UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Ecuaciones Funcionales en la Teoría de la Elección Social

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Karelys Y. Medina M.** para optar al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Prof. Luis Antonio Azócar Bates
Tutor: Dr. José Luis Sánchez

Caracas, Venezuela
14 de Octubre de 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Ecuaciones Funcionales en la Teoría de la Elección Social**", presentado por la **Br. Karelys Medina**, titular de la Cédula de Identidad **15.892.314**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Prof. Luis Antonio Azócar Bates
Tutor

Dr. José Luis Sánchez
Tutor Académico

Dr. Nelson Merentes
Jurado

Prof. Antonio Acosta
Jurado

Dedicatoria

A mi Papi, a mi Mami, a los Morochos, a Roberto y a todas aquellas personas que tuvieron fe en mi, esto es para ustedes.

Agradecimiento

En primer lugar quiero dar las gracias a Dios, por darme la fuerza de seguir adelante, de levantarme las veces que caí y por siempre ser mi guía. Por ser toda mi fortaleza y permitirme llegar hasta aquí.

Gracias al Profesor Luis Azócar (mi Tutor), por ser más que eso ... por enseñarme tantas cosas, por toda su paciencia, su comprensión, su disposición en todo momento y sobre todo por todos sus consejos para la tesis, la carrera y para la vida. Por confirmarme que con sacrificio y fe llegamos a donde queremos. Muchas gracias Profe.

A las puertas y las aulas de la UCV por ser mi casa de formación personal y profesional.

A mi padres (mi mami y mi papi) por ser mi norte, mi apoyo incondicional, por guiarme en cada paso para llegar hasta aquí, por saber ser ustedes, por ser mi columna y mis ganas. Después de tantas cosas, esto es para ustedes y por ustedes. Son todo para mi Los Amo.

A los morochos (mis hermanitos) por estar siempre y darme todo su apoyo. He querido ser su ejemplo.

A mi novio Roberto José, por siempre estar, por ser incondicional, por ser tan paciente y autentico. Por no haber dejado que me rindiera en los momentos más dificiles. Este logro también es tuyo mi amor. Gracias por tanto. T.A.

A mis amigos y compañeros, por siempre estar para hacerme reír, escucharme llorar, para enseñarme cualquier lección de vida o de la carrera, por regalarme tantos momentos. Gracias a Carmensita mi primera amiguita por siempre estar y darme siempre palabras de aliento. Mily mi más que amiga eres tan especial por darme tantas sonrisas y tanto apoyo para todo. Ale mi amiga más inocente gracias por darme un poco de ella y por enseñarme que la confianza y la sinceridad si existe, por llegar a ser hasta mi profesora.

Mayra por tantos años de amistad y de palabras que me llenaran de valor. Yole gracias por estar lejos pero siempre estar eres mi maracucha favorita. El Gordo por tantos momentos vividos. July July un gran y especial amigo por ser leal y el mejor. Crisis por ser las más ocurrente. Roberto (mi novio pero primero fue amigo y en realidad no tiene comparación, es excepcional). Yarot tus ocurrencias fueron las mejores. Adriana y Ghinett por ayudarme en el comienzo de este largo camino.

Shoping, Odalys, Zorelys y Ronaldys muchas gracias por ser los mejores compañeros, Funcional no hubiese sido lo mismo sin ustedes llenaron mi último semestre de momentos alegres y gratos.

Aunque son muy pocos se tengo los mejores. Por cada uno de ustedes existe un gran y especial afecto, gracias a todos.

A mi madrina Carolina por siempre estar pendiente de mi desde niña por siempre darme animo y consejos. A la madre de mi novio (Laura de Morillo) por siempre dar los mejores consejos en los momentos precisos, gracias por todo su apoyo. A las madres de mis amigos y compañeros, por ser madres de muchos por brindarme todo su apoyo, ellas saben quienes son las quiero a todas.

A los profesores José Luis y Nelson Merentes por toda su ayuda, a la profe Bertha Villegas por grabar en mi que si los otros llegaban yo también podia, al profe José Gregorio Mijares (Goyo) por ser un excelente profesor y amigo, a la profe Eddy Pariguán por ser ella.

En fin, a todas aquellas personas que estuvieron de una u otra forma, que fueron parte de este largo camino, testigos de tantas cosas y pocas también. Y muy especialmente, gracias a todas aquellas que pensaron que no lo lograria.

A todos mil gracias.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Como herramienta para el estudio cuantitativo y la modelización de fenómenos, las matemáticas están presentes en todas las disciplinas, y en particular en las ciencias políticas. Cuestiones fundamentales como la medición del poder político del Presidente de una nación, el reparto más adecuado de escaños entre diversas formaciones políticas en función del número de votos, la elección de una estrategia en una situación de conflicto o el establecimiento de un sistema de votación justo y razonable pueden abordarse utilizando teorías matemáticas adecuadas como la teoría de juegos, la teoría de la elección social, entre otras.

Es por ello, que el desarrollo de las matemáticas ha seguido, en numerosas ocasiones, el reflejo de las situaciones y de los problemas que se presentan en las actividades humanas. El comercio, la industria, la construcción, la navegación, han hecho que se crearan y se perfeccionaran métodos matemáticos que pudieran dar respuesta a los retos que, en cada momento, se han presentado ante el entendimiento del ser humano. Para poder comprender la realidad que le rodea, modificarla, e incluso predecir sus manifestaciones, el hombre crea una serie de objetos abstractos que dentro de un sistema de reglas matemáticas precisas, pueden relacionarse entre sí, asimilando aquello que sucede a ciertas acciones sobre los objetos que ha creado. Ha nacido así el modelo matemático. De la intuición creativa y del poder de relación entre los objetos, además del uso de las leyes de la lógica, dependerá la bondad del modelo matemático en el ajuste de la realidad que le inspira.

Los modelos matemáticos que tradicionalmente han servido para describir situaciones surgidas en la física, en la ingeniería o en las finanzas, se han revelado recientemente útiles en el estudio y la descripción de fenómenos relativos a la conducta humana.

La aplicación de técnicas matemáticas a las ciencias sociales se ha revelado como particularmente útil en muchos aspectos. Nos ocuparemos, en este trabajo especial de grado, de un problema que corresponde a la **Teoría de Elección Social** (Teoría de Decisión Colectiva), que, aunque se suele encuadrar en la llamada *Economía Matemática*, se encuentra, en realidad, en diferentes disciplinas.

La teoría de la Elección Social constituye una parte bien definida del cuerpo de la Economía Normativa, que ha conocido un importante desarrollo en los últimos años. En Economía, la teoría de la Elección Social se vincula especialmente a temas de Bienestar Social, a la Teoría de la Planificación y a cuestiones de Economía Pública. En el campo de la Ciencia Política, tiene particular relevancia en el análisis de cuestiones de Teoría del Estado, y en el diseño de Procesos de Decisión Colectiva. Por último, sus conclusiones son de especial importancia para el campo de la Filosofía Moral, puesto que aparecen íntimamente relacionados con aspectos éticos y de justicia.

El objeto de la presente Tesis de Grado es el de *ofrecer una visión panorámica de carácter introductorio* sobre algunos tópicos desarrollos centrales en este campo. Nos vamos a centrar aquí en el caso de una sociedad que debe de tomar decisiones respecto de ciertas alternativas. El supuesto básico es que cada uno de los miembros que componen la sociedad tiene preferencias bien definidas sobre las diferentes alternativas sociales, y se trata de establecer cúal debe ser la decisión social o cómo se deben construir las preferencias sociales, en base a la información disponible sobre las preferencias individuales.

En esta introducción plantearemos algunos ejemplos sencillos que servirán de referencia para entender la naturaleza de los problemas que encontraremos.

Ejemplo 0.1. ***El Club de los Poetas Muertos***.*Binmore [4]. Boris, Sebastián y Mauricio constituyen el comité de miembros de la exclusiva Sociedad de los Poetas Muertos. Una mañana, el punto final del orden del día es admitir como miembro a Emy. Otro posible candidato llamado Beto no es mencionado, por lo que se propone modificar este último punto. La modificación propuesta dice que el nombre de Emy debería ser reemplazado por el de Beto. Las reglas de voto para comités ordenan que las propuestas se voten en el orden en que fueron propuestas. Por lo tanto, el comité empieza votando si Beto debería reemplazar a Emy. Si Emy gana, entonces votarán si Emy o Nadie debería ser aceptado como nuevo miembro.*

El siguiente cuadro muestra cómo los tres miembros del comité ordenan individualmente los tres resultados posibles y el diagrama presenta el orden en que tiene lugar la votación.

Boris	*Sebastián*	*Mauricio*
Emy	*Nadie*	*Beto*
Nadie	*Emy*	*Emy*
Beto	*Beto*	*Nadie*

$Cuadro 1$

Si los miembros del comité votan sinceramente, el resultado de una votación entre Emy y Beto sería que ganaría Emy, pues Boris y Sebastián prefieren Emy a Beto.

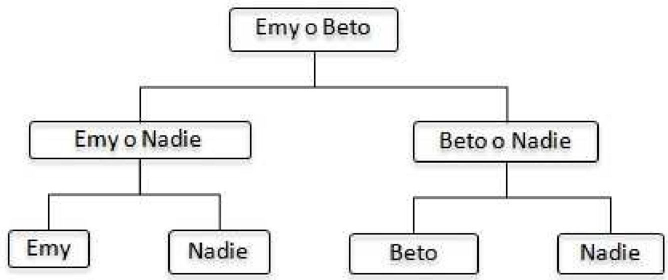

Figura 0.1: Diagrama

Finalmente entre Emy y Nadie, Emy sería elegida miembro del club, pues también ganaría contra Nadie (Boris y Mauricio prefieren a Nadie). Sin embargo, si Sebastián piensa a largo plazo, verá que no tiene sentido votar contra Beto en primera votación. Si Beto gana la primera votación, Nadie triunfará en la segunda, y Nadie es la primera preferencia de Sebastián. Por lo tanto, Sebastián debería negar el voto a Emy en primera votación y dárselo a Beto, que es su peor opción. Si Boris y Mauricio no votan estratégicamente, el resultado será que Nadie resultará elegido.

La historia, por supuesto, no acaba ahí. Tanto Mauricio como Boris pueden preveer que Sebastián va a votar estratégicamente, y hacerlo ellos también. El resultado de este caso, no es nada trivial.

Los orígenes de los problemas de decisión se encuentran en los estudios relacionados con el bienestar personal (asociados a nombres como Bentham ó Mill), por una parte, y a la teoría de las votaciones (Condorcet, Borda) por otra. Su formulación moderna arranca del planteamiento del problema efectuado por Bergson (1938), en términos de una función de bienestar social.

Cuenta la economía del bienestar casi con cien años de historia y algunos cambios importantes en los modos de tratar su objeto. En uno de estos cambios, a principio de la década de los cincuenta se produjo una crisis que dio lugar a la Teoría de la Elección Social. La obra fundacional de la nueva teoría es de Arrow [2] quien marca la evolución de este campo, a partir del sorprendente resultado de que al exigir unas pocas condiciones, todas ellas razonables, al proceso de elección social, no resultaba posible encontrar ningún procedimiento capaz de satisfacerlas.

En ella se abordan por primera vez de manera explícita los problemas normativos ante los que se detenía la economía del bienestar. Este es su esfuerzo y su carácter distintivo, puesto que gracias a él se clausura la larga etapa en que los economistas pensaron que todas sus recomendaciones habían de estar libres de valores. La Teoría de la Elección Social fue la forma en que la ciencia económica tomó en serio su dimensión normativa.

Hay dos razones por las que en la historia del pensamiento económico, la obra de Arrow [2] puede merecer el calificativo de insólita: el modo en que se plantea las preguntas de la economía del bienestar y la respuesta alternativa que desarrolla. Lo sorprendente de su formulación consiste en que muestra en toda acuciante crudeza la pregunta por el bienestar como una pregunta por el fundamento de un juicio de valor. La cuestión a la que toda la obra trata de responder es: ¿Cómo son posibles los juicios sobre el bienestar social? Con todo, la pregunta ya estaba latente en el ambiente de la disciplina desde que A. Bergson(1938) se había propuesto **enunciar de una forma precisa los juicios de valor requeridos para la derivación de las condiciones de bienestar económico**. Para conseguir tal derivación había propuesto una función de bienestar social que constituía un orden social con los órdenes individuales de alternativas.

Dicha función se configura según aquellos juicios de valor que Bergson destacaba en su análisis (notablemente el Principio de Pareto), pero para ellos mismos no propuso ningún método de selección, quedando librados a una decisión exógena y un tanto arbitraria del planificador que la construye. Por esta razón durante mucho tiempo no se supo muy bien cómo era posible realizar de una forma fiable el cálculo de dichas funciones y cuando los economistas se referían a ellas, lo hacían usualmente como a una elegancia formal que coronaba el entramado entero de la teoría del equilibrio general.

Pues bien, es Arrow quien se compromete por vez primera con la empresa de investigar las condiciones para la construcción de funciones de bienestar social de Bergson. Así la cuestión que presenta como prioritaria en las primeras páginas de su libro es: *nos preguntamos si es formalmente posible construir un procedimiento para pasar de un conjunto de preferencias individuales conocidas a un modelo de formación de decisiones sociales, satisfaciendo el procedimiento en cuestión ciertas condiciones naturales.* Arrow [2].

En esta manera de proponer su investigación está implícita la concepción general de la fundamentación de los juicios sociales característica de la teoría. La ciencia económica en general considera que las decisiones económicas correctas pueden ser el simple resultado de las decisiones individuales, cuando éstas interactúan en un medio libre de presiones externas. Es decir, se confía en que la subjetividad por sus propios medios alcance la intersubjetividad. La teoría de la elección social si bien acepta la idea de que la dirección correcta de la fundamentación es la que parte de la subjetividad, en cambio se aparta del pensamiento económico común en el modo de proceder. La teoría de la elección social parece haber tomado buena nota de la dificultad tradicional con que ha tropezado ese modo ingenuo de plantear la fundamentación ¿Cómo partiendo de lo más subjetivo se puede alcanzar lo más intersubjetivo?.

El deseo de superar esa dificultad estaba a la base de la motivación que llevó a Bergson a presentar su modelo de bienestar social. Pero, al mismo tiempo, el resultado fallido de su propuesta y éste era su principal legado manifestaba las limitaciones de una solución que no quería hacerse cargo de todos los elementos requeridos para la construcción de esas funciones, tal y como fueron presentadas por el, las funciones determinan juicios sociales aquejados de un relativismo insalvable. Puesto que en la medida en que su construcción no se dispone de un criterio para establecer la adecuación de los valores, si esos valores cambian o son inconsistentes entre sí, darán lugar a juicios sociales diferentes. Diferentes y fundamentalmente, todos igualmente válidos. Ese relativismo es el que la inhabilita como procedimiento para recorrer el camino que media entre lo individual y lo colectivo. Pero más que insistir en el aspecto negativo de Bergson, en él hemos de ver su aspecto positivo: la precisión que se muestra para quien estuviera dispuesto a abandonar prejuicios escolares las características que la respuesta a la cuestión de la fundamentación requiere.

Arrow supo entenderlo y comienza señalando el problema: puede haber tantas funciones de bienestar social de Bergson como juicios de valor entre los individuos. Por eso su propuesta consiste en construir un procedimiento intersubjetivo en el que ya los diferentes valores individuales se hayan convertido en valores sociales. Para diseñarlo es necesario recoger las condiciones normativas que incorporan los valores fundamentales de una comunidad y definir con ellos una regla de elección social de Bergson que vamos a aceptar como juicios sociales. En consecuencia, la validez intersubjetiva de éstos depende de la validez intersubjetiva de las condiciones del procedimiento.

Así la preocupación por el procedimiento de elección social se vuelve fundamental al punto que la cuestión del fundamento ¿Cómo son posibles los juicios sobre el bienestar social?, se resuelve en una pregunta por el procedimiento para conformar fiablemente juicios sociales a partir de juicios individuales. Este giro procedimental en la búsqueda de una solución al problema planteado por los juicios naturalmente significó una ruptura con la economía del bienestar.

El modo en que la teoría presentó la cuestión del fundamento de los juicios sociales clarificaba al mismo tiempo que daba un giro las discusiones sobre el bienestar económico que se habían suscitado a partir de la revolución marginalista de los economistas neoclásicos. Escuetamente este nuevo planteamiento significó que no se puede abordar la solución de ningún problema en el que se requiera de la economía del bienestar una recomendación, a menos que se especifique consistentemente la forma de la función de bienestar social. Para entender el significado cabal de esta exigencia es conveniente que consideremos los términos en que Arrow recibió de manos de la economía del bienestar la posibilidad de la formación de juicios sociales.

El tema propio de la economía del bienestar aparece por vez primera con el intento de justificación por parte de L. Walras [32] y V. Pareto [32] del mercado puramente competitivo como el medio económico más eficiente u óptimo para generar bienestar. Para cumplir este propósito el argumento presentado por Walras era más bien ingenuo. Pretendía este autor que las situaciones de equilibrio que se obtienen en el mercado son al mismo tiempo las que producen un beneficio máximo para cada una de las partes implicadas. Esa pretensión se justificada en razón de que en el punto de equilibrio competitivo el precio de los productos es igual a la utilidad marginal que éstos tienen para el consumidor. Siendo esa razón cierta, no por ello aclara algo sobre la cuestión que estaba en litigio: el sentido en el que las condiciones que establece el mercado son óptimas. Es difícil demostrar, sin entrar en el análisis de esas condiciones, que óptimo se refiere al mayor beneficio para cada una de las partes. No obstante, podemos decir que si bien es cierto que tanto productores como consumidores hacen todo lo que pueden hacer en beneficio propio dentro del mercado, ello no significa que el buen resultado que se obtenga también es un resultado óptimo P.A.Samuelson [32]. Por un lado, la valoración de esta optimalidad dependería del criterio ético que utilizáramos. Pero por otro y más fundamentalmente, el consumidor se encuentra con unas condiciones de comercio que son incambiables y que restringen su capacidad operativa. Si se toman como dadas dichas condiciones, él consumidor sólo tiene un modo racional de conducta. Por el contrario lo que se trata es de demostrar que, esas condiciones son tales que promueven un modo óptimo de conducta. Si uno piensa en un mercado monopolista, es evidente que aportar esa demostración no es fácil.

La dificultad de mostrar que cada uno en el intercambio competitivo obtiene lo mejor obligó a Pareto a buscar una noción de optimalidad que se refiriese la máximo de bienestar colectivo, pero sin referencia a la distribución de ese máximo. A partir de este objetivo se comprende el concepto de óptimo paretiano: una situación de intercambio es un óptimo paretiano, si no es realizable otra situación de intercambio en la que todos los miembros de la sociedad tengan el mismo nivel de bienestar y al menos uno tenga un nivel mayor, todo ello medido en términos de curvas de indiferencia. El óptimo de pareto define un punto de equilibrio, de racionalidad y de eficiencia económica. Por eso no es extraño que sobre él se produjera una vasta literatura durante las primeras décadas de este siglo. Al mismo tiempo sin embargo se vinieron repitiendo las objeciones básicas que Marshall [32] y Wicksell [32] formularon contra los economistas que pretendían que la competición perfecta llevaba a un máximo de satisfacción colectiva. Es fácil comprender que la situación de equilibrio competitivo siempre depende de la distribución inicial de riquezas y capacidades. Por consiguiente, que no hay un punto único de equilibrio paretianamente óptimo, sino tantos como distribuciones iniciales. Esta multiplicación de los puntos óptimos es la que pone sobre el tapete las dificultades del criterio.

La definición de optimalidad sólo es capaz de indicar que para una distribución dada (que no califica), ya no se puede hacer nada sin perjudicar a alguien. Pero es incapaz de ordenar preferencialmente los puntos de la frontera de bienestar ni es capaz de decir nada sobre otros puntos fuera de ésta. Si el criterio de eficiencia paretiano tenía alguna pretensión de ser el criterio de decisión racional en materia de bienestar social, es obvio que tal pretensión es cuando menos infundada.

Añádase a ello que el criterio es conservador e inmovilista, si un cambio fuese preferido por todos los miembros de la sociedad excepto uno, el cambio no se produciría. O bien, podría recomendar el cambio de una situación sub-optimal a una optimal, aunque la distribución de la utilidad en la situación optimal fuera patentemente más injusta que la sub-optimal. Este último tipo de objeciones que tradicionalmente se han presentado en su contra nos sirven para sacar a la luz un problema genérico de la economía del bienestar. Ciertamente, no es exclusivo del criterio de pareto el meterse en dificultades por el empeño por separar el tratamiento a las cuestiones referentes a la producción y el consumo del tratamiento de las cuestiones de distribución. La economía del bienestar se puso durante mucho tiempo como límite de sus investigaciones la búsqueda de las condiciones del óptimo para el intercambio y producción, tomando la distribución de bienestar como un dato. Hoy ya nos parece incluso demasiado obvio que la distribución no se puede reducir a una constante exógena a introducir en los cálculos, nuestra manera de considerarla nos la presenta como una magnitud interrelacionada con otras y, por consecuencia, como origen de cambiantes percepciones del bienestar que cualquier modelo tiene que poder tener en cuenta.

Ni el intento de Pigou [32] de hacer de la renta nacional en índice del bienestar económico ni todas las discusiones que le siguieron sobre la operatividad de los números índice Dobb [32], lograron responder a la cuestión que dejo abierta la economía paretiana del bienestar ¿Cuál de las situaciones optimales recomendaremos? Tuvo que producirse un cambio de enfoque para que se intentara una respuesta a esa pregunta. Es característico de la tradición paretiana el negarse a utilizar funciones de utilidad y a realizar comparaciones interpersonales. La razón de esta negativa sigue siendo como para la negativa e inmiscuirse en temas de distribución una concepción positivista de la ciencia. Ciertamente la cardinalización del bienestar en funciones de utilidad y las comparaciones interpersonales requiere que se adopten algunos juicios de valor por parte del planificador social para la mera posibilidad de la medición Flemming [32]. El cambio de enfoque al que aludíamos consistió, pues, en volver a las estructuras informativas más ricas que proporcionaba la cardinalización del bienestar en funciones de utilidad. Y fue Bersgon quien rechazo los prejuicios paretianos, presentando el bienestar social como una función de las utilidades individuales que realizaba la misma función que éstas definir una curva de indiferencia para la sociedad: De esta manera, el enfoque neoutilitarista pareció estar en mejores condiciones que los demás para hacerse cargo del carácter normativo de la economía.

Con la función de bienestar social por primera vez en la literatura económica se pretendía que el juicio social sobre el bienestar estuviera determinado unívocamente por las unidades de consumo ya fueran individuos o familias. Cada función de bienestar social amalgama la preferencia que dichas unidades tienen sobre una situación alternativa, ya sea optimal o no. Su fórmula genérica expresa esto: *que dice que el bienestar social es una función de las utilidades, de los individuos de* 1 *hasta* n. Así para una comunidad de dos individuos, A y B, podemos representar la función de bienestar social de forma que cualquier situación del espacio quede ordenada según relaciones de preferencia o indiferencia.

La función de bienestar social ha hecho aparecer la figura del planificador social que toma decisiones en nombre de la sociedad y que tiene que responsabilizarse de los juicios de valor con los que opera. No obstante, Bersgon no es todavía un teórico de la elección social. Su formulación deja la cuestión de los valores fuera del campo de la investigación. Para él son otros (los políticos, los observadores imparciales, los decidores omniscientes) los que tienen que hacerse cargo por su cuenta y riesgo de los valores requeridos Bersgon

[1938]. Una vez más nos encontramos con el mismo impedimento; se piensa que el status científico de la economía exime a sus profesionales de abordar esos problemas.

Consecuentemente, la problemática de la elección social como problemática especifica de una teoría que se desgaja de la economía del bienestar se evidencia cuando se comprende que es inexcusable responder a las preguntas por los juicios de valor que determinan las funciones de bienestar social, y que esa pregunta ya no es una pregunta del tipo ¿Qué recomendaremos?, sino que es una pregunta por el fundamento de los juicios sociales sobre el bienestar. Por eso es Arrow, y no Bersgon, quien inaugura la nueva teoría cuando asume que ya no es posible excluir la ética: Yo deseo destacar ahora solamente que debemos contemplar el sistema total de valores, incluidos los valores sobre esos valores, al buscar una teoría realmente general del bienestar social. Arrow [2]

En la Tesis nos referiremos a la obra de Kenneth Arrow y a su resultado de Imposibilidad por el que se establece que no hay ninguna regla de Elección Social válida para las sociedades democráticas.

El programa de trabajo de la teoría de la Elección Social podría anunciarse entonces como sigue: Dada una sociedad y un conjunto de alternativas sociales (por ejemplo niveles de provisión de servicios públicos y tipos impositivos), estudiar qué procedimientos de valoración social se derivan de agregar las preferencias de los individuos de acuerdo con ciertos requisitos. Siguiendo este esquema se obtendrían distintas reglas de elección social dependiendo del conjunto de principios éticos empleados en la agregación de las preferencias individuales(es decir, dependiendo de la especificación del dominio, el rango y las propiedades de comportamiento de la regla de elección).

Las perspectivas de este programa se vieron drásticamente sacudidas por el notable resultado obtenido por Arrow [3], conocido como el Teorema de Imposibilidad. Este resultado indica que imponiendo unas condiciones de agregación relativamente débiles, la única regla de agregación posible resulta ser dictatorial(es decir, la regla de valoración de uno de los individuos de la sociedad). O dicho de otro modo, la conclusión central de Arrow es que no existe ninguna posible regla de agregación de preferencias que sea a la vez racional, eficiente, general y democrática. Esta contribución ha marcado buena parte del desarrollo de la Teoría de la Elección Social, ante esto a continuación un breve ejemplo que muestra un poco del tipo de complejidad que se muestra ante diversas situaciones donde son necesarias ciertas decisiones.

Ejemplo 0.2. *Dos personas situadas en el centro del desierto, sin agua. Alguien les dice que hay un oasis a diez minutos de allí. Lamentablemente, quien tal cosa les dice no sabe en que dirección y sentido hay que moverse para llegar a él. Las dos personas deciden moverse ya que si se quedan quietos donde están perecen de sed. Y deciden que caminarán juntos en busca del oasis. Pero tienen que ponerse de acuerdo antes en la dirección y sentido hacia la cuál caminarán. Cada uno de ellos tiene sus propias preferencias y pareceres basados en su intuición, y entre estás posibles preferencias de los individuos se puede considerar que hay una idea de proximidad, similitud ó incluso continuidad, en el sentido que a direcciones próximas corresponden preferencias parecidas (próximas). Antes de moverse los dos individuos quieren ponerse de acuerdo.*

Para ello buscan una regla que determine la idea de preferencia común, cumpliendo las siguientes condiciones que podrían denominarse de preferencia común:

(i) Si ambos tienen la misma preferencia, la regla les obliga a que se muevan en la dirección y sentido que determina tal preferencia en la que ambos parten ya de una coincidencia y acuerdo.

(ii) El orden en que los dos manifiesten sus preferencias no tiene efecto alguno sobre la dirección que tomen siguiendo la regla. Esto es, no por hablar primero ó hablar más un individuo va a imponer su preferencia al otro. La regla trata a ambos individuos

por igual.

(iii) A preferencias próximas la regla debe asignar decisiones, esto es, determinaciones concretas de dirección y sentido en los que moverse, que resulten también próximos.

La cuestión que se plantea es si estos individuos encontrarán una regla tal que les permita salir del impasse moviéndose en alguna determinada dirección y sentido, y, con suerte, encontrar el oasis y salvarse. *Por sorprendente que pueda parecer, el ejemplo anterior acaba planteando un problema nada trivial que corresponde a una rama de la matemática habitualmente considerada como matemática pura, a saber que se trata de un elegante problema de Topología Algebraica relacionado con la* no retractibilidad de una banda de Moebius sobre su frontera.

Definición 0.3. *Un subespacio A de un espacio X es un retracto por deformación de X si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que*

- $H(x, 0) = x$*, si* $x \in X$
- $H(x, 1) \in A$*, si* $x \in X$
- $H(a, 1) = a$*, si* $a \in A$

A una tal H se le llama retracción por deformación de X en A. En particular la aplicación $r_H : X \rightarrow A$, tal que $r_H(x) = H(x, 1)$, es una retración de X en A, es decir, $r_H|_A = id_A$, y A es un retracto de X. Si, además de las condiciones anteriores pedimos que $H(a, t) = a$ si $a \in A, t \in I$,se dice que A es un retracto fuerte por deformación de X y que H es una retracción fuerte por deformación.

Definición 0.4. *Se dice que $H : X \times I \rightarrow X$ es una retracción débil por definición, si en las tres condiciones anteriores sólo se pide que la aplicación $r_H : X \rightarrow A \subset X$, tal que $r_H(x) = H(x, 1)$ sea una retracción débil, es decir, sea tal que $r_H|_A \cong id_A : A \Rightarrow A$, A es entonces un retracto débil por deformación de X.*

Analizaremos ahora el ejemplo anterior: Comenzaremos por observar que el conjunto de posibles preferencias de cada individuo, en cuanto a elegir una dirección y sentido hacia la cual moverse, se puede identificar con la circunferencia unitaria S^1, sobre la que consideraremos su topología usual.

El diseño de una regla consiste, por lo tanto, en encontrar una determinada función $F : S^1 \times S^1 \to S^1$ que sea continua, y que cumpla además que $F(x,y) = F(y,x)$ y $F(z,z) = z$ con $x,y,z \in S^1$. Por el hecho de que $F(x,y) = F(y,x)$ nos puede hacer pensar en definir una función continua directamente sobre un espacio topológico cociente de S^1, tras haber identificado el punto (x,y) con el punto (y,x) con $(x,y \in S^1)$. Resulta que este cociente es topológicamente una banda de Moebius.Y resulta además que los puntos de la diagonal de $S^1 \times S^1$ se corresponden en este cociente, precisamente, con la frontera de la banda de Moebius.

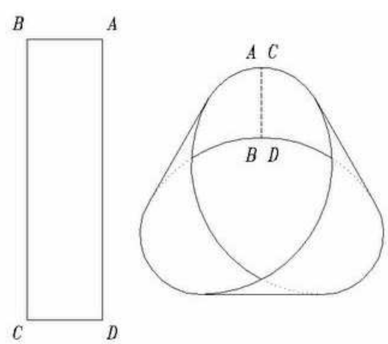

Figura 0.2: Banda de Moebius

Como la frontera de la banda de Moebius es topológicamente una circunferencia S^1, el objetivo del problema que nos ocupa consistiría en encontrar una aplicación continua de la banda de Moebius sobre su borde ó su frontera, cuya restricción al borde de la aplicación identidad. En otras palabras, hemos de hallar una retracción de la banda de Moebius sobre su frontera. Y ahora, la teoría clásica de Homotopía en Topología

Algebraica nos dice que no existe tal retracción. De manera que el problema queda así resuelto por la negativa **No va a ser posible poner de acuerdo a esas dos personas**.

Este trabajo se encuentra conformado por tres capítulos, los cuales están estructurados de la siguiente manera, en el primer capítulo se habla de las ecuaciones funcionales, métodos de solución así como también varios de los tipos de estas ecuaciones, en el segundo capítulo todo lo referido a la teoría de la Elección Social (Teorema de Imposibilidad de Arrow) y en el último capítulo se estudia la Ecuación se Sincov la cual es la utilizada para la solución de problemas relacionados con la teoría de la Elección Social.

CAPÍTULO 1

ECUACIONES FUNCIONALES

La importancia de las ecuaciones funcionales es comparable a la de las ecuaciones diferenciales, ya que muchos de los problemas que se pueden establecer en términos de una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales también pueden establecerse en términos de una ecuación funcional o un sistema de ecuaciones funcionales.

Las ecuaciones funcionales constituyen una herramienta esencial para trabajar por ejemplo con redes funcionales, problemas relacionados con la Teoría de la Decisión en particular la Teoría de Elección Social, entre otros.

Debido a que la teoría de la Elección Social consiste en la ordenación de las preferencias individuales y para ello se necesita precisamente una función que de tal orden, se requiere un método que permita encontrar tal función y el método utilizado son las ecuaciones funcionales, donde la más utilizada es la llamada **Ecuación de Sincov**.

1.1 Una Primera Definición y Algunos Ejemplos de Ecuaciones Funcionales

No es fácil dar una definición precisa de ecuación funcional. Sin embargo, la siguiente puede ser una primera definición, con la ventaja de ser simple y fácil de aprender.

Definición 1.1. *Una ecuación funcional es una ecuación en la que las incógnitas son funciones. Se excluyen las ecuaciones diferenciales e integrales.*

1.2 Algunos Ejemplos Ilustrativos de Ecuaciones Funcionales

1.2.1 Área de un Rectángulo

Supóngase que la expresión que da el área de un rectángulo es desconocida, pero se sabe que es una función $f(b, h)$ de la base b y altura h del rectángulo: $Area = f(b, h)$.

Un problema interesante es el de obtener la expresión del área usando algunas propiedades del rectángulo. Como se verá seguidamente, este problema puede resolverse usando ecuaciones funcionales. Para ello consideraremos el rectángulo de base b y altura h.

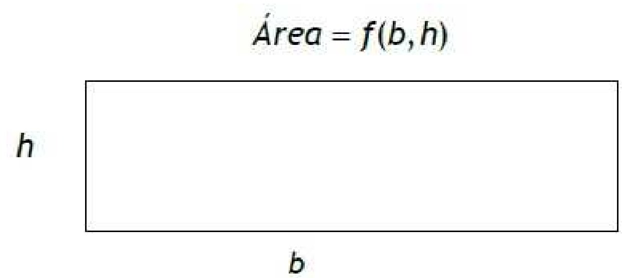

Figura 1.1: Rectángulo de base b y altura h

Supóngase que se divide horizontalmente, en dos subrectángulos diferentes con la misma base b y alturas h_1 y h_2. De acuerdo con las hipótesis, las áreas de los subrectángulos y del rectángulo inicial no se pueden calcular, pero se pueden expresar en términos de la función f como $f(b, h_1), f(b, h_2)$, y $f(b, h_1 + h_2)$, respectivamente.

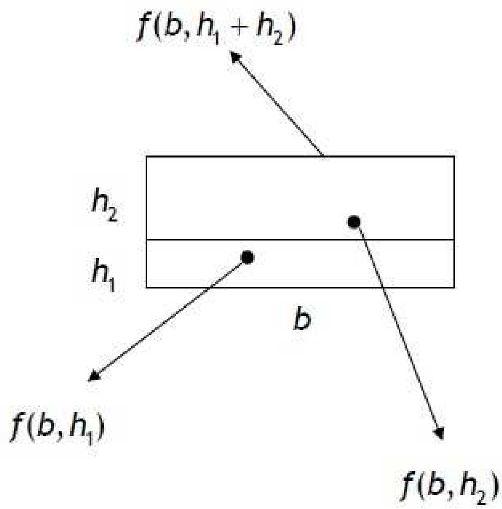

Figura 1.2: División horizontal del rectángulo

Similarmente, se puede realizar la división verticalmente, y escribir las áreas de los rectángulos resultantes como $f(b_1, h), f(b_2, h)$, y $f(b_1 + b_2, h)$, respectivamente.

Finalmente, estableciendo que el área del rectángulo inicial tiene que ser igual a la suma de las áreas de los subrectángulos, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$f(b, h_1 + h_2) = f(b, h_1) + f(b, h_2) \tag{1.1}$$

$$f(b_1 + b_2, h) = f(b_1, h) + f(b_2, h) \tag{1.2}$$

Pero éste es un sistema de dos ecuaciones funcionales en f, porque son dos ecuaciones y la única incógnita es la función f. La solución general para este sistema de ecuaciones funcionales es:

$$f(b, h) = cbh \tag{1.3}$$

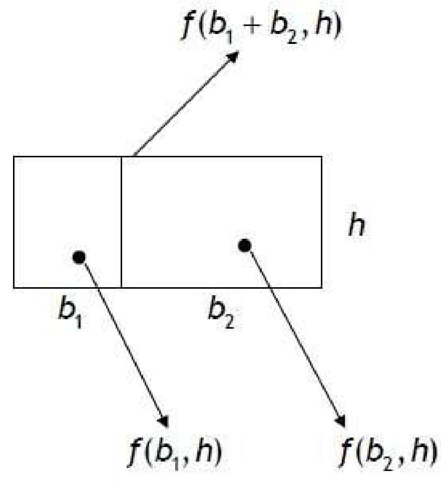

Figura 1.3: División vertical del rectángulo

donde c es una constante arbitraria no negativa, lo que significa que ninguna otra forma de f puede satisfacer (1.1) y (1.2). Esto prueba que el área del rectángulo no es la bien conocida base por altura, sino el producto de una constante por la base por la altura. La constante juega el papel de corregir las unidades de medida que se utilicen para la base, la altura y el área resultante. Esto significa que si b se mide en pulgadas, h en pies y se tiene A en millas cuadradas, la constante tiene que ser diferente de la constante requerida para b medida en metros, h en kilómetros, y A en metros cuadrados.

Una importante consecuencia de lo anterior es que la expresión del área de un rectángulo se puede obtener así basándose en algunas propiedades, escritas en términos de ecuaciones funcionales tales como (1.1) y (1.2).

1.2.2 Área de un Trapecio

Como un ejemplo geométrico más, supóngase que la función que da el área de un trapecio es una función donde son desconocidas sus bases b_1 y b_2 y su altura h, es decir, $Area = f(b_1, b_2, h)$. Para obtener la estructura funcional de $f(b_1, b_2, h)$

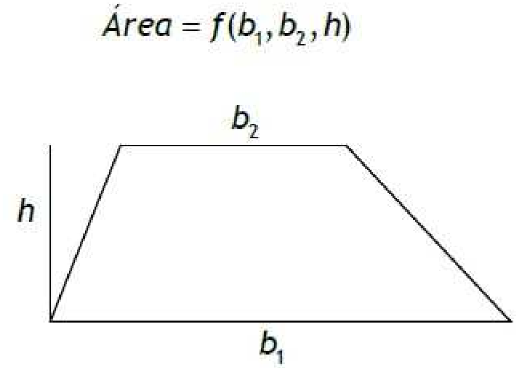

Figura 1.4: Trapecio de altura h y bases b_1, b_2

1. Se divide un trapecio en dos subtrapecios.

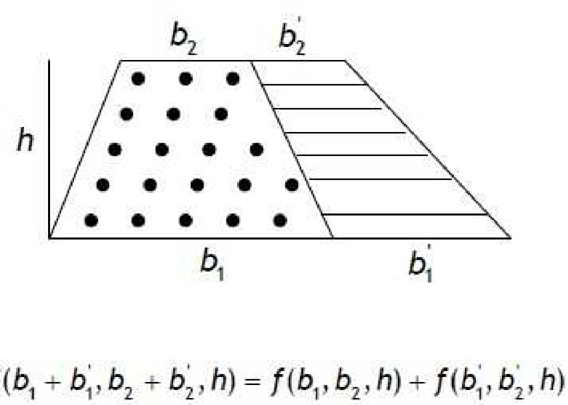

Figura 1.5: División de un trapecio en dos subtrapecios

2. Se divide un rectángulo (un caso especial de trapecio) en dos subrectángulos.

3. Se considera un trapecio y su figura invertida (un nuevo trapecio).

Siguiendo un proceso similar al caso del rectángulo, se establecen las igualdades de las áreas de los trapecios iniciales y la suma de los correspondientes subtrapecios, o la coincidencia de las áreas de los trapecios invertidos, para llegar a:

$$f(b_1 + b_1', b_2 + b_2', h) = f(b_1, b_2, h) + f(b_1', b_2', h) \tag{1.4}$$

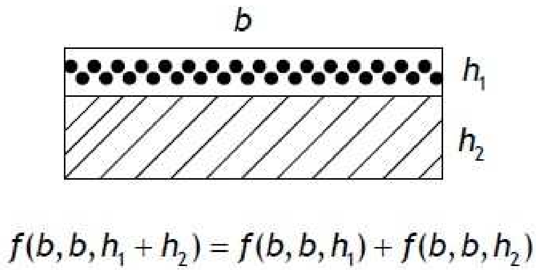

Figura 1.6: División de un rectángulo, caso especial de un trapecio

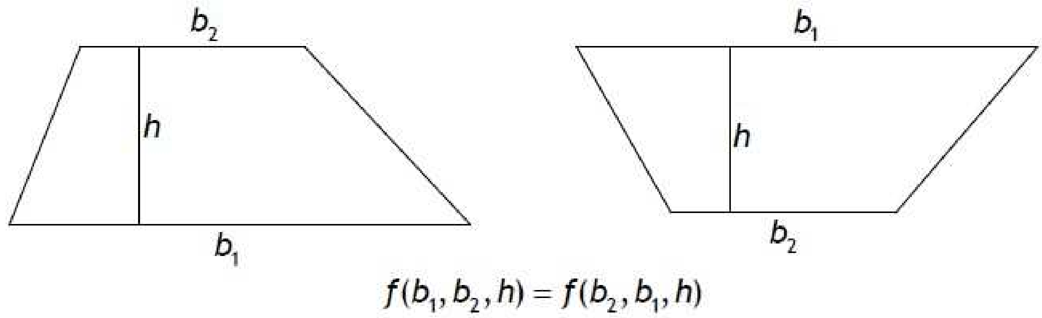

Figura 1.7: Un trapecio y su figura invertida

$$f(b, b, h_1 + h_2) = f(b, b, h_1) + f(b, b, h_2) \tag{1.5}$$

$$f(b_1, b_2, h) = f(b_2, b_1, h) \tag{1.6}$$

La solución general para este sistema de ecuaciones funcionales puede demostrarse que es:

$$Area = f(b_1, b_2, h) = c(b_1 + b_2)h \tag{1.7}$$

ver Castillo [13] donde c es una constante positiva arbitraria, que considera las unidades de medidas usadas para las bases b_1 y b_2, la altura h y el área resultante. Conviene señalar que en el planteamiento se ha supuesto, indirectamente, que las bases del trapecio vienen medidas en las mismas unidades. Si no fuera así, la solución sería

$$f(b_1, b_2, h) = c(db_1 + b_2)h$$

con c y d dos constantes arbitrarias.

1.2.3 Interés Simple

Sea $f(x,t)$ el interés que se obtiene del banco cuando se deposita una cantidad x durante un período de duración t. En el caso del interés simple se tienen las siguientes hipótesis:

1. Al final del período de tiempo t, se recibe el mismo interés en los dos casos siguientes:

    - Se deposita la cantidad $x+y$ en una cuenta.

    - Se deposita la cantidad x en una cuenta, y la cantidad y en otra cuenta.

    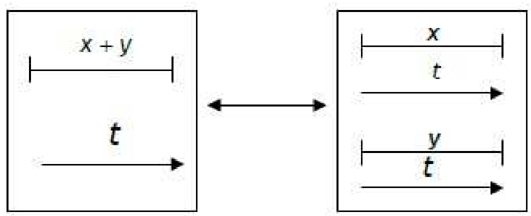

    Figura 1.8: Dividiendo la cantidad depositada en dos partes x e y

    Así, se tiene $f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t)$

2. Al final del período del tiempo $t+u$, se recibe el mismo interés en los dos casos siguientes:

    - Se deposita la cantidad x durante un período de duración $t+u$.

    - Se deposita la cantidad x primero durante un período de duración t y más tarde durante un período de duración u.

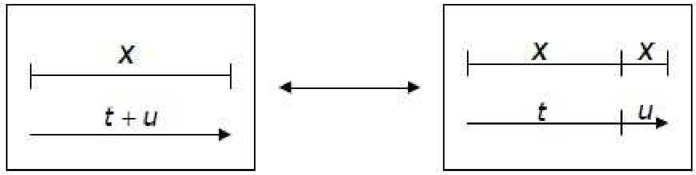

Figura 1.9: Dividiendo el tiempo de depósito en dos períodos t y u

Así se tiene que $f(x, t + u) = f(x, t) + f(x, u)$. Consecuentemente, la función $f(x, t)$ tiene que satisfacer el sistema de ecuaciones funcionales:

$$f(x + y, t) = f(x, t) + f(y, t) \tag{1.8}$$

$$f(x, t + u) = f(x, t) + f(x, u) \tag{1.9}$$

que tiene como solución general

$$f(x, t) = cxt \tag{1.10}$$

donde c es una constante arbitraria no negativa. Notamos que ésta es la bien conocida fórmula del interés simple, donde c es el interés (rédito). Es importante resaltar aquí que las hipótesis anteriores no se dan en la realidad. Cuando se deposita una cantidad grande en el banco, o se hace por un largo período de tiempo, el interés ofertado por éstos crece. Sin embargo, las hipótesis utilizadas son las que corresponden al interés simple.

1.3 Algunas Ecuaciones Funcionales

En esta sección se dan algunas ecuaciones funcionales importantes.

1.3.1 La Ecuación Funcional Principal de Cauchy

Esta ecuación fue estudiada por primera vez por Legendre(1791) y Gauss(1809) pero fue Cauchy(1821) el primero en encontrar la solución general continua.

Definición 1.2. *A la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es una función aditiva si satisface la Ecuación Funcional Aditiva de Cauchy.*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.11}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. *A la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se le llama una función lineal si y sólo si es de la forma*

$$f(x) = cx \tag{1.12}$$

con $x \in \mathbb{R}$ donde c es una constante arbitraria.

Teorema 1.4. *Si la ecuación*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.13}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface para todo x, y reales, y si la función $f(x)$ es continua en un punto, no negativa para x pequeño, o acotada en un intervalo o integrable o medible, entonces

$$f(x) = cx \tag{1.14}$$

con $x \in \mathbb{R}$ donde c es una constante arbitraria.

El ejemplo más típico de ecuación funcional es la ecuación funcional de Cauchy

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1.15}$$

donde $f(x)$ es la incógnita. Su solución general, bajo algunas condiciones de regularidad, es

$$f(x) = cx.Castillo[13]. \tag{1.16}$$

donde c es una constante arbitraria.

1.3.2 La Ecuación Funcional Principal de Pexider

En 1903 Pexider.J.V consideró las siguientes ecuaciones funcionales:

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$
$$f(x+y) = g(x)h(y)$$
$$f(xy) = g(x) + h(y)$$
$$f(xy) = g(x)h(y)$$

funciones $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Estas ecuaciones son una generalización de las ecuaciones de Cauchy.

Teorema 1.5. *Ecuación Principal de Pexider El sistema más general de soluciones de*

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \tag{1.17}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ y f continua en un punto, o no negativa para x pequeño, o acotada en un intervalo, es

$$f(x+y) = A(x+y) + B + C$$
$$g(x) = Ax + B$$
$$h(x) = Ax + C$$

donde A,B y C son constantes arbitrarias.

Una interesante generalización de (1.15) es la ecuación de Pexider

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \tag{1.18}$$

que involucra tres funciones desconocidas $f(.)$, $g(.)$ y $h(.)$. Su solución general es

$$f(x) = cx + a + b$$
$$g(x) = cx + a$$
$$h(x) = cx + b$$

donde a, b, c son constantes arbitrarias. Es sorprendente ver que una única ecuación tal como (1.18) puede derivarse la estructura de tres funciones desconocidas. Al contrario que otro tipo de ecuaciones donde se requiere el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, las ecuaciones funcionales tienen esta propiedad.

1.3.3 Ecuación Funcional Cuadrática

Una función aditiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en dos variables es definida como

$$f(x+y, u+v) = f(x, u) + f(y, v) \tag{1.19}$$

con $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ la solución general continua viene dada por

$$f(x, u) = k_1 x + k_2 u \tag{1.20}$$

donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias. La representación general de las funciones aditivas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ viene dada por

$$f(x, u) = A_1(x) + A_2(x) \tag{1.21}$$

donde $A_1, A_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Definición 1.6. *Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es llamada biaditiva si y sólo si es aditiva para cada variable, esto es:*

$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$$
$$f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$$

1.3.4 Ecuación Funcional D'Alembert

La ecuación funcional

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{1.22}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ es llamada la Ecuación Funcional D'Alembert. Esta ecuación tiene una larga historia ya que empezó a ser estudiada por Alembert (1769), por Poisson (1804) y Picard (1922). Esta ecuación se centra en la determinación de la suma de dos vectores en la geometría euclidiana y no-euclidiana. Finalmente Cauchy (1821) determina la solución continua de la ecuación funcional de D'Alembert.

Teorema 1.7. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y satisface*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{1.23}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ *cuando* f *es de la forma*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(x) &= 1 \\ f(x) &= \cosh(\alpha x) \\ f(x) &= \cos(\beta x) \end{aligned}$$

donde α *y* β *son constantes reales positivas.*

1.3.5 Ecuación Funcional Trigonométrica

Las funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \\ g(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

satisfacen la ecuación funcional

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \tag{1.24}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ es llamada Ecuación Funcional Trigonométrica. Las funciones trigonométricas también satisfacen otras ecuaciones funcionales como

$$\begin{aligned} g(x+y) &= g(x)f(y) + f(x)g(y) \\ f(x+y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ g(x-y) &= g(x)f(y) - g(y)f(x) \end{aligned}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$.

1.3.6 La Ecuación Funcional Suma de Productos

En esta sección se introduce una poderosa ecuación funcional que tiene muchas aplicaciones interesantes en la práctica. Supóngase que se tienen dos conjuntos de funciones, todas las soluciones de la ecuación funcional:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(y) = 0 \tag{1.25}$$

pueden escribirse de la forma Castillo [12]:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \vdots \\ g_n(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1_{r+1}} & b_{1_{r+2}} & \dots & b_{1n} \\ b_{2_{r+1}} & b_{2_{r+2}} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_{r+1}} & b_{n_{r+2}} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{r+1}(y) \\ \psi_{r+2}(y) \\ \vdots \\ \psi_n(y) \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

donde $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)$ y $\psi_{r+1}(y), \psi_{r+2}(y), \dots, \psi_n(y)$ son sistemas arbitrarios de funciones linealmente independientes, $0 < r < n$ es un entero y las constantes a_{ij}, b_{ij} satisfacen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1_{r+1}} & b_{1_{r+2}} & \dots & b_{1n} \\ b_{2_{r+1}} & b_{2_{r+2}} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n_{r+1}} & b_{n_{r+2}} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.28}$$

1.4 Algunos Métodos Generales para resolver Ecuaciones Funcionales

Históricamente, las ecuaciones funcionales se han resuelto usando métodos ad hoc. Un cuidadoso estudio de la literatura existente revela algunas técnicas generales para resolver ciertos tipos de ecuaciones funcionales. Algunos de los métodos más comunes son:

1. Reemplazar variables por valores dados.
2. Transformar una o varias variables.
3. Transformar una o varias funciones.
4. Usar una ecuación funcional más general.
5. Tratar variables como constantes.
6. Separación de variables.
7. Técnicas analíticas(diferenciación, integración).
8. Métodos mixtos.

1.4.1 Reemplazando variables por valores dados

Este método consiste en reemplazar una o varias variables que aparezcan en la ecuación funcional por constantes apropiadas, de manera que la solución puede ser obtenida fácilmente de la ecuación simplificada resultante. Los siguientes ejemplos ilustran esté método.

Ejemplo 1.8. *(Las funciones homogéneas). La solución general de la ecuación funcional*

$$f(yx) = y^k f(x) \tag{1.29}$$

con $x, y \in \mathbb{R}$ *donde* f *es real y* k *es constante, es*

$$f(x) = cx^k \tag{1.30}$$

donde c es una constante arbitraria.

Demostración. Tomando $x = 1$ en (1.29)se llega a $f(x) = cy^k$, donde $c = f(1)$. □

Ejemplo 1.9. *(Ecuación de Sincov). La solución general de la ecuación funcional*

$$f(x, y) + f(y, z) = f(x, z) \tag{1.31}$$

es

$$f(x, y) = g(y) - g(x) \tag{1.32}$$

donde g es una función arbitraria.

Demostración. Tomando $z = 0$ en (1.31) y $g(x) = f(x, 0)$, se llega a (1.32) que satisface (1.31). □

1.4.2 Transformando una o varias variables

Este método consiste en la transformación de una o varias variables usando transformaciones apropiadas para que la solución pueda ser obtenida fácilmente de la ecuación transformada resultante.

Ejemplo 1.10. *La solución general de la ecuación funcional*

$$G(x + z, y + z) = G(x, y) + z \tag{1.33}$$

es

$$G(x, y) = x + g(y - x) \tag{1.34}$$

donde g es una función arbitraria.

Demostración. Tomando $z = -x$ en (1.33) y $g(x) = G(0, x)$, se llega a (1.34). □

1.4.3 Transformando una o varias funciones

Este método consiste en la transformación de una o varias funciones para que la ecuación transformada tenga una solución conocida.

Ejemplo 1.11. *Si la ecuación funcional*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + K, \tag{1.35}$$

donde K es una constante real, es satisfecha por cada par de números reales x e y,además si la función $f(x)$ es:

1. *continua en al menos un punto, o*
2. *acotada por K para valores pequeños de x, o*
3. *acotada en un intervalo dado,*

entonces

$$f(x) = cx - K \tag{1.36}$$

donde c es una constante arbitraria.

Demostración. Tomando

$$f(x) = g(x) - K, \tag{1.37}$$

la ecuación funcional (1.35) se transforma en $g(x+y) = g(x) + g(y)$, que es la ecuación funcional de Cauchy, con solución $g(x) = cx$. Reemplazando ésta en (1.36) se llega a (1.35). $\square$

1.4.4 Usando una Ecuación Funcional más General

Este método es poderoso para ecuaciones funcionales que son casos especiales de otras ecuaciones funcionales cuya solución general es ya conocida.

Ejemplo 1.12. *La solución general de la ecuación funcional*

$$F\left[G(x,y),G(u,v)\right]=K\left[x+u,y+v\right] \tag{1.38}$$

puede ser obtenida de la solución

$$\begin{aligned}F(x,y)&=k\left[f(x)+g(y)\right]\\K(x,y)&=k\left[l(x)+m(y)\right]\\M(x,y)&=l^{-1}\left[p(x)+r(y)\right]\\G(x,y)&=f^{-1}\left[p(x)+q(y)\right]\\H(x,y)&=g^{-1}\left[r(x)+s(y)\right]\\N(x,y)&=m^{-1}\left[q(x)+s(y)\right]\end{aligned}$$

$$F\left[G(x,y),H(u,v)\right]=K\left[M(x,u),N(y,v)\right] \tag{1.39}$$

teniendo en cuenta que $H(x,y)=G(x,y); M(x,u)=x+u; N(y,v)=y+v.$

Ejemplo 1.13. *Las dos ecuaciones funcionales*

$$F(x+y,u+v)=K(M(x,u),N(y,v)) \tag{1.40}$$

$$F(F(x,y),z)=F(x,F(y,z)) \tag{1.41}$$

pueden resolverse también como casos particulares de la ecuación funcional $F\left[G(x,y),H(u,v)\right]=K\left[M(x,u),N(y,v)\right].$

1.4.5 Tratando variables como constantes

En algunas ecuaciones, la consideración de una o varias variables como constantes conduce a ecuaciones funcionales con soluciones conocidas. En estos casos la solución de la ecuación funcional inicial es la solución general de la ecuación funcional transformada, donde las constantes arbitrarias son reemplazadas por funciones arbitrarias de las variables previamente hechas constantes, y funciones arbitrarias que incorporan las mismas variables.

Ejemplo 1.14. *La solución general continua (con respecto a su primer argumento) de la ecuación funcional*

$$f(x+y,z) = f(x,z)f(y,z) \tag{1.42}$$

con $x, y, z \in \mathbb{R}$ *es*

$$f(x,z) = exp\,[c(z)x] \tag{1.43}$$

donde c *es una constante arbitraria*

Demostración. Para cada valor de z, (1.42) es la ecuación de Cauchy II, cuya solución es (1.43). □

Ejemplo 1.15. *La solución general de*

$$f(ux,y,z) = u^k f(x,y,z) \tag{1.44}$$

es

$$f(x,y,z) = x^k c(y,z) \tag{1.45}$$

donde c *es una función arbitraria. Como la solución general de* $f(ux) = u^{f(x)}$ *es* $f(x) = cx^k$, *y para cada* y *y* z *fijados, la ecuación (1.44) es de esta forma entonces se tiene (1.45).*

1.4.6 Separando Variables

Si la ecuación funcional dada permite una separación en dos partes que dependen de algunas variables no comunes, entonces cada parte puede escribirse como una función de sólo las variables comunes.

Ejemplo 1.16. *La solución general de la ecuación funcional*

$$f^{-1}(g(x) + h(y)) = exp(x) x, y \in \mathbb{R} \tag{1.46}$$

es

$$g(x) = f(exp(x)) - c; h(y) = c, \tag{1.47}$$

donde f *es una función invertible arbitraria y* c *es una constante arbitraria.*

Demostración. La ecuación (1.46) puede escribirse como $g(x) + h(y) = f(exp(x))$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ y entonces se llega a $-g(x) + f(exp(x)) = h(y) = c$, de lo que finalmente se obtiene (1.47). $\square$

1.4.7 Derivando

Derivando la ecuación funcional inicial una o varias veces, se obtiene una ecuación diferencial. Resolviendo esta ecuación se puede llegar a la solución de la ecuación funcional inicial.

Ejemplo 1.17. *Para resolver la ecuación*

$$f(x, y) + f(y, z) = f(x, z) \tag{1.48}$$

se deriva con respecto a x,y y z, independientemente, y se llega a

$$\begin{aligned} f_1'(x, y) &= f_1'(x, z) \\ f_2'(x, y) + f_1'(y, z) &= 0 \\ f_2'(y, z) &= f_2'(x, z) \end{aligned}$$

donde los subíndices se refieren a las derivadas parciales con respecto a los argumentos indicados de (1.48) se obtiene

$$\begin{aligned} f_1'(x, y) = s'(x) &\Rightarrow f(x, y) = s(x) + g(y) \\ f_2'(x, y) = -f_1'(y, z) &\Rightarrow g'(y) = -s'(y) \\ &\Rightarrow g(y) = -s(y) + k \end{aligned}$$

y se llega a $f(x, y) = s(x) - s(y) + k$ *pero la sustitución en (1.48) conduce a* $k = 0$. *Así la solución diferenciable general de (1.48) resulta finalmente*

$$f(x, y) = s(x) - s(y). \tag{1.49}$$

1.4.8 Métodos Mixtos

En algunos casos, la solución de una ecuación funcional puede ser obtenida combinando alguno de los métodos previos. Se ilustra este hecho con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.18. *Para resolver el sistema de ecuaciones*

$$f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z), \tag{1.50}$$

$$f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z) \tag{1.51}$$

en primer lugar se procede como en el ejemplo 1.8, tratando algunas variables como constantes. Como (1.50) es Cauchy para cada valor de x resulta

$$f(x, z) = cg(x)z, \tag{1.52}$$

y (1.51) es Cauchy para cada valor de z, por lo que,

$$f(x, z) = dxh(z) \tag{1.53}$$

de (1.52)y (1.53) se llega a la ecuación

$$cg(x)z = dxh(z) \tag{1.54}$$

.

Entonces, si se toma $x = 1$ y $e = g(1)$ (reemplazar una variable por un valor dado), se llega a $h(z) = kz$, donde $k = ce/d$. Sustituyendo lo anterior en (1.53) se obtiene la solución final del sistema $f(x, z) = qxz$, donde $q = ck$.

1.5 Algunas Ecuaciones Funcionales en Funciones de Varias Variables

En esta sección se dan algunas ecuaciones funcionales importantes donde las incógnitas son funciones de varias variables.

1.5.1 La Ecuación Funcional de la Asociatividad Generalizada

Teorema 1.19. *(Ecuación de la asociatividad generalizada) La solución general continua en un rectángulo real de la ecuación funcional*

$$F\left[G(x,y),z\right] = K\left[x, N(x,z)\right] \tag{1.55}$$

con G invertible en ambas variables, F invertible en la primera variable para un valor fijado de la segunda variable y K y N ambas invertible en la segunda variable para un valor fijado de la primera, es

$$\begin{aligned} F(x,y) &= k\left[f(x)+r(y)\right] \\ K(x,y) &= k\left[p(x)+n(y)\right] \\ G(x,y) &= f^{-1}\left[p(x)+q(y)\right] \\ N(x,y) &= n^{-1}\left[q(x)+r(y)\right] \end{aligned}$$

donde f, r, k, n, p y q son funciones arbitrarias continuas y estrictamente monótonas. Las dos partes de (1.55) pueden escribirse como

$$k\left[p(x)+q(y)+r(z)\right]. \tag{1.56}$$

1.5.2 La Ecuación Funcional de la Bisimetría Generalizada

Teorema 1.20. *(Ecuación de la asociatividad generalizada)La solución general continua en un rectángulo real de la ecuación funcional*

$$F[G(x,y),H(u,v)] = K[M(x,u),N(y,v)] \tag{1.57}$$

con G invertible en ambas variables, F y M invertible respecto de la primera variable para un valor fijado de la segunda variable y H, K y N invertible respecto de la segunda variable para un valor fijado de la primera, es

$$F(x,y) = k\,[f(x) + g(y)]$$
$$K(x,y) = k\,[l(x) + m(y)]$$
$$M(x,u) = l^{-1}\,[p(x) + r(u)]$$
$$G(x,y) = f^{-1}\,[p(x) + q(y)]$$
$$H(u,v) = g^{-1}\,[r(u) + s(v)]$$
$$N(y,v) = m^{-1}\,[q(y) + s(v)]$$

donde f, g, l, m, p, q y s son funciones arbitrarias continuas y estrictamente monótonas y r es una función continua arbitraria. Las dos partes de (3.8)pueden escribirse como

$$k[p(x,y) + q(y) + r(u) + s(v)] \tag{1.58}$$

1.5.3 La Ecuación Funcional de la Traslación

Teorema 1.21. *(Ecuación Funcional de la Traslación)La solución general continua de la ecuación de traslación*

$$F[F(x,m),n] = F(x,m+n) \tag{1.59}$$

con $x, F(x,n) \in (a,b), m, n \in \mathbb{R}$ *viene dada por*

$$F(x,n) = g^{-1}[g(x) + n] \tag{1.60}$$

donde g es una función arbitraria continua y estrictamente monótona en $\mathbb{R}$*, si se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *F(x,n) es estrictamente monótona para cada valor de x con respecto a n y para un conjunto incontable de valores de n con respecto a x.*

2. *F(x,n) es continua para cada valor de n con respecto a x y para* $x = x_0$ *con respecto a n, y no constante para cada valor fijado de x.*

El intervalo de definición con respecto a x sólo puede ser abierto. Como consecuencia de este teorema, la n-ésima iteración de f puede escribirse como

$$f^n(x) = F(x,n) = g^{-1}[g(x) + n] \tag{1.61}$$

para algún $g(.)$. *En consecuencia*

$$f(x) = g^{-1}[g(x) + 1]. \tag{1.62}$$

CAPÍTULO 2

TEORÍA DE LA ELECCIÓN SOCIAL

2.1 La Teoría Matemática de la Elección Social

La Teoría de la Elección Social es una rama de la *Teoría de la Decisión* la misma es una disciplina científica que centrándose en aspectos cuantitativos y estructurales trata de estudiar la metodología y propiedades de las reglas que llevan a un individuo o colectivo a tomar una decisión, mientras que podemos decir que la Elección Social está dedicada al estudio de los métodos, sistemas, instituciones para la realización de elecciones colectivas, esto es, elecciones o decisiones que afectan a un colectivo, por ejemplo, un grupo de gente, votantes en unas elecciones, agentes económicos, empresarios, directivos o socios que han de tomar una decisión económica en su empresa.

La Teoría de la Elección Social puede considerarse, históricamente, como el resultado de la fusión de dos corrientes de pensamiento que se habían desarrollado en forma totalmente independiente. Por un lado, los estudios matemáticos sobre sistemas electorales, entre cuyos antecedentes más remotos cabe recordar los trabajos de Borda y Condorcet, en el siglo $XVIII$, y Dodgson mejor conocido como Lewis Carroll en el XIX. Por otro lado, el análisis de la noción de bienestar social como una función del bienestar personal, que también se remonta al siglo $XVIII$ y tiene su expresión más representativa en la filosofía moral utilitarista (Bentham). Esta última tarea fue retomada, en este siglo con metodología más rigurosa, por los economistas de la llamada economía del bienestar, bajo la forma de lo que denominaron función de bienestar social. La versión moderna de la elección colectiva o Elección Social comenzó con los trabajos de Kenneth Arrow [2].

El trabajo seminal de Kenneth Arrow marcó el punto de unión de estas dos tradiciones. En esa obra probo su Teorema General de Posibilidad, que puso en crisis diversos supuestos, asumidos acríticamente hasta entonces, sobre las propiedades de los sistemas de toma de decisiones colectivas. Su presentación formal del tema tuvo la virtud de mostrar la similitud estructural de viejos problemas, que anteriormente habían sido encarados por separado. La monografía de Arrow constituye la partida de nacimiento de la teoría de la elección social y la matriz que lo imprimió la forma en que se la conoce actualmente.

La teoría de la Elección Social parte del supuesto de que cada individuo tiene definida una ordenación de las alternativas del conjunto de acuerdo con sus preferencias, y que tales ordenaciones satisfacen ciertas condiciones de racionalidad, que se postulan por medio de axiomas. Una regla de elección colectiva deberá determinar una única jerarquización de las alternativas para cada conjunto de ordenaciones individuales de éstas. La jerarquización determinada por la regla se llama preferencia social y debe satisfacer también ciertas condiciones de racionalidad, no necesariamente las mismas que las preferencias individuales.

Entre las interpretaciones posibles merece ser mencionada especialmente la que la ve como un examen conceptual de teorías normativas de la sociedad, es decir, teorías que caracterizan que es para un estado de cosas ser mejor que otro desde el punto de vista social.

La estructura formal de la teoría de la Elección Social es susceptible, como todo sistema formal, de diversas interpretaciones. Esto permite la aplicación de los resultados obtenidos a cuestiones que aparentemente no están conectadas entre sí. Nuestras valoraciones éticas de estados sociales están basadas en ciertas creencias acerca de que características de un estado de en la sociedad lo hacen mejor o peor que otro, desde el punto de vista de la sociedad en general, o desde un punto de vista imparcial.

Una tarea importante de la Teoría de la Elección Social es la de dar una caracterización precisa de estas creencias y determinar si son consistentes entre sí. Uno de los resultados básicos de este enfoque ha sido mostrar que hay creencias acerca de la naturaleza del bien social que, aunque aparentemente inocuas en sí mismas, pueden tener implicaciones insospechadas y aun paradojicamente cuando se las combina.

Según cómo se interprete la teoría se podrán tener opiniones distintas acerca de cuáles son los resultados que debería alcanzar y, en consecuencia, cúan paradójicas son las inconsistencias que ella muestra.

En este capítulo presentaremos, en primer lugar, las propiedades formales o condiciones de consistencia o racionalidad de las relaciones de preferencia individual y preferencia social. En segundo lugar una regla de la toma de decisiones en particular: la regla de la mayoría y por último el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Los problemas planteados en la introducción corresponden a problemas de Elección Social, en el que a partir de las preferencias individuales (en este caso dos agentes) de acuerdo con el segundo ejemplo, se ha de diseñar una *regla*, o bien una *preferencia social* que ponga de acuerdo a ambos, siendo considerada como la preferencia de la sociedad en su conjunto (en este caso la *sociedad* es un conjunto de dos individuos), que debe reflejar y respetar, en la medida de lo posible, las preferencias individuales de los agentes que componen la sociedad.

Por fijar ideas, si hay *unanimidad* en un hecho (por ejemplo, si todos y cada uno de los miembros de la sociedad, al establecer sus preferencias individuales, dicen que el elemento x es mejor que el elemento y) la preferencia social o regla de agregación de preferencias individuales deberá respetar la unanimidad (no tendría ningún sentido ahora que la preferencia social declararse en última instancia que y es mejor que x).

La idea fundamental subyacente a toda la Teoría de la Elección Social es la búsqueda de buenas reglas de elección, en el sentido de que la elección social que se tome respete de algún modo las preferencias individuales de cada agente o individuo que forme parte del colectivo que haya tomado esa decisión social o colectiva.

No resulta en absoluto sencillo el diseño de tales reglas. Si bien pueden encontrarse reglas que respeten alguna de las restricciones que nuestro *sentido común* impondría a una regla de elección colectiva (por ejemplo, que respete el anonimato de los votantes), al elaborar una lista, incluso pequeña, de *restricciones que nuestro sentido común impondría a una regla de elección colectiva*, ya no es tan sencillo encontrar una regla.

De hecho, y como muestra el famoso *Teorema de Imposibilidad de Arrow*, puede incluso que no exista regla para una lista dada de restricciones.

Este resultado, quizá sorprendente cuando se tiene noticia de él por primera vez, resulta desalentador, y, a nuestro modo de ver, contiene una fuerte carga psicológica, ya que viene a decir que, de acuerdo con esa lista de restricciones impuestas por nuestro sentido común, toda regla que se tome va a tener alguna imperfección.

En este sentido, de la toma de decisiones colectivas, no solamente cualquier colectivo o sociedad sería perfecto, sino que, por más que se esforzase, nunca podría serlo. En efecto, no sólo para el colectivo resultara difícil tomar una decisión o regla de elección social, sino que por más perfecta que sea la regla que se tome, *nunca lloverá a gusto de todos*, pues dicha regla contravendrá al menos una de estas restricciones impuestas.

Veamos ahora otros ejemplos acerca de como a partir de preferencias o elecciones individuales no resulta en absoluto sencillo obtener una preferencia o Elección Social, que satisfaga buenas propiedades:

Ejemplo 2.1. *El presidente del Gobierno de un país quiere tomar alguna medida de choque para reducir el deficit público. Con tal fin convoca a sus tres ministros y les plantea la siguiente cuestión. Quiero tomar una medida drástica que ejemplifique el deseo del Gobierno de reducir el deficit público. Para ello he considerado las tres alternativas siguientes:*

(I) Reducir sustancialmente los altos cargos de la Administración y amortizar una proporción de las plazas de los funcionarios que se jubilen.

(II) Reducir el presupuesto para obras públicas y privatizar las empresas públicas que sean rentables.

(III) Introducir un control estricto del deficit de las administraciones locales y regionales.

Quiero que cada uno de ustedes me diga cuál de estas medidas es la mejor opción, cuál es la opción intermedia y cuál la peor. Cuando tenga sus opiniones tomaré una decisión. La idea del presidente es elegir aquella alternativa que consiga un apoyo mayoritario entre sus ministros. Una vez estudiadas las diferentes propuestas por cada uno de los ministros, éstos remiten un informe al presidente del Gobierno en el que le comunican sus conclusiones. Éstas se resumen en el siguiente cuadro:

Opciones	*Ministro* 1	*Ministro* 2	*Ministro* 3
Mejor Opción	*I*	*II*	*III*
Opción Intermedia	*II*	*III*	*I*
Peor Opción	*III*	*I*	*II*

$Cuadro 2$

El presidente comienza a realizar las cuentas en su despacho. Observa que la mayoría (ministros 1 y 3) prefiere la opción I a la opción II; y también que la mayoría (ministros 1 y 2) prefiere la opción II a la opción III. En este punto el presidente sonríe y piensa: Ya está todo claro: I es mejor que II y II es mejor que III, de modo que I también será mejor que III y por tanto adoptaremos la alternativa I. Pero al momento su decisión se tambalea: Debido que existe también una mayoría (ministros 2 y 3) que prefieren la alternativa III a la alternativa I.

Este ejemplo sirve para ilustrar algunas de las dificultades que aparecen cuando agregamos preferencias individuales en preferencias sociales. Aquí la sociedad está compuesta simplemente por tres individuos (los tres ministros), cada uno de los cuales tiene perfectamente definida su ordenación del conjunto de alternativas. El criterio de agregación de preferencias también está perfectamente definido: una alternativa es declarada socialmente mejor que otra si es preferida por la mayoría. Y sin embargo las preferencias sociales que se derivan del criterio mayoritario no consiguen ordenar las alternativas (puesto que no se cumple la propiedad de transitividad de la preferencia social). Entender perfectamente las razones de ello requiere discutir previamente algunos aspectos del problema.

Sin embargo observemos que:

1. La incapacidad de llegar a una decisión se debe a que la regla de elección no resulta transitiva (es decir, no consigue ordenar las alternativas sociales). Ello genera un ciclo en la valoración de las alternativas: I es mejor que II, II es mejor que III y III es mejor que I.

2. Si los agentes tuvieran unas preferencias distintas (por ejemplo si el ministro 3 ordenara las alternativas como II, I, III), el problema no existiría. La falta de transitividad de la preferencia social se produce, por lo tanto, porque las preferencias individuales ordenan las alternativas de una manera peculiar. Esto nos indica que no todas las reglas de elección social son capaces de ordenar adecuadamente las alternativas, si admitimos todos los tipos de preferencias individuales. En particular, el método de votación mayoritario no lo consigue.

3. La única información que se toma en cuenta para la valoración social es la ordenación expresada por los distintos agentes. En consecuencia, no juega ningún papel la intensidad con la que los agentes prefieren unas alternativas a otras, ni se establece ninguna comparación de en qué medida un agente prefiere una alternativa más que otro. El resultado del ejemplo nos dice que cuando tomamos en cuenta únicamente esta información podemos encontrarnos con dificultades.

4. La regla de decisión mayoritaria respeta la unanimidad: si todos los agentes deciden que una opción es mejor que otra, entonces esta regla de elección colectiva valora las alternativas de igual forma. Así, si los tres ministros hubieran dicho que III es mejor que II, y II es mejor que I, entonces la regla de decisión social hubiera ordenado las opciones como: III preferido a II, preferido a I.

5. En el ejemplo todas las opiniones cuentan por igual (esta es la esencia del método de votación mayoritaria). Si intercambiamos las ordenaciones de alternativas de los ministros, el resultado no se altera. Es inmediato comprobar que si el presidente del Gobierno tomará en cuenta únicamente la opinión del ministro 1, entonces el problema de la falta de transitividad no se plantearía (aunque esta regla de decisión no sería obviamente la de decisión mayoritaria, sino una de tipo dictatorial: ya que sólo la valoración de uno de los individuos cuenta).

Estos aspectos son esenciales a la hora de determinar las posibles reglas de agregación de preferencias. El primero está relacionado con las propiedades de coherencia de la regla de elección (típicamente queremos poder ordenar las alternativas sociales, o al menos ser capaces de tomar una decisión).

El segundo y el tercero tienen que ver con el dominio de las preferencias individuales que consideramos admisible; por una parte con admitir o no admitir que todas las configuraciones de preferencias son posibles, y por otra con la cantidad de información utilizable (es decir, si la regla debe depender únicamente de las ordenaciones individuales, o también de otros factores).

Finalmente, el cuarto y el quinto aluden a la sensibilidad de la regla de decisión con respecto a las preferencias de los individuos. El cuarto se conoce como la Propiedad de Pareto: si todos los individuos valoran las cosas de una determinada forma, entonces la regla de elección social lo hace de la misma manera.

El quinto se refiere a la propiedad de anonimato (lo que cuentan son las preferencias expresadas, no quién las expresa), y refleja una votación democrática en el procedimiento de agregación (no queremos darle todo el poder de decisión a una única persona).

Ejemplo 2.2. *El dilema del prisionero. Relación de la Elección Social con la Teoría de Juegos.*

Imaginemos que dos atracadores A y B han sido capturados por la policía, pero han podido destruir las pruebas de una acción criminal más grave, con lo que esperan ser condenados, únicamente, a una pena pequeña, por un delito menor. Veamos como la policía no tardará en hacerles caer y confesar, con lógica implacable, apelando a su interés racional: La situación para ambos es idéntica, por lo cual nos basta considerar el caso de uno cualquiera de ellos, sea A.

Naturalmente, la policía está interesada en conseguir una confesión completa de A, e intenta convencerle de los beneficios que le reportará actuar de esa forma. Si su confesión se utiliza para condenar a su compinche en el crimen, B, A quedará libre.

Por otra parte, si B también confiesa y la declaración de A no es ya necesaria para condenar a B, la confesión de A servirá para mitigar un poco su pena, que se reduciría de 51 a 50 años de cárcel (suponemos que la pena mayor es de 50 años, y la menor, de un año). Si al prisionero A le preocupa únicamente su propio interés, su razonamiento acaba siendo no importa lo que haga B, lo importante para mi es confesar.

Como el prisionero B está en la misma situación que el prisionero A hará lo mismo, siendo ambos condenados a 50 años... ¿es esto un logro para ellos? Si en vez de un interés individual influido por lo social (pensando en lo que haga el otro recluso), hubiesen prescindido de él, hubiesen observado que la única manera de alcanzar la pena menor es no confesando, y hubiesen optimizado la situación colectiva no confesando, siendo así condenados a una pena menor de un año.

Comentario: Si no existiera el otro recluso, la preferencia individual del prisionero A y del prisionero B sería de confesar. Al existir el otro recluso, el juego entra en acción, y si bien la mejor regla colectiva es no confesar ninguno de los dos, parece que, siendo tanto A como B individualistas, o, en definitiva, más egoístas, la regla colectiva que aparecería es confesar los dos, cuya consecuencia final en absoluto resulta la mejor para ambos.

Ejemplo 2.3. *El orden de los factores puede alterar el producto. Tres individuos A, B y C se presentan a un concurso compuesto por tres miembros del jurado P, Q y R. Cada miembro del jurado establece un orden de preferencias entre los candidatos, otorgando tres puntos a su candidato más preferido, dos al siguiente y uno al menos preferido. Se da la circunstancia de que P ha establecido el orden (A, B, C); Q ha* *establecido el orden (B, C, A); R ha establecido el orden (C, A, B). Así, todos los candidatos obtienen seis puntos. Lamentablemente, el concurso sólo puede tener un ganador.*

El jurado debe, por lo tanto, establecer un sistema de desempate que permita decidir quién es ese ganador. Veamos una regla que permite que salga elegido uno de los tres previamente establecido de antemano (con lo que la trampa es obvia). Por ejemplo, para que salga procedemos como sigue: La elección se hace en dos fases; en la primera fase el jurado elige uno entre B y C (olvidándose por el momento de A). Cada miembro del jurado da dos puntos a su preferido entre B y C, y un punto al otro. B gana por cinco puntos a cuatro.

Una vez, hecho esto la segunda fase consiste en confrontar A y B de la misma manera que en la primera fase se confrontaron B y C. A gana ahora por cinco a cuatro y resulta elegido.

Comentario: Las reglas que aquí se utilizan (antes y después del desempate), a pesar de ser numéricas (se cuenta un número de puntos) son, en esencia, reglas de mayoría simple. Donde más claro se ve es en el sistema de desempate: al confrontar B con C, B gana por mayoría simple (dos miembros del jurado le prefieren). Y lo mismo ocurre al confrontar A y B.

Viendo tales ejemplos se podría pensar en una definición para la elección social, pero tal vez este concepto no exista, ya que un matemático, un economista, un sociólogo, un político tendrán ideas completamente distintas acerca de este concepto, es justamente aquí donde se evidencia la complejidad para tomar ciertas decisiones por lo que deben existir reglas con ciertas propiedades, es a esto que podemos llamar **Teoría de la Elección Social**.

Introducimos, por lo tanto, conceptos previos acerca de la Teoría de la Elección Social. Supondremos, de momento, una sociedad que consta de un número finito m de individuos (agentes) $(a_1, ..., a_m)$. Cada uno de estos individuos debe decidir, elegir, o simplemente , mostrar sus preferencias, acerca de un conjunto de alternativas, que también supondremos finito, $(b_1, ..., b_k)$. El número k de alternativas puede o no coincidir con el de agentes m. Cada agente tiene definida una relación de preferencias P_i con $(i = 1, ..., m)$ sobre el conjunto de alternativas.

2.1.1 Relaciones Binarias

Dados dos elementos x e y el par ordenado (x, y) es el elemento que tiene como primera coordenada x y como segunda coordenada y.

Definición 2.4. *Se llama producto cartesiano de los conjuntos X e Y al conjunto $X \times Y$ formado por todos los pares ordenados (x, y) donde $x \in X$ e $y \in Y$. Es decir,*

$$X \times Y = \{(x, y)/x \in X \wedge y \in Y\} \tag{2.1}$$

Definición 2.5. *Sea X un conjunto no vacío. Una relación binaria sobre X es un subconjunto R de $X \times X$. Es decir, $R \subset X \times X$. Usualmente escribiremos xRy en lugar de $(x, y) \in R$.*

Ejemplo 2.6. *Si un elemento $(x, y) \in R$ escribiremos xRy, a continuación algunos ejemplos sencillos de relaciones binarias:*

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$.

(2) En $\mathbb{N}$, xRy si x divide a y.

(3) En $\mathbb{Z}$, xRy si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 5n$ (relación de congruencia módulo 5).

(4) Dado un conjunto A, en $P(A)$ la inclusión $\subset$ es una relación binaria.

Definición 2.7. *Sea R una relación binaria en un conjunto no vacío X. Diremos que R es:*

- *Reflexiva si xRx, para todo $x \in X$.*

- *Simétrica si dados $x, y \in X$, xRy implica yRx.*
- *Antisimétrica si dados $x, y \in X$ tales que xRy e yRx entonces $x = y$.*
- *Transitiva si dados $x, y, z \in X$ tales que xRy e yRz entonces xRz.*
- *Completa o total si para todo $x, y \in X$ o bien xRy o bien yRx. En caso contrario la relación se llama parcial.*

2.1.2 Propiedades de las Relaciones Binarias

Reflexiva	$\forall x \ : xRx$
Irreflexiva	$\forall x \ : \neg(xRx)$
Simétrica	$\forall x, y \ : xRy \Rightarrow yRx$
Asimétrica	$\forall x, y \ : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
Antisimétrica	$\forall x, y \ : xRy \bigwedge yRx \Rightarrow x = y$
Total	$\forall x, y \ : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$
Completa	$\forall x, y \ : xRy \vee yRx$
Transitiva	$\forall x, y, z \ : xRy \bigwedge yRz \Rightarrow xRz$
Negativamente Transitiva	$\forall x, y, z \ : \neg xRy \bigwedge \neg yRz \Rightarrow \neg xRz$
Aciclica	$\forall k, x_0, ..., x_k \ : x_0Rx_1.....Rx_k \Rightarrow x_k \neq x_0$
Negativamente Aciclica	$\forall k, x_0, ..., x_k \ : \neg x_0Rx_1 \bigwedge ..... \bigwedge \neg x_{k-1}Rx_k \Rightarrow x_k \neq x_0$

Definición 2.8. *Una relación binaria R en un conjunto X es una relación de equivalencia si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Una relación binaria R en un conjunto X es una relación de orden si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Una relación binaria R en un conjunto X es una relación de preferencias si verifica las propiedades reflexiva y transitiva, y además es completa.*

Ejemplo 2.9. *A continuación algunos ejemplos sencillos de lo anterior:*

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$ *es una relación de orden total.*

(2) En $\mathbb{N}$, xRy si x divide a y, es una relación de orden parcial.

(3) En $\mathbb{Z}$, xRy si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = 5n$ (relación de congruencia módulo 5), es una relación de equivalencia.

(4) Dado un conjunto A, en $P(A)$ la inclusión $\subset$ es una relación de orden parcial.

Definición 2.10. *Una relación de preferencia P definida sobre un conjunto X es una relación binaria definida en X, que satisface las condiciones siguientes (supuesto que la notación xPy significa, x es preferido a y):*

1. *Es Irreflexiva (es decir, para ningún a de X se verifica aPa).*

2. *Es Asimétrica (es decir, nunca puede ser aPb y bPa al mismo tiempo, siendo a y b elementos de X).*

3. *Es Transitiva (es decir, dados a, b y c elementos de X, si es aPb y también bPc, entonces debe ser cierto también que aPc).*

4. *Es Negativamente transitiva (es decir, dados a, b y c elementos de X, si no se da aPb y tampoco se da bPc, entonces no se da aPc).*

Definición 2.11. *Asociada a una relación de preferencia P consideraremos dos relaciones más, que denotaremos I y R.*

1. *La relación I se dirá Relación de Indiferencia, y se define aIb (se lee: a es indiferente a b).*

2. *La relación R se dirá Relación de preorden total asociado, y se define aRb (se lee: a es preferido o indiferente a b).*

Definición 2.12. *Una relación de orden como su nombre lo indica ordena los elementos de un conjunto, en una sola cadena si es total o en varias si es parcial. Sean $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y $R \subset X$.*

Definición 2.13. *Una relación de preferencia P se dirá representable por una función de utilidad, si existe una función numérica $f : X \to \mathbb{R}$ tal que se verifique aPb si y sólo si $f(a) > f(b)$, para cualesquiera elementos a, b de X. Cualquier función que represente a P se dice función de utilidad para P.*

Definición 2.14. *Un perfil de preferencias es una n-tupla $u = (P_1, ..., P_n)$, o, en su caso, $(R_1, ..., R_n)$, siendo P_i, R_i, respectivamente, las relaciones de preferencia y de preorden del agente i donde $(i = 1, ..., n)$.*

Definición 2.15. *Siendo Y el conjunto de alternativas, una función de elección es una aplicación del conjunto de las partes de Y (conjunto de todos los subconjuntos posibles de Y, incluido el vacío) en sí mismo. Un subconjunto del conjunto de alternativas Y (o elemento, genérico, del conjunto de sus partes) se suele denominar técnicamente, agenda (una función de elección asigna a una agenda otra agenda).*

Definición 2.16. *Una regla de elección social es una aplicación C del conjunto de perfiles en el conjunto de funciones de elección (a cada perfil u se le asocia una función de elección que se suele denotar C_u).*

Definición 2.17. *Dada una regla de elección C, y un perfil u, diremos que una agenda a está en el dominio de C_u si se verifica que $C_u(a)$ es un subconjunto no vacío de la agenda a. Se dice que la regla C tiene la propiedad de dominio universal, si para todo perfil u, cualquier agenda no vacía pertenece al dominio de C_u.*

Definición 2.18. *Se dice que la regla C satisface la condición fuerte de Pareto si, para todo perfil $u = (R_1, ..., R_n)$, para cualesquiera dos alternativas x e y, tales que para toda preferencia P_i que aparezca en el perfil u se cumple que xR_iy, existiendo la menos un j tal que xP_jy, y para toda agenda a que contenga la alternativa x, se verifica que la alternativa y no pertenece a $C_u(a)$. Esta condición viene a decir que si todo el mundo considera que si x es al menos tan bueno como y, habiendo al menos un agente que considera x mejor que y, y además x pertenece a la lista de alternativas finalmente elegidas.*

Definición 2.19. *Se denomina **coalisión** S a todo subconjunto del conjunto de agentes (sociedad) $M = (1, ..., m)$. Dada una regla de elección social C (relativa a dicha sociedad, y sobre todo un conjunto de alternativas X), se dice que la coalisión es decisiva para la alternativa x frente a la alternativa y si para cualquier perfil $u = (P_1, ..., P_n)$, tal que para toda preferencia P_s relativa a algún agente en S sea xR_sy, existiendo al menos un agente t en S para el sea xP_ty, y para cualquier agenda v que contenga a x, se verifica que y no pertenece a $C_u(v)$. En el caso en que una coalisión sea decisiva para cualquier par de altenativas, entonces diremos simplemente que es decisiva. Si existe una coalisión decisiva compuesta por un solo agente i, se dice que esta agente es un **dictador** para la regla C. Una regla de elección social, C, se dice dictatorial si existe un dictador para dicha regla.*

Definición 2.20. *Diremos que una regla de Elección Social, C, satisface la condición de independencia de las alternativas irrelevantes, si para cualquier agenda v y cualesquiera dos perfiles u_1, u_2 cuya actuación sobre la agenda sea idéntica, se tiene que $Cu_1(v) = Cu_2(v)$.*

Definición 2.21. *Dadas dos alternativas sociales $x, y \in X$, denotamos por n_{xy} el número de individuos para los que $u_i(x) \geq u_i(y)$, y por n_{yx} el número de individuos para los que $u_i(y) \leq u_i(x)$. El Método de Decisión Mayoritaria se define como sigue: Para todo $x, y \in X$, $xRy \Leftrightarrow n_{xy} \geq n_{yx}$.*

Consideremos ahora la siguiente propiedad: (Monotonía) Sean $u, u^{'} \in U$ tales que, $\forall x, y \in X$, para todo i, $u_i^{'}(x) > u_i^{'}(y)$ siempre que $u_i(x) > u_i(y)$, y $[u_i^{'}(x) \geq u_i^{'}(y)]$ siempre que $[u_i(x) = u_i(y)]$ y además existe algún k tal que $[u_k(x) = u_k(y)$ y $u_k^{'}(x) > u_k^{'}(y)]$ o bien $[u_k(y) > u_k(x)$ y $u_k^{'}(x) \geq u_k^{'}(y)]$. Entonces, para $R = F(u)$, $R^{'} = F(u^{'})$, se cumple: xRy implica $xP'y$.

La propiedad de Monotonía expresa una idea bastante sencilla, a saber, que la valoración social de las alternativas debe variar en el mismo sentido que las valoraciones individuales. En efecto, la propiedad de Monotonía nos dice que si las preferencias de los individuos de una sociedad cambian de modo que:

1. Todos los que preferían x a y siguen prefiriendo x a y;

2. Y todos los que antes estaban indiferentes entre estas dos opciones, ahora consideran x mejor o igual que y;

3. Pero además, alguien que antes prefería y a x cambia de opinión (o alguien que estaba indiferente, ahora prefiere x a y), entonces, si para las preferencias u declarábamos socialmente x mejor o igual que y, para las preferencias u' deberemos declarar x socialmente mejor que y.

Definición 2.22. *La Neutralidad es una característica derivada de la combinación de los criterios de agregación, que nos dice que la ordenación social de alternativas depende únicamente de las utilidades de los individuos. Por tanto, ni la naturaleza de las alternativas, ni la motivación de las preferencias, ni aspectos como derechos o necesidades pueden ser tenidos en cuenta en el diseño de reglas de elección colectiva. Así pues, cuando estos aspectos sean relevantes, no podemos aplicar los resultados obtenidos sin correr el riesgo de llegar a conclusiones perversas.*

Dado que por construcción los argumentos de la regla de elección social son las funciones de utilidad, conviene resaltar en qué sentido la Neutralidad es algo más. Para ello, sea X_0 un conjunto finito de alternativas, M el conjunto de m agentes, U el conjunto de funciones de utilidad definidas sobre X_0, y sea F la regla de elección colectiva asociada a un conjunto de propiedades P (que incluye los criterios de agregación), es decir, $R = F(u)$, para cada $u : X_0 \to \mathbb{R}^m$, donde F verifica todas las propiedades del conjunto P (conjunto de las preferencias).

Sea ahora X' un conjunto de objetos diferentes, pero con el mismo número de alternativas, M' un conjunto de m agentes distintos del caso anterior, sea nuevamente U el conjunto de todas las funciones de utilidad definidas sobre X' que podemos admitir, y sea F' una regla de elección colectiva asociada a este nuevo problema que verifica también las propiedades de P (donde F' podría, al menos en principio, ser una regla distinta puesto que nos enfrentamos a un problema diferente). La Neutralidad establece que la forma de ordenar las alternativas en ambos casos debe ser la misma, es decir, que F y F' deben coincidir.

2.1.3 El Modelo

Consideremos una sociedad compuesta de **m** individuos, que describiremos mediante el conjunto de índices $M = \{1, 2, ..., m\}$ y sea **X** el conjunto de alternativas sociales (que trataremos como un conjunto abstracto que puede estar compuesto de objetos muy diversos, en función del problema de que se trate). Por razones que quedarán claras un poco más adelante, supondremos que las preferencias de cada individuo están definidas mediante una función de utilidad $u_i : X \to \mathbb{R}$. Esta función de utilidad describe la forma en que el agente valora las alternativas de X, de modo que $u_i(x) > u_i(y)$ nos dice que la alternativa x es mejor o igual que la alternativa y.

Dada una alternativa $x \in X$, escribiremos $u(x) = (u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x))$, es decir, $u(x)$ es el vector de valoraciones de la alternativa x por parte de m individuos de la sociedad, tendremos así definida una función vectorial $u : X \to \mathbb{R}^m$ que refleja el vector de utilidades de los agentes para cada alternativa social que consideremos, llamaremos U al conjunto de todas las posibles funciones del tipo $u : X \to \mathbb{R}^m$.

El problema de elección social puede ahora formularse como sigue: Dada una sociedad $M = \{1, 2, ..., m\}$ y un conjunto de alternativas sociales X, obtener una valoración social de las alternativas de X a partir de la información contenida en los vectores de utilidad $u : X \to \mathbb{R}^m$.

En otras palabras, buscamos una valoración social R que sea una función de las utilidades individuales, es decir, una relación de la forma $R = F(u)$, donde u es el vector de funciones de utilidad individuales, F es la regla de elección social (la función de agregación de preferencias individuales en preferencias sociales), y R es la ordenación de alternativas resultante de este proceso. Denotaremos por P e I las relaciones de preferencia e indiferencia, respectivamente, asociadas a R.

Es importante observar que **F** es la regla de elección, mientras que R es el resultado de la regla de elección para unas preferencias individuales dadas. Para enfatizar esta distinción, supongamos que los individuos de una sociedad poseen unas preferencias u y una valoración social de las alternativas dada por $R = F(u)$.

Supongamos ahora que algunos de los individuos de esta sociedad cambian sus preferencias, de modo que ahora es el vector $u^{'}$ el que describe las preferencias individuales. La valoración social sería ahora $R^{'} = F(u^{'})$, donde el resultado $R^{'}$ puede haber cambiado con las preferencias, pero la regla de elección F es la misma. El objeto de la discusión subsiguiente es la determinación de F. Para ello introduciremos dos grupos de condiciones de naturaleza diferente:

- El primer grupo se refiere a condiciones generales sobre el proceso de agregación (ordenación, principio de Pareto, eficiencia informacional, anonimato).
- El segundo supone precisar el contenido informativo de las funciones de utilidad, que son los argumentos de nuestra regla de elección.

2.1.4 Criterios de Agregación. El Orden de Bienestar Social R^*

Para que una regla de Elección Social tenga algún interés deberá satisfacer ciertos requisitos que puedan considerarse razonables, tanto desde un punto de vista operativo como desde un punto de vista ético. Estos requisitos son una expresión de los principios que gobiernan el proceso de agregación de preferencias. Nos indicarán en qué contextos resultará aplicable, cómo responderá la valoración social a cambios en las preferencias individuales, qué tipo de racionalidad social pedimos, etc. Lo que buscamos es un conjunto ideal de propiedades mínimas que puedan ser universalmente aceptadas y nos permitan obtener una teoría significativa, estableceremos primero las siguientes:

(P1) **Ordenación**: La regla de elección social debe ordenar las alternativas sociales (es decir, para cada u admisible, $R = F(u)$ es una relación reflexiva, transitiva y completa).

(P2) **Dominio Universal**: La regla F debe ser de aplicación a cualquier configuración de preferencias, es decir, debe estar definida para todo $u \in U$. Cualquier preferencia individual es legítima.

(P3) **Pareto Indiferencia**: Para todo $x, y \in X$, y para todo vector u de Funciones de Utilidad admisibles, $u(x) = u(y)$ implica xIy. Si hay unanimidad en preferir una alternativa X a otra Y entonces X es preferido a Y.

(P4) **Eficiencia Informacional**: Sean u,$u^{'}$ dos vectores de funciones de utilidad admisibles, x, y dos elementos de X, y sean $R = F(u)$, $R^{'} = F(u^{'})$. Si se verifica que $u(x) = u^{'}(x)$ y que $u(y) = u^{'}(y)$, entonces: $[xRy \Rightarrow xR^{'}y]$, y $[yRx \Rightarrow yR^{'}x]$.

La primera propiedad establece que nuestro objetivo es obtener una ordenación social de las alternativas de X, es decir, queremos que la preferencia social se comporte de forma análoga a la preferencia individual. En particular, esta propiedad garantiza la ausencia de ciclos de preferencia, estos ciclos pueden impedir la adopción de decisiones sociales.

La propiedad de Dominio Universal dice que deseamos admitir todas las formas posibles de valoración por parte de los individuos. Queremos que la regla de elección sea aplicable a cualquier tipo de sociedad (es decir, a cualquier configuración de las preferencias individuales). En algunos casos esta propiedad no sólo es razonable sino que resulta esencial; tal es el caso cuando el problema de elección social consiste en determinar lo que podemos llamar una **constitución**, es decir, un conjunto de reglas que sirvan para diferentes grupos de agentes cuyas preferencias concretas desconocemos, o que pueden cambiar a lo largo del tiempo.

La propiedad de Pareto Indiferencia no requiere mucha explicación ya que simplemente nos dice que si todos los individuos consideran que la alternativa x proporciona la misma utilidad que la alternativa y, entonces x e y deben ser declaradas socialmente indiferentes.

La propiedad de Eficiencia Informacional nos dice que para valorar las alternativas x e y, sólo necesitamos conocer cuál es la valoración de los individuos respecto a estas dos alternativas. En consecuencia, si los agentes cambian sus preferencias de u a $u^{'}$, pero este cambio no afecta a la ordenación de x con respecto a y, entonces la ordenación social de x e y será la misma con las preferencias u que con las preferencias $u^{'}$. Esta propiedad facilita, por lo tanto, la evaluación social al requerir poca información para valorar las alternativas.

Sea E el conjunto de todas las ordenaciones posibles de los elementos de X. Cuando introducimos las dos primeras propiedades podemos identificar el problema de elección colectiva con la búsqueda de una función de agregación $F : U \to E$.

La función F se conoce como la Función de Bienestar Social (o, más precisamente, funcional de bienestar social). Si añadimos las dos siguientes propiedades a esta función obtenemos un primer resultado notable: Todas las ordenaciones $R = F(u)$ de los elementos de X que se derivan de las distintas preferencias individuales $u \in U$ pueden ser representadas mediante un único orden R^* definido sobre R^m . Cada punto $a \in R^m$ se interpreta como un vector de utilidades, es decir, $a = u(x)$ para algún $x \in X$, algún $u \in U$. El orden R^* se conoce como Orden de Bienestar Social, y ordena vectores de utilidades. El resultado contenido en este teorema dedido a D' Aspremont [17] nos dice que el conocimiento de estos vectores es suficiente para establecer una ordenación social de las alternativas.

Este resultado tiene una doble lectura. Por un lado facilita notablemente la discusión, ya que nos permite trabajar con un orden único, definido sobre un espacio vectorial con muy buenas propiedades operativas. Por otro nos dice que la valoración de las alternativas sociales depende exclusivamente de los valores que los individuos les asignan en sus funciones de utilidad (una propiedad conocida como Neutralidad). Por tanto, sólo la información contenida en las funciones de utilidad resulta relevante para la determinación del orden social. Esta implicación impide tomar en cuenta la naturaleza de las alternativas sociales, la consideración de derechos y necesidades, o la motivación de los individuos a la hora de establecer su ordenación.

2.1.5 Comparaciones Interpersonales de Utilidad

Un aspecto novedoso del modelo desarrollado en este capítulo es que hemos partido de las utilidades como conceptos primitivos para describir la valoración de las alternativas por parte de los agentes. Ello nos ha permitido estudiar las posibilidades de obtención de reglas de elección colectiva, según la cantidad de información proporcionada por las funciones de utilidad (en particular, qué tipos de comparaciones interpersonales pueden establecerse).

Si bien esta formulación es perfectamente coherente desde el punto de vista formal, su interpretación económica no está exenta de dificultades. ¿Qué debemos entender cuando decimos que el individuo i está mejor con la alternativa x que con la alternativa y?. ¿Qué significa que todos los individuos midan su utilidad en las mismas unidades?.

Aunque hay diversas propuestas sobre la forma de interpretar estas comparaciones interpersonales de utilidad, se propone aquí una forma particular. Las comparaciones interpersonales son efectuadas por un agente externo que tiene la consideración de un *juez imparcial*. La idea básica que hay detrás de esta interpretación es que el bienestar social no sólo debe tomar en cuenta las preferencias individuales, cualesquiera que sean las características personales y la posición social de estos individuos, sino que debe evaluar conjuntamente estas circunstancias.

Para precisar el tipo de interpretación que proponemos, sea X un conjunto de alternativas sociales, y sea $\theta(X)$ el conjunto de características personales y sociales que resultan relevantes para el problema de valoración asociado a X. Sea i el vector de características del individuo i-ésimo. Entonces, para todo $x \in X$, $i = (1, 2, , m)$, podemos tomar $u_i(x) = V(x, \theta_i)$, donde $V : X \times \theta(x) \to \mathbb{R}$ es la función de evaluación de este *juez imparcial*.

La imparcialidad puede asociarse al respeto a las preferencias individuales, es decir, para todo $x, y \in X$, y para todo i, $V(x, \theta_i) \geq V(y, \theta_i) \iff v_i(x) \geq v_i(y)$, donde $v_i : X \to \mathbb{R}$ es la función que describe las preferencias convencionales del agente i-ésimo.

De manera que esta interpretación de la comparabilidad interpersonal puede ser operativa sin ser arbitraria, en la medida que se expliciten los juicios de valor empleados y se deduzcan de ellos los criterios de comparación. Una ventaja de esta formulación es que puede anular los inconvenientes derivados de la Neutralidad: Puesto que cada conjunto de características podemos escogerlo en función de X, la Neutralidad puede convertirse en una propiedad operativa sin mayores inconvenientes.

2.1.6 El Contenido Informativo de las Funciones de Utilidad

Hemos indicado con anterioridad que el modelo parte de tomar la utilidad como concepto primitivo. Ello supone una aproximación distinta a la formulada en la teoría del consumidor, donde la utilidad no era más que el expresar datos cualitativos a datos cuantitativos, esto no es más que una representación numérica de las preferencias.

En aquel contexto, dada una función de utilidad u_i que representaba una relación de preferencias $\geq_i$, cualquier transformación monótona creciente de u_i, constituía una representación alternativa de estas preferencias. Con esta formulación, pues, la información contenida en las funciones de utilidad resulta puramente ordinal, y no permite establecer comparaciones interpersonales de satisfacción (así por ejemplo, si encontramos que $u_i(x) = 2 = u_j(x)$ no podemos concluir que el individuo i y el individuo j tienen la misma utilidad, puesto que si elevamos al cuadrado u_i una transformación monótona creciente el resultado deja de ser cierto, esto es debido precisamente a la preferencia que tiene cada uno de los individuos).

En el contexto de la teoría de la Elección Social sin embargo, resulta crucial establecer cuánta información nos proporcionan las funciones de utilidad, para poder determinar qué procedimientos de agregación de preferencias son posibles. Si queremos precisar cuánta información nos proporcionan las funciones de utilidad debemos especificar adecuadamente cuál es el conjunto de transformaciones de las funciones de utilidad que vamos a considerar como informativamente equivalentes.

Determinar el contenido informativo de las funciones de utilidad equivale a establecer el conjunto Φ^T de transformaciones invariantes $\phi : U \rightarrow U$, es decir, el conjunto de transformaciones de los vectores de funciones de utilidad que resultan informativamente equivalentes. Estas transformaciones $\phi \in \Phi^T$ son de la forma $\phi(u) = [(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2), ..., \phi_m(u_m)]$, y generan una partición de U en subconjuntos cuyos elementos son informativamente indistinguibles. Así, si $u, u^{'} \in U$ con $u^{'} = \phi(u)$ para una cierta transformación invariante $\phi \in \Phi^T$, debemos concluir que u y $u^{'}$ son representaciones alternativas de las mismas preferencias y que, por tanto, $F(u)$ y $F(u^{'})$ deben coincidir.

Ello implica que las particiones de U mediante Φ^T imponen una cierta estructura sobre el orden de bienestar social R^* (definido sobre R^m). En efecto, todos los vectores $u^{'}$ de la forma $u^{'} = \phi(u)$, para cualquier $\phi \in \Phi^T$, deben verificar que: Para todo $x, y \in X$, si $u(x) = a$, $u(y) = b$, $u'(x) = a^{'}$, $u^{'}(y) = b^{'}$, entonces: $[aR^*b \Leftrightarrow a^{'}R^*b^{'}]$.

De lo anterior se deduce que existe una relación inversa entre la finura de la partición inducida por Φ^T y la cantidad de información disponible (es decir, cuanta más transformaciones invariantes admitamos, más pobre es la información contenida en las funciones de utilidad). Así pues, cuanto más pequeño es el conjunto (Φ^T, mayor es la información utilizable y menores las restricciones que estamos imponiendo) sobre el orden R^*. Por tanto, conforme la información utilizable aumenta, el número de ordenaciones R^* compatibles con un determinado conjunto de condiciones también aumenta.

Sea pues $\phi : U \rightarrow U$ una transformación vectorial tal que, para cada $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ en U, asocia el vector $\phi(u) = [(\phi_1(u_1), \phi_2(u_2), ..., \phi_m(u_m)]$ que se interpreta como un vector de funciones de utilidad que resultan informativamente equivalentes al vector u. Llamando Φ^T al conjunto de todas las transformaciones invariantes de la clase T, expondremos a continuación las clases más importantes:

- T=ON Ordinalidad y No-Comparabilidad. La clase Φ^{ON} está compuesta por todas aquellas transformaciones $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ tales que ϕ_i es una función monótona creciente para todo $\imath$. Esta clase corresponde a las funciones de utilidad habituales en la teoría del consumidor: Dos vectores de funciones de utilidad u y $u^{'}$ se consideran equivalentes si $u_i^{'} = \phi_i(u_i)$ para todo $\imath$, donde ϕ_i es una transformación monótona creciente, independiente para cada agente. Obsérvese que al tomar funciones monótonas crecientes, cada función de utilidad individual es puramente ordinal. Además, al permitir transformaciones independientes para los distintos agentes, no resulta posible establecer comparaciones interpersonales de utilidad (de ahí el nombre).

- T=CN Cardinalidad y No-Comparabilidad. La clase Φ^{CN} está compuesta por todas aquellas transformaciones $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ tales que $\phi_i(u_i) = \alpha_i + \beta_i u_i$ con $\beta_i > 0$ para todo $\imath$. Esta clase corresponde a las funciones de utilidad cardinal, tipo Von Neumann Morgenstern (funciones de utilidad esperada). La familia de transformaciones invariantes es más pequeña que en el caso anterior, puesto que ahora las transformaciones de una función de utilidad individual que resultan equivalentes son aquellas de tipo lineal. Obsérvese que en este contexto sí que podemos establecer valoraciones sobre intensidades de preferencia para cada individuo, es decir, si $u_i(x) - u_i(y) > u_i(v) - u_i(w)$, entonces la misma relación se mantiene para cualquier transformación lineal afín. Sin embargo, como sucedía en el caso anterior, en la medida que podemos aplicar transformaciones independientes para cada uno de los individuos, no podemos realizar comparaciones interpersonales de utilidad.

- T=OC Ordinalidad y Comparabilidad. La clase Φ^{OC} está compuesta por todas aquellas transformaciones $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ tales que $\phi_i(u_i) = \phi_o(u_i)$ para todo $\imath$, donde ϕ_o es una función monótona creciente. En este caso las utilidades son ordinales (tomamos como equivalentes las transformaciones monótonas crecientes, no necesariamente lineales), pero exigimos que la transformación que se aplica a todos los individuos sea la misma (de ahí el subíndice 0 en la función de transformación, que indica que es igual para todos los agentes). La clase Φ^{OC} es ciertamente más pequeña que la clase Φ^{ON} . Como sucedía en el primer caso, no podemos medir intensidades de preferencia; sin embargo, ahora sí que podemos realizar comparaciones de niveles de utilidad entre distintos agentes. Ello se debe a que en este contexto, $u_i(x) \geq u_j(x)$ si y sólo si $\phi_o(u_i(x)) \geq \phi_o(u_j(x))$.

- T=CCU Cardinalidad y Comparabilidad de Unidades. La clase Φ^{CCU} está compuesta por todas aquellas transformaciones $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ tales que $\phi_i(u_i) = \alpha_i + \beta_o u_i$, con $\beta_o > 0$ para todo i. La clase Φ^{CCU} es más pequeña que la clase Φ^{CN}. Ahora no sólo encontramos que las transformaciones equivalentes de las funciones de utilidad son de tipo lineal afín sino, además, que todos los individuos miden la utilidad en las mismas unidades (puesto que 0, es igual para todos). Al ser un caso particular de Φ^{CN} también aquí tienen sentido las comparaciones de intensidades de preferencia para cada individuo. Pero además, al medir la utilidad en unidades que son iguales para todos, también podemos establecer comparaciones interpersonales de diferencias de utilidad. En efecto, podemos comprobar que $u_i(x) - u_i(y) > u_j(x) - u_j(y)$ se verifica si y sólo si $[\alpha_i + \beta_o u_i(x)] - [\alpha_i - \beta_o u_i(y)]$ es mayor que $[\alpha_j + \beta_o u_j(x)] - [\alpha_j - \beta_o u_j(y)]$. Obsérvese sin embargo que no podemos establecer comparaciones de niveles de utilidad, puesto que podemos cambiar arbitrariamente el coeficiente i para cada individuo por separado.

- T=CC Cardinalidad y Comparabilidad. La clase Φ^{CC} está compuesta por todas aquellas transformaciones $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ tales que $\phi_i(u_i) = \alpha_o + \beta_o(u_i)$, para todo $\imath$. La clase Φ^{CC} es más pequeña que todas las anteriores y, por tanto, genera la partición más informativa de las estudiadas hasta ahora. Además de tener utilidades cardinales, ahora podemos establecer comparaciones interpersonales tanto de niveles como de diferencias de utilidad.

Teorema 2.23. *Una regla de elección colectiva satisface Dominio Universal, Principio de Pareto, Anonimato, Neutralidad, Monotonía y Ordinalidad y No-Comparabilidad, si y sólo si es el Método de Decisión Mayoritaria.*

Demostración. Es fácil comprobar que el Método de Decisión Mayoritaria verifica estas propiedades, de modo que nos centraremos en la implicación inversa. Sean $x, y \in X$. Por eficiencia informacional sólo necesitamos ocuparnos de la valoración de los individuos relativa a las alternativas x e y. En el contexto de Ordinalidad y No-Comparabilidad la propiedad de Anonimato implica que la preferencia social sólo depende del número de individuos que prefieren x a y, del número de individuos que prefieren y a x, y del número de individuos indiferentes. La condición de Neutralidad nos dice que si $n_{xy} = n_{yx}$, entonces x e y son socialmente indiferentes (para comprobarlo basta suponer lo contrario, y entonces permutar x e y en cada función de utilidad). Dado que $n_{xy} = n_{yx}$ implica que xIy, entonces la propiedad de Monotonía establece que $n_{xy} > n_{yx}$ implica que xPy. Pero éste es precisamente el Método de Decisión Mayoritaria. □

El teorema anterior establece que cualquier método de decisión social que tenga las propiedades de la votación mayoritaria tiene que ser un método que ordene las alternativas sociales de acuerdo con la decisión de la mayoría. Esto significa que hay realmente pocas opciones para agregar preferencias individuales en preferencias sociales (salvo que abandonemos algunas de las propiedades postuladas).

Y de aquí se sigue una consecuencia poco agradable: Puesto que sabemos que el Método de Decisión Mayoritaria no genera ordenaciones sociales transitivas para algunos tipos de preferencias, y dado que la propiedad de Neutralidad se deriva de los criterios de agregación, existe el siguiente corolario.

Corolario 2.24. *Bajo Ordinalidad y No-Comparabilidad no hay ninguna regla de elección colectiva que, para cualquier configuración de las preferencias individuales, sea capaz de ordenar socialmente las alternativas sociales verificando el Principio de Pareto, la Eficiencia Informacional, el Anonimato y la Monotonía.*

Este corolario es un caso particular del Teorema de Imposibilidad de Arrow. Nos dice que no hay forma alguna de ordenar las alternativas sociales con las propiedades de la decisión mayoritaria si únicamente tomamos en cuenta las ordenaciones individuales.

Definición 2.25. *Se dice que F es dictatorial si existe algún $i \in M$ tal que, para cualquier configuración de preferencias $(\geq_1, \geq_2, ..., \geq_m)$, y para todo par de alternativas sociales $x, y \in X$, se verifica: $x >_j y \Rightarrow xPy$*

Definición 2.26. *Se dice que un grupo de individuos $G_F(x, y) \subset M$ es un grupo decisorio para la regla F con respecto al par (x, y), si para cualquier configuración de preferencias se verifica que:* $[x >_i y, \forall i \in G_F(x, y)] \Rightarrow xPy$.

2.1.7 Función de Bienestar Social en el Sentido de Arrow

Definición 2.27. *Una función de bienestar social (en lo sucesivo FBS), es una regla de elección colectiva f, cuyo recorrido está restringido al conjunto de ordenaciones en X.*

2.1.8 El Enfoque de Arrow y el Teorema de Imposibilidad

En los ejemplos anteriores se puede tomar como una prueba del siguiente resultado. Supongamos que una regla de elección social verifica que:

1. Es un orden (es decir, una relación binaria reflexiva, transitiva y completa).
2. Es aplicable a cualquier configuración de preferencias.
3. Depende sólo de las ordenaciones individuales.
4. Es respetuosa con la unanimidad.
5. Es anónima.

Entonces, esta regla no puede ser la regla de decisión mayoritaria. Vemos pues que una de las reglas más sencillas y atractivas para la agregación de preferencias individuales en preferencias sociales incumple un requisito básico: No es capaz de ordenar adecuadamente las alternativas sociales. Ello implica que esta forma de agregación puede generar ciclos de preferencia que nos impidan, como al presidente del ejemplo, tomar una decisión.

Este resultado (conocido de antiguo, como la paradoja de las votaciones), no es en realidad más que la punta del iceberg. Kenneth Arrow[2] demostró que el problema no afecta únicamente a la regla de mayoría simple; en realidad no hay ninguna regla capaz de satisfacer las propiedades (1), (2), (3), (4) y (5).

2.1.9 Teorema de Imposibilidad de Arrow

Kenneth Arrow nació en la ciudad de Nueva York en 1921. Estudió la Licenciatura en el City College y el postgrado en Columbia, donde obtuvo el doctorado en 1951. Ha sido profesor en la Harvard University, pero desde 1979 ha estado en la Stanford University. El profesor Arrow ha hecho contribuciones fundamentales a la teoría económica, especialmente en los campos que tienen que ver con la incertidumbre, la información, la organización y muy notablemente en la Teoría de la Elección Social. Se le otorgó el premio Nobel de Ciencia Económica en 1972.

Arrow formula el problema de elección colectiva como una extensión del método de decisión mayoritaria, ya que considera que no existe ninguna forma de obtener una ordenación social a partir de las ordenaciones individuales, que resulte de aplicabilidad universal, que respete la unanimidad, que no sea dictatorial y que sea informacionalmente eficiente. Como señala Sen [34], cada una de las condiciones propuestas resulta bastante inocua, pero conjuntamente parecen producir un monstruo capaz de devorar todas las funciones de bienestar social del mundo. Dada la naturaleza de este resultado, no es sorprendente que haya generado una abundante literatura que trata de encontrar vías de escape al mismo, modificando algunas de las condiciones propuestas por Arrow.

Arrow propone la construcción de una regla de Elección Social de acuerdo a los siguientes principios, dada una sociedad y un problema de decisión colectiva:

1. La regla de elección debe proporcionar una ordenación de las alternativas sociales como reflejo de las preferencias individuales.

2. La regla debe ser de aplicabilidad universal, es decir, debe ser capaz de funcionar adecuadamente cualesquiera que sean las preferencias individuales.

3. Los argumentos de la regla de elección social deben ser simplemente las ordenaciones individuales de las alternativas. En particular esto excluye la consideración

de intensidades de preferencia, o de comparaciones interpersonales de utilidad.

4. La regla debe operar conforme a tres principios básicos:

   - Respeto de la unanimidad (si todos los individuos prefieren la alternativa x a la alternativa y, entonces x debe ser socialmente preferida a y).

   - Carácter no-dictatorial (la regla de elección social no puede responder a las preferencias de un único individuo de la sociedad).

   - Eficiencia informacional (la valoración social de un par de alternativas x, y sólo depende de las valoraciones individuales de estas alternativas).

Teorema 2.28. *(Teorema de Imposibilidad de Arrow Caso Finito): Para una sociedad con al menos tres agentes, que definen sus preferencias sobre un conjunto de al menos tres alternativas, no existe ninguna regla de elección social que satisfaga simultáneamente las condiciones de dominio universal, fuerte de Pareto, no existencia de dictador, independencia de las alternativas irrelevantes.*

El Teorema de Imposibilidad de Arrow consiste en imponer ciertas condiciones sobre la función de bienestar social f y mostrar que estás condiciones son mutuamente incompatibles.

1. Condición (Dominio Universal): El dominio de la regla f debe incluir todas las combinaciones lógicas posibles de ordenaciones individuales.

2. Condición (Principio de Pareto).

3. Condición (No Dictadura).

4. Condición (Independencia de Alternativas Irrelevantes).

La prueba que presentamos aquí es ligeramente menos general que la correspondiente al resultado original de Arrow (dado que introducimos el supuesto de Monotonía Débil, que en realidad no es necesario), pero tiene la ventaja de ser breve, sencilla y muy intuitiva.

Demostración. Sean $M = \{1, 2, ..., m\}$ el conjunto de índices que identifica los agentes de una sociedad, X el conjunto de alternativas sociales, $\geq_i$ la relación de preferencias del agente i definida sobre X, y sea R la relación de preferencia social sobre X. Una Función de Bienestar Social en el sentido de Arrow (FBSA) es una regla de elección colectiva F tal que $R = F(1, 2..., m)$, donde R es un orden (es decir, una relación reflexiva, transitiva y completa). Denominaremos P, I a la relaciones sociales de preferencia estricta y de indiferencia, respectivamente, asociadas a R.

Consideremos las siguientes condiciones que la regla F debe cumplir:

- Condición U (Dominio Universal) F está definida para toda posible configuración de preferencias individuales.

- Condición P (Principio de Pareto Débil) Para todo $x, y \in X$, $x \geq_i y$ para todo $i \in M$ implica xPy.

- Condición I (Eficiencia Informacional) Sea $Y \subset X$, y sean $R_Y(X)$ el orden social de X restringido al conjunto $Y, R(Y)$ el orden social relativo al conjunto Y. Entonces, $R_Y(X) = R(Y)$. Es decir, si Y es un subconjunto de alternativas de X, la restricción de la regla de elección social a las alternativas contenidas en Y coincide con el resultado que se obtendría aplicando la regla sólo a las valoraciones de los individuos relativas a las alternativas contenidas en Y.

- Condición M (Monotonía Débil) Sea $(\geq_1, \geq_2, ..., \geq_m)$ una configuración de preferencias dada y sea R la relación social correspondiente. Sean $x, y \in X$ tales que xRy, y sea $A \subset M$ el conjunto de individuos que consideran x mejor o igual que y (es decir, $i \in A \Leftrightarrow x \geq_i y$). Sea $(\geq_1', \geq_2', ..., \geq_m')$ otra configuración de preferencias individuales tales que $i \in A$ implica $x \geq_i' y$. Entonces, $xR'y$ (donde R' es la relación social asociada a las nuevas preferencias).

El Teorema de Imposibilidad de Arrow (también llamado Teorema General de Posibilidad), se prueba a partir de dos curiosos lemas. El primero nos dice que todo grupo decisorio sobre un cierto par de alternativas con dos o más miembros posee un subconjunto propio que también es decisorio (aunque no necesariamente sobre las mismas alternativas). El segundo establece que todo grupo decisorio sobre un par de alternativas resulta serlo sobre todas ellas.

Lema 2.29. *Sea F una $FBSA$ que verifica las condiciones U, P, I, M, y sea $G_F(x, y)$ un grupo decisorio de dos o más miembros. Entonces, existe un subconjunto propio de $G_F(x, y)$ que también es decisorio sobre algún par de alternativas.*

Demostración. Sea $(\geq_1^{'}, \geq_2^{'}, ..., \geq_m^{'})$ un perfil de preferencias donde los individuos de $G_F(x, y)$ están separados en dos subconjuntos no vacíos $G^{'}, G^{''}$. Sea $z \in X$ una tercera alternativa y consideremos las ordenaciones individuales relativas a la terna x, y, z (lo que es posible por la condición I). Sea G^C el conjunto complementario de $G_F(x, y)$ en M, y, haciendo uso de la propiedad U, supongamos que:

- $z \geq_i x \geq_i y$ para todo $i \in G^{'}$
- $x >_i y \geq_i z$ para todo $i \in G^{''}$
- $y >_i z \geq_i x$ para todo $i \in G^c$

Necesariamente se sigue que xPy (puesto que $G_F(x, y)$ es un grupo decisorio); por su parte z puede ocupar las siguientes posiciones:

- $zRxPy$, en cuyo caso los individuos en $G^{'}$ resultan ser un grupo decisorio sobre el par z, y, puesto que son los únicos que ordenan z antes que y (estamos aplicando aquí implícitamente la condición M).
- $xPyRz$, en cuyo caso los individuos en $G^{''}$ constituyen un grupo decisorio sobre el par x, z, puesto que son los únicos que ordenan x antes que z.
- $xPzRy$, en cuyo caso $G^{''}$ resulta ser un grupo decisorio sobre el par x, z.

- $xRzPy$, en cuyo caso G' resulta ser un grupo decisorio sobre el par z, y.

$\square$

Lema 2.30. *Sea F una FBSA que verifica los supuestos U, P, I, M, y sea $G_F(x, y)$ un grupo decisorio sobre el par x, y. Entonces, este mismo grupo resulta decisorio sobre el par w, z para cualquier $w, z \in X$.*

Demostración. Sea $(\geq_1', \geq_2', ..., \geq_m')$ un perfil de preferencias en el cual

- $w >_i x >_i y >_i z$ para todo $i \in G_F(x, y)$
- $y >_i z >_i w >_i x$ para todo $i \in G^c$

La condición U asegura que siempre podemos encontrar este tipo de preferencias. Entonces, haciendo uso de I, P podemos establecer:

- xPy por ser $G_F(x, y)$ decisorio.
- wPx por Pareto.

de manera que wPy por transitividad.

Por tanto, como los individuos de $G_F(x, y)$ son los únicos que ordenan w antes que y, resulta que también son decisorios sobre el par w, y (utilizamos aquí nuevamente de forma implícita la condición M). Podemos escribir que:

- wPy por lo anterior
- yPz por Pareto.

de manera que wPz por transitividad.

En consecuencia, como sólo los individuos en $G_F(x, y)$ ordenan w antes que z, este grupo también es decisorio sobre el par w, z. $\square$

$\square$

Teorema 2.31. *Si una FBSA F verifica las condiciones U, P, I, M, entonces es dictatorial.*

Demostración. El Principio de Pareto implica que M es un conjunto decisorio sobre el par x, y. Aplicando recursivamente el primer lema usado en la demostración del Teorema de Arrow nos quedaremos con un grupo decisorio de una sola persona, que tiene capacidad de decisión sobre un par de alternativas z, w. Sin embargo el segundo lema usado en la demostración del Teorema de Arrow asegura entonces que esta persona tiene capacidad de decisión sobre todas las alternativas de X (es decir, es un dictador). $\square$

CAPÍTULO 3

ECUACIÓN DE SINCOV

3.1 Introducción

Una de las ideas claves en el análisis matemático de la preferencia es el paso de escalas cualitativas definidas sobre un conjunto de objetos a escalas cuantitativas, asignando a cada uno de tales objetos un determinado valor numérico, de forma que pasamos a comparar números en lugar de objetos. Este hecho se traduce en un contexto matemático abstracto, por la búsqueda de representaciones numéricas de una estructura ordenada (que estará constituido por un conjunto no vacío X y una escala cualitativa $\preceq$ definida en el), tratando de definir asitonías sobre la recta real $\mathbb{R}$ con su orden natural $\leqslant$ (que debemos entender como una escala cuantitativa ó numérica),un proceso típico de esta índole, que aparece en estudios de Economía, sería la asignación de precios (valores numéricos) a una serie de objetos ó bienes económicos, sobre los que tenemos una idea inicial cualitativa de su posible valor (al menos cuando los comparamos unos con otros declarando una preferencia).

La tarea principal consiste pues en traducir esa preferencia en datos numéricos. Interpretaciones similares aparecen en otros contextos diferentes de la Economía como la Teoría de la Medición en Psicología Matemática, donde se trata de definir escalas de medición para cuantificar cualidades (por ejemplo, a la hora de medir coeficientes de inteligencia), y en los umbrales más abstractos de la Teoría de la Decisión (donde a la vista de preferencias individuales puede ser necesario diseñar una preferencia social) que refleje las propiedades esenciales compartidas por las preferencias individuales, y en la obtención de escalas numéricas conducirá a un análisis más sencillo, al permitir trabajar directamente con funciones reales.

En este tipo de estudios es frecuente encontrarse con Ecuaciones Funcionales, no triviales, que reflejan alguna propiedad del problema a estudiar. Además, con gran frecuencia este tipo de ecuaciones funcionales no corresponden a los casos más clásicos, es decir, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias finitas, ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones integrales, sino que son de otra naturaleza distinta, requiriendo un estudio aparte, y la confección de una teoría propia.

Para fijar ideas, podemos pensar que $(X, \preceq)$ es una estructura ordenada y queremos encontrar una función $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que sirva para efectuar comparaciones entre los elementos de X, de forma que por ejemplo, $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \geq 0$ con $(x, y) \in X$, resultan entonces ecuaciones funcionales como

$$F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) \tag{3.1}$$

con $(x, y, z) \in X$, aparecen de manera natural al considerar casos particulares del comportamiento $\preceq$. Es por ello que este tipo de Ecuaciones Funcionales adquiere carta de naturaleza por sí mismo.

3.2 Ecuaciones Funcionales en Teoría de la Utilidad

Siendo $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado no vacío, un problema clásico consiste en encontrar una función $u : X \to \mathbb{R}$ tal que se verifique que $x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$. Naturalmente, la existencia de tal función, llamada habitualmente *función de utilidad*, conlleva el que la ordenación sea de cierto tipo, a saber, un preorden total. Una tal representación podría interpretarse también a partir de la existencia de una aplicación $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación funcional $F(x, y) = u(y) - u(x)$ para determinada función $u : X \to \mathbb{R}$ de forma que se tenga $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \geq 0$.

Existen otros tipos de ordenaciones para los que se buscan representaciones a través no de una, sino de dos funciones con valores reales $u, v : X \to \mathbb{R}$ en la forma $x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq v(y)$. Una tal representación podría interpretarse también a partir de la existencia de un aplicación $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación funcional $F(x, y) = v(y) - u(x)$ para determinadas funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$, y de forma que se tenga $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \geq 0$. Este tipo de observaciones nos llevará de manera natural a la consideración de ecuaciones funcionales más generales, que nos sirvan para representar distintos tipos de ordenaciones.

Definición 3.1. *En lo que sigue $\prec$ denotará una relación binaria asimétrica definida sobre un conjunto no vacío X. Le asociamos otras dos relaciones binarias que denotaremos respectivamente mediante $\preceq$ y $\sim$, que vienen dadas por $x \preceq y \Leftrightarrow \neg(y \prec x)$ y $x \sim y \Leftrightarrow x \preceq y, y \preceq x$.*

Definición 3.2. *A la relación $\prec$ se le denomina Preferencia Estricta, a la relación $\preceq$ Preferencia Débil y a la relación $\sim$ se le denomina Indiferencia.*

Definición 3.3. *Llamaremos Preferencia Estricta a una relación binaria asimétrica (y por lo tanto irreflexiva) definida sobre un conjunto no vacío X. Asociada a una preferencia estricta, consideraremos la relación R de Preferencia Débil dada por $xRy \Leftrightarrow \neg(yPx)$ así como la relación de Indiferencia I dada por $xIy \Leftrightarrow xRy, yRx$.*

Definición 3.4. *Una relación binaria asimétrica y negativamente transitiva $\prec$ definida sobre un conjunto no vacío X se denomina orden estricto. Una relación binaria $\preceq$ reflexiva transitiva y completa se denomina preorden total. Un preorden total pasa a denominarse orden total o cadena si es además antisimétrico (esto es $x \preceq y, y \preceq x \Rightarrow x = y$).*

Definición 3.5. *Diremos que $(X, \preceq)$ es representable (respectivamente pseudo-representable) si existe una función $u : X \to \mathbb{R}$ tal que $x \preceq y$ si y sólo si $u(x) \leq u(y)$ (respectivamente $x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$), para cualesquiera $x, y \in X$. La función u se denomina función de utilidad (respectivamente de pseudo-utilidad) para $\preceq$.*

En el momento que una función de utilidad u existe, podemos pensar en que existe también una aplicación bivariante $F : X \times X \to \mathbb{R}$ de manera que $F(x, y) = u(y) - u(x)$ para todo $x, y \in X$, y por lo tanto, $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \geq 0$. Este tipo de consideraciones, olvidándonos ya de la función de utilidad u y de la ordenación $\preceq$, nos da pie a estudiar que tipo de aplicaciones bivariantes $F : X \times X \to \mathbb{R}$ son tales que existe una función de una sola variable $G : X \to \mathbb{R}$ de forma que $F(x, y) = G(y) - G(x)$ para cualesquiera $x, y \in X$, aparece así, una *Ecuación Funcional.* Esta ecuación funcional, sin embargo, tiene el problema de que la función G es desconocida, así que conviene encontrar alguna otra ecuación equivalente de tipo intrínseco, es decir, que solo dependa de F. De manera que la ecuación buscada es:

$$F(x, y) + F(y, z) + F(x, z) \tag{3.2}$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Esta ecuación que aparece es ya clásica en la literatura, ya que se trata de la *Ecuación Aditiva de Sincov.*

En cuanto a la historia de la Ecuación Funcional aditiva de Sincov podemos decir lo siguiente. Sincov dio en 1903 una prueba para la solución general real, la cual tiene la siguiente forma

$$F(x, y) = H(y) - H(x) \tag{3.3}$$

donde H es una función arbitraria de una variable. Otros como Moritz Cantor y Gottlob Frege pensaron esta ecuación antes que Sincov. Sin embargo la ecuación (3.2) es llamada **Ecuación de Sincov** en honor a Dmitri Matveevich Sincov (Noviembre 21, 1867-Enero 28, 1946), ya que el fue quien dio las pruebas elementales de sus soluciones reales generales. Pero antes fue Moritz Cantor (Agosto 8, 1829-Abril 9, 1920) quien propuso esta ecuación. En la revista **Zeitschrift fur Mathematik und Physik**, el cual fue el editor junto con O. Schlomilch y fue publicado en 1896. Cantor cita estas ecuaciones como ejemplos de ecuaciones en tres variables las cuales pueden ser resueltas por métodos de calculo diferencial.

Definición 3.6. *Sea X un conjunto no vacío y sea $\preceq$, una relación binaria reflexiva definida sobre X. Entonces se dice que $(X, \preceq)$ es una estructura de orden-intervalo si para cualesquiera $x, y, z, t \in X$ ocurre que cuando $x \preceq y$ y $z \preceq t$, entonces o bien es $x \preceq t$ o bien es $z \preceq y$.*

El concepto de orden-intervalo fue introducido como tal por Fishburn [18]. La nomenclatura *orden-intervalo* se asocia al siguiente ejemplo bien conocido, propio de Economía: Supongamos que salen al mercado dos bienes x e y de parecidas características. Según dónde vayamos a comprar el bien x tendremos que pagar un precio u otro, más o menos próximos, de manera que podemos pensar que los posibles precios a que puede venderse el producto x oscilan entre un valor mínimo $u(x)$ y un valor máximo $v(x)$. Sabiendo que $u(x) \leq v(x)$. De manera análoga, los posibles precios a los que puede venderse el producto y oscilarán en un intervalo $(u(y), v(y))$ con $u(y) \leq v(y)$.

Lógicamente, un consumidor dirá que el bien x es definitivamente más barato que el bien y si ocurre que el máximo precio $v(x)$ a que puede venderse x es menor que el mínimo precio $u(y)$ a que puede venderse y. Esto define una relación $\prec$ sobre el conjunto de los bienes, dada por $x \prec y \Leftrightarrow v(x) < u(y)$, o equivalentemente $a \preceq b \Leftrightarrow u(a) \leq v(b)$, siendo $u(z) \leq v(z)$ para todo z. Pues bien, esta relación $\prec$ es el ejemplo más típico (y quizá el primero en considerarse) de la estructura ordenada que ha pasado a denominarse *orden intervalo* en la literatura. Estas consideraciones sugieren la representación natural mediante un par de funciones con valores reales, para una estructura $(X, \prec)$ de orden-intervalo.

Definición 3.7. *Se dice que una estructura de orden-intervalo es representable si existen funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$ tales que $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$ y además $x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq v(y)$ con $x, y \in X$.*

Definición 3.8. *Se dice que $(X, \preceq)$ es una estructura de semiorden si es una estructura de orden-intervalo tal que se verifica además, para cualesquiera $x, y, z, t \in X$ que si se dan $x \preceq y$ e $y \preceq z$ entonces o bien se da que $x \preceq t$ o se da $t \preceq z$.*

El concepto se semiorden fue introducido en estudios de Psicología Matemática en lo que se denomina Teoría de la Medición por Scott [33] entre otros a fin de interpretar situaciones de indiferencia no transitiva con umbral de percepción.

Supongamos así que la capacidad humana de distinción entre dos cantidades de una misma cosa no permite distinguir (por lo que las declara indiferentes) dos cantidades que se diferencien en menos de un umbral de percepción $\alpha \in (0, +\infty)$, que supondremos fijo e invariable para todo ser humano. En las situaciones en que tal umbral sea estrictamente positivo se producirá indiferencia no transitiva.

Un ejemplo clásico atribuido a Armstrong(1950), nos habla de una persona que prefiere una taza de café con un terrón de azúcar a una taza de café sin azúcar. Si a esta persona le hacemos comparar sucesivamente tazas que se diferencian únicamente en tener un grano de azúcar más, entre cada dos tazas consecutivas nuestro consumidor se habrá mostrado indiferente. Sin embargo es obvio que al cabo de un cierto número de pasos intermedios habremos pasado de la taza sin nada de azúcar a la taza equivalente a un terrón de azúcar, taza que es estrictamente preferida por nuestro consumidor a la taza sin azúcar. Se manifiesta así una clara intransitividad de la indiferencia.

Definición 3.9. *Se dice que una estructura de semiorden es representable si existe una función* $u : X \to \mathbb{R}$ *y una constante* $k \in (0, \infty)$ *de manera que* $x \prec y \Leftrightarrow u(x) + k < u(y)$ *con* $(x, y) \in X$*.*

Proposición 3.10. *Cuando* X *es contable, toda estructura de orden-intervalo* $(X, \preceq)$ *es representable. Oloriz [28]*

Demostración. Supongamos que una estructura $(X, \preceq)$ de orden intervalo o de semiorden sea representable a través de las correspondientes funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$. Definimos la aplicación bivariante $F : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $F(x, y) = v(y) - u(x)$ con $(x, y \in X)$. Obviamente resulta que $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \geq 0$. Pero además, la correspondiente F satisface una determinada ecuación funcional, a saber, en el caso de orden intervalo se tiene

$$F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) + F(y, y) \tag{3.4}$$

mientras que en el caso de semiorden resulta

$$F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) + K \tag{3.5}$$

con $(x, y, z \in X)$. Así, en el caso de representabilidad las estructuras de orden intervalo y semiorden se corresponden con la posibilidad de encontrar apropiadas soluciones de sendas ecuaciones funcionales.

□

Definición 3.11. *Sea* X *un conjunto no vacío y además* $\preceq$ *una relación binaria en* X *tal que la estructura* $(X, \preceq)$ *es un orden-intervalo. Dados* $x, y \in X$*, denotamos* $A(x, y)=\{s \in X :$ *existe* $a \in X$ *tal que* $x \preceq a \prec s \preceq y\}$*. Se dice entonces que* $(X, \preceq)$ *es separable como orden-intervalo si existe un subconjunto contable* $D \subseteq X$ *tal que para todo* $x, y \in X$ *con* $x \preceq y$ *existe* $d \in D \cap A(x, y) \backslash (A(x, x) \cup A(y, y))$*.*

Teorema 3.12. *Oloriz [28]. Sea $(X, \preceq)$ una estructura de orden-intervalo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *La estructura $(X, \preceq)$ es separable como orden-intervalo.*

(ii) *Existe un aplicación bivariante $F : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $x \preceq y \Leftrightarrow F(x, y) \leq 0$ y además $F(x, y) + F(y, z) = F(x, z) + F(y, y)$ para todo $x, y, z \in X$.*

(iii) *$(X, \preceq)$ es representable como estructura de orden-intervalo.*

Demostración. Puede verse en Oloriz [27], artículo del cual es el resultado clave. Cabe añadir aquí que la condición de separable como orden intervalo que se ha introducido es una pequeña pero sutil modificación de una condición similar que aparece en Bridges [8], donde se obtiene una condición suficiente para la representabilidad de ordenes-intervalo, que, sin embargo no parece ser condición necesaria en general. Para la equivalencia entre (ii) y (iii) obsérvese que si disponemos de una representación de la estructura de orden-intervalo mediante las funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$, nos bastará definir $F(x, y) = v(y) - u(x)$ con $(x, y \in X)$, mientras que si disponemos de la aplicación bivariante F en las condiciones de (ii), fijando $z = z_0$ con $z_0 \in X$ y llamando $u(x) = -F(x, z_0)$ y $v(y) = F(y, y) + u(y)$ obtenemos la representación deseada. □

En relación con esta equivalencia entre (ii) y (iii), es curioso observar que la dificultad manifiesta en trabajos anteriores como por ejemplo Bridges [8], para encontrar una caracterización de la representabilidad de órdenes-intervalo puede ser debido a la necesidad de construir, independientemente dos funciones apropiadas, u y v que generen la representación. Sin embargo, gracias a la noción de aplicación bivariante y las ecuaciones funcionales que conlleva, y de acuerdo con la equivalencia clave entre (ii) y (iii), a nosotros nos bastará con una única construcción, a saber, de la aplicación bivariante F. Y eso se hace en Oloriz [27].

Definición 3.13. *Sea X un conjunto no vacío y sea $\preceq$ una relación binaria definida sobre X. Se dice que la relación asociada $\prec$ es acíclica si para todo $n \in N$ ocurre que para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in X$ se tiene que $x_1 \prec x_2, x_2 \prec x_3, ..., x_{n-1} \prec x_n$ se cumple que $x_1 \preceq x_n$.*

3.2.1 Técnicas basadas en Aplicaciones Bivariantes y Ecuaciones Funcionales

Definición 3.14. *Entendemos por aplicaciones bivariantes aquellas que están definidas de la siguiente manera $X \times X \to R\mathbb{R}$, donde X es un conjunto no vacío dotado de una relación binaria que denotaremos $\prec$, y que intentamos representar en la forma $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y) > 0$.*

La idea primordial de las aplicaciones bivariantes son las connotaciones económicas: Ya que para saber si un producto es más caro que otro no tenemos por qué conocer exactamente el precio de cada uno de estos productos, ya que basta con que nos digan que la diferencia entre lo que cuesta el primer producto y lo que cuesta el segundo es estrictamente positiva.

El tipo de aplicación bivariante F que se maneje dará lugar a la posibilidad de representar unos tipos u otros de relaciones binarias. Así, por ejemplo, si $\preceq$ es un preorden total representable a través de una función de utilidad $u : X \to \mathbf{R}$ en la forma $x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$, llamando $F(x,y) = u(y) - u(x)$ resulta que $x < y \Leftrightarrow F(x,y) > 0$.

De la misma manera, si $\prec$ representa un *orden-intervalo* sobre un conjunto no vacío X, y la estructura ordenada $(X, \prec)$ es representable por una par de funciones $u, v : X \to \mathbb{R}$ en la forma $x \prec y \Leftrightarrow v(x) < u(y), u(x) \leq v(x)$ con $(x,y) \in X$, llamando $G(x,y) = u(y) - v(x)$ se tiene también una representación del tipo $x \prec y \Leftrightarrow G(x,y) > 0$.

Cabe entonces analizar qué diferencias hay entre la expresión $F(x,y) = u(y) - u(x)$ que manejamos en el caso de un preorden total representable y la $G(x,y) = u(y) - v(x)$ que aparece en el caso de un *orden-intervalo representable.*

La diferencia fundamental estriba en qué *ecuación funcional satisface la aplicación bivariante que hayamos considerado en ese caso.*

De este modo en el caso de un preorden total representable, la aplicación F tal que $F(x,y) = u(y) - u(x)$ satisface claramente la ecuación funcional siguiente, denominada *Ecuación de Sincov*:

$$F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) \tag{3.6}$$

con $(x, y, z \in X)$.

En el caso de un *orden-intervalo representable*, la aplicación G dada por $G(x,y) = u(y) - v(x)$ satisface la ecuación funcional

$$G(x,y) + G(y,z) = G(x,z) + G(y,y) \tag{3.7}$$

que se denomina *Ecuación funcional de Separabilidad*, y que determina a aquellas funciones de dos variables $H(x,y)$ cuyas variables independientes pueden separarse, de modo que la función pasa a expresarse como suma de dos funciones, una dependiendo sólo de la variable x y otra dependiendo de la variable y.

Analicemos con más detalle las ecuaciones funcionales que han ido apareciendo para el caso de *órdenes-intervalo y semiórdenes*: Si tenemos que F es una solución de la ecuación de la separabilidad sobre un conjunto no vacío X resulta que fijando $x_0 \in X$ y llamando $u(y) = -F(y, x_0)$, $v(x) = F(x,x) + u(x)$ con $(x, y \in X)$ tenemos que $F(x,y) = F(x,x_0) + F(y,y) - F(y,x_0) = -(-F(x,x_0) + (F(y,y) + u(y)) = -u(x) + v(y))$. Supongamos además que F verifica que $F(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Definimos ahora una relación binaria $\preceq$ sobre X dada por $x \preceq y \Leftrightarrow F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow v(y) - u(x) \geq 0$ o equivalentemente será $x \prec y \Leftrightarrow \neg(y \preceq x) \Leftrightarrow \neg(v(x) - u(y)) \geq 0 \Leftrightarrow v(x) - u(y) < 0 \Leftrightarrow v(x) < u(y)$. Como se tiene que $F(x,x) \geq 0$ para todo $x \in X$ resulta que $\preceq$ es reflexiva, luego $\prec$ es irreflexiva. Como $F(x,y)+F(y,x) = F(x,x)+F(y,y) \geq 0$ se sigue que $\prec$ es asimétrica.

Una situación del tipo $x \prec y, z \prec t$ se traduce en que $F(y,x)$, $F(t,z)$ son estrictamente positivos. Haciendo cálculos y teniendo en cuenta que F es solución de la ecuación de la separabilidad, nos conduce a $F(y,x) + F(t,z) = F(y,z) + F(t,x)$ luego alguno de los términos en el segundo miembro de la igualdad ha de ser estrictamente positivo, de manera que o bien $z \prec y$ o bien $x \prec t$. En definitiva, la aplicación binaria $\prec$ así definida es un *orden-intervalo*.

Con técnicas similares, si tenemos una aplicación bivariante F definida en X y tal que sea solución de la ecuación funcional $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) + F(t,t)$ con $(x,y,z,t \in X)$, se sigue inmediatamente que $F(t,t) = F(a,a)$ para cualesquiera $t, a \in X$, de manera que la expresión $k(x) = F(x,x)$ con $(x \in R)$ es una constante $k \in R$.

Si tuviéramos que $k > 0$, no resulta difícil ver que la relación $\prec$ definida en X mediante $x \prec y \Leftrightarrow F(y,x) > 0$ constituye en X un *semiorden que no es orden estricto*, y que se verifica $x \prec y \Leftrightarrow u(x) + k < u(y)$, siendo $u(x) = -F(x, x_0)$ donde $x, y, x_0 \in X$ con x_0 cierto elemento prefijado.

Por último, si $k = 0$ la aplicación bivariante F satisface la *Ecuación funcional de Sincov*, y la relación binaria $\prec$ dada por $x \prec y \Leftrightarrow F(y,x) > 0$ resulta ser un orden estricto. Vemos así que la resolución de ciertas ecuaciones funcionales está íntimamente ligada con la posibilidad de definir adecuadas relaciones binarias de tipo orden-intervalo, semiorden, u orden estricto sobre un conjunto no vacío X.

Teorema 3.15. *Ecuación Generalizada de Sincov. Castillo [12]. El sistema general de soluciones de la ecuación funcional*

$$F(x,z) = G(x,y) + H(y,z) \tag{3.8}$$

es

$$F(x,z) = h(z) - f(x) \tag{3.9}$$

$$G(x,y) = g(y) - f(x) \tag{3.10}$$

$$H(y,z) = h(z) - g(y) \tag{3.11}$$

donde f, g y h son funciones arbitrarias.

Demostración. Haciendo $y = a$ en (3.8) y llamando $h(z) = H(a,z)$ y $f(x) = -G(x,a)$ resulta $F(x,z) = G(x,a) + H(a,z) = h(z) - f(x)$ y con $r(y) = H(y,b)$ se llega a

$$G(x,y) = F(x,b) - H(y,b) = h(b) - f(x) - r(y) \tag{3.12}$$

$$H(y,z) = F(c,z) - G(c,y) = h(z) - h(b) + r(y) \tag{3.13}$$

finalmente, llamando $g(y) = h(b) - r(y)$ se obtienen las expresiones (3.9), (3.10) y (3.11). □

Proposición 3.16. *Oloriz [28].*

- *Toda solución de la ecuación aditiva de Sincov en un conjunto no vacío X, permite definir un preorden total $\preceq$ sobre X, de forma que la estructura $(X, \preceq)$ es representable a través de una función de utilidad.*

- *Dado un conjunto no vacío totalmente preordenado $(X, \preceq)$, la existencia de una función de utilidad para la estructura $(X, \preceq)$ es equivalente a la existencia de una solución $F : X \times X \to \mathbb{R}$ de la ecuación funcional aditiva de Sincov, y tal que $x \preceq y \Leftrightarrow F(x,y) \leq 0$ con $(x,y) \in X$.*

Demostración. Para la primera parte, basta definir $x \preceq y \Leftrightarrow F(x,y) \geq 0$ para $(x, y \in X)$. Para la parte dos, ya conocida una función de utilidad u obtenemos F mediante $F(x,y) = u(y) - u(x)$ con $(x, y \in X)$. De la misma manera, dada F, fijamos $x_0 \in X$ y definimos $u(x) = F(x_0, x)$ con $x \in X$. □

Teorema 3.17. *Oloriz [28]. Dado un conjunto no vacío totalmente preordenado $(X, \preceq)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *Existe una solución de la ecuación funcional aditiva de Sincov en X, $F : X \times X \to \mathbb{R}$ cumpliendo que $x \preceq y \Leftrightarrow F(x,y) \leq 0$ con $(x,y) \in X$.*
- *$(X, \preceq)$ es representable a través de una función de utilidad.*
- *Existe un subconjunto contable $D \subsetneqq X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \preceq y$ y ocurre que $D \cap (x,y] \neq \emptyset$, donde $(x,y] = z \in X : x \prec z \preceq y$.*

Demostración. Ver Bridges [8]. □

Definición 3.18. *La Ecuación Funcional de la Hemisimetría, esto es, una aplicación $F : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) + F(y,x) = 0$ con $(x,y) \in X$.*

Proposición 3.19. *Oloriz [28]. Sea X un conjunto no vacío. Definir una preferencia $\preceq$ sobre X es equivalente a encontrar una función $F : X \times X \to \mathbb{R}$ que sea solución de la ecuación funcional de la Hemisimetría.*

Demostración. Si disponemos de una preferencia $\preceq$ y definimos $F(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \prec y$, $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \preceq y,\ y \preceq x$, $F(y,x) = -F(x,y)$ siendo $(x, y \in X)$, la aplicación bivariante así definida resulta ser hemisimétrica. Por otra parte, si disponemos de una F hemisimétrica, claramente la relación binaria $\preceq$ dada por $x \preceq y \Leftrightarrow F(x,y) \geq 0$ es reflexiva y total, es decir, es una preferencia. □

RESUMEN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El campo de la matemática es tan amplio que es algo difícil ser capaz de decir cual es el límite de la misma, de manera que así como existen las ecuaciones diferenciales, ecuaciones en derivadas parciales con sus distintas aplicaciones, existen también las llamadas ecuaciones funcionales las cuales son muy parecidas a las diferenciales y parciales, salvo por sus métodos de solución y aplicaciones.

Un caso donde precisamente se aplican las ecuaciones funcionales es en la solución de problemas relacionados con la Economía, especificamente en la teoría de la Elección Social, la cual a su vez se encuentra inmersa en muchos campos relacionados con la política, la filosofía, entre otros.

De manera muy general podemos decir que el objeto de la Elección Social es **él estudio de las relaciones entre los objetivos de política social, las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad** Sen [34]. La teoría de la Elección Social se interesa por la obtención de reglas de evaluación que reflejen las preferencias de los individuos que componen una sociedad.

Sin embargo, el llegar a tomar una decisión en una sociedad donde se encuentren en juego las distintas alternativas individuales de los miembros de la misma no resulta nada fácil, esto fue precisamente lo que estudió Kenneth Arrow con su llamado Teorema de Imposibilidad, en el cual concluia que no existia regla de Elección Social que fuese capaz de cumplir:

(P1) **Ordenación**: La regla de elección social debe ordenar las alternativas sociales (es decir, para cada u admisible, $R = F(u)$ es una relación reflexiva, transitiva y completa).

(P2) **Dominio Universal**: La regla F debe ser de aplicación a cualquier configuración de preferencias, es decir, debe estar definida para todo $u \in U$. Cualquier preferencia individual es legítima.

(P3) **Pareto Indiferencia**: Para todo $x, y \in X$, y para todo vector u de Funciones de Utilidad admisibles, $u(x) = u(y)$ implica xIy. Si hay unanimidad en preferir una alternativa X a otra Y entonces X es preferido a Y.

(P4) **Eficiencia Informacional**: Sean u,$u^{'}$ dos vectores de funciones de utilidad admisibles, x, y dos elementos de X, y sean $R = F(u)$, $R^{'} = F(u^{'})$. Si se verifica que $u(x) = u^{'}(x)$ y que $u(y) = u^{'}(y)$, entonces: $[xRy \Rightarrow xR^{'}y]$, y $[yRx \Rightarrow yR^{'}x]$.

La conclusión fundamental ante todo lo estudiado es que, en la medida que mantengamos las propiedades (P1)-(P4) que caracterizan la existencia de un Orden de Bienestar Social R^{*} definido sobre m, sólo si estamos dispuestos a realizar comparaciones interpersonales de utilidad podemos encontrar algunas reglas (pocas) de Elección Social capaces de satisfacer el Principio de Pareto y el Anonimato. Dados los problemas interpretativos asociados a la realización de comparaciones interpersonales de utilidad, cabe preguntarse qué resultados se obtienen si modificamos alguna de las condiciones (P1)-(P4), manteniendo como argumentos de la función de bienestar social las preferencias convencionales (es decir, asumiendo la propiedad de Ordinalidad y

No-Comparabilidad).

Consideremos en primer lugar la propiedad de Ordenación y supongamos que no requerimos que $R = F(u)$ sea un orden; en particular, relajemos el requisito de transitividad. ¿Qué posibles reglas de agregación de preferencias podemos obtener? Obviamente la respuesta depende de cuál sea el supuesto que utilicemos en lugar de la transitividad. Aun así, las posibilidades no son muchas si queremos una regla operativa (es decir, que sea siempre capaz de identificar alguna alternativa como la mejor).

Una primera posibilidad es la de sustituir la transitividad de R por la casi-transitividad (es decir, la transitividad de la relación de preferencia estricta). Puede probarse en este caso que regla de decisión colectiva que satisfaga además las propiedades (P2), (P3) y (P4) es oligárquica, es decir, es tal que existe un conjunto de individuos N cada uno de los cuales tiene poder de veto ($i \in N$ y $u_i(x) > u_i(y)$ implica que yRx no es posible), y todos en conjunto deciden ($u_i(x) > u_i(y)$ para todo $i \in N$ implica xPy). Pero si además introducimos el supuesto de Monotonía, entonces la única regla de Elección Social es dictatorial. Si relajamos todavía más la transitividad y pedimos que R sea una relación acíclica, entonces existen individuos con poder de veto parcial (poder de veto sobre cierto número de alternativas). La introducción de la propiedad de Monotonía implica nuevamente la presencia de individuos con poder de veto sobre todas las alternativas.

Considerando ahora posibles modificaciones del supuesto de Dominio Universal, que permitan escapar del resultado de imposibilidad sin resultar demasiado restrictivas. La mayor parte de las propuestas en este campo tienen como objetivo garantizar la operatividad (transitividad, o al menos ausencia de ciclos) del Método de Decisión Mayoritaria. El propio Arrow [2] sugirió una restricción que permitía alcanzar este objetivo. Observó que si el número de votantes era impar y las preferencias de los individuos eran unimodales, entonces el Método de Decisión Mayoritaria genera una relación de preferencia social transitiva. También existen restricciones más generales, independientes del número de individuos, que caracterizan los tipos de preferencias que no generan ciclos en la preferencia social. Dichas condiciones resultan plausibles en situaciones en las que un pequeño número de personas vota con respecto a un reducido número de alternativas; sin embargo para sociedades grandes que se enfrentan a un número elevado de alternativas, la probabilidad de que tales condiciones se satisfagan resulta muy pequeña.

El Principio de Pareto resulta un requisito difícilmente renunciable. El resultado de imposibilidad es válido incluso si pedimos la formulación menos restrictiva dada por: $u_i(x) \geq u_i(y)$ para todo i implica xPy. Si debilitamos todavía más la condición de Pareto, exigiendo simplemente que $u_i(x) \geq u_i(y)$ implique xRy, podemos encontrar una regla que satisface todos los demás requisitos: la indiferencia total (xIy para todo $x, y \in X$). Ciertamente no es como para sentirnos muy satisfechos.

Cabría considerar también métodos de agregación de preferencias que no verifiquen el requisito de Eficiencia Informacional. Existen algunos métodos de votación que tienen esta propiedad (los métodos de Borda y Condorcet, los sistemas a doble vuelta, etc.). El problema que presentan estos métodos de agregación de preferencias es que en general resultan manipulables, es decir, los agentes tendrán en general incentivos a declarar unas preferencias que no se corresponden con las verdaderas, con el objetivo de conseguir resultados más próximos a sus verdaderas preferencias (este resultado es conocido como el Teorema de Gibbard-Satterthwaite, cuyo mensaje esencial puede resumirse como sigue: Cualquier ordenación social de alternativas que satisfaga la propiedad de Dominio Universal y de Anonimato, es manipulable).

Teorema 3.20. *(Gibbard y Satterthwaite). Villar[38]. Una función de decisión social cuyo rango tenga al menos tres alternativas es no manipulable si y sólo si es dictatorial (elige la mejor alternativa de un individuo prederteminado).*

Por supuesto, combinaciones de las variantes anteriores proporcionan algunos resultados adicionales. Simplemente finalizaremos indicando que hay formas alternativas de abordar problemas de decisión colectiva que son de aplicación en muchos problemas económicos, y que no se basan en la construcción de una función de bienestar social. La teoría axiomática de la negociación y de la justicia, o los esquemas de reparto de costos, son buenos ejemplos de ello. Estos enfoques se refieren en general a problemas más particulares (problemas con más estructura), pero a cambio proporcionan resultados más precisos.

Además proponemos como trabajo futuro:

Una vez estudiado el modelo de Arrow, y visto el Teorema de Imposibilidad, una tarea a realizar (o línea de investigación a seguir) es la búsqueda de otros modelos que den lugar a resultados de posibilidad, esto es, que dichos modelos sean no vacíos (contengan al menos una regla de Elección Social).

Una aproximación a la Elección Social, construyendo modelos que, si no en todos los casos, en situaciones significativas son no vacíos, es el estudio de los modelos topológicos de Chichilnisky, y las reglas de elección de Chichilnisky asociadas a dichos modelos.

3.2.2 Modelo de Chichilnisky en Elección Social

Supongamos que tenemos una sociedad con n agentes, que definen sus posibles preferencias sobre un mismo conjunto de elección X. Las posibles preferencias que un determinado agente puede tener conforman un espacio P, llamado espacio de preferencias, del cual supondremos que es un espacio topológico de Hausdorff. Además entenderemos que este espacio donde viven las posibles preferencias que un agente puede tener, es el mismo para todos los agentes. Veamos, con un adecuado ejemplo, cómo es posible topologizar el espacio de preferencias de un determinado agente: Supongamos que nos encontramos en un punto del desierto, a punto de morir de sed, y nos dicen que hay un oasis a poca distancia de donde nos encontramos, pero no nos indican en qué dirección se encuentra. Antes de quedarnos quietos y morir de sed, elegiremos una dirección del plano por la que sintamos una corazonada (entendamos preferencia) de que el oasis se encuentra en tal dirección , y nos pondremos en marcha. Obviamente, el conjunto de las posibles preferencias puede identificarse con el conjunto S^1 de los puntos de la circunferencia unidad del plano R^2, entendiendo cada punto de esta circunferencia como una dirección en la brújula.

Definición 3.21. *Una n-regla social topológica de Chichilnisky será una aplicación* $\psi_n : P^n \to P$ *a la que exigiremos que cumpla las siguientes condiciones:*

- *Continuidad:* $\psi_n : P^n \to P$ *es continua al considerar en* P^n *la topología producto, y en* P *la dada.*
- *Respeto del anonimato:* $\psi_n(x_1, ..., x_n) = \psi_n(y_1, ..., y_n)$ *siempre que* $(y_1, ..., y_n)$ *sea una reordenación de* $(x_1, ..., x_n)$.
- *Respeto de la Unanimidad:* $\psi_n(x, ...,_{n-veces} ...., x) = x$ *para todo* $x \in P$.

La estructura topológica de P conlleva el que pueda existir o no una n-regla de Chichilnisky. Como puede verse en Chichilnisky [15], los espacios óptimos para este tipo de modelos porque en ellos existe n-reglas para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$ son lo espacios topológicos contractibles.

Veamos que tipo de ecuaciones funcionales surgen de manera natural al estudiar los modelos de Chichilnisky: Supongamos, para fijar ideas, que n=2 y que $X = \mathbb{R}$. También supongamos que $F : R^2 \to R$ es una 2-regla condición de respeto de unanimidad se traduce en $F(x,x) = x$ donde $x \in \mathbb{R}$. Obviamente, tanto $F(x,y) = F(y,x)$ como $F(x,x) = x$ representan sendas ecuaciones funcionales. La primera de ellas corresponde a la conmutatividad y la segunda es una ecuación de identidad sobre la diagonal. Además en esta situación F define una operación binaria interna en $\mathbb{R}$ mediante $x * y = F(x,y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$. No sabemos si esta operación binaria tiene alguna propiedad adicional o no, y de hecho no tiene por qué tenerla, pero si se diese la particular circunstancia de que fuese asociativa, la mera existencia de una 2-regla llevaría consigo la existencia de n-reglas para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$, sin más que definir $\psi_3(x_1, x_2, x_3) = F(F(x_1, x_2, x_3))$ y aplicar la inducción $\psi_n(x_1, ..., x_n) = F(\psi_{n-1}(x_1, .., x_{n-1}), x_n)$. El mero hecho de que F sea asociativa plantea otra ecuación funcional clásica, a saber, la ecuación funcional de la asociatividad, que no es otra que $F(F(x,y),z) = F(x, F(y,z))$ con $(x,y,z) \in \mathbb{R}$. Esta ecuación, en el caso más general de ser X un conjunto no vacío y F una aplicación de $X \times X$ en X corresponde a la posibilidad de definir sobre X una estructura algebraica de semigrupo. En otras palabras, las soluciones de la ecuación funcional de la sociatividad sobre un conjunto no vacío de X se corresponden con las distintas estructuras de semigrupo con las que se pueda dotar a X. Véase Aczel[1].

El modelo algebraico de Chichilnisky consta de un conjunto no vacío P (que en algunos contextos será el espacio de preferencias, aunque no necesariamente, véase Candeal [11]), que estará dotado de una operación binaria interna que denotaremos $+$. Una n-regla social algebraica de Chichilnisky se define entonces como una aplicación $\delta_n : P^n \to P$, verificando las siguientes propiedades:

- Respeto del anonimato
- Respeto de la unanimidad
- Condición de homomorfismo algebraico, definida mediante

$$\delta_n(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = \delta_n(x_1, ..., x_n) + \delta_n(y_1, ..., y_n) \tag{3.14}$$

para cualesquiera $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in P^n$.

De manera, que una n-regla social algebraica aparece como solución de un determinado sistema de ecuaciones funcionales, a saber, una ecuación de conmutatividad n-variante (anonimato), otra de identidad sobre la n-digonal (unanimidad), y otra dada por un homomorfismo algebraico. Resulta que ahora es posible resolver este sistema de ecuaciones funcionales en alguna situación especial, y en particular cuando $(P, +)$ es un grupo abeliano. Los resultados que mencionaremos a continuación pueden verse en Candeal [11].

Teorema 3.22. *Sea* $(P, +)$ *un grupo y supongamos que existe una n-regla algebraica de Chichilnisky* δ_n *definida en* P*, para algún valor* $n \geq 2$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces se tiene:*

- *(P,+) es abeliano.*
- *Dado* $x \in P$ *existe un único* $y \in P$ *yal que* $ny = y + ..._{n-veces}..... + y = x$*.*
- *La regla* δ_n *es lo que se denomina una media convexa: Para cada* $(x_1, ..., x_n) \in P$*, se tiene que* $\delta_n(x_1, ..., x_n) = x_1, ..., x_n$*.*

Corolario 3.23. *En* $(\mathbb{R}, +)$ *no existe ninguna 2-regla algebraica de Chichilnisky que sea asociativa.*

El estudio de dichos modelos se encuadra en el marco de la agregación topológica de preferencias. Así mismo, la idea de agregación corresponde a la necesidad de pasar de lo individual a lo colectivo o social.

Cabe destacar que aparecen en la literatura otros modelos de Elección Social, distintos a los de Chichilnisky, que dan lugar al mismo tipo de resultados, relativo a medias convexas. Así como también, García-Lapresta trabaja con relaciones binarias y preferencias difusas, cuyo manejo requiere de ciertas ecuaciones funcionales.

De manera que el problema de la agregación será encontrar una preferencia social (que se dirá agregada) a partir de la familia de preferencias individuales, y de manera que la preferencia social cumpla alguna condición, también de sentido común, para con las preferencias individuales que entran en la agregación. De igual modo, cabe hablar de agregación de funciones de utilidad, preórdenes, etc.

La idea subyacente es siempre la misma (obtener un agregado social a partir de componentes individuales). Las técnicas matemáticas para estudios sobre agregación son muy variadas, si bien en estos nuevos modelos se introdujeron técnicas topológicas. Más adelante se introdujo también algún resultado, se abren muchas formas de concebir la condición de transitividad, de manera que se encuentran abiertos muchos campos para el estudio de la Teoría de la Elección Social.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mineola. Dover publications, 2006.

[2] Arrow, K., *Social choice and individual values* , John Wiley, New York, 1951.

[3] Arrow, K., *Opciones sociales y toma de decisiones mediante criterios múltiples*, Alianza Editorial, 1989.

[4] Binmore ,K., *Teoría de Juegos*, MacGraw Hill, 1993.

[5] Birkhoff , G., *Lattice Theory* , American Mathematical Society, Rhode Island, 1967.

[6] Bossert ,W. and J. Weymark *Utility in Social Choice*, Department of Economics, University of Nottingham, United Kingdom, 1996.

[7] Bridges ,D., *Numerical representation of intransitive preferences on a countable set*, Journal of Economic Theory, 1983.

[8] Bridges ,D., *Representing interval orders by a single value function* , Journal of Economic Theory, 1985.

[9] Bridges ,D., *Numerical representation of interval orders on a topological space*, Journal of Economic Theory, 1986.

[10] Bridges ,D. and G. Mehta *Representations of preference orderings*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Spriger Verlag, Berlin, 1995.

[11] Candeal , J y E. Indurain., *Aggregation of preferences from algebraic models on grous*, Social Choise and Welfare 12, 1990.

[12] Castillo, E. y Cobo, R., *Introducción a las Redes Funcionales con Aplicaciones. Un nuevo paradigma*, Madrid, Editorial Paraninfo, 1998.

[13] Castillo, E. y Cobo, R., *Ecuaciones funcionales y modelación en Ciencia, Ingeniería y Economía*, Barcelona, Editorial Reverté, 1993.

[14] Chichilnisky, G., *Social choice and the topology of spaces of preferences*, 1980.

[15] Chichilnisky, G. and Heal. G *Neccesary and sufficient conditions for a resolution of the Social choice paradox*, Journal of Economic Thery, 1930.

[16] Chipman, J., *The foundations of utility*, Econometrica, 1960.

[17] D'Aspremont, C., *Axioms for social choice ordering*, en Hurwicz, L., Schmeider, D y Sonnenschein, H.(eds), Social Goals and Social Organizations, Cambridge U. Press, New York, 1985.

[18] Fishburn, P., *Interval Orders and Interval Graphs: A Study of Partially Ordered Sets*, John Wiley, 1985.

[19] Gibbard, A., *Manipulation of voting schemes: a general result*, Econometrica , 19673.

[20] Hinich., Melvin y Munger Michael., *Teoría analítica de la política*, Editorial Gedisa, 1997.

[21] Krantz, D., Luce, R., Suppers. and Tversky *Foundations of measurement*, Academic Press. New York, 1971.

[22] Kuczma, M., *An Introduction to the theotry of Funcional Equations and Inequalities*, Katowice. Uniwersytet Slaski W Katowicach, 1985.

[23] Guzmán, M., B. Rubio *Integración: Teoría y Técnicas*, Editorial Alhambra. España, 1979.

[24] Martínez, V. y Hilera, J., *Redes neuronales artificiales: fundamentos modelos y aplicaciones* , Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

[25] Oubiña, L., *Introducción a la teoría de conjuntos*, Eudeba, 1971.

[26] Olson, M., *The Logic of Collective Action*, Cambridge, MA, Harvard University Press, 1965.

[27] Oloriz, E. and E. Indurain *Representability of interval orders*, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España, 1997.

[28] Oloriz, E. and E. Indurain *Ecuaciones funcionales en el análisis matemático de la preferencia*, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España, 1999.

[29] Prieto, C.,*Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003.

[30] Prasanna, S.,*Introduction to Functional Equations*, Canada, 2008.

[31] Saaty, T., *Modern Nonlirear Equations*, New York.Dover publicatons, 1981.

[32] Salcedo, D., *Elección social y desigualdad económica*, Anthropos. Universidad Autonóma Metropolitana, México, 1994.

[33] Scott, D. and P. Suppers *Foundational aspects of theories of measurement*, Journal of Symbolic Logic, 1958.

[34] Sen, A., *Collective choice and social welfare*, Londres, 1970.

[35] Sen, A., *Choice, welfare and measurent*, Oxford: Basil Blackwell, 1970.

[36] Shaun, H., *The theory of choice*, Blackwell Publishers , 1999.

[37] Tsebelis, G., *Jugadores con veto: Cómo funcionan las instituciones políticas*, Fondo de Cultura Económica, México, 2006.

[38] Villar, A., *La lógica de la elección social: una revisión de los resultados básicos*, Investigaciones Económicas, Fundación SEPI, 1988. [Documento en línea]. Disponible: http://ideas. repec. org/a/iec/inveco/v12y1988i1p3-44. html/[Consulta:2009.Agosto 05].

[39] Zuleta , H., *Razón y Elección*, Distribuciones Fontamara S. A , 1998.