



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Teoría Combinatoria de Matrices y el Teorema Master de MacMahon.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Sherezade Rivas** para optar al título de Licenciada en Matemática.

**Tutor: Dr. Manuel Maia.**

Caracas, Venezuela

Octubre 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Teoría Combinatoria de Matrices y el Teorema Master de MacMahon**”, presentado por la **Br. Sherezade Rivas**, titular de la Cédula de Identidad **19.630.444**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

---

**Dr. Manuel Maia**  
**Tutor**

---

**M.Sc. Irene Santos**  
**Jurado**

---

**M.Sc. Jean Carlos Liendo**  
**Jurado**

## Agradecimiento

Este Trabajo Especial de Grado fue financiado en parte gracias al proyecto de grupo **PG 03-8261-2011/1** del **Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico** de la **Universidad Central de Venezuela**.

## Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Grafos y Potencias de Matrices	3
1. Grafos	3
2. Digrafos	7
3. Digrafos de König	8
4. Digrafos y Potencia de matrices	19
5. Permutaciones con restricción	29
Capítulo 2. Determinante y Permanente	31
1. Propiedades del Determinante	31
2. Definición clásica del determinante	56
3. Permanente	61
Capítulo 3. Teorema de Cayley-Hamilton y Teorema Master de MacMahon	71
1. Digrafos de Permutación	72
2. Clase de Digrafo General	74
3. Teorema de Cayley-Hamilton	77
4. Teorema Master de Macmahon para Permutaciones	79
Capítulo 4. Aplicaciones	81
1. La identidad de Dixon como una aplicación del Teorema Master	81
2. Otras Identidades	83
Conclusiones	87
Bibliografía	88

## Introducción

El primer artículo científico relativo a grafos fue escrito por el matemático suizo Leonhard Euler en 1736, se titula *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición). El problema planteaba lo siguiente: ¿es posible, partiendo de un lugar arbitrario, regresar al lugar de partida cruzando cada puente (los puentes de Königsberg) una sola vez? Euler consigue demostrar que el grafo asociado al esquema de puentes de Königsberg no tiene solución, es decir, no es posible regresar al vértice de partida sin pasar por alguna arista dos veces.

Gracias a la teoría de grafos se pueden resolver diversos problemas, como por ejemplo, la síntesis de circuitos secuenciales, contadores o sistemas de apertura. Se utiliza para diferentes áreas entre las que se destacan dibujo computacional, modelar trayectos como el de una línea de autobús a través de las calles de una ciudad, entre otros. Los grafos pueden ser usados para explicar y aclarar construcciones básicas en teoría de matrices, así como fórmulas, cálculos, ideas y resultados acerca de éstas.

En estos términos, la **teoría combinatoria de matrices** hace referencia al uso de elementos de la teoría de grafos para obtener demostraciones combinatorias de resultados acerca de matrices.

Percy A. MacMahon, matemático inglés, estudió funciones simétricas, particiones y recubrimientos del plano. Fue un apasionado de la combinatoria. Su libro más importante es *Combinatory Analysis* (1915-1916) (Análisis combinatorio).

En el libro *Combinatory Analysis* (1915-1916) MacMahon expuso uno de los resultados mas importantes en la teoría combinatoria algebraica conocido como **Teorema Master de MacMahon** el cual indica que dadas las matrices  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  y  $A = [a_{ij}]$  el coeficiente  $x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$  en el desarrollo de la serie de potencia del  $\det(I_n - AX)^{-1}$  es idéntico al coeficiente de  $x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$  en el desarrollo del producto de  $\prod_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)^{v_i}$ . MacMahon utiliza esto para demostrar inmediatamente varios resultados importantes en

combinatoria algebraica, especialmente en la teoría de los desplazamientos, así como otros tipos de permutaciones.

En este trabajo realizaremos una demostración del Teorema Master de MacMahon haciendo uso de la teoría combinatoria de matrices. Para esto iniciaremos el capítulo 1 presentado las definiciones elementales de la teoría de grafos y digrafos, dos tipos distintos de digrafos y algunos resultados importantes relacionados a esto. Daremos inicio al capítulo 2 con algunos de los teoremas fundamentales de determinante de una matriz, introduciremos la definición del permanente, mostrando su analogía con el determinante. El capítulo 3 representa un capítulo de suma importancia pues en este se realiza la demostración del teorema de Cayley-Hamilton y del Teorema Master de MacMahon, haciendo uso de la teoría antes desarrollada en los anteriores capítulos. Para finalizar, el capítulo 4 introduce algunas aplicaciones con el fin de ilustrar el Teorema Master de MacMahon.

## CAPÍTULO 1

### Grafos y Potencias de Matrices

Este capítulo tiene como fin adentrarnos en la teoría de grafos, iniciando con las definiciones básicas y fundamentales de grafos y digrafos. En el mismo presentaremos dos tipos diferentes de digrafos asociados a una matriz y algunos de los resultados sencillos e importantes de estos.

#### 1. Grafos

Esta sección nos da una introducción a la teoría de grafos a través de definiciones básicas y fundamentales, tales como grafos, bucle, subgrafo, subgrafo generador, grafo ponderado, camino, trayectoria, ciclo, longitud, grado de un vértice, grafo completo y grafo bipartito.

DEFINICIÓN 1.1. Un *grafo* es un par  $(V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto finito de elementos llamados *vértices* y  $A$  un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de  $V$ , llamados *aristas*. El *orden* de un grafo viene dado por el cardinal del conjunto  $V$ .

EJEMPLO 1.2. Sea  $G = (V, A)$  un grafo, donde  $V = \{x, y, z, t, w\}$  y

$$A = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{w, z\}, \{w, x\}, \{x, t\}, \{y, t\}, \{w, t\}, \{z, t\}\}.$$

Entonces el grafo  $G$  viene dado por la siguiente figura.

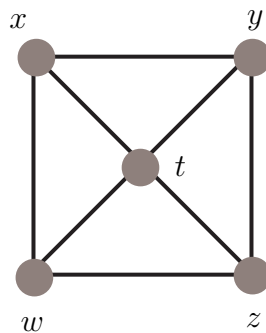


FIGURA 1.1. Grafo  $G$

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $G = (V, A)$  un grafo,  $\alpha \in A$  es un *bucle* si  $\alpha = \{x, x\}$ .



FIGURA 1.2. Representación de un bucle

DEFINICIÓN 1.4. Un *subgrafo* de  $G = (V, A)$  es un grafo  $H = (W, F)$  donde  $W \subseteq V$  y  $F \subseteq A$ .

DEFINICIÓN 1.5. Un *subgrafo generador* de un grafo  $G = (V, A)$ , es un subgrafo de  $G$  de la forma  $(V, E)$  donde  $E \subseteq A$ .

EJEMPLO 1.6. Sea  $G = (V, A)$  el grafo de la figura 1.1. Entonces  $H = (V, E)$  con  $E = \{\{x, t\}, \{y, t\}, \{x, w\}, \{w, z\}, \{y, z\}\}$ , es un subgrafo generador de  $G$ .

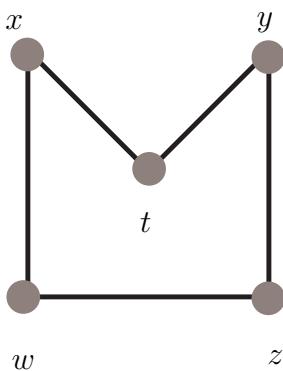


FIGURA 1.3. Un subgrafo generador de la figura 1.1

DEFINICIÓN 1.7. Un *grafo ponderado* es un grafo en el cual a cada arista se le asigna un peso o ponderación.

EJEMPLO 1.8. Sea  $G = (V, A)$  un grafo, tal que  $V = \{x, y, z\}$  y  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  donde  $\alpha = \{x, z\}$ ,  $\beta = \{x, y\}$  y  $\gamma = \{y, z\}$ ,  $G$  es un grafo ponderado.



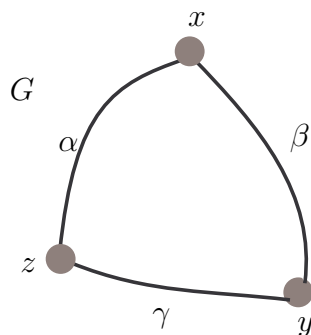
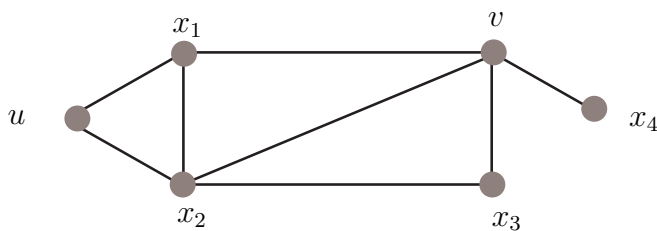
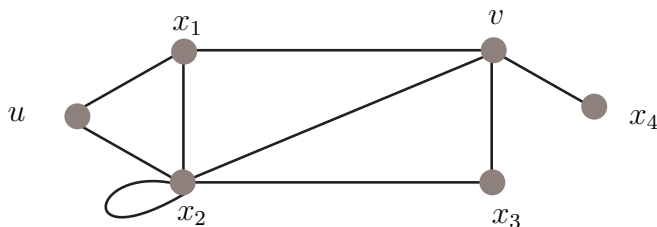


FIGURA 1.4. Grafo ponderado

DEFINICIÓN 1.9. Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Un *camino* que une dos vértices  $u$  y  $v$  en  $G$  es una sucesión  $\gamma$  de vértices  $u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = v$ , tal que,  $\{x_i, x_{i+1}\}$  es una arista para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ .

FIGURA 1.5.  $u, x_1, v$  y  $u, x_2, x_3, v$  son caminos que unen  $u$  y  $v$ .

DEFINICIÓN 1.10. Sea  $G$  un grafo y  $\gamma$  un camino en  $G$ . Si todos los vértices de  $\gamma$  son distintos, decimos que  $\gamma$  es una *trayectoria*.

FIGURA 1.6.  $u, x_1, v$  es una trayectoria pero  $u, x_2, x_2, v$  no lo es.

DEFINICIÓN 1.11. Sea  $G$  un grafo,  $\gamma$  un camino en  $G$  que une vértices  $u$  y  $v$ . Si  $u = v$  decimos que  $\gamma$  es un *camino cerrado* y si todos los vértices entre  $u$  y  $u$  en el camino  $\gamma$  son distintos entonces  $\gamma$  es un *ciclo*. Se asume que un bucle es un ciclo.

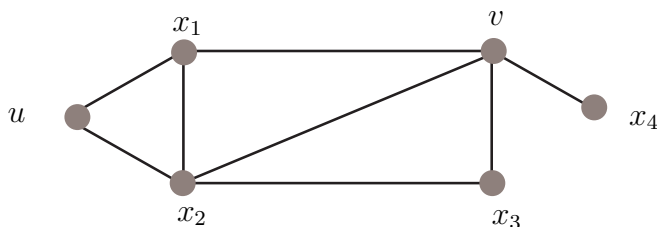


FIGURA 1.7.  $x_1, v, x_2, x_1$  es un ciclo.

DEFINICIÓN 1.12. Sea  $G$  un grafo,  $\gamma$  un camino en  $G$  que une los vértices  $u$  y  $v$ . Llamamos *longitud* de  $\gamma$  al número de aristas de  $\gamma$ .

DEFINICIÓN 1.13. Sea  $G$  un grafo. Llamamos *grado de un vértice*  $u$  de  $G$  al número de aristas que contienen a  $u$ .

DEFINICIÓN 1.14. El *grafo completo de orden  $n$* , denotado  $K_n$ , es un grafo para el que cada par de vértices distintos forman una arista.

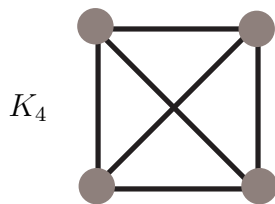


FIGURA 1.8. Grafo Completo de orden 4

DEFINICIÓN 1.15. Un grafo  $G = (V, A)$  es *bipartito* siempre que  $V$  pueda ser particionado en dos conjuntos  $U$  y  $W$  tal que cada arista une un vértice en  $U$  con un vértice en  $W$ . Un grafo bipartito es usualmente dibujado con un conjunto de la bipartición a la izquierda y otro a la derecha, de esta manera las aristas van de izquierda a derecha.

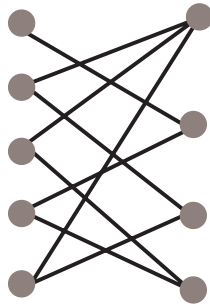


FIGURA 1.9. Grafo bipartito

## 2. Digrafos

A continuación avanzaremos con la teoría de grafos, presentando la definición de digrafo y definiciones análogas a las dadas en la sección anterior.

DEFINICIÓN 1.16. Un *grafo dirigido* (también llamado *digrafo*)  $D$  es un par  $(V, A)$ , donde,  $V$  es un conjunto finito de elementos llamados *vértices* y  $A$  un conjunto formado por pares ordenados de elementos de  $V$ , llamados *aristas*. Si  $\alpha = (x, y)$  es una arista, entonces  $x$  es el *vértice inicial* de  $\alpha$  y  $y$  es el *vértice final* de  $\alpha$ .

EJEMPLO 1.17. Sea  $D = (V, A)$  un digrafo, donde  $V = \{x, y, z, w\}$  y

$$A = \{(x, y), (z, y), (z, w), (x, w)\}.$$

El digrafo  $D$  se puede visualizar a continuación.

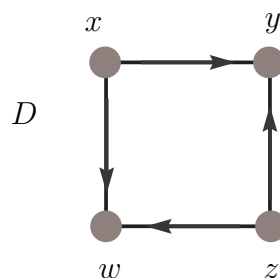


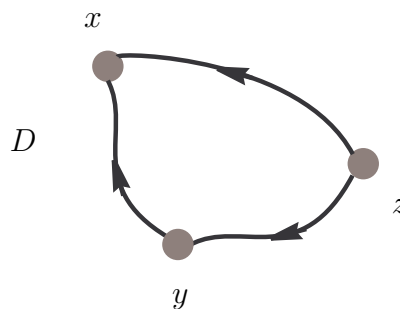
FIGURA 1.10. Digrafo

OBSERVACIÓN 1.18. De manera análoga al estudio de grafos, en la teoría de digrafos se pueden dar las siguientes definiciones: *orden*, *bucle*, *digrafo ponderado*, *subdigrafo*, *subdigrafo generador*, *camino*, *trayectoria*, *ciclo*, entre otros.

DEFINICIÓN 1.19. En un digrafo  $D$  un vértice tiene dos *grados*. El *grado de salida*  $d^+(v)$  de un vértice  $v$ , el cual es el número de aristas de las cuales  $v$  es vértice inicial, y *el grado de entrada*  $d^-(v)$  de  $v$  el número de aristas de las cuales  $v$  es vértice final.

EJEMPLO 1.20. Consideremos el digrafo  $D = (V, A)$ , donde  $V = \{x, y, z\}$  y

$$A = \{(z, x), (z, y), (y, x)\}.$$



Observando los *grados de salida* y los *grados de entrada* de cada uno de los vértices del digrafo  $D$ , tenemos:

$$d^+(x) = 0 \text{ y } d^-(x) = 2,$$

$$d^+(y) = 1 \text{ y } d^-(y) = 1,$$

$$d^+(z) = 2 \text{ y } d^-(z) = 0.$$

### 3. Digrafos de König

En esta sección daremos la representación de una matriz  $A = [a_{ij}]$  y de algunas operaciones básicas de matrices a través de digrafos (digrafos de König). También veremos algunos resultados importantes de estos digrafos.

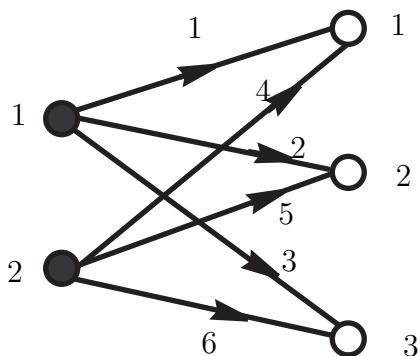
DEFINICIÓN 1.21. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz  $m \times n$ . A esta matriz le podemos asociar un digrafo  $G(A)$  de  $m + n$  vértices coloreados con dos colores (negro o blanco). Hay  $m$  vértices negros, correspondientes uno a uno con las filas de  $A$ , denotados por los números  $1, 2, \dots, m$ . Hay  $n$  vértices blancos correspondientes uno a uno con las columnas de  $A$ , denotados por  $1, 2, \dots, n$ . Dibujamos los vértices negros en una columna y los vértices blancos en otra columna a la derecha, todas las aristas van de izquierda a derecha. Cada aristas sale de un

vértice negro  $i$  y entra a un vértice blanco  $j$  y corresponde a la entrada  $a_{ij}$  de la matriz  $A$  donde  $a_{ij}$  es el peso de la arista (en caso de que la entrada de la matriz sea cero no se coloca arista). El digrafo  $G(A)$  es llamado *Digrafo de König* de una matriz  $A$ . Las aristas del digrafo de König están en correspondencia uno a uno con las posiciones de la matriz  $A$ , con cada peso de las aristas por la entrada de  $A$  en la posición correspondiente. El *tipo* de un digrafo de König es  $m \times n$  si la matriz es de orden  $m \times n$ . Observemos que el digrafo de König es un digrafo bipartito ponderado.

EJEMPLO 1.22. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

el digrafo de König asociado a  $A$  se muestra a continuación.



DEFINICIÓN 1.23. Sean  $G_1$  y  $G_2$  digrafos de König. Las operaciones básicas de matrices también se pueden ver a través de operaciones con estos:

- *Suma de digrafos:* Asumimos que  $G_1$  y  $G_2$  son del mismo tipo. Entonces la suma  $G_1 + G_2$  es un digrafo de König del mismo tipo que  $G_1$  y  $G_2$ , donde el peso de la arista de vértice negro  $i$  al vértice blanco  $j$  es la suma de los pesos de las correspondientes aristas de  $G_1$  a  $G_2$ .
- *Composición de digrafos:* Sea  $G_1$  de tipo  $m \times n$  y  $G_2$  de tipo  $n \times p$ . Entonces el número de vértices blancos de  $G_1$  es igual al número de vértices negros de  $G_2$ . La composición  $G_1 * G_2$  es el digrafo de vértices  $m \times p$  obtenida por identificar cada vértice blanco de  $G_1$  con el consecuente etiquetado vértice negro de  $G_2$ . El digrafo

$G_1 * G_2$  tiene vértices de tres colores: negro (los vértices negros de  $G_1$ ), blancos (los vértices blancos de  $G_2$ ) y grises (los vértices obtenidos por identificar los vértices blancos de  $G_1$  con los vértices negros de  $G_2$ ).  $G_1 * G_2$  tiene vértices de tres colores por lo que no es un digrafo de König.

- *Producto de digrafos:* Sea  $G_1$  de tipo  $m \times n$  y  $G_2$  de tipo  $n \times p$  y considere la composición de digrafo  $G_1 * G_2$ . El digrafo  $G_1 \cdot G_2$  es el digrafo de König  $m \times p$  cuyos vértices negros y blancos son los vértices negros y blancos respectivamente de  $G_1 * G_2$ . Los pesos de las aristas del  $i$ -ésimo vértice negro al  $j$ -ésimo vértice blanco de  $G_1 \cdot G_2$  es igual a la suma de los productos entre los pesos asignados a todas las trayectorias de longitud 2 entre el  $i$ -ésimo vértice negro y el  $j$ -ésimo vértice blanco de  $G_1 * G_2$ .
- *Multiplicación de un escalar por un digrafo:* Sea  $\lambda$  un escalar. Entonces  $\lambda G_1$  (o en algunos casos  $\lambda \cdot G_1$ ) es el digrafo obtenido de  $G_1$  multiplicando cada peso de cada arista por  $\lambda$ .

EJEMPLO 1.24. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

La suma del digrafo de König se muestra a continuación.

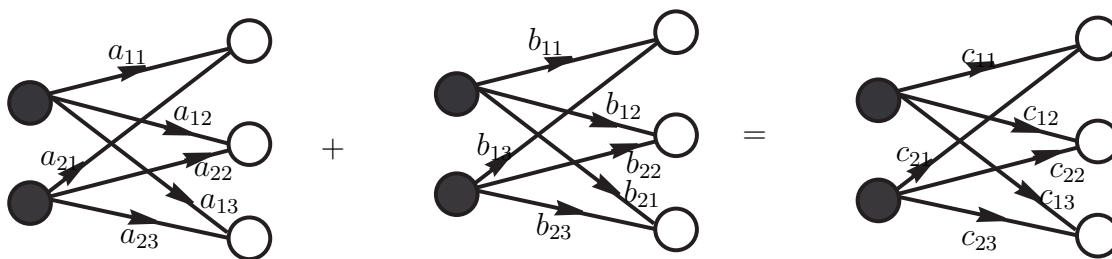


FIGURA 1.11. Suma de Digrafos de König

De manera análoga si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se muestra en la Figura 1.12.

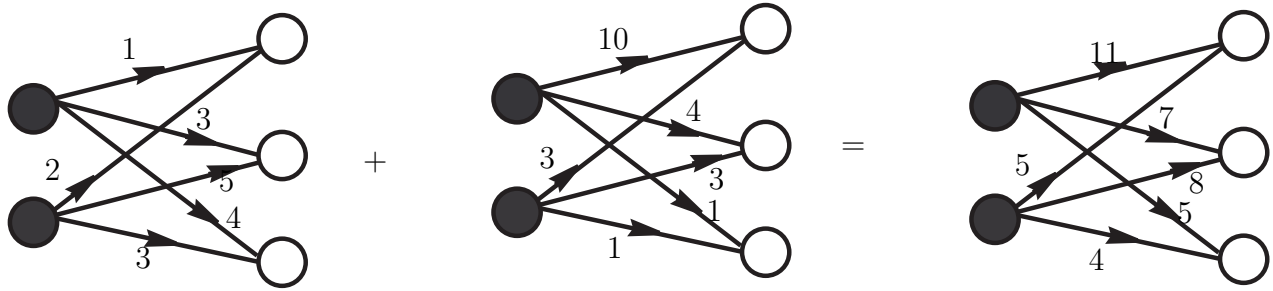


FIGURA 1.12. Suma de Digrafos de König

EJEMPLO 1.25. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

La composición y el producto se muestran a continuación.

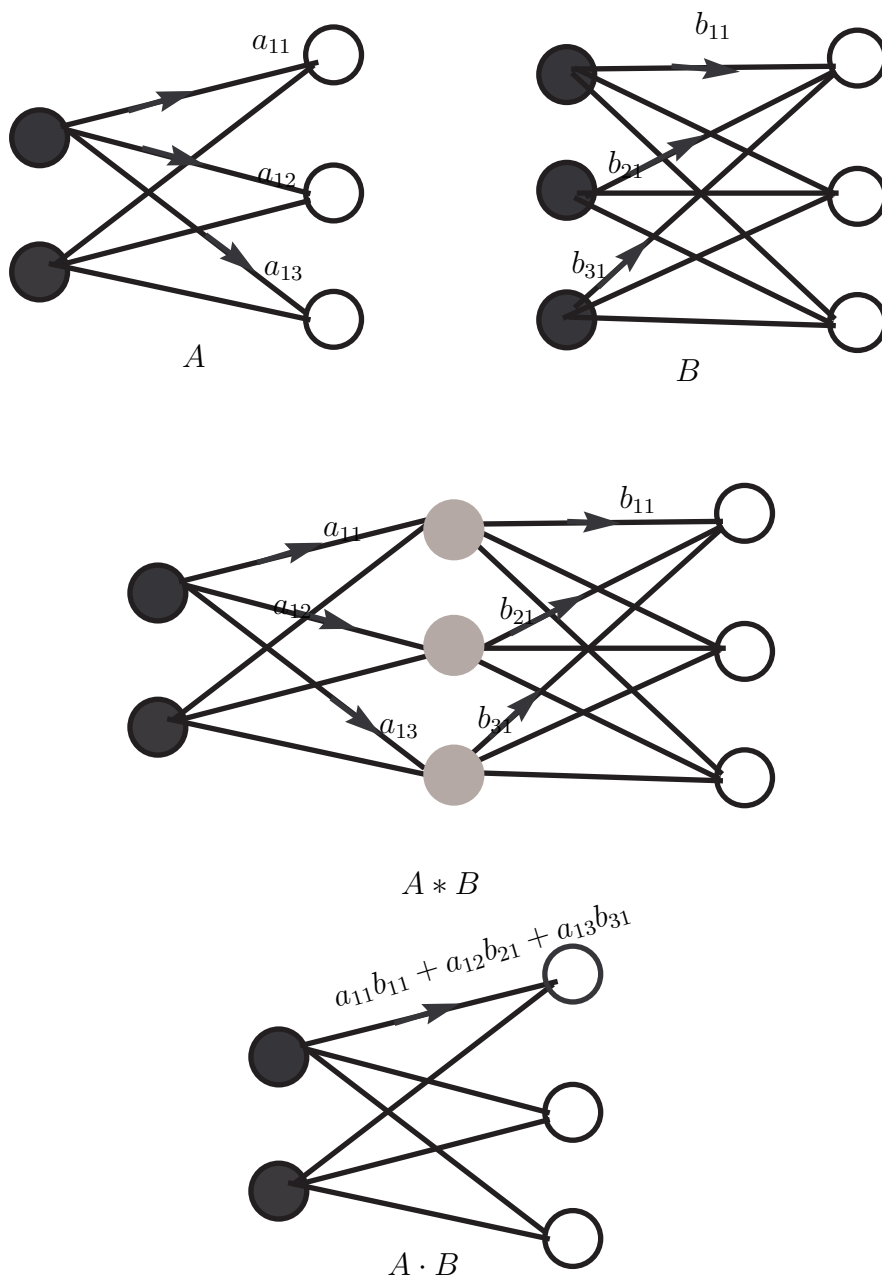


FIGURA 1.13. Composicion y producto de digrafos de König

TEOREMA 1.26. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $m \times n$  y sea  $B = [b_{ij}]$  una matriz de orden  $n \times p$ . Entonces  $G(A \cdot B) = G(A) \cdot G(B)$ .

DEMOSTRACIÓN. En la composición  $G(A) * G(B)$  hay una trayectoria de peso  $a_{ik}b_{kj}$  del  $i$ -ésimo vértice negro al  $j$ -ésimo vértice blanco que pasa a través del  $k$ -ésimo vértice gris para



cada  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto la suma de los pesos de todas las trayectorias de longitud 2 del  $i$ -ésimo vértice negro al  $j$ -ésimo vértice blanco es  $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$  y esto es igual, conforme con la definición del producto de matrices, a la entrada  $(i, j)$  de  $AB$ .  $\square$

EJEMPLO 1.27. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

y  $C = A \cdot B$  (es decir,  $c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rj}$ ). A continuación hallemos los digrafos  $G(A) \cdot G(B)$  y  $G(A \cdot B)$ .

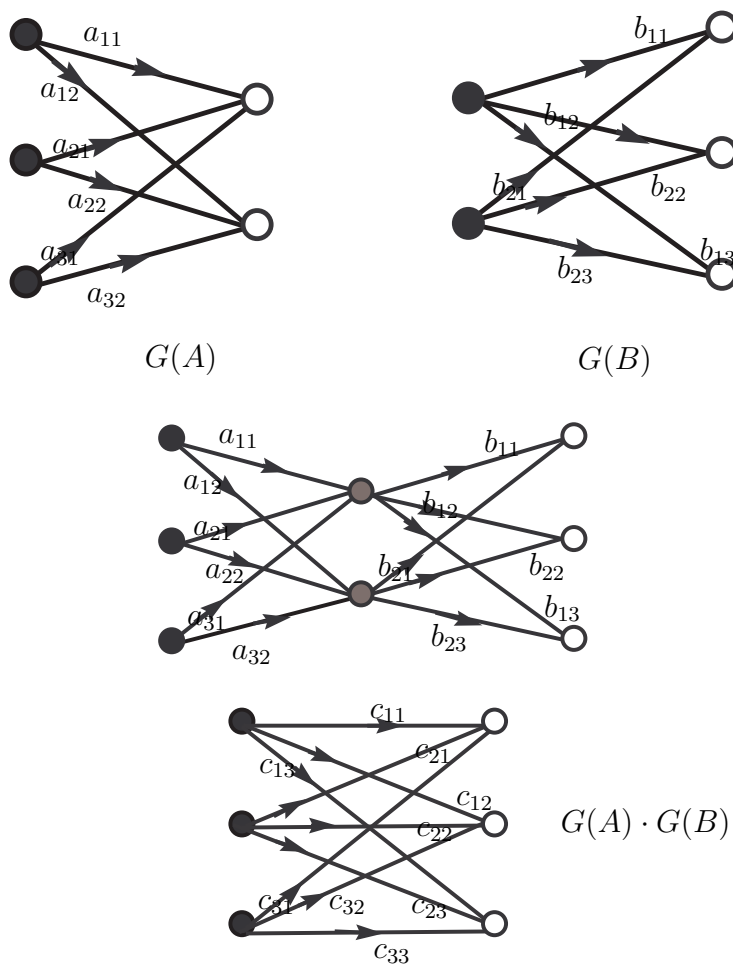
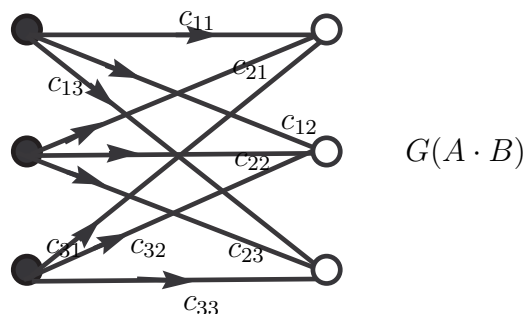


FIGURA 1.14.  $G(A) \cdot G(B)$

FIGURA 1.15.  $G(A \cdot B)$ 

A través de los digrafos claramente se puede observar que  $G(A) \cdot G(B) = G(A \cdot B)$

TEOREMA 1.28. *Las siguientes propiedades se verifican:*

(1) *La composición del digrafo de König es una operación asociativa:*

$$G_1 * (G_2 * G_3) = (G_1 * G_2) * G_3.$$

(2) *El producto del digrafo de König es una operación asociativa:*

$$G_1 \cdot (G_2 \cdot G_3) = (G_1 \cdot G_2) \cdot G_3.$$

*Equivalentemente, para matrices tenemos:*

$$A_1(A_2A_3) = (A_1A_2)A_3.$$

(3) *La multiplicación de grafos es distributiva respecto a la suma:*

$$G_1 \cdot (G_2 + G_3) = G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3 \text{ y}$$

$$(G_1 + G_2) \cdot G_3 = G_1 \cdot G_3 + G_2 \cdot G_3.$$

*Equivalentemente, para matrices tenemos:*

$$A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3 \text{ y}$$

$$(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3.$$

DEMOSTRACIÓN. (1) Sean  $G_1$  de tipo  $m \times n$ ,  $G_2$  de tipo  $n \times p$  y  $G_3$  de tipo  $p \times k$ .

La composición  $G_2 * G_3$  es el digrafo de vértices  $n \times k$  obtenido por identificar cada vértice blanco de  $G_2$  con el consecuente etiquetado vértice negro de  $G_3$ . Luego la composición de  $G_1 * (G_2 * G_3)$  da como resultado el digrafo de vértices  $m \times k$  obtenido por identificar cada vértice blanco de  $G_1$  con el consecuente etiquetado vértice negro de  $(G_2 * G_3)$ . Esto es el digrafo de vértices  $m \times n$  obtenido por identificar cada vértice

blanco de  $G_1$  con su consecuente etiquetado vértice negro de  $G_2$ , a su vez identificado con su consecuente negro de  $G_3$ , es decir  $(G_1 * G_2) * G_3$ .

- (2) Sean  $A_1, A_2, A_3$  tres matrices y  $G_1, G_2, G_3$  los digrafos correspondientes respectivamente, es decir,  $G_i = G(A_i)$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 G_1 \cdot (G_2 \cdot G_3) &= G(A_1) \cdot (G(A_2) \cdot G(A_3)) \text{ Aplicando el Teorema 1.30} \\
 &= G(A_1) \cdot G(A_2 \cdot A_3) \text{ Aplicando nuevamente el Teorema 1.30} \\
 &= G(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) \\
 &= G((A_1 \cdot A_2) \cdot (A_3)) \text{ Aplicando el Teorema 1.30} \\
 &= G(A_1 \cdot A_2) \cdot G(A_3) \text{ Aplicando el Teorema 1.30} \\
 &= (G(A_1) \cdot G(A_2)) \cdot G(A_3).
 \end{aligned}$$

- (3) Sean  $A_1, A_2, A_3$  tres matrices y  $G_1, G_2, G_3$  los digrafos correspondientes respectivamente, es decir,  $G_i = G(A_i)$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 G_1 \cdot (G_2 + G_3) &= G(A_1) \cdot (G(A_2) + G(A_3)) \\
 &= G(A_1) \cdot (G(A_2 + A_3)) \text{ Aplicando el Teorema 1.30} \\
 &= G(A_1 \cdot (A_2 + A_3)) \\
 &= G(A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3) \\
 &= G(A_1 \cdot A_2) + G(A_1 \cdot A_3) \text{ Aplicando nuevamente el Teorema 1.30} \\
 &= G(A_1) \cdot G(A_2) + G(A_1) \cdot G(A_3) \\
 &= G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3.
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.29. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

y  $G_A, G_B, G_C$ , los digrafos correspondientes respectivamente. Hallemos  $(G_A * G_B) * G_C$  y  $G_A * (G_B * G_C)$ .

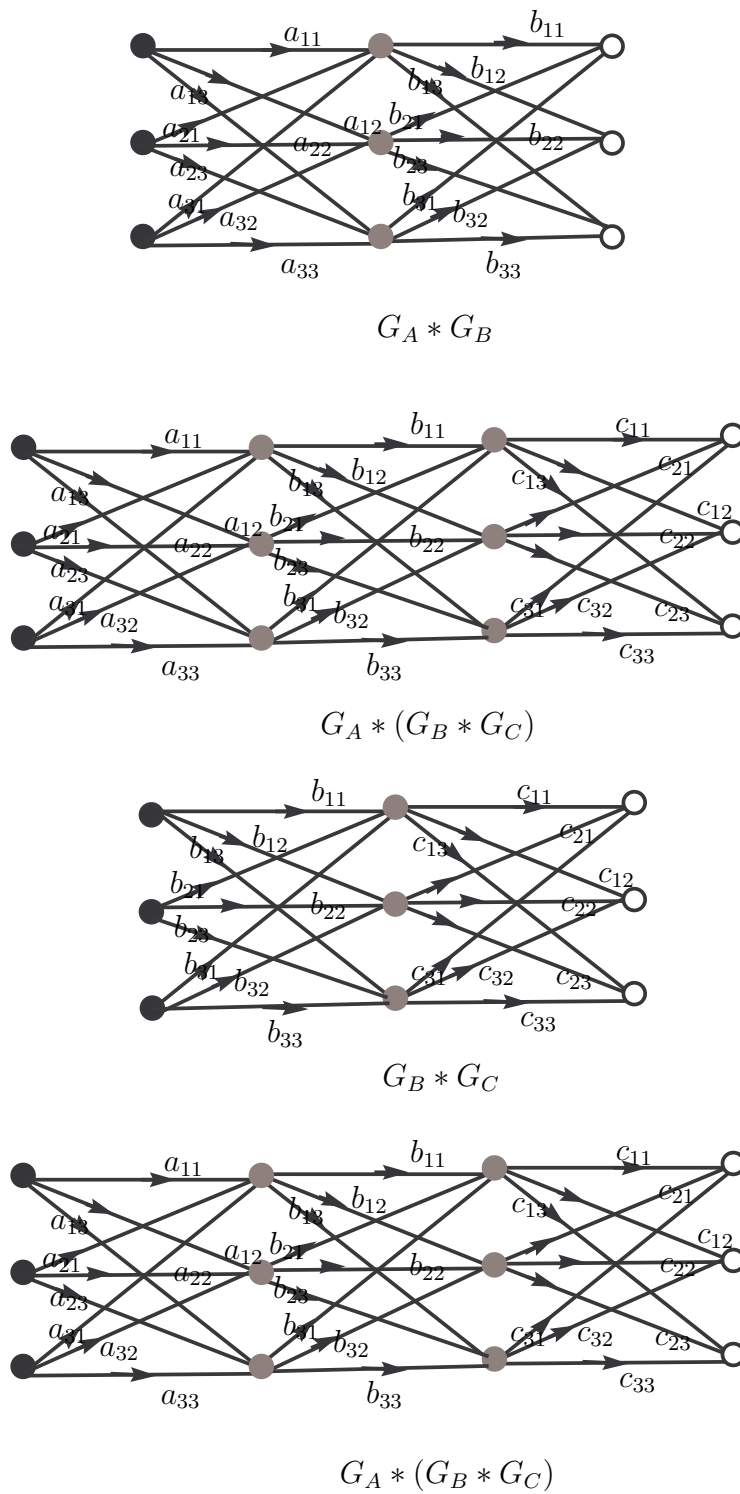
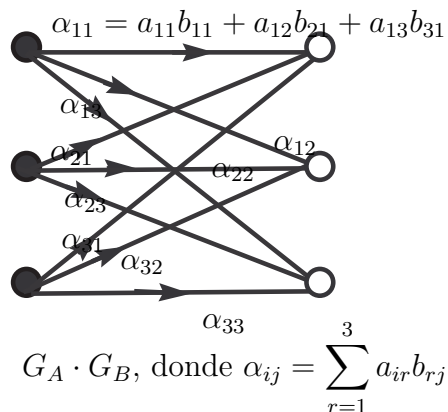
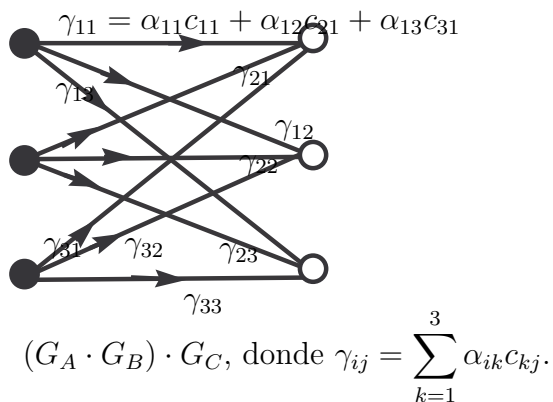


FIGURA 1.16.  $(G_A * G_B) * G_C = G_A * (G_B * G_C)$

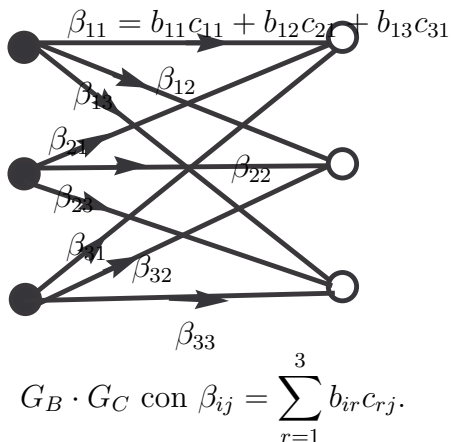
Hallemos a continuación los digrafos  $G_A \cdot (G_B \cdot G_C)$  y  $(G_A \cdot G_B) \cdot G_C$ . De la composición de digrafos anterior, se obtienen fácilmente los productos.



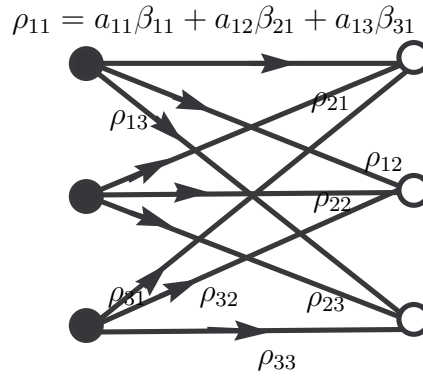
Luego realizamos el producto del digrafo resultante anteriormente con  $G_C$ .



Ahora realizamos el producto de digrafos  $G_B \cdot G_C$ .



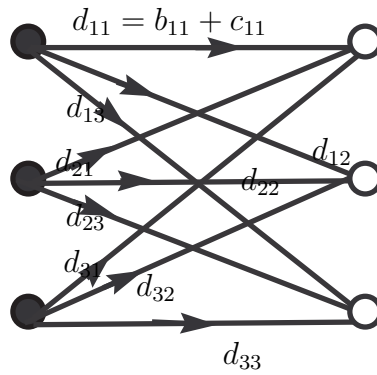
Haciendo  $G_A \cdot (G_B \cdot G_C)$ .



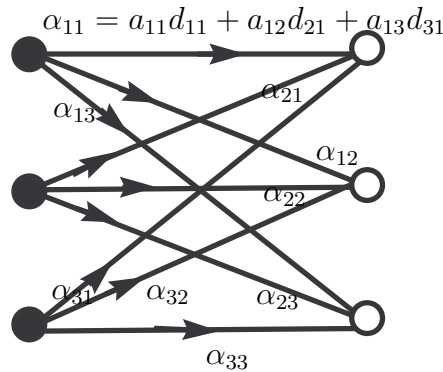
$$G_A \cdot (G_B \cdot G_C) \text{ donde } \rho_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}\beta_{kj}.$$

Notemos que  $\gamma_{ij} = \rho_{ij}$ . Lo que implica que  $(G_A \cdot G_B) \cdot G_C = G_A \cdot (G_B \cdot G_C)$ .

A continuación veamos como son los digrafos  $G_1 \cdot (G_2 + G_3)$  y  $G(A_1) \cdot (G(A_2) + G(A_3))$ .

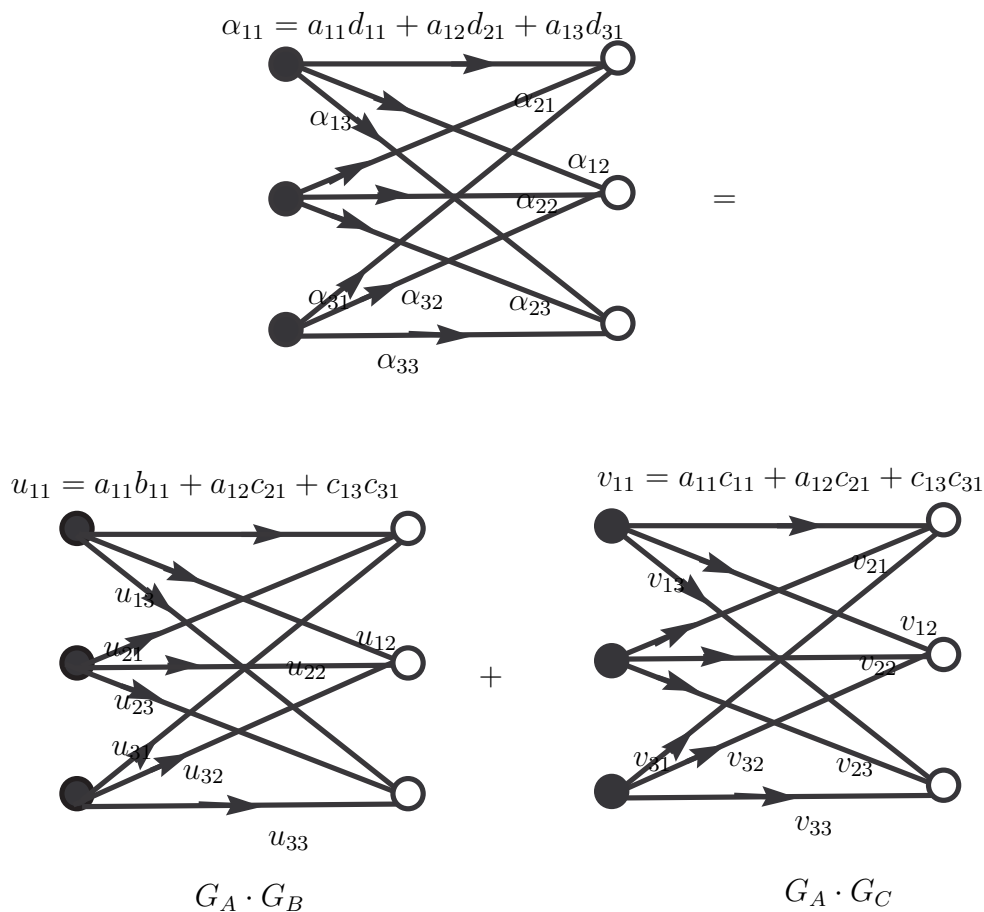


$$G_B + G_C, \text{ con } d_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$



$$G_A \cdot (G_B + G_C), \text{ donde } \alpha_{ij} = \sum_{r=1}^3 a_{ir}d_{rj}$$

Por otra parte, aplicando la definición de suma de digrafo. Claramente podemos ver que



$$G_A \cdot (G_B + G_C) = G_A G_B + G_A G_C.$$

OBSERVACIÓN 1.30. El digrafo de König será de especial interes en el capítulo siguiente.

### 4. Digrafos y Potencia de matrices

A continuación estudiaremos potencias de matrices cuadradas haciendo uso de un digrafo distinto al digrafo de König.

DEFINICIÓN 1.31. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . Asociamos a  $A$  un *digrafo*  $D(A)$  con  $n$  vértices. Los vértices de  $D(A)$  son denotados por  $1, 2, \dots, n$  (a diferencia del digrafo de König los vértices corresponden simultáneamente a las  $n$  filas y  $n$  columnas de la matriz  $A$ ). Hay una arista de vértice  $i$  a vértice  $j$  de peso  $a_{ij}$  para cada  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Así  $D(A)$  tiene un bucle en cada vértice  $i$  de peso  $a_{ii}$ . Como en el digrafo de König, una arista de peso

cero, corresponde a la entrada cero de  $A$  y se puede remover de  $D(A)$  sin ningún efecto en los cálculos.

EJEMPLO 1.32. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

el digrafo de la matriz  $A$  viene dado en la Figura 1.17

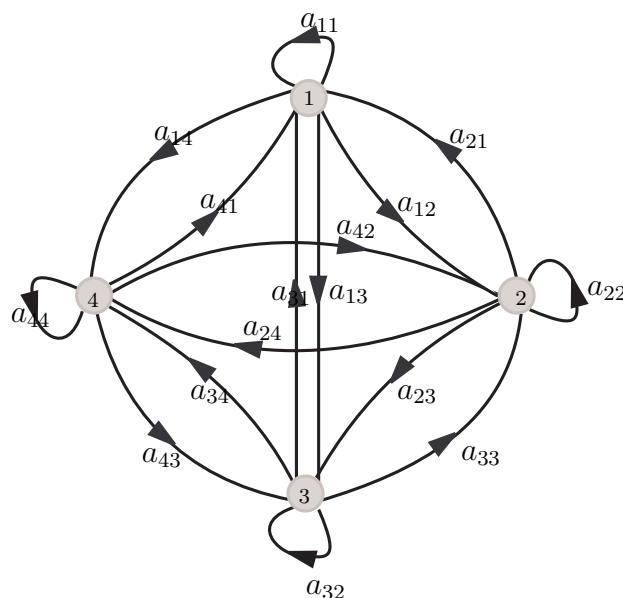


FIGURA 1.17. Digrafo  $D(A)$

OBSERVACIÓN 1.33. Para los digrafos que presentaremos a continuación omitiremos el número asignado a cada vértice, ya que este se puede visualizar en los pesos de las aristas que entran y salen del vértice. El siguiente es un resultado importante y básico desde el punto de vista combinatorio.

TEOREMA 1.34. *Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . Para cada entero positivo  $k$ , la entrada  $a_{ij}^{(k)}$  de  $A^k$  en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna es igual a la suma de los pesos de todos los caminos en  $D(A)$  de longitud  $k$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ .*



DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción sobre  $k$ . Si  $k = 1$ , el teorema es una consecuencia directa de la definición de digrafo  $D(A)$ . Esto es porque para cada  $i$  y  $j$ , hay exactamente un camino de longitud 1 de  $i$  a  $j$  y este tiene peso  $a_{ij}$ . Asumamos que el teorema se mantiene para todo entero  $k$ . Por la definición de potencia de matrices,  $A^{k+1} = A \cdot A^k$ , y por la multiplicación de matrices obtenemos:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{i1}a_{1j}^{(k)} + a_{i2}a_{2j}^{(k)} + \cdots + a_{in}a_{nj}^{(k)} = \sum_{r=1}^n a_{ir}a_{rj}^{(k)}.$$

Por la hipótesis inductiva asumimos, que para cada  $r = 1, 2, \dots, n$ ,  $a_{rj}^{(k)}$  es la suma de los pesos de todos los caminos de longitud  $k$  en  $D(A)$  de vértice  $r$  a vértice  $j$ . Consideremos un camino  $\gamma$  de longitud  $k + 1$  del vértice  $i$  al vértice  $j$ . El camino  $\gamma$  consiste de una arista de  $i$  a  $r$  para algún  $r$  entre 1 y  $n$ , seguido por un camino  $\gamma'$  de longitud  $k$  de  $r$  a  $j$ . El peso de  $\gamma$  es igual a  $a_{ir}$  veces el peso de  $\gamma'$ . Notemos que un camino  $\gamma'$  de longitud  $k$  de  $r$  a  $j$  precedido por la arista de  $i$  a  $r$  da un camino  $\gamma$  de longitud  $k + 1$  de  $i$  a  $j$  cuyas aristas satisfacen la misma regla. Se sigue que  $a_{ir}a_{rj}^{(k)}$  es igual al peso de todos los caminos de longitud  $k$  de  $i$  a  $j$  cuya primera arista es una arista de  $i$  a  $r$ . Por lo tanto  $\sum_{r=1}^n a_{ir}a_{rj}^{(k)}$  es la suma de los pesos de todos los caminos de longitud  $k + 1$  de  $i$  a  $j$ , completando la inducción y probando el teorema.  $\square$

EJEMPLO 1.35. Consideremos el siguiente digrafo.

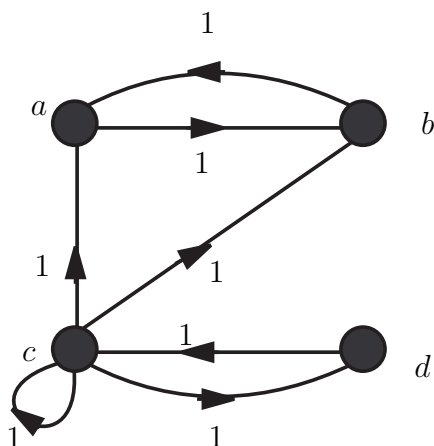


FIGURA 1.18

Observemos que el digrafo representado anteriormente tiene 4 vértices y que para cada par de vértices distintos hay a lo sumo una arista que entra y una arista que sale, lo que implica que este puede ser asociado a una matriz de orden 4. Hagamos corresponder los vértices  $a, b, c, d$  con los índices 1, 2, 3, 4 respectivamente.

Entonces el peso de cada arista que va del vértice  $i$  al vértice  $j$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ) en el digrafo lo podemos asociar a la entrada  $a_{ij}$  de una matriz (por ejemplo la entrada  $a_{11} = 0$  y la entrada  $a_{33} = 1$  porque no hay arista dirigida de  $b$  a  $c$ ). Sea  $A$  la matriz asociada de esta manera al digrafo de la figura 1.18, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya que todas las entradas de la matriz  $A$  son 0's y 1's, si queremos determinar cuántos caminos de longitud 2 hay del vértice  $c$  al vértice  $b$ , lo que tenemos que ver (según el teorema 1.34) es la entrada  $a_{32}^{(2)}$  de la matriz  $A^2$ . Tenemos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la entrada  $a_{32}^{(2)} = 2$ , esto implica que del vértice  $c$  al vértice  $b$  hay dos caminos de longitud 2, de igual forma la entrada  $a_{22}^{(2)} = 0$  implica que no hay caminos de longitud 2 que vayan del vértice  $b$  a si mismo y la entrada  $a_{43}^{(2)} = 1$  implica que hay un solo camino de longitud 2 del vértice  $d$  al vértice  $c$ .

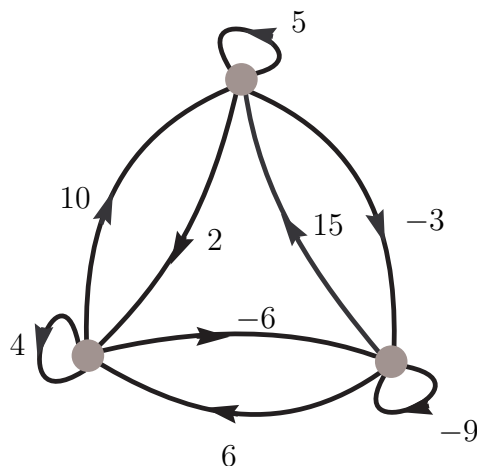
**OBSERVACIÓN 1.36.** A través del Teorema 1.34 podemos ver que las entradas de una matriz  $A = [a_{ij}]^k$  de orden  $n$ , con  $k$  un entero positivo, representan los caminos de longitud  $k$  del vértice  $i$  al vértice  $j$  en el digrafo  $D(A)$ , de igual forma, el teorema establece que en un digrafo  $D(A)$  los caminos de longitud  $k$  entre un vértice  $i$  y un vértice  $j$  representa la entrada  $a_{ij}^k$  de la matriz  $A^k$

**DEFINICIÓN 1.37.** Una matriz cuadrada es *nilpotente* siempre que exista un entero positivo  $k$  tal que  $A^k = [O]_{ij}$ , donde  $[O]_{ij}$  es la matriz nula. Note que esto se desprende de la definición de inducción de potencia de matrices, si  $A^k = O$ , entonces  $A^r = O$  para todo  $r \geq k$ .

**EJEMPLO 1.38.** Sea

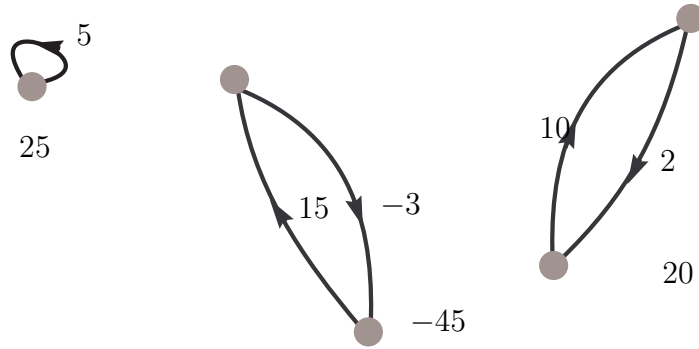
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Consideremos  $k = 2$  y hallemos  $A^k$ .



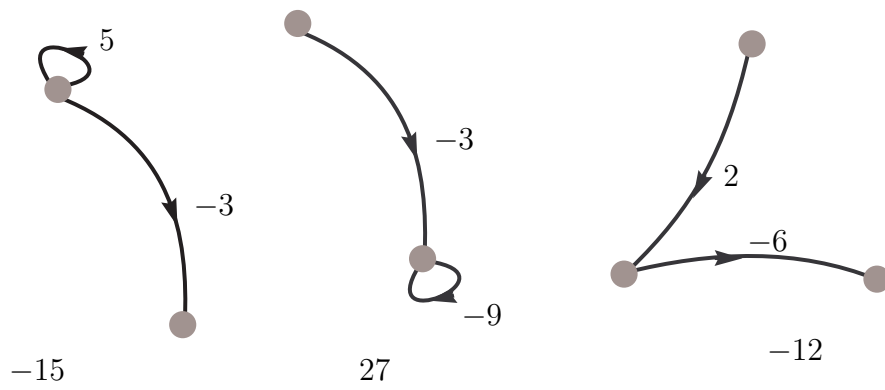
Hallamos las entradas de la matriz  $A^2$ .

Entrada  $a_{11}^{(2)}$ .



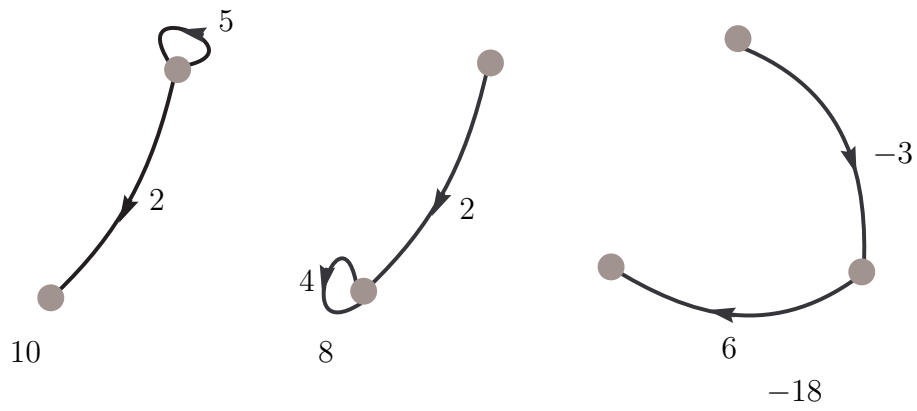
$$a_{11}^{(2)} = 25 - 45 + 20 = 0$$

Entrada  $a_{12}^{(2)}$ .



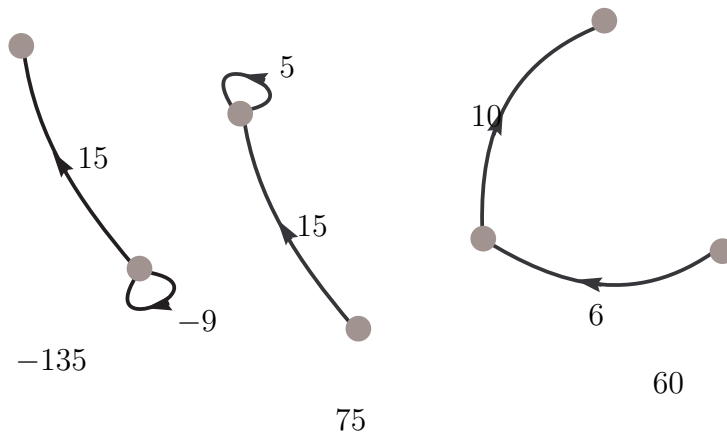
$$a_{12}^{(2)} = -15 + 27 - 12 = 0$$

Entrada  $a_{13}^{(2)}$ .



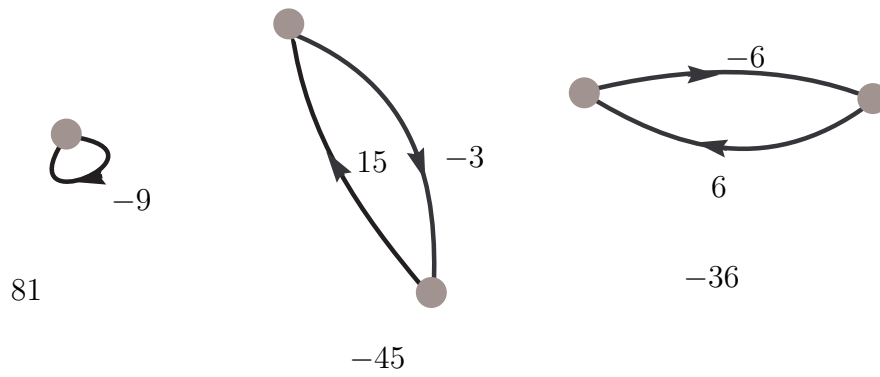
$$a_{13}^{(2)} = 10 + 8 - 18 = 0$$

Entrada  $a_{21}^{(2)}$ .



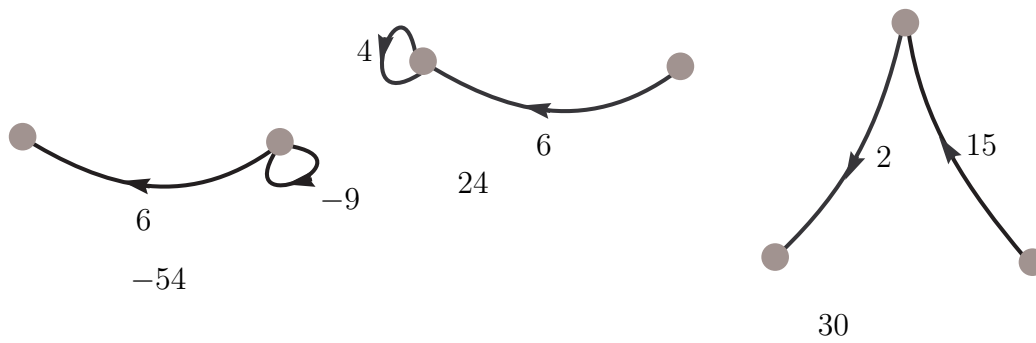
$$a_{21}^{(2)} = -135 + 75 + 60 = 0$$

Entrada  $\alpha_{22}^{(2)}$ .



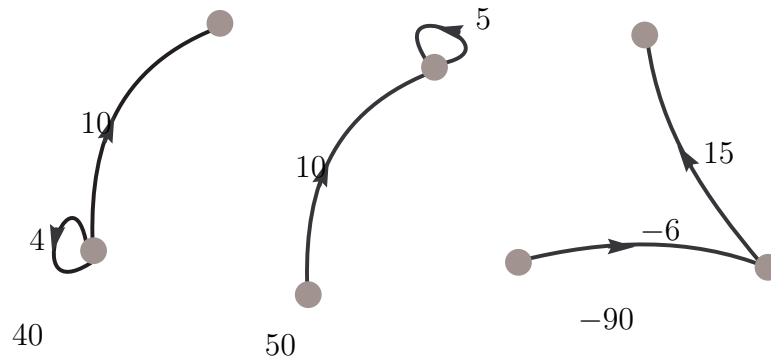
$$a_{22}^{(2)} = 81 - 45 - 36 = 0$$

Entrada  $\alpha_{23}^{(2)}$ .



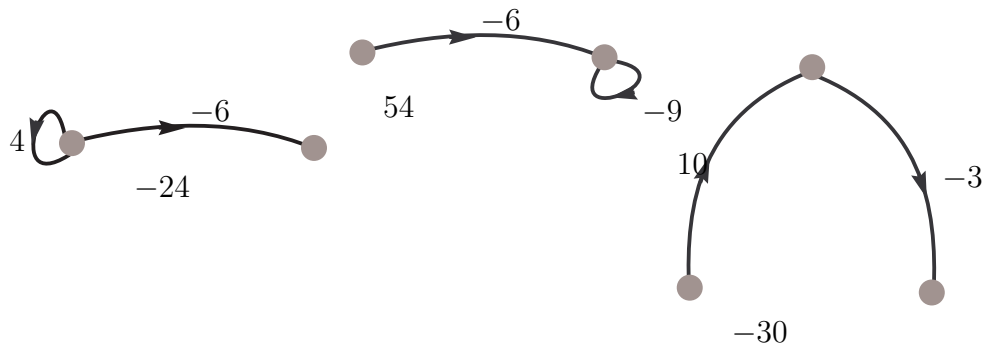
$$a_{23}^{(2)} = -54 + 24 + 30 = 0$$

Entrada  $\alpha_{31}^{(2)}$ .



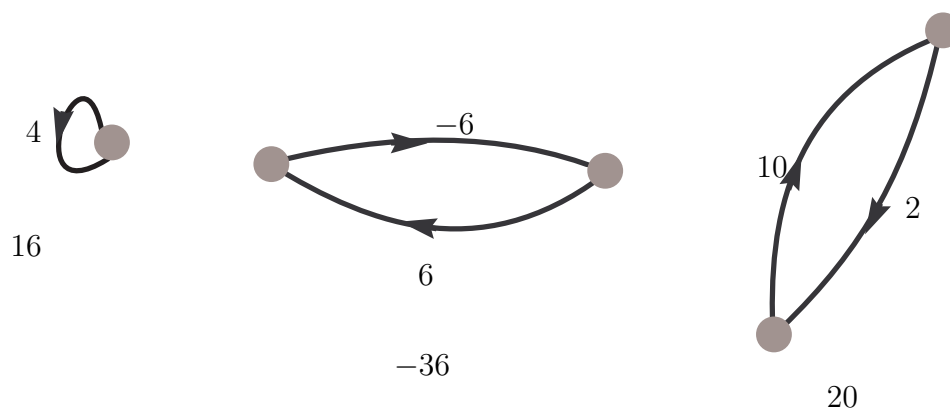
$$a_{31}^{(2)} = 40 + 50 - 90 = 0$$

Entrada  $a_{32}^{(2)}$ .



$$a_{32}^{(2)} = -24 + 54 - 30 = 0$$

Entrada  $\alpha_{33}^{(2)}$ .



$$a_{33}^{(2)} = 16 - 36 + 20 = 0$$

Entonces la matriz

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**TEOREMA 1.39.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces  $A$  es nilpotente si el digrafo correspondiente  $D(A)$  no tiene ningún ciclo; en este caso  $A^n = 0$ . Una matriz cuadrada no negativa  $A$  (sin entradas negativas), es una matriz nilpotente si y solo si el correspondiente digrafo  $D(A)$  no tiene ningún ciclo.*

**DEMOSTRACIÓN.** Aplicando el teorema 1.34, vemos que  $A$  es una matriz nilpotente si y solo si existe un entero positivo  $k$  tal que el digrafo  $D(A)$  no contiene caminos de pesos distintos de 0, de longitud  $r$ , para todo  $r \geq k$ . Si  $D(A)$  no tiene ciclos, entonces no puede haber un camino de longitud  $n$  o mayor, ya que tal camino puede repetir un vértice y así crear un ciclo. Por lo tanto  $A$  es nilpotente y  $A^n = 0$  si  $D(A)$  no tiene ciclos. Ahora supongamos que  $A$  es una matriz no negativa y que  $A$  es nilpotente. Si  $D(A)$  contiene ciclos, entonces  $D(A)$  tiene caminos de longitud arbitraria de pesos positivos, contradiciendo la suposición de que  $A$  es nilpotente.  $\square$

**OBSERVACIÓN 1.40.** Si una matriz  $A$  de orden  $n$  es nilpotente,  $A^r = 0$  para todo  $r \geq n+1$ . Esto es porque en el digrafo  $D(A)$  de  $n$  vértices, si hay un camino cerrado, entonces hay un ciclo de longitud a lo sumo  $n$ .



### 5. Permutaciones con restricción

Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un conjunto de  $n$  elementos. Una  $k$ -permutación con repetición de  $X$  es un arreglo ordenado de  $k$  elementos de  $X$  que permite elementos repetidos, es decir, una  $k$ -tupla  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ , donde  $1 \leq i_j \leq n$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Cuando formamos permutaciones, podemos imponer ciertas restricciones. Consideraremos las restricciones de un tipo muy especial. Asumimos que para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , el conjunto  $X$  es particionado en dos conjuntos,  $X_i^1$  y  $X_i^2$ . Así

$$X = X_i^1 \cup X_i^2, \text{ donde } X_i^1 \cap X_i^2 = \emptyset, (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ahora requerimos que el elemento  $x_i$ , donde este ocurra en la permutación, sea seguido, si este no es el último elemento en la permutación, por un solo elemento de  $X_i^1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Así un par  $x_i, x_j$  de elementos adyacentes en una permutación es un *par permitido* siempre que  $x_j \in X_i^1$ . Definimos una matriz  $A = [a_{ij}]$  de orden  $n$ , donde  $a_{ij} = 1$  si  $x_i, x_j$  es un par permitido y  $a_{ij} = 0$  en otro caso.

EJEMPLO 1.41. Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ .

$$X = X_1 \cup X_2, \text{ donde } X_1 \cap X_2 = \emptyset, X_1 = \{x_1, x_2\} \text{ y } X_2 = \{x_3\}.$$

Luego sea  $A$  la matriz de orden 3 obtenida por los pares permitidos  $x_i x_j$  de  $X_1$ , entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinamos el número  $p_{n,k}(A)$  de  $k$ -permutaciones con repetición de  $X$  si una matriz  $A$  de pares permitidos es dada. Ya que  $A$  es una matriz de 0's y 1's, todas las aristas, y por lo tanto todos los caminos, del digrafo  $D(A)$  tienen peso 1. Así la suma de los pesos de los caminos de longitud  $k$  de vértice  $i$  a vértice  $j$  en  $D(A)$  es igual al número de tales caminos. Por teorema 1.34, el número de caminos de una longitud  $k$  de vértice  $i$  a vértice  $j$  es igual al elemento  $a_{ij}^{(k)}$  en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna en la matriz  $A^k$ .

Denotamos la suma de todos los elementos de una matriz  $Y$  por  $\sum(Y)$ . Así tenemos la fórmula

$$p_{n,k}(A) = \sum(A^{k-1}), (k \geq 1).$$

EJEMPLO 1.42. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

entonces el número de dos permutaciones-con-repetición de  $X$  es el siguiente

$$\begin{aligned} p_{3,2}(A) &= \sum (A^1) \\ &= 5. \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 2

### Determinante y Permanente

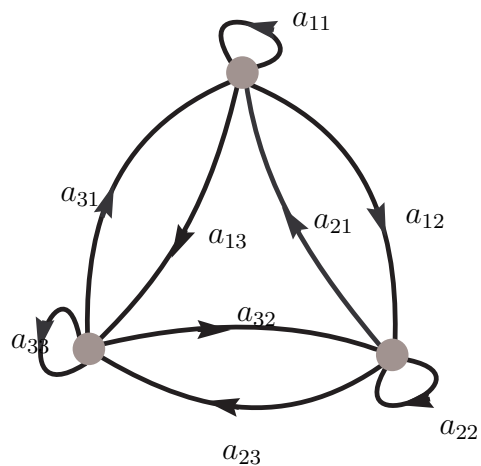
En el presente capítulo definiremos el digrafo de Coates de una matriz, el cual sera usado para dar una definición del determinante de matriz cuadrada. Basándonos en la definición dada derivaremos las propiedades básicas del determinante. También derivaremos la fórmula para el determinante que se utiliza en su definición clásica, estableceremos la equivalencia entre las dos definiciones, definiremos el permanente de una matriz y mostraremos un resultado importante asociado.

#### 1. Propiedades del Determinante

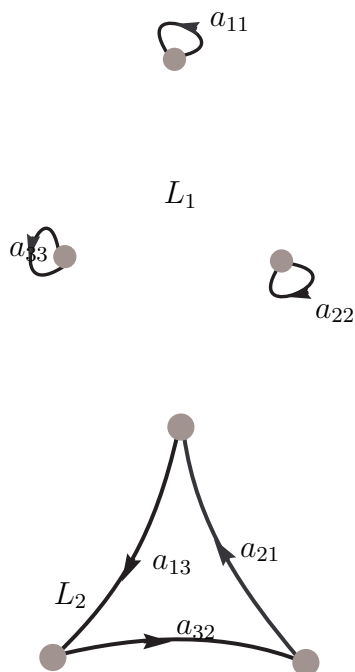
En la presente sección trabajaremos con una definición del determinante no clásica, haciendo uso de la teoría de digrafos. Para esto introduciremos la definición de subdigrafo lineal y digrafo de Coates y presentaremos los resultados mas importantes relacionados al determinante haciendo el uso de la teoría de grafos.

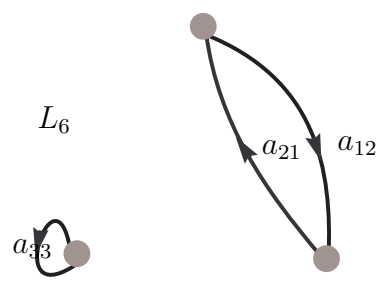
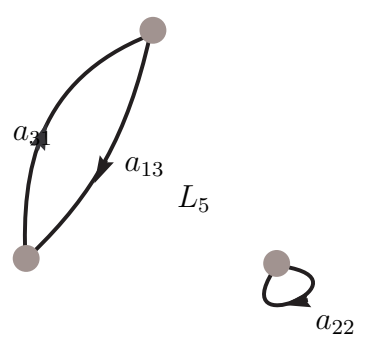
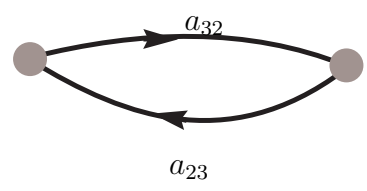
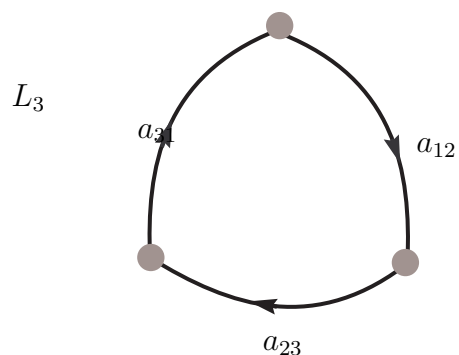
DEFINICIÓN 2.1. Sea  $D = (V, E)$  un digrafo. Un *subdigrafo lineal*  $L$  de  $D$  es un subdigrafo generador de  $D$  en el cual cada vértice tiene un grado de entrada igual a 1 y un grado de salida igual a 1. (Es decir exactamente una arista entra a cada vértice y exactamente una (posiblemente la misma) sale de cada vértice). Así un subdigrafo lineal consiste en una colección expandida de pares ordenados de vértices de ciclos disjuntos.

EJEMPLO 2.2. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 3, y  $D(A)$  el digrafo asociado a  $A$ .



Los subdigrafos lineales de  $D(A)$  son los siguientes:





DEFINICIÓN 2.3. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . A esta le podemos asociar el siguiente digrafo ponderado  $D^*(A)$  el cual no es mas que  $D(A^T)$  asociado a la matriz traspuesta

$A^T$  de  $A$ . Así  $D^*(A)$  tiene  $n$  vértices  $1, 2, \dots, n$  y para cada  $i, j$  existe una arista de vértice  $j$  a vértice  $i$  de peso  $a_{ij}$ . Los elementos de la diagonal principal de  $A$  corresponden en  $D^*(A)$  a los bucles en  $D^*(A)$  y son los mismos que  $D(A)$ . El digrafo  $D^*(A)$  es llamado *digrafo de Coates* de la matriz  $A$ .

EJEMPLO 2.4. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 3. El digrafo de Coates de  $A$  es el siguiente

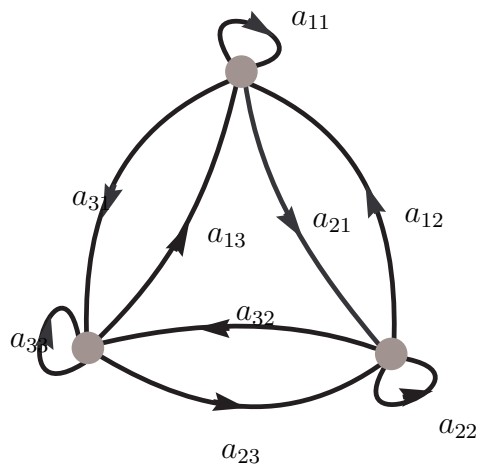


FIGURA 2.1. Digrafo de Coates  $D^*(A)$

DEFINICIÓN 2.5. Sea  $L$  un subdigrafo lineal del digrafo  $D^*(A)$ . El *producto de los pesos* de las aristas de  $L$  se denota por  $w(L)$ . El *número de ciclos* contenido en  $L$  es denotado por  $c(L)$ . Por  $\mathcal{L}(A)$  conocemos el conjunto de todos los *subdigrafos lineales* del digrafo de Coates  $D^*(A)$ .

DEFINICIÓN 2.6. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . El determinante de  $A$  ( $\det A$ ) viene dado por

$$(2.1) \quad \det A = (-1)^n \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} (-1)^{c(L)} w(L).$$

Donde la suma se extiende sobre todos los subdigrafos lineales  $L$  del digrafo  $D^*(A)$ . Ya que  $(-1)^{n+c(L)} = (-1)^{n-c(L)}$ , otra forma de escribir (2.1) es

$$(2.2) \quad \det(A) = \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} (-1)^{n-c(L)} w(L).$$

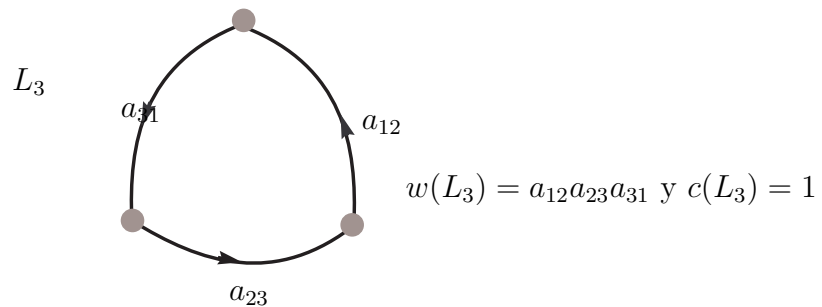
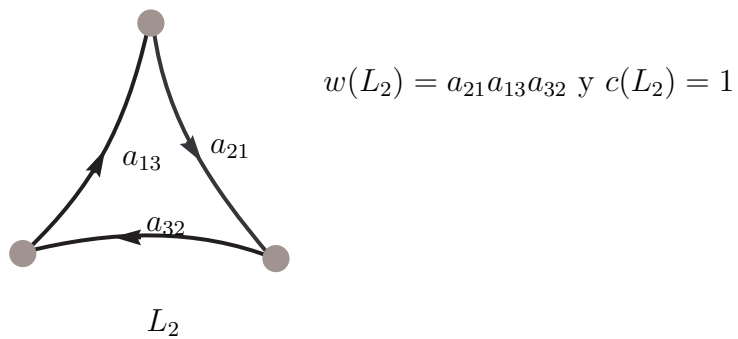
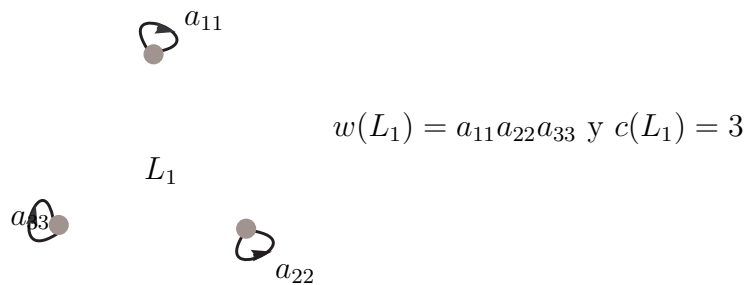
La fórmula dada en (2.1) es conocida como la *fórmula de Coates*

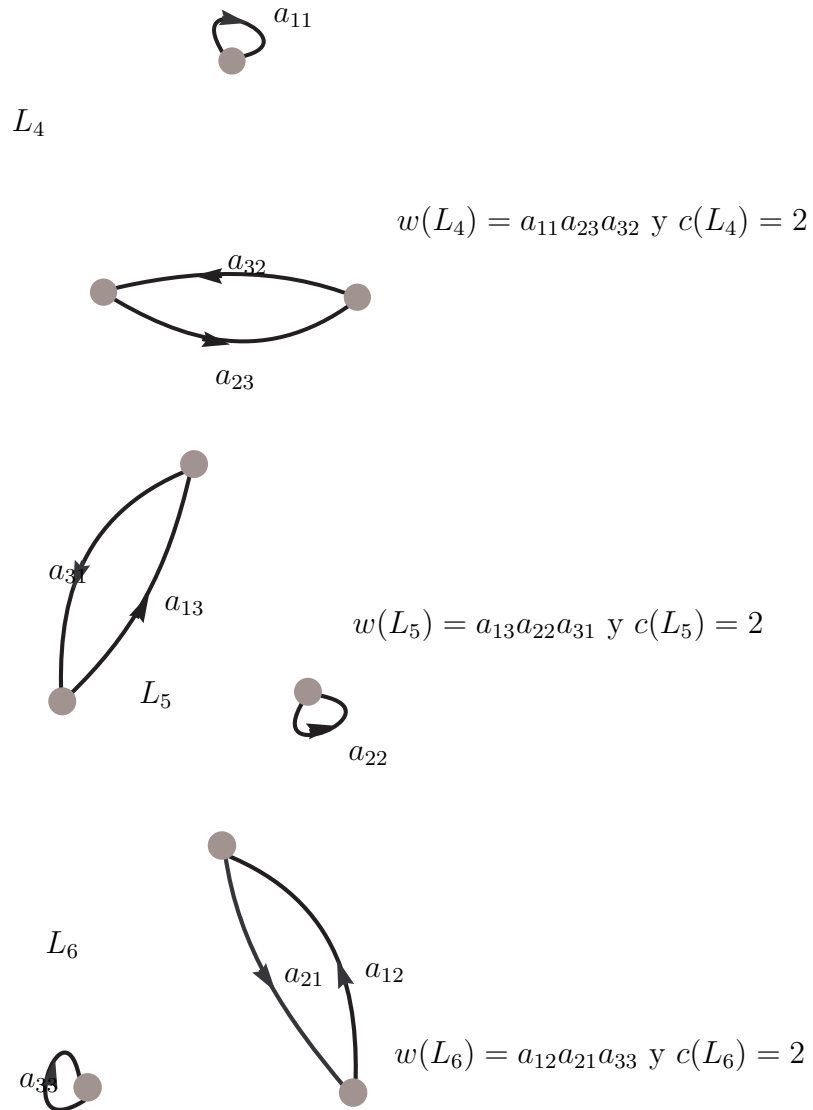
EJEMPLO 2.7. Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Hallemos el determinante de la matriz  $A$ .

Los subdigrafos lineales del digrafo de Coates de  $A$ , junto con el producto de sus pesos y el número de ciclos son los siguientes





Luego, aplicando la definición 2.33:

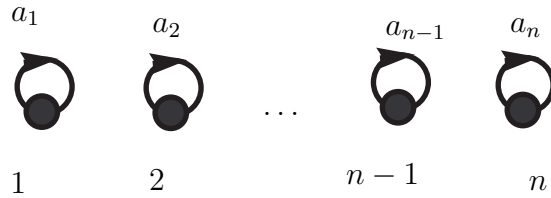
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

EJEMPLO 2.8. Calculemos el determinante de una matriz cuyos únicos elementos distintos de 0 se encuentran en la diagonal. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$



Es claro que  $D^*(A)$  tiene un solo subdigrafo lineal y es él mismo.



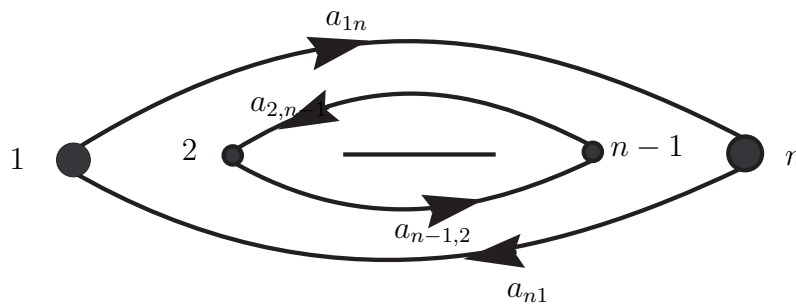
Por lo tanto obtenemos:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^n (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n \\ &= a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

Ahora, calculemos el determinante de la matriz cuyos únicos elementos distintos de cero son  $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ . Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$D^*(A)$  tiene un solo subdigrafo lineal, el cual es el mismo digrafo  $D^*(A)$ .



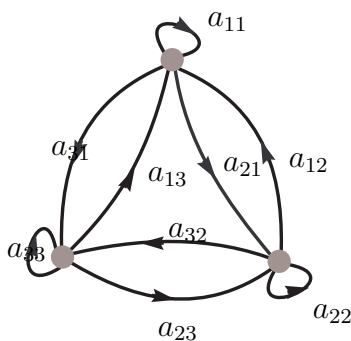
Este subdigrafo lineal tiene  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  ciclos (cuando  $n$  es impar uno es un bucle y los otros son ciclos de longitud dos). Así obtenemos

$$\det A = (-1)^{n - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

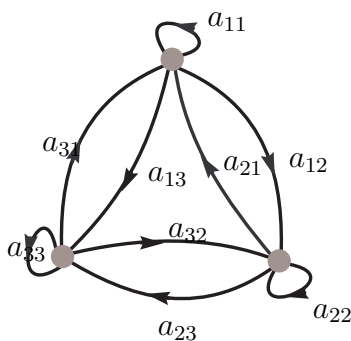
TEOREMA 2.9.  $\det(A^T) = \det(A)$

DEMOSTRACIÓN. El digrafo  $D^*(A^T)$  es obtenido del digrafo  $D^*(A)$  por el cambio de orientación de todas las aristas pero no cambian sus pesos. Por lo tanto, hay una correspondencia uno a uno entre los subdigrafos lineales  $\mathcal{L}(A)$  y  $\mathcal{L}(A^T)$ . Bajo esta correspondencia los pesos y los números de ciclos se preservan. Por lo tanto se sigue de la definición de determinante dada anteriormente que  $\det A = \det A^T$   $\square$

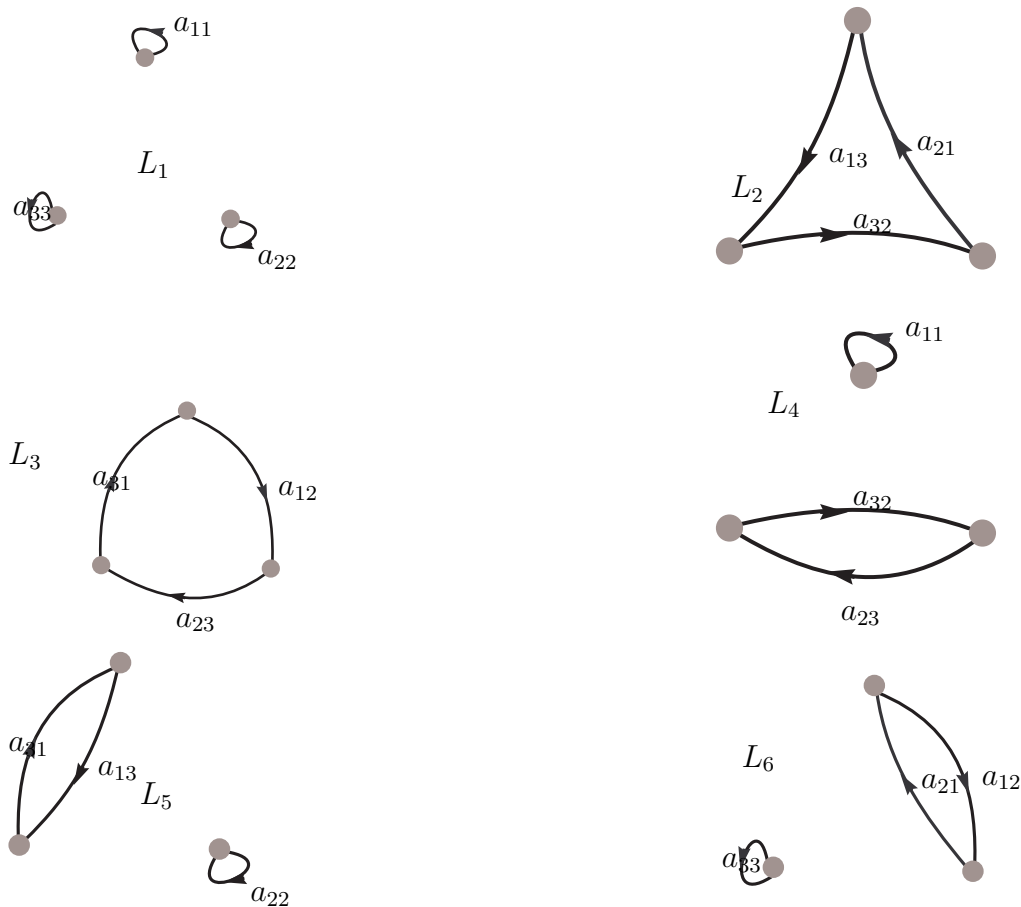
EJEMPLO 2.10. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 3. Su traspuesta,  $A^T = [a_{ji}]$ , viene dada por el siguiente digrafo



Notemos entonces que su digrafo de Coates viene dado por



Luego hallando los subdigrafos lineales tenemos



De donde:

$$w(L_1) = a_{11}a_{22}a_{33}, c(L_1) = 3,$$

$$w(L_2) = a_{21}a_{13}a_{32}, c(L_2) = 1,$$

$$w(L_3) = a_{12}a_{23}a_{31}, c(L_3) = 1,$$

$$w(L_4) = a_{11}a_{23}a_{32}, c(L_4) = 2,$$

$$w(L_5) = a_{31}a_{13}a_{22}, c(L_5) = 2,$$

$$w(L_6) = a_{12}a_{21}a_{22}, c(L_6) = 2.$$

Lo que implica que

$$\det(A^T) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{31}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{22}.$$

Observemos que este es el determinante de la matriz  $A$ . Es decir,  $\det A^T = \det A$ .

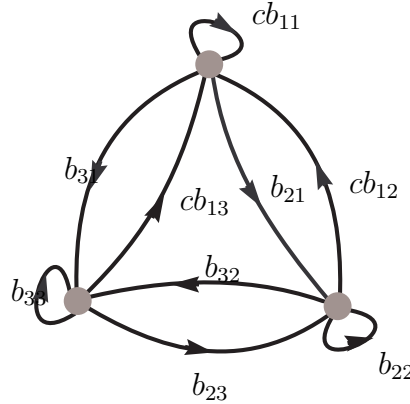
**TEOREMA 2.11.** *Si cada elemento de la misma fila de una matriz es multiplicada por  $c$ , entonces el determinante es también multiplicado por  $c$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ ,  $B$  la matriz obtenida multiplicando la fila  $i$  de  $A$  por  $c$ . Entonces  $D^*(A)$  y  $D^*(B)$  difieren solo en que el peso de cada arista que entra en  $i$  es multiplicada por  $c$  en  $B$ . Cada subdigrafo lineal contiene exactamente una arista entrando al vértice  $i$ . Por lo tanto el peso en cada uno de los subdigrafos lineales en  $\mathcal{L}(B)$  es  $c$  el peso del subdigrafo lineal correspondiente en  $\mathcal{L}(A)$ . Usando la definición de determinante vemos que  $\det B = c \det A$   $\square$

EJEMPLO 2.12. Consideremos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} cb_{11} & cb_{12} & cb_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

$D$  es la matriz obtenida al multiplicar por un escalar  $c$  la primera fila de  $B$ . Tenemos que el digrafo de  $B$  es el siguiente:



Del ejemplo 2.7 obtuvimos que:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Luego sustituyendo los valores de la matriz  $B$ .

$$\begin{aligned} \det D &= cb_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}cb_{13}b_{32} + cb_{12}b_{23}b_{31} - cb_{11}b_{23}b_{32} - cb_{13}b_{22}b_{31} - cb_{12}b_{21}b_{33} \\ &= c(b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{13}b_{32} + b_{12}b_{23}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33}) \\ &= c \det B. \end{aligned}$$

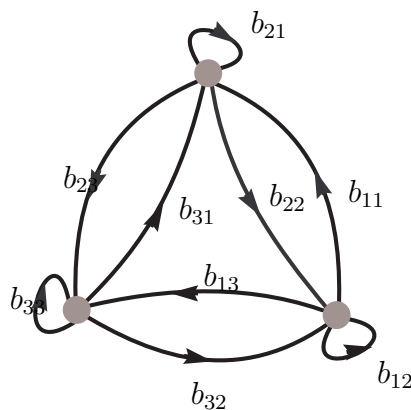
TEOREMA 2.13. *Si dos filas en una matriz  $A$  son intercambiadas, el determinante es multiplicado por  $-1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ ,  $B$  la matriz obtenida de  $A$  intercambiando las filas  $i$  y  $j$ . Entonces  $D^*(B)$  es obtenida de  $D^*(A)$  por intercambiar el peso de la arista que va del vértice  $i$  al vértice  $k$  con el peso de la arista que va del vértice  $i$  al vértice  $k$ . Esto establece una correspondencia uno a uno entre los subdigrafos lineales  $L$  en  $\mathcal{L}(A)$  y los subdigrafos lineales  $L'$  en  $\mathcal{L}(B)$  en la que el número de ciclos es incrementado por 1 si el vértice  $i$  y  $j$  pertenecen al mismo ciclo en  $L$ , y decrece por 1 si ellos pertenecen a un ciclo diferente. Así  $(-1)^{c(L')} = -1(-1)^{c(L)}$ .  $\square$

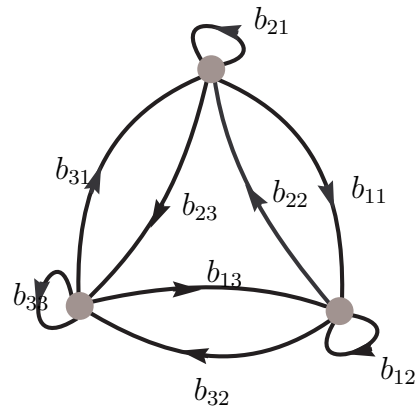
EJEMPLO 2.14. Sea

$$C = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

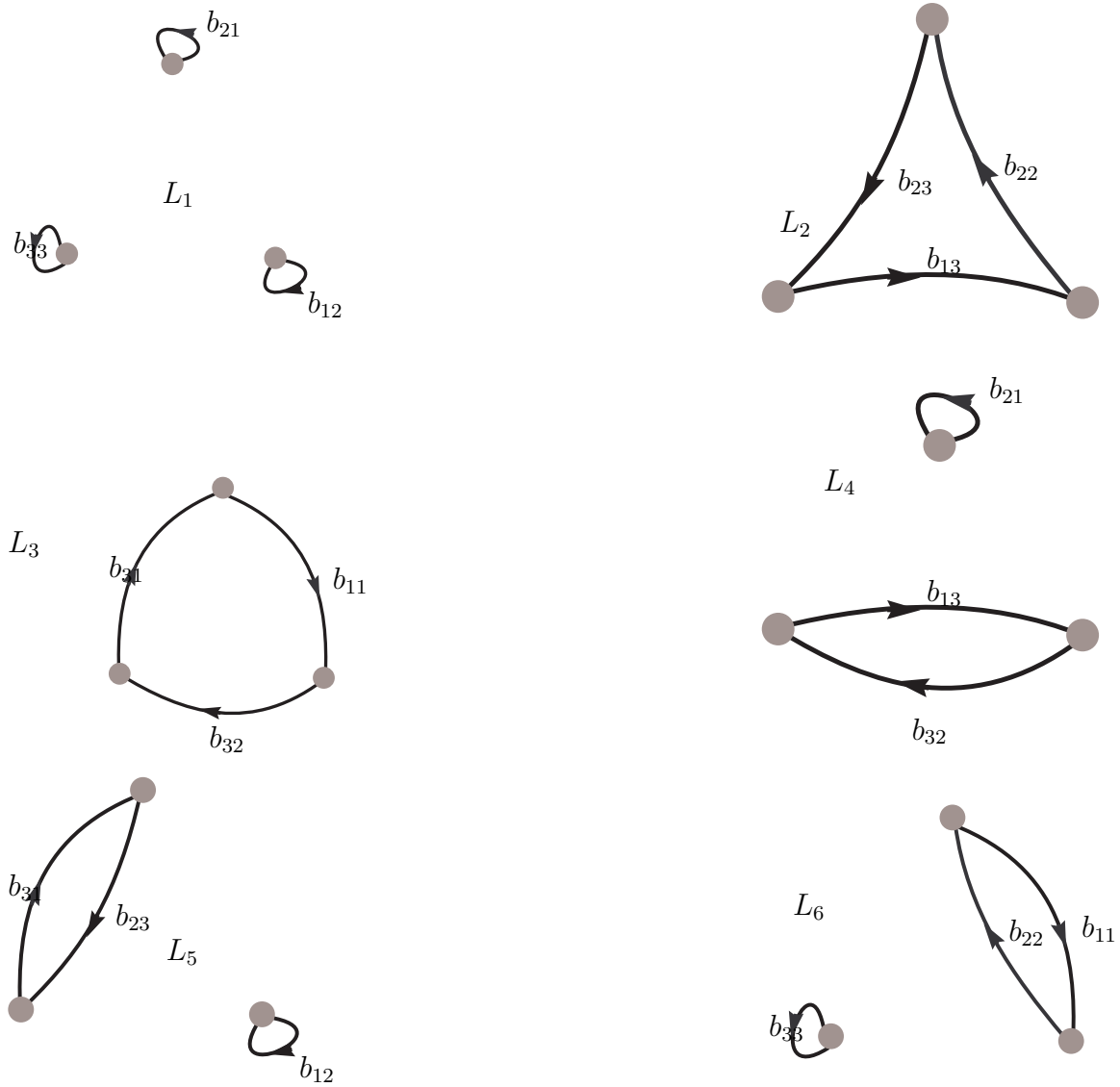
la matriz generada al intercambiar las filas 1 y 2 de la matriz  $B$ .



Calculemos el determinante de la matriz  $C$ . Notemos que el digrafo de Coates de  $C$  viene dado por



Luego hallando los subdigrafos lineales tenemos



De donde:

$$w(L_1) = b_{21}b_{12}b_{33}, c(L_1) = 3,$$

$$w(L_2) = b_{22}b_{23}b_{13}, c(L_2) = 1,$$

$$w(L_3) = b_{11}b_{31}b_{32}, c(L_3) = 1,$$

$$w(L_4) = b_{21}b_{13}b_{32}, c(L_4) = 2,$$

$$w(L_5) = b_{31}b_{23}b_{12}, c(L_5) = 2,$$

$$w(L_6) = b_{33}b_{22}b_{11}, c(L_6) = 2.$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \det(C) &= b_{21}b_{12}b_{33} + b_{22}b_{23}b_{13} + b_{11}b_{31}b_{32} - b_{21}b_{13}b_{32} - b_{31}b_{23}b_{12} - b_{33}b_{22}b_{11} \\ &= -(b_{21}b_{13}b_{32} + b_{31}b_{23}b_{12} + b_{33}b_{22}b_{11} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{22}b_{23}b_{13} - b_{11}b_{31}b_{32}) \\ &= -\det B. \end{aligned}$$

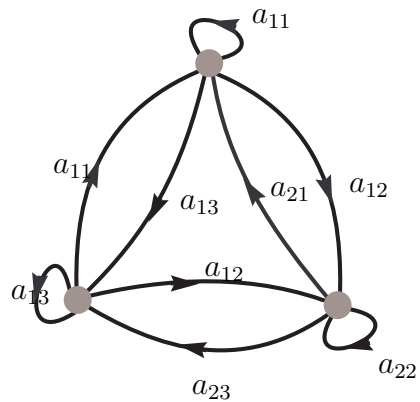
**TEOREMA 2.15.** *Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Si los elementos de una fila de una matriz  $A$  son iguales a los elementos correspondientes de una fila diferente, entonces  $\det A = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ , cuyos elemento de una fila son iguales a los elementos correspondientes de una fila diferente. Si intercambiamos dos filas entonces por el teorema 2.13 el determinante obtenido es multiplicado por  $-1$ . Por otra parte, intercambiando estas dos fila no cambia la matriz y así el determinante permanece igual. Por lo tanto  $\det A = -\det A$ , lo que implica que  $\det A = 0$   $\square$

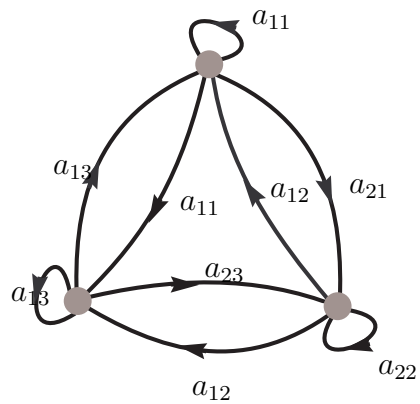
**EJEMPLO 2.16.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix},$$

tal que los elementos de la fila 1 de  $A$  son iguales a los elementos de la fila 3. Calculemos el determinante de la matriz  $A$ . Notemos que el digrafo de  $A$  es el siguiente

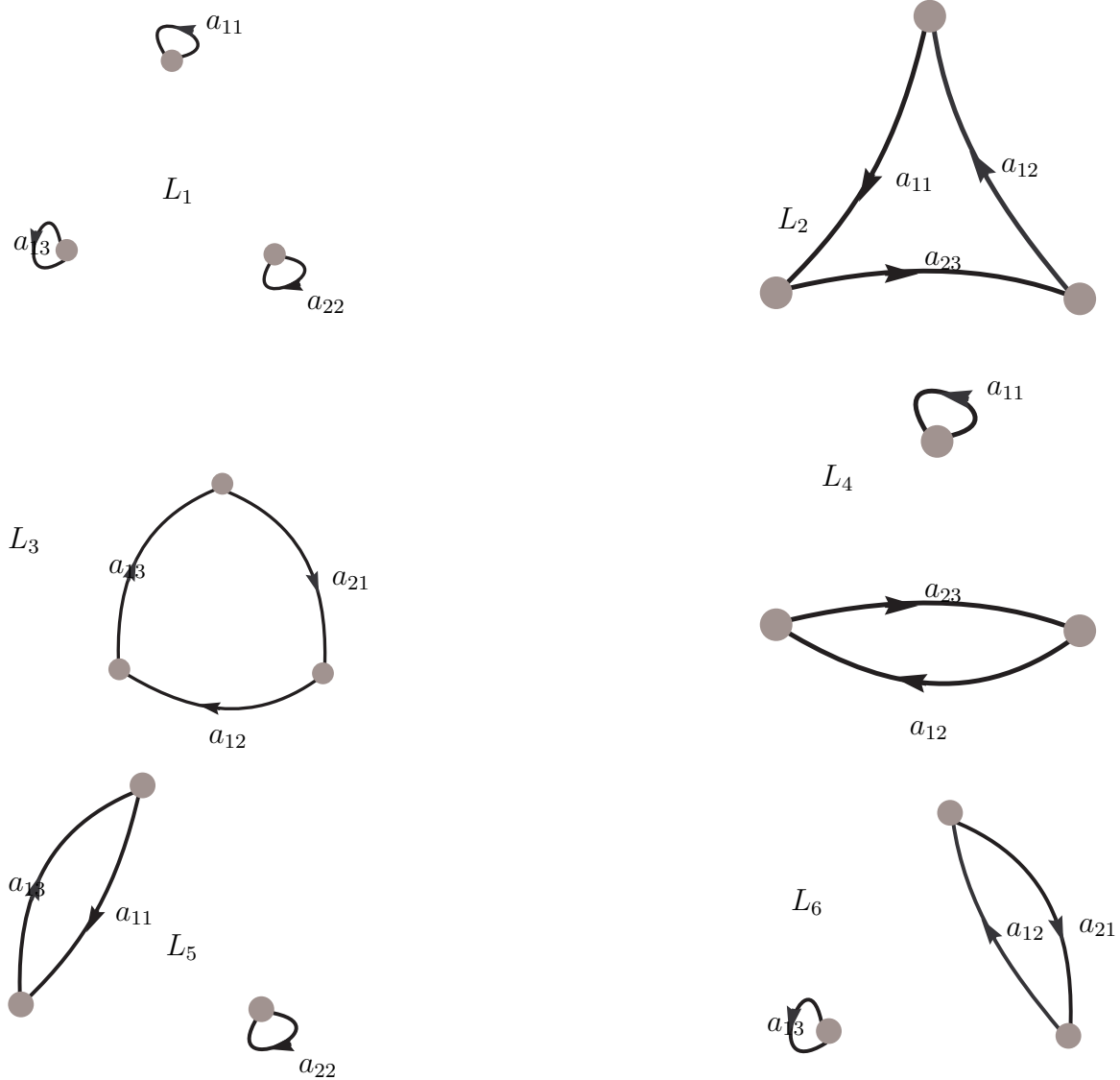


Por lo que el digrafo de Coates de  $A$  será



Luego hallando los subdigrafos lineales tenemos





De donde:

$$w(L_1) = a_{11}a_{22}a_{33}, c(L_1) = 3,$$

$$w(L_2) = a_{12}a_{11}a_{23}, c(L_2) = 1,$$

$$w(L_3) = a_{13}a_{21}a_{12}, c(L_3) = 1,$$

$$w(L_4) = a_{11}a_{23}a_{12}, c(L_4) = 2,$$

$$w(L_5) = a_{11}a_{13}a_{22}, c(L_5) = 2,$$

$$w(L_6) = a_{13}a_{21}a_{12}, c(L_6) = 2.$$

Lo que implica que

$$\det(A) = -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{23}a_{12} + a_{11}a_{13}a_{22} + a_{13}a_{12}a_{21}$$

Por lo tanto  $\det(A) = 0$ .

**COROLARIO 2.17.** *Si los elementos de una fila de una matriz  $A$  son proporcionales a los elementos de una fila diferente, entonces  $\det A = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Este corolario es un resultado inmediato consecuencia de los teoremas 2.11 y 2.15. □

**EJEMPLO 2.18.** Sean

$$B = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

donde  $\lambda$  es un escalar.

Por el Teorema 2.11 tenemos

$$\det A = \lambda \det B.$$

Luego por Teorema 2.15 tenemos que  $\det B = 0$ , lo que implica que  $\det A = 0$ .

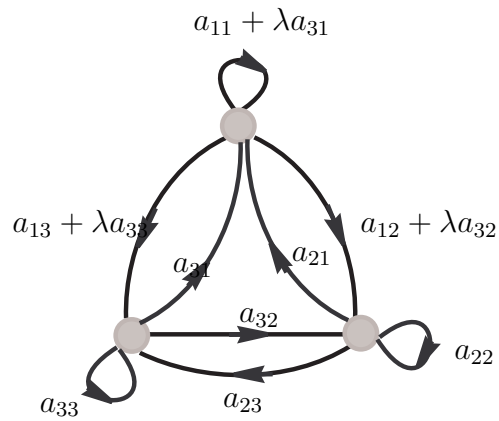
**TEOREMA 2.19.** *El determinante de una matriz no cambia si los elementos de alguna fila son multiplicados por un escalar y sumados a una fila diferente.*

**DEMOSTRACIÓN.** Ilustraremos esta demostración para matrices de orden 3 (el procedimiento es similar para matrices de cualquier orden). Sea

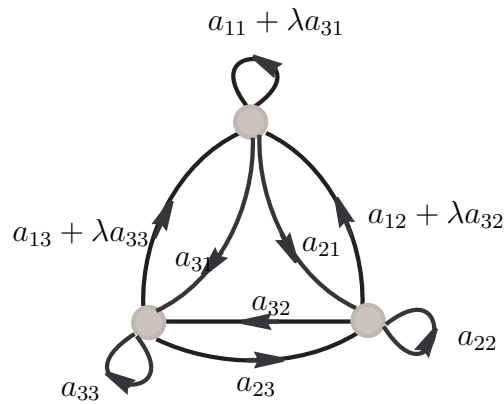
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

una matriz de orden tres. Consideremos  $A'$  la matriz formada al multiplicar los elementos de alguna fila de  $A$  por un escalar  $\lambda$  y sumarlos a una fila diferente. Calculemos el determinante de  $A'$ .

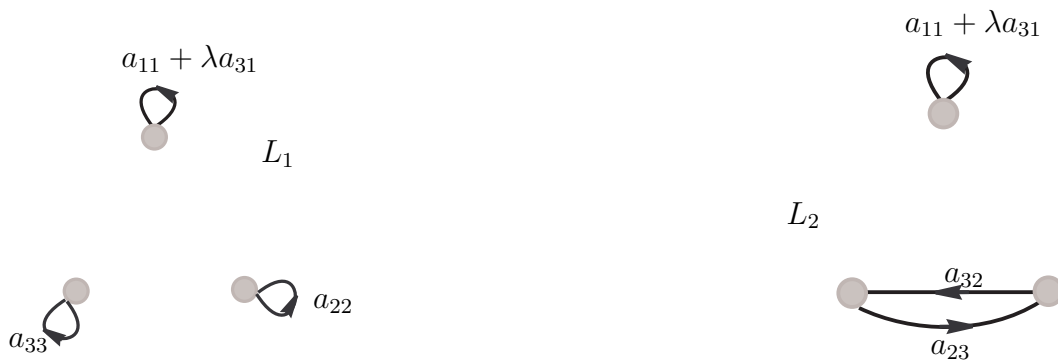
$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda a_{31} & a_{12} + \lambda a_{32} & a_{13} + \lambda a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

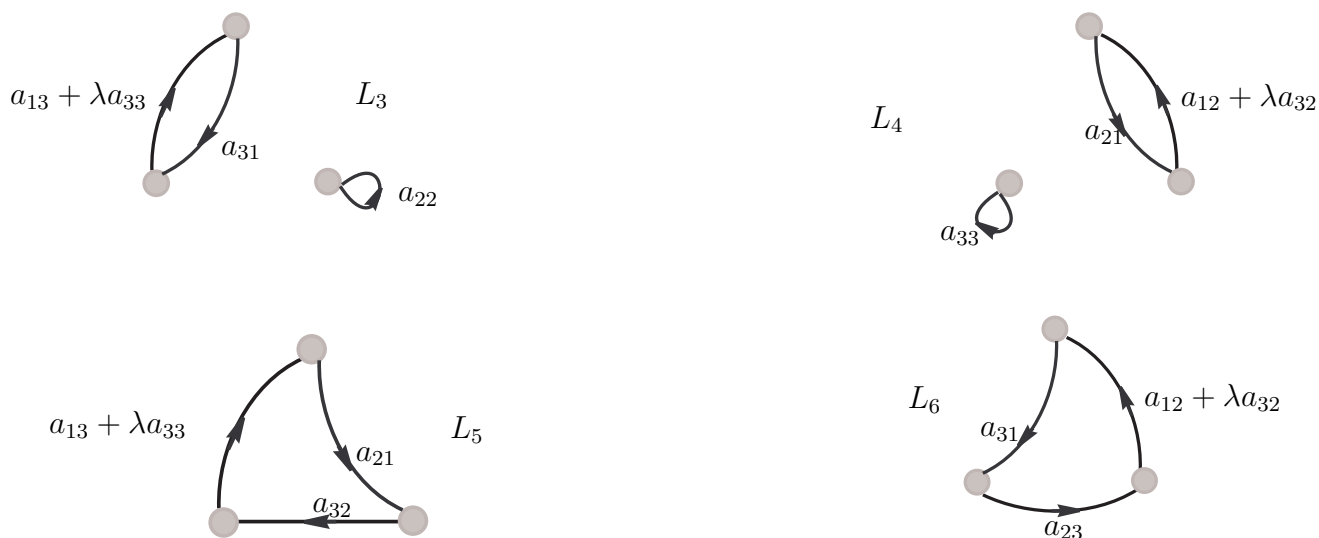


El digrafo de Coates para esta matriz es el siguiente



Por lo que tiene los siguientes subdigrafos lineales





Entonces:

$$w(L_1) = (a_{11} + \lambda a_{31})a_{22}a_{33}, \quad c(L_1) = 3,$$

$$w(L_2) = a_{21}(a_{13} + \lambda a_{33})a_{32}, \quad c(L_2) = 1,$$

$$w(L_3) = (a_{12} + \lambda a_{32})a_{23}a_{31}, \quad c(L_3) = 1,$$

$$w(L_4) = (a_{11} + \lambda a_{31})a_{23}a_{32}, \quad c(L_4) = 2,$$

$$w(L_5) = a_{31}(a_{13} + \lambda a_{33})a_{22}, \quad c(L_5) = 2,$$

$$w(L_6) = (a_{12} + \lambda a_{32})a_{21}a_{22}, \quad c(L_6) = 2.$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} \det(A') = & (a_{11} + \lambda a_{31})a_{22}a_{33} + a_{21}(a_{13} + \lambda a_{33})a_{32} + \\ & (a_{12} + \lambda a_{32})a_{23}a_{31} - (a_{11} + \lambda a_{31})a_{23}a_{32} - \\ & a_{31}(a_{13} + \lambda a_{33})a_{22} - (a_{12} + \lambda a_{32})a_{21}a_{22}. \end{aligned}$$

Desarrollando el producto tenemos

$$\begin{aligned} \det(A') = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} + a_{22} - a_{12}a_{21}a_{22} + \\ & \lambda a_{31}a_{22}a_{33} + \lambda a_{33}a_{32}a_{21} + \lambda a_{32}a_{23}a_{31} - \lambda a_{31}a_{23}a_{32} - \lambda a_{33}a_{22}a_{31} - \lambda a_{32}a_{21}a_{22} \\ = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13} + a_{22} - a_{12}a_{21}a_{22} \\ = & \det(A). \end{aligned}$$

Así el  $\det(A') = \det(A)$ .

□

TEOREMA 2.20. *Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . Asumimos que alguna fila de  $A$  es una combinación lineal de sus otras filas. Entonces  $\det A = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Realizaremos la demostración de este teorema para matrices de orden 3, para matrices de orden distinto la demostración es similar.

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} \lambda a_{21} + \beta a_{31} & \lambda a_{22} + \beta a_{32} & \lambda a_{23} + \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.19

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_{21} + \beta a_{31} & \lambda a_{22} + \beta a_{32} & \lambda a_{23} + \beta a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces  $\det A = 0$ . □

TEOREMA 2.21. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix},$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son submatrices cuadradas de  $A$ . Entonces:  $\det A = \det A_1 \det A_2$ . En particular el determinante de  $A$  no depende de  $B$ .

DEMOSTRACIÓN. Sean  $A, A_1, A_2$  matrices de orden  $n, n_1, n_2$  respectivamente, donde  $n = n_1 + n_2$ . El digrafo  $D = D^*(A)$  esta formado por los digrafos  $D_1 = D^*(A_1)$  y  $D_2 = D^*(A_2)$  por inclusión algunas aristas que van de los vértices de  $D_1$  a los vértices de  $D_2$ . Estas aristas corresponden a las entradas no nulas de  $B$ . Ya que las aristas no van de  $D_2$  a  $D_1$ , no hay ciclos de  $D$  que contengan las aristas correspondientes a las entradas distintas de cero de  $B$ . Por lo tanto, cada subdigrafo lineal  $L$  de  $D$  consiste en la unión de un subdigrafo lineal  $L_1$  de  $D_1$  con un subdigrafo lineal de  $L_2$  de  $D_2$ . Más aún toda unión da un subdigrafo lineal de  $D$ . Así tenemos

$$c(L) = c(L_1) + c(L_2) \text{ y } w(L) = w(L_1) + w(L_2)$$

y

$$\begin{aligned}
 \det A &= (-1)^n \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} (-1)^{c(L)} w(L) \\
 &= (-1)^{n_1+n_2} \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(A_1)} \sum_{L_2 \in \mathcal{L}(A_2)} (-1)^{c(L_1)+c(L_2)} w(L_1) w(L_2) \\
 &= (-1)^{n_1} \sum_{L_1 \in \mathcal{L}(A_1)} (-1)^{c(L_1)} w(L_1) \cdot (-1)^{n_2} \sum_{L_2 \in \mathcal{L}(A_2)} (-1)^{c(L_2)} w(L_2) \\
 &= \det(A_1) \det(A_2)
 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.22. Sea

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & B_1 \end{pmatrix},$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ c & d & b_{11} \end{pmatrix}.$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}
 \det A &= a_{11}a_{22}b_{11} + a_{12}0c + a_{21}b_{11}0 - ca_{22}0 - a_{11}b_{11}0 - a_{12}a_{21}b_{11} \\
 &= a_{11}a_{22}b_{11} - a_{12}a_{21}b_{11} \\
 &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) b_{11} \\
 &= \det A_1 \det B_1
 \end{aligned}$$

TEOREMA 2.23. Si  $A$  y  $B$  son matrices de igual orden  $n$ , entonces

$$\det AB = \det A \det B.$$

DEMOSTRACIÓN. Del teorema 2.21 obtenemos

$$(2.3) \quad \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \det A \det B.$$

Multiplicamos la columna 1 de la matrix de orden  $2n$  en (2.3) por  $b_{11}$ , la columna 2 por  $b_{21}, \dots$ , y la columna  $n$  por  $b_{n1}$ , y añadimos cada una de estas columnas a la columna  $n+1$ . Más aún, multiplicamos la columna 1 por  $b_{12}$ , la columna 2 por  $b_{22}, \dots$ , y la columna  $n$  por  $b_{n2}$ , y añadimos cada una de estas columnas a la columna  $n+2$ . Continuando de forma similar y usando el hecho de que por el teorema 2.19 el determinante es intercambiado, obtenemos

$$(2.4) \quad \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}.$$

Ahora por los  $n$  intercambios de los pares ordenados de columnas  $(1 \text{ y } n+1, 2 \text{ y } n+2, \dots, n \text{ y } 2n)$  obtenemos por los teoremas 2.13 y 2.21 que

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} A & AB \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} &= (-1)^n \det \begin{bmatrix} AB & A \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \det(AB) \det(-I_n) \\ &= (-1)^n \det AB (-1)^n \\ &= \det AB. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.24. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

y  $C = A \cdot B$ , entonces  $c_{ij} = \sum_{r=1}^2 a_{ir}b_{rj}$  y

$$\begin{aligned}
 \det C &= c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \\
 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\
 &= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} + \\
 &\quad - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\
 &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} \\
 &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\
 &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
 &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
 &= \det A \det B
 \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.25. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz  $m \times n$ . Sea  $K = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  un conjunto de  $k$  elementos con  $K \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  y sea  $L = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ . Los subconjuntos  $K$  y  $L$  designan una colección de índices de filas e índices de columnas, respectivamente, de la matriz  $A$  y una matriz  $k \times l$  determinada por:

$$A[K, L] = \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_l} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k, j_1} & a_{i_k, j_2} & \cdots & a_{i_k, j_l} \end{pmatrix}.$$

Si  $K = L$ , entonces  $A = [K, K]$  es una *submatriz principal* de  $A$ , algunas veces la denotamos mas simplemente como  $A[K]$ .

EJEMPLO 2.26. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}.$$



Consideremos  $K = \{1, 3, 5\}$  y  $L = \{2, 3, 4\}$ . Las siguientes representan submatrices.

$$A[K, L] = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix} \text{ y } B[K] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Observe que  $B[K]$  es una submatriz principal.

**DEFINICIÓN 2.27.** El determinante de una submatriz cuadrada de  $A$  es llamado *menor* de  $A$ . Así el menor de  $A$  es igual al  $\det A[K, L]$ , donde el cardinal de  $K$  es igual al cardinal de  $L$ . Si  $K = L$ , entonces el  $\det A[K]$  es el *menor principal* de  $A$ .

**DEFINICIÓN 2.28.** Asumimos que  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ . Sean  $i$  y  $j$  enteros con  $1 \leq i$  y  $j \leq n$ . Sea  $A_{ij}$  una submatriz de  $A$  de orden  $n - 1$  obtenida por eliminación de la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ . ( $A_{ij} = A[K, L]$  donde  $K = \{1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n\}$  y  $L = \{1, 2, \dots, j - 1, j + 1, \dots, m\}$ ). El *cofactor* (o *complemento algebraico*)  $A_{ij}$  de los elementos  $a_{ij}$  de la matriz  $A$  están dados por:  $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ .

**EJEMPLO 2.29.** Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Consideremos  $A_{13}$  la submatriz de  $A$ , obtenida por eliminación de la fila 1 y la columna 3 de  $A$ . Entonces

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

y  $\det A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ . Lo que implica que el cofactor  $A_{13}$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} &= (-1)^{1+3} \det A_{13} \\ &= a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

**TEOREMA 2.30.** *El determinante de una matriz  $A = [a_{ij}]$  de orden  $n$  puede ser evaluado desarrollando solo la fila  $i$  de la siguiente forma:*

$$(2.5) \quad \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

También podemos obtener el determinante solo por el desarrollo de la columna  $j$ :

$$(2.6) \quad \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 2.9, basta probar la fórmula para el desarrollo a lo largo de la fila  $i$ . En la suma, por el teorema 2.13, basta probar el teorema para  $i = n$ . Esto es debido a que por el intercambio sucesivo de la fila  $i$  con las filas  $i + 1, i + 2, \dots, n$ , obtenemos una matriz  $B = [b_{ij}]$  donde las filas de  $B$  están en el orden fila 1 de  $A, \dots$  fila  $n$  de  $A$ , fila  $i$  de  $A$ . Con este intercambio tenemos  $\det B = (-1)^{n-i} \det A$ . Por otra parte, usando la notación de la definición de cofactor, tenemos  $b_{nj} = a_{ij}$  y  $B_{nj} = A_{ij}$ . Por lo tanto, desarrollando el determinante de  $B$  a lo largo de la fila  $n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{n-i} \det B \\ &= (-1)^{n-i} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} b_{nj} \det B_{nj} \\ &= (-1)^{n-i} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{ij} \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{-i+j} a_{ij} \det A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \end{aligned}$$

Así que solo necesitamos establecer el caso  $i = n$ , y procedemos hacerlo.

Cada término en la suma (2.1) de la definición del determinante contiene un elemento de cada fila de  $A$ , ya que en un subdigrafo lineal hay exactamente una arista que entra en cada vértice. Similarmente, cada término contiene 1 elemento de cada columna. Por lo tanto podemos escribir

$$(2.7) \quad \det A = \sum_{j=1}^n a_{nj} \beta_j,$$

donde  $\beta_j$  no depende de ninguno de los elementos en la fila  $n$  y columna  $j$  de  $A$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). El término en la suma corresponde a la partición del subdigrafo lineal de  $\mathcal{L}(A)$  en  $\mathcal{L}_1(A), \mathcal{L}_2(A), \dots, \mathcal{L}_n(A)$ , donde  $\mathcal{L}_j(A)$  consiste en aquellos subdigrafos lineales donde la arista de vértice  $j$  va al vértice  $n$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). El subdigrafo lineal  $L$  en  $\mathcal{L}_n(A)$  contiene un

bucle en el vértice  $n$ . Eliminando ese bucle (por tanto el ciclo) de  $L$ , obtenemos un subdigrafo lineal  $L'$  en  $\mathcal{L}(A_{nn})$ , donde  $w(L) = a_{nn}w(L')$  y  $c(L) = c(L') + 1$ , y así  $(-1)^{c(L)} = -(-1)^{c(L')}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\beta_n &= (-1)^n(-1) \sum_{L' \in \mathcal{L}(A_{nn})} (-1)^{c(L')} w(L') \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{L' \in \mathcal{L}(A_{nn})} (-1)^{c(L')} w(L') \\ &= \det A_{nn} \\ &= (-1)^{n+n} \det A_{nn} \\ &= \alpha_{nn}.\end{aligned}$$

Ahora consideremos el coeficiente  $\beta_j$  de  $a_{nj}$  en (2.7) donde  $1 \leq j < n$ . Por el intercambio sucesivo de la columna  $j$  con las columnas  $j+1, j+2, \dots, n$  obtenemos una matriz  $C = [c_{ij}]$ , donde en  $C$  las columnas de  $A$  están en el orden  $1, \dots, j-1, j+1, \dots, n, j$ . tenemos  $\det C = (-1)^{n-j} \det A$ . Usando la notación de la definición de cofactor, tenemos  $c_{nn} = a_{nj}$  y  $C_{nn} = A_{nj}$ . Se sigue de lo que se ha demostrado en el párrafo anterior que

$$\begin{aligned}\beta_j &= (-1)^{n-j} \det C_{nn} \\ &= (-1)^{n+j} \det C_{nj} \\ &= (-1)^{n+j} \det A_{nj} \\ &= \alpha_{nj}.\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{nj} \alpha_{nj},$$

como lo deseamos. □

**EJEMPLO 2.31.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 3. Hallemos el determinante de la matriz  $A$  aplicando el Teorema anterior, desarrollando la fila 1

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

Tenemos que

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces  $\det(A_{11}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ .

Luego

$$\det(A_{12}) = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \text{ y}$$

$$\det(A_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

## 2. Definición clásica del determinante

En esta sección veremos la fórmula clásica del determinante la cual desarrolla permutaciones y signos.

DEFINICIÓN 2.32. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$  y sea  $L$  un subdigrafo lineal de  $D^*(A)$ , ya que  $L$  posee una arista entrando a cada vértice y una arista saliendo, el peso de  $L$  es el producto de  $n$  entradas de  $A$ , consistiendo simultáneamente de un elemento para cada fila de  $A$  (de las aristas de  $L$  exactamente una de estas entra a cada vértice). Si ordenamos estas  $n$  entradas acorde con el incremento de los índices de las filas entonces vemos que:

$$(2.9) \quad w(L) = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

donde  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Así las aristas de  $L$  son las  $n$  aristas de vértice  $j_1$  al vértice 1, de vértice  $j_2$  al vértice 2,  $\dots$ , y de vértice  $j_n$  al vértice  $n$ . Convenientemente, cada producto de  $n$  entradas de  $A$ , una de cada fila y simultáneamente una de cada columna (Así un producto como el dado en (2.9)), es el peso de algún subdigrafo lineal de  $D^*(A)$  en la ecuación (2.2),  $w(L)$  tiene un signo en frente de esta, es decir,  $(-1)^{n-c(L)}$ . Sea  $S_n$  el conjunto de todas las  $n$  permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Usando nuestra notación

podemos escribir:

$$(2.10) \quad \det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{n-c(L)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

Lo que debemos hacer es determinar cómo escribir el signo  $(-1)^{n-c(L)}$  en términos de las correspondientes permutaciones  $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n$ . Sea  $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n$  una *inversión* de  $\sigma$  es un par  $k, l$  de enteros con  $1 \leq k < l \leq n$  tal que  $j_k > j_l$ . Así una *inversión* representa un par de enteros fuera de su orden natural en  $\sigma$ . Sea  $\#(\sigma)$  igual el *número de inversiones* de  $\sigma$ . El signo de las permutaciones se define como  $(-1)^{\#(\sigma)}$ , esta es una permutación par si tiene un número par de inversiones (es decir el signo es  $+1$ ) y es una permutación impar si tiene un número impar de inversiones (es decir el signo es  $-1$ ).

EJEMPLO 2.33. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Aplicando la ecuación (2.10)

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} (-1)^{3-c(L)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= (-1)^{3-c(L)} a_{11} a_{22} a_{33} + (-1)^{3-c(L)} a_{12} a_{23} a_{31} + (-1)^{3-c(L)} a_{13} a_{21} a_{32} + \\ &\quad (-1)^{3-c(L)} a_{11} a_{23} a_{32} + (-1)^{3-c(L)} a_{13} a_{22} a_{31} + (-1)^{3-c(L)} a_{12} a_{21} a_{33}. \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{13} a_{22} a_{31} + a_{12} a_{21} a_{33}. \end{aligned}$$

Observemos el número de inversiones de  $S_3$ .

- (1, 2, 3), tiene 0 inversiones,
- (2, 3, 1), tiene 2 inversiones,
- (3, 1, 2), tiene 2 inversiones,
- (1, 3, 2), tiene 1 inversión,
- (3, 2, 1), tiene 3 inversiones,
- (2, 1, 3), tiene 1 inversión.

LEMA 2.34. Sea  $\sigma = (j_1, j_2, \dots, j_n)$  una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces  $\#(\sigma)$  y  $n - c(\sigma)$  tienen la misma paridad. Por lo tanto  $(-1)^{n-c(\sigma)} = (-1)^{\#(\sigma)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el lema por inducción inversa sobre el número de ciclos de  $\sigma$ . Obtenemos el inicio de la inducción asumimos que  $c(\sigma) = n$ , el mayor número posible. Entonces  $\sigma$  es la permutación identidad,  $\#(\sigma) = 0$ . Por lo tanto en este caso  $n - c(\sigma) = \#(\sigma) = 0$ , en particular  $n - c(\sigma)$  y  $\#(\sigma)$  tienen igual paridad. Asumimos que  $c(\sigma) < n$ . Entonces  $\sigma \neq I$  (función identidad) y  $\sigma$  contiene un ciclo  $j_{k_1}$  a  $j_{k_2}$ ,  $j_{k_2}$  a  $j_{k_3}$ ,  $j_{k_3}$  a  $\dots$  a  $j_{k_{t-1}}$  a  $j_{k_t}$ ,  $j_{k_t}$  a  $j_{k_1}$ , para  $t \geq 2$  elementos donde  $k_1 < k_2 < \dots < k_t$ . Este debe ser un par de inversión  $j_{k_r}$  y  $j_{k_s}$  donde  $r < s$  y  $j_{k_r} > j_{k_s}$ . Si intercambiamos  $j_{k_r}$  y  $j_{k_s}$  en  $\sigma$  obtenemos una nueva permutación  $\tau$  tal que  $\#(\tau)$  y  $\#(\sigma)$  difieren por un número impar y, además  $c(\tau) = c(\sigma) + 1$  (y así difiere por un número impar). Por inducción  $\#(\tau)$  y  $n - c(\tau)$  tienen la misma paridad y por tanto  $\#(\sigma)$  y  $\sigma$ .  $\square$

EJEMPLO 2.35. Sea  $S_3 = \{(1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3)\}$  y  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 3. Del ejemplo 2.33 obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (1, 2, 3), \#(\sigma_1) = 0, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_1)} = 1, \\ \sigma_2 &= (2, 3, 1), \#(\sigma_2) = 2, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_2)} = 1, \\ \sigma_3 &= (3, 1, 2), \#(\sigma_3) = 2, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_3)} = 1, \\ \sigma_4 &= (1, 3, 2), \#(\sigma_4) = 1, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_4)} = -1, \\ \sigma_5 &= (3, 2, 1), \#(\sigma_5) = 3, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_5)} = -1, \\ \sigma_6 &= (2, 1, 3), \#(\sigma_6) = 1, \text{ entonces } (-1)^{\#(\sigma_6)} = -1.\end{aligned}$$

Consideremos los ciclos de nuestra matriz asociados a las permutaciones y realicemos la operación  $(-1)^{3-c(\sigma_i)}$ , donde  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned}c(\sigma_1) &= c(a_{11}a_{22}a_{33}) = 3, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{11}a_{22}a_{33})} = 1, \\ c(\sigma_2) &= c(a_{12}a_{23}a_{31}) = 1, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{12}a_{23}a_{31})} = 1, \\ c(\sigma_3) &= c(a_{13}a_{21}a_{32}) = 1, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{13}a_{21}a_{32})} = 1, \\ c(\sigma_4) &= c(a_{11}a_{23}a_{32}) = 2, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{11}a_{23}a_{32})} = -1, \\ c(\sigma_5) &= c(a_{13}a_{22}a_{31}) = 2, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{13}a_{22}a_{31})} = -1, \\ c(\sigma_6) &= c(a_{12}a_{21}a_{33}) = 2, \text{ entonces } (-1)^{3-c(a_{12}a_{21}a_{33})} = -1.\end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$(-1)^{\#(\sigma_1)} = (-1)^{3-c(a_{11}a_{22}a_{33})},$$

$$(-1)^{\#(\sigma_2)} = (-1)^{3-c(a_{12}a_{23}a_{31})},$$

$$(-1)^{\#(\sigma_3)} = (-1)^{3-c(a_{13}a_{21}a_{32})},$$

$$(-1)^{\#(\sigma_4)} = (-1)^{3-c(a_{11}a_{23}a_{32})},$$

$$(-1)^{\#(\sigma_5)} = (-1)^{3-c(a_{13}a_{22}a_{31})},$$

$$(-1)^{\#(\sigma_6)} = (-1)^{3-c(a_{12}a_{21}a_{33})}.$$

OBSERVACIÓN 2.36. El teorema que daremos a continuación se verifica de forma sencilla haciendo uso del Lema 2.10.

TEOREMA 2.37. *Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Entonces,*

$$(2.11) \quad \det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\#(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

Donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  de los enteros  $1, 2, \dots, n$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . De la definición 2.32

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{n-c(L)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

Luego del lema 2.34

$$(-1)^{n-c(l)} = (-1)^{\#(\sigma)}.$$

Entonces

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\#(\sigma)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

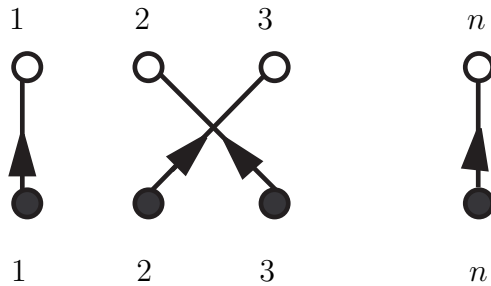
□

A continuación daremos la reformulación de la definición clásica del determinante en términos del digrafo de König de una matriz.

DEFINICIÓN 2.38. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ ,  $G(A)$  el digrafo de König asociado. Una colección  $F$  de  $n$  aristas de  $G(A)$ , una saliendo de cada vértice negro y una entrando en cada vértice blanco es un 1-factor de  $G(A)$ . El peso  $w(F)$  del 1-factor es el producto de los pesos de sus aristas. Los 1-factores de  $G(A)$  están en correspondencia 1 a 1 con los términos en la fórmula clásica del determinante (2.11). Sea  $(j_1, \dots, j_n)$  una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Al término

$$(-1)^{\#(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

en la fórmula (2.11) le hacemos corresponder las  $n$  aristas  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $G(A)$  donde  $e_i$  es la arista de vértice negro  $i$  al vértice blanco  $j_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ya que  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  es una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$  el conjunto resultante de aristas  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es un 1-factor  $F$  de  $G(A)$  y su peso es  $w(F) = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ . Cada 1-factor de  $G(A)$  surge de una permutación de  $\{1, 2, \dots, n\}$  en esta forma. Dibujamos el digrafo  $G(A)$  de forma tal que el vértice blanco  $i$  sea ubicado en dirección hacia un vértice negro  $j$ .



Sea  $q(F)$  igual al número de pares de aristas en  $F$  que interceptan a otras en el dibujo  $G(A)$  en esta forma. Sea  $e_k$  la arista que se obtiene al unir el vértice negro  $k$  al vértice blanco  $j_k$  y  $e_l$  uniendo al vértice negro  $l$  al vértice negro  $j_l$  dos aristas en  $F$  con  $k < l$ . Entonces  $e_k$  y  $e_l$  se interceptan exactamente cuando  $j_l < j_k$ . Así las intersecciones de las aristas de  $F$  están en correspondencia 1 a 1 con las inversiones de las permutaciones  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  y por lo tanto  $q(F) = \#(j_1, j_2, \dots, j_n)$ . Sea  $\mathcal{F}(A)$  la colección de los 1-factores de  $G(A)$ . Entonces tenemos la siguiente reformulación para el determinante de  $A$ :

$$(2.12) \quad \det(A) = \sum_{F \in \mathcal{F}(A)} (-1)^{q(F)} w(F)$$



### 3. Permanente

En la presente sección introduciremos la definición de permanente de una matriz y presentaremos algunas propiedades importantes de este, similares a las del determinante.

DEFINICIÓN 2.39. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ . El permanente de  $A$  es el número dado por la fórmula

$$(2.13) \quad \text{per}(A) = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . En el permanente calculamos todos los posibles productos de  $n$  entradas de  $A$  siempre que las  $n$  entradas sean de diferentes filas y diferentes columnas de  $A$ .

Una forma equivalente de definir el permanente es usando digrafos de Coates ponderados  $D^*(A)$ .

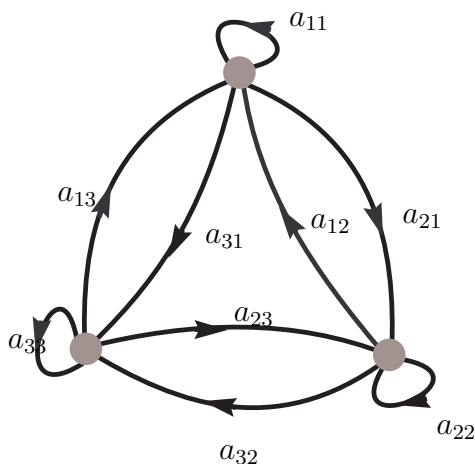
$$\text{per}(A) = \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} w(L)$$

donde la suma es sobre todos los subdigrafos lineales de  $D^*(A)$  y  $w(L)$  el producto de todos los pesos de sus aristas.

EJEMPLO 2.40. Sea

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

el digrafo de  $D^*(A)$  el siguiente



Luego hallando los subdigrafos lineales tenemos

Luego

$$w(L_1) = a_{11}a_{22}a_{33},$$

$$w(L_2) = a_{12}a_{31}a_{23},$$

$$w(L_3) = a_{13}a_{21}a_{32},$$

$$w(L_4) = a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$w(L_5) = a_{22}a_{31}a_{13},$$

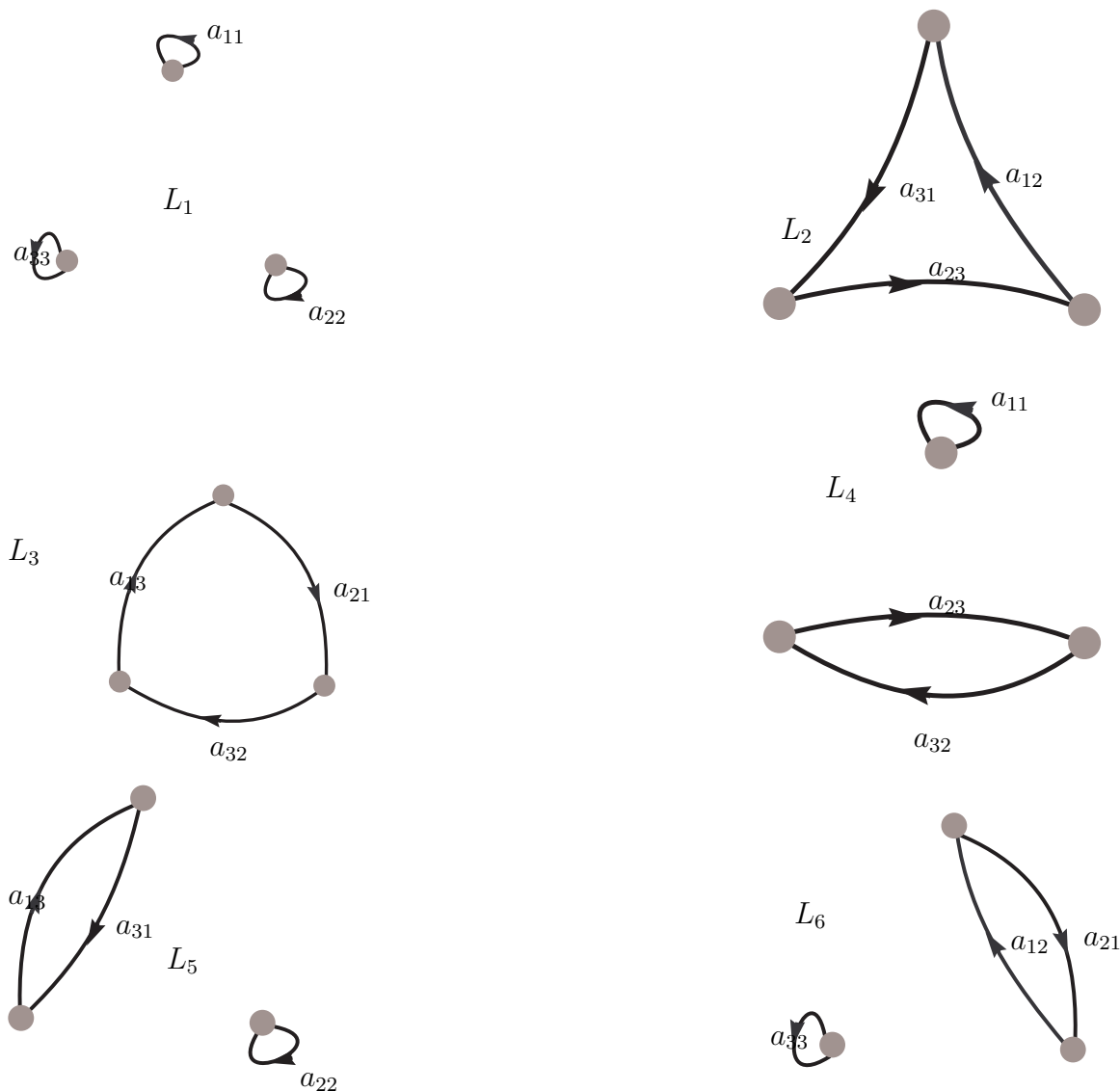
$$w(L_6) = a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{per}(A) &= \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} w(L) \\ &= w(L_1) + w(L_2) + w(L_3) + w(L_4) + w(L_5) + w(L_6) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

LEMA 2.41. Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Las siguientes propiedades se mantienen:

- (1)  $\text{per}(PAQ) = \text{per}(A)$  para todas las matrices de permutación  $P$  y  $Q$ .
- (2)  $\text{per}(A^T) = \text{per}(A)$
- (3)  $\text{per}(cA) = c^n \text{per}(A)$  para un escalar  $c$ .
- (4) Si  $A$  tiene una fila (o columna) de ceros entonces  $\text{per}(A) = 0$ .



- (5) Si alguna fila (o alguna columna) de  $A$  es multiplicada por un escalar, entonces el permanente de la matriz resultante es igual a  $c \text{per}(A)$
- (6)  $\text{per}(P) = 1$  para toda matriz permutación  $P$  de orden  $n$ . En particular  $\text{per}(I_n) = 1$
- (7) Exapansión de Laplace por filas o columnas.

$$\text{per}(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{per}(A_{ij}), (j = 1, 2, \dots, n)$$

y

$$\text{per}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{per}(A_{ij}), (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde  $A_{ij}$  es la matriz resultante al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$ .

EJEMPLO 2.42. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

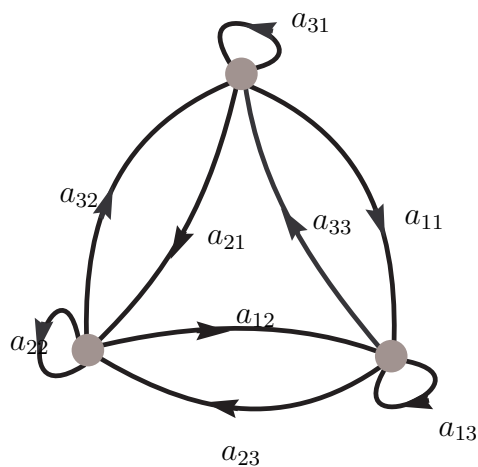
y  $c$  un escalar.

Consideremos la matriz

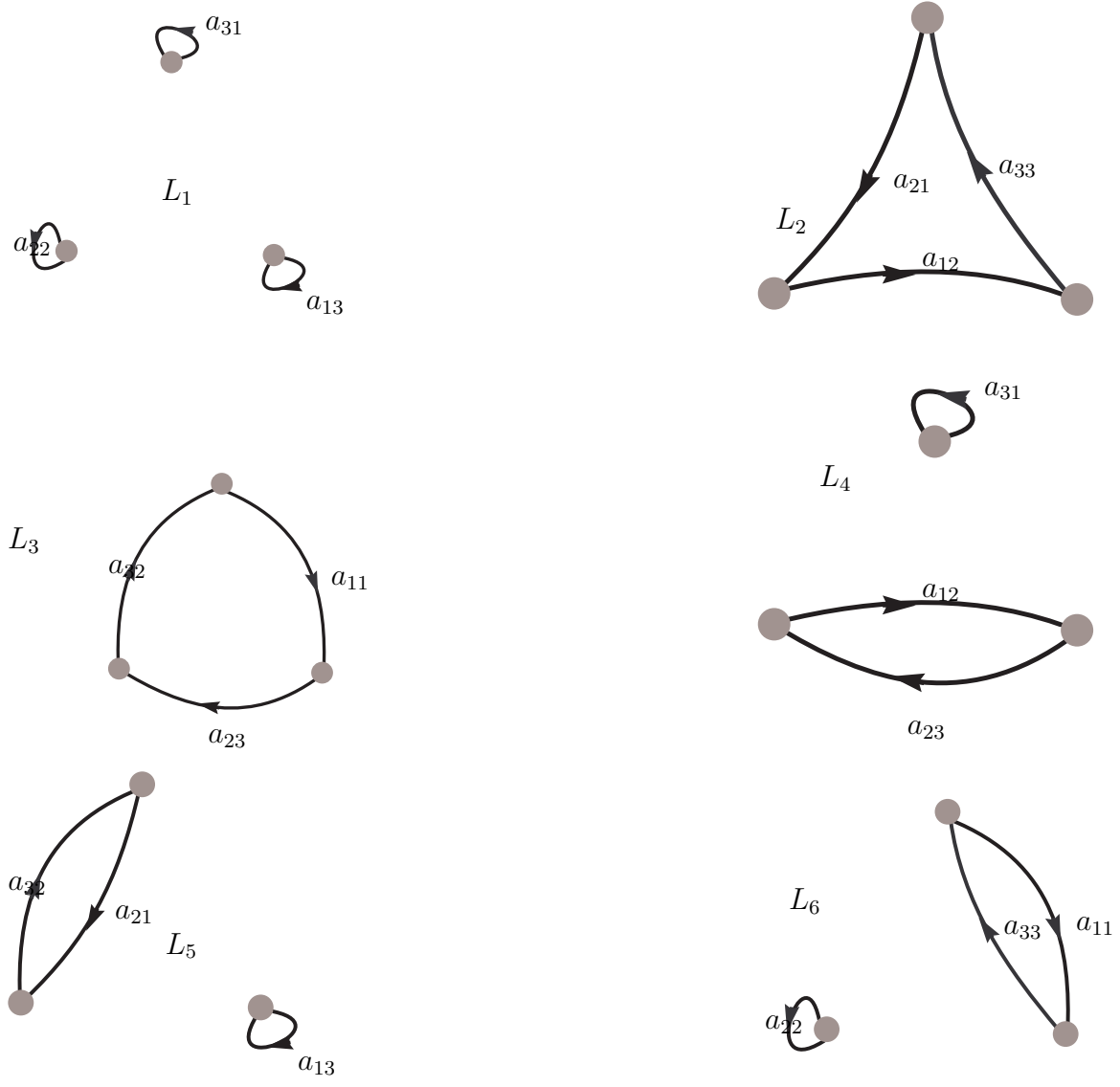
$$PAQ = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\text{per}(PAQ) = \sum_{L \in \mathcal{L}(PAQ)} w(L).$$

El digrafo  $D^*(PAQ)$  es el siguiente



Luego hallando los subgrafos lineales tenemos



De donde

$$w(L_1) = a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$w(L_2) = a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$w(L_3) = a_{32}a_{11}a_{23}$$

$$w(L_4) = a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$w(L_5) = a_{32}a_{21}a_{13}$$

$$w(L_6) = a_{11}a_{33}a_{22}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{per}(PAQ) &= a_{31}a_{13}a_{22} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{11}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{11}a_{33}a_{22} \\ &= \sum_{L \in \mathcal{L}(A)} w(L) \\ &= \text{per}(A). \end{aligned}$$

Consideremos

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\text{y } \text{per}(A^T) = \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S^3} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

donde  $(j_1, j_2, j_3)$  son permutaciones sobre  $\{1, 2, 3\}$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \text{per}(A^T) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S^3} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= \text{per}(A) \end{aligned}$$

Sea

$$cB = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{per}(cB) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S^3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= ca_{11}ca_{22}ca_{33} + ca_{12}ca_{23}ca_{31} + ca_{13}ca_{21}ca_{32} + ca_{11}ca_{23}ca_{32} + ca_{13}ca_{22}ca_{31} + ca_{12}ca_{21}ca_{33} \\ &= c^3 a_{11}a_{22}a_{33} + c^3 a_{12}a_{23}a_{31} + c^3 a_{13}a_{21}a_{32} + c^3 a_{11}a_{23}a_{32} + c^3 a_{13}a_{22}a_{31} + c^3 a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= c^3 (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}) \\ &= c^3 \text{per}(B) \end{aligned}$$

Consideremos

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{per}(C) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S^3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= 0a_{22}a_{33} + 0a_{23}a_{31} + 0a_{21}a_{32} + 0a_{23}a_{32} + 0a_{22}a_{31} + 0a_{21}a_{33} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea

$$D = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{per}(D) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S^3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= ca_{11}a_{22}a_{33} + ca_{12}a_{23}a_{31} + ca_{13}a_{21}a_{32} + ca_{11}a_{23}a_{32} + ca_{13}a_{22}a_{31} + ca_{12}a_{21}a_{33} \\ &= c (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33}) \\ &= c \text{per}(A). \end{aligned}$$

Sea  $P$  la matriz permutación de orden 3 antes dada. Entonces

$$\begin{aligned}\text{per}(P) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

En particular sea  $I_3$  la matriz identidad de orden 3

$$\begin{aligned}\text{per}(P) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in S_3} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Consideremos

$$(2.14) \quad \sum_{j=1}^3 a_{1j} \text{per}(A_{1j}) = a_{11} \text{per}(A_{11}) + a_{12} \text{per}(A_{12}) + a_{13} \text{per}(A_{13}).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\text{per}(A_{11}) &= a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}, \\ \text{per}(A_{12}) &= a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}, \\ \text{per}(A_{13}) &= a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 a_{1j} \text{per}(A_{1j}) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= \text{per}(A).\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.43. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$ ,  $G(A)$  el digrafo de König asociado y  $F$  el 1-factor de  $G(A)$ . Si  $\mathcal{F}(A)$  denota la colección de todos los 1-factores de  $G(A)$ , entonces se sigue que

$$\text{per}(A) = \sum_{F \in \mathcal{F}(A)} w(F).$$

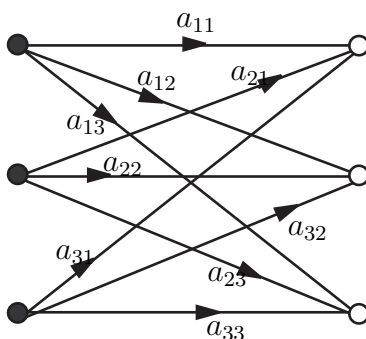


Como es usual cuando  $a_{ij} = 0$  podemos considerar que no hay aristas del vértice negro  $i$  al vértice blanco  $j$ , es decir el peso igual a cero es interpretado como la falta de una arista, y así las aristas de peso cero no son parte de ningún 1-factor. Ahora consideremos el caso especial donde cada entrada de  $A$  es 0 o 1. Entonces  $w(F) = 0$  o  $w(F) = 1$  así el permanente de  $A$  cuenta el número de 1-factores de  $A$ .

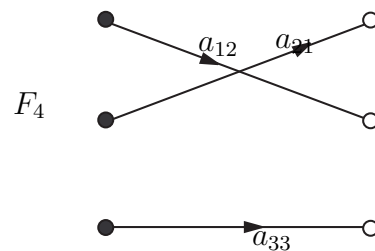
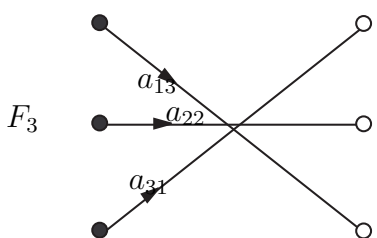
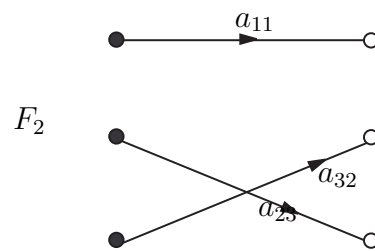
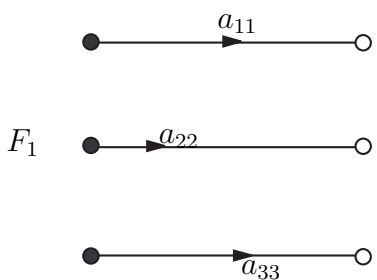
EJEMPLO 2.44. Sea

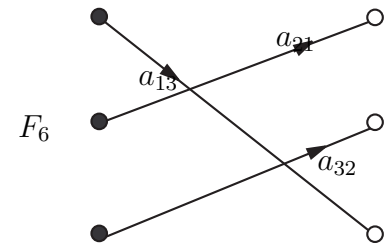
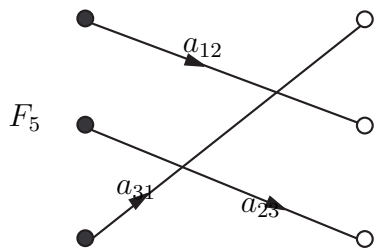
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

El digrafo de König de  $A$  es el siguiente



Sean  $F_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, 6$ ) los 1-factores de  $D(A)$ .





Luego

$$w(F_1) = a_{11}a_{22}a_{33},$$

$$w(F_2) = a_{11}a_{23}a_{31},$$

$$w(F_3) = a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$w(F_4) = a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$w(F_5) = a_{12}a_{23}a_{31},$$

$$w(F_6) = a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Entonces de la definición 2.43

$$\text{per}(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{22} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

## CAPÍTULO 3

### Teorema de Cayley-Hamilton y Teorema Master de MacMahon

En el presente capítulo expondremos una prueba combinatoria del Teorema de Cayley-Hamilton. Desarrollaremos parte de la teoría referente a los digrafos de permutación y a las clases de digrafo general y por último presentaremos una prueba combinatoria del Teorema Master de MacMahon para permutaciones.

**TEOREMA 3.1.** *Sea  $R$  un anillo conmutativo con unidad y sea  $A$  una matriz de orden  $n$  sobre  $R$ . El polinomio característico de  $A$  es dado por*

$$(3.1) \quad f(x) = \det(xI - A) = \sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$$

donde  $c_0 = 1$  y para cada  $1 \leq i \leq n$ ,  $c_i = \sum \det(B)$ , y  $B$  varia sobre todas las submatrices principales de  $-A$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Claramente  $\det(xI - A)$  es un polinomio de grado  $n$  el cual es mónico, es decir,  $c_0 = 1$ ,  $c_n = (-1)^n \det(A) = \det(-A)$ . Supongamos que  $1 \leq i \leq n-1$  y consideremos el coeficiente  $c_i$  de  $x^{n-i}$  en el polinomio  $\det(xI - A)$ . Recordemos que en general si  $D = (d_{ij})$  es una matriz  $n \times n$  sobre un anillo conmutativo con unidad. Entonces

$$(3.2) \quad \det(D) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{sgn}(\pi)} d_{1\pi(1)} d_{2\pi(2)} \cdots d_{n\pi(n)}.$$

Así obtenemos el término de grado  $n - i$  en

$$\det(xI - A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{sgn}(\pi)} (xI - A)_{1\pi(1)} (xI - A)_{2\pi(2)} \cdots (xI - A)_{n\pi(n)}$$

primeros seleccionamos  $n - i$  índices  $j_1, \dots, j_{n-i}$  con índices complementarios  $k_1, \dots, k_i$ . Entonces en la expansión del producto  $(xI - A)_{1\pi(1)} (xI - A)_{2\pi(2)} \cdots (xI - A)_{n\pi(n)}$  cuando fijamos  $\pi$   $j_1, \dots, j_{n-i}$  seleccionamos el término  $x$  de los factores  $(xI - A)_{j_1 j_1} (xI - A)_{j_2 j_2} \cdots (xI - A)_{j_{n-i} j_{n-i}}$  y los términos  $(-A)_{k_1 \pi(k_1)} \cdots (-A)_{k_i \pi(k_i)}$  en otro caso. Así si  $A(k_1, \dots, k_i)$  es la submatriz principal de  $A$  indexadas por filas y columnas  $k_1, \dots, k_i$ , entonces  $\det(-A(k_1, \dots, k_i))$  es

la contribución asociada al coeficiente de  $x^{n-i}$ . De esto se sigue que  $c_i = \sum \det(B[i])$ , donde  $B[i]$  varia sobre todas las submatrices principales  $i \times i$  de  $-A$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 3.2. Supongamos que la permutación  $\pi \in S_n$  consiste de  $k$  ciclos de permutación de tamaño  $l_1, \dots, l_k$ , respectivamente, donde  $\sum l_i = n$ . Entonces  $\text{sgn}(\pi)$  puede ser calculado por

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\pi) &= (-1)^{l_1-1+l_2-1+l_k-1} \\ &= (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^n (-1)^k. \end{aligned}$$

Registramos esto formalmente como:  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^n (-1)^k$  si  $\pi \in S_n$  es el producto de los  $k$  ciclos disjuntos.

## 1. Digrafos de Permutación

En la presente sección asociaremos un digrafo a una permutación, introduciendo así los digrafos de permutación. Presentaremos la definición de determinante y peso de estos digrafos.

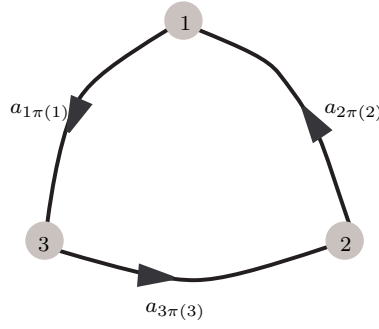
Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz  $n \times n$  sobre un anillo conmutativo  $R$  con unidad. Sea  $D_n$  el digrafo completo de orden  $n$  con vértices  $1, 2, \dots, n$ . Asignamos a cada arista de  $(i, j)$  el peso  $a_{ij}$ , obteniendo un digrafo ponderado. El peso de un ciclo dirigido  $\gamma : i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1$  es definido por:

$$w(\gamma) = -a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}.$$

El cual es el negativo del producto de los pesos de sus aristas.

Sea  $\pi \in S_n$ . El *digrafo de permutación*  $D(\pi)$  tiene vértices  $1, 2, \dots, n$  y sus aristas  $(i, \pi(i))$ , para  $1 \leq i \leq n$ . Así  $D(\pi)$  es un subgrafo generador de  $D_n$ . Los ciclos dirigidos del grafo  $D(\pi)$  estan en correspondencia uno a uno con los ciclos de permutación  $\pi$ . También el conjunto de aristas de los ciclos dirigidos de  $D(\pi)$  particionan el conjunto de aristas de  $D(\pi)$ .

Consideremos la permutación  $\pi = (1, 2, 3)$ . El digrafo de permutación  $D(\pi)$  se muestra en la siguiente figura.



El peso  $w(D(\pi))$  de un digrafo de permutación  $D(\pi)$  está definido como el producto de los pesos de los ciclos dirigidos. Por lo tanto si  $\pi$  tiene  $k$  ciclos de permutación,

$$w(D(\pi)) = (-1)^k a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Entonces usando la expresión (3.2) y la expresión obtenida en la observación 3.2 obtenemos

$$\det(-A) = \sum w(D(\pi)),$$

donde  $D(\pi)$  varía sobre todos los digrafos de permutación de orden  $n$ .

Fijemos  $\chi \subseteq [n] = \{1, 2, \dots, n\}$  y sea  $\sigma \in S_\chi$ . El digrafo de permutación de  $D(\sigma)$  que tiene a  $\chi$  como conjunto de vértices y es un subgrafo (no necesariamente generador) de  $D_n$  con peso igual al producto de los pesos de sus ciclos (si  $\chi = \emptyset$  el peso correspondiente es igual a 1). Si  $B$  es una submatriz principal de  $-A$  cuyas filas y columnas son las (intersecciones de las) filas y columnas de  $-A$  indexadas por  $\chi \subseteq [n]$ , entonces  $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_\chi} w(D(\sigma))$ . Si colocamos  $x = 1$  en la expresión (3.1) obtenemos

$$(3.3) \quad \det(I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_\chi, \chi \subseteq [n]} w(D(\sigma)).$$

Sean  $y_1, \dots, y_n$  variables conmutativas independientes sobre  $R$  y hagamos  $R^* = R[y_1, \dots, y_n]$ . Reemplazamos  $A$  en la discusión precedente con  $AY$ , donde  $Y$  es la matriz diagonal con entradas  $y_1, \dots, y_n$ . Así  $AY = [a_{ij}y_j]$ . Si  $\pi \in S_n$  tiene  $k$  ciclos de permutación,  $D(\pi)$  tiene  $k$  ciclos dirigidos y

$$(3.4) \quad w(D(\pi)) = (-1)^k a_{1\pi(1)} y_{\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} y_{\pi(n)}.$$

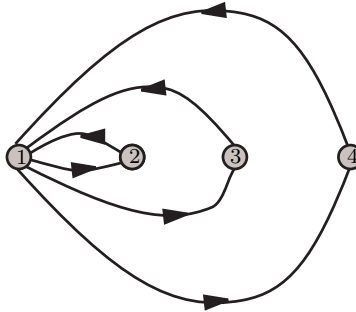
Desde otro punto de vista diferente, sea  $\mathcal{H}$  el conjunto de todos los digrafos  $H$  de orden  $n$  para los cuales el grado de entrada es igual al grado de salida, y este valor común es 0 ó es 1. Entonces  $H$  consiste en un número de pares de ciclos dirigidos disjuntos por pares y por

tanto es un digrafo de permutación sobre un conjunto de  $[n]$ . El peso  $w(H)$  está definido como  $w(H) = (-1)^{c(H)} \times$  (el producto de los pesos de sus aristas), donde  $c(H)$  es el número de ciclos dirigidos de  $H$  y el peso de una arista  $(i, j)$  de  $H$  es  $w(i, j) = a_{ij}y_j$ . Así, si  $H \in \mathcal{H}$  satisface  $H = D(\pi)$ ,  $\pi \in S_\chi$ ,  $\chi \subseteq [n]$ , entonces  $w(H)$  es dado por la expresión (3.4). Mas aún, si  $w(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} w(H)$  por la expresión (3.3) tenemos

$$(3.5) \quad w(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} w(H) = \det(I_n - AY).$$

### 2. Clase de Digrafo General

Consideremos el conjunto  $\mathcal{D}$  de digrafos generales  $D$  con vértices en  $[n]$ , para el cual las aristas que tienen  $i$  como vértice inicial son linealmente ordenadas, y tal que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , hay un entero no negativo  $m_i$  igual a los grados de salida y grados de entrada del vértice  $i$ . Un ejemplo de digrafo general lo podemos observar en el siguiente digrafo.

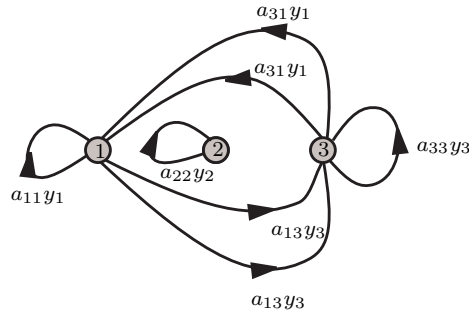


Tenemos la matriz  $A = [a_{ij}]$  de orden  $n$  y las indeterminadas independientes  $y_1, \dots, y_n$ . Si  $D$  es un digrafo general y si  $(i, j)$  es la  $t$ -ésima arista con vértice inicial  $i$ , el peso de la arista  $(i, j)$  es  $a_{ij}^t y_j$  ( $a_{ij}^t y_j$  es la entrada  $(i, j)$  de  $A$  con un superíndice  $t$  adjunto). El peso  $w(D)$  de  $D$  es el producto de los pesos de sus aristas. Supongamos que las variables  $y_1, \dots, y_n$ , conmutan con todas las entradas de  $A$ , pero no conmutan entre sí. Mostramos que cada  $D$  se identifica unívocamente con la palabra  $y_1, \dots, y_n$  asociada con  $w(D)$ . Como ejemplo supongamos que

$$(3.6) \quad w(D) = a_{11}^1 y_1 a_{13}^2 y_3 a_{13}^3 y_3 a_{22}^1 y_2 a_{31}^1 y_1 a_{31}^2 y_1 a_{33}^3 y_3$$

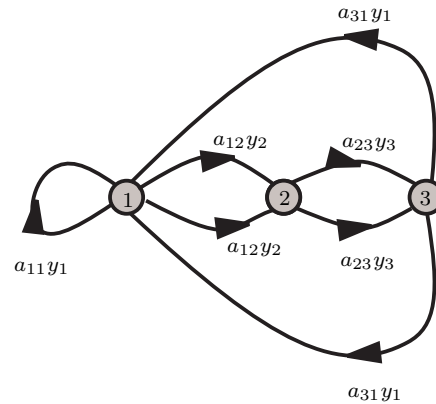
$$(3.7) \quad = a_{11}^1 a_{13}^2 a_{13}^3 a_{22}^1 a_{31}^1 a_{31}^2 a_{33}^3 y_1 y_3 y_3 y_2 y_1 y_1 y_3$$

Observemos que el digrafo  $D$  es el siguiente.



Por lo tanto en  $D$  el vértice 1 tiene grado 3 de entrada y grado 3 de salida, es decir,  $m_1 = 3$ . Análogamente  $m_2 = 1$  y  $m_3 = 3$ . Observemos entonces que la palabra  $y_1y_3^2y_2y_1y_1y_3$  es suficiente para recrear el digrafo junto con el orden lineal de sus aristas. Veamos esto empezando con  $y_1y_3y_3y_2y_1y_1y_3$  y la palabra de la izquierda. Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , el número de  $y_j$  que aparece en la palabra es el grado de entrada  $m_j$  de  $j$ . Ya que  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 1$  y  $m_3 = 3$ . Las primeras tres aristas tienen vértice inicial 1, la cuarta arista tiene vértice inicial 2, la tercera tiene vértice inicial 3.

Como otro ejemplo, considere la palabra  $y_2y_1y_2y_3^2y_1^2$  y sea  $D$  el digrafo asociado. Esto implica que  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 2$ ,  $m_3 = 2$ . Se sigue que



$$w(D) = a_{12}^1 a_{11}^2 a_{12}^3 a_{23}^1 a_{23}^2 a_{31}^1 a_{31}^2 y_2 y_1 y_2 y_3^2 y_1^2$$

Dos digrafos  $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$  son considerados iguales sí y solo si para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y para cada  $t$ ,  $1 \leq t \leq m_i$ , la  $t$ -ésima arista de  $D_1$  tiene vértice inicial  $i$ , y la  $t$ -ésima arista de  $D_2$  tiene vértice inicial  $i$  y ambas tienen igual vértice terminal.

Consideremos el producto

$$(3.8) \quad \prod_{i=1}^n (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)^{m_i}.$$

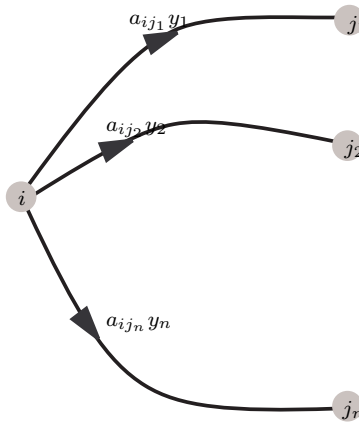
Etiquetamos los factores en cada potencia, es decir,

$$(a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)^{m_i} = (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)_1 (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)_2 \cdots (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)_{m_i},$$

y entonces escribimos  $a_{ij}^t$  en lugar de  $a_{ij}$  en el  $t$ -ésimo factor. Entonces el producto aparece como

$$(3.9) \quad (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)(a_{i1}^{(2)}y_1 + \cdots + a_{in}^{(2)}y_n) \cdots (a_{i1}^{(m_i)}y_1 + \cdots + a_{in}^{(m_i)}y_n).$$

Podemos ver (3.8) como el producto de la suma de las aristas que van del vértice  $i$  al vértice  $j$



Considere que en el producto de la expresión (3.9),  $i$  varía de 1 a  $n$ . Cada sumando del producto expandido que desarrolla una palabra en los  $y$ 's usando  $m_j$  de los  $y_j$ 's,  $1 \leq j \leq n$  corresponde a un único digrafo general en el cual cada vértice  $i$  tiene ambos grados de salida y de entrada iguales a  $m_i$ . Si removemos el superíndice  $t$  sobre el elemento  $a_{ij}^t$  y asumimos que las  $y$ 's conmutan, vemos que si  $B(m_1, \dots, m_n)$  es el coeficiente de  $y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$  en el producto cuando  $i$  va de 1 a  $n$  en la expresión (3.9), entonces

$$(3.10) \quad w(\mathcal{D}) = \sum_{D \in \mathcal{D}} w(D) = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \geq (0, \dots, 0)} B(m_1, \dots, m_n) y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$$

Así

$$\mathcal{D}(m_1, \dots, m_n) = \{D \in \mathcal{D} : m_i = d^-(i) = d^+(i) \text{ en } D\}.$$



Entonces

$$w(\mathcal{D}(m_1, \dots, m_n)) = \sum_{D \in \mathcal{D}(m_1, \dots, m_n)} w(D) = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \geq (0, \dots, 0)} B(m_1, \dots, m_n) y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$$

### 3. Teorema de Cayley-Hamilton

A continuación daremos una demostración del Teorema de Cayley-Hamilton.

DEFINICIÓN 3.3. Se sigue de la definición 2.33 que si  $A$  es una matriz de orden  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^k c_{n-k} \lambda^k + \cdots + (-1)^n c_n I_n, \end{aligned}$$

es un polinomio en  $\lambda$  de grado  $n$ , llamado *polinomio característico* de  $A$ , donde  $c_i$  es la suma de todos los menores principales de orden  $i$  de  $-A$  para  $i = 2, \dots, n$ .

TEOREMA 3.4. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $n$  y sea  $\mathcal{P}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ . Entonces el teorema de Cayley-Hamilton nos dice que la matriz  $\mathcal{P}(A)$  de orden  $n$  es la matriz cero. Es decir:

(3.11)

$$A^n + (-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn})A^{n-1} + c_2(-A)A^{n-2} + \cdots + c_k(-A)A^{n-k} + \cdots + \det(-A)I_n = 0_{ij},$$

donde  $c_i(-A)$  es la suma de todos los menores principales de orden  $i$  de  $-A$  para  $i = 2, \dots, n$ .

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que cada una de las entradas de la matriz que se encuentra a mano izquierda de (3.11) es cero. Fijemos  $(i, j)$  y sea  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(i, j)$  el conjunto de todos los pares ordenados  $(P, C)$  tal que:

- (1)  $P$  es una trayectoria de  $i$  a  $j$ .
- (2)  $C$  es la unión de ciclos disjuntos.
- (3) El total de aristas de  $P$  y  $C$  combinadas es igual a  $n$ .

La peso de una arista  $(k, m)$  es  $a_{km}$  y

$$w(P, C) = w(P)w(C) = (-1)^{c(C)}(\text{producto de todas los pesos de } P \text{ y } C).$$

Por ejemplo, si  $i = 1, j = 2, n = 5, (1 \rightarrow 3 \rightarrow 2, (1)(3, 5))$  es un elemento de  $\mathcal{A}$  cuyo peso es  $(-1)^2(a_{13}a_{32})[(a_{11})(a_{35}a_{53})]$ .

Ahora podemos asegurar que

$$(3.12) \quad w(\mathcal{A}(i, j)) = (i, j) \text{ entradas del lado izquierdo de (3.11).}$$

La trayectoria de P puede ser de cualquier longitud  $n - k$  para  $0 \leq k \leq n$ . El peso del conjunto de las trayectorias de longitud  $n - k$  de  $i$  a  $j$  es exactamente la entrada  $(i, j)$  de  $A^{n-k}$ . Tenemos  $k$  aristas para formar ciclos disjuntos y la libertad de elegir un subconjunto de  $k$ -elementos de  $[n]$  para sus vértices. El peso del conjunto de todo esto es igual a la suma de todos los menores principales  $k \times k$  de  $-A$ . Sumando sobre todo  $0 \leq k \leq n$  da (3.12) La prueba puede ser dada una vez que vemos que para todo  $i, j$

$$w(\mathcal{A}(i, j)) = 0$$

Para finalizar introducimos la siguiente función de  $\mathcal{A}(i, j)$  a si mismo. Dado  $(P, C)$  iniciamos en  $i$  y continuamos a lo largo de la trayectoria P hasta otra.

- Caso I: Va a un vértice P visitado previamente ó,
- Caso II: Va a un vértice que pertenece a uno de los ciclos de C.

En el caso I tenemos un ciclo atravesado de P cuyos vértices son disjuntos de todos los ciclos de C removemos el ciclo de P y lo unimos a C. En el caso II removemos el ciclo C y lo insertamos en P. Notemos que ambos casos no se dan de manera simultanea.

EJEMPLO 3.5. Sean  $n = 5$ ,  $i = 1$ , y  $j = 3$ .

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3; (5)) \leftrightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3; (23), (5))$$

$$(1 \rightarrow 3 \rightarrow 3; (3, 4, 5)) \leftrightarrow (1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 3; \emptyset).$$

La función define una involución sobre todos los elementos  $(P, C)$  de  $\mathcal{A}$ . Por conservación de aristas el valor absoluto de todos los pesos se queda igual, pero ya que por la paridad del número de ciclos de C cambia, el signo de los pesos es invertido. Así todos los elementos de  $w(\mathcal{A})$  pueden ser ordenados mutuamente cancelando pares y su suma es cero.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.6. Hemos dado una prueba del Teorema clásico de Cayley-Hamilton que ilustra que este teorema realmente trata acerca de los pesos de digrafos.

#### 4. Teorema Master de Macmahon para Permutaciones

A continuación daremos una demostración del Teorema Master de MacMahon para permutaciones.

**TEOREMA 3.7.** *Sea  $A(m_1, \dots, m_n)$  el coeficiente de  $y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$ , en la forma inversa  $\det(I_n - AY)^{-1}$  del polinomio  $\det(I_n - AY)$ . Sea  $B(m_1, \dots, m_n)$  el coeficiente  $y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n}$  en el producto*

$$(3.13) \quad \prod_{i=1}^n (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n)^{m_i}.$$

Entonces  $A(m_1, \dots, m_n) = B(m_1, \dots, m_n)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Hagamos  $\mathcal{G} = \mathcal{D} \times \mathcal{H} = \{(D, H) : D \in \mathcal{D}, H \in \mathcal{H}\}$  y definimos el peso de los pares  $(D, H)$  por  $w(D, H) = w(D) \cdot w(H)$ . Entonces

$$w(\mathcal{G}) := \sum_{(D,H) \in \mathcal{G}} w(D, H) = w(\mathcal{D}) \cdot w(\mathcal{H}).$$

Esto implica (por las expresiones (3.5) y (3.10)) que

$$w(\mathcal{G}) = \left( \sum_{(m_1, \dots, m_n) \geq (0, \dots, 0)} B(m_1, \dots, m_n) y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} \right) \cdot \det(I_n - AY).$$

Si podemos mostrar que  $w(\mathcal{G}) = 1$ , estaríamos probando el Teorema Master de MacMahon.

Denotamos  $\emptyset$  el digrafo de vértices  $1, 2, \dots, n$  con un conjunto vacío de aristas. Entonces  $w(\emptyset, \emptyset) = 1$ . Deseamos definir una involución en el conjunto  $\mathcal{G} \setminus (\emptyset, \emptyset)$  el cual es el signo de reversión sobre los pesos.

Dado un par  $(D, H) \in \mathcal{G} \setminus (\emptyset, \emptyset)$ , determinemos el primer vértice  $u$  cuyo primer grado de salida en  $D$  o  $H$  es positivo. A partir de ese vértice  $u$  caminamos a lo largo de las aristas de  $D$ , eligiendo siempre la arista superior (arista  $a_{ij}^t$  de  $i$  con  $t$  el más grande disponible), hasta que una de las siguientes situaciones ocurra:

- (1) Encontramos un vértice previamente visitado (y se tiene localizado un ciclo dirigido  $\gamma$  de  $D$ ).
- (2) Encontramos un vértice el cual tiene un grado de salida positivo en  $H$  (Y así es un vértice sobre un ciclo dirigido  $\delta$  de  $H$ ).

Notemos que si  $u$  es un vértice de grado de salida positivo en  $H$  entonces inmediatamente estamos en el segundo caso. También notemos que ambos casos no pueden ocurrir simultáneamente. Sí el primer caso ocurre, formamos un nuevo elemento de  $\mathcal{G}$  al remover  $\gamma$  de  $D$  y colocarlo en  $H$ . Si el segundo caso ocurre, removemos  $\delta$  de  $H$  y lo colocamos en  $D$  de tal forma que cada arista de  $\gamma$  es colocada en la frontera de este con igual vértice inicial. Sea  $(D', H')$  el par obtenido de esta forma. Entonces  $D' \in \mathcal{D}$  y  $H' \in \mathcal{H}$ , y por lo tanto  $(D', H') \in \mathcal{G}$ . Mas aún ya que el número de ciclos dirigidos en  $H'$  difiere del número en  $H$  por uno, de esto sigue que  $w(D', H') = -w(D, H)$ . Definimos  $\sigma : \mathcal{G} \setminus (\emptyset, \emptyset) \rightarrow \mathcal{G} \setminus (\emptyset, \emptyset)$ , tal que  $\sigma(D, H) = (D', H')$  y observe que  $\sigma(D', H') = (D, H)$ . Así  $\sigma$  es una involución sobre  $\mathcal{G} \setminus (\emptyset, \emptyset)$  la cual es el signo de reversión sobre los pesos. De esto se sigue que  $w(\mathcal{G}) = w(\emptyset, \emptyset) = 1$ . Por lo tanto la demostración esta completa.  $\square$

## CAPÍTULO 4

### Aplicaciones

El presente capítulo muestra algunas aplicaciones del Teorema Master de MacMahon, entre las que destaca la Identidad de Dixon.

#### 1. La identidad de Dixon como una aplicación del Teorema Master

A continuación mostraremos la identidad de Dixon haciendo uso del Teorema Master de MacMahon. Evaluaremos la suma  $S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^3$ .

Como cada sumando es el producto de tres coeficientes binomiales con super índice  $n$ , debemos considerar la expresión

$$(4.1) \quad \left(1 - \frac{x}{y}\right)^n \left(1 - \frac{y}{z}\right)^n \left(1 - \frac{z}{x}\right)^n = \sum_{0 \leq i, j, k \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{n}{k} (-1)^{i+j+k} x^{i-k} y^{j-i} z^{k-j}.$$

Para forzar los índices más bajos en el coeficiente binomial a ser iguales, aplicaremos el operador  $[x^0 y^0 z^0]$ . De lo anterior vemos que:

$$\begin{aligned} S &= [x^0 y^0 z^0] \left\{ \left(1 - \frac{x}{y}\right)^n \left(1 - \frac{y}{z}\right)^n \left(1 - \frac{z}{x}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i}^3 (-1)^{3i}. \end{aligned}$$

Podemos ver directamente que esto es igual a

$$= [x^n y^n z^n] \{(y-x)^n (z-y)^n (x-z)^n\}.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } Y = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Un simple calculo muestra que

$$I - AY = \begin{pmatrix} 1 & -y & z \\ x & 1 & -z \\ -x & y & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \det(I - AY)^{-1} &= (1 + xy + yz + zx)^{-1} \\ &= \sum_{i,j,k \geq 0} (-1)^{i+j+k} \binom{i+j+k}{i, j, k} (xy)^i (yz)^j (zx)^k. \end{aligned}$$

El Teorema Master de MacMahon con  $m_1 = m_2 = m_3 = n$  aplicado a  $I - AY$  dice que

$$[x^n y^n z^n] \{ \det(I - AY)^{-1} \} = [x^n y^n z^n] \{ (y - z)^n (z - x)^n (x - y)^n \},$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} S &= [x^n y^n z^n] \{ (y - z)^n (z - x)^n (x - y)^n \} \\ &= [x^n y^n z^n] \sum_{i,j,k \geq 0} (-1)^{i+j+k} \binom{i+j+k}{i, j, k} (xy)^i (yz)^j (zx)^k \\ &= \sum_{i,j,k \geq 0} (-1)^{i+j+k} \binom{i+j+k}{i, j, k}. \end{aligned}$$

donde la suma es sobre todos  $(i, j, k)$  para cada  $i + j = j + k = k + i = n$ . Por lo tanto  $i = j = k = n/2$ , y  $i, j$  y  $k$  son enteros. De esto se sigue que

$$S = \begin{cases} (-1)^m (3m)! (m!)^{-3}, & \text{si } n = 2m; \\ 0, & \text{En otro caso.} \end{cases}$$

EJEMPLO 4.1. Demostraremos que

$$(4.2) \quad \sum_i (-1)^i \binom{m+n}{m+i} \binom{n+k}{n+i} \binom{k+m}{k+i} = \frac{(m+n+k)!}{m!n!k!}$$

Sea  $S$  la suma dada en la identidad de Dixon.

$$\begin{aligned} S &= (-1)^{m+n+k} [x^{m+n} y^{n+k} z^{z+m}] (y-z)^{m+n} (z-x)^{n+k} (x-y)^{k+m} \\ &= (-1)^{m+n+k} [x^{m+n} y^{n+k} z^{z+m}] (1+xy+yz+zx)^{-1} \\ &= \frac{(m+n+k)!}{m!n!k!}. \end{aligned}$$

## 2. Otras Identidades

En la presente sección mostraremos identidades haciendo uso del Teorema Master de MacMahon.

EJEMPLO 4.2. Sea  $D$  el digrafo general con aristas

$$D : a_{15}^1 a_{23}^1 a_{32}^1 a_{35}^2 a_{31}^3 a_{53}^1 a_{53}^2.$$

Sea  $X = \{2, 3, 4, 6\} \subseteq [6]$ . Sea  $\pi = (2, 4, 6)(3) \in S_X$  y sea  $H = D(\pi) : a_{24} a_{33} a_{46} a_{62}$ . Ya que el primer v\u00e9rtice tiene un grado de salida positivo en  $D$ . Comenzamos caminando a lo largo de las aristas en  $D$ : primero es  $a_{15}^1$ . Como 5 no tiene grado de salida positivo en  $H$ , la proxima arista es  $a_{53}^2$ . Como tres tiene un grado de salida positivo en  $H$  y pertenece a un ciclo dirigido (el cual es un bucle)  $\delta = a_{33}$ . Colocamos este bucle en  $D$  como arista  $a_{33}^4$ , y removemos este de  $H$  para obtener  $H' = a_{24} a_{46} a_{62}$ . As\u00ed  $\sigma(D, H) = (D', H')$ . Ahora verifiquemos que  $\sigma(D, H) = (D', H')$ . As\u00ed, siendo  $D$  igual a  $D'$  anteriormente, y supongamos que  $X = \{2, 4, 6\}$  y  $\pi = (2, 4, 6)$ . As\u00ed

$$(D, H) = (a_{15}^1 a_{23}^1 a_{32}^1 a_{35}^2 a_{31}^3 a_{33}^4 a_{53}^1 a_{53}^2, a_{24} a_{46} a_{62})$$

Empezamos nuestro camino con  $a_{15}^1$ , movi\u00e9ndose a  $a_{53}^2$ , hacia  $a_{33}^4$ . Ya que 3 es un v\u00e9rtice repetido, el bucle  $\gamma = 3 \rightarrow 3$  representado por  $a_{33}^4$  es removido de  $D$  y adjunto a  $H$  como el bucle  $a_{33}$ . Hemos obtenido el elemento original de  $\mathcal{G}$ .

Especifiquemos para  $n = 2$ .

Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden 2,  $I_2$  la matriz identidad de orden 2 y  $Y = [y_j]$  una matriz diagonal de orden 2 entonces

$$\begin{aligned} \det(I_2 - AY)^{-1} &= (1 - a_{11}y_1 - a_{22}y_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1y_2)^{-1} \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \geq (0,0)} \left( \sum_i \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{m_1 - i} a_{11}^i a_{12}^{m_1 - i} a_{21}^{m_1 - i} a_{22}^{m_2 - m_1 + i} \right) y_1^{m_1} y_2^{m_2}. \end{aligned}$$

Observemos que si algún  $a_{ij} = 0$ , entonces para obtener una contribución distinta de cero de la potencia sobre  $a_{ij}$  debe ser cero.

Calculemos  $\det(I - AY)^{-1}$  directamente, obtenemos

$$(4.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} [a_{11}y_1 + a_{22}y_2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1y_2]^k.$$

Entonces calculando del coeficiente de  $y_1^{m_1}y_2^{m_2}$  en esta suma (y escribiendo  $\Delta$  en lugar de  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ) obtenemos

$$(4.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k-m_2, k-m_1, m_1+m_2-k} a_{11}^{k-m_2} a_{22}^{k-m_1} \Delta^{m_1+m_2-k} (-1)^{m_1+m_2-k}.$$

Esto da una variedad de igualdades. En particular, supongamos cada  $a_{ij} = 1$ . Por lo tanto  $\Delta = 0$  así  $k = m_1 + m_2$  para una contribución distinta de cero. Entonces el Teorema Master da la igualdad:

$$(4.5) \quad \sum_i \binom{m_1}{i} \binom{m_2}{m_1-i} = \binom{m_1+m_2}{m_1, m_2, 0} = \binom{m_1+m_2}{m_1}.$$

EJEMPLO 4.3. Demostraremos que

$$\sum_k \binom{k}{k-m, k-n, m+n-k} (-1)^{m+n-k} = 1.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(4.6) \quad \det(I_2 - AY)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [a_{11}y_1 + a_{22}y_2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1y_2]^k$$

Calculando del coeficiente de  $y_1^m y_2^n$  en esta suma (y escribiendo  $\Delta$  en lugar de  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ) obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{k-n, k-m, m+n-k} a_{11}^{k-n} a_{22}^{k-m} \Delta^{m+n-k} (-1)^{m+n-k} = \\ & \sum_k \binom{k}{k-m, k-n, m+n-k} (-1)^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$(4.7) \quad \det(I_2 - AY)^{-1} = \sum_k \binom{k}{k-m, k-n, m+n-k} (-1)^{m+n-k}.$$



Por otra parte

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^2 (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2)^{m_i} &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)^{m_1} (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)^{m_2} \\ &= (y_1)^m (y_2)^n. \end{aligned}$$

donde  $m_1 = m$  y  $m_2 = n$ .

Entonces el coeficiente de  $y_1^m y_2^n$  en este producto es 1. Luego por el aplicando el teorema Master de MacMahon

$$\sum_k \binom{k}{k-m, k-n, m+n-k} (-1)^{m+n-k} = 1.$$

EJEMPLO 4.4. Aplicando el teorema Master de MacMahon a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$Y = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$BY = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$I_3 - BY = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ x & 1 & z \\ x & y & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\det(I_3 - BY)^{-1} = (1 - 2xyz - xy - yz - zx)^{-1}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^3 (b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + b_{i3}y_3)^{m_i} &= \\ &= (b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3)^{m_1} (b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3)^{m_2} (b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3)^{m_3} \\ &= (y + z)^{m_1} (x + z)^{m_2} (x + y)^{m_3} \end{aligned}$$

Luego por el teorema Master de MacMahon, el coeficiente de  $x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}$  en  $(1 - 2xyz - xy - yz - zx)^{-1}$  es igual al coeficiente de  $x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3}$  en  $(y + z)^{m_1}(x + z)^{m_2}(x + y)^{m_3}$ . Haciendo  $m_1 = m_2 = m_3$  tenemos

$$(4.8) \quad \sum_i \binom{m}{i}^3 = \sum_n \binom{m+n}{m-2n, n, n, n} \cdot 2^{m-2n}.$$

## Conclusiones

La teoría combinatoria de matrices resulta ser tanto una de las más importantes como interesantes presentes en lo combinatorio y matricial, puesto que permite obtener resultados, presentar definiciones, ejemplos, y demostrar entre otras cosas, haciendo uso de la teoría de matrices y de la teoría de grafos. A través del uso de esta teoría demostramos resultados tan importantes como el Teorema de Cayley-Hamilton y el Teorema Master de MacMahon y también podemos demostrar resultados mas sencillos, entre los que destacan los los teoremas de determinantes de matrices.

## Bibliografía

- (1) RICHARD A BRUALDI, DRAGOS CVETKOVIĆ. *Combinatorial Approach to matrix Theory its Applications*. Discrete Mathematics and its applications. CRC Press, 2009.
- (2) DORON ZEILBERGER. *A Combinatorial Approach to Matrix Algebra*. Discrete Mathematics 56 (1985) 61-72.
- (3) RICHARD A. BRUALDI Y HERBERT J RYSER. *Combinatorial Matrix Theory*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- (4) S. E. PAYNE. *Applied Combinatorics*. Lecture Notes. 2003.
- (5) MICHELLE L. RITTENHIUSE, *Propieties and Recent Applications in Spectarl Graph Theory*. Bachelor of Science, University of Pittsburgh. Johnstown, PA 1989.
- (6) P. A. MACMAHON. *Combinatory Analysis*. 2 vols, Cambridge University Press, 1915-16.
- (7) B. LIU AND H. LAI. *Matrices in Combinatorics and Graph Theory*. Network Theory an Applications. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 2000.
- (8) H. J. RYSER. *Combinatorial Matrix Theory*. Studies in Combinatorics. Studies in Mathematics. Volume 17. Gian-Carlo Rota, editor. M.A.A. 1978.