundo y una población regional del 6 % de la población mundial, ha sido bien dotada por la naturaleza.

Sin embargo, hay razones que merecen una reflexión:

- La extendida contaminación y degradación de los recursos hídricos por una inadecuada legislación o una mala aplicación de la misma, así como una falta de inversiones en el tratamiento de los efluentes. Se considera que la degradación del ambiente y de la calidad de las aguas es uno de los mayores desafíos que debe enfrentar América del Sur. Sin embargo, en países como Brasil, Argentina y Venezuela, se percibe una tendencia favorable para revertir esta situación.
- La contaminación hídrica representa también un alto riesgo para la salud de la población que vive sin acceso al agua potable, siendo las enfermedades de origen hídrico uno de los problemas más serios de la región. América del Sur tiene un gran potencial para la generación de energía hidroeléctrica. Si bien en nueve países la hidroenergía representa más del 50 % del total de su producción energética, sigue existiendo un gran potencial sin aprovechar.
- Un 60 % de la población habita en cuencas de ríos cuyas aguas son compartidas por dos o más países. Ello claramente establece la necesidad de una gestión de recursos hídricos para lograr un uso armónico y equitativo de los mismos.

5.2 Visión de los recursos hídricos en Venezuela

“En Venezuela el agua jamás será privatizada”

El agua en Venezuela jamás podrá ser privatizada ya que constitucionalmente es un bien público y el Estado garantiza su uso y disfrute a todos los habitantes del país.

Todos los habitantes tienen derecho al acceso al agua en cantidades necesarias para sus necesidades y la eliminación sanitaria de sus excretas. El agua es un instrumento de desarrollo regional y nacional por tanto su uso y aprovechamiento debe ser sustentable.

En Venezuela se reconoce que el agua no puede ser “simplemente” un bien económico en el sentido de los mercados “normales”. Primero, porque el acceso al agua debe ser un derecho humano que no puede condicionarse con cualquier sistema de precios, segundo porque el agua no es sólo un “bien mercancía”, sino un valor social, cultural y un elemento constitutivo de un

ecosistema con todo lo que ello implica, y tercero por que el propio proceso de competencia lleva inexorablemente al monopolio en condiciones de ofertas limitadas y, aún más, en los casos de bienes fundamentales. Todos los ciudadanos tenemos el deber de contribuir a la conservación de las cuencas, lo que garantizará la permanencia del recurso.

El agua potable será un recurso cada vez más escaso en los próximos años y, a diferencia del petróleo no cuenta con sustitutos. Durante el último siglo la población se ha triplicado mientras que el consumo de agua se ha sextuplicado. Sin embargo, el agua sigue siendo un recurso limitado, no renovable, y mal distribuido. La cantidad de agua disponible permanece prácticamente constante. Su escasez podría representar un serio obstáculo para el desarrollo a lo largo del presente milenio.

Según cálculos de las naciones unidas 1.100 millones de personas, aproximadamente una sexta parte de la población mundial, carece de acceso al agua potable, 2.500 millones de la población mundial no dispone de instalaciones sanitarias adecuadas, 5 millones de personas fallecen anualmente a causa de enfermedades relacionadas con el agua, diez veces más de quienes mueren por conflictos armados cada año, 80 % de las enfermedades en el mundo en desarrollo se deben al consumo de agua no potable y malas condiciones sanitarias.

La reserva de agua dulce y potable apto para el consumo humano es de 3 % del total existente en el planeta Tierra, la mayor parte de ese 5 % está ubicada en los glaciares y casquetes polares, por lo que se pronostica un consumo de 100 % y la escasez se asoma como una nueva amenaza.

Es por ello que se han establecido alianzas estratégicas con países de America Latina y el Caribe, la alianza es pieza fundamental en la medida que la sociedad industrial acelera su desarrollo, puesto que cada incremento tecnológico abre una válvula más al consumo.

La conciencia mundial acerca de la importancia vital que tienen los recursos hídricos para la supervivencia de la vida en nuestro planeta queda manifiesta en los numerosos eventos internacionales realizados a lo largo de las últimas tres décadas. Entre los principales eventos pueden citarse:

- La Conferencia de las Naciones Unidas, celebrada en Mar del Plata en el año 1977.
- La Conferencia Internacional sobre Agua y Ambiente (CIAMA) en Dublín, 1992.
- Conferencia de Naciones Unidas sobre el Medio Ambiente y Desarrollo (CNUMAD), en Río de Janeiro, 1992. La Agenda 21, 1992, Río de Janeiro.
- La Conferencia sobre Evaluación y Estrategias de la Gestión de los Recursos Hídricos en América Latina y el Caribe, 1996.
- “II Diálogo Interamericano sobre Administración de Aguas” , celebrado en Buenos Aires, Argentina, en Septiembre de 1996 , y posteriormente incluidos en la Agenda de la “Cumbre Hemisférica sobre Desarrollo Sostenible” , en Santa Cruz, Bolivia, en diciembre de 1996.
- Taller sobre gestión Integrada de Recursos Hídricos en América del Sur, en Gramado Brasil 1998.
- II foro Mundial del Agua, La Haya 2000.
- La Declaración Ministerial ; La Asamblea del Milenio de las Naciones Unidas 2000.
- La Conferencia de Agua Dulce en Bonn 2001.
- Cumbre Mundial sobre Desarrollo Sostenible(CMDS) Sudáfrica 2002.
- Foro de Agua para las Américas en el siglo XXI México 2002.
- III Foro Mundial del Agua Japón 2003 y su Conferencia.
- IV Foro Mundial del Agua, México 2006.
- V Foro Mundial del Agua, Turquía 2009.

Es necesario generar un nuevo enfoque a nivel mundial de las estrategias y las políticas a aplicar en el sector de los recursos hídricos de los países, especialmente aquellos en vías de desarrollo que aún cuentan con abundantes recursos hídricos, a fin de preservar la sustentabilidad en un nuevo esquema desarrollo.

Día mundial de agua

El Día Mundial del Agua se origina en la Conferencia de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente y el Desarrollo en Mar del Plata, Argentina en 1992, después de la cual, La Asamblea General de las Naciones Unidas declaró el 22 de marzo de cada año, como Día Mundial del Agua.

Esta jornada sirve, año a año, para evaluar y hacer especial hincapié en el tratamiento que los seres humanos le dan al preciado líquido. En la actualidad, según cifras de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), existe una crisis generada por la escasez de agua, su terrible administración y la gran cantidad de inconvenientes con respecto a su saneamiento a nivel mundial, lo que genera una gran preocupación. Se estima que más de mil millones de personas no cuentan con cantidades necesarias de agua potable para cubrir tareas diarias, mientras que otras 2 mil 600 millones carecen de saneamiento, así lo reflejan estudios de la Organización Mundial de la Salud (OMS) y el Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF).

El Día Mundial del Agua brinda una oportunidad excepcional para llamar la atención y crear un impulso que anime a intervenir a los gobiernos, la comunidad internacional, la sociedad civil y los ciudadanos. La celebración de este día tiene por objeto fomentar la comprensión de la medida en que el desarrollo de los recursos hídricos contribuyen a la productividad económica y al bienestar social. Todos los años el Día mundial del Agua tiene una temática distinta, veamos cuales han sido

2009: Los recursos hídricos transfronterizos

2008: Saneamiento

2007: Afrontando la escasez del agua.

2006: Agua y cultura.

2005: El Agua, fuente de vida.

2004: El Agua y los desastres.

2003: Agua para el futuro.

2002: Agua para el desarrollo.

2001: Agua y Salud.

2000: Agua para el siglo XXI.

1999: Todos vivimos aguas abajo. 1998: Agua subterránea - el recurso invisible.

1997: El agua en el mundo: ¿resulta suficiente?.

1996: Agua para ciudades sedientas.

1995: Mujer y agua.

1994: Cuidar de nuestros recursos hídricos es cosa de todos.

Considerando que el agua es uno de los recursos más críticos para el futuro de la humanidad, la Asamblea General de la Organización de Naciones Unidas decidió instituir como Decenio Internacional del Agua al período comprendido entre el 01 de enero del 2005 y el 31 de diciembre del 2015. En razón de ello, todos los países miembros de la ONU deberán desplegar políticas y acciones especiales para asegurar la disponibilidad y el uso racional de dicho recurso vital.

5.3 Marco Jurídico del Agua en Venezuela

La Constitución de la República Bolivariana de Venezuela en el Artículo 304 reza: “Todas las aguas son bienes de dominio público de la Nación, insustituibles para la vida y el desarrollo. La ley establecerá las disposiciones necesarias a fin de garantizar su protección, aprovechamiento y recuperación, respetando las fases del ciclo hidrológico y los criterios de ordenación del territorio.”

La Ley de Aguas quedó sancionada por la Asamblea Nacional en diciembre de 2006 y es publicada en la Gaceta Oficial N° 38.595 de 02-01-2007. El objeto de esta ley queda definido en su Artículo 1 :

“Esta Ley tiene por objeto establecer las disposiciones que rigen la gestión integral de las aguas, como elemento indispensable para la vida, el bienestar humano y el desarrollo sustentable del país, y es de carácter estratégico e interés de Estado.”

Puede decirse, que es en la Ley de Aguas que aparece por primera vez en la legislación venezolana el concepto: Gestión Integral de las Aguas . Un concepto mucho más amplio y holístico, que aquel del ”desarrollo de los recursos hidráulicos”, como aparecía en anteriores planes. Este nuevo concepto, que se ha extendido a nivel internacional pretende ir sobre el conjunto de todas las

partes como elementos de un sistema hídrico, en donde la cuenca hidrográfica es la unidad de gestión.

La Ley de Aguas establece las disposiciones generales que deberán ser reguladas mediante la formulación de nuevos reglamentos, los cuales a su vez deberán estar en concordancia con el postulado del artículo 304, consagrado en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela.

5.3.1 Estructura de la Ley de Aguas

- Título I. Disposiciones generales: Artículos del 1° al 9°
- Título II. De la conservación y aprovechamiento sustentable de las aguas
 - Capítulo I. Disposición general: Artículo 10
 - Capítulo II. De la protección, uso y recuperación de las aguas: Artículo 11
 - Capítulo III. Del control y manejo de los cuerpos de agua: Artículos 12 y 13
- Título III. De la prevención y control de los posibles efectos negativos de las aguas sobre la población y sus bienes: Artículos 14 y 15
- Título IV. De las regiones y cuencas hidrográficas e hidrogeológicas
 - Capítulo I. Disposiciones generales: Artículo 16
 - Capítulo II. De las regiones hidrográficas: Artículo 17
 - Capítulo III. De las cuencas hidrográficas: Artículo 18
 - Capítulo IV. De las providencias y cuencas hidrográficas: Artículo 19
- Título V. De la organización institucional para la gestión de las aguas
 - Capítulo I. Disposiciones generales: Artículos 20 al 22
 - Capítulo II. De las autoridades de las aguas: Artículos 23 al 39
- Título VI. De los instrumentos de gestión

- Capítulo I. Disposiciones generales: Artículos 40 y 41
- Capítulo II. De los planes de gestión integral de las aguas: Artículos 42 al 83
- Capítulo III. Del registro nacional de usuarios y usuarias de las fuentes de las aguas: Artículos 84 al 87
- Título VII. Del sistema económico financiero
 - Capítulo I. Disposiciones generales: Artículos del 88 al 90
 - Capítulo II. Del financiamiento del sistema económico financiero: Artículos del 91 al 95
 - Capítulo III. Del fondo nacional para la gestión integral de las aguas: Artículos del 96 al 105
- Título VIII. De las infracciones y sanciones administrativas
 - Capítulo I. Disposiciones generales: Artículos 106 al 118
 - Capítulo II. De las infracciones y sanciones administrativas: Artículos 119 al 127
- Disposiciones transitorias
- Disposición derogatoria
- Disposición final

De acuerdo con el artículo 17 de la Ley de Aguas, el país quedará organizado en 16 regiones hidrográficas atendiendo a criterios geográficas y socio culturales:

1. **Lago de Maracaibo y Golfo de Venezuela:** cuencas hidrográficas de los ríos Limón, Palmar, Santa Ana, Catatumbo, Zulia, Machango, Pueblo Viejo, Escalante, Chama, Cojoro, Carraipía-Paraguachón y Motatán.
2. **Falconiana:** cuencas hidrográficas de los ríos Matícora, Hueque, Ricoa, Mitare y Capatárda.
3. **Centro Occidental (Tocuyo-Aroa-Yaracuy):** cuencas hidrográficas de los ríos Tocuyo, Aroa y Yaracuy.

4. **Lago de Valencia:** cuencas hidrográficas de los ríos Aragua, Limón, Turmero, Maracay, Carabobo, Cabriales y Las Minas.
5. **Central (Tuy-Litoral Central):** cuencas hidrográficas de los ríos Tuy, Guapo, Cúpira, Capaya y las que drenan al Litoral Central.
6. **Centro Oriental:** cuencas hidrográficas de los ríos Unare, Zuata, Pao y Aragua.
7. **Oriental:** cuencas hidrográficas de los ríos Neverí, Carinicua, Manzanares, Amana, Guarapiche, San Juan y de la Isla de Margarita.
8. **Llanos Centrales:** cuencas hidrográficas de los ríos Guárico y Guariquito.
9. **Llanos Centro Occidentales:** cuencas hidrográficas de los ríos Cojedes, Portuguesa, Guanare, Tiznados y Boconó.
10. **Alto Apure:** cuencas hidrográficas de los ríos Uribante, Masparro, Sarare, Santo Domingo, Pagüey, Suripa y Apure.
11. **Apure:** cuencas hidrográficas de los ríos Apure, Arauca, Capanaparo, Cinaruco, Cuanaviche y Meta.
12. **Amazonas (Alto Orinoco):** cuencas hidrográficas de los ríos Orinoco, Brazo Casiquiare, Ventuari, Ocamo, Sipapo y Cunucunuma.
13. **Caura:** cuencas hidrográficas de los ríos Caura, Suapure y Cuchivero.
14. **Caroní:** cuenca hidrográfica del río Caroní.
15. **Cuyuní:** cuencas hidrográficas de los ríos Cuyuní, Yuruari y Yuruani.
16. **Delta:** cuenca hidrográfica del bajo Orinoco y cuencas hidrográficas de los ríos Morichal Largo, Uracoa, Mánamo y Macareo

De acuerdo con datos suministrados por el Ministerio del Poder Popular para el Ambiente (Minamb) se tiene:

- Aproximadamente 50% del abastecimiento de agua potable, industrial y de riego en el país proviene de agua subterránea.

- De acuerdo a estudios de orden de magnitud, las reservas explotables de aguas subterráneas se ubican en 22.312 millones de m^3 y las reservas totales en 7,7 billones de m^3



Figura 5.1: Regiones hidrográficas

- Cerca del 43% de la superficie del país está cubierta por sedimentos poco o no consolidados con buenas posibilidades para la acumulación y aprovechamiento de las aguas subterráneas.
- Las zonas con mejores potencialidades de acumulación de aguas subterráneas y de acuíferos de importancia regional están en la región central, en el sur del lago de Maracaibo, en el piedemonte de la región Andina de los llanos centrales y occidentales y en la mesa de Guanipa.

- Aunque en el territorio nacional existen más de 50.000 pozos de agua. La base de datos del grupo de Aguas Subterráneas tiene registrado mas de 17.000 pozos de agua con información de ubicación, profundidad, niveles, caudales, parámetros hidráulicos, litología y calidad del agua.

5.3.2 Provincias Hidrogeológicas

Se definen como una región de características generales similares en cuanto a las condiciones de ocurrencia de las aguas subterráneas, condicionados por la conformación geológica y las características fisiográficas. Este criterio de regionalización fue establecido por el Proyecto de Desarrollo para las Naciones Unidas (PNUD) en la elaboración del mapa hidrogeológico de América del Sur, actualmente en vigencia y en el que participaron y adoptaron los hidrogeólogos en Venezuela, para su división en regiones hidrogeológicas. En Venezuela se distinguen cuatro Provincias Hidrogeológicas:

Andina Vertiente Atlántica y del Caribe (a)

Esta provincia comprende integralmente la Provincia Fisiográfica de las Cordilleras Venezolanas, incluyendo además la Provincia de Fisiografía de las Precordilleras y el Piedemonte.

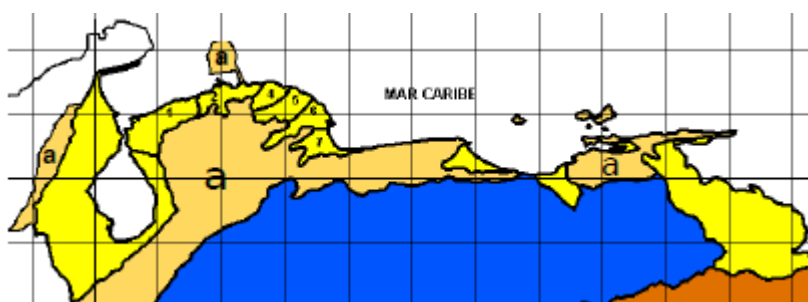


Figura 5.2: Andina Vertiente Atlántica y del Caribe

Los acuíferos más conocidos e importantes en esta provincia son:

- Acuífero del Valle de Caracas y Litoral Central
- Acuífero del Lago de Valencia
- Acuífero Tuy Alto y Valle de Santa Teresa

- Acuífero Guatire Guarenas
- Acuífero Tocuyo Alto, Medio e inferior
- Acuífero de Barquisimeto, Quibor, Carora y Siquiere
- Acuífero El Isidro, Maticora, Mitare y Depresión Pedregal
- Acuífero Cumanacoa, San Antonio y Clavellinos

Planicies Costeras (b)

Incluye las Planicies de la cuenca del Lago de Maracaibo, las Planicies Costeras y la Provincia del Sistema Deltáico Oriental.

A su vez, se subdivide en dos subprovincias:

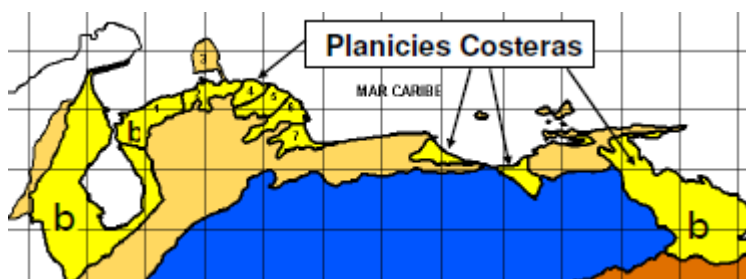


Figura 5.3: Planicies Costeras

Planicie del Mar Caribe, Planicie del Océano Atlántico, compuesta por la cuenca Delta del Orinoco, la cuenca del PilarGuiria y la cuenca del río San Juan. Los acuíferos más conocidos e importantes en esta provincia son:

- Acuíferos La Guajira, Costa Oriental y Costa Occidental del Lago de Maracaibo
- Acuífero de Coro.
- Acuíferos de Bajo Tocuyo y Aroa.
- Acuíferos Bajo Tuy y Depresión de Unare.
- Acuíferos río Neverí y río Manzanares.
- Acuíferos Cariaco, Casanay, El Pilar, Guiria.
- Acuífero Delta del Orinoco

Orinoco o Llanos (c)

La integra la Provincia Fisiográfica de los Llanos, incluido el Macizo de El Baúl. Esta es una de las Provincias menos complejas en cuanto a sus características fisiográficas y su constitución geológica.

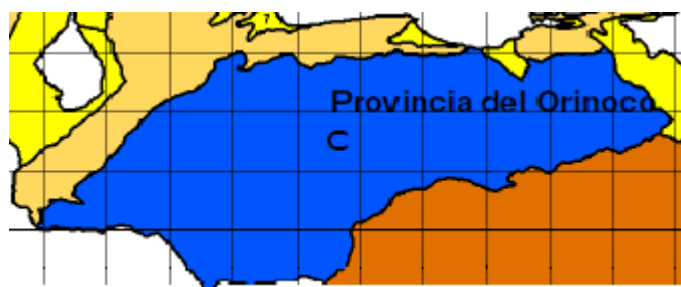


Figura 5.4: Orinico o Llanos

Los acuíferos más conocidos e importantes en esta provincia son:

- Acuíferos de los Llanos Centrales y de Apure, Acuíferos de los Llanos Centrales y Orientales. (acuíferos de Mesa de Guanipa Maturín y Cerro Negro.)

Escudo Septentrional o de Guayana (d)

Comprende la Provincia fisiográfica de Guayana. Por encontrarse sobre un basamento tectónicamente estable, sus características fisiográficas no presentan grandes complicaciones. Los acuíferos más conocidos e importantes en esta provincia son: Son los acuíferos de las sabanas del Orinoco y del Roraima.



Figura 5.5: Escudo Septentrional o de Guayana

5.4 Acuíferos transfronterizos

El agua subterránea no conoce límites de territorio. Algunos acuíferos se desarrollan totalmente dentro de un país, pero otros están por debajo de dos o más países. Estos acuíferos se denominan **acuíferos transfronterizos**.

Muchos de los acuíferos más importantes del mundo son transfronterizos hasta el momento se calcula 273 al igual que sucede con respecto a cualquier recurso transfronterizo, el manejo de estos acuíferos podría convertirse en un duro desafío ya que requiere la colaboración entre varios niveles de las instituciones de manejo de tierra y agua en el país y entre los diferentes países involucrados.

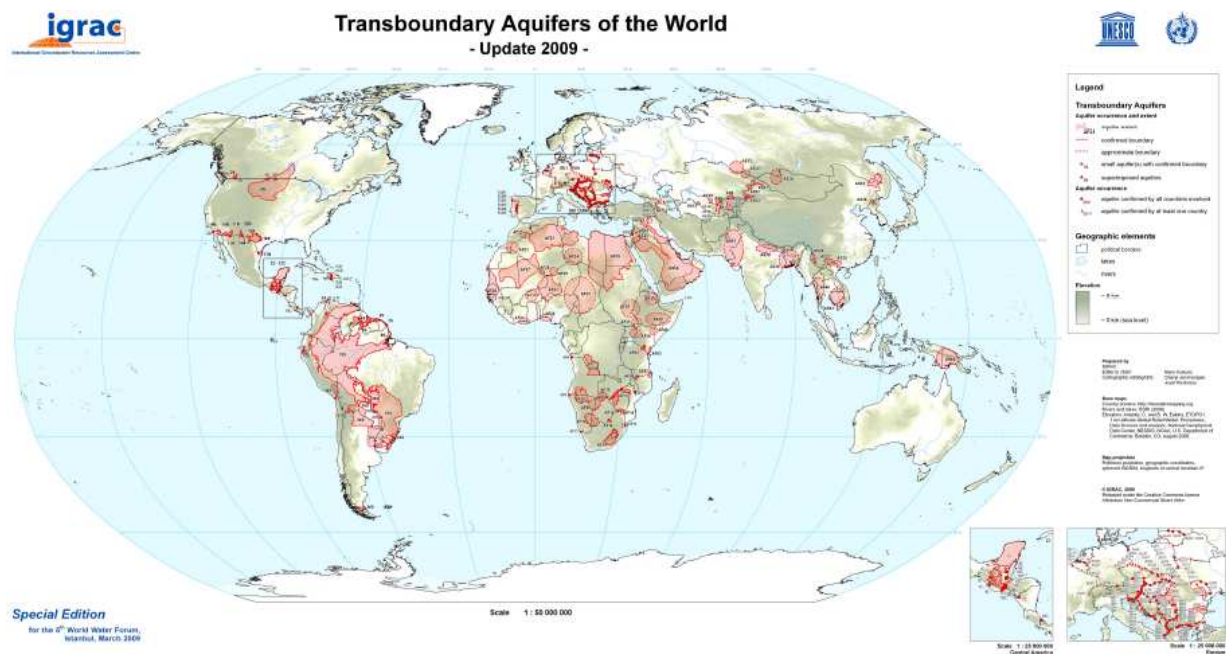


Figura 5.6: Mapa mundial de acuíferos transfronterizos

En 2002 la UNESCO y la OEA en forma conjunta lanzaron el Programa UNESCO/OEA ISARM Américas (Acuíferos Transfronterizos de las Américas), una iniciativa regional para el

hemisferio occidental, durante el Congreso de la Asociación Internacional de Hidrogeólogos y la Asociación Latinoamericana de Hidrogeología Subterránea para el Desarrollo (IAH/ALHSUD), en Mar del Plata, Argentina.

El Mapa Mundial de Acuíferos Transfronterizos – actualización 2009 (figura 5.6), compilado por el Centro Internacional de Evaluación de los Recursos de Aguas Subterráneas (IGRAC) presenta el actual estado y magnitud del problema concerniente a los Acuíferos Transfronterizos a escala global.

El propósito de este mapa es el de proveer una visión global de estos importantes recursos hídricos compartidos al igual que estimular su adecuada evaluación. Este mapa muestra que Venezuela comparte 4 acuíferos, a continuación una breve descripción de cada uno.

- Nombre: **Táchira-Pamplonita**

Ubicación: Entre Venezuela y Colombia.

Extensión: 80 Km^2 Aproximadamente

La precipitación pluvial media anual: 740 mm

Características:

- Región dinámica entre los dos países.
- Explotación sin sostenibilidad estratégica.

- Nombre: **La Guajira**

Ubicación: Entre Venezuela y Colombia.

La precipitación pluvial media anual: 500 mm

Características:

- Planicie costera, elevaciones de 0 a 20 msnm, clima árido, la temperatura media por encima de 28 ° C.
- Acuífero no confinado y de uso intenso.
- Problemas de salinación



Figura 5.7: Acuíferos transfronterizos

- Nombre: **Grupo Roraima**

Ubicación: Entre Brasil - Guyana y Venezuela

Extensión: 70 Km^2 Aproximadamente

La precipitación pluvial media anual: 1.200-2.400 mm

Características:

- Altitud superior a 1.000 m.
- El clima es tropical lluvioso.
- La parte más grande del sistema acuífero está en Brasil.

- Nombre: **Amazonas**

Ubicación: Entre Bolivia - Brasil - Colombia - Ecuador - Perú y Venezuela.

Extensión: 3.950.000 Km^2 Aproximadamente

Clima: Húmedo, hasta 3 meses secos, la temperatura media por encima de 18 ° C.

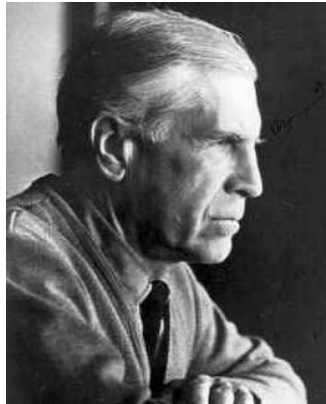
Características:

- Buen rendimiento y buena calidad del agua.
- Falta de estudios porque el acuífero se encuentra en zonas con pocos habitantes y donde el acceso es difícil.
- Es de gran Importancia para las comunidades que viven junto a los ríos, porque el acuífero es la única alternativa a la contaminación de las aguas superficiales.

ALGUNOS MATEMÁTICOS IMPORTANTES

Hay muchos matemáticos que merecen ser mencionados por sus grandes contribuciones a las matemáticas y otras ciencias. Pero sería muy difícil tratar de escribir sobre todos ellos. Por lo tanto, esta sección presenta una breve biografía de algunos de los matemáticos más importantes involucrados en este Trabajo Especial de Grado.

Lev Pontryagin



Lev Semionovich Pontryagin (3 septiembre 1908 - 3 de mayo 1988) fue un matemático ruso soviético. Nació en Moscú y perdió la vista en una explosión de hornillo de queroseno cuando tenía

14 años. Aunque perdió la vista, Pontryagin llegó a hacer mentalmente cálculos matemáticos. Su madre Tatyana Andreevna, de profesión costurera una mujer extraordinaria, aprendió idiomas para poderle leer artículos científicos y explicar las ecuaciones formuladas por él.

Autor de famosos trabajos de topología, hizo importantes descubrimientos en diversos campos de las matemáticas. Trabajó en la teoría de la dualidad de homología, mientras todavía era un estudiante. Llegó a sentar las bases de la teoría abstracta de la transformada de Fourier, llamada ahora la dualidad de Pontryagin. Más adelante en su carrera trabajó en la Teoría de Control Óptimo. Su principio máximo es fundamental para la Teoría moderna de la optimización. Presentó también existe la idea de un control bang-bang.

Existe un monumento a Lev Pontryagin ubicado en la pared del edificio en Leninsky Prospekt en Moscú, donde vivió desde 1938 hasta 1988. Pontryagin recibió numerosas distinciones por su trabajo. Fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en 1939, convirtiéndose en un miembro de pleno derecho en 1959. Fue honrado en 1970 por haber sido elegido Vice-Presidente de la Unión Matemática Internacional.

William Hamilton



Sir William Rowan Hamilton (4 de agosto de 1805 – 2 de septiembre de 1865) fue un matemático, físico, y astrónomo irlandés, que hizo importantes contribuciones al desarrollo de la óptica, la

dinámica, y el álgebra. Su descubrimiento del cuaternión es quizá su investigación más conocida. El trabajo de Hamilton en dinámica fue después decisivo en el desarrollo de la mecánica cuántica, donde un concepto fundamental llamado hamiltoniano lleva su nombre. Demostró su inmenso talento a una edad muy temprana, cosa que hizo decir al Dr. John Brinkley, astrónomo y obispo, en 1823, cuando Hamilton tenía 18 años: “Este joven, no digo que será, sino que es, el primer matemático de su tiempo”.

Quizá el momento más recordado de su vida fue cuando, según cuenta él mismo, acudió a su cabeza como un relámpago la estructura de los números cuaterniónicos. Evidentemente, Hamilton llevaba mucho tiempo pensando en aquel problema, pero sea como fuere, un día de 1843 paseaba por el puente de Brongham, que cruza el canal Real de Dublín, cuando de repente comprendió la estructura de los cuaterniones. Acto seguido grabó con la punta de su navaja, sobre una piedra del puente, (esta inscripción no se conserva hoy día).

Richard Bellman



Richard Bellman (1920 – 19 de marzo de 1984) Bellman estudió matemáticas en la universidad de Brooklyn, donde obtuvo una diplomatura, y luego en la universidad de Wisconsin, donde obtuvo su licenciatura. Ejerció la docencia en la universidad del sur de California.

Richard Bellman es una figura destacada entre los contribuyentes a la teoría de control moderno y análisis de sistemas. La invención de la programación dinámica marcó el comienzo de una nueva era en la análisis y optimización de sistemas de gran escala y abrió un camino para la aplicación de computadora sofisticados técnicas de orientación en una amplia variedad de áreas-problema que van desde el diseño de orientación para los vehículos espaciales para las plagas de control y optimización de la red.

Su invención de la programación dinámica en 1953 fue un gran avance en la teoría de los procesos de decisión en varias etapas, un avance que sentó las bases para la aplicación de la ecuación funcional técnicas en un amplio espectro de campos que se extiende mucho más allá del problema de áreas, que proporcionó la motivación inicial de sus ideas. Además de su fundamental trabajo en programación dinámica, Bellman hizo una serie de importantes contribuciones tanto para las matemáticas puras como las aplicadas. En 1979 el IEEE le otorgó la medalla de honor por su contribución a la teoría de los sistemas de control y de los procesos de decisión, en especial por su contribución con la programación dinámica y por la ecuación de Bellman.

Carl Jacobi



Carl Gustav Jakob Jacobi (10 de diciembre de 1804 - 18 de febrero de 1851). Filósofo y matemático alemán nacido en Postdam y fallecido en Berlín. Autor muy prolífico, contribuyó en varios campos de la matemática, principalmente en el área de las funciones elípticas, el álgebra, la teoría de números y las ecuaciones diferenciales.

Jacobi estableció junto a Niels Henrik Abel la Teoría de las funciones Elípticas. Demostró la solución de integrales elípticas mediante la aplicación de las funciones, series exponenciales introducidas por él mismo. Desarrolló los determinantes funcionales, llamados después jacobianos, y las ecuaciones diferenciales.

En 1834 probó que si una función uni valuada de una variable es doblemente periódica entonces la razón de los periodos es imaginaria. Este resultado impulsó enormemente el trabajo en esta área, en particular por Liouville y Cauchy.

También destacó en su labor pedagógica, por la que se le ha considerado el profesor más estimulante de su tiempo. Jacobi tenía la reputación de ser un excelente maestro, atraía a muchos estudiantes. Introdujo un método de seminario para enseñar a los estudiantes los últimos avances matemáticos.

Kishosy Itô



Kishosy Itô (7 de septiembre de 1915 - 10 de Noviembre 2008). Nació en Hokusei-cho (Japón) y estudió matemáticas en la Universidad Imperial de Tokyo. Los antecedentes del trabajo de Itô se remontan a las observaciones del botánico Robert Brown en 1827 sobre el movimiento de los granos de polen en el agua, el movimiento browniano. Este movimiento errático fue estudiado

por Einstein, quien estableció sus reglas (no hay forma de predecir futuro basándose en las trayectorias pasadas.)

Itô con ésta frase refleja claramente cómo veía las matemáticas: *“Es construyendo estructuras matemáticas como los matemáticos encuentran el mismo tipo de belleza que otros encuentran en la música o en la arquitectura. Pero hay una gran diferencia: la música de Mozart puede ser disfrutada incluso sin conocer la teoría musical. Sin embargo, la belleza de las estructuras matemáticas no se puede apreciar sin entender las fórmulas: sólo los matemáticos pueden leer las partituras matemáticas y tocar esa música en sus corazones. Yo creía que sin las fórmulas nunca podría transmitir la dulce melodía que tocaba mi corazón. Las ecuaciones diferenciales estocásticas, llamadas la fórmula de Itô, se usan para describir las fluctuaciones aleatorias. Al principio, mi artículo no atrajo mucha atención, y fue 10 años después cuando otros matemáticos comenzaron a leer mis partituras y a tocar mi música”*.

En 1942, Kiyoshi Itô desarrolló una teoría de **“ecuaciones diferenciales estocásticas”** creando una herramienta esencial para el estudio de los fenómenos aleatorios en general, y de los fenómenos brownianos en particular. Aunque su motivación fue puramente matemática, su teoría se ha aplicado a campos como la biología y la economía. Pasaron sin embargo muchos años hasta que sus resultados fueron apreciados. Una semana antes de su muerte Itô recibió la Medalla de la Cultura de Japón, el más alto honor concedido por el emperador.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES GENERALES

“De todas las crisis sociales y naturales que debemos afrontar los seres humanos, la de los recursos hídricos es la que más afecta a nuestra propia supervivencia y a la del planeta”

Koichiro Matsuura - Director General de la UNESCO

Ya sea que vivamos cerca de un bosque o en el corazón de una ciudad, nuestros medios de subsistencia y, de hecho, nuestras vidas dependen de los servicios proporcionados por los sistemas naturales de la Tierra. El Informe Planeta Vivo 2008 nos advierte que estamos consumiendo los recursos que sustentan estos servicios demasiado rápido, a mayor velocidad que el tiempo que se requiere para renovarlos. De la misma manera en que el gasto desmedido está generando una recesión, el consumo irresponsable está agotando el capital natural del Planeta, hasta el punto de poner en peligro nuestra futuro. El Índice Planeta Vivo muestra que, solamente en los últimos 35 años, hemos perdido casi un tercio de la vida silvestre de la Tierra. Según el Informe Brundland , el *“desarrollo sostenible es el tipo de desarrollo que permite satisfacer las necesidades actuales sin comprometer la capacidad de las futuras generaciones para satisfacer las suyas”*. Fundamentalmente, esta definición nos propone un objetivo social que, como pocos otros, todos estamos dispuestos a compartir aunque desconozcamos las consecuencias que la búsqueda de tal tipo de desarrollo puede tener sobre nuestro actual nivel de vida. Pero, aunque la declaración de tal propósito compartido tenga sentido en sí misma, no parece suficiente. También es necesario descubrir el modo de conseguir el desarrollo sostenible, lo que plantea no

pocos y difíciles problemas, ya que no sabemos nada acerca de lo que será importante para las generaciones futuras.

Todos los sistemas naturales de vida en el planeta dependen de la disponibilidad de agua. La civilización y el bienestar comunal actual necesitan del agua para consumo humano, para diversos usos domésticos, para sus sistemas productivos agrícolas e industriales y para producir la energía que mueve las ciudades e industrias. El agua interviene en un número infinito de fenómenos naturales y antropogénicos relacionados con casi todos los procesos ambientales. Por esta razón, todas las políticas sociales y ambientales deben incluir el agua como elemento integrador y clave. Las políticas y el manejo racional del agua son componentes críticos en la sostenibilidad de estrategias ambientales.

La escasez y contaminación del agua y la pobreza están relacionadas. La poca disponibilidad del agua limita el potencial de desarrollo social, al constituirse en un costo de labor adicional y afectar las condiciones sanitarias que, junto a fuentes de agua no apropiadas, dan lugar a muchas enfermedades como el cólera, amebiasis, diarreas, fiebre tifoidea y hepatitis. La organización mundial de la salud (OMS) asegura en un informe reciente que un 80 % de los casos de enfermedad y una tercera parte de las muertes en los países en vías de desarrollo, tienen su origen en el consumo de agua contaminada.

En los países latinoamericanos y del Caribe, las aguas subterráneas son una parte importante del ciclo hidrológico para todo el ambiente. El 95 % de toda el agua dulce que existe en el Planeta Tierra se encuentra en el subsuelo, y forma las aguas subterráneas. Menos del 5 % restante es el agua superficial que se encuentra en ríos y lagos. Algunas ventajas del agua subterránea sobre la superficie son:

- Por lo general, las inversiones para el desarrollo de agua subterránea potable pueden hacerse escalonadas según el incremento de la demanda y las captaciones pueden estar cerca de donde se necesitan, por tanto se reducen los costos de conducción; al igual que los costos de tratamiento y almacenamiento;
- la calidad físico - química natural del agua subterránea es mucho más constante que

la del agua superficial, y normalmente es de calidad potable con muy poco o nada de tratamiento;

- por la existencia de suelos y/o roca arriba del reservorio de aguas subterráneas, están más protegidas de la contaminación (natural y antrópica) que las aguas superficiales;
- sus variaciones en cantidad y disponibilidad en épocas de sequía y de precipitación son muy pequeñas comparadas con la del agua superficial, en la que los ríos se secan o pueden producir inundaciones como las causadas por desastres naturales;
- las aguas subterráneas, bien manejadas, son también una reserva estratégica importante en caso de epidemias, desastres naturales, guerras o accidentes nucleares.

Con todo y las anteriores ventajas, las aguas subterráneas pueden ser deterioradas o contaminadas por **sobreexplotación** y otras actividades humanas, una vez contaminado el reservorio de aguas subterráneas, su recuperación, algunas veces, es difícil y en muchos casos prácticamente imposible por el costo y tiempo que toma su limpieza, lo cual podría alcanzar décadas o siglos.

Mejorar la gestión del recurso hídrico es de primera importancia para nuestros países. Si bien se constata que en varios países de la región se llevan a cabo planes de gestión de los recursos hídricos superficiales, no ocurre lo mismo con relación a las aguas subterráneas. Existiendo algunos procesos incipientes de gestión, se considera adecuada y oportuna la difusión a efectos de profundizar y extender su aplicación. Asimismo, se considera de importancia tomar conocimiento de la gestión que se realiza en otros países por medio de la participación de expertos internacionales. Entre las razones por la que hay una escasa o nula gestión tenemos:

- Desconocimiento de la importancia y ventajas de los recursos hídricos subterráneos
- La falta de voluntad política relacionada con la gestión de los recursos hídricos en poner atención a los conceptos de “Valor estratégico y económico” de las aguas subterráneas.
- La no-participación de los actores claves en la gestión integral de las aguas subterráneas, específicamente del usuario común.

- La poca capacidad de los técnicos en ciertos casos de diseñar, formular e implementar planes de gestión de acuíferos.
- La excusa de la falta de recursos e información para iniciar procesos de gestión de acuífero.

El objeto de la Tesis de Grado ha sido el de exponer el uso o empleo de la Teoría de Control y la Programación Dinámica a la gestión sustentable de los recursos hídricos. Como herramienta para el estudio cuantitativo y la modelización de fenómenos naturales, las matemáticas están presentes en todas las disciplinas: ecología, economía, física, biología, etc. Cuestiones fundamentales como explotación y gestión de los recursos naturales tanto renovables como no renovables, hacen uso de técnicas matemáticas entre las que están las de **Optimización**. Es por ello, que el desarrollo de las matemáticas ha seguido, en numerosas ocasiones, el reflejo de las situaciones y de los problemas que se presentan en las actividades humanas. El comercio, la industria, la construcción, la navegación, han hecho que se crearan y se perfeccionaran métodos matemáticos que pudieran dar respuesta a los retos que, en cada momento, se han presentado ante el entendimiento del ser humano. Para poder comprender la realidad que le rodea, modificarla, e incluso predecir sus manifestaciones, el hombre crea una serie de objetos abstractos que dentro de un sistema de reglas matemáticas precisas, pueden relacionarse entre sí, asimilando aquello que sucede a ciertas acciones sobre los objetos que ha creado. Ha nacido así el modelo matemático.

En este trabajo se estudió uno de los modelos pioneros de la programación dinámica estocástica, dentro del campo de la economía de los recursos hídricos: el trabajo de Oscar Burt sobre la asignación intertemporal óptima del agua subterránea. Burt no solamente resolvió el problema de la optimización del bombeo, dada una distribución de probabilidad de recarga del acuífero, sino que, además, sugirió una Política de Control de Retroalimentación Aproximadamente Óptima (PCRAO, AOFCP siglas en inglés) para establecer el ritmo corriente de bombeo como función de las existencias corrientes de agua subterránea. El enfoque tiene la ventaja de ser relativamente fácil de manejar, al tiempo que permite la actualización de las estimaciones de los parámetros hidroeconómicos más importantes.

Por otra parte, los acuíferos deberían clasificarse separadamente de los recursos renovables y

de los no renovables, a pesar de las características semejantes que tienen con ambos. Se puede decir que los acuíferos proveen una transición natural de la categoría de recursos renovables a los no renovables. En consecuencia, se pueden considerar los modelos de aguas subterráneas analíticamente similares a los de recursos biológicos, como son los de pesquería y forestales, pero, a diferencia de éstos, la tasa de recarga del agua no es biológica. La recarga se produce de forma general, independientemente del stock existente en el acuífero. En este sentido, los modelos de aguas subterráneas se asemejan a los de minerales, gas o petróleo, pero estos últimos se diferencian de los hídricos en que su tasa de crecimiento es igual a cero.

Teniendo en cuenta, las consideraciones anteriores, la modelización de los acuíferos, que se desarrolla en esta tesis, se hará desde el núcleo común de los modelos naturales, pero tomando algunas de las características de los renovables y otras de los no renovables, quedando las aguas subterráneas conceptualizadas como **recursos renovables no biológicos**.

También la consideración de la gestión de los acuíferos como un recurso natural está mediada por la definición de los derechos de propiedad. La interpretación de los mismos permitirá no sólo aportar alguna luz sobre cuál es la forma de gestionar el recurso, sino que también facilitará una visión de las trayectorias para alcanzar el estado estacionario, tal que cuando lleguemos al mismo, o bien se alcanza una tasa de extracción igual a la recarga, o bien se alcanza un stock cero, o, en su caso, hay intrusión marina. No obstante aquí eludimos cualquier análisis de estructura de mercado distinta a la de competencia perfecta, en la que cualquier imperfección en la estructura ocasionará un retraso en el agotamiento del recurso, o un retraso en alcanzar el estado estacionario de un recurso renovable.

Todos los seres humanos demandan agua como bien final, en algunos procesos productivos se demanda agua como bien intermedio, es decir, como insumo para producir otros bienes. La naturaleza produce el agua sin costo para el ser humano, las sociedades humanas crean instituciones para el aprovechamiento de este recurso, instituciones adecuadas aseguran su uso eficiente y equitativo, instituciones inadecuadas pueden producir, en el peor de los casos, la destrucción del bien. Pero este recurso esencial está en peligro. El volumen de agua que se encuentra a nuestra disposición ha permanecido invariable durante miles de años, mientras que

el número de usuarios y las modalidades de utilización han aumentado muy considerablemente. Algunos fenómenos de ámbito mundial tales como el crecimiento demográfico, la urbanización, los cambios en el uso del suelo y el calentamiento de la Tierra están generando presiones encontradas sobre este recurso limitado. A consecuencia de todo esto, el volumen de agua disponible por persona es cada vez más desigual y está menguando de manera drástica. A lo largo de todo el siglo pasado ha aumentado la utilización de las aguas subterráneas en todo el mundo, tanto para abastecimiento urbano como para el riego, en particular en la segunda mitad del siglo. Algunas de las ciudades más pobladas del mundo se abastecen mayoritariamente con aguas subterráneas. Entre ellas están México, Calcuta, Shanghai, Buenos Aires, Pekín, París y Londres.

En los países desarrollados la utilización del agua subterránea para usos urbanos es muy importante, siendo superior al 70 % en muchos países de Europa. Es casi el 100 % en Dinamarca y supera al 50 % en los Estados Unidos. Venezuela cuenta con abundantes recursos de aguas superficiales y subterráneas. Las aguas subterráneas representan una superficie total de 829.000 Km^3 , los cuales, a través de estudios preliminares, se han estimado en cinco mil millones de metros cúbicos por año.

Un problema básico en la administración del agua surge en el momento de definir la pertenencia del recurso, y por lo tanto quien y como puede hacerse uso de él. Los derechos de propiedad del agua constituyen un elemento esencial de la gestión del recurso, definirlos adecuadamente posibilitará la aplicación de formas eficientes del manejo del agua. Una vez establecidos los derechos de propiedad se deben fijar distintas reglas para la gestión de los recursos hídricos. En Venezuela por ejemplo, según el Artículo 304 de La Constitución de la República Bolivariana de Venezuela “Todas las aguas son bienes de dominio público de la Nación, insustituibles para la vida y el desarrollo...” Las aguas subterráneas constituyen una importante fuente de riqueza en Muchas regiones que dependen de este recurso natural para el desarrollo del regadío y para el abastecimiento de sus poblaciones e industria. El riego con aguas subterráneas en Venezuela supera el 50 %.

En la actualidad, la mejor práctica disponible y los conocimientos científicos rara vez son de-

bidamente tomados en cuenta en la toma de decisiones o bien representado la hora de establecer la política de recursos hídricos o la aplicación de prácticas de gestión. La necesidad de desarrollar prácticas más sostenibles para la gestión y uso eficiente de los recursos hídricos, así como la necesidad de proteger los ecosistemas del medio ambiente, donde esos recursos son ubicados, ha dado lugar a cambios fundamentales en la conciencia y la preocupación del público en la última década. Sin embargo, a pesar de una mayor conciencia de las cuestiones en juego, los criterios económicos y políticamente cargado de razonamiento siguen siendo las decisiones de conducción de los recursos hídricos para el desarrollo en la mayoría de los locales, regionales, nacionales e internacionales, los niveles. Por este motivo, al menos como está planteado en nuestra definición inicial, el concepto de desarrollo sostenible no resulta demasiado útil para deducir conclusiones sobre la forma en que han de gestionarse los recursos hídricos. Sin duda, el problema del desarrollo sostenible es una de las preocupaciones sociales de la actual generación y quizás debería haber sido motivo de preocupación para quienes nos precedieron.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Azqueta, D. & Ferreiro A., *Análisis Económico y Gestión Recursos Naturales*. España, Alianza Editorial, (1994).
- [2] Black, M., *El Secuestro del Agua. La Mala Gestión de los Recursos Hídricos*. Nueva Dehli, Intermón Oxfam, (2005).
- [3] Burt, O., *Optimal Resource Use over Time with an applications to Groundwater*. Management Science, 11, p.p. 80-93, (1964).
- [4] Burt, O., *Temporal Allocation of Groundwater*, *Water Resource Research*, 3, p.p. 45-56 (1967).
- [5] Burt, O., & Cummings *Natural Resource Management the Steady State and Approximately Optimal Decision Rules*, *Natural Resource Modeling*, 4, p.p. 11-37 (1977).
- [6] Camero, J., *Teoría de Control Óptimo y Gestión de Recursos Naturales Renovables: Caso Pesquero*. Tesis de Pregrado en Licenciatura de Matemática, Universidad Central de Venezuela. Venezuela (2008).
- [7] Cerdá, E., *Optimización Dinámica*. Madrid, Pearson Educación, (2001).
- [8] Chiang, A., & Wainwright, K., *Métodos fundamentales de economía matemática*. México, Mc Graw Hill, (2006).

- [9] Comisión Mundial sobre el medio ambiente y el desarrollo, *Nuestro futuro común*. Informe Brundtland, (1987).
- [10] Constanza, R., Cumberland J., Daly H., Goodland R., & Norgaard, R., *Una introducción a la economía ecológica*. Mexico, Compañía Editorial Continental, (1999).
- [11] Diaz, M., & Galindo, M., *Economía y Medio Ambiente*. España, Biblioteca Nueva, (1999).
- [12] Dorfman, R., *An Interpretations of Optimal Control Theory*, American Economic Review, 59, pp. 817-831. (1969) [Documento en línea]. Disponible: <http://www.andrew.cmu.edu/course/88-737/optimalcontrol/papers/dorfman.pdf>
- [13] Ewing, G., *Calculus of Variations with Applications*. New York, Dover Publications Inc., (1974).
- [14] Ferreyra, G., & Pascal, J., *Control óptimo determinista via Programación dinámica*. Divulgación Matemática Vol. 7 No. 2 (1999), pp.167-185.
- [15] Friedman, A., *Stochastic Differential Equations and Applications*. New York, Dover Publications, Inc., (2006).
- [16] Imaz, C. & Vorel, Z., *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Limusa. México, (1975).
- [17] *Informe Planeta vivo 2008* WWF Internacional, 2008, [Documento en línea]. Disponible: http://assets.wwf.es/downloads/informe_planeta_vivo_2008.pdf
- [18] Kamien, M., & Schwartz N., *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York, North-Holland, (1991).
- [19] Kirk, D., *Optimal Control Theory*. New York, Dover Publications Inc., (1970).
- [20] León, J., *Aplicación del cálculo estocástico en el modelaje del esparcimiento de contaminantes en la superficie del agua*. Tesis de Pregrado en Licenciatura de Matemática, Universidad Central de Venezuela. Venezuela (2008).
- [21] *Ley de Aguas*. Publicada en la Gaceta Oficial No 38.595. Venezuela. (2007)

- [22] Lions, P., *Una Introducción a la Teoría del Control Óptimo Determinista y Estocástico*. Palma, Universitat de les Illes Balears, (1997).
- [23] Martínez, J., & Roca, J., *Economía Ecológica y Política Ambiental*. México, (1998).
- [24] Martínez, P. E., Martínez P., & Castaño S., *Fundamentos de hidrogeología*. España, (2005).
- [25] *Recursos Hídricos de Venezuela*, Ministerio del Poder Popular para el Ambiente, (2006).
- [26] Price, M., *Aguas Subterráneas*. España, Editorial Limusa,(2003).
- [27] Robin, N. Cicneros, J. & Castaner, M., *¿Qué es el Agua?*. Minneapolis, Lerner Publications Company, (2003).
- [28] Rodríguez M., Perez B. & Alonso S., *Optimización Dinámica - Teoría del Control Óptimo*. España, servicio de publicaciones Universidad de Oviedo, (1997).
- [29] Romero, C., *Economía de los Recursos Ambientales y Naturales*. España, Alianza Editorial, (1997).
- [30] Uribe, D., *Economía Matemática*. Colombia, Ediciones Uniandes, (2001).
- [31] Varaiya, P., *Notes on Optimization*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Regional Office, (1971).