UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

UNA PRUEBA ELEMENTAL DE LA DESIGUALDAD DE HILBERT

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br.Hovsep Nazarett Pernalette Macedo** para optar al título de Licenciado en Matemática.
Tutor: Marisela Domínguez.

Caracas, Venezuela
2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado, presentado por el **Br. Hovsep Nazarett Pernalette Macedo**, titular de la Cédula de Identidad **18.009.309**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Prof. Marisela Domínguez
Tutor

Prof.
Mayra Montilla

Prof.
Maicol Ochoa

Agradecimiento.

Para aquellas personas que compartieron sus diversas creencias, ideas y posturas; las que hoy forman parte no sólo de mí, sino de mis actos. Primero que nada quisiera reconocer las acciones realizadas por Mayley Macedo que, como cuan altruista me ha apoyado con su generosidad y comprensión no sólo en el transcurso de este tan importante ciclo sino a lo largo de la vida misma.

Cabe destacar mis sinceros agradecimientos que van dirigidos desde la Profesora Marisela Domínguez; hasta todos los demás profesores que estuvieron día tras día en el frente de las aulas, sirviendo de apoyo y desempeñando un papel fundamental, el cual hoy logro hacer cotejo y entender sus enseñanzas y sus esfuerzos.

Sin olvidar que algunos de ellos, fueron guías y verdaderos mentores a lo largo de esta dificultosa jornada como lo fue esta peculiar carrera. Mientras que otros, no tan inspiradores contribuyeron de manera no tan grata, pero gracias a su severidad le brindaron fortaleza a mi empeño para que así no se viera doblegado por ninguno de los obstáculos que pudieron haber surgido a lo largo de este ciclo que está por culminar.

Índice general

INTRODUCCIÓN.

La teoría de funciones de variable compleja es una de las ramas más aplicables en el análisis matemático. Como es usual, muchos de los resultados expuestos en $\mathbb{C}$ no son más que extensiones de resultados previos en $\mathbb{R}$. El presente trabajo se desarrolla en el marco teórico de las funciones de variable compleja.

El propósito de esta monografía es presentar la demostración de Oleszkiewicz de la desigualdad de Hilbert. Para esto, se toma como base su artículo *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality* [**6**].

La siguiente monografía está estructurada en dos capítulos. El primer capítulo es un preámbulo compuesto por definiciones, ejemplos y conceptos importantes que permitirán abordar las demostraciones que se presentarán en el capítulo siguiente, especialmente para la desigualdad de Hilbert (Teorema 2.1).

En el segundo capítulo se desarrollan los resultados que permiten comprender el artículo de Oleszkiewicz. En éste se demuestran en detalle los resultados que permiten probar la desigualdad de Hilbert.

Finalmente, como lectura adicional se presentan algunos comentarios de la desigualdad de Hilbert. Estos fueron tomados del libro *Inequalities* de Hardy, Littlewood y Polya [**4**]. En este libro también se pueden ver aplicaciones de esta desigualdad a la teoría de funciones analíticas y a la teoría de funciones de variable real.

CAPíTULO 1

NOCIONES DE FUNCIONES ANALÍTICAS.

A continuación se presentan definiciones y resultados elementales de funciones analíticas que permitirán un mejor entendimiento de los próximos capítulos. Los libros [**1, 2, 3**] presentan la teoría de funciones analíticas en forma detallada.

1. Puntos singulares.

En lo que sigue D es un abierto conexo en $\mathbb{C}$, $D_0 \subset D$ y $f : D_0 \to \mathbb{C}$ es una función.

Un *punto singular o singularidad* para f es un punto de $\mathbb{C}$ en el que f no es analítica.

Una *singularidad aislada* para f es un punto singular para f, tal que existe un entorno que no contiene otros puntos singulares.

1.1. Polos.

Sean D un abierto conexo en $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ y $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica.

Se dice que el punto z_0 es un *polo* de f si es una singularidad aislada y existe un entero $n \geq 1$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = w$$

donde $w \neq 0$. Es decir, el límite existe y es diferente de cero.

Si k es el menor entero que cumple esta propiedad, entonces k es el *orden del polo* y se dice que z_0 es un *polo de orden* k.

Si $n = 1$ se dice que z_o es un *polo simple*.

1.2. Singularidades evitables.

Sean D un abierto conexo en $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ y $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica.

Se dice que z_0 es una *singularidad evitable* para f, cuando existe

$$\lim_{z \to z_0} f(z).$$

En este caso, es usual redefinir f de la siguiente manera

$$\varphi(z)=\begin{cases} f(z) & \text{si } z\neq z_0\\ \lim_{z\to z_0} f(z) & \text{si } z=z_0\end{cases}$$

Dicha función φ es analítica en D.

Ejemplo 1. Sea $f:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ dada por

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}.$$

Es claro que f no está definida en $z_0=0$ pero es fácil ver que es una singularidad evitable. En efecto

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}=1.$$

Por lo tanto, si se considera

$$g(z)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 1 & \text{si } z=0\end{cases}$$

se obtiene una función analítica en $z_0=0$.

Ejemplo 2. Sea $h:\mathbb{C}\backslash\{0\}\to\mathbb{C}$ dada por

$$h(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}.$$

Para estudiar el comportamiento de h alrededor del punto $z_0=0$ se observa que

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos(z)}{z^2}=1/2.$$

Por lo tanto, h tiene una singularidad evitable en $z_0=0$.

La función

$$\varphi(z)=\begin{cases} \frac{1-\cos(z)}{z^2} & \text{si } z\neq 0\\ 1/2 & \text{si } z=0\end{cases}$$

se usa para redefinir h de forma amalítica en $z_0=0$.

Proposición 1. *Se tiene que: z_o es una singularidad evitable para f si y sólo si f tiene una extensión analítica a todo D.*

1.3. Singularidades esenciales.

Sean D un abierto conexo en $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$ y $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica.

Se dice que z_0 es una *singularidad esencial* para f, cuando z_0 es una singularidad para f que **no** es ni un polo ni una singularidad evitable.

PROPOSICIÓN 2. *Se tiene que: z_0 es una singularidad esencial de f si y sólo si* **no** *existe $n \geq 1$ tal que*

$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0.$$

EJEMPLO 3. Sea $e^{\frac{1}{z}}$ posee una singularidad esencial en $z_0 = 0$, en efecto

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

1.4. Singularidades en infinito.

Sean D un abierto conexo en $\mathbb{C}$, y $f : D \to \mathbb{C}$ una función analítica.

Se dice que ∞ es una singularidad de f, cuando 0 es una singularidad de g, donde

$$g(w) = f(1/w).$$

2. Series de Laurent.

Las series de Laurent proporcionan una manera de representar una función f de variable compleja, en la forma de una serie de potencias, en la que aparecen grados positivos y negativos. Esta serie es muy útil, para expresar funciones de variable compleja en muchos casos donde el desarrollo de la serie de Taylor no es aplicable o no puede ser adaptado, ya que la función no es analítica en algunos puntos.

Estas series fueron descubiertas y estudiadas en el año 1841, por el prestigioso científico Karl Weierstrass; pero éstas no fueron presentadas a la comunidad científica hasta que el matemático francés Pierre Alphonse Laurent las divulgó a través de una publicación en el año de 1843. Esta investigación, presentaba una especie de expansión de funciones, en una serie de potencia infinita; la cual no era más que una generalización del desarrollo de Taylor.

TEOREMA 1.1 (Teorema de Laurent). *Sean C_1 y C_2 dos círculos concéntricos con centro en el punto z_0. Si f es una función analítica en la región limitada por C_1 y C_2, entonces*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{1.1}$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

para un círculo C, con centro en z_0, que está en la región limitada por C_1 y C_2.

El desarrollo (1.1) es llamado el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_0.

Ejemplo 4. Se presentará el desarrollo en serie de Laurent de la siguiente función, alrededor del punto $z = -1$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2+3z+2} \\ &= \frac{1}{z+1}.\frac{1}{z+2} \\ &= \frac{1}{z+1}.\frac{1}{1-(-z-1)} \\ &= \frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^k \qquad |z+1|<1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+1)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Sea

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[p]{z}}.\frac{1}{z+1}$$

en la siguiente región $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 <\mid z \mid< 1\}$. Desarrollando su correspondiente serie de Laurent. Si $\mid z \mid< 1$ entonces

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

De tal manera

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-\frac{1}{p}}.$$

Ejemplo 6. Análogamente para

$$g(z) = \frac{1}{z^{1+\frac{1}{p}}}.\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

en la región $D_2 = \{z \in \mathbb{C} :| z |> 1\}$ entonces su serie viene dada

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.z^{-n}$$

Y así

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1-\frac{1}{p}}.$$

Es importante resaltar que dada una f cualquiera ésta puede ser escrita como suma de una parte singular y una parte analítica. Es decir, una parte en donde f no es analítica y otra en la que si lo es.

Ejemplo 7. Del Ejemplo 3, se tiene que

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^n}{(-n)!}$$

con una singularidad esencial en $z_0 = 0$. Ahora escribimos a f de la siguiente manera

$$\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^n}{(-n)!} = \underbrace{1}_{\text{Parte analítica}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{1}\frac{z^n}{(-n)!}}_{\text{Parte singular}}.$$

Proposición 3. *Si la parte singular es igual a cero entonces la función tiene una singularidad evitable en z_0.*

Proposición 4. *Si a una función le restamos su parte singular entonces la función es analítica.*

Proposición 5. *Un punto z_0 es un polo de f de orden N, si y sólo si los coeficientes c_k del desarrollo de Laurent de f son nulos para $k < -N$. En este caso*

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N} + ... + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k.$$

Proposición 6. *Un punto z_0 es una sigularidad esencial de f si y sólo si los coeficientes de Laurent con respecto a f son diferentes de cero para infinitos valores negativos de k.*

Proposición 7. *Un punto z_0 es un polo de f de orden N si y sólo si*

$$f(z) = (z-z_0)^{-N}g(z)$$

donde g es una función analítica en un entorno de z_0 tal que $g(z_0) \neq 0$.

PROPOSICIÓN 8. *Si f es analítica en 0 y no es un polinomio entonces $f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0.*

PROPOSICIÓN 9. *Si f es analítica y f tiene un polo en ∞ entonces f es un polinomio.*

EJEMPLO 8. Considerando los siguientes términos de números finitos dados por

$$\frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + ... + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a}$$

donde $c_{-k} \neq 0$ y $k \geq 1$.

3. Residuos.

3.1. Residuos de funciones analíticas en una corona.

En adelante se llamara corona a la región limitada por dos círculos concéntricos.

DEFINICIÓN 1. Sea f analítica en una corona. Con desarrollo en serie de Laurent $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, se le llama *residuo* de f en $z = z_0$ al coeficiente c_{-1} y se denota mediante $\operatorname{Res}(f, z = z_0)$.

Luego

$$\operatorname{Res}(f, z = z_0) = c_{-1} = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)} . \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k . f(z)].$$

PROPOSICIÓN 10. *Si f es analítica en $\mathbb{C}$ entonces su residuo es 0 en cualquier punto.*

PROPOSICIÓN 11. *Si f es analítica en C y z_0 es un polo simple de f entonces*

$$Res(f, z = z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

PROPOSICIÓN 12. *Si f es analítica en C y z_0 es un polo de orden n de f entonces*

$$Res(f, z = z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{((z-z_0)^n f(z))^{(n-1)}}{(n-1)!}.$$

PROPOSICIÓN 13. *Si $Res(f, z = z_0) = 0$ entonces la diferencial de f es exacta en una corona alrededor de z_0.*

PROPOSICIÓN 14. *Si f es analítica en C entonces la función $f - Res(f, z = z_0)$ tiene una primitiva analítica en C.*

Ejemplo 9. Sea
$$f(z)=\frac{e^z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$
con $\alpha\neq\beta$
$$Res(f,z=\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{e^z}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{e^z}{(z-\beta)}=\frac{e^\alpha}{(\alpha-\beta)}.$$

Ejemplo 10. Sea
$$f(z)=\frac{e^z}{(z-z_0)^n}$$
y
$$Res(f,z=z_0)=\frac{e^{z_0}}{(n-1)!}$$
porque
$$f(z)=\frac{e^z}{(z-z_0)^n}=\frac{e^z}{(z-z_0)^n}.\frac{e^{z_0}}{e^{z_0}}=\frac{e^{z_0}e^{z-z_0}}{(z-z_0)^n}=\frac{e^{z_0}}{(z-z_0)^n}\left(1+\frac{z-z_0}{1!}+\frac{(z-z_0)^2}{2!}+...\right).$$
Luego
$$c_{-1}=\frac{e^{z_0}}{(n-1)!}.$$

Otra manera de demostrar el resultado anterior es
$$\begin{aligned}Res(f,z=z_0)&=\lim_{z\to z_0}\frac{((z-z_0)^nf(z))^{(n-1)}}{(n-1)!}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{\left((z-z_0)^n\frac{e^z}{(z-z_0)^n}\right)^{(n-1)}}{(n-1)!}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{(e^z)^{(n-1)}}{(n-1)!}\\&=\lim_{z\to z_0}\frac{e^z}{(n-1)!}\\&=\frac{e^{z_0}}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

Teorema 1.2. *Dada f una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada γ excepto en un punto z_0 que se encuentra en el interior de ésta. La función f posee una serie de Laurent en torno al punto $z=z_0$ que viene representada por*
$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+...$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particular tomando $k=-1$, se deduce

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i c_{-1}.$$

Proposición 15.

$$Res(f, z=z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz$$

donde $\gamma = \partial B(z_0, r)$.

3.2. El teorema del residuo.

El siguiente teorema es muy útil para calcular integrales de variable real, tal como se verá en el Lema 1.

Teorema 1.3 (Teorema del residuo). *Sea f una función analítica dentro y sobre una curva simple y cerrada γ excepto en los puntos $z_1, ..., z_n$ que se encuentra en el interior de ésta. Entonces*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f, z=z_k).$$

Ejemplo 11. Dada

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)z^2}.$$

El punto $z=-1$ es un polo simple y el punto $z=0$ es un polo de orden 2. Para el cálculo de los residuos se procede de la forma siguiente:

(a) Para $z=-1$:

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{(z+1)z^2} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z^2} = 1.$$

(b) Para $z=0$:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[z^2\frac{1}{(z+1)z^2}] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}[\frac{1}{(z+1)}] = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{(z+1)^2} = -1.$$

Si γ es la circunferencia de centro en 0 y radio 2 entonces

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i[1-1] = 0.$$

Lema 1. *Dado* $p > 1$ *entonces*

$$\int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{p}}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Demostración. En principio, se considerará la integral de variable compleja dada por

$$\oint_C \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z}dz$$

donde C es la región compuesta de la siguiente forma.

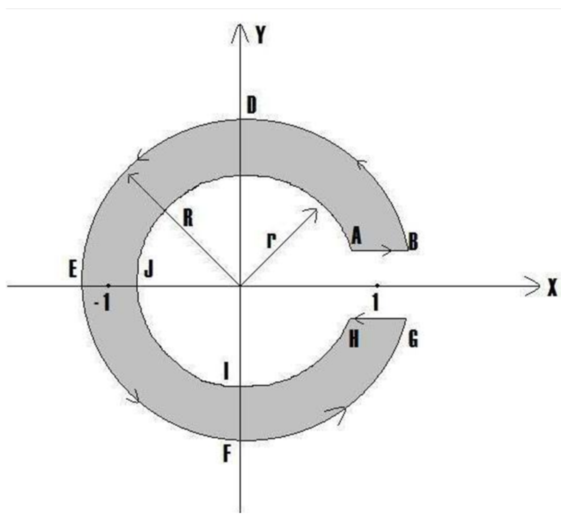


Figura 1.1.

Los segmento AB y GH son paralelos entre sí y con el eje real positivo.

Sea

$$f(z) = \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z}.$$

Fácilmente se deduce que f posee un polo simple en $z = -1$ dentro de la región C.

Si $z = -1$ entonces

$$z = \cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi) = e^{\pi i}.$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z=-1) &= \lim_{z \longrightarrow -1} (z+1).f(z) \\
&= \lim_{z \longrightarrow -1} (z+1).\frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z} \\
&= \lim_{z \longrightarrow -1} z^{-\frac{1}{p}} \\
&= e^{-\frac{\pi i}{p}}.
\end{aligned}$$

Por el teorema de los residuos

$$\oint_C \frac{z^{-\frac{1}{p}}}{1+z} dz = 2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}}.$$

Por otro lado, de acuerdo a las integrales de caminos se tiene que

$$\begin{aligned}
2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}} &= \int_{AB} f(z)dz + \int_{BDEFG} f(z)dz + \int_{GH} f(z)dz + \int_{HJA} f(z)dz \\
&= \int_r^R \frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}} iRe^{\theta i} d\theta + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{-\frac{1}{p}}}{1+xe^{2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+re^{\theta i}} ire^{\theta i} d\theta.
\end{aligned}$$

Esto último se obtuvo por hacer el cambio $z = xe^{2\pi i}$ en la tercera integral, además se debe tener presente que el argumento de z aumenta a 2π al dar una vuelta alrededor del círculo $BDEFG$.

De esta manera si se hace $r \longrightarrow 0$ y $R \longrightarrow \infty$, se puede observar que tanto la segunda y tercera integral del resultado anterior, se anulan.

En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{R \longrightarrow \infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}} iRe^{\theta i} \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{R \longrightarrow \infty} \frac{(Re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+Re^{\theta i}} iRe^{\theta i} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{R \longrightarrow \infty} \frac{iRe^{\theta i}}{(Re^{\theta i})^{\frac{1}{p}}(1+Re^{\theta i})} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\lim_{R \longrightarrow \infty} \frac{i}{(Re^{\theta i})^{\frac{1}{p}}} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 0 d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para calcular el otro límite se procederá de manera similar, pero antes se hará el siguiente cambio de variable $u = r^{\frac{1}{p}}$ donde $u \longrightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{r\longrightarrow 0}\left(\int_{2\pi}^{0}\frac{(re^{\theta i})^{-\frac{1}{p}}}{1+re^{\theta i}}ire^{\theta i}\right)d\theta &= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}\left(\lim_{r\longrightarrow 0}\frac{r}{r^{1/p}(1+re^{\theta i})}\right)d\theta \\
&= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}\left(\lim_{u\longrightarrow 0}\frac{u^{p}}{u(1+ue^{\theta i})}\right)d\theta \\
&= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}\left(\lim_{u\longrightarrow 0}\frac{u^{p-1}}{(1+ue^{\theta i})}\right)d\theta \\
&= \int_{2\pi}^{0}\frac{ie^{\theta i}}{e^{\frac{\theta i}{p}}}(0)\,d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para terminar la demostración, basta calcular las otras dos integrales restantes.

$$\begin{aligned}
2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}} &= \int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx + \int_{\infty}^{o}\frac{(xe^{2\pi i})^{-\frac{1}{p}}}{1+xe^{2\pi i}}dx \\
&= \int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx - \int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}e^{-\frac{2\pi i}{p}}}{1+xe^{2\pi i}}dx \\
&= \int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx - e^{-\frac{2\pi i}{p}}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x(\cos(2\pi)+i\operatorname{sen}(2\pi))}dx \\
&= \left(1-e^{-\frac{2\pi i}{p}}\right)\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx.
\end{aligned}$$

De donde

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1}{p}}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{-\frac{\pi i}{p}}}{1-e^{-\frac{2\pi i}{p}}} = \frac{2\pi i}{e^{\frac{\pi i}{p}}\left(1-\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{p}}}\right)} = \frac{\pi}{\left(\frac{e^{\frac{\pi i}{p}}-e^{-\frac{\pi i}{p}}}{2i}\right)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}.$$

Por lo tanto se deduce el resultado buscado. □

4. Desarrollo de Mittag-Leffler.

Antes de enunicar el Teorema del desarrollo de Mittag-Leffler, primero se demostrará un resultado, el cual será de gran importancia a la hora de la aplicación del teorema.

Proposición 16. *La función* $\csc(\pi z)$ *está acotada en* C_m *un círculo con centro en el origen y radio* $R_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$*, para* m *un entero positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un entero positivo m, tómese C_m un círculo con centro en el origen y radio $R_m = m\pi + \frac{\pi}{2}$. Sea $z = x + iy$, donde $\pi x = R_m$.

$$\begin{aligned}
|\csc(\pi z)| &= \left| \frac{2i}{e^{\pi z i} - e^{-\pi z i}} \right| \\
&= \frac{|2i|}{|e^{\pi x i - \pi y} - e^{-\pi x i + \pi y}|} \\
&= \frac{2}{|e^{(m\pi + \frac{\pi}{2})i - \pi y} - e^{-(m\pi + \frac{\pi}{2})i + \pi y}|} \\
&\leq \frac{2}{|e^{-(m\pi + \frac{\pi}{2})i + \pi y}| - |e^{(m\pi + \frac{\pi}{2})i - \pi y}|} \\
&\leq \frac{2}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \qquad \forall y \neq 0 \\
&\leq \operatorname{csch}(\pi y).
\end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.4 (Desarrollo de Mittag-Leffler). *Sea f con polos simples en el plano finito complejo, $c_1, c_2, c_3, ...$ ordenados de forma creciente por su módulo y con sus residuos respectivos $b_1, b_2, b_3, ...$ considerando $C_1, ..., C_k$ círculos de radio $R_1, ..., R_k$ tal que*

(a) *C_k no contiene ninguno de los polos de f.*
(b) *Existe $M > 0$ independiente de k tal que $| f(z) | \leq M$ para todo $z \in C_k$ con $k = 1, 2, ...$*
(c) *Si $k \to \infty$ entonces $R_k \to \infty$.*

Entonces el desarrollo de Mittag-Leffler con respecto a f es

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - c_n} + \frac{1}{c_n} \right).$$

La demostración de este teorema puede verse en [**5**].

EJEMPLO 12. El desarrollo de Mittag-Leffler de la cosecante es

$$\csc(z) = \frac{1}{z} - 2z \left(\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \frac{1}{z^2 - 9\pi^2} - ... \right).$$

En efecto, consideraremos

$$f(z) = \csc(z) - \frac{1}{z} = \frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z \operatorname{sen}(z)}.$$

Entonces f tiene polos simples en $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \left(\frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z \operatorname{sen}(z)} \right) = \left(\lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\operatorname{sen}(z)} \right) \cdot \left(\lim_{z \to n\pi} \frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z} \right).$$

Además es fácil ver que los límites existen, de hecho

$$\lim_{z \to n\pi} \frac{z - n\pi}{\operatorname{sen}(z)} = (-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

debido a la periodicidad de la función. Por otro lado, el segundo se deduce por sustitución

$$\lim_{z \to n\pi} \frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z} = 1.$$

Ahora bien, estudiando el comportamiento en $z = 0$. Se evidencia una singularidad removible ya que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \operatorname{sen}(z)}{z \operatorname{sen}(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos(z)}{\operatorname{sen}(z) + z \cos(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{2 \cos(z) - z \operatorname{sen}(z)} = 0$$

este resultado se obtuvo aplicando la regla de L'Hôpital. Por esto, es posible definir $f(0) = 0$.

Ahora bien, para ver que f está acotada, sean C_N los círculos con centro en el origen, lo suficientemente grandes para que así z logre caer en el interior de estos. Por definición de f, el término $1/z$ satisface la previa afirmación.

Tomándose el radio de C_N como $R_N = (N + \frac{1}{2})\pi$. Por la Proposición 16, se tiene que $\csc(\pi z) \leq \operatorname{csch}(\pi y)$. Además si $N \to \infty$ entonces $R_N \to \infty$.

Después de deducir que f está acotada sobre los círculos C_N con centro en el origen y radio $R_N = (N + \frac{1}{2})\pi$, usando el desarrollo de Mittag-Leffler, se tiene que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - c_n} + \frac{1}{c_n} \right)$$

donde $b_n = (-1)^n$ y $c_n = n\pi$. Por lo tanto

$$\csc(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right). \tag{1.2}$$

Ahora bien, para concluir con la prueba se puede escribir el resultado (1.2) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\csc(z) &= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=-N}^{-1}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{-\left(\frac{1}{z+\pi}+\frac{1}{z-\pi}\right)+ \ldots\ldots + (-1)^N\left(\frac{1}{z+N\pi}+\frac{1}{z-N\pi}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{-\frac{2z}{z^2-\pi^2}+\frac{2z}{z^2-4\pi^2}- \ldots + (-1)^N\frac{2z}{z^2-N^2\pi^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z} + \lim_{N\to\infty}\left\{-\frac{2z}{z^2-\pi^2}+\frac{2z}{z^2-4\pi^2}- \ldots + (-1)^N\frac{2z}{z^2-N^2\pi^2}\right\}\\
&= \frac{1}{z} - 2z\left\{\frac{1}{z^2-\pi^2}-\frac{1}{z^2-4\pi^2}+\frac{1}{z^2-9\pi^2}- \ldots\ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.5 (Teorema de Liouville). *Si f es entera y acotada para todos los valores de z en el plano complejo, entonces $f(z)$ es constante.*

Corolario 1. *Sea φ la función de la forma*

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+n}+\frac{1}{z-n}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$$

entonces $\varphi(z) = 0$.

Demostración. Para la prueba, se procederá a usar el resultado obtenido en el ejemplo 12. El cual puede escribirse

$$\csc(z) = \frac{1}{z} - 2z\left\{\frac{1}{z^2-\pi^2}-\frac{1}{z^2-4\pi^2}+\frac{1}{z^2-9\pi^2}- \ldots\ldots\right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}.$$

Ahora bien, sustituyendo esta expresión en φ, se deduce

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \pi \csc(\pi z) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{\pi z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2(\pi z)}{(\pi z)^2 - n^2\pi^2}\right) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{\pi z} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}\right) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z-n+z+n}{z^2 - n^2}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

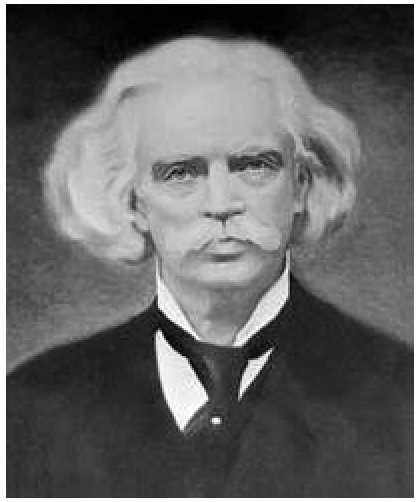
Y por lo tanto se obtiene la prueba buscada. $\square$

Note que φ es una función analítica acotada y entera (definiendo $\varphi(z) = 0$ cuando z es un entero), usando el teorema de Liouville se deduce que $\varphi(z)$ es idénticamente cero.

5. Notas históricas.

Pierre Alphonse Laurent, nacido el 18 de julio de 1813, fue un matemático que contribuyó de manera relevante al estudio de funciones de variable compleja. Su obra más importante fue publicada después de su fallecimiento, ya que había sido contenida en una memoria presentada por el Gran Premio de la Academia de Ciencias en 1843. Pero su presentación se llevó a cabo posteriormente a la fecha pautada, y el documento no fue publicado perdiendo así, la participación al premio. Muere el 2 de septiembre de 1854 con la edad de 41 años.

Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler nació el 16 de marzo de 1846 en Estocolmo, hijo del director de una prestigiosa escuela. John Olof Leffler y de Gustava Wilhelmina Mittag, cuyo apellido con el tiempo añadiría al paterno. Tuvo una hermana llamada Anne Charlotte Leffler la cual se inclino hacia el campo literario. Se matriculó en la Universidad de Uppsala en 1865, obteniendo su doctorado en 1872 y logrando así, ser miembro del cuerpo docente de la universidad ese mismo año. Más adelante fue director de la Stockholm Nation entre los años de 1872 y 1873.



Posteriormente viajó a París, Göttingen y Berlín antes de lograr una cátedra de matemáticas en la Universidad de Helsinki la que ocupó en los años de 1877 a 1881.

Mittag-Leffler también fundó la revista Acta Mathematica (1882), parcialmente sufragado por la fortuna de su esposa Signe Lindfors, una mujer de acaudalada familia finlandesa, además de reunir una biblioteca de textos matemáticos en su villa en Djursholm, a las afueras de Estocolmo. La casa y su contenido fue destinado como donación a la Academia de las Ciencias y renombrado como Instituto Mittag-Leffler. Este instituto está dedicado al desarrollo de la enseñanza de la matemática a un nivel avanzado.

Sin embargo, es importante mencionar que fue miembro de la Real Academia de las Ciencias de Suecia desde 1883, de la Sociedad Finlandesa de las Ciencias y las Letras desde 1878, de la Real Sociedad Sueca de las Ciencias en Uppsala.

Primer profesor de matemáticas de la Universidad de Estocolmo, y además de la que fue rector en el periodo de 1891 y 1892. Además fue miembro de la Real Sociedad Geográfica Sueca en Lund desde 1906 y de aproximadamente 30 sociedades extranjeras de las que destacan la Royal Society de Londres (1896) y la Academia de las Ciencias Francesa de París. Sin olvidar que recibió doctorados honorarios de la Universidad de Oxford y de otras más.

Después de retirarse de su cátedra en 1911. Mittag-Leffler tuvo un gran éxito desenvolviéndose como hombre de negocios, pero sus esfuerzos fueron doblegados por el colapso económico de Europa que terminó arrasando con su fortuna en el año de 1922. Cinco años más tarde, el 7 de julio de 1927, Mittag-Leffler muere, dejando a la matemática con unos fuertes legados:

- Función de Mittag-Leffler.
- Teorema del desarrollo de Mittag-Leffler (este es un teorema sobre la representación de funciones uniformes mediante series polinómicas).
- Estrella de Mittag-Leffler.

Según una leyenda urbana, Mittag-Leffler es el supuesto responsable de la exclusión hecha por Alfred Nobel. El cual no quiso crear el premio en esta categoría, pues de hacerlo era casi imposible que no se lo ganara Mittag-Leffler, quien en compañía de Poincaré y Hilbert eran, posiblemente, los más distinguidos matemáticos en el tránsito del siglo XIX al XX. Dicho mito urbano, dice que Nobel y Mittag-Leffler compartían el amor de una hermosa italiana. Sin embargo la soltería de Alfred Nobel estuvo presente durante toda su vida. Mientras que la italiana sí existió y fue un tormentoso amor de Mittag-Leffler. Existen otras especulaciones más mezquinas sobre la no existencia del Premio Nobel de matemáticas. Ya que al instituir la distinción, Alfred Nobel tuvo como principal objetivo reconocer los aportes al desarrollo técnico y científico que beneficiaran la humanidad, y creía que el carácter teórico de las matemáticas no contribuía a este fin. Dejando así el único reconocimiento para este campo la prestigiosa “Medalla Fields”.

CAPíTULO 2

UNA PRUEBA ELEMENTAL DE LA DESIGUALDAD DE HILBERT

1. La desigualdad de Hilbert.

A continuación se procede a presentar los resulatdos de gran relevancia, que serán de mucha utilidad para la demostración elemental de la desigualdad de Hilbert. Para esto, se presentarán dos primeros lemas (Lema(2) y Lema(3)) que nos permitirán dar una prueba clara de la desigualdad. Además se enunciará un cuarto y último lema que tendrá un gran significado, debido a que en él se dará la generalización de uno de los lemas mencionados anteriormente el cual será de apoyo para generalizar la desiguladad de Hilbert.

Teorema 2.1 (Desigualdad de Hilbert). *Si (a_m) y (b_n) son sucesiones de números reales de cuadrados sumables entonces la serie doble $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_m b_n/(m+n)$ es convergente y,*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}. \tag{2.1}$$

La desigualdad es estricta a menos que una de las sucesiones (a_m) ó (b_n) sea idénticamente cero. Además, π es la mejor constante en (2.1). Para la demostración se procederá a usar los siguientes resultados.

Lema 2. *Para cada número positivo m,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} < \pi.$$

Demostración. Denotemos los siguientes puntos $(0,0), (0,\sqrt{m}), (\sqrt{m},\sqrt{n})$ por C, Y, X_n $(n = 0,1,2,\dots)$ respectivamente.

Sea S el área del círculo centrado en C con radio $\sqrt{m}$, contenido en el primer cuadrante. Sea R_n la intersección del círculo y la recta CX_n. Considerando B_n la intersección de la recta paralela al eje y que pasa por R_n (para $n = 0,1,2,\dots$) con la recta CX_{n-1}. Además, S_n denotará el área de la región $R_{n-1}CR_n$ del círculo. (Vista en Figura 2.1)

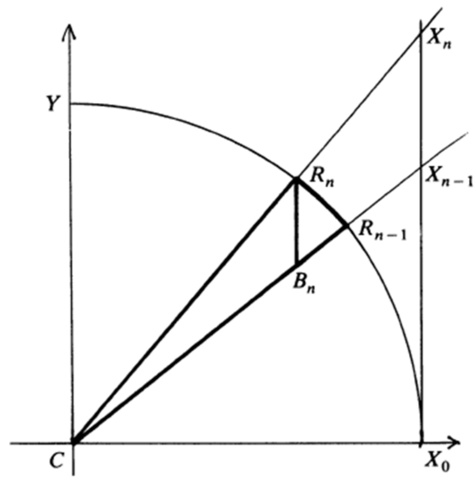


FIGURA 2.1.

Denotando el área del triángulo $\Delta R_n C B_n$ por $S_{\Delta R_n C B_n}$ donde encontraremos

$$\begin{aligned}
\frac{\pi.m}{4} = S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} S_{\triangle R_n C B_n} \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|CR_n|}{|CX_n|}\right)^2 S_{\triangle X_{n-1} C X_n} \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{|CX_0|^2 + |X_0 X_n|^2} \cdot \frac{|CX_0|.|X_{n-1}X_n|}{2} \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{m}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})}{2(m+n)} . \left(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}\right) \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{m}\left((\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n-1})^2\right)}{2(m+n)(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \\
&> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{m}}{2(m+n)(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}.
\end{aligned}$$

Se tiene que si n es un número natural mayor a uno, entonces siempre es cierto que

$$\begin{aligned} n > n-1 &\iff \sqrt{n} > \sqrt{n-1} \\ &\iff \sqrt{n} + \sqrt{n} > \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \\ &\iff 2\sqrt{n} > \sqrt{n-1} + \sqrt{n} \\ &\iff \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\pi.m}{4} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\sqrt{m}}{4\sqrt{n}(m+n)}.$$

Y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} < \pi.$$

□

Una generalización del Lema 2, se presentará después en el Lema 4. A continuación se probará la desigualdad de Hilbert.

Demostración. del Teorema 2.1.

$$\begin{aligned} \frac{a_m b_n}{m+n} &= \frac{1}{\sqrt{(m+n)^2}}.a_m b_n \\ &= \frac{1}{(\sqrt{m+n})^2}.a_m b_n \\ &= \frac{a_m}{\sqrt{m+n}}.\frac{b_n}{\sqrt{m+n}} \\ &= \left(\frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{m}}\right).\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n}}\right)\frac{a_m}{\sqrt{m+n}}.\frac{b_n}{\sqrt{m+n}}. \end{aligned}$$

Así se obtiene

$$\frac{a_m b_n}{m+n} = \frac{\sqrt[4]{m}}{\sqrt[4]{n}\sqrt{m+n}}a_m.\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{m}\sqrt{m+n}}b_n.$$

Ahora usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el resultado anterior encontramos

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m+n)} &\leq \sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)}\right)a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)}\right)b_n^2} \\
&= \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)}\right)a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)}\right)b_n^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\pi a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\pi b_n^2} \\
&\leq \pi\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2}
\end{aligned}$$

donde el Lema 2 fue usado. Obviamente la última desigualdad es estricta a menos que una de las series (a_m) ó (b_n) sea idénticamente cero. □

Ahora probaremos que π no puede ser reemplazada por ninguna constante más pequeña.

Lema 3. *Para cada número natural $m > 1$ se tiene*

$$\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)} > \frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}\ .$$

Demostración. Denotemos por A_n la intersección de la recta CX_{n+1} y la recta R_nB_n (para n=0,1,2,...,m-1). Considerando S' el área de la región X_0CX_m del círculo. (Vista en la Figura 2.2)

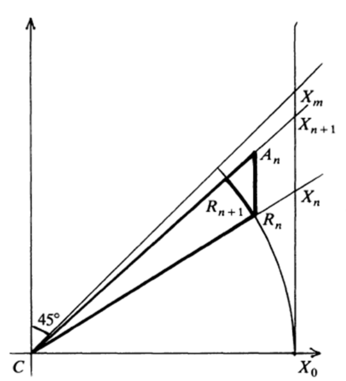


Figura 2.2.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi m}{8} = S' &< \sum_{n=0}^{m-1} S_{\triangle R_n C A_n} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{|CR_n|}{|CX_n|}\right)^2 S_{\triangle X_n C X_{n+1}} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}|X_n X_{n+1}|}{2\left(|CX_0|^2 + |X_0 X_n|^2\right)} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{2(m+n)} . \left(\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right) \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}\left((\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2\right)}{2(m+n)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
&< \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}}{2(m+n)(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} .
\end{aligned}$$

Se tiene que si n es un número natural, entonces siempre es cierto que

$$\begin{aligned}
n < n+1 &\Longleftrightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\
&\Longleftrightarrow 2\sqrt{n} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} .
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{\pi m}{8} < \frac{\sqrt{m}}{2} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{m\sqrt{m}}{4\sqrt{n}(m+n)} .$$

Despejando se tiene

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{n}(m+n)} > \left(\frac{4}{m\sqrt{m}}\right)\left(\frac{\pi m}{8} - \frac{\sqrt{m}}{2}\right) .$$

Luego multiplicando toda la desigualdad por $1/\sqrt{m}$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)} > \frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}} .$$

□

Para probar que π es la mejor constante en la desigualdad de Hilbert consideraremos

Demostración.

$$a_l = b_l = \begin{cases} 1/\sqrt{l} & \text{si } l \leq k \\ 0 & \text{si } l > k \end{cases}$$

donde k es un número natural. Usando el Lema 3 se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} &\geq \sum_{m=2}^{k}\left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)}\right) + \sum_{n=2}^{k}\left(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{mn}(m+n)}\right) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2l^2} \\
&\geq \sum_{m=2}^{k}\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}\right) + \sum_{n=2}^{k}\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}\right) \\
&\geq 2\sum_{m=2}^{k}\left(\frac{\pi}{2m} - \frac{2}{m\sqrt{m}}\right) \\
&\geq \pi \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} - \left(\pi + 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}\right).
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2}} &\geq \pi - \frac{\pi + 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}}{\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m}} \\
&\geq \pi - \frac{\pi + 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}}{\int_1^k \frac{dx}{x}} \\
&\geq \pi - \frac{\pi + 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}}{\ln \mid k \mid} \xrightarrow{k\to\infty} \pi.
\end{aligned}$$

Aquí, se evidencia que π es la constante óptima en la desigualdad de Hilbert. Ahora la prueba de la desigualdad de Hilbert está completa. □

Lema 4. *Para cada número positivo m y para cada número real $p > 1$ se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{1/p}}{n^{1/p}(m+n)} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}.$$

Demostración. Podemos considerar

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{1/p}}{n^{1/p}(m+n)} &\leq \int_0^{\infty} \frac{m^{1/p}}{x^{1/p}(m+x)}\, dx \\
&\leq \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1/p}(1+t)}\, dt \\
&\leq \int_0^{1} \frac{dt}{t^{1/p}(1+t)} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1+\frac{1}{p}}(1+\frac{1}{t})}.
\end{aligned}$$

Luego por los ejemplos (5) y (6) del Capítulo 1, se deduce que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{1/p}}{n^{1/p}(m+n)} &\leq \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n-\frac{1}{p}} \right) dt + \int_1^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{-n-1-\frac{1}{p}} \right) dt \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{n-\frac{1}{p}} dt + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_1^{\infty} t^{-n-1-\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}-n} + p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\frac{1}{p}+n} \\
&= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}.
\end{aligned}
$$

Esta última igualdad se obtiene del comentario posterior al Corolario 1 para $z = \frac{1}{p}$.

Además, otra forma de probar el Lema 4, sería resolviendo la integral $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1/p}(1+t)}$, cuya prueba puede ser vista en el Lema 1 (expuesto en el Capítulo 1, de este trabajo). □

Por lo tanto, usando un razonamiento similar podemos extender la desigualdad de Hilbert. En detalle.

Teorema 2.2. *Para $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sucesiones de números no negativos (a_m),(b_n) tales que $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q$ son convergentes, se tiene*

$$
\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{p})} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.2}
$$

La prueba de este teorema es análoga a la del Teorema 2.1, pero se usa la desigualdad de Hölder en lugar de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Con la aplicación del Lema 4, también se puede deducir que la constante en (2.2) es óptima. No se darán las demostraciones de estos resultados, ya que son análogas y el enfoque de esta monografía es presentar una demostración sencilla del Teorema 2.1.

Diferentes pruebas del Teorema 2.2 se pueden encontrar en [**7**] y [**8**]. Estas demostraciones son más complicadas que la de Oleszkiewicz.

2. Notas históricas.

David Hilbert

Prestigioso matemático y científico alemán nacido el 23 de enero de 1862, en Königsberg, Prusia Oriental. Protagonista en el campo matemático a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Sus aportes más relevantes recorrieron desde la matemática moderna hasta la física. Su influencia y formación se debió a la gran variedad de ideas que deasarrolló a lo largo de su vida. Entre sus aportes, se encuentra la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y uno de los fundamentos del análisis funcional: los espacios de Hilbert. Sin olvidar sus aportes tan altruistas en la teoría general de la relatividad publicado por Einstein. Hilbert en el dilema por demostrar correctamente algunos de los errores encontrados allí, se adelantó a concebir dichas correcciones sin otorgarse a sí mismo el reconocimiento.

David Hilbert, también fue uno de los pioneros sobre la lógica matemática y la teoría de la demostración. Además estudió y defendió la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor[1]. Tras valerse de su influencia, también sorprendió a la comunidad matemática en el

[1] George Cantor, Matemático alemán (1845 - 1918). Responsable de la creación de los números infinitos y pionero de la teoría de conjuntos; que fueron de gran relevancia para la consolidación de la matemática moderna. De nacionalidad rusa, pero la gran parte de su vida estuvo en Alemania, y a él se le debe el hallazgo de que existan tantos números naturales como racionales y que además hay infinitamente más irracionales que números racionales.

año 1900; cuando planteó los famosos veintitrés problemas en el congreso mundial celebrado en París. David Hilbert, muere el 14 de febrero de 1943, en Göttingen, dando junto a sus estudiantes elementos fundamentales para la estructuración matemática que era necesaria para la mecánica cuántica.

LECTURA COMPLEMENTARIA.

A continuación se presentan algunos comentarios de la desigualdad de Hilbert. Estos fueron tomados del libro [**4**]. En este apéndice no se profundiza en los detalles de los mismos pues no constituyen el objetivo principal de esta monografía.

Además se presentan desigualdades análogas y extensiones.

En el libro [**4**] aparece el teorema que contiene la desigualdad de Hilbert de la siguiente manera.

TEOREMA 2.3. *Si* $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ *y* $(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p)^p \leq A$, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p'}\right)^{p'} \leq B$ *entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{n+m} < \pi A^{1/p} B^{1/p'} \tag{2.3}$$

a menos que (a_m) *ó* (b_n) *sea idénticamente cero.*

Algunos teoremas relacionados con la desigualdad de Hilbert son los siguientes.

TEOREMA 2.4. *Si* $p > 1$, $p' = \frac{p}{p-1}$ *y* $\int_0^{\infty} f^p(x)dx \leq F$, $\int_0^{\infty} g^{p'}(y)dy \leq G$. *Entonces*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy < \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}F^{1/p}G^{1/p'} \tag{2.4}$$

a menos que $f \equiv 0$ *ó* $g \equiv 0$.

TEOREMA 2.5. *La constante* π *y* $\frac{\pi}{sen(\pi/p)}$ *es la mejor constante posible en el Teorema 2.3 y en el Teorema 2.4, respectivamente.*

El caso $p = p' = 2$ del Teorema 2.3, es el teorema de Hilbert (ver 2.1). Esta desigualdad fué probada primero por Hilbert en su trabajos sobre ecuaciones integrales (salvo la determinación exacta de la constante). La prueba de Hilbert fué publicada por Weyl. La determinación de la constante, y el resultado análogo para integrales se debe a Schur. Las extensiones para un p general se deben a Hardy y M. Riesz.

Otras pruebas, de todo el teorema, o de partes del mismo, y generalizaciones en diferentes direcciones, han sido dadas por Fejér y F. Riesz.

CONCLUSIÓN.

La demostración de Oleszkiewicz de la desigualdad de Hilbert es más sencilla que la dada originalmente por Hilbert.

Es notable la sencillez de los resultados requeridos para la prueba de esta desigualdad y de su respectiva generalización.

Se usan ideas geométricas que permiten desarrollar los detalles con mayor comprensión y menos requisitos.

Bibliografía

[1] AHLFORS, L. *Complex Analysis.* McGraw-Hill. (1966). Citado en página(s): 2

[2] CHURCHILL & BROWN. *Variable compleja y aplicaciones.* McGraw-Hill. (1992). Citado en página(s): 2

[3] CONWAY, J. *Functions of one complex variable.* Springer Verlag. (1973). Citado en página(s): 2

[4] HARDY, G.H.; LITTLEWOOD, J.E. & PÓLYA, GEORGE *Inequalities.* Cambridge: Univ. Press. XII, (1964). Citado en página(s): 1, 28

[5] MURRAY R. SPIEGEL. *Teoria y Problemas de Variable Compleja.* McGraw-Hill. Citado en página(s): 13

[6] OLESZKIEWICZ, K. *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality.* The American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 3. (1993), pp. 276-280. Citado en página(s): 1

[7] YANG, B. *On an Extension of Hardy-Hilbert's Inequality*. Kyungpook Math. J. 46 (2006), 425-431. Citado en página(s): 25

[8] YOUNG, R. M. *An introduction to Nonharmonic Fourier Series.* Academic Press, New York, 1980. Citado en página(s): 25