UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

El Espacio de las Funciones de $\kappa\varphi$-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Korenblum

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Ivan Zea A.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson J. Merentes D.

Caracas, Venezuela

Octubre, 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**El Espacio de las Funciones de $\kappa\varphi$-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Korenblum**", presentado por el **Br. Ivan Zea A.**, titular de la Cédula de Identidad **17.298.126**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Nelson J. Merentes D.
Tutor

Dr. Manuel Maia
Jurado

Msc. Sergio Rivas
Jurado

“ A mi esposa Mileva y a mi hija Emma.

A mis padres Mireya y Luis, mis hermanos Raquel, Verónica y Jean Paul,

a mis sobrinos Michelle y Gabriel y a toda mi familia,

A la memoria de mis tíos Luis y Felipe.”

Iván Zea Acuña.

Agradecimientos

A mi esposa Mileva por apoyarme en todo momento durante la realización de este trabajo.

A mi hija Emma por ser mi motivación y mi razón para hacer las cosas.

A mi familia por haberme dado la confianza y el apoyo en todo momento para la culminación de la carrera.

Al profesor Nelson Merentes, tutor de este trabajo, por su invalorable colaboración, asesoría y apoyo durante la elaboración de este trabajo.

A los profesores José Luis Sánchez y Sergio Rivas, por las observaciones y recomendaciones realizadas a este trabajo y dedicar parte de su tiempo en la revisión de este trabajo.

Al licenciado Gari Roa y las licenciadas Odalis Mejía, Zorely Jesús y María Sanoja, por siempre estar dispuesto y dispuestas a prestar su ayuda en la obtención de las referencias bibliográficas y por facilitarme las herramientas para comenzar a escribir en Latex.

A todo el personal del Banco Central de Venezuela que me brindo su colaboración.

A mis cuñados Miluska y Heison por buscarme varias veces en su carro al Banco Central a altas horas de la noche en los últimos días del desarrollo de este trabajo.

A Leonardo Prato, Gari Roa, Jesús Materano, Daniella Fuentes, Alejandro Quintero, Alexandra Niño, Coraiza Lopez, Jackelin Godoy y Mariana Garcia por acompañarme en el transcurso de la carrera.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En 1829, el matemático alemán J.P.G.L. Dirichlet, demostró el hoy conocido *Criterio de Dirichlet,* el cual establece que toda función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por medio de un número finito de trozos monótonos, tiene serie de Fourier puntualmente convergente (Ver [7]). En 1881, el matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan (Ver [11]), haciendo un estudio sobre el Criterio de Dirichlet, introduce la noción de función de variación acotada en un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, como aquellas funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que:

$$V(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| < \infty,$$

donde el supremo se considera sobre las particiones $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. Esta clase de funciones se denota por $BV[a,b]$ y tiene una estructura de álgebra de Banach (Ver [1]) con la norma:

$$||u||_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u;[a,b]), \ \ u \in [a,b].$$

La noción de variación acotada ha sido generalizada en varios sentidos. En 1910, el matemático húngaro Frigyes Riesz (Ver [20]), introduce una generalización que es conocida en la actualidad como función de p-variación acotada en el sentido de Riesz

$(1 < p < \infty)$. Riesz define la p-variación de una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$V_p^R(u; [a, b]) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \right)^p |t_i - t_{i-1}|,$$

donde $(1 < p < \infty)$. Se puede ver un estudio detallado de las propiedades y caracterizaciones de este tipo de funciones en [1]. Posteriormente, en 1953, el matemático ruso Yu. Medvedev (Ver [17]) extiende el concepto dado por Riesz, introduciendo, de la siguiente manera, la noción de función de φ-variación acotada en el sentido de Riesz

$$V_\varphi^R(u; [a, b]) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \right) |t_i - t_{i-1}|,$$

donde $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es lo que se conoce hoy como una φ-función. Además, Medvedev demuestra una generalización del lema de Riesz (Ver [17]). Esta clase de funciones ha sido estudiada por varios autores tales como Z. Cybertowicz, L. Maligranda, W. Matuszewska y W. Orlicz (Ver [5], [15] y [16]).

En 1975, B. Korenblum (Ver [13]) introduce una nueva clase de funciones denominada κ-variación acotada, la diferencia de ésta con las anteriores es que la distorsión es en el dominio de la función y no en el rango. Korenblum define la κ-variación acotada de una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$\kappa V(u) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})},$$

donde $\kappa : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua, cóncava, creciente, $\kappa(0) = 0, \kappa(1) = 1$ y además $\lim_{x \to 0^+} \frac{\kappa(x)}{x} = \infty$. Este tipo de funciones se denominan κ-funciones.

Recientemente, M. Castillo, S. Rivas, M. Sanoja y I. Zea (Ver [3]) introducen una nueva clase de funciones denominada κ-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, que es una combinación de las nociones de κp-variación acotada en el sentido de Riesz

$(1 < p < \infty)$ y κ-variación acotada, la cual definen de la siguiente manera:

$$\kappa V_p[a,b] = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \right)^p |t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \right)},$$

donde κ es una κ-función y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función. Además demuestran que el espacio generado por esta clase de funciones es un espacio vectorial, normado y de Banach con una norma dada. Cabe destacar, que este resultado es una nueva contribución al tema de los espacios de las funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz y κ-variación acotada, el cual fue enviado a publicación.

Este Trabajo Especial de Grado lo hemos dividido en tres capítulos. En el Capítulo 1 estudiamos el concepto clásico de función de variación acotada en un intervalo $[a,b]$ dado por Jordan (Ver [11]) y varias propiedades que caracterizan estas funciones, tales como, el Teorema de Representación de Jordan, un Teorema de Banach de 1925 (Ver [2]) sobre la indicatriz de Banach y el Teorema de descomposición de Federer de 1969 (Ver [8]) que representa a una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ como la composición de una función Lipschitz con una función creciente. Con el resultado de Federer comentamos la actuación en el caso autónomo del operador de composición en el espacio $BV[a,b]$ y enunciamos el teorema de Josephy (Ver [12]) que establece condiciones necesarias y suficientes en $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúa en $BV[a,b]$.

El segundo capítulo lo comenzamos presentando el concepto de φ-función, mostramos varios ejemplos de φ-funciones y la noción de función de φ-variación acotada en el sentido de Riesz. También, estudiamos algunas propiedades de esta clase de funciones, así como del espacio generado por dicha clase y demostramos que el espacio vectorial $BV_\varphi[a,b]$, generado por la clase de funciones que tienen φ-variación acotada en el sentido de Riesz, es un espacio normado completo, es decir, es un espacio de Banach. Además, en este capítulo, exponemos la definición de κ-función, el concepto de κ-variación acotada dado por Boris Korenblum en 1975 (Ver [13]) y estudiamos algunas propiedades que safisfacen las funciones de κ-variación acotada, entre ellas que esta clase es un espacio vectorial y se puede dotar de una estructura de espacio de Banach. A la familia de todas las funciones de κ-variación acotada la denotaremos por $\kappa BV[0,1]$.

Para concluir este trabajo, en el tercer y último capítulo, introducimos un nuevo concepto denominado: Las funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, el cual definimos de la siguiente manera:

$$\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) := \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})},$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$, φ es una φ-función, κ una κ-función y $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función.

Si $\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) < \infty$ entonces decimos que u tiene $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum. Consideramos varios ejemplos de funciones que satisfacen la definición de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum y exponemos demostraciones de propiedades que satisfacen este tipo de funciones entre ellas que esta clase de funciones es convexo, simétrico, cumple que $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] = \kappa BV[0,1]$ y el espacio vectorial, $\kappa RV_{\varphi}[0,1]$, generado por $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$ es un espacio normado y de Banach con la norma $||u||_{\kappa RV_{\varphi}} = |u(0)| + \mu_{\Lambda}(u)$ donde $u \in \kappa RV_{\varphi}[0,1]$ y $\mu_{\Lambda}(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$.

De acuerdo a nuestro conocimiento del tema creemos que esta nueva noción es un aporte al tema y vamos a escribir un artículo para someterlo al arbitraje internacional.

CAPÍTULO 1

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

En este capítulo comenzamos presentando el concepto de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, introducida en el año 1881 por Camille Jordan (Ver [11]) y se describen algunas de las propiedades de éstas funciones. Además exponemos tres maneras conocidas de caracterizar las funciones de variación acotada:

1. A través de la diferencia de dos funciones monótonas (Caracterización de Jordan) (Ver [11]),

2. Mediante la indicatriz de Banach (Caracterización de Banach)(Ver [2]),

3. A través de la composición de una función monótona con una función Lipschitz (Caracterización de Federer) (Ver [8]).

1.1 Funciones de Variación Acotada.

En el año 1881, Camile Jordan (Ver [11]) introduce el concepto de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ como sigue:

Definición 1.1.1 (Variación Jordan)**.** *Dadas una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$, definimos:*

$$\sigma(u) = \sigma(u; \pi) := \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|$$

y

$$V(u) = V(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sigma(u; \pi),$$

donde el supremo se toma sobre las particiones π del intervalo $[a, b]$. El número $V(u; [a, b])$ se denomina variación en el sentido de Jordan (o simplemente variación) de la función u en el intervalo $[a, b]$. Si $V(u; [a, b]) < \infty$, se dice que la función u tiene variación acotada en el intervalo $[a, b]$.

A continuación se presentarán algunos ejemplos que ilustran la Definición 1.1.1

Ejemplo 1.1.1. *Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u definida por $u(t) = c$, para todo $t \in [a, b]$. Entonces, si $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$, tenemos que*

$$\sigma(u; \pi) = \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |c - c| = 0.$$

De esta manera, $V(u; [a, b]) = 0$.

Ejemplo 1.1.2. *Consideremos $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, la función identidad, es decir, $u(t) = t$ con $t \in [a, b]$. Entonces, para una partición $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ tenemos que*

$$\begin{aligned} \sigma(u; \pi) &= \sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= b - a. \end{aligned}$$

Luego, $V(u; [a, b]) = b - a$.

Notación: Esta clase de funciones se denota por $BV([a,b],\mathbb{R})$ o de una manera más abreviada $BV[a,b]$.

Proposición 1.1.1. *Sea $u \in BV[a,b]$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Es un espacio vectorial.*

2. *Posee una estructura de álgebra.*

3. *Es espacio normado con la norma.*

$$\|u\|_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u), \quad u \in BV([a,b],\mathbb{R}).$$

4. *Además el espacio $BV[a,b]$ es completo con esta norma y un álgebra de Banach.*

La demostración detallada de esta proposición se puede ver en [1].

1.2 Propiedades de las Funciones de Variación Acotada

A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades de las funciones de variación acotada. Además expondremos varias formas de caracterizar las funciones de variación acotada:

- Camille Jordan en 1881 (Ver [11]) por medio de funciones monótonas.

- Stefan Banach en 1925 (Ver [2]) por medio de la indicatriz de Banach.

- Herbert Federer en 1969 (Ver [8]) por composición de una función monótona con una función Lipschitziana.

En primer lugar, enunciaremos y probaremos algunas propiedades conocidas e importantes de la clase de funciones de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ (Ver [1]).

Proposición 1.2.1. *Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada en el intervalo $[a, b]$, entonces la función u es acotada en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración:

Sean $t \in [a, b]$ y $u \in BV[a, b]$. Entonces,

$$|u(t) - u(a)| + |u(b) - u(t)| \leq V(u), \ \ t \in [a, b].$$

Por lo que $|u(t) - u(a)| \leq V(u), \ \ t \in [a, b]$. Entonces

$$|u(t)| \leq |u(a)| + V(u), \ \ t \in [a, b].$$

Así, la función u es acotada en el intervalo $[a, b]$.

$\square$

En lo que sigue en este trabajo, si una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada entonces $||u||_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |u(t)| \leq |u(a)| + V(u)$.

Proposición 1.2.2. *Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada en el intervalo $[a, b]$, entonces:*

$$|u(b) - u(a)| \leq V(u).$$

Demostración:

Es consecuencia directa de la Definición 1.1.1

Proposición 1.2.3. *Si $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona en el intervalo $[a, b]$ entonces $u \in BV[a, b]$ y $V(u; [a, b]) = |u(b) - u(a)|$.*

Para una partición $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$ tenemos que:

- Caso 1. Supongamos que u es creciente en el intervalo $[a, b]$. Por la Definición 1.1.1 se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} u(t_i) - u(t_{i-1}) = u(b) - u(a).$$

Tomando supremo se tiene que:

$$V(u; [a, b]) = u(b) - u(a).$$

- Caso 2. Supongamos que u es decreciente en el intervalo $[a, b]$. De la misma manera, por la Definición 1.1.1 tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} u(t_{i-1}) - u(t_i) = u(a) - u(b).$$

Tomando supremo resulta que:

$$V(u; [a, b]) = u(a) - u(b).$$

Por ambos casos, si la función u es monótona creciente (o decreciente) en el intervalo $[a, b]$, entonces u tiene variación acotada en el intervalo $[a, b]$ y $V(u; [a, b]) = |u(b) - u(a)|$.

Definición 1.2.1 (Función Lipschitz)**.** *Una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es Lipschitz o Lipschitziana en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si existe una constante $L > 0$, llamada constante Lipschitz, tal que:*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|, \;\; x, y \in [a, b].$$

Proposición 1.2.4 (Ver [1])**.** *$Lip[a, b] \subset BV[a, b]$.*

Demostración:

Sean $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $u \in Lip[a, b]$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}| = c(b - a).$$

Tomando supremo del lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene que $V(u) \leq L(b - a)$. Por lo tanto, la función $u \in BV[a, b]$. Así, $Lip[a, b] \subset BV[a, b]$.

Proposición 1.2.5. *Sea $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, entonces:*

1. *Si $u \in BV[a, b]$ entonces $u \in BV[c, d]$ para todo intervalo $[c, d] \subset [a, b]$.*

2. *Si existe* $x \in (a,b)$ *tal que* $u \in BV[a,x]$ *y* $u \in BV[x,b]$ *entonces* $u \in BV[a,b]$ *y además:*

$$V(u;[a,b]) = V(u;[a,x]) + V(u;[x,b]).$$

Proposición 1.2.6. *Sean* $u \in BV[a,b]$ *y* $V_u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *la función definida por:*

$$V_u(t) = V(u;[a,t]) \text{ para todo } t \in [a,b].$$

Entonces:

1. V_u *es una función creciente en el intervalo* $[a,b]$.

2. $V_u - u$ *es una función creciente en el intervalo* $[a,b]$.

La demostración de las Proposiciones 1.2.5 y 1.2.6 se puede ver en [1].

1.2.1 Caracterización de Jordan

El resultado más importante dado por Camile Jordan cuando introduce el concepto de variación acotada en [11], garantiza que una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si, se puede escribir como diferencia de funciones monótonas, en particular de funciones crecientes.

A continuación presentamos una demostración del resultado presentado por Jordan.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Representación de Jordan)**.** *Una función* $u \in BV[a,b]$ *si y sólo si existen funciones* u_1, u_2 *en* $[a,b]$ *monótonas tales que* $u = u_1 - u_2$.

Demostración:

Si u_1 y u_2 son monótonas entonces por la Proposición 1.2.3 se tiene que $u = u_1 - u_2 \in BV[a,b]$.

Ahora supongamos que $u \in BV[a,b]$ y definamos dos funciones $p_u, n_u : [a,b] \to \mathbb{R}$, como:

$$p_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) + u(t) - u(a)), \quad t \in [a,b]$$

$$n_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) - u(t) + u(a)), \quad t \in [a,b]$$

para todo $t \in [a,b]$.

Sean $x, y \in [a,b]$, $x \leq y$, entonces, por las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.5, tenemos que:

$$\begin{aligned} p_u(y) - p_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(y) - u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u;[x,y]) + u(y) - u(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Luego p_u, es una función creciente y como $p_u(a) = 0$, resulta que $p_u(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$.

De manera similar, por las Proposiciones 1.2.2 y 1.2.5,

$$\begin{aligned} n_u(y) - n_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(x) - u(y)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u;[x,y]) + u(x) - u(y)) \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que n_u es creciente y como $n_u(a) = 0$, tenemos que n_u es no negativa.

Así pues, de las definiciones de p_u y n_u resulta que

$$u = p_u - (n_u - u(a))$$

y además

$$V_u(t) = p_u(t) + n_u(t).$$

$\square$

Este resultado es de gran importancia, porque nos permite transferir propiedades de las funciones monótonas (Ver [1]) a las funciones de variación acotada, como se muestra a continuación.

Proposición 1.2.7. *Sea $u \in BV[a,b]$, entonces:*

1. *u tiene limites laterales.*

2. *El conjunto de discontinuidades de u es numerable.*

3. *u posee derivada casi siempre en $[a, b]$.*

4. *u es Riemann integrable.*

5. *u tiene serie de Fourier convergente.*

1.2.2 Caracterización de Banach

Hemos comprobado que las funciones de variación acotada se pueden caracterizar por medio de la diferencia de funciones monótonas. Para el caso en que u además es continua, S. Banach [2] obtuvo otra caracterización al introducir en 1925 la indicatríz de una función continua $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, la cual se denota por I_u, y se define como sigue:

$$I_u : [\min u, \max u] \to [0, \infty)$$

donde $I_u(y)$ es igual al número de raíces de la ecuación $u(x) = y$, es decir $I_u(y)$ es el número de valores $x \in [a, b]$ que verifican la relación $u(x) = y$.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Beppo-Levi)**.** *Sean $(\mathbb{X}, A, \mu)$ un espacio de medida y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

$$u_n : \mathbb{X} \to [0, \infty]$$

una sucesión de funciones medibles Borel no negativas, es decir

$$u_n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} u_n \, d\mu.$$

Para ver detalles de la demostración del Teorema enunciado anteriormente el lector puede remitirse a [10].

Proposición 1.2.8. *Sean $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $I_u : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ la indicatríz de Banach. Entonces*

$$V(u; [a, b]) = \int_{-\infty}^{\infty} I_u(x)\, dx.$$

En particular, $u \in BV[a, b]$ si y sólo si $I_u \in L_1(\mathbb{R})$.

Demostración:

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, definamos $\delta_{k,n} := k\dfrac{(b-a)}{2^n}$, y

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,n} &:= [a, a + \delta_{1,n}), \\
\Delta_{2,n} &:= [a + \delta_{1,n}, a + \delta_{2,n}), \\
&\vdots \\
\Delta_{2^{n-1},n} &:= [a + \delta_{2^{n-1}-1,n}, a + \delta_{2^{n-1},n}), \\
\Delta_{2^n,n} &:= [a, a + \delta_{2^{n-1},n}].
\end{aligned}$$

Más aún, para $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ denotamos

$$m_{k,n} := \{\text{ínf}\, u(x) : x \in \Delta_{k,n}\}, \qquad M_{k,n} := \{\sup u(x) : x \in \Delta_{k,n}\}$$

y definimos las funciones:

$$v_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \quad \text{y} \qquad g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$$

por

$$g_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} = \begin{cases} 1, & si \ \ u(x) = y \ \text{ para algún } \ x \in \Delta_{k,n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$g_n := \sum_{k=1}^{2^n} g_{k,n}(y).$$

La monotonía resulta de $2^{n+1} > 2^n$, es decir, $g_{n+1}(y) \geq g_n(y)$.

Afirmamos que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la indicatriz de Banach $I_u(x)$ de u.

En efecto, supongamos que $I_u(y) = m$, y sea $u^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ denotado como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $u(x) = y$.

Escogemos $N \in \mathbb{N}$ tan grande que $2^{-N} < \min(x_i - x_j)$ tal que $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$; entonces para $n > N$ todos los elementos en $u^{-1}(x)$ pertenecen a diferentes intervalos $\Delta_{k,n}$ y así, $g_n(x) = m$.

Similarmente, en el caso $I_u(y) = \infty$ un razonamiento análogo demuestra que $g_n(x) \longrightarrow \infty$ cuando $n \to \infty$.

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\,dy = \sum_{k=1}^{2^n}(M_{k,n} - m_{k,n}),$$

el lado derecho de la igualdad tiende a la integral de I_u por el Teorema 1.2.2, y el lado derecho tiende a la $V(u; [a,b])$.

$\square$

1.2.3 Caracterización de Federer

A continuación, presentamos la caracterización de funciones de variación acotada debida a H. Federer en 1969 (Ver [8]), como la composición de una función monótona con una función Lipschitz.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Descomposición de Federer)**.** *Una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si se puede representar como la composición $u = g \circ \tau$, donde $\tau : [a,b] \to [c,d]$ es creciente y $g \in Lip[c,d]$ con constante de lipschitzidad $L \leq 1$.*

Demostración:

Supongamos que $f = g \circ \tau$, donde $g \in Lip[c,d]$ con constante de lipschitzidad $L \leq 1$ y $\tau : [a,b] \to [c,d]$ es creciente. Dada una partición $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$ obtenemos

$$V(u,\pi) = \sum_{i=1}^{n} |g(\tau(t_i)) - g(\tau(t_{i-1}))| \leq \sum_{i=1}^{n} |\tau(t_i) - \tau(t_{i-1})| = |\tau(b) - \tau(a)|,$$

por lo tanto, $u \in BV[a,b]$. Por el contrario, sean $u \in BV[a,b]$ y $\tau(t) := V_u(u;[a,t])$ la función de variación (creciente) de u (Ver Proposición 1.2.6). Sabemos que τ es una aplicación de $[a,b]$ en $[c,d]$, donde $c = 0$ y $d = V(u;[a,b])$ y τ no es necesariamente sobreyectiva.

Si definimos la función g sobre el rango $\tau([a,b]) \subseteq [c,d]$ considerando $g(\tau(x)) := u(x)$, entonces la descomposición $u = g \circ \tau$ está bien definida. Dado que

$$|g(\tau(s)) - g(\tau(t))| = |u(s) - u(t)| \leq V(u;[s,t]) = |\tau(s) - \tau(t)|$$

para $a \leq s < t \leq b$, la función g es Lipschitz con constante Lipschitz igual a 1 sobre $\tau([a,b]) \subseteq [c,d]$.

Sin embargo, podemos extender g de $\tau([a,b])$ a una aplicación Lipschitz $\overline{g}$ sobre $[c,d]$ (incluso en toda la recta real $\mathbb{R}$) en una manera más explícita. De hecho, la “convexificación” $\overline{g}$ de g definida (con $0 \leq \lambda \leq 1$) por

$$\overline{g}(y) := \begin{cases} (1-\lambda)g(x^-) + \lambda g(x) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x-) + \lambda\tau(x), \\ (1-\lambda)g(x) + \lambda g(x^+) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x) + \lambda\tau(x^+). \end{cases}$$

tiene la misma constante Lipschitz que g, y así la demostración está hecha.

$\square$

A continuación se presenta un resultado dado por Michael Josephy [12], en el año 1981 referentes a la actuación del operador de composición en el espacio $BV[a,b]$. Éste resultado nos permite obtener condiciones necesarias y suficientes en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúe en el espacio $BV[a,b]$.

Definición 1.2.2. *Consideremos $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función cualquiera. El operador de composición F, asociado a la función f, es definido del espacio $\mathcal{F}$ al espacio $\mathcal{F}$ por la expresión*

$$F_u(t) := f(t,u(t)), \qquad t\in[a,b], \quad u\in\mathcal{F}.$$

En el caso particular, cuando la función f no dependa de una sola variable; es decir, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, el operador F asociado a f viene definido por:

$$F_u(t) := f(u(t)), \qquad t\in[a,b], \quad u\in\mathcal{F}.$$

Esto último se conoce como caso autónomo mientras que el caso general, cuando $f:\ [a,b]\times\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ se denomina caso no-autónomo.

Teorema 1.2.4 (Josephy [12])**.** *Consideremos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y sea F el operador de composición asociado a la función f. El operador F transforma el espacio $BV[a,b]$ en si mismo si y sólo si f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Además, el operador F es siempre acotado sobre conjuntos acotados de $BV[a,b]$.*

Para ver más detalles sobre el operador de composición remitimos al lector a [18].

CAPÍTULO 2

EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE φ-VARIACIÓN ACOTADA EN EL SENTIDO DE RIESZ Y EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE κ-VARIACIÓN ACOTADA

En este capítulo expondremos los conceptos de φ-función, función de φ-variación acotada en el sentido de Riesz, κ-función y función de κ-variación acotada.

El concepto de funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz, fue introducido en el año 1953 por Yu. Medvedev (Ver [17]), generalizando así el concepto de p-variación acotada introducido en el año 1910 por F. Riesz (Ver [20]). Además, Medvedev demuestra una generalización del lema de Riesz para el espacio de las funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz.

También se describe el concepto de κ-variación acotada introducida en 1975 por B. Korenblum en [13], la diferencia de esta noción de variación con las anteriores es que la distorsión es en el dominio de la función y no en el rango. En este capítulo, se demuestra que la clase de funciones que tienen κ-variación acotada tiene estructura de espacio vectorial, normado y de Banach, así como también se muestran algunos resultados importantes referentes a este espacio de funciones.

2.1 El Espacio de las Funciones de φ-Variación Acotada en el sentido de Riesz

2.1.1 φ-funciones.

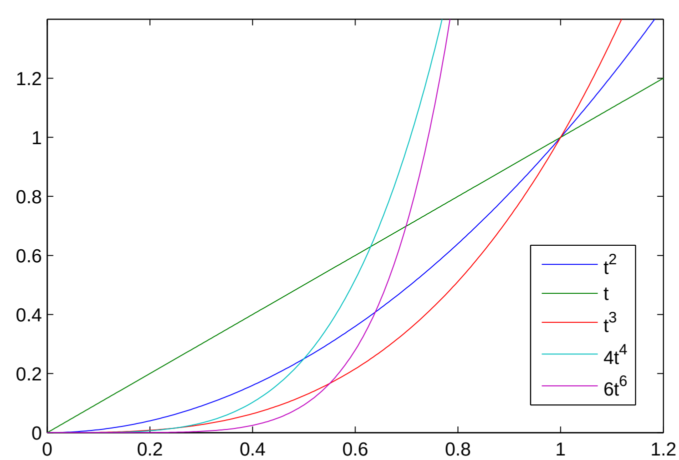
Damos inicio a esta sección presentando el concepto de φ-función también conocida como N-función o función de Young. La denominación de función de Young se debe a que L.C. Young fue el primero en tratar este tipo de funciones en el año 1937 (Ver [24]).

Definición 2.1.1 (φ-función)**.** *Una función $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ se dice que es una φ-función si cumple las siguientes condiciones:*

- *φ es continua en $[0, \infty)$.*
- *$\varphi(t) = 0$ sólo para $t = 0$.*
- $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$
- *φ es no decreciente ($t_1 < t_2$ entonces $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$).*

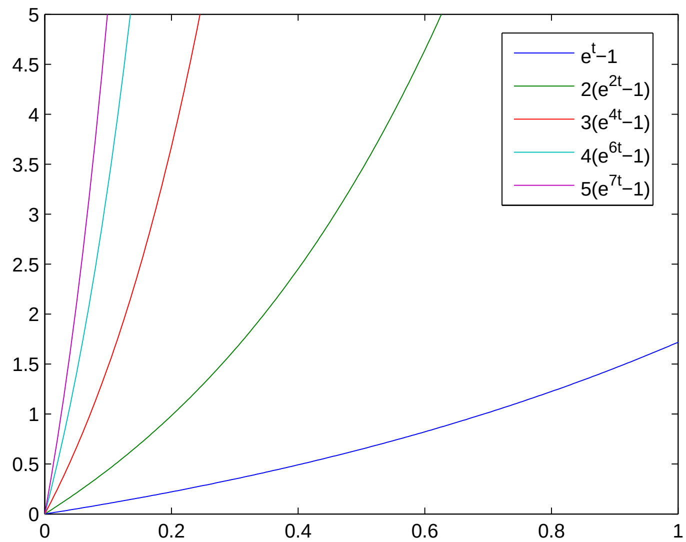
Algunos ejemplos de φ-funciones usados frecuentemente son:

Ejemplo 2.1.1. $\varphi(t) = at^p, \quad p > 1, \ a > 0.$



$$\varphi(t) = at^p, \quad p > 1, \ a > 0$$

Ejemplo 2.1.2. $\varphi(t) = a(e^{bt} - 1), \quad a, b > 0.$



$$\varphi(t) = a(e^{bt} - 1), \quad a, b > 0$$

Al tratar con muchos espacios donde intervienen las φ-funciones se le exige la condición adicional que sean convexas. Otras condiciones de uso frecuente la expondremos en la siguiente Definición.

Definición 2.1.2 (Condiciones ∞_1 y Δ_2)**.** *Sea φ una φ-función convexa, entonces:*

1. *φ cumple la condición ∞_1 si* $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = \infty.$

2. *φ cumple la condición $\Delta_2(0)$ si existen números $C > 0, x_0 > 0$ tales que*

$$\varphi(2t) \leq C\varphi(t), \qquad t \leq x_0.$$

3. *φ cumple la condición $\Delta_2(\infty)$ si existen números $C > 0, x_0 > 0$ tales que*

$$\varphi(2t) \leq C\varphi(t), \qquad t \geq x_0.$$

En la siguiente proposición exponemos algunas relaciones equivalentes con los conceptos de la Definición 2.1.2 y que son consecuencia de la definición de límite superior.

Proposición 2.1.1 (Ver [21]). *Sea φ una φ-función convexa, entonces:*

1. *φ cumple la condición ∞_1 si y sólo si para todo $C > 0$ existe x_0, tal que $\varphi(t) \geq Ct, \;\; t \geq x_0$.*
2. *φ cumple la condición $\Delta_2(0)$ si y sólo si $\displaystyle\limsup_{t\to 0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.*
3. *φ cumple la condición $\Delta_2(\infty)$ si y sólo si $\displaystyle\limsup_{t\to \infty} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.*

En la siguiente proposición demostramos dos propiedades de gran utilidad de las funciones convexas (Ver [21]).

Proposición 2.1.2. *Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función convexa entonces:*

1. *Si $\varphi(0) = 0$, entonces:* $\begin{cases} \varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t), & 0 \leq \alpha \leq 1; \\ \varphi(\alpha t) \geq \alpha\varphi(t), & 1 \leq \alpha. \end{cases}$
2. *Si $\varphi(0) = 0$, la función $t \in (0,\infty) \to \dfrac{\varphi(t)}{t}$ es creciente.*
3. *Si φ es una φ-función que cumple la condición ∞_1, entonces*
$$\lim_{t\to 0} \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right) t = 0, \qquad k > 0.$$

Demostración:

1. Sea $0 \leq \alpha < 1$, entonces de la convexidad de φ, resulta que
$$\varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t) + (1-\alpha)\varphi(0) = \alpha\varphi(t), \qquad t \geq 0.$$
Ahora, sea $\alpha > 1$ entonces de la convexidad de φ, tenemos que
$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{1}{\alpha}\alpha t\right) \leq \frac{1}{\alpha}\varphi(\alpha t).$$
Por lo que $\alpha\varphi(t) \leq \varphi(\alpha t), \;\; t \geq 0, \;\; \alpha > 1$.

2. Sean $0 < s < t$, entonces como φ es convexa y $0 < \dfrac{s}{t} < 1$, tenemos que:

$$\varphi(s) = \varphi\left(\frac{s}{t}t\right) \leq \frac{s}{t}\varphi(t).$$

De donde se tiene que:

$$\frac{\varphi(s)}{s} \leq \frac{\varphi(t)}{t}, \quad 0 < s < t.$$

Así, $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ es creciente.

3. Haciendo el cambio de variable $s = \varphi^{-1}\left(\dfrac{k}{t}\right)$, tenemos que:

$$\lim_{t \to 0} \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right) t = \lim_{s \to 0} \frac{sk}{\varphi(s)} = 0.$$

En 1910 el matemático húngaro F. Riesz (Ver [20]) generaliza el concepto clásico de variación acotada de Jordan, introduciendo lo que se conoce hoy en día como p-variación acotada en el sentido de Riesz (Ver [1]) con $1 < p < \infty$ y demuestra que éstas se corresponden con aquellas funciones absolutamente continuas, introducidas por Vitali en 1905 (Ver [23]), con derivada en el espacio L_p.

Definición 2.1.3 (p-variación en el sentido de Riesz)**.** *Sean* $1 < p < \infty$ *y* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función. Definimos*

$$V_p^R(u; [a, b]) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)^p |t_i - t_{i-1}|,$$

donde el supremo se considera sobre las particiones $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ *del intervalo* $[a, b]$*. El número* $V_p^R(u; [a, b])$ *se denomina* p*-variación en el sentido de Riesz de la función* u *en el intervalo* $[a, b]$*. Si* $V_p(u; [a, b]) < \infty$ *se dice que* u *tiene* p*-variación acotada en el sentido de Riesz en el intervalo* $[a, b]$*.*

Denotaremos a la familia de todas las funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz por $RV_p[a, b]$. La misma es un espacio vectorial, posee una estructura de álgebra y es un espacio normado con la norma

$$||u||_p := |u(a)| + (V_p(u; [a, b]))^{1/p}.$$

Además el espacio $RV_p[a,b]$ es completo con esta norma y un álgebra de Banach (Ver [1]).

A continuación enunciaremos un lema muy importante en el cual F. Riesz en el año 1910 (Ver [20]), caracteriza la clase de funciones de p-variación acotada como aquellas funciones que son absolutamente continuas en $[a,b]$ y cuya derivada está en $L_p[a,b]$.

Lema 2.1.1 (Lema de Riesz)**.** *Sean $1 < p < \infty$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función, entonces $u \in RV_p[a,b]$ si y sólo si u es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u' \in L_p[a,b]$. Además se tiene que:*

$$V_p(u;[a,b]) = ||u'||^p_{L_p[a,b]} = \int_a^b |u'(t)|^p dt.$$

El concepto de p-variación en el sentido de Riesz fue generalizado en 1953 por Yu. T. Medvedev (Ver [17]) de la siguiente manera:

Definición 2.1.4 (φ-variación en el sentido de Riesz)**.** *Sean φ una φ-función y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos*

$$\sigma^R_\varphi(u,\pi) := \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|$$

y

$$V^R_\varphi(u) = V^R_\varphi(u;[a,b]) := \sup_\pi \sigma^R_\varphi(u,\pi),$$

donde el supremo se considera sobre las particiones $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. El número $V^R_\varphi(u;[a,b])$ se denomina φ-variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo $[a,b]$. Si $V^R_\varphi(u;[a,b]) < \infty$, se dice que la función u tiene φ-variación acotada en el sentido de Riesz en el intervalo $[a,b]$.

Notación: Denotaremos por $V^R_\varphi[a,b]$ a la clase de funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ que tienen φ-variación acotada en el sentido de Riesz, es decir:

$$V^R_\varphi[a,b] := \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : V^R_\varphi(u;[a,b]) < \infty\}.$$

Obsérvese que podemos considerar la función $V^R_\varphi(\cdot;[a,b]) : V^R_\varphi[a,b] \to \mathbb{R}$ que asocia a cada función $u \in V^R_\varphi[a,b]$ su φ-variación en el sentido de Riesz.

Notación: Escribiremos $V_\varphi^R(u)$ y V_φ^R en vez de $V_\varphi^R(u;[a,b])$ y $V_\varphi^R[a,b]$ respectivamente.

Algunos ejemplos de funciones que pertenecen a la clase V_φ^R son los siguientes:

1. Cualquier función constante $u(t)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^R(u,\pi) &= \sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|c-c|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi(0)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \varphi(0)|b-a| = 0.
\end{aligned}$$

2. Sea $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función identidad definida por

$$u(t)=t \qquad \text{para todo} \ \ t\in[a,b].$$

$$\begin{aligned}
V_\varphi^R(u)=V_\varphi^R(u;[a,b]) &= \sup_\pi \sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sup_\pi \sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|t_i-t_{i-1}|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sup_\pi \sum_{i=1}^{n}\varphi(1)|t_i-t_{i-1}| = \varphi(1)(b-a).
\end{aligned}$$

donde $\pi: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$.

2.1.2 Propiedades de las Funciones de φ-Variación Acotada en el Sentido de Riesz

Algunas propiedades que tienen relación con esta clase de funciones las exponemos a continuación: (Ver [19]).

Proposición 2.1.3. *Sea φ una φ-función entonces $Lip[a,b] \subset V_\varphi^R[a,b]$.*

Demostración:

Sean $u \in Lip[a,b]$ y $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ la partición del intervalo $[a,b]$ entonces para cada $i = 1, \cdots, n$:

$$\varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \leq \varphi\left(\frac{L|t_i - t_{i-1}|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| = \varphi(L)|t_i - t_{i-1}|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^R(u,\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \varphi(L)|t_i - t_{i-1}| = \varphi(L)|b-a| < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $V_\varphi^R(u;[a,b]) < \infty$. Luego, $Lip[a,b] \subset V_\varphi^R(u;[a,b])$.

Observación: Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que $C^n[a,b] \subset V_\varphi^R[a,b], \ n \geq 1$.

Proposición 2.1.4. *Sean φ una φ-función y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces:*

1. *La función $V_\varphi^R(\cdot,[a,b]) : V_\varphi^R[a,b] \to \mathbb{R}$ es par; es decir, $V_\varphi^R(u) = V_\varphi^R(-u)$.*
2. *$V_\varphi^R(u) = 0$ si y sólo si u es constante.*
3. *Si $V_\varphi^R(u) < \infty$ entonces u es acotada en $[a,b]$.*
4. *φ es convexa si y sólo si $V_\varphi^R(\cdot;[a,b])$ es convexa.*

Demostración:

1. Este resultado se deduce de la Definición 2.1.4:

$$\begin{aligned}
V_\varphi^R(u;[a,b]) &= \sup_\pi \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&= \sup_\pi \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_{i-1}) - u(t_i)|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|-u(t_i)-(-u(t_{i-1}))|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$= V_{\varphi}^{R}(-u;[a,b]).$$

2. Si u es constante entonces se tiene que el conjunto $V_{\varphi}^{R}(u)=0$. Supongamos que $V_{\varphi}^{R}(u)=0$. Entonces,

$$0=V_{\varphi}^{R}(u)\geq\varphi\left(\frac{|u(t)-u(a)|}{|t-a|}\right)|t-a|,$$

para cualquier $t\in(a,b]$. Luego, por la Definición 2.1.1 tenemos que

$$0\geq\varphi\left(\frac{|u(t)-u(a)|}{|t-a|}\right)|t-a|\geq 0$$

por lo que

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(a)|}{|t-a|}\right)|t-a|=0,\quad t\in(a,b].$$

Como φ se anula solamente en cero, resulta que $\dfrac{|u(t)-u(a)|}{|t-a|}=0$, $t\in(a,b]$. Por lo tanto, $u(t)=u(a)$, $t\in[a,b]$. Así, u es constante. En particular, si $u(a)=0$ tenemos que $V_{\varphi}^{R}(u)=0$ si y sólo si $u=0$.

3. Supongamos que $u\in V_{\varphi}^{R}[a,b]$ y que u no es acotada en $[a,b]$, entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq1}$, $t_n\in[a,b]$, para todo $n\geq 1$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty}|u(t_n)|=\infty$. Sea $\{t_{n_j}\}_{j\geq1}$ una subsucesión de $\{t_n\}_{n\geq1}$ tal que $\{t_{n_j}\}_{j\geq1}$ converge a un punto $x\in(a,b]$ entonces $\{u(t_{n_j})\}_{j\geq1}$ es una subsucesión de $\{u(t_n)\}_{n\geq1}$. Luego, $\lim\limits_{j\to\infty}|u(t_{n_j})|=\infty$. Consideremos dos casos:

   Caso 1. Supongamos $x\neq a$. Entonces como

$$\varphi\left(\frac{|u(t_{n_j})-u(a)|}{|t_{n_j}-a|}\right)|t_{n_j}-a|\leq V_{\varphi}^{R}(u)<\infty,$$

   para todo $j\geq1$ y como φ es continua, tenemos que

$$\varphi\left(\frac{\lim\limits_{j\to\infty}|u(t_{n_j})-u(a)|}{|x-a|}\right)|x-a|=\lim_{j\to\infty}\varphi\left(\frac{|u(t_{n_j})-u(a)|}{|t_{n_j}-a|}\right)|t_{n_j}-a|\leq V_{\varphi}^{R}(u),$$

para todo $j \geq 1$.

Por otro lado, $|u(t_{n_j}) - u(a)|$ tiende a infinito cuando $j \to \infty$. Luego, como $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ resulta que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi\left(\frac{|u(t_{n_j}) - u(a)|}{|x-a|}\right)|x-a| = \infty$$

y así $V_\varphi^R(u) = \infty$ lo cual es una contradicción.

Caso 2. Supongamos que $x = a$. Entonces como

$$\varphi\left(\frac{|u(b) - u(t_{n_j})|}{|b - t_{n_j}|}\right)|b - t_{n_j}| \leq V_\varphi^R(u) < \infty,$$

para todo $j \geq 1$ y como φ es continua, se tiene que

$$\varphi\left(\frac{\lim\limits_{j\to\infty} |u(b) - u(t_{n_j})|}{|b-x|}\right)|b-x| = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\frac{|u(b) - u(t_{n_j})|}{|b - t_{n_j}|}\right)|b - t_{n_j}| \leq V_\varphi^R(u),$$

para todo $j \geq 1$. Por otra parte, $\lim\limits_{j\to\infty} |u(b) - u(t_{n_j})| = \infty$, luego como $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} \varphi\left(\frac{|u(b) - u(t_{n_j})|}{|b-x|}\right)|b-x| = \infty$$

y así, $V_\varphi^R(u) = \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, por ambos casos, se obtuvo una contradicción de suponer que u no es acotada. Así, u es acotada.

4. Supongamos que φ es convexa y sean $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Dadas $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición de $[a,b]$ y φ una φ-función convexa y no decreciente tenemos que:

$$\alpha V_\varphi^R(u) + \beta V_\varphi^R(v) = \alpha \sup_\pi \sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| +$$

$$\beta \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$\geq \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)+\beta\varphi\left(\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)\right]|t_i-t_{i-1}|$$

$$\geq \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\alpha(u(t_i)-u(t_{i-1}))+\beta(v(t_i)-v(t_{i-1}))|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|(\alpha u+\beta v)(t_i)-(\alpha u+\beta v)(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$= V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v).$$

Por lo tanto, $V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v) \leq \alpha V_{\varphi}^{R}(u)+\beta V_{\varphi}^{R}(v)$ para todo $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ y así $V_{\varphi}^{R}(\cdot)$ es convexa.

Ahora supongamos que $V_{\varphi}^{R}(\cdot)$ es convexa y sean $x, y \in [0,\infty)$ y $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $u(t) := xt$ y $v(t) := yt, \ \ t \in [a,b]$.

Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ se tiene que por definición

$$\begin{aligned}
V_{\varphi}^{R}(u) &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|(xt_i)-(xt_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x(t_i-t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x)|t_i-t_{i-1}| \\
&= \varphi(x)(b-a).
\end{aligned}$$

De manera similar $V_{\varphi}^{R}(v)=\varphi(y)(b-a)$ y $V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v)=\varphi(\alpha x+\beta y)(b-a)$.

Luego, como $V_\varphi^R(\cdot)$ es convexa, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x+\beta y)(b-a) &= V_\varphi^R(\alpha u+\beta v)\\
&\leq \alpha V_\varphi^R(u)+\beta V_\varphi^R(v)\\
&= \alpha\varphi(x)(b-a)+\beta\varphi(y)(b-a).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\varphi(\alpha x+\beta y)\leq \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y).$$

Por lo tanto, φ es convexa.

A continuación demostraremos que cualquier combinación convexa de dos funciones pertenecientes a la clase $V_\varphi^R[a,b]$, pertenece a dicha clase.

Proposición 2.1.5 (Ver [19]). *Sean φ una φ-función y $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones entonces $V_\varphi^R(\alpha u+\beta v)\leq V_\varphi^R(u)+V_\varphi^R(v);\alpha,\beta\in[0,1],\alpha+\beta=1$.*

Demostración:

Sean $\alpha,\beta\in[0,1],\alpha+\beta=1$ y $x,y\in[0,\infty)$. Como φ es no decreciente, no negativa y $\alpha x+\beta y$ es un punto del segmento que une a x con y tenemos que:

$$\varphi(\alpha x+\beta y)\leq \text{máx}\{\varphi(x),\varphi(y)\}\leq\varphi(x)+\varphi(y).$$

De la desigualdad anterior, se deduce que:

$$V_\varphi^R(u)+V_\varphi^R(v)=\sup_\pi\sum_{i=1}^n\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$+\sup_\pi\sum_{i=1}^n\varphi\left(\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$\geq\sup_\pi\sum_{i=1}^n\varphi\left(\alpha\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}+\beta\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|$$

$$\geq \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\alpha(u(t_i) - u(t_{i-1})) + \beta(v(t_i) - v(t_{i-1}))|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}|$$

$$= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|(\alpha u + \beta v)(t_i) - (\alpha u + \beta v)(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}| = V_{\varphi}^{R}(\alpha u + \beta v).$$

Por lo tanto, $V_{\varphi}^{R}(\alpha u + \beta v) \leq V_{\varphi}^{R}(u) + V_{\varphi}^{R}(v)$ para todo $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta = 1$.

Observación 2.1.1. *Por las Proposiciones 2.1.3 y 2.1.4 tenemos que $V_{\varphi}^{R}[a, b]$ es convexo y simétrico.*

En la siguiente proposición presentaremos otro resultado que reviste un carácter importante el cual enunciaremos a continuación:

Proposición 2.1.6 (Ver [16]). *Sea φ una φ-función convexa.*

1. $V_{\varphi}^{R}[a, b] \subset BV[a, b]$.
2. *Si* $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = \gamma < \infty$ *entonces* $V_{\varphi}^{R}[a, b] = BV[a, b]$.

Demostración:

1. $V_{\varphi}^{R}[a, b] \subset BV[a, b]$.

   Sean $u \in V_{\varphi}^{R}[a, b]$, $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ y

$$\sigma := \left\{ i = 0, 1, \cdots, n : \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \leq 1 \right\}.$$

   Dado que φ es convexa tenemos que

$$\varphi(1) = \varphi\left(\frac{t}{t}\right) = \varphi\left(\left(\frac{1}{t}\right) t\right) \leq \frac{1}{t}\varphi(t), \quad t > 1.$$

   Así,

$$1 < t \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(1)}.$$

   Haciendo $t = \dfrac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}$ para $t > 1$ tenemos que

$$\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|} \leq \frac{\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)}{\varphi(1)}.$$

Multiplicando por $|t_i - t_{i-1}|$ y luego aplicando sumatoria a ambos lados se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}| \leq \frac{1}{\varphi(1)}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \tag{2.1}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma(u;\pi) &= \sum_{i=1}^{n}|u(t_i)-u(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}| \\
&= \sum_{i\in\sigma}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}| + \sum_{i\notin\sigma}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i\in\sigma}|t_i-t_{i-1}| + \frac{1}{\varphi(1)}.\sum_{i\notin\sigma}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| \\
&\leq (b-a)+\frac{1}{\varphi(1)}V_{\varphi}^{R}(u;[a,b]).
\end{aligned}$$

Luego, $V(u) \leq b-a+\frac{1}{\varphi(1)}V_{\varphi}^{R}(u;[a,b])$. Por lo tanto,

$$V_{\varphi}^{R}[a,b] \subset BV[a,b]. \tag{2.2}$$

2. Por hipótesis,

$$0 < \lim_{t\to\infty}\sup\frac{\varphi(t)}{t} = \gamma < \infty.$$

Es decir,

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{t>s}\frac{\varphi(t)}{t} = \gamma < \infty.$$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un x_0 tal que:

$$\sup_{t>s} \frac{\varphi(t)}{t} - \gamma < \epsilon, \quad s > x_0.$$

En consecuencia:

$$\sup_{t>s} \frac{\varphi(t)}{t} < \epsilon + \gamma, \quad s > x_0.$$

Es decir,

$$\varphi(t) < (\epsilon + \gamma)t, \quad s > x_0.$$

En conclusión, existen $x_0 > 0$ y $c > 0$, tales que:

$$\varphi(t) \leq ct, \quad t \geq x_0. \tag{2.3}$$

Ahora, sean $u \in BV[a,b]$, $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$ y

$$\alpha_{x_0} := \left\{ i = 0, 1, \cdots, n : \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} > x_0 \right\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma_\varphi^R(u;\pi) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&= \sum_{i\in\alpha_{x_0}} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| + \sum_{i\notin\alpha_{x_0}} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i\in\alpha_{x_0}} c|u(t_i) - u(t_{i-1})| + \sum_{i\notin\alpha_{x_0}} \varphi(x_0)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq c.V(u) + \varphi(x_0)(b-a).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $V_\varphi^R[a,b] \leq c.V(u) + \varphi(x_0)(b-a)$. Es decir,

$$BV[a,b] \subset V_{\varphi}^{R}[a,b]. \tag{2.4}$$

Luego, por (2.2) y (2.4) se tiene que $V_{\varphi}^{R}[a,b] = BV[a,b]$.

$\square$

En el siguiente lema se presentan las posibilidades del valor del límite $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$, para dos φ-funciones φ_1 y φ_2; y su demostración es consecuencia directa de la definición de limite superior.

Lema 2.1.2 (Ver [21]). *Sean φ_1 y φ_2 dos φ-funciones, entonces se verifica una de las dos siguientes condiciones:*

1. $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} < \infty$ *si y sólo si existen $C > 0$, $x_0 > 0$, tal que*

$$\varphi_1(t) \leq C\varphi_2(t), \quad t \geq x_0.$$

2. $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \infty$ *si y sólo si existen $C > 0$, $x_0 > 0$, tal que*

$$\varphi_2(t) \leq C\varphi_1(t), \quad t \geq x_0.$$

En el siguiente teorema, presentamos una adaptación del Teorema 8.1 de (Ver [14]) o del Lema 2 de (Ver [4]), para dar condiciones necesarias y suficientes sobre las φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $V_{\varphi_1}^{R}[a,b] \subset V_{\varphi_2}^{R}[a,b]$ (Ver [21]).

Teorema 2.1.1. *Sean φ_1 y φ_2 dos φ-funciones convexas, entonces $V_{\varphi_1}^{R}[a,b] \subset V_{\varphi_2}^{R}[a,b]$ si y sólo si $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$.*

Demostración:

Supongamos que $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$ entonces por el Lema 2.1.2 existen $C > 0,\ x_0 > 0$, tal que $\varphi_2(t) \leq C\varphi_1(t),\ t \geq x_0$.

Sean $u \in V^R_{\varphi_1}[a,b]$ y $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Consideremos

$$\Gamma = \left\{ i = 1, \cdots, n : \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} < x_0 \right\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma^R_{\varphi_2}(u,\pi) &:= \sum_{i=1}^{n} \varphi_2\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&= \sum_{i\in\Gamma} \varphi_2\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| + \sum_{i\notin\Gamma} \varphi_2\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&\leq \sum_{i\in\Gamma} \varphi_2(x_0)|t_i - t_{i-1}| + \sum_{i\notin\Gamma} C\varphi_1\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\
&\leq \varphi_2(x_0)(b-a) + CV^R_{\varphi_1}(u).
\end{aligned}$$

Aplicando supremo, tenemos que $V^R_{\varphi_1}[a,b] \subset V^R_{\varphi_2}[a,b]$.

Recíprocamente, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que

$$V^R_{\varphi_1}[a,b] \subset V^R_{\varphi_2}[a,b] \quad y \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \infty.$$

Entonces existen $N_1 > 0$ y $p_1 > N_1$, tal que $\varphi_2(p_1) > 2\varphi_1(p_1)$. Por el mismo argumento, existen $N_2 > N_1 + 1$ y $p_2 > \max\{p_1, N_2\}$, tal que $\varphi_2(p_2) > 2^2\varphi_1(p_2)$.

De esta forma, inductivamente, podemos construir una sucesión creciente de números positivos $\{p_n\}_{n\geq 1}$, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \infty \quad y \quad \varphi_2(p_n) > 2^n\varphi_1(p_n), \quad n \geq 1. \tag{2.5}$$

Como $0 < p_1 < p_n, n \geq 1$, aplicando φ_1 tenemos que $0 < \varphi_1(p_1) < \varphi_1(p_n)$ por lo que $0 < \frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_n)} < 1, n \geq 1$, y de esta manera, la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$, definida recursivamente por la fórmula:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{(b-a)}{2^n}\frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_n)}, \quad n \geq 1, \tag{2.6}$$

es creciente y esta contenida en $[a, b]$.

Denotemos por t_∞ el elemento del intervalo $[a, b]$ definido por $t_\infty := \lim_{n\to 0} t_n$ y además consideremos la función $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$w(t) := \begin{cases} p_n, & t_{n-1} \leq t < t_n; \\ 0, & t_\infty \leq t \end{cases}$$

y definamos $u(t) := \int_a^t w(s)ds$, $t \in [a, b]$. Entonces en cada intervalo $[t_{n-1}, t_n]$, $n \geq 0$, la función u es un segmento de recta con pendiente p_n, $n \geq 1$. Así, por (2.6) tenemos que:

$$V^R_{\varphi_1}(u; [t_{n-1}, t_n]) = \varphi_1(p_n)(t_n - t_{n-1}) = \frac{b-a}{2^n}\varphi_1(p_1), \quad n \geq 1.$$

De esta manera, por propiedades de la serie geométrica, resulta que:

$$\begin{aligned} V^R_{\varphi_1}(u; [a, b]) &= \sum_{n=1}^{\infty} V^R_{\varphi_1}(u; [t_{n-1}, t_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{2^n}\varphi_1(p_1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b-a}{2^{n+1}}\varphi_1(p_1) = (b-a)\varphi_1(p_1) < \infty. \end{aligned}$$

Además, por (2.5) se tiene que:

$$V^R_{\varphi_2}(u; [t_{n-1}, t_n]) = \varphi_2(p_n)\left(\frac{b-a}{2^n}\frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_n)}\right) > (b-a)\varphi_1(p_1), \quad n \geq 1.$$

De donde se concluye que $u \in V^R_{\varphi_1}[a, b]$ y $u \notin V^R_{\varphi_2}[a, b]$. Por lo tanto, $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$. □

Siguiendo las ideas desarrolladas en la demostración del teorema 8.2 de (Ver [14]) obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1 (Ver [21]). *Sea φ una φ-función convexa. Entonces $V^R_\varphi[a, b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ cumple la condición $\Delta_2(\infty)$.*

Demostración:

Supongamos que $V^R_\varphi[a, b]$ es un espacio vectorial, entonces si u está en $V^R_\varphi[a, b]$, también está $2u$. De esta manera, si consideramos $\varphi_1(t) := \varphi(2t), t \geq 0$, tenemos que

$V_\varphi^R[a,b] \subset V_{\varphi_1}^R[a,b]$. En consecuencia, el Teorema 2.1.1 nos permite asegurar que φ cumple la condición $\Delta_2(\infty)$.

Recíprocamente, supongamos que φ cumple la condición $\Delta_2(\infty)$, entonces existen números $C > 0, x_0 > 0$ tales que $\varphi(2t) \leq C\varphi(t)$, $t \geq x_0$.

Sea $\alpha > 0$. Escogiendo n como el menor número entero positivo tal que $\frac{\alpha}{2^n} \leq 1$, obtenemos:

$$\varphi(\alpha t) = \varphi\left(2^n \frac{\alpha}{2^n} t\right) \leq \frac{\alpha}{2^n}\varphi(2^n t) \leq \frac{\alpha}{2^n} C^n \varphi(t), \quad t \geq x_0.$$

De este resultado y del Teorema 2.1.1 se obtiene que si consideramos la φ-función $\varphi_1(t) := \varphi(\alpha t), t \in [0,\infty)$, entonces $V_\varphi^R[a,b] \subset V_{\varphi_1}^R[a,b]$; y por lo tanto, si u está en $V_\varphi^R[a,b]$, también esta au, $a > 0$. Luego, de la definición de φ-variación se concluye que $au \in V_\varphi^R[a,b],\ a \in \mathbb{R}$.

La otra parte de la demostración se deduce de la siguiente desigualdad

$$\varphi(s+t) = \varphi\left(\frac{2(s+t)}{2}\right) \leq \frac{\varphi(2s) + \varphi(2t)}{2}, \quad s,t \in [0,\infty).$$

$\square$

De acuerdo a esta proposición que acabamos de demostrar, la clase $V_\varphi^R[a,b]$ no siempre es un espacio vectorial.

Notación: El espacio vectorial generado por la clase $V_\varphi^R[a,b]$ de las funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz lo denotaremos por $RV_\varphi[a,b]$ o simplemente por RV_φ. En el caso $\varphi(t) = t^p, t \in [a,b], (1 < p < \infty)$ escribiremos $RV_p[a,b]$.

El siguiente lema nos permite dar una caracterización del espacio $RV_\varphi[a,b]$.

Lema 2.1.3 (Ver [21])**.** *Sea $A \neq 0$ un subconjunto convexo y simétrico de un espacio vectorial $\mathbb{X}$ entonces:*

1. $0 \in A$.

2. *El espacio vectorial generado por A es igual a:*

$$< A >= \{x \in \mathbb{X} : \exists \lambda > 0, \lambda x \in A\} = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A.$$

Demostración:

1. Si $x \in A$, entonces dado que A es convexo y simétrico se tiene que $-x \in A$ por lo que $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$.

2. Por definición $A \subset \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$. Para demostrar que $< A > \subset \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$, basta ver que $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ es un espacio vectorial ya que $< A >$ es un espacio vectorial. En efecto, sean $x \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in A$. Por lo tanto:

   Si $\alpha = 0$ entonces $\alpha(\lambda x) = 0 \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ por la parte 1.

   Si $\alpha > 0$ entonces $\alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ ya que $\left(\dfrac{\lambda}{\alpha}\right)(\alpha x) = \lambda x \in A$.

   Si $\alpha < 0$ entonces $\alpha(\lambda x) = (-\alpha\lambda)(-x) \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ debido a que $-\alpha > 0$ y A es simétrico.

   Ahora, sean $x, y \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ entonces existen $\lambda, \gamma > 0$ tal que $\lambda x, \gamma y \in A$.

   Demostremos que $x + y \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$, es decir, demostremos que existe $\beta > 0$ tal que $\beta(x + y) \in A$. Dado que A es convexo, resulta que:

   $$\lambda x + \gamma y = (\lambda + \gamma)\frac{(\lambda x + \gamma y)}{(\lambda + \gamma)} = (\lambda + \gamma)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \gamma}x + \frac{\gamma}{\lambda + \gamma}y\right) \in (\lambda + \gamma)A.$$

   Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ es un espacio vectorial.

   Ahora, demostremos que $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A \subset < A >$.

   Sea $x \in \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A$ entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in A$. Como $\lambda x \in < A >$ y $< A >$ es un espacio vectorial se tiene que $x \in < A >$ y así, $\bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda A \subset < A >$.

$\square$

Como consecuencia del Lema 2.1.3 y dado que $V_\varphi^R[a, b]$ es un conjunto convexo y simétrico tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.1.7. *Sea φ una φ-función entonces el espacio vectorial generado por la clase $V_{\varphi}^{R}[a,b]$ viene dado por:*

$$RV_{\varphi}[a,b] = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : \exists \lambda > 0, V_{\varphi}^{R}(\lambda u) < \infty\}.$$

A continuación demostraremos que el espacio $RV_{\varphi}[a,b]$ es un álgebra, es decir, si $u, v \in RV_{\varphi}[a,b]$ entonces $uv \in RV_{\varphi}[a,b]$, donde la definición de producto es dado puntualmente, de la siguiente manera:

$$(u \cdot v)(x) = (uv)(x) := u(x) \cdot v(x) = u(x)v(x).$$

Proposición 2.1.8 (Ver [19]). *Sea φ una φ-función convexa, entonces $RV_{\varphi}[a,b]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.*

Demostración:

Sean $u, v \in RV_{\varphi}[a,b]$ entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha u, \beta v \in V_{\varphi}^{R}[a,b]$. Si $u = 0$ o $v = 0$ entonces $uv = 0 \in RV_{\varphi}[a,b]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u, v \neq 0$. Consideremos $\lambda = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\|u\|_{\infty} + \beta\|v\|_{\infty}}$.

Si $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ es una partición de $[a,b]$ entonces

$$\begin{aligned} V_{\varphi}^{R}(\lambda uv) &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\lambda uv(t_i) - \lambda uv(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\lambda u(t_i)v(t_i) - \lambda u(t_{i-1})v(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|. \end{aligned}$$

Sumando y restando $\lambda u(t_{i-1})v(t_i)$ y sacando factor común $v(t_i)$ y $u(t_{i-1})$ se tiene:

$$\begin{aligned} V_{\varphi}^{R}(\lambda uv) &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\lambda[u(t_i) - u(t_{i-1})]v(t_i) + \lambda[v(t_i) - v(t_{i-1})]u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \\ &\leq \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\lambda\|v\|_{\infty}\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} + \lambda\|u\|_{\infty}\frac{|v(t_i) - v(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\frac{\alpha\beta}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}\|v\|_\infty\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\\
&+ \frac{\alpha\beta}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}\|u\|_\infty\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|})|t_i-t_{i-1}|.
\end{aligned}$$

Denotando $\lambda_1=\dfrac{\beta\|v\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}$ y $\lambda_2=\dfrac{\alpha\|u\|_\infty}{\alpha\|u\|_\infty+\beta\|v\|_\infty}$ con $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ donde

$\lambda_1+\lambda_2=1$. Además, de la convexidad de φ tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_\varphi^R(\lambda uv) &\leq \sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\alpha\lambda_1\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}+\beta\lambda_2\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|\\
&\leq \lambda_1\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\alpha\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|\\
&+ \lambda_2\sup_{\pi}\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\beta\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|\\
&\leq \lambda_1V_\varphi^R(\alpha u)+\lambda_2V_\varphi^R(\beta v)<\infty.
\end{aligned}$$

Por lo que $V_\varphi^R(\lambda(uv))\leq V_\varphi^R(\lambda_1u)+V_\varphi^R(\lambda_2v)$ y así $uv\in RV_\varphi[a,b]$. En conclusión, el espacio $RV_\varphi[a,b]$ es un álgebra.

2.1.3 Norma sobre $RV_\varphi[a,b]$.

En esta sección, usamos el funcional de Minkowski para dotar al espacio $RV_\varphi[a,b]$ de una norma $\|\cdot\|_\varphi^R$ que le dará una estructura de espacio de Banach.

Definición 2.1.5. *Sean V un espacio vectorial y $A\subset V$. Se dice que A es absorbente si para cada $x\in V$, existe un $\alpha>0$ tal que $\alpha x\in A$.*

Teorema 2.1.2 (Ver [9])**.** *Dada una φ-función convexa φ, el conjunto:*

$$\Lambda=\{u\in RV_\varphi[a,b]:V_\varphi^R(u)\leq 1\}$$

es un subconjunto convexo, simétrico y absorbente de $RV_\varphi[a,b]$.

Demostración:

Comencemos verificando la convexidad, para ello consideramos $\alpha, \beta \in [0,1]$ de manera que $\alpha + \beta = 1$ y $u, v \in \Lambda$. Entonces por la Proposición 2.1.4 se tiene que

$$V_\varphi^R(\alpha u + \beta v) \leq \alpha V_\varphi^R(u) + \beta\ V_\varphi^R(v) \leq \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \leq 1.$$

Por lo que $\alpha u + \beta v \in \Lambda$, quedando así demostrada la convexidad de dicho conjunto.

Consideremos ahora $u \in \Lambda$ y $0 < |\lambda| \leq 1$. Si $0 < \lambda \leq 1$ entonces hacemos uso nuevamente de la Proposición 2.1.4 y se tiene que

$$V_\varphi^R(\lambda u) \leq \lambda V_\varphi^R(u) \leq \lambda \cdot 1 \leq \lambda.$$

En el caso en que $-1 \leq \lambda < 0$ hacemos uso de la simetría y convexidad del funcional $V_\varphi^R(\cdot)$ dado en la Proposición 2.1.4,

$$V_\varphi^R(\lambda u) = V_\varphi^R(-\lambda(-u)) \leq -\lambda V_\varphi^R(-u) = |\lambda| V_\varphi^R(u).$$

Quedando así demostrado que Λ es simétrico.

Para verificar que Λ es absorbente consideremos $u \in RV_\varphi[a,b]$ entonces existe $\alpha > 0$ de manera que $V_\varphi^R(\alpha u) < \infty$. Si $V_\varphi^R(\alpha u) \leq 1$. entonces $\alpha u \in \Lambda$. En caso contrario, en que $V_\varphi^R(\alpha u) > 1$ se tiene que

$$V_\varphi^R\left(\frac{\alpha u}{V_\varphi^R(\alpha u)}\right) \leq \frac{1}{V_\varphi^R(\alpha u)} V_\varphi^R(\alpha u) = 1,$$

en cuyo caso $\dfrac{\alpha}{V_\varphi^R(\alpha u)} u \in \Lambda$. Se verifica entonces que Λ es absorbente.

$\square$

Definición 2.1.6 (Funcional de Minkowski). *Sea* $u \in RV_\varphi[a,b]$. *El funcional de Minkowski asociado al conjunto* Λ *define una seminorma sobre* $RV_\varphi[a,b]$ *el cual viene definido por:*

$$\mu_\Lambda(u) = \inf\left\{\lambda > 0 : V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Definición 2.1.7. *(Norma sobre $RV_\varphi[a,b]$)*

El funcional $||\cdot||_{RV_\varphi} : RV_\varphi[a,b] \to \mathbb{R}$, viene dada por:

$$||u||_{RV_\varphi} = |u(a)| + \mu_\Lambda(u), \quad u \in RV_\varphi[a,b].$$

Teorema 2.1.3 (Ver [19]). *Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(RV_\varphi[a,b], ||\cdot||_{RV_\varphi}\right)$ es un espacio normado.*

Demostración:

Sea $u, v \in RV_\varphi[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\mu_\Lambda(u)$ el funcional de Minkowski, el cual define una seminorma, entonces demostremos lo siguiente:

1. $||u||_{RV_\varphi} \geq 0$.

   Dado que $|u(a)| \geq 0$ y $\mu_\Lambda(u) \geq 0$ se tiene que $||u||_{RV_\varphi} \geq 0$.

2. $||\alpha u||_{RV_\varphi} = |\alpha| ||u||_{RV_\varphi}$.

   En efecto,

$$\begin{aligned} ||\alpha u||_{RV_\varphi} &= |\alpha u(a)| + \mu_\Lambda(\alpha u) = |\alpha||u(a)| + |\alpha|\mu_\Lambda(u) \\ &= |\alpha|(|u(a)| + \mu_\Lambda(u)) = |\alpha| ||u||_{RV_\varphi}. \end{aligned}$$

3. $||u+v||_{RV_\varphi} \leq ||u||_{RV_\varphi} + ||v||_{RV_\varphi}$.

$$\begin{aligned} ||u+v||_{RV_\varphi} &= |(u+v)(a)| + \mu_\Lambda(u+v) = |u(a)+v(a)| + \mu_\Lambda(u+v) \\ &\leq |u(a)| + |v(a)| + \mu_\Lambda(u) + \mu_\Lambda(v) = ||u||_{RV_\varphi} + ||v||_{RV_\varphi}. \end{aligned}$$

4. $||u||_{RV_\varphi} = 0$ si y sólo si $u = 0$.

   En efecto, supongamos que $||u||_{RV_\varphi} = 0$, es decir, $|u(a)| + \mu_\Lambda(u) = 0$ entonces $|u(a)| = 0$ y

$$0 = \mu_\Lambda(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

   Esto implica que para cada entero positivo n, existe $\lambda_n > 0$, tal que $\frac{1}{n} > \lambda_n > 0$ y $V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1$. Como $V_\varphi^R(\cdot)$ es convexa se tiene que $V_\varphi^R(u) \leq \lambda_n$. Tomando límite cuando $t \to \infty$, se obtiene que $V_{\varphi}^{R}(u) = 0$, por lo que, por la parte 2. de la Proposición 2.1.4 se tiene que u es constante, es decir, $u(t) = u(a)$, $t \in [a, b]$ y por lo tanto $u = 0$.

Supongamos que $u = 0$ entonces $|u(a)| = 0$ y $\mu_{\Lambda}(u) = 0$. Así, $||u||_{RV_{\varphi}} = 0$.

De esta manera concluimos que $\left(RV_{\varphi}[a, b], ||\cdot||_{RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio normado.

□

2.1.4 El Espacio de Banach $RV_{\varphi}[a, b]$.

Lema 2.1.4 (Ver [9]). *Si $\lambda > 0$ entonces $\mu_{\Lambda}(u) \leq \lambda$ si y sólo si $V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}; [a, b]\right) \leq 1$.*

Demostración:

Sean $u \in BV_{\varphi}^{R}[a, b]$ y $k \geq \mu_{\Lambda}(u)$ entonces por propiedad de ínfimos existe $k' > 0$ de manera que $k \geq k'$ y

$$k' \in \left\{\lambda > 0 : V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

En consecuencia,

$$V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{k}\right) = V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{k'}\frac{k'}{k}\right) \leq \frac{k'}{k} V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{k'}\right) \leq \frac{k'}{k} \leq 1.$$

Ahora supongamos que $V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1$, es decir, $k \in \left\{\lambda > 0 : V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ entonces,

$$\mu_{\Lambda}(u) = \inf \left\{\lambda > 0 : V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \leq k.$$

□

Ahora demostremos que $\left(RV_{\varphi}[a, b], ||\cdot||_{RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio de Banach

Teorema 2.1.4 (Ver [9]). *Sea φ una función convexa que cumple la condición ∞_1, entonces el espacio $\left(RV_{\varphi}[a, b], ||\cdot||_{RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Para demostrar que $\left(RV_{\varphi}[a, b], ||\cdot||_{RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio de Banach, debemos ver que $RV_{\varphi}[a, b]$ es completo con la norma $||\cdot||_{RV_{\varphi}}$.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(RV_\varphi[a,b], ||\cdot||_{RV_\varphi}\right)$, entonces dado $1>\epsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$, tal que si $n,m\geq N$, se tiene que:

$$||u_n-u_m||_{RV_\varphi}<\epsilon, \quad n,m\geq N.$$

Es decir,

$$|(u_n-u_m)(a)|+\mu_\Lambda(u_n-u_m)<\epsilon, \quad n,m\geq N.$$

Luego, $|u_n(a)-u_m(a)|<\epsilon$ y

$$\mu_\Lambda(u_n-u_m)<\epsilon, \quad n,m\geq N.$$

De esta última desigualdad y por el Lema 2.1.4 tenemos que $V_\varphi^R\left(\frac{u_n-u_m}{\epsilon};[a,b]\right)\leq 1$ entonces, para todo $x,y\in[a,b]$ se tiene que:

$$\varphi\left(\frac{|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|}{\epsilon|y-x|}\right)|y-x| \quad \leq \quad V_\varphi^R\left(\frac{u_n-u_m}{\epsilon};[a,b]\right)<1.$$

Por lo tanto,

$$\varphi\left(\frac{|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|}{\epsilon|y-x|}\right)|y-x|<1$$

$$\varphi\left(\frac{|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|}{\epsilon|y-x|}\right)<\frac{1}{|y-x|}$$

$$\frac{|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|}{\epsilon|y-x|}<\varphi^{-1}\left(\frac{1}{|y-x|}\right).$$

De lo cual obtenemos que

$$|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)| \quad < \quad \varphi^{-1}\left(\frac{1}{|y-x|}\right)|y-x|\epsilon.$$

Como φ cumple la condición ∞_1 y φ^{-1} es continua, entonces

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{|y-x|}\right)|y-x|,\ x,y\in[a,b],\ x\neq y$$

es acotado superiormente. Sea $M>0$ una cota superior, luego:

$$|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|<M\epsilon.$$

En consecuencia, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en el intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$, y dada la completitud de $\mathbb{R}$, para cada $t\in[a,b]$ el límite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$ existe.

Definimos, sobre $[a,b]$ la función $u(t) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$. Luego, dado que el funcional de Minkowski es una seminorma se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda(u_n-u) &\le \mu_\Lambda(u_n-u_m)+\mu_\Lambda(u_m-u)\\
&< \epsilon+\mu_\Lambda(u_m-\lim_{m\to\infty} u_m)\\
&\le \epsilon+\epsilon\\
&= 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u\in RV_\varphi[a,b]$. Además, para $n,m\ge\mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
||u_n-u_m||_{RV_\varphi} &= |(u_n-u_m)(a)|+\mu_\Lambda(u_n-u_m)\\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que $RV_\varphi[a,b]$ es completo, y por lo tanto, es un espacio de Banach.

□

2.1.5 Generalización del Lema de Riesz para la clase $V_\varphi^R[a,b]$

Para finalizar esta sección, presentaremos otro resultado que reviste un carácter importante, se refiere a la generalización del Lema de Riesz dada por Medvedev (Ver [17]), el cual enunciaremos a continuación:

Teorema 2.1.5 (Ver [19])**.** *(Generalización del Lema de Riesz para la clase $V_\varphi^R[a,b]$) Sea φ una φ-función convexa que cumple la condición ∞_1 y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función. Entonces, $V_\varphi^R(u;[a,b])<\infty$ si y sólo si u es absolutamente continua en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt<\infty.$$

Además, se tiene que:

$$V_{\varphi}^{R}(u;[a,b]) = \int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt.$$

Demostración:

Como u es absolutamente continua en $[a,b]$, existe u' en casi todas partes en $[a,b]$. Sean $t_1, t_2 \in [a,b]$ con $t_1 < t_2$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{|u(t_2)-u(t_1)|}{t_2-t_1}\right)(t_2-t_1) &= \varphi\left(\frac{|\int_{t_1}^{t_2} u'(t)dt|}{\int_{t_1}^{t_2} dt}\right)(t_2-t_1) \\ &\leq \varphi\left(\frac{\int_{t_1}^{t_2} |u'(t)|dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt}\right)(t_2-t_1). \end{aligned}$$

Como φ es convexa, usando la desigualdad de Jensen para integrales (Ver [10]), obtenemos que:

$$\varphi\left(\frac{\int_{t_1}^{t_2} 1\cdot|u'(t)|dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt}\right)(t_2-t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} \varphi(|u'(t)|)dt.$$

Por lo tanto:

$$\varphi\left(\frac{|u(t_2)-u(t_1)|}{t_2-t_1}\right)(t_2-t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} \varphi(|u'(t)|)dt.$$

Por otro lado, sea $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces de la desigualdad anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{t_i-t_{i-1}}\right)(t_i-t_{i-1}) &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(|u'(t)|)dt \\ &\leq \int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt. \end{aligned}$$

Ahora como $\displaystyle\int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt < \infty$ y por propiedad de supremo, tenemos que:

$$V_{\varphi}^{R}(u;[a,b]) \leq \int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt < \infty. \tag{2.7}$$

Reciprocamente, demostremos que u es absolutamente continua en $[a, b]$.

Sean $\epsilon > 0$ e intervalos (a_i, b_i) con $i = 1, 2, \cdots, n$ disjuntos dos a dos, contenidos en el intervalo $[a, b]$. Consideremos $r > 0$ tal que

$$V_\varphi^R(u; [a, b]) < \frac{\epsilon r}{2}.$$

Como φ cumple la condición ∞_1, se tiene que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = \infty$. Entonces, existe x_0 tal que

$$\varphi(t) \geq rt, \quad t \geq x_0.$$

Sea $C_{x_0} = \left\{ i : \dfrac{|u(b_i) - u(a_i)|}{b_i - a_i} \geq x_0 \right\} = \{i : |u(b_i) - u(a_i)| \geq x_0(b_i - a_i)\}$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| &= \sum_{i \in C_{x_0}} |u(b_i) - u(a_i)| + \sum_{i \notin C_{x_0}} |u(b_i) - u(a_i)| \\
&< \sum_{i \in C_{x_0}} \frac{|u(b_i) - u(a_i)|}{b_i - a_i}(b_i - a_i) + \sum_{i \notin C_{x_0}} x_0(b_i - a_i) \\
&\leq \frac{1}{r} \sum_{i \in C_{x_0}} \varphi\left(\frac{|u(b_i) - u(a_i)|}{b_i - a_i}\right)(b_i - a_i) + x_0 \sum_{i \notin C_{x_0}} (b_i - a_i) \\
&\leq \frac{1}{r} V_\varphi^R(u; [a, b]) + x_0 \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + x_0 \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).
\end{aligned}$$

Si consideramos $0 < \delta < \dfrac{\epsilon}{2x_0}$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

y por lo anterior, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para cualquier familia de intervalos $\{(a_i, b_i) : i = 1, 2, \cdots, n\}$ disjuntos dos a dos contenidos en $[a, b]$ tales que:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta.$$

Así, u es absolutamente continua en $[a, b]$.

Ahora demostremos que:

$$\int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt < \infty.$$

Y además,

$$V_\varphi^R(u; [a, b]) \geq \int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt.$$

Dado que u es absolutamente continua en $[a, b]$ se sigue que u es derivable en casi todas partes en $[a, b]$, es decir, existe u' en casi todas partes en $[a, b]$.

Para cada entero positivo n, consideramos la partición $\pi_n : a = t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{n,n} = b$, del intervalo $[a, b]$, definida por:

$$t_{i,n} = a + \frac{i(b-a)}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

Ahora, consideremos la sucesión de funciones $u_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$u_n(t) := \frac{u(t_{i+1,n}) - u(t_{i,n})}{t_{i+1,n} - t_{i,n}}, \quad t_{i,n} \leq t < t_{i+1,n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

En $t = b$ se puede definir u_n como cualquier valor razonable.

Demostremos que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, converge a u' en casi todas partes en $[a, b]$. Para esto basta comprobar que la sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$, converge a u', en aquellos puntos x donde u es derivable, distintos de $t_{i,n}, n \in \mathbb{N}, i = 0, 1, \cdots, n$, es decir, en:

$$A := \{x \in [a, b] : \exists u'(x)\} - \{t_{i,n} : n \in \mathbb{N}, i = 0, 1, \cdots, n\}.$$

En efecto, sea $x \in A$, entonces para cada n existe $i = 0, 1, \cdots, n$ tal que $t_{i,n} \leq x < t_{i+1,n}$; así:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{u(t_{i+1,n}) - u(x) + u(x) - u(t_{i,n})}{t_{i+1,n} - t_{i,n}} \\ &= \frac{t_{i+1,n} - x}{t_{i+1,n} - t_{i,n}} \frac{u(t_{i+1,n}) - u(x)}{t_{i+1,n} - x} + \frac{x - t_{i,n}}{t_{i+1,n} - t_{i,n}} \frac{u(x) - u(t_{i,n})}{x - t_{i,n}}. \end{aligned}$$

Ahora cuando $n \to \infty$ tenemos que $t_{i,n} \to x, t_{i+1,n} \to x$ y como u es derivable en x, entonces $\dfrac{u(t_{i+1,n}) - u(x)}{t_{i+1,n} - x}$ y $\dfrac{u(x) - u(t_{i,n})}{x - t_{i,n}}$ tienden a la derivada de u en x, es decir, $u'(x)$.

Por lo tanto, el lado derecho de la última igualdad corresponde a puntos que son combinaciones convexas de puntos que tienden a $u'(x)$ y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u'(x), \qquad x \in A.$$

Puesto que φ es continua, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n(x)) = \varphi(u'(x)), \qquad x \in A.$$

Usando el Lema de Fatou, (Ver [10]), resulta que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \varphi(|u'(x)|)dt &\leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(|u_n(x)|)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_{i,n}}^{t_{i-1,n}} \varphi(|u_n(x)|)dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u(t_{i+1,n}) - u(t_{i,n})|}{t_{i+1,n} - t_{i,n}}\right)(t_{i+1,n} - t_{i,n}) \\
&\leq V_\varphi^R(u; [a,b]).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la desigualdad anterior y usando el hecho de que $V_\varphi^R(u; [a,b]) < \infty$, se tiene que:

$$\int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt \leq V_\varphi^R(u; [a,b]) < \infty \tag{2.8}$$

Por último, de (2.7) y (2.8) resulta que

$$V_\varphi^R(u; [a,b]) = \int_a^b \varphi(|u'(t)|)dt.$$

2.2 El Espacio de las Funciones de κ-Variación Acotada

2.2.1 Funciones de κ-variación acotada

En el año 1975, B. Korenblum (ver [13]), considera como generalización de la noción de variación acotada, una nueva clase de variación para las funciones acotadas, llamada κ-variación, la cual se diferencia de las anteriores en que una función de distorción κ es introducida para medir intervalos en el dominio de la función y no en el rango.

Por consiguiente, comenzaremos presentando la noción de la κ-función, la cual puede ser vista como un cambio de escala en la longitud de los subintervalos de $[a, b]$, tal que la longitud de $[a, b]$ es 1, si $\kappa(1) = 1$.

Definición 2.2.1. *Una función* $\kappa : [0, 1] \to [0, 1]$ *se dice que es una* κ*-función si satisface las siguientes condiciones:*

- κ *es continua, con* $\kappa(0) = 0$ *y* $\kappa(1) = 1$.
- κ *es concava (hacia abajo) y creciente.*
- $\displaystyle \lim_{t \to 0^+} \frac{\kappa(t)}{t} = \infty$.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de κ-funciones que ilustran la Definición 2.2.1.

Ejemplo 2.2.1. *Consideremos la función* $\kappa_\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ *definida de la siguiente manera:*

$$\kappa_\alpha(t) = t^\alpha \qquad \text{para} \quad 0 < \alpha < 1,$$

la cual es conocida como el caso de Gevrey y satisface las propiedades de una κ*-función, ya que:*

(i) $\kappa_\alpha(t)$ *es continua en* $[0, 1]$ *y*

$$\kappa_\alpha(0) = 0^\alpha = 0 \qquad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\kappa_\alpha(1) = 1^\alpha = 1 \qquad con \quad 0 < \alpha < 1.$$

(ii) *Para* $0 < \alpha < 1$ *tenemos*

$$\kappa'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1} \geq 0 \qquad para\ todo \quad t \in [0,1],$$

por lo tanto, $\kappa_\alpha(t)$ *es creciente y además*

$$\kappa''_\alpha(t) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^{2-\alpha}} \leq 0 \qquad para\ todo \quad t \in [0,1],$$

de donde se obtiene que $\kappa_\alpha(t)$ *es concava.*

(iii) *Para* $0 < \alpha < 1$*, tenemos*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\kappa_\alpha(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{1-\alpha}} = \frac{1}{0^{1-\alpha}} = \infty.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\kappa_\alpha(t)$ *es una* κ*-función.*

Para el caso en que $\alpha = \frac{1}{2}$ *tenemos que*

$$\kappa_{\frac{1}{2}}(t) = t^{\frac{1}{2}}.$$

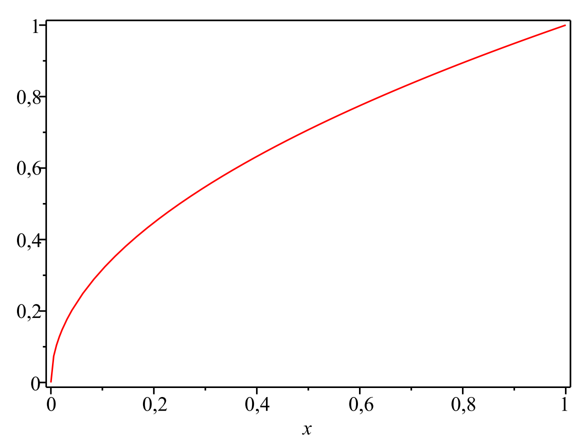


Figura 2.1: Función $\kappa_\alpha(t) = t^\alpha$ para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Es una κ*-función.*

Para $\alpha = \frac{1}{3}$ *tenemos que*

$$\kappa_{\frac{1}{3}}(t) = t^{\frac{1}{3}}.$$

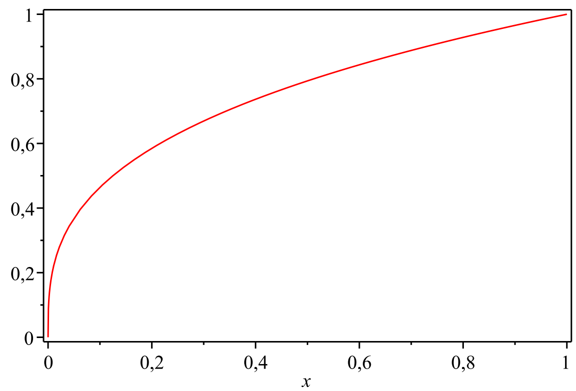


Figura 2.2: Función $\kappa_\alpha(t) = t^\alpha$ para $\alpha = \frac{1}{3}$.

Es una κ*-función.*

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos la función* $\kappa_0 : [0,1] \to [0,1]$ *definida mediante la siguiente expresión:*

$$\kappa_0(t) = \begin{cases} t(1-\log(t)), & \textit{si } t \neq 0; \\ 0, & \textit{si } t = 0. \end{cases}$$

Figura 2.3: Función $\kappa_0(t)$.

la cual es usada por B. Korenblum en [13] y satisface las propiedades de una κ-función dado que:

(i) $\kappa_0(t)$ *es continua en* $[0,1]$, *en particular, como*

$$\lim_{t\to 0^+} \kappa_0(t) = \lim_{t\to 0^+} t(1-\log(t)) = 0 = \kappa_0(0),$$

la función es continua en $t=0$.

Además,

$$\kappa_0(0) = 0,$$

$$\kappa_0(1) = 1(1-\log(1)) = 1.$$

(ii) Para todo $t \in [0,1]$,

$$\kappa_0'(t) = 1 - \frac{\ln(t)}{\ln(10)} - \frac{1}{\ln(10)} > 0,$$

por lo tanto, $\kappa_0(t)$ *es creciente y, además,*

$$\kappa_0''(t) = -\frac{1}{t\ln(10)} \leq 0,$$

de donde se tiene que $\kappa_0(t)$ *es concava.*

(iii) Cumple que,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\kappa_0(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t(1-\log(t))}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1-\log(t) = 1-\log(0) = \infty.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\kappa_0(x)$ *es una κ-función.*

Ejemplo 2.2.3. *Consideremos la función* $\kappa_1 : [0,1] \to [0,1]$ *definida mediante la siguiente expresión:*

$$\kappa_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\frac{\ln(t)}{2}}, & si\ t \neq 0; \\ 0 & si\ t = 0. \end{cases}$$

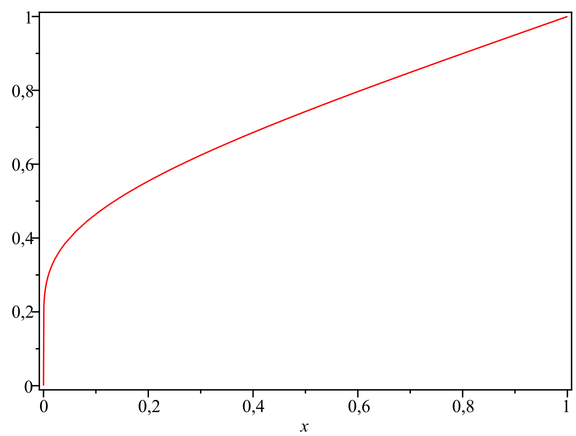


Figura 2.4: Función $\kappa_1(t)$.

la cual satisface las propiedades de una κ-función ya que:

(i) $\kappa_1(t)$ *es continua en* $[0,1]$, *debido a que*

$$\lim_{t\to 0}\kappa_1(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(t)} = 0 = \kappa_1(0).$$

En consecuencia, la función es continua en $t = 0$.

Además,

$$\kappa_1(0) = 0,$$

$$\kappa_1(1) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(1)} = 1.$$

(ii) Para todo $t \in [0,1]$,

$$\kappa_1'(t) = \frac{1}{2t(1-\frac{1}{2}\ln(t))^2} \geq 0,$$

por lo tanto, $\kappa_1(t)$ *es creciente y además,*

$$\kappa_1''(t) = \frac{2\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t)^2 - \frac{1}{t}\ln(t)}{4x^2(1-\frac{1}{2}\ln(t))^4} \leq 0,$$

de donde $\kappa_1(t)$ *es concava.*

(iii) *Cumple que,*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\kappa_1(t)}{t} = \infty.$$

En efecto,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\kappa_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1-\frac{1}{2}\ln(t))^{-1}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(t)} = \infty\cdot 0,$$

y aplicando la regla de L' Hopital tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{2}\ln(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{-1}{t^2}}{\frac{-1}{2x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2}{t} = \infty.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\kappa_1(t)$ es una κ-función.

Proposición 2.2.1 (Ver [22])**.** *Sea $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ una κ-función entonces κ es subaditiva, es decir, $\kappa(x+y) \leq \kappa(x)+\kappa(y)$.*

Demostración:

Para toda función f concava y continua se cumple la siguiente propiedad de las pendientes:

$$\frac{f(a)-f(y)}{a-y} \leq \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \quad 0 < x, y < a.$$

Considerando $f=\kappa$ y $a = x+y$, tenemos que

$$\frac{\kappa(x+y)-\kappa(y)}{(x+y)-y} \leq \frac{\kappa(x)-\kappa(0)}{x-0}$$

$$\frac{\kappa(x+y)-\kappa(y)}{x} \leq \frac{\kappa(x)}{x}$$

de donde

$$\kappa(x+y) \leq \kappa(x)+\kappa(y).$$

$\square$

La noción de κ-función nos permite introducir la definición de κ-variación acotada dada por B. Korenblum en 1975 (Ver [13]).

Definición 2.2.2. *Sea κ una κ-función. Una función $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ se dice que es de κ-variación acotada si existe un $C > 0$ tal que para cada partición $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$,*

$$\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})| \leq C \sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1}).$$

$C_0 = \text{mín}\, C$ es llamado la κ-variación total de u : $C_0 = \kappa V(u)$, es decir,

$$\kappa V(u) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones de $[0,1]$.

Notación: A la familia de todas las funciones de κ-variación acotada la denotaremos por κBV[0,1].

Observación:

En este trabajo sólo consideraremos funciones reales definidas en $[0,1]$. Los resultados aplicados a una función u sobre un intervalo arbitrario $[a,b]$, se pueden transformar a funciones definidas en $[0,1]$. Consideramos $u \circ \alpha$ definida sobre $[0,1]$, donde $\alpha(x) = (b-a)x + a$, el cual demostraremos con el siguiente lema.

Lema 2.2.1 (Ver [6])**.** *[Lema de invarianza] Sean κ una κ-función y u una función definida sobre un intervalo arbitrario $[a,b]$, entonces u es de κ-variación acotada sobre $[a,b]$ si la función $u((b-a)x+a)$ es de κ-variación acotada en $[0,1]$.*

Demostración:

Sean $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha : [0, 1] \to [a, b]$ definida por $\alpha(x) = (b - a)x + a$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

Entonces, dada una partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0, 1]$, el conjunto $\alpha(\pi) = \{\alpha(x_0), \alpha(x_1), \cdots, \alpha(x_n)\}$ es una partición de $[a, b]$.

Sea $g(x) = u((b - a)x + a) = u \circ \alpha$ una función de κ-variación acotada en $[0, 1]$, entonces existe un $C > 0$ tal que para cada partición π de $[0, 1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| &\leq C \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1}),\\ \sum_{i=1}^{n} |u \circ \alpha(x_i) - u \circ \alpha(x_{i-1})| &\leq C \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1}),\end{aligned}$$

luego, para la partición $\alpha(\pi)$ del intervalo $[a, b]$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |u(\alpha(x_i)) - u(\alpha(x_{i-1}))| \leq C \sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1}),$$

denotando por $y_i = \alpha(x_i)$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |u(y_i) - u(y_{i-1})| \leq C \sum_{i=1}^{n} \kappa(y_i - y_{i-1}).$$

Por lo tanto, u es de κ-variación acotada en $[a, b]$.

$\square$

A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones de κ-variación acotada usados frecuentemente.

Ejemplo 1:

Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u en $[0, 1]$ definida por

$$u(x) = c \qquad \text{para todo} \quad x \in [0, 1].$$

Entonces, la κ-variación acotada de la función u en el intervalo $[0, 1]$ viene dada por

$$\kappa V(u) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |c - c|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = 0,$$

donde $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 2:

Sea $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función identidad $u(t) = t$ con $t \in [0, 1]$. Entonces, la **κ-variación** de la función u en el intervalo $[0, 1]$ es dada por

$$\begin{aligned} \kappa V(u; [0,1]) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \end{aligned}$$

Como κ es subaditiva, al tomar supremo sobre las particiones π de $[0, 1]$ el mayor valor de $\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}$ se toma cuando $0 = t_0 < t_1 = 1$ y en este caso

$$\sup_{\pi} \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \frac{1}{\kappa(1)} = 1.$$

De esta manera, $\kappa V_{\varphi}^{R}(u; [0, 1]) = 1$.

Ejemplo 3:

Sea u la función definida por

$$u(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si} \quad 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2}, \\ \\ \frac{3}{4}, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4}, \\ \\ 1, & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, la κ-variación acotada de la función u en el intervalo $[0,1]$ viene dada por

$$\begin{aligned} \kappa V(u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{\dfrac{3}{4}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

donde el supremo se considera sobre la partición $\pi : 0 = t_0 < t_1 = 1$ del intervalo $[0,1]$.

Proposición 2.2.2. *Sea κ una κ-función entonces $Lip[0,1] \subset \kappa BV[0,1]$.*

Demostración:

Sean $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$ y $u \in Lip[0,1]$

entonces:

$$\sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \leq \sup_{\pi} \frac{L \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{L}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = L.$$

Por lo tanto, la función $u \in \kappa BV[0,1]$. Así, $Lip[0,1] \subset \kappa BV[0,1]$.

2.2.2 Propiedades del espacio de funciones con κ-Variación Acotada

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de las funciones de κ-variación acotada, que permitirán conocer algunas características de las mismas. Comenzaremos demostrando que la clase de funciones con κ-variación acotada $\kappa BV[0,1]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial, para ello demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. *Sea κ una κ-función. La clase de funciones con κ-variación acotada $\kappa BV[0,1]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial, es decir, $\kappa BV[0,1]$ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in \kappa BV[0,1]$, se tiene que $u + v \in \kappa BV[0,1]$.*

2. *Para todo $u, v, w \in \kappa BV[0,1]$, se tiene que $\kappa V((u + v) + w) = \kappa V(u + (v + w))$.*

3. *Existe una función nula, $l(x) \in \kappa BV[0,1]$, definida como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ tal que $\kappa V(u + l) = \kappa V(u)$, para todo $u \in \kappa BV[0,1]$.*

4. *Para todo $u \in \kappa BV[0,1]$, existe $-u \in \kappa BV[0,1]$ definido como $-u : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $(-u)(x) = -u(x)$, entonces $\kappa V(-u + u) = \kappa V(l)$.*

5. *Para todo $u, v \in \kappa BV[0,1]$, se tiene que $\kappa V(u + v) = \kappa V(v + u)$.*

6. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \kappa BV[0,1]$, *se tiene que* $\alpha u \in \kappa BV[0,1]$.

7. *Para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \kappa BV[0,1]$, *se tiene que* $\kappa V(\alpha(\beta u)) = \kappa V((\alpha\beta)u)$.

8. *Para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \kappa BV[0,1]$, *se tiene que* $\kappa V((\alpha+\beta)u) = \kappa V(\alpha u + \beta u)$.

9. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \kappa BV[0,1]$, *se tiene que* $\kappa V(\alpha(u+v)) = \kappa V(\alpha u + \alpha v)$.

10. *Para cualquier* $u \in \kappa BV[0,1]$ *y el escalar 1, se tiene que* $\kappa V(1u) = \kappa V(u)$.

Demostración:

1. Sean $u, v \in \kappa BV[0,1]$, entonces demostraremos que la suma de dos funciones con κ-variación acotada, pertenece a la clase de funciones con κ-variación acotada. En efecto, utilizando la definición de κ-variación acotada y las propiedades del supremo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\kappa V(u+v) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) - (u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + v(x_i) - u(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1}) + v(x_i) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u(x_i) - u(x_{i-1})) + (v(x_i) - v(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} + \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|v(x_i)-v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \kappa V(u)+\kappa V(v)<\infty.
\end{aligned}$$

Con lo cual tenemos que $u+v\in \kappa BV[0,1]$.

2. Sean $u,v,w\in \kappa BV[0,1]$, entonces de la definición de κ-variación acotada, y de la propiedad del supremo, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\kappa V((u+v)+w) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|((u+v)+w)(x_i)-((u+v)+w)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|(u+v)(x_i)+w(x_i)-((u+v)(x_{i-1})+w(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)+v(x_i)+w(x_i)-u(x_{i-1})-v(x_{i-1})-w(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)+(v+w)(x_i)-(u(x_{i-1})+(v+w)(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|(u+(v+w))(x_i)-((u+(v+w))(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(x_i-x_{i-1})} \\
&= \kappa V(u+(v+w)).
\end{aligned}$$

3. Sea $l(x) \in \kappa BV[0,1]$ la función nula, definida como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Demostremos que para cualquier función $u \in \kappa BV[0,1]$, la κ-variación acotada de la suma de u con la función nula es igual a la κ-variación acotada de la función u.

   En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\kappa V(u+l) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+l)(x_i) - (u+l)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + l(x_i) - u(x_{i-1}) - l(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})},
\end{aligned}$$

   como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $l(x_i) = 0$ y $l(x_{i-1}) = 0$ para todo $i \in [1, \cdots, n]$, de donde se deduce que:

$$\kappa V(u+l) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \kappa V(u).$$

4. Sea $u \in \kappa BV[0,1]$ y el inverso aditivo definido como $-u : [0,1] \to \mathbb{R}$, entonces según la noción de κ-variación acotada tenemos:

$$\begin{aligned}
\kappa V(-u+u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(-u+u)(x_i) - (-u+u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |-u(x_i) + u(x_i) - (-u(x_{i-1}) + u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |0-0|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |l(x_i) - l(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \kappa V(l).$$

5. Sean $u, v \in \kappa BV[0,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\kappa V(u+v) &= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) - (u+v)(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + v(x_i) - u(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |v(x_i) + u(x_i) - v(x_{i-1}) - u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |(v+u)(x_i) - (v+u)(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \kappa V(v+u).
\end{aligned}$$

6. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in \kappa BV[0,1]$, entonces:

$$\kappa V(\alpha u) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i) - \alpha u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha||(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = |\alpha| \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}$$

$$= |\alpha| \kappa V(u).$$

Con lo cual $\alpha u \in \kappa BV[0,1]$.

7. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in \kappa BV[0,1]$, entonces de la Definición 2.2.2 tenemos:

$$\begin{aligned}
\kappa V(\alpha(\beta u)) &= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(\beta u(x_i)) - \alpha(\beta u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(\beta(u(x_i) - u(x_{i-1})))|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha\beta(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \kappa V((\alpha\beta)u) = |\alpha\beta| \kappa V(u).
\end{aligned}$$

8. Considerando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in \kappa BV[0,1]$, entonces:

$$\kappa V((\alpha + \beta)u) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |(\alpha + \beta)u(x_i) - (\alpha + \beta)u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i) + \beta u(x_i) - \alpha u(x_{i-1}) - \beta u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(\alpha u + \beta u)(x_i) - (\alpha u + \beta u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \kappa V(\alpha u + \beta u).$$

9. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \kappa BV[0,1]$, entonces:

$$\begin{aligned}
\kappa V(\alpha(u+v)) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u+v)(x_i) - \alpha(u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u(x_i) + v(x_i)) - \alpha(u(x_{i-1}) + v(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i) + \alpha v(x_i) - \alpha u(x_{i-1}) - \alpha v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(\alpha u + \alpha v)(x_i) - (\alpha u + \alpha v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \kappa V(\alpha u + \alpha v).
\end{aligned}$$

10. Sea $u \in \kappa BV[0,1]$ y el escalar 1, entonces:

$$
\begin{aligned}
\kappa V(1u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(1u)(x_i) - (1u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \kappa V(u).
\end{aligned}
$$

□

Como se cumplen todas estas propiedades se tiene que $\kappa BV[0,1]$ es un espacio vectorial.

Ahora, demostraremos que el espacio $\kappa BV[0,1]$ se puede dotar de una estructura de espacio normado, para lo cual definiremos el siguiente funcional $||\cdot||_{\kappa BV}$ del espacio $\kappa BV[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ por:

$$||u||_{\kappa BV} = |u(0)| + \kappa V(u), \quad \text{para todo} \quad u \in \kappa BV[0,1].$$

A continuación, demostraremos que este funcional es una norma y que, por tanto, $(\kappa BV[0,1], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un espacio normado.

Teorema 2.2.1 (Ver [22])**.** *Sea κ una κ-función. El funcional $||\cdot||_{\kappa BV} : \kappa BV[0,1] \to \mathbb{R}$ es una norma, es decir, $||\cdot||_{\kappa BV}$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $||u||_{\kappa BV} \geq 0$ *para todo* $u \in \kappa BV[0,1]$,

(ii) $||u||_{\kappa BV} = 0$ *si y sólo si* $u = 0$,

(iii) $||\lambda u||_{\kappa BV} = |\lambda|.||u||_{\kappa BV}$ *para todo* $u \in \kappa BV[0,1]$ *y para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iv) $||u+v||_{\kappa BV} \leq ||u||_{\kappa BV} + ||v||_{\kappa BV}$ *para todo* $u, v \in \kappa BV[0,1]$.

Demostración:

(i) Sea $u \in \kappa BV[0,1]$, entonces

$$||u||_{\kappa BV} = |u(0)| + \kappa V(u).$$

Por la Definición 2.2.2 tenemos que

$$||u||_{\kappa BV} = |u(0)| + \kappa V(u) \geq 0.$$

(ii) Si $||u||_{\kappa BV} = 0$ se tiene que

$$|u(0)| + \kappa V(u) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |u(0)| = 0 \quad y \quad \kappa V(u) = 0,$$

entonces,

$$|u(0)| = 0 \qquad y \qquad \kappa V(u) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = 0,$$

lo que implica que necesariamente

$$u(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = 0 \qquad \text{para todo} \quad x_i, x_{i-1} \in [0,1].$$

Considerando la partición $\pi : 0 = x_1 < x_2 = t < x_3 = 1$, tendremos que

$$|u(t) - u(0)| + |u(1) - u(t)| = 0,$$

de donde se tiene que

$$|u(t) - u(0)| = 0 \qquad y \qquad |u(1) - u(t)| = 0,$$

por lo tanto, $0 = u(0) = u(t) = u(1)$ para todo $t \in [0,1]$, con lo cual $u = 0$.

Ahora, si $u = 0$ entonces $u(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, por lo tanto $||u||_{\kappa BV} = 0$.

(iii) Como $u \in \kappa BV[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$||\lambda u||_{\kappa BV} = |\lambda u(0)| + \kappa V(\lambda u),$$

observemos que para cada partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}
\kappa V(\lambda u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda u(x_i) - \lambda u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= |\lambda| \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} = |\lambda|.\kappa V(u).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
||\lambda u||_{\kappa BV} &= |\lambda u(0)| + \kappa V(\lambda u) \\
&= |\lambda|.|u(0)| + |\lambda|.\kappa V(u) \\
&= |\lambda|(|u(0)| + \kappa V(u)) \\
&= |\lambda|||u||_{\kappa BV}.
\end{aligned}$$

(iv) Sean $u, v \in \kappa BV[0,1]$, entonces por la Definición 2.2.2 y las propiedades del supremo obtenemos:

$$\kappa V(u+v) = \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) - (u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i)+v(x_i)-u(x_{i-1})-v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u(x_i)-u(x_{i-1}))+(v(x_i)-v(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&\leq \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i)-u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} + \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v(x_i)-v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(x_i - x_{i-1})} \\
&= \kappa V(u) + \kappa V(v).
\end{aligned}
$$

De esta desigualdad y de la definición de la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$, resulta que:

$$
\begin{aligned}
||u+v||_{\kappa BV} &= |u(0)+v(0)| + \kappa V(u+v) \\
&\leq |u(0)| + |v(0)| + \kappa V(u) + \kappa V(v) \\
&= (|u(0)| + \kappa V(u)) + (|v(0)| + \kappa V(v)) \\
&= ||u||_{\kappa BV} + ||v||_{\kappa BV}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$||u+v||_{\kappa BV} \leq ||u||_{\kappa BV} + ||v||_{\kappa BV}.$$

Con lo cual $||\cdot||_{\kappa BV}$ es una norma. □

Observación:

Si dotamos al espacio $\kappa BV[0,1]$ con la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$, se tiene que $(\kappa BV[0,1], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un espacio normado.

A continuación demostraremos que el espacio $\kappa BV[0,1]$ con la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$ es un espacio normado completo.

Teorema 2.2.2 (Ver [22]). *Sea κ una κ-función. El espacio $(\kappa BV[0,1], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un Espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\kappa BV[0,1], ||\cdot||_{\kappa BV})$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N, tal que si $n, m \geq N$, se tiene que:

$$||u_n - u_m||_{\kappa BV} < \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_n(0) = 0$ con $n \geq 1$. De donde tenemos que:

$$\kappa V(u_n - u_m) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N. \tag{2.9}$$

Considerando la partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 = x < x_2 = 1$ del intervalo $[0,1]$, se tiene de la Definición 2.2.2 y de (2.9), lo siguiente:

$$\frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(0)| + |(u_n - u_m)(1) - (u_n - u_m)(x)|}{\kappa(x) + \kappa(1-x)} < \varepsilon,$$

de donde,

$$\frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(0)|}{\kappa(x) + \kappa(1-x)} < \varepsilon.$$

Luego, como $u_n(0) = 0$ para todo $n \geq 1$ entonces,

$$\frac{|(u_n - u_m)(x)|}{\kappa(x) + \kappa(1-x)} < \varepsilon,$$

es decir,

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon(\kappa(x) + \kappa(1-x)).$$

Por otro lado, para la partición $\pi : 0 < x < 1$ tenemos que:

$$\kappa(x) < \kappa(1) = 1 \quad \text{y}$$

$$\kappa(1-x) < \kappa(1) = 1,$$

entonces $\kappa(x) + \kappa(1-x) < 2$, de donde

$$|u_n(x) - u_m(x)| < 2\varepsilon.$$

Lo que significa que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que toda sucesión de Cauchy converge, es decir, que existe el límite de la sucesión, y lo denotaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \qquad \text{para todo} \quad t \in [0,1]$$

y $u_n(x) - u_m(x)$ tiende a $u_n(x) - u(x)$ en $[0,1]$ cuando $m \to \infty$.

A continuación, demostraremos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge bajo la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$, por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$||u_n(x) - u(x)||_{\kappa BV} = ||u_n(x) - \lim_{m\to\infty} u_m(x)||_{\kappa BV} = \lim_{m\to\infty} ||u_n(x) - u_m(x)||_{\kappa BV},$$

ahora considerando el límite cuando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(x) - u(x)||_{\kappa BV} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} ||u_n(x) - u_m(x)||_{\kappa BV} = 0.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(x) - u(x)||_{\kappa BV} = 0,$$

lo que implica que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en la norma $||\cdot||_{\kappa BV}$, luego $(\kappa BV[0,1], ||\cdot||_{\kappa BV})$ es un espacio de Banach.

□

CAPÍTULO 3

EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE $\kappa\varphi$-VARIACIÓN ACOTADA EN EL SENTIDO DE RIESZ-KORENBLUM

En el presente capítulo se introduce una nueva clase de funciones denominada $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum. Consideramos varios ejemplos de funciones que satisfacen la definición de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum y exponemos demostraciones de propiedades que satisfacen este tipo de funciones entre ellas que esta clase de funciones es convexo, simétrico y el espacio vectorial generado por dicha clase es un espacio normado y de Banach.

3.1 Funciones de $\kappa\varphi$-Variación Acotada en el sentido de Riesz-Korenblum

En el presente año, M. Castillo, M. Sanoja y I. Zea (Ver [3]) introducen una nueva clase de funciones denominada κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, que es una combinación de las nociones de p-variación acotada en el sentido de Riesz

$(1 < p < \infty)$ y κ-variación acotada, la cual definen de la siguiente manera:

Definición 3.1.1 (κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum)**.** *Sean $1 < p < \infty$, κ una κ-función y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos*

$$\kappa\sigma_p(u;\pi) := \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \right)^p |t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa \left(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \right)},$$

y

$$\kappa V_p(u) = \kappa V_p(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \kappa\sigma_p(u;\pi),$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$. Si $\kappa V_p(u;[a,b]) < \infty$, decimos que u tiene κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum.

Denotamos a la familia de todas las funciones de κp-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum por $\kappa RV_p[a,b]$.

Además, en [3] demuestran que esta clase de funciones:

1. Es un espacio vectorial.

2. Es un álgebra.

3. Es un espacio normado con la norma.

$$\|u\|_{\kappa RV_p} = |u(a)| + \kappa V(u), \quad \text{para todo} \quad u \in \kappa RV_p[a,b].$$

4. Además $(\kappa RV_p[a,b], || \cdot ||_{\kappa RV_p})$ es un espacio de Banach.

Teorema 3.1.1 (Ver [3])**.** *Sean $1 < p < \infty$ y κ una κ-función entonces*

$$RV_p[a,b] \subset \kappa RV_p[a,b] \subset \kappa BV[a,b].$$

Este resultado nos orientó para introducir la nueva noción de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum usando la técnica de Medvedev en [17] al generalizar la noción dada por Riesz en [20]. Podemos comentar que esta nueva noción es una combinación de la noción de F. Riesz con la de B. Korenblum.

Definición 3.1.2. *Sean φ una φ-función, κ una κ-función y $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función. Definimos*

$$\kappa\sigma_{\varphi}^{R}(u;\pi) := \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}$$

y

$$\kappa V_{\varphi}^{R}(u) = \kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) := \sup_{\pi} \kappa\sigma_{\varphi}^{R}(u;\pi),$$

donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ de $[0,1]$. Si $\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) < \infty$ entonces decimos que la función u tiene $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, en el intervalo $[0,1]$.

Notación: Denotaremos por $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$ a la clase de funciones $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ que tienen φ-variación acotada en el sentido de Riesz, es decir:

$$\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] := \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) < \infty\}.$$

Obsérvese que podemos considerar la función $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot;[0,1]) : \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] \to \mathbb{R}$ que asocia a cada función $u \in \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$ su $\kappa\varphi$-variación en el sentido de Riesz-Korenblum.

Notación: Escribiremos $\kappa V_{\varphi}^{R}(u)$ y κV_{φ}^{R} en vez de $\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1])$ y $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$ respectivamente.

En lo que sigue, se muestran un conjunto de ejemplos que orientan a la comprensión de la Definición 3.1.2.

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u en $[0,1]$ definida por $u(t) = c$ para todo $t \in [0,1]$. Sea $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$, entonces:*

$$
\begin{aligned}
\kappa\sigma_{\varphi}^{R}(u;\pi) &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|c-c|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \frac{\varphi(0)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} = 0.
\end{aligned}
$$

De esta manera tenemos que $\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) = 0$.

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $u : [0,1] \to \mathbb{R}$*, la cual definimos de la siguiente manera:* $u(t) = mt + d$ *con* $t \in [0,1]$ *y* $m, d \in \mathbb{R}$*. Dada una partición* $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ *del intervalo* $[0,1]$*, entonces:*

$$
\begin{aligned}
\kappa\sigma_{\varphi}^{R}(u;\pi) &= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|m||t_i-t_{i-1}|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi(|m|)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\varphi(|m|)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i - t_{i-1})}.$$

Como κ es subaditiva, al tomar supremo sobre las particiones π de $[0,1]$ el mayor valor de $\dfrac{\varphi(|m|)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i - t_{i-1})}$ *se toma cuando $0 = t_0 < t_1 = 1$ y en este caso*

$$\sup_{\pi} \frac{\varphi(|m|)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i - t_{i-1})} = \frac{\varphi(|m|)}{\kappa(1)} = \varphi(|m|).$$

De esta manera, $\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) = \varphi(|m|)$.

Proposición 3.1.1. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función entonces $Lip[0,1] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1])$.*

Demostración:

Sea $u \in Lip[0,1]$ entonces existe un $L > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in [0,1]$ se tiene que $|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|$. Ahora, sea $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ una partición del intervalo $[0,1]$ entonces para cada $i = 1, \cdots, n$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi\left(\dfrac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\kappa(t_i - t_{i-1})} &\leq \frac{\varphi\left(\dfrac{L|t_i - t_{i-1}|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\kappa(t_i - t_{i-1})} \\ &= \frac{\varphi(L)|t_i - t_{i-1}|}{\kappa(t_i - t_{i-1})}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i - t_{i-1})} \leq \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\varphi(L)|t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i - t_{i-1})}$$

$$= \frac{\varphi(L)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}.$$

Tomando supremo tenemos que

$$\sup_{\pi} \frac{\varphi(L)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \varphi(L) < \infty.$$

Por lo tanto, $\kappa V_{\varphi}^{R}(u; [0,1]) < \infty$. Luego, $Lip[0,1] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}(u; [0,1])$.

Observación: Como consecuencia del resultado anterior tenemos que:

$$C^n[0,1] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1], \quad n \geq 1.$$

3.1.1 Propiedades del Espacio de las Funciones de $\kappa\varphi$-Variación Acotada en el Sentido de Riesz-Korenblum

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de las funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, que permitirán conocer algunas características del mismo. Comenzaremos demostrando que dicha clase de funciones, $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$, es convexo y simétrico.

Proposición 3.1.2. *Sean κ una κ-función, φ una φ-función y $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ entonces:*

1. *La función $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot) : \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] \to \mathbb{R}$ es par; es decir, $\kappa V_{\varphi}^{R}(u) = \kappa V_{\varphi}^{R}(-u)$.*
2. *$\kappa V_{\varphi}^{R}(u) = 0$ si y sólo si u es constante.*
3. *Si $\kappa V_{\varphi}^{R}(u) < \infty$ entonces u es acotada en $[0,1]$.*
4. *φ es convexa si y sólo si $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot; [0,1])$ es convexa.*

Demostración:

1. Este resultado se deduce de la Definición 3.1.2:

$$\begin{aligned}
\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_{i-1})-u(t_i)|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|-u(t_i)-(-u(t_{i-1}))|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \kappa V_{\varphi}^{R}(-u;[0,1]).
\end{aligned}$$

2. Si u es constante entonces por el Ejemplo 3.1.1 se tiene que el conjunto $\kappa V_{\varphi}^{R}(u)=0$. Supongamos que $\kappa V_{\varphi}^{R}(u)=0$. Entonces,

$$0=\kappa V_{\varphi}^{R}(u) \geq \frac{\varphi\left(\frac{|u(t)-u(0)|}{|t-0|}\right)|t-0|}{\kappa(t-0)},$$

para cualquier $t\in(0,1]$. Luego, por definición de φ-función y dado que $\kappa:[0,1]\to[0,1]$ tenemos que

$$0 \geq \frac{\varphi\left(\frac{|u(t)-u(0)|}{|t|}\right)|t|}{\kappa(t)} \geq 0$$

por lo que

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(0)|}{|t|}\right)|t|=0, \quad t\in(0,1].$$

Como φ se anula solamente en cero, resulta que $\dfrac{|u(t)-u(0)|}{|t|}=0$, $t\in(0,1]$. Por lo tanto, $u(t)=u(0)$, $t\in(0,1]$. Así, u es constante. En particular, si $u(0)=0$ tenemos que $\kappa V_{\varphi}^{R}(u)=0$ si y sólo si $u=0$.

3. Supongamos que $u \in \kappa V_\varphi^R[0,1]$ y que u no es acotada en $[0,1]$ entonces existe una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$, $t_n \in [0,1]$, para todo $n \geq 1$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |u(t_n)| = \infty$.

   Sea $\{t_{n_j}\}_{j\geq 1}$ una subsucesión de $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tal que $\{t_{n_j}\}_{j\geq 1}$ converge a un punto $x \in (0,1]$ entonces $\{u(t_{n_j})\}_{j\geq 1}$ es una subsucesión de $\{u(t_n)\}_{n\geq 1}$. Luego, $\lim\limits_{j\to\infty} |u(t_{n_j})| = \infty$.

   Caso 1. Supongamos $x \neq 0$. Entonces como

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{|u(t_{n_j}) - u(0)|}{|t_{n_j} - 0|}\right)|t_{n_j} - 0|}{\kappa(t_{n_j} - 0)} \leq \kappa V_\varphi^R(u) < \infty,$$

   para todo $j \geq 1$ y como φ es continua, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\varphi\left(\dfrac{\lim\limits_{j\to\infty}|u(t_{n_j}) - u(0)|}{|x - 0|}\right)|x - 0|}{\kappa(x - 0)} &= \lim_{j\to\infty} \frac{\varphi\left(\dfrac{|u(t_{n_j}) - u(0)|}{|t_{n_j}|}\right)|t_{n_j}|}{\kappa(t_{n_j})} \\ &\leq \kappa V_\varphi^R(u)\end{aligned}$$

   para todo $j \geq 1$.

   Por otro lado, $|u(t_{n_j}) - u(0)|$ tiende a infinito cuando $j \to \infty$. Luego, como $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ resulta que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\varphi\left(\dfrac{|u(t_{n_j}) - u(0)|}{|x|}\right)|x|}{\kappa(x)} = \infty$$

   y así $\kappa V_\varphi^R(u) = \infty$ lo cual es una contradicción.

   Caso 2. Supongamos que $x = 0$. Entonces como

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{|u(1) - u(t_{n_j})|}{|1 - t_{n_j}|}\right)|1 - t_{n_j}|}{\kappa(1 - t_{n_j})} \leq \kappa V_\varphi^R(u) < \infty,$$

para todo $j \geq 1$ y como φ es continua, se tiene que

$$\frac{\varphi\left(\dfrac{\lim\limits_{j\to\infty}|u(1)-u(t_{n_j})|}{|1-x|}\right)|1-x|}{\kappa(1-x)} = \lim_{j\to\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{|u(1)-u(t_{n_j})|}{|1-t_{n_j}|}\right)|1-t_{n_j}|}{\kappa(1-t_{n_j})}$$

$$\leq \kappa V_{\varphi}^{R}(u)$$

para todo $j \geq 1$.

Por otra parte, $\lim\limits_{j\to\infty}|u(1)-u(t_{n_j})| = \infty$. Luego como $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ se tiene que:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\varphi\left(\dfrac{|u(1)-u(t_{n_j})|}{|1-x|}\right)|1-x|}{\kappa(1-x)} = \lim_{j\to\infty}\varphi(|u(1)-u(t_{n_j})|) = \infty$$

y así, $\kappa V_{\varphi}^{R}(u) = \infty$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, en ambos casos, se obtuvo una contradicción al suponer que u no es acotada. Así, u es acotada.

4. Supongamos que φ es convexa y sean $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Dadas $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ una partición de $[0,1]$ y φ una φ-función convexa y no decreciente tenemos que:

$$\alpha\kappa V_{\varphi}^{R}(u) + \beta\kappa V_{\varphi}^{R}(v) = \alpha\sup_{\pi}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi\left(\dfrac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\sum\limits_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} +$$

$$\beta\sup_{\pi}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi\left(\dfrac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\sum\limits_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$\geq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\alpha\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}| + \beta\varphi\left(\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|\right]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$\geq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\alpha(u(t_i)-u(t_{i-1}))+\beta(v(t_i)-v(t_{i-1}))|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|(\alpha u+\beta v)(t_i)-(\alpha u+\beta v)(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$= \kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v).$$

Por lo tanto, $\kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v) \leq \alpha\kappa V_{\varphi}^{R}(u)+\beta\kappa V_{\varphi}^{R}(v)$ para todo $\alpha,\beta\in[0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ y así $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot)$ es convexa.

Ahora supongamos que $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot)$ es convexa y sean $x,y\in[0,\infty)$ y $u,v:[0,1]\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $u(t):=xt$ y $v(t):=yt, t\in[0,1]$.

Sean $\alpha,\beta\in[0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$. Por la Definición 3.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
\kappa V_{\varphi}^{R}(u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x(t_i-t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(x)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}
\end{aligned}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\varphi(x)}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} = \varphi(x).$$

De manera similar $\kappa V_{\varphi}^{R}(v) = \varphi(y)$ y $\kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u + \beta v) = \varphi(\alpha x + \beta y)$. Luego, como $\kappa V_{\varphi}^{R}(\cdot)$ es convexa, se tiene que

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha \kappa V_{\varphi}^{R}(u) + \beta \kappa V_{\varphi}^{R}(v) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Es decir,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y).$$

Por lo tanto, φ es convexa.

Siguiendo las ideas desarrolladas en [19] enunciamos y demostramos la siguiente proposición:

Proposición 3.1.3. *Sean κ una κ-función, φ una φ-función y $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ entonces* $\kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u + \beta v) \leq \kappa V_{\varphi}^{R}(u) + \kappa V_{\varphi}^{R}(v); \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1.$

Demostración:

Sean $\alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1$ y $x, y \in [0, \infty)$. Como φ es no decreciente, no negativa y $\alpha x + \beta y$ es un punto del segmento que une a x con y tenemos que:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leq \varphi(x) + \varphi(y).$$

De la desigualdad anterior, se deduce que:

$$\kappa V_{\varphi}^{R}(u) + \kappa V_{\varphi}^{R}(v) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}$$
$$+ \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|v(t_i) - v(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right) |t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}$$

$$\geq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\alpha\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}+\beta\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$\geq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\alpha(u(t_i)-u(t_{i-1}))+\beta(v(t_i)-v(t_{i-1}))|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|(\alpha u+\beta v)(t_i)-(\alpha u+\beta v)(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} = \kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v).$$

Por lo tanto, $\kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u+\beta v) \leq \kappa V_{\varphi}^{R}(u)+\kappa V_{\varphi}^{R}(v)$ para todo $\alpha,\beta \in [0,1]$ y $\alpha+\beta=1$.

Observación 3.1.1. *Por las Proposiciones 3.1.2 y 3.1.3 tenemos que $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$ es convexo y simétrico.*

En la siguiente proposición presentaremos un resultado siguiendo las ideas de [16] el cual enunciaremos a continuación:

Proposición 3.1.4. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función convexa, entonces:*

1. $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] \subset \kappa BV[0,1]$.
2. *Si* $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\gamma<\infty$ *entonces* $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]=\kappa BV[0,1]$.

Demostración:

1. $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] \subset \kappa BV[0,1]$.

   Sean $u \in \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$, $\pi : 0=t_0<\cdots<t_n=1$ una partición del intervalo $[0,1]$ y

$$\sigma := \left\{ i=0,1,\cdots,n : \frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|} \leq 1 \right\}.$$

   Usando el resultado (2.1) del Capítulo 2, tenemos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{i\in\sigma}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} + \frac{\sum_{i\notin\sigma}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}|t_i-t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}\\
&\leq \frac{\sum_{i\in\sigma}|t_i-t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} + \frac{1}{\varphi(1)}.\frac{\sum_{i\notin\sigma}\varphi\left(\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}\\
&= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} + \frac{1}{\varphi(1)}\kappa\sigma_\varphi^R(u;[0,1]).
\end{aligned}$$

Aplicando supremo se tiene que

$$\kappa V(u) \leq 1 + \frac{1}{\varphi(1)}\kappa V_\varphi^R(u;[0,1]).$$

Por lo tanto,

$$\kappa V_\varphi^R[0,1] \subset \kappa BV[0,1]. \tag{3.1}$$

2. Por hipótesis,

$$0 < \lim_{t\to\infty}\sup\frac{\varphi(t)}{t} = \gamma < \infty,$$

entonces, por (2.3) del Capítulo 2, existen $x_0 > 0$ y $c > 0$, tales que:

$$\varphi(t) \leq ct, \quad t \geq x_0.$$

Ahora, sea $u \in \kappa BV[0,1]$ y consideremos una partición $\pi : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ del intervalo $[0,1]$.

Sea

$$\alpha_{x_0} := \left\{ i = 0, 1, \cdots, n : \frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} > x_0 \right\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} &= \frac{\sum_{i \in \alpha_{x_0}} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\
&+ \frac{\sum_{i \notin \alpha_{x_0}} \varphi\left(\frac{|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\
&\leq \frac{\sum_{i \in \alpha_{x_0}} c|u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} + \frac{\sum_{i \notin \alpha_{x_0}} \varphi(x_0)(t_i - t_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} \\
&= \frac{c \sum_{i \in \alpha_{x_0}} |u(t_i) - u(t_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})} + \frac{\varphi(x_0)}{\sum_{i=1}^{n} \kappa(t_i - t_{i-1})}.
\end{aligned}$$

Aplicando supremo tenemos que

$$\kappa V_{\varphi}^{R}(u;[0,1]) \leq c\kappa V(u) + \varphi(x_0),$$

es decir

$$\kappa BV[0,1] \subset \kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]. \tag{3.2}$$

Luego, por (3.1) y (3.2) se tiene que $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1] = \kappa BV[0,1]$.

$\square$

En el caso de las funciones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz (Corolario 2.1.1 del Capítulo 2), la clase V_φ^R no es un espacio vectorial, salvo que verifique la condición Δ_2.

Notación: El espacio vectorial generado por la clase $\kappa V_\varphi^R[0,1]$ lo denotaremos por $\kappa RV_\varphi[0,1]$ o simplemente por κRV_φ. Si consideramos $\varphi(t) = t^p$, $t \in [0,1]$ $(1 < p < \infty)$ escribiremos $\kappa RV_p[0,1]$.

Proposición 3.1.5. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función entonces el espacio vectorial generado por la clase $\kappa V_\varphi^R[0,1]$ es igual a:*

$$\kappa RV_\varphi[0,1] = \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : \exists \lambda > 0, \kappa V_\varphi^R(\lambda u) < \infty\}.$$

A continuación demostraremos que el espacio $\kappa RV_\varphi[0,1]$ es un álgebra siguiendo las ideas desarrolladas en [19].

Proposición 3.1.6. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función convexa, entonces $\kappa RV_\varphi[0,1]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.*

Demostración:

Sean $u, v \in \kappa RV_\varphi[0,1]$ entonces existen $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha u, \beta v \in \kappa V_\varphi^R[0,1]$. Si $u = 0$ o $v = 0$ entonces $uv = 0 \in \kappa RV_\varphi[0,1]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u, v \neq 0$. Consideremos $\lambda = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha\|u\|_\infty + \beta\|v\|_\infty}$.

Si $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ es una partición de $[0,1]$ entonces

$$\begin{aligned}
\kappa V_\varphi^R(\lambda uv) &= \sup_\pi \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|\lambda uv(t_i) - \lambda uv(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^n \kappa(t_i - t_{i-1})} \\
&= \sup_\pi \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi\left(\frac{|\lambda u(t_i)v(t_i) - \lambda u(t_{i-1})v(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|}\right)|t_i - t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^n \kappa(t_i - t_{i-1})}.
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\lambda u(t_{i-1})v(t_i)$ y sacando factor común $v(t_i)$ y $u(t_{i-1})$ se tiene:

$$\kappa V_{\varphi}^{R}(\lambda uv) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\frac{|\lambda[u(t_i)-u(t_{i-1})]v(t_i)+\lambda[v(t_i)-v(t_{i-1})]u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}$$

$$\leq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\lambda\|v\|_{\infty}\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}+\lambda\|u\|_{\infty}\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})}.$$

Sustituyendo λ y denotando $\lambda_1 = \dfrac{\beta\|v\|_{\infty}}{\alpha\|u\|_{\infty}+\beta\|v\|_{\infty}}$ y $\lambda_2 = \dfrac{\alpha\|u\|_{\infty}}{\alpha\|u\|_{\infty}+\beta\|v\|_{\infty}}$ con $\lambda_1,\lambda_2 \in (0,1)$ donde $\lambda_1+\lambda_2=1$. Además, de la convexidad de φ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\kappa V_{\varphi}^{R}(\lambda uv) &\leq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\alpha\lambda_1\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}+\beta\lambda_2\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&\leq \lambda_1 \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\alpha\frac{|u(t_i)-u(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&+ \lambda_2 \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(\beta\frac{|v(t_i)-v(t_{i-1})|}{|t_i-t_{i-1}|}\right)|t_i-t_{i-1}|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\kappa(t_i-t_{i-1})} \\
&\leq \lambda_1\kappa V_{\varphi}^{R}(\alpha u)+\lambda_2\kappa V_{\varphi}^{R}(\beta v) < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que $\kappa V_{\varphi}^{R}(\lambda(uv)) \leq \kappa V_{\varphi}^{R}(\lambda_1 u)+\kappa V_{\varphi}^{R}(\lambda_2 v)$ y así $uv \in \kappa RV_{\varphi}[0,1]$. En conclusión, el espacio $\kappa RV_{\varphi}[0,1]$ es un álgebra.

3.1.2 Norma sobre $\kappa RV_\varphi[0,1]$.

En esta sección, usamos el funcional de Minkowski para dotar al espacio $\kappa RV_\varphi[0,1]$ de una norma $\kappa\|\cdot\|_\varphi^R$ que le dará una estructura de espacio de Banach.

Teorema 3.1.2. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función convexa, el conjunto:*

$$\Lambda = \{u \in \kappa RV_\varphi[0,1] : \kappa V_\varphi^R(u) \leq 1\}$$

es un subconjunto convexo, simétrico y absorbente de $\kappa RV_\varphi[0,1]$.

Demostración:

Comencemos verificando la convexidad, para ello consideramos $\alpha, \beta \in [0,1]$ de manera que $\alpha + \beta = 1$ y $u, v \in \Lambda$. Entonces por la Proposición 3.1.2 se tiene que

$$\kappa V_\varphi^R(\alpha u + \beta v) \leq \alpha\kappa V_\varphi^R(u) + \beta\kappa V_\varphi^R(v) \leq \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 \leq 1.$$

Por lo que $\alpha u + \beta v \in \Lambda$, quedando así demostrada la convexidad de dicho conjunto.

Consideremos ahora $u \in \Lambda$ y $0 < |\lambda| \leq 1$. Si $0 < \lambda \leq 1$ hacemos uso nuevamente de la Proposición 3.1.2 y se tiene que

$$\kappa V_\varphi^R(\lambda u) \leq \lambda\kappa V_\varphi^R(u) \leq \lambda \cdot 1 \leq \lambda.$$

En el caso en que $-1 \leq \lambda < 0$ hacemos uso de la simetría y convexidad del funcional $\kappa V_\varphi^R(\cdot)$ dado en la Proposición 3.1.2,

$$\kappa V_\varphi^R(\lambda u) = \kappa V_\varphi^R(-\lambda(-u)) \leq -\lambda\kappa V_\varphi^R(-u) = |\lambda|\kappa V_\varphi^R(u).$$

Quedando así demostrado que Λ es simétrico.

Para verificar que Λ es absorbente consideremos $u \in \kappa RV_\varphi[0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ de manera que $\kappa V_\varphi^R(\alpha u) < \infty$. Si $\kappa V_\varphi^R(\alpha u) \leq 1$. entonces $\alpha u \in \Lambda$. En caso contrario, en que $\kappa V_\varphi^R(\alpha u) > 1$ se tiene que

$$\kappa V_\varphi^R\left(\frac{\alpha u}{\kappa V_\varphi^R(\alpha u)}\right) \leq \frac{1}{\kappa V_\varphi^R(\alpha u)}\kappa V_\varphi^R(\alpha u) = 1,$$

en cuyo caso $\dfrac{\alpha}{\kappa V_\varphi^R(\alpha u)}u \in \Lambda$. Se verifica entonces que Λ es absorbente.

$\square$

Definición 3.1.3. *(Funcional de Minkowski para $\kappa V_{\varphi}^{R}[0,1]$.) Sea $u \in \kappa RV_{\varphi}[0,1]$. El funcional de Minkowski asociado al conjunto Λ define una seminorma sobre $\kappa RV_{\varphi}[0,1]$ y viene definido por:*

$$\mu_{\Lambda}(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Definición 3.1.4. *(Norma en $\kappa RV_{\varphi}[0,1]$)*

Se define el funcional $||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}} : \kappa RV_{\varphi}[0,1] \to \mathbb{R}$, por:

$$||u||_{\kappa RV_{\varphi}} = |u(0)| + \mu_{\Lambda}(u), \quad u \in \kappa RV_{\varphi}[0,1].$$

Teorema 3.1.3. *Sean κ una κ-función y φ una φ-función convexa, entonces $\left(\kappa RV_{\varphi}[0,1], ||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio normado.*

Demostración:

Sea $u, v \in \kappa RV_{\varphi}[0,1], \alpha \in \mathbb{R}$ y sea $\mu_{\Lambda}(u)$ el funcional de Minkowski, el cual define una seminorma, entonces demostremos lo siguiente:

1. $||u||_{\kappa RV_{\varphi}} \geq 0$.

   Dado que $|u(0)| \geq 0$ y $\mu_{\Lambda}(u) \geq 0$ se tiene que $||u||_{\kappa RV_{\varphi}} \geq 0$.

2. $||\alpha u||_{\kappa RV_{\varphi}} = |\alpha|||u||_{\kappa RV_{\varphi}}$.

   En efecto,

$$\begin{aligned} ||\alpha u||_{\kappa RV_{\varphi}} &= |\alpha u(0)| + \mu_{\Lambda}(\alpha u) = |\alpha||u(0)| + |\alpha|\mu_{\Lambda}(u) \\ &= |\alpha|(|u(0)| + \mu_{\Lambda}(u)) = |\alpha|||u||_{\kappa RV_{\varphi}}. \end{aligned}$$

3. $||u+v||_{\kappa RV_{\varphi}} \leq ||u||_{\kappa RV_{\varphi}} + ||v||_{\kappa RV_{\varphi}}$.

$$\begin{aligned} ||u+v||_{\kappa RV_{\varphi}} &= |(u+v)(0)| + \mu_{\Lambda}(u+v) = |u(0)+v(0)| + \mu_{\Lambda}(u+v) \\ &\leq |u(0)| + |v(0)| + \mu_{\Lambda}(u) + \mu_{\Lambda}(v) = ||u||_{\kappa RV_{\varphi}} + ||v||_{\kappa RV_{\varphi}} \end{aligned}$$

4. $||u||_{\kappa RV_\varphi} = 0$ si y sólo si $u = 0$.

En efecto, supongamos que $||u||_{\kappa RV_\varphi} = 0$, es decir,

$$|u(0)| + \mu_\Lambda(u) = 0,$$

entonces $|u(0)| = 0$ y

$$0 = \mu_\Lambda(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

Esto implica que para cada entero positivo n, existe $\lambda_n > 0$, tal que $\frac{1}{n} > \lambda_n > 0$ y $\kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1$. Como $\kappa V_\varphi^R(\cdot)$ es convexa se tiene que $\kappa V_\varphi^R(u) \leq \lambda_n$. Tomando límite cuando $t \to \infty$, se obtiene que $\kappa V_\varphi^R(u) = 0$, por lo que, por la parte 2. de la Proposición 3.1.2 se tiene que u es constante, es decir, $u(t) = u(0), t \in [0,1]$ y por lo tanto $u = 0$.

Supongamos que $u = 0$ entonces $|u(0)| = 0$ y $\mu_\Lambda(u) = 0$. Así, $||u||_{\kappa RV_\varphi} = 0$.

De esta manera concluimos que $\left(\kappa RV_\varphi[0,1], ||\cdot||_{\kappa RV_\varphi}\right)$ es un espacio normado.

$\square$

3.1.3 El Espacio de Banach $\kappa RV_\varphi[0,1]$.

Lema 3.1.1. *Sea κ una κ-función. Si $\lambda > 0$ entonces $\mu_\Lambda(u) \leq \lambda$ si y sólo si $\kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda};[0,1]\right) \leq 1$.*

Demostración:

Sean $u \in \kappa BV_\varphi[0,1]$ y $k \geq \mu_\Lambda(u)$ entonces por propiedad de ínfimos existe $k' > 0$ de manera que $k \geq k'$ y

$$k' \in \left\{\lambda > 0 : \kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

En consecuencia,

$$\kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{k}\right) = \kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{k'}\frac{k'}{k}\right) \leq \frac{k'}{k}\kappa V_\varphi^R\left(\frac{u}{k'}\right) \leq \frac{k'}{k} \leq 1.$$

Queda demostrada así la primera parte del lema.

Ahora supongamos que $\kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{k}\right) \leq 1$, esto es, $k \in \left\{\lambda > 0 : \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$.

Por lo tanto,

$$\mu_{\Lambda}(u) = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \leq k.$$

Ahora demostremos que $\left(\kappa RV_{\varphi}[0,1], ||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio de Banach

Teorema 3.1.4. *Sean κ una κ-función y φ una función convexa que cumple la condición ∞_1, entonces el espacio $\left(\kappa RV_{\varphi}[0,1], ||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}}\right)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:

Para demostrar esto, debemos ver que $\kappa RV_{\varphi}[0,1]$ es completo en la norma $||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}}$.

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\left(\kappa RV_{\varphi}[0,1], ||\cdot||_{\kappa RV_{\varphi}}\right)$, entonces dado $1 > \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq N$, se tiene que:

$$||u_n - u_m||_{\kappa RV_{\varphi}} < \epsilon, \quad n, m \geq N.$$

Es decir,

$$|(u_n - u_m)(0)| + \mu_{\Lambda}(u_n - u_m) < \epsilon, \quad n, m \geq N.$$

Luego, $|u_n(0) - u_m(0)| < \epsilon$ y

$$\mu_{\Lambda}(u_n - u_m) < \epsilon \quad n, m \geq N \tag{3.3}$$

Por (3.3) y el Lema 3.1.1 tenemos que

$$\kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}; [0,1]\right) < 1.$$

Entonces, considerando una partición $\pi : 0 < x < y < 1$ se tiene que:

$$\frac{\varphi\left(\frac{|(u_n - u_m)(y) - (u_n - u_m)(x)|}{\epsilon|y - x|}\right)|y - x|}{\kappa(x - 0) + \kappa(y - x) + \kappa(1 - y)} \leq \kappa V_{\varphi}^{R}\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}; [0,1]\right) < 1.$$

De donde resulta que:

$$\varphi\left(\frac{|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)|}{\epsilon|y-x|}\right)|y-x| < \kappa(x)+\kappa(y-x)+\kappa(1-y) \leq 3\kappa(1)=3.$$

Por lo tanto:

$$|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)| < \varphi^{-1}\left(\frac{3}{|y-x|}\right)|y-x|\epsilon.$$

Como φ cumple la condición ∞_1 y φ^{-1} es continua, entonces

$$\varphi^{-1}\left(\frac{3}{|y-x|}\right)|y-x|,\ x,y\in[0,1],\ x\neq y$$

es acotado superiormente. Sea $M>0$ una cota superior, luego

$$|(u_n-u_m)(y)-(u_n-u_m)(x)| < M\epsilon.$$

En consecuencia, la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en el intervalo $[0,1]\subset\mathbb{R}$, y dada la completitud de $\mathbb{R}$, para cada $t\in[0,1]$ el límite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$ existe. Definimos, sobre $[0,1]$ la función $u(t):=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)$. Luego, dado que el funcional de Minkowski es una seminorma se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_\Lambda(u_n-u) &\leq \mu_\Lambda(u_n-u_m)+\mu_\Lambda(u_m-u)\\
&< \epsilon+\mu_\Lambda(u_m-\lim_{m\to\infty} u_m)\\
&\leq \epsilon+\epsilon\\
&= 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u\in\kappa RV_\varphi[0,1]$. Además, para $n,m\geq\mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
||u_n-u_m||_{\kappa RV_\varphi} &= |(u_n-u_m)(0)|+\mu_\Lambda(u_n-u_m)\\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que $\kappa RV_\varphi[0,1]$ es completo, y por lo tanto, es un espacio de Banach.

$\square$

Teorema 3.1.5 (Ver [3]). *Sean κ una κ-función y φ una φ-función entonces*

$$RV_{\varphi}[a,b] \subset \kappa RV_{\varphi}[a,b] \subset \kappa BV[a,b].$$

CONCLUSIONES

En este trabajo especial de grado se realizó un estudio sobre la noción de variación acotada dada por Camille Jordan y algunos resultados de importancia de este espacio de funciones con variación acotada, tales como, las caracterizaciones dadas por C. Jordan, S. Banach y H. Federer.

En segundo lugar, se presenta una generalización de la noción de p-variación acotada en el sentido de Riesz, estudiada por Yu. Medvedev, la cual es conocida como φ-variación acotada en el sentido de Riesz. Demostramos que el espacio vectorial generado por esta clase de funciones se puede dotar de una estructura de álgebra y espacio de Banach. Adicionalmente se estudió una generalización del Lema de Riesz dada por Medvedev (Ver [17]).

Otro de los resultados relevantes expuestos en este trabajo es una generalización del concepto de variacion acotada conocida como κ-variación acotada estudiado por Korenblum en 1975, en donde se introduce una función de distorción κ. Además hemos demostrado que la clase de funciones con κ-variación acotada se puede dotar de una estructura de espacio vectorial, así como de una norma y de un espacio de Banach.

Finalmente introducimos un nuevo concepto de variación que denominamos el espacio de las funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum, el cual combina las nociones de φ-variación acotada en el sentido de Riesz de 1953 y κ-variación acotada de 1975. Se consideran algunos ejemplos para facilitar la comprensión de esta clase de funciones. Además se demuestra, bajo ciertas condiciones, que este espacio es equivalente al espacio de las funciones de κ-variación acotada dado por B. Korenblum. Por último, hemos demostrado que el espacio vectorial generado por la clase de funciones de $\kappa\varphi$-variación acotada en el sentido de Riesz-Korenblum posee una estructura de álgebra, espacio normado y espacio de Banach, donde κ es una κ-función y φ es una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1.

Con este trabajo de grado podemos comenzar a transitar en una futura línea de investigación ya que creemos que esta nueva noción es un aporte al tema y vamos a escribir un artículo para someterlo al arbitraje internacional para su posible publicación. Además podemos en el futuro tratar de generalizar esta noción para las siguientes clases de funciones:

- Funciones de κ-segunda variación acotada en el sentido de De la Vallée Poussin-Korenblum.
- Funciones de $\kappa\Lambda$-variación acotada en el sentido de Waterman-Riesz-Korenblum.
- Funciones de $\kappa\phi$-variación acotada en el sentido de Schramm-Riesz-Korenblum.
- Estudiar la actuación del Operador de Composición, en el caso autónomo, para estos espacios.
- Definir estas nociones en el plano y, más generalmente, en $\mathbb{R}^n$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Avila, L., *Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz,* Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Pto. Fijo, Venezuela, 1994.

[2] Banach, S., *Sur les Lignes Rectifiables et les Surface dont l'aire est finite,* fund. Math, 7 (1925), 225-236.

[3] Castillo, M., Rivas, S., Sanoja M. and Zea I., *The space of Functions of Bounded κ-Variation in the sense of Riesz-Korenblum*, JMCSA, 2012, (Aceptado).

[4] Chistyakov, V.V., *Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight,* J. Appl. Anal., Vol 6, N°2, (2000), 173-186.

[5] Cybertowicz, Z. and Matuszewska, W., *Functions of bounded generalized variations,* Ann. Soc. Math. Polon., 20 (1977), 29-52.

[6] Cyphert, D. and Kelingos, J.A., *The decomposition of functions of bounded χ-variation into differences of χ-decreasing functions,* Studia Math, T. LXXXI. (1985), 185-195.

[7] Dirichlet, J.P.G.L., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données,* Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 4 (1829), 157-169.

[8] Federer, H., *Geometric Measure theory.*, Heidelberg. Springer-Verlag. 1969.

[9] Galavís, G., *Funciones de Φ-Variación Acotada,* Trabajo Especial de Grado, Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado", Barquisimeto, Venezuela. 2011.

[10] Hewitt, E. and Stromberg, K. *Real and abstrac analysis,* Springer-Verlag, New York. 1978.

[11] Jordan C., *Sur la série de Fourier,* C.R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[12] Josephy, M., *Composing functions of bounded variation,* Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 354-356.

[13] Korenblum, B., *An extension of the Nevalina theory,* Acta Math, 135 (1935), 187-219.

[14] Krasnosel´skii, M.A. and Rutickii, Ya. R., *Convex functions and Orlicz Spaces,* P. Noordhoff Ltd-Gronigen The Netherlands, 1961.

[15] Matuszewska, W. and Orlicz, W., *On some properties of functions of bounded φ-variation in the sense of Riesz,* Comment. Math., 32 (1992), 91-110.

[16] Maligranda, L. and Orlicz. W., *On some properties of functions of generalized variation,* Mh. Math., 104 (1987), 53-65.

[17] Medvedev, Y.T., *A generalization of certain theorem of Riesz. (ruso),* Uspekhi Math. Nauk., 6 (1953), 115-118.

[18] Merentes, N. y Rivas, S., *El Operador de Composición en espacios con algún tipo de variación acotada,* IX Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática

Venezolana, Centro de estudios Avanzados-Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 18 1996.

[19] Neves, M.T., *φ-variación en el sentido de Wiener y Riesz y el operador de composición,* Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Aragua, Venezuela, 1994.

[20] Riesz, F., *Untersuchugen über systeme integrierbarer funktionen,* Math. Annalen, 69 (1910), 449-497.

[21] Rivas, S., *Algunas generalizaciones de la noción de variación acotada en el sentido de Riesz y un teorema de representación de Riesz,* Tesis doctoral presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Mención Matemática, Caracas, Venezuela, 2012.

[22] Sanoja, M.V., *Funciones de χ-Variación Acotada en un intervalo y un Teorema de Representación de Korenblum,* Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 2011.

[23] Vitali, G., *Sulle funzioni integrali,* Accad. delle Sci di torino, 40 (1905), 753-766.

[24] Young, L.C., *Sur une généralisation de la notion de variation de Pussanse Piéme borneé au sens de M. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier,* C.R.Acad. Sci. París, Ser A-B, 240 (1937), 470-472.