UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Método de Análisis de Riesgo (SPAN)

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Migdalys E Marcano G** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutora: Dra. Mercedes Arriojas

Caracas, Venezuela
Febrero 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Método de Análisis de Riesgo (SPAN)**", presentado por la **Br. Migdalys Eloisa Marcano García**, titular de la Cédula de Identidad **16.904.392**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mercedes Arriojas
Tutor

Dra. María Margarita Olivares
Jurado

Dr.Daniel Barraez
Jurado

Dedicatoria

A mi papá por siempre estar conmigo y no dejarme sola en ningún momento de mi vida.

A mi sobrino Esthyben, por ser una de las bendiciones más grandes que han llegado a mi vida.

A mi mamá por darme la fuerza para seguir adelante. Te amaré por siempre.

Agradecimiento

Le agradezco a Dios por iluminar cada paso de mi vida y llenarla de bendiciones, para así superar las dificultades de cada día.

A mí mamá por ser la mejor madre del mundo, por enseñarme que en la vida no existen obstáculos que no puedan vencerse con amor, paciencia, constancia y mucho esfuerzo; por ser mi ejemplo a seguir y por todo el amor que me dió durante toda su vida. A mi papá por su amor, confianza y apoyo incondicional. A mi hermano Miguel por creer en mi, por su compañía y ánimo en largas noches de estudio. A mi tiuchis por su amor, comprensión y palabras de aliento que me han ayudado a crecer como ser humano. A mis hermanas Roselis y Rosmelis por su cariño, apoyo, confidencia y ayuda en cada paso de mi vida. A mi madrina Elizabeth por su confianza y por ser un gran apoyo en todos los momentos de mi vida.

A mi tutora, la profesora Mercedes Arriojas por su paciencia, apoyo, comprensión y por la transmisión de sus conocimientos durante la elaboración de esta tesis.

A mi novio Guillermo por su amor e incentivo constante. A mis amigos y demás familiares por su apoyo y cariño durante todo este tiempo.

Agradezco enormemente a la Universidad Central de Venezuela, la casa que vence las sombras, en especial a la escuela de Matemática de la facultad de Ciencias, por abrirme sus puertas y permitirme realizar mi sueño.

Índice general

Introducción

Independientemente del tamaño de una empresa o ente financiero y de la actividad a la cual se dedique, siempre existe la posibilidad de que se produzcan situaciones de desequilibrio financiero, que pueden traer como consecuencias la insolvencia, falta de liquidez y otros tipos de desbalances.

Un ejemplo notorio, ocurrió entre el 24 y el 29 de octubre de 1929, en donde los precios de las acciones de Wall Street, bajaron dramáticamente. Esta caída conocida como el desplome de Wall Street condujo a una depresión económica, que golpeó a EE.UU y contagió a las economías europeas.

En los últimos 20 años han ocurrido una serie de eventos financieros que han tenido efectos globales dramáticos, entre ellos podríamos mencionar:

⋆ En 1987, crisis bursátil latinoamericana, que provocó una recesión que duro cuatro años.

⋆ A mediados de los 90, la crisis japonesa, que dejó una depresión económica de la cual Japón tardó más de quince años en recuperarse.

⋆ Durante los años 1994 y 1995, devaluación del peso mexicano: efecto tequila.

⋆ En 1997, crisis asiática: efecto dragón.

⋆ En 1998, crisis rusa, donde se desplomó el rublo y se produjo una moratoria sobre la deuda pública rusa, dando como resultado una gran incertidumbre en los mercados internacionales.

⋆ En 1999, crisis en Brasil, se devaluó el real.

⋆ En el 2000, caída del Índice de Nasdaq.

⋆ En el 2001, desaceleración económica de EE.UU.

⋆ En el 2002, derrumbe de la economía Argentina: efecto tango.

⋆ En el 2008 la crisis financiera se desató de manera directa, debido al colapso de la burbuja inmobiliaria en Estados Unidos en el año 2006 (fenómeno económico caracterizado por la subida de los precios de los inmuebles) lo que provocó aproximadamente en octubre del 2007 una crisis económica, ocasionada por los préstamos para la adquisición de viviendas, que se le dieron a clientes con escasa solvencia y por tanto con un nivel de riesgo de impago superior a la media del resto de créditos.

Las repercusiones de la crisis hipotecaria comenzaron a manifestarse de manera extremadamente grave desde inicios del 2008, contagiándose primero el sistema financiero estadounidense, y después el internacional; teniendo como consecuencia una profunda crisis de liquidez, y causando, indirectamente, otros fenómenos económicos, como una crisis alimentaria global, diferentes derrumbes bursátiles (como la crisis bursátil de enero del 2008 y la crisis bursátil mundial de octubre del 2008) y, en conjunto, una crisis económica a escala internacional.

Con todo lo anterior, como señala Pascale [11] "se puede apreciar que los mercados financieros se han venido enfrentando a una creciente incertidumbre de precios. El mundo se ha tornado, desde el punto de vista financiero, un lugar más riesgoso".

El riesgo es uno de los elementos que ha dado origen a la creación los derivados financieros, los cuales, tal como su nombre lo indican derivan sus precios de otros productos financieros; creados principalmente con la finalidad de reducir el riesgo que se genera por la fluctuación de los precios de las acciones.

Si bien el uso de derivados ofrece enormes ventajas, debe tenerse en cuenta que son instrumentos financieros de difícil manejo.

Un ejemplo de un mal uso de derivados, ocurrió en febrero de 1995 cuando un empleado de nombre Nick Leeson, llevó a la quiebra a el banco Barings, una institución inglesa de más de 232 años.

Nick Leeson, era un corredor a cargo del banco, que debía explorar oportunidades de inversión de bajo riesgo, estableciendo mediante el arbitraje las diferencias de precios de diferentes acciones, índices, e instrumentos derivados. Para ello, él actuaba en la Sigapore Money Exchange (SIMEX) y la Osaka Exchange. Sin embargo, la realidad era que él estaba tomando decisiones demasiado arriesgadas, comprando y vendiendo diversas cantidades de contratos derivados en las dos bolsas mencionadas.

Gracias a la actitud permisiva de la alta gerencia del banco, Nick Leeson tenía el control no sólo sobre las operaciones en la bolsa, sino también sobre la administración del banco.

En 1993, Nick Leeson fue nombrado gerente General de la sudsidiaria del Barings Bank, en Sigapore. En enero de 1994, Leeson había llegado a un tope máximo de contratos de opciones (put y call), y futuros sobre el índice Nikkei 225, al punto que en febrero de 1994, el portafolio estaba valorado en 2,8 billones de yenes. El 23 de Enero de 1995, el índice Nikkei 225 baja 1000 puntos, después de que un terremoto sacude a Japón. Leeson trata de recomprar sin éxito todos los contratos. Luego, los ejecutivos del Barings Bank se dan cuenta que tienen 55.399 contratos del Nikkei que vencen en marzo y otros 5640 que vencen en junio, con todo esto la pérdida acumulada era de 59 billones de yenes, solo en SIMEX. El 24 de febrero de 1995, la Junta directiva de Barings Bank reconoce que están en bancarrota.

Siempre existe la posibilidad de que ocurran este y otros tipos de eventos financieros inesperados, incluyendo la posibilidad de que los beneficios sean mayores de los esperados.

El riesgo financiero se refiere a la probabilidad de que se produzca un hecho generador de pérdidas que afecten el valor económico de las instituciones. Cuantitativamente es prudente entender el riesgo como el resultado de la combinación de la probabilidad del evento y su impacto financiero (pérdida en unidades monetarias).

Por ello, son necesarios métodos de administración de riesgos financieros actualizados y completos, que permitan evaluar las pérdidas y ganancias que podrían tener empresas e instituciones financieras. Esto se hace con el propósito de crear las coberturas adecuadas ante cualquier imprevisto. La determinación de estas coberturas, también conocidas como márgenes, es uno de los objetivos fundamentales de la teoría de riesgo financiero.

En 1988 el CME (Chicago Mercantile Exchange) desarrolló y puso en práctica el sistema de margen conocido como SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk).

El SPAN ha sido reconocido en todo el mundo como un método de análisis de riesgo, cuyos resultados se utilizan en la gestión y administración de riesgo. Este método ha sido adoptado por las principales Bolsas de Derivados como son Chicago Board Options Exchange (CBOE), Chicago Board of Trade (CBOT), New York Cotton Exchange (NYCE), Kansas City Board of Trade (KCBT), entre otros. El SPAN proporciona un margen de riesgo, y en este sentido fue el primer sistema basado en la sustentabilidad del portafolio, más que en el rendimiento de la inversión.

Mediante el SPAN se puede identificar el riesgo global en una cartera de diversos instrumentos derivados, proporcionando un margen de riesgo que permite a la empresa estar informada del capital que debe tener para cubrir las pérdidas potenciales en un portafolio, esto con la finalidad de evitar situaciones de insolvencia.

El SPAN se utiliza tanto en las cámaras de compensaciones, para calcular el riesgo de bonos, como en las empresas para el cálculo de los requerimientos de margen de las cuentas de los clientes.

En los los últimos años, el SPAN se ha convertido en un sistema de análisis de riesgo estándar utilizado por muchas casas de bolsas e instituciones financieras para el cálculo del margen de riesgo.

La finalidad de este trabajo es el estudio detallado del método de análisis de riesgo SPAN, identificando e interpretando los aspectos matemáticos del mismo.

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Conceptos Matemáticos

Definición 1.1. Un experimento aleatorio es una acción que puede ser repetida bajo las mismas condiciones tantas veces como se quiera; del cual se conocen todos los resultados posibles sin que se pueda predecir con exactitud el resultado que se obtendrá en la siguiente repetición.

Definición 1.2. El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

Un espacio muestral se dice discreto si posee una cantidad finita o numerablemente infinita de elementos. En caso contrario se dice que el espacio muestral es continuo.

Definición 1.3. Un evento asociado a un experimento es un subconjunto del espacio muestral. Un evento es el resultado o ocurrencia de un experimento.

Definición 1.4. Sea Ω el espacio muestral y $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω se denomina σ- álgebra de subconjuntos de Ω, si satisface las propiedades:

(i) $\Omega \epsilon \mathcal{A}$, es decir que la realización del experimento produce un resultado $A \epsilon \Omega$.

(ii) Si $A \epsilon \mathcal{A} \Rightarrow A^c \epsilon \mathcal{A}$, es decir, si A es un evento entonces, A no ocurre también es un evento.

(iii) Si $A_n \epsilon \mathcal{A}$, para n= 1,2,... entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \epsilon \mathcal{A}$, es decir que la unión numerable de eventos es un evento.

Definición 1.5. Dado un espacio muestral Ω correspondiente a un experimento aleatorio y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de Ω, definimos una ***probabilidad*** (también denominada ***distribución***

de probabilidad, medida de probabilidad o función de probabilidad) como la función que asigna a cada evento A en la σ-álgebra un número $P(A)\ \epsilon\ [0,1]$, donde P satisface los siguientes axiomas:

(i) P es no negativa, es decir para todo evento $A \ \epsilon\ \mathcal{A}$ se cumple que $P(A) \geq 0$.

(ii) P es **contablemente aditiva o σ- aditiva**; es decir, si $(\mathbf{A_n})_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, lo que significa que $\mathbf{A_i} \bigcap \mathbf{A_j} = \emptyset$ para cada i $\neq$ j, entonces

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{A_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\mathbf{A_i}).$$

(iii) La probabilidad total es 1; es decir, $P(\Omega)$=1.

La terna $(\Omega,\mathcal{A},P)$ se denomina **espacio de probabilidad**, el valor $P(A)$ se denomina probabilidad de A.

Definición 1.6. Un modelo probabilístico es una terna constituida por un espacio muestral Ω, una σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una probabilidad P, representada por $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

Definición 1.7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** o variable aleatoria real es una función

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface la propiedad de que para todo intervalo I $\subseteq \mathbb{R}$ el conjunto

$$X^{-1}(I) = \{w\ \epsilon\ \Omega : X(w)\ \epsilon\ I\}\ \epsilon\, \mathcal{A}.$$

Definición 1.8. Una variable aleatoria se denomina **discreta**, si su rango es un conjunto discreto (finito ó numerable). En este caso existe un conjunto $\{x_n\}_{n\geq 1}$ (conjunto de valores de X) tal que $\sum_{n\geq 1} P(X = x_n) = 1$.

Definición 1.9. Si X es una variable aleatoria, se define **función de distribución de X** como la función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que para cada $y\,\epsilon\,\mathbb{R}$,

$$F_X(y) = P(\{w \,\epsilon\, \Omega : \; X(w) \leq y\}) = P(X \leq y).$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, entonces se define $F_X(x) = \sum_{x_n \leq x} p_n$, donde $p_n = P(X = x_n)$.

Propiedades de la Función de Distribución

Si F es la función de distribución de una variable aleatoria X, entonces:

(a) $0 \leq F(t) \leq 1$ *para todo* $t \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

(b) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ *para* $a < b$.

(c) $F(a) \leq F(b)$ *si* $a < b$ (*no decreciente*).

(d) $\lim_{t \to a^+} F(t) = F(a)$ (*continua a la derecha*).

(e) $\lim_{t \to a^-} F(t) = F(a) - P(X = a)$.

(f) $\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$ *y* $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$.

Las propiedades (a), (c), (d) caracterizan a las funciones de distribución. Es decir, si una función G satisface estas propiedades, entonces existe una variable aleatoria Y que tiene a G como función de distribución.

Definición 1.10. Sea X una variable aleatoria discreta tal que su conjunto de valores es $(x_n)_{n \geq 1}$ y su función de probabilidad $(p_n)_{n \geq 1}$, donde p_n= P(X=x_n). **La esperanza matemática o valor esperado** de X es el número denotado por $\mathbb{E}[X]$ y definido como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_n P(X = x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n;$$

siempre y cuando la serie anterior sea convergente. En este caso se dice que existe la esperanza matemática de X.

Definición 1.11. Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una **función de densidad sobre R** si y sólo si f satisface las condiciones siguientes:
i) Para todo x ϵ $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
ii)$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Definición 1.12. Una variable aleatoria X es **continua ó absolutamente continua** si existe una función de densidad f tal que para todo $a \, \epsilon \, \mathbb{R}$

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(u)\, du.$$

En este caso f se denomina **función de densidad de probabilidad de** X.

Definición 1.13. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f. Se define la **esperanza de** X como

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

siempre que la integral anterior sea finita. En este caso ($\mathbb{E}[X] < \infty$) se dice que X tiene esperanza o también que es integrable con respecto a la medida de probabilidad dada.

Definición 1.14. Si X es una variable aleatoria con media $\mathbb{E}[X] = \mu$, entonces la **varianza de** X, denotada $\mathbb{V}ar[X]$, se define como

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

La varianza de X es una medida de dispersión de los valores de X alrededor de la media.

Definición 1.15. Dada una variable aleatoria con varianza σ^2, la **desviación típica ó estándar** de X es igual a σ.

Este valor dá una medida de la desviación de los valores de la variable aleatoria con respecto a su media. Cuanto menor es la desviación estándar más se aglutinan los valores de la variable aleatoria en torno a la media.

El valor de $\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$ se denomina **desviación media absoluta**.

Definición 1.16. Una **tabla de frecuencias** es un arreglo en el que se organizan los datos en clases, es decir, en grupos de valores que describen una característica de los datos y muestra el número de observaciones del conjunto de datos que caen en cada una de las clases.

Definición 1.17. La **media observada o promedio**, de una cantidad finita de números, es igual a la suma de todos ellos dividida entre el número de sumandos:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

La media es uno de los principales estadísticos muéstrales.

Esta fórmula sólo es aplicable cuando se tienen todos los datos u observaciones. Si hemos perdido los datos originales y disponemos solamente de una tabla de frecuencias, identificamos todas las observaciones correspondientes a una clase con un valor único, denominado marca de clase, en general se toma como marca de clase el punto medio del intervalo de clase; es decir, si y_i es la marca de la i-ésima clase, f_i la frecuencia de la clase (número de veces que aparece ese valor) y $\phi_i = \frac{f_i}{N}$ la frecuencia relativa de esta clase, podemos calcular la media observada mediante la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} y_i f_i = \sum_{i=1}^{M} y_i \phi_i,$$

donde M es el número de clases.

Definición 1.18. Se llama **varianza observada** de una muestra $x_1, x_2, ..., x_n$ al valor

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2.$$

Algunas veces se prefiere trabajar con la varianza centrada, definida como

$$s_1^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2.$$

Note que

$$s^2 = \frac{N-1}{N}s_1^2$$

el $\lim_{N\to\infty} s^2 = s_1^2$.

Cuando no disponemos de la muestra bruta y en su lugar contamos con la tabla de frecuencias, calculamos las varianzas de manera análoga al caso de la media, mediante fórmulas

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M}(y_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{M}\phi_i(y_i - \bar{x})^2$$

$$s_1^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{M} f_i(y_i - \bar{x})^2 = \frac{N}{N-1}\sum_{i=1}^{M}\phi_i(y_i - \bar{x})^2$$

donde M es el número de clases.

Para el cálculo de la varianza y la desviación estándar las siguientes fórmulas son útiles

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$s_1^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N(\bar{x})^2\right).$$

Definición 1.19. Sea

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_N$$

una muestra observada, representemos el mismo conjunto de datos ordenados de mayor a menor, es decir:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq ... \leq x_{(N)}.$$

La **mediana** es el valor del punto medio dentro de una serie ordenada, cuando los puntos están ordenados en orden ascendente o descendente de magnitud. La mediana es el valor por encima del cual cae la mitad de los valores y por debajo de la cual cae la otra mitad.

La mediana m es el valor central o promedio de los valores centrales de la muestra ordenada, es decir:
Si N es impar:

$$m = x_{(\frac{N+1}{2})}$$

Si N es par:

$$m = \frac{x_{(\frac{N}{2})} + x_{(\frac{N}{2}+1)}}{2}.$$

2. Conceptos Financieros

Definición 1.20. Los **instrumentos de inversión** son aquellos que canalizan el ahorro hacia la inversión, facilitan el acceso de la empresa a recursos financieros necesarios para el desarrollo de proyectos de inversión. Entre algunos instrumentos bancarios tenemos: los bonos, cuentas corrientes, acciones, entre otros.

Definición 1.21. Un **portafolio** es conjunto de instrumentos financieros o inversiones poseídos por una misma persona natural o jurídica.

En un portafolio, el inversionista puede combinar instrumentos financieros de forma tal que pueda optimizar las ganancias.

Un portafolio se dice diversificado si no concentra porciones importantes de su capital en un único sector o en una única clase de activos. Es decir, combina diversas clases de activos y estilos de inversiones para facilitar el uso de estrategias financieras que ayuden a disminuir el riesgo del portafolio.

La diversificación ayuda a reducir el riesgo del portafolio porque las diferentes inversiones tienen alzas y bajas de forma independiente una de otra. Por lo general, las combinaciones de estos activos cancelarán las fluctuaciones de cada uno de ellos y por lo tanto reducirán el riesgo.

Definición 1.22. Los **instrumentos derivados** son aquellos cuyo valor está en función o se deriva del precio de otro activo denominado subyacente. Estos activos subyacentes pueden ser un índice, una acción, un bono nacional, o depósitos de tipos de interés, materias primas, entre otros.

Los derivados financieros son productos destinados a cubrir los posibles riesgos que aparecen en cualquier operación financiera, estabilizando y por tanto concretando el costo financiero real de la operación.

Los derivados constituyen un instrumento sumamente efectivo para manejar el riesgo producido por las fluctuaciones en los precios. Permiten que los usuarios puedan establecer con anticipación el precio de los productos que luego comprarán o venderán, con la finalidad de reducir los riesgos causados por las fluctuaciones adversas de precios y por consiguiente salvaguardar sus ganancias.

Los principales productos derivados, son los futuros y las opciones.

Definición 1.23. Los **futuros** son acuerdos, negociados en una casa de bolsa o institución financiera, que obligan a las partes contratantes a comprar o vender un número de bienes o valores (activo subyacente) en una fecha futura, pero con un precio establecido de antemano.

"Los contratos futuros, no son negociados en un mercado; son acuerdos privados entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y una de sus clientes corporativos". (Hull, 1996).

Definición 1.24. Una **opción** es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender bienes o valores (el activo subyacente), que pueden ser acciones, índices bursátiles, entre otros, a un precio predeterminado (precio de ejercicio), en una fecha concreta (vencimiento).

Las opciones pueden ser negociadas en los mercados organizados, que son aquellos que están regulados, como por ejemplo tenemos el Mercado Español de Futuros Financieros (MEFF), el Chicago Board Optiones Exchange, Mercado de Futuros y Opciones de Rosario (Rofex), Japan Securities Clearing Corporation (JSCC), donde se realizan operaciones entre instituciones financieras y algunos de sus clientes corporativos.

En la categoría de compra y venta, existen dos tipos de opciones:

- Opciones de compra (opciones CALL): son opciones que le otorgan al comprador el derecho pero no la obligación de comprar un activo a un precio determinado, en un momento futuro.
Sea:
X= Precio de ejercicio de la opción.
S_T= Precio del activo subyacente.
T= tiempo de expiración.

Si $S_T > X$, entonces el titular de una opción a compra ejerce la opción. Los beneficios obtenidos por el titular son: $S_T - X$.

Si $S_T \leq X$, entonces el titular perderá el derecho de ejercer la opción, ya que él puede comprar el activo en el mercado a un precio menor.

El beneficio final de una opción a compra es:

$$\max(S_T - X, 0).$$

Ejemplo 1.1. Supongamos que una persona ha comprado un contrato de opción a compra por una acción de la Bolsa de Valores de Caracas por 10.000 BsF (precio de ejercicio); y el precio de mercado de esa acción en la fecha fijada de antemano está por encima de este precio, obviamente que la opción es ejercida porque la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del mercado representa una ganancia. Por el contrario si el precio de ejercicio supera al precio del mercado no tendría sentido ejercer la opción, por cuanto la persona puede comprar la acción en el mercado a menor precio.

- Opciones de venta (opciones PUT): son opciones que le otorgan al comprador el derecho pero no la obligación de vender un activo a un precio determinado, en un momento futuro.
Sea:
X= Precio de ejercicio de la opción.

S_T= Precio del activo subyacente.
T= tiempo de expiración.

Similar al caso de las opciones de compra, el beneficio final de una opción a venta es:

$$\max(X - S_T, 0).$$

Esto ocurre sólo si $S_T < X$.

Ejemplo 1.2. Supongamos que una persona ha comprado un contrato de opción a venta por una acción de la Bolsa de Valores de Caracas por 10.000 BsF (precio de ejercicio); y el precio de mercado de esa acción en la fecha fijada de antemano está por debajo de este precio, obviamente que la opción es ejercida porque la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del mercado representa una ganancia. Por el contrario si el precio de ejercicio esta por debajo del precio del mercado, no tendría sentido ejercer la opción, por cuanto la persona puede vender la acción en el mercado a un mejor precio.

Definición 1.25. Posición es el conjunto de contratos que posee el inversionista.

Existen dos tipos de posición, corta y larga. Se dice que un inversionista tiene una opción en posición larga cuando ha comprado o mantenido un activo. Se dice que un inversionista tiene una opción a corto cuando ha vendido un activo.

Hoy se ha logrado reducir en alguna medida la incertidumbre, se pueden hacer presupuestos de costos más confiables y compararlos con precios más estables. Sin embargo aún usando estas herramientas existe riesgo; por lo tanto están en juego todas las inversiones y el capital invertido.

Operaciones combinadas

Las **operaciones combinadas para opciones** son operaciones que resultan de la combinación y utilización de las cuatro operaciones denominadas básicas: compra de una opción call, compra de una opción put, venta de una opción call, venta de una opción put.

Definición 1.26. Las **operaciones de compra cubierta** son operaciones que consisten en la compra de una acción con la venta simultánea de una opción de compra (call) sobre la misma acción.

En este caso, la eventual obligación de vender la acción está cubierta por la acción en el portafolio. Sean:
$c =$ la prima de la opción,
S_T= Precio del activo subyacente en el tiempo T.

Entonces, S_0= Precio del activo subyacente al comienzo del contrato de la opción. Siempre $S_0 > c$, ya que la prima es un valor que se paga por el derecho a la opción; no tendría sentido pagar más por el derecho a ejercer una opción que por la opción misma.

El valor inicial del portafolio es $S_0 - c$. Recordemos que el beneficio final de una opción a compra es $\text{máx}(S_T - X, 0)$.

Luego el valor del portafolio en la fecha de vencimiento es $S_T - \text{máx}(S_T - X, 0)$ y el beneficio en la fecha de vencicimiento es:

$$S_T - \text{máx}(S_T - X, 0) - (S_0 - c) = \begin{cases} (c - S_0) + X & \text{si } S_T \geq X \\ (c - S_0) + S_T & \text{si } S_T < X \end{cases}$$

Observe que cuando $S_T \geq$ X, el beneficio sigue siendo el valor constante $(c - S_0) + X$ y cuando $S_T < X$, el beneficio crece linealmente con S_T.

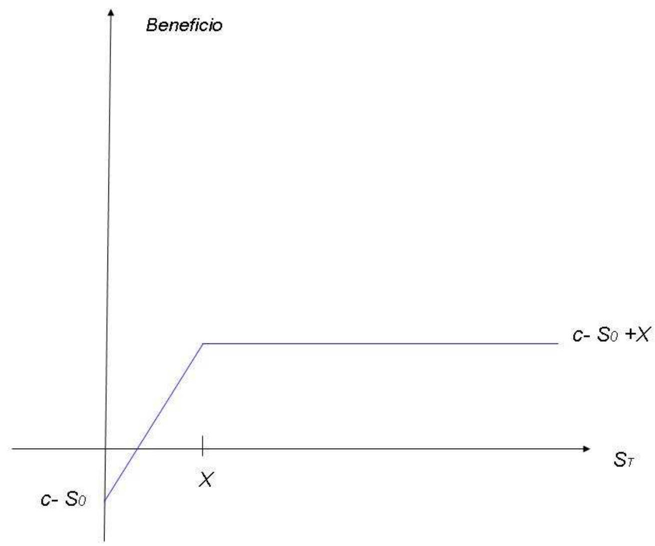

FIGURA 1.1. ***Diagrama de la Compra Cubierta.***

Definición 1.27. Las **operaciones de Venta Protectiva** son aquellas en donde se considera la compra de una acción y una opción put sobre la acción.

Esta estrategia permite invertir en una acción, sin tener que exponerse a pérdidas por encima de cierto nivel.

Sea P= la prima pagada por el titular de la opción a venta.

El beneficio a la fecha de vencimiento es:

$$S_T + \max(X - S_T, 0) - (P + S_0) = \begin{cases} -(P + S_0) + S_T & \text{si } S_T \geq X \\ -(P + S_0) + X & \text{si } S_T < X \end{cases}$$

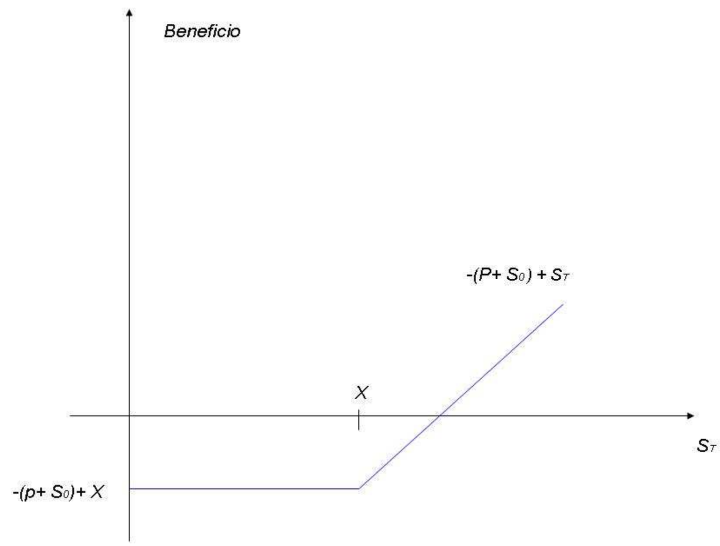

FIGURA 1.2. ***Diagrama de la Venta Protectiva.***

Definición 1.28. Un **spread** es una estrategia de negociación que consiste en la compra y la venta de dos opciones del mismo tipo, pero con diferentes precios de ejecución o diferentes fechas de expiración.

Cuando los dos componentes del spread varían con respecto al precio de ejercicio se denominan verticales. Si varían con respecto a su fecha de ejercicio son horizontales.

En el spread vertical una opción es comprada mientras otra es vendida, ambas con el mismo activo subyacente y la misma fecha de vencimiento, pero cada opción con precios diferentes.

El spread horizontal es similar al vertical, salvo que el precio de las opciones son las mismas, pero las fechas de vencimientos son diferentes.

El spread vertical puede clasificarse como alcista o bajista. Alcista se refiere al aumento de los precios en el mercado; a un movimiento hacia arriba de los precios, en donde los mínimos y máximos son cada vez más altos. Bajista se refiere a la disminución de los precios en el mercado; a un movimiento hacia abajo en los precios, en donde los mínimos y máximos son cada vez menores.

Un spread vertical alcista puede ser creado con la formación de un portafolio que contenga una opción a compra con posición larga y otra opción a compra pero con un precio más alto y en posición corta.

Sean X_1 y X_2 los precios de ejercicio de dos opciones de compra, $X_2 > X_1$; sean c_1 y c_2 sus respectivas primas, tales que $c_2 < c_1$.

La suma total de los beneficios de las dos opciones a compra son:

$$\text{máx}(S_T - X_1, 0) - \text{máx}(S_T - X_2, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq X_1 \\ S_T - X_1 & \text{si } X_1 < S_T < X_2 \\ X_2 - X_1 & \text{si } S_T \geq X_2 \end{cases}$$

Luego se resta las primas de ambas opciones a la suma de los beneficios. El beneficio final para la estrategia el spread vertical alcista, puede ser visto como se muestra en el gráfico:

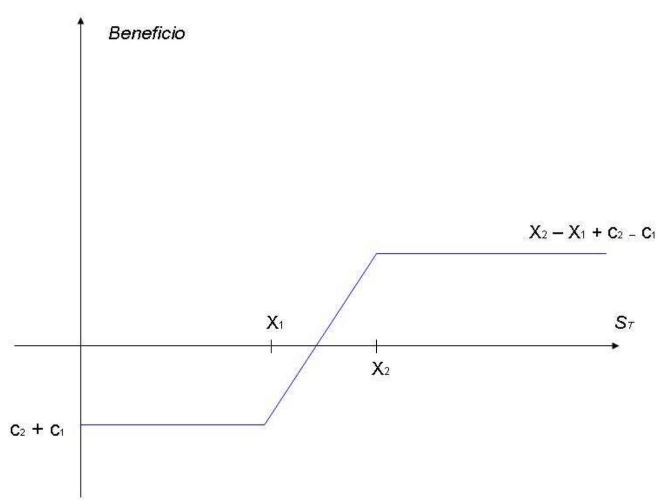

FIGURA 1.3. ***Diagrama de un Spread vertical alcista usando dos opciones a compra.***

El objetivo de estas estrategias es obtener beneficios cuando los los precios del futuro subyacente aumentan, poniendo límites para evitar posibles pérdidas. Los inversionistas se benefician cuando los precios suben y en caso de que estos bajen soportarán pérdidas limitadas.

Definición 1.29. Un straddle es una estrategia que consiste en comprar una opción de compra (call) y una opción de venta (put) sobre el mismo activo, con el mismo precio de ejercicio y la misma fecha de expiración.

Esta estrategia es buena para inversionistas que presumen que el precio de la acción se moverá, pero no están seguros en que dirección lo hará. Por ejemplo, sean:
X= Precio de ejercicio de la opción
S_T= Precio del activo subyacente.
Sean c_1 y c_2 sus respectivas primas, tales que $c_2 = c_1$. Por lo tanto la máxima pérdida que se puede producir en este tipo de estrategia financiera es el valor que se pago por la prima. Los beneficios de este tipo de estrategia se traducen en:

$$\text{máx}(S_T - X, 0) + \text{máx}(X - S_T, 0) = \begin{cases} X - S_T & \text{si } S_T \leq X \\ S_T - X & \text{si } S_T > X \end{cases}$$

Los beneficios se pueden observar en el siguiente gráfico:

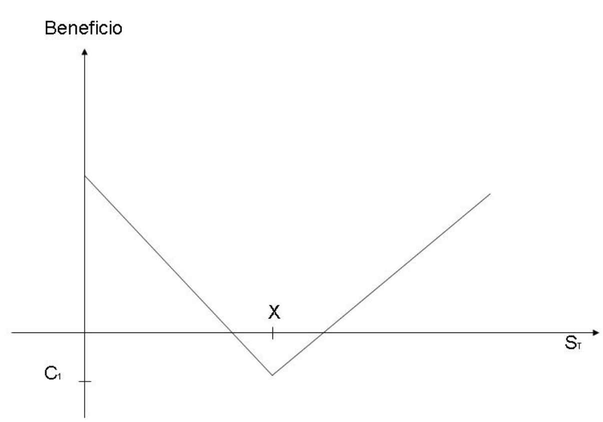

FIGURA 1.4. ***Diagrama de los beneficios de la estrategia Straddle.***

Definición 1.30. Un **warrant** es también una opción pero de mayor duración que le permite a su tenedor adquirir acciones comunes. Se trata, de hecho, del tipo de opción de más larga duración, con vencimientos de 5, 10 y hasta 20 años o más, aunque los hay incluso sin fecha de vencimiento.

Ejemplo 1.3. Consideremos la posibilidad de que las acciones de una telefónica suba en los próximos 6 meses. Supongamos que la acción cotizará a 10 euros, por lo que para obtener el título se tiene que pagar 10 euros.

Sin embargo, en vez de comprar el título se puede adquirir un derecho a comprar el título (warrant call de la telefónica con un precio de ejercicio 10 euros) que le permita comprar acciones de la telefónica a 10 euros en 6 meses. La compra de ese derecho (warrant) supone un desembolso mucho más reducido, 1 euro (la prima del warrant).

Si pasados 6 meses, las acciones de la telefónica se cotizan a 13 euros, el inversionista de las acciones habrá ganado 3 euros, lo que supone una ganancia del 30 %, ya que

$$0{,}3 = \frac{13 - 10}{10}.$$

A su vez el inversionista del warrants tendrá la posibilidad (pero no la obligación) de comprar acciones de la telefónica a 10 euros cuando ésta cotiza a 13, es decir, comprar 3 euros más barata la acción.

Teniendo en cuenta que el derecho (warrant) le costó 1 euro, la ganancia de la operación será del 200 %, ya que

$$0{,}2 = \frac{3 - 1}{1}.$$

Imaginemos que en 6 meses las acciones de la telefónica cotizan en 5 euros, el inversionista de las acciones pierde 5 euros por cada acción (las compró a 10 euros), mientras que el inversor del warrants, simplemente no llevará a cabo su derecho, ya que no le interesa comprar la acción a 10 euros cuando ésta cotiza a 5 euros en mercado, por lo que perderá su inversión de 1 euro (la prima del warrant).

Definición 1.31. La **volatilidad** es una medida de la fluctuación en el precio de mercado del activo financiero subyacente. Matemáticamente, la volatilidad es la desviación estándar de las variaciones del precio.

Una acción se denomina volátil cuando su precio varía con gran amplitud en relación con la variación del mercado.

La volatilidad es una variable crucial en los mercados de opciones. Algunos autores se refieren a la volatilidad como la velocidad de los movimientos del subyacente. Si los precios de un subyacente no se mueven con la suficiente rapidez, las opciones sobre dicho subyacente valdrán poco dinero, ya que las posibilidades de que el mercado suba los precios de ejercicio de las opciones son menores.

Los mercados cuyos precios se mueven lentamente son mercados de baja volatilidad, los mercados cuyos precios se mueven a gran velocidad son mercados de alta volatilidad. Si el subyacente es poco volátil, los agentes que acuden al mercado a cubrir riesgos no tendrán ningún incentivo para comprar opciones.

Se distinguen dos formas de estimar la volatilidad:

Definición 1.32. La **volatilidad histórica** es una medida estadística del movimiento pasado de los precios.

La volatilidad histórica, se basa en considerar observaciones históricas durantes períodos de tiempo. La volatilidad histórica se estima a través de las fluctuaciones de los precios en el mercado observadas recientemente.

Definición 1.33. La **volatilidad implícita** es una medida de la volatilidad de la acción subyacente; es determinada usando los precios actuales de las opciones existentes en el mercado real en vez, de usar los datos históricos en los cambios del precio de la acción subyacente.

La diferencia entre la volatilidad histórica y la implícita reside en el hecho de que mientras la primera es directamente observable mediante un sencillo cálculo estadístico, la segunda no lo es y a pesar de ser también fruto de un cálculo matemático a partir de un modelo de valoración no tiene necesariamente que reflejar la variación real de ningún activo financiero en el pasado. Otra diferencia, consiste en que mientras que la volatilidad histórica es una medida estadística del movimiento pasado de los precios, la volatilidad implícita mide si las primas de las opciones son relativamente caras o baratas. La volatilidad implícita es calculada en base a las actuales primas negociadas de las opciones.

2.1 Fórmula de Black Scholes

La fórmula de Black-Scholes es una expresión que proporciona el valor teórico de una opción Call o Put europea a partir de los siguientes datos: el tiempo hasta la fecha de expiración, el precio actual del subyacente, la tasa anual de interés, el precio de ejercicio de la opción y la volatilidad del subyacente.

El principio básico para obtener la fórmula es construir una estrategia autofinanciada de cobertura contra el riesgo inherente a la opción en la fecha de ejercicio. La fórmula de Black-Scholes para opciones Call y Put de tipo europeo es:

$$C_t = F(d_1)S_t - e^{-r(T-t)}KF(d_2)$$

$$P_t = -F(-d_1)S_t + e^{-r(T-t)}KF(-d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

- S_T es el precio del activo subyacente en el instante T de tiempo.

- El precio de ejercicio (K): es el precio al que el subyacente debe ser comprado si la opción se ejerce.

- T es la fecha en la que la opción expira.

-Valor de una opción de compra (call) al expirar:

$$C_T = \text{máx}\{S_T - K, 0\}$$

-Valor de una opción de venta (put) al expirar:

$$C_T = \text{máx}\{K - S_T, 0\}.$$

2.2. Índices Bursátiles

Los índices bursátiles pueden ser considerados como herramientas estadísticas que tienen por objeto reflejar la evolución en el tiempo de los precios de las acciones que cotizan en las bolsas, es decir, representan la variación media de precios del mercado.

Los índices bursátiles son el instrumento más representativo, ágil y oportuno para evaluar la evolución y tendencia del mercado accionario. Cualquier variación de su nivel es el fiel sinónimo del comportamiento de este segmento del mercado, explicando con su aumento las tendencias alcistas en los precios de las acciones y, en forma contraria, con su reducción la tendencia hacia la baja de los mismos.

Existen muchos índices bursátiles, entre los más importantes tenemos:

⋆ **Indices Dow Jones Industrial Average**

El DJIA es un promedio ponderado de precios de 30 acciones de compañías identificadas como "blue chip"(reconocidas por la calidad de sus productos y servicios, su confiabilidad y su habilidad para operar eficientemente) que cotizan en el New York Stock Exchange (NYSE). Este índice fue creado en 1896 por Charles H. Dow, siendo el indicador accionario más antiguo que aún se encuentra en uso.

⋆ **Indice Nasdaq 100**

El Nasdaq 100 es un índice bursátil de Estados Unidos que recoge a los 100 valores de las compañías más importantes del sector de la industria incluyendo empresas de hardware y de software, las telecomunicaciones, venta al comercio por mayor y biotecnología inscritos en la Bolsa de Nueva York (NYSE), listadas en el Nasdaq Stock Market. En el índice pueden estar tanto empresas americanas como internacionales.

El principal indicador del Nasdaq 100 es el Nasdaq 100 Index.

EL Nasdaq 100 se abrevia como NDX100. Sus correspondientes futuros se negocian en el Mercado de Valores de Chicago (Chicago Board of Trade). Sus futuros, abreviados como ND, y su versión mini, abreviado como NQ, unos de los futuros más negociados en el Mercado de Valores de Chicago.

EL índice Nasdaq 100 se calcula mediante una media aritmética ponderada por capitalización; para este cálculo se toman en cuenta la variación de los precios y el precio relativo del título dentro del mercado.

La diferencia entre la media y la media por capitalización, es que en esta última, el número de títulos se va a multiplicar por sus respectivos precios.

⋆ **Indice Standard & Poor's 500**

El S&P 500 se calcula mediante una media aritmética ponderada por capitalización y representa la mayor parte de la capitalización bursátil de los Estados Unidos.

⋆ **Indice IBEX 35**

El IBEX 35 es el índice oficial del mercado continuo de la Bolsa española y es calculado, publicado y difundido en tiempo real por la Sociedad de Bolsas. Es un índice ponderado por capitalización, compuesto por las 35 compañías más liquidas entre las que cotizan en el mercado continuo de las cuatro Bolsas españolas.

⋆ **Indice DAX**

El Deutscher Aktienindex (DAX) de Alemania se calcula mediante una media aritmética ponderada por capitalización, e incluye los 30 principales valores cotizados en Francfort, seleccionados por capitalización y contratación y que operan a través del sistema electrónico (IBIS).

⋆ **Indice CAC 40**

El CAC 40 es el principal índice del mercado francés, que consiste en la media aritmética ponderada por capitalización. Incluye 40 valores cotizados en el principal segmento del mercado de valores de París, elegidos por su capitalización y liquidez.

⋆ **Indice Nikkei 225**

El Nikkei 225 es el principal índice de Japón que incluye 225 compañías. Este índice se calcula mediante una media aritmética simple, utilizando el sistema Dow y corrigiéndose por ampliaciones desde 1991.

3. Medidas Coherentes de Riesgo

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad tal que Ω es el espacio de resultados o espacio de posibles estados, $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de eventos y P es la medida de probabilidad.

Se supone que la variable aleatoria X representa una pérdida financiera, tal que para $w \,\epsilon\, \Omega$ el número real $X(w)$ es la realización de una pérdida o beneficio, con $X(w) > 0$ para una pérdida y $X(w) < 0$ para un beneficio. Sea $\mathcal{X}$ el conjunto de las variables aleatorias sobre Ω.

Definición 1.34. Una **medida de riesgo** R es una función del conjunto de pérdidas en el conjunto de números reales no negativos, es decir: $R : \mathcal{X} \to [0, \infty]$.

Definición 1.35. Una **medida coherente de riesgo** R es una medida de riesgo que satisface las siguientes propiedades (Arztner et al. (1997,1999)):

Monotonía no creciente: Sean $X \,e\, Y \,\epsilon\, \mathcal{X}$, si $X \leq Y$, entonces

$$R[X] \geq R[Y].$$

Si tenemos dos portafolios X e Y, tales que el portafolio Y tiene inversiones mas ventajosas que el portafolio X, entonces el riesgo del portafolio Y va ser menor al del portafolio X.

Homogeneidad positiva: Si c es una constante positiva y $X \,\epsilon\, \mathcal{X}$ entonces

$$R[cX] = cR[X].$$

Esto significa que si se aumenta la posición en un portafolio o en algunos de sus activos componentes, el riesgo debe incrementarse proporcionalmente.

Subaditividad : Si X, Y, $X + Y \,\epsilon\, \mathcal{X}$, entonces

$$R[X + Y] \leq R[X] + R[Y].$$

Es decir, el riesgo global de un portafolio formado por dos o más activos es menor o igual que la suma de los dos riesgos individuales. Esta característica es la base de la diversificación, ya que según esta propiedad la diversificación no debe aumentar el riesgo.

Invarianza por traslaciones: Si c es una constante y $X \epsilon \mathcal{X}$ entonces

$$R[X + c] = R[X] - c.$$

Esto significa que si se añade una cantidad de efectivo al portafolio de inversión, entonces su riesgo debe reducirse en una cantidad proporcional.

Actualmente, existen diversos métodos de análisis de riesgos que han sido utilizados por empresas y mercados financieros durante muchos años, como es el caso de el Valor en riesgo (VaR).

4. El Valor en riesgo (VaR).

El valor en riesgo VaR es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio en un intervalo de tiempo y con un cierto nivel de probabilidad o confianza.

Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **el valor en riesgo** de X a un nivel de α denotado como $VaR^{\alpha}(X)$, se define como la pérdida máxima estimada en un periodo de tiempo dado $[t, \mathrm{T}]$, para un intervalo de confianza del α. En forma más precisa,

$$VaR^{\alpha}(X) \;\; = \;\; -\operatorname{ínf}\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} \,|\, \mathbb{P}\{X \leq x\} > \alpha\}.$$

Esta definición es aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas.

Supongamos, que las variables aleatorias sean continuas, es decir, que sus funciones de distribución tienen densidad. Sea $x_0 = \operatorname{ínf}\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} : F(x) > \alpha\}$, veamos que $F(x_0) = \alpha$.

Supongamos $F(x_0) > \alpha$, como F es continua, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $F(x_0 - \delta_\varepsilon) > \alpha$. Luego, como $x_0 - \delta_\varepsilon < x_0$, se tiene que x_0 no es el ínfimo de $\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} : F(x) > \alpha\}$. Se obtiene una contradicción, ya que $x_0 = \text{ínf}\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} : F(x) > \alpha\}$.

Análogamente al caso anterior, supongamos $F(x_0) < \alpha$, por la continuidad de F, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $F(x_0 + \delta_\varepsilon) < \alpha$. Entonces, como $x_0 + \delta_\varepsilon > x_0$, ocurre que x_0 no es el ínfimo de $\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} : F(x) > \alpha\}$. Obtenemos una contradicción, ya que $x_0 = \text{ínf}\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} : F(x) > \alpha\}$.

Por lo tanto, $F(x_0) = \alpha$.

Las principales ventajas que caracterizan el VaR, según señalan Acerbi y Tasche (2002) son:

(i) El VaR es una medida de riesgo universal, ya que puede ser aplicada a cualquier tipo de activo o fuente de riesgo.

(ii) El VaR es simple, posee una fácil implementación.

(iii) El VaR es completo, resume en un sólo número, en unidades monetarias todas las posibles fuentes de riesgo de mercados existentes en un portafolio.

Veamos si el Valor en riesgo VaR cumple con las propiedades de coherencia:

1. Monotonía no creciente.

A continuación se comprueba que el VaR satisface la propiedad de monotonía. Si X y Y son variables aleatorias con $Y \geq X$, se tiene que

$$F_Y(z) = \mathbb{P}\{\, Y \leq z\} \leq \mathbb{P}\{\, X \leq z\} = F_X(z)$$

para toda $z \,\epsilon\, \mathbb{R}$, ya que si $w \,\epsilon\, \Omega$ es tal que $Y(w) \leq z$, entonces $X(w) \leq Y(w) \leq z$, es decir $X(w) \leq z$. Por lo tanto si z es tal que $\alpha \leq F_Y(z)$, como $\alpha \leq F_Y(z) \leq F_X(z)$, se sigue que $\alpha \leq F_X(z)$. Consecuentemente,

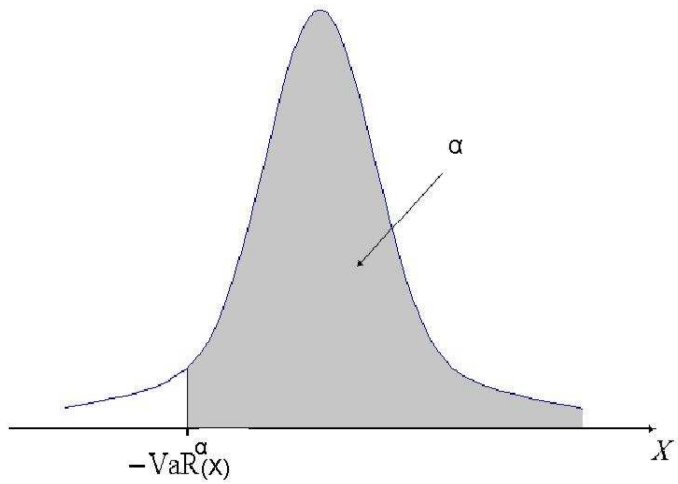

FIGURA 1.5. ***Valor en riesgo de X al nivel*** α

$$\{\ y\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq \alpha\} \subseteq \{\ x\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Así,

$$\text{ínf}\{\ y\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq \alpha\} \geq \text{ínf}\{\ x\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Es decir,

$$VaR^{\alpha}(Y) = -\,\text{ínf}\{\ y\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq \alpha\} \leq -\,\text{ínf}\{\ x\, \epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} = VaR^{\alpha}(X).$$

Por lo tanto

$$VaR^{\alpha}(Y) \leq VaR^{\alpha}(X). \tag{1.1}$$

2. Homogeneidad positiva.

A continuación se comprueba que el VaR es homogéneo positivo. Sean $\delta > 0$ y $Y = \delta X$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\delta X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \frac{y}{\delta}) = F_X(\frac{y}{\delta}),$$

de aquí se obtiene

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(Y) &= -\text{ínf}\{\, y \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq \alpha\} \\ &= -\text{ínf}\{\, \delta x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(\delta x) \geq \alpha\} \\ &= -\text{ínf}\{\, \delta x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(\frac{\delta x}{\delta}) \geq \alpha\} \\ &= -\text{ínf}\{\, \delta x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= -\delta\, \text{ínf}\{\, x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= \delta VaR^{\alpha}(X). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$VaR^{\alpha}(\delta X) = \delta VaR^{\alpha}(X). \tag{1.2}$$

3. Invarianza bajo traslaciones.

A continuación se prueba que el VaR es invariante bajo traslaciones. Sea $\delta \,\epsilon\, \mathbb{R}$ y $Y = X + \delta$, entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X + \delta \leq y\} = \mathbb{P}\{X \leq y - \delta\} = F_X(y - \delta).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} VaR^{\alpha}(Y) &= -\text{ínf}\{\, y \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(y) \geq \alpha\} \\ &= -\text{ínf}\{\, x + \delta \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_Y(x + \delta) \geq \alpha\} \\ &= -\text{ínf}\{\, x + \delta \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} \\ &= -(\text{ínf}\{\, x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} + \delta) \\ &= -\text{ínf}\{\, x \,\epsilon\, \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\} - \delta \\ &= VaR^{\alpha}(X) - \delta. \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$VaR^{\alpha}(X + \delta) = VaR^{\alpha}(X) - \delta. \tag{1.3}$$

4. Subaditividad.

A continuación se construye un ejemplo que muestra que el VaR no satisface la propiedad de subaditividad. Consideremos dos variables aleatorias X e Y, independientes e identicamente distribuidas con densidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}9 & \text{si } x \,\epsilon\, (0,1] \\ 0{,}05 & \text{si } x \,\epsilon\, [-2,0] \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Observe que la función de distribución, evaluada en 0 satisface

$$F_X(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-2}^{0} 0{,}05 dx = 0{,}1.$$

Por la definición del VAR sabemos que si $\alpha = 0{,}9$, satisface que,

$$VaR^{0,9}(X) = -\inf\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} \,|\, \mathbb{P}\{X > x\} \leq 0{,}9\},$$

entonces

$$VaR^{0,9}(X) = -\inf\{x \,\epsilon\, \mathbb{R} \,|\, \mathbb{P}\{X \leq 0\} \leq 0{,}1\},$$

Luego el

$$VaR^{0,9}(X) = VaR^{0,9}(Y) = 0.$$

Por otro lado, observe que

$$\mathbb{P}\{X + Y \geq 0\} = \int \int_{X+Y \geq 0} f_{XY}(x,y) dx dy.$$

Para calcular esta integral, sabemos que la función de densidad conjunta está dada por el producto de las densidades marginales, así

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (0{,}05)^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0{,}05)(0{,}9), & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \text{ y } 0 \leq y \leq 1, \\ (0{,}9)(0{,}05), & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } -2 \leq y \leq 0, \\ (0{,}9)^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1. \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

lo cual se muestra en el siguiente gráfico:

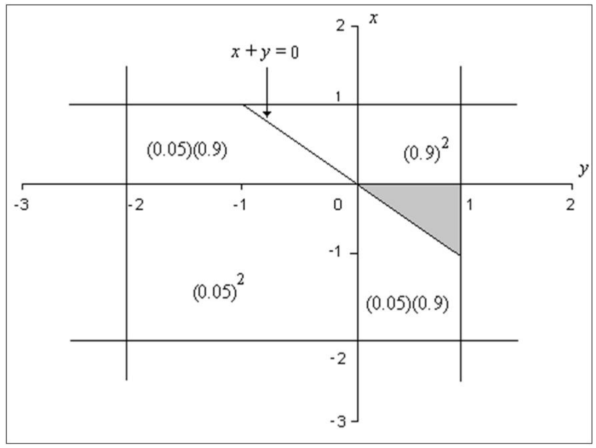

Figura 1.6. ***Función de densidad conjunta de las variables aleatorias X e Y.***

Con base en el área del triángulo sombreado, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X+Y\geq 0\} &= 2\int_0^1\int_{-y}^0 (0{,}9)(0{,}05)dxdy + (0{,}9)^2\\ &= 0{,}855.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}\{X+Y\leq 0\} = 0{,}145.$$

De aqui se tiene que

$$0 > \text{ínf}\{z|F_{X+Y}(z)\geq 0{,}1\} = -VaR_{0,9}^{X+Y},$$

se sigue entonces que

$$VaR^{0,9}(X+Y) > 0 = VaR^{0,9}(X) + VaR^{0,9}(X),$$

es decir, en este ejemplo, el valor de riesgo no cumple con la propiedad de subaditividad; por consiguiente el Valor en Riesgo (VaR) no es una medida de riesgo coherente.

5. El Valor en Riesgo Condicional (CVaR).

El CVaR es una medida alternativa al VaR que cuantifica las pérdidas que se puede encontrar en las colas de las distribuciones. Se define como la pérdida esperada para los casos en que la pérdida de valor de la cartera exceda el valor del VaR.

Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad fijo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

El valor de riesgo condicional CVaR es un estimador que mide las posibles pérdidas que exceden al VaR, también llamado esperanza condicional de la cola del VaR, matemáticamente, se define de la siguiente manera:

$$CVaR^{\alpha}(X) = -\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)].$$

Veremos que el CVaR cumple con las propiedades de coherencia, cuando se restringue a variables aleatorias con densidad.

Sea $\mathcal{X}_0 = \{X \ \epsilon \ \mathcal{X} | X \ \ continua\}$. Supongamos además que si $X, Y \ \epsilon \ \mathcal{X}_0$, entonces $X + Y \epsilon \, \mathcal{X}_0$.

1. Homogeneidad positiva.

A continuación se demostrará que el CVaR cumple con la propiedad de homogeneidad positiva. Sean $\delta > 0$ y $X \epsilon \, \mathcal{F}$, se define $Y = \delta X$ entonces,

$$\begin{aligned}
CVaR^{\alpha}(Y) &= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-\delta X \mid \alpha X < -VaR^{\alpha}(\delta X)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-\delta X \mid \delta X < -\delta VaR^{\alpha}(X)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-\delta X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
&= \delta \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
&= \delta CVaR^{\alpha}(X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la homegeneidad positiva.

2. Monotonía no creciente.

A continuación se comprueba que el CVaR cumple con la monotonía no creciente. Sean X, Y variables alatorias continuas, tal que X, $Y \epsilon \mathcal{F}$. Supongamos que $X \geq Y$, entonces

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \\
= \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y + VaR^{\alpha}(Y)|Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \\
= \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(Y + VaR^{\alpha}(Y))\, 1_{\{Y<-VaR^{\alpha}(Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{Y < -VaR^{\alpha}(Y)\}} \\
= \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(Y + VaR^{\alpha}(Y))\, 1_{\{Y<-VaR^{\alpha}(Y)\}}\, 1_{\{X<-VaR^{\alpha}(X)\}}\right]}{\mathbb{P}\{Y < -VaR^{\alpha}(Y)\}} \\
& + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(Y + VaR^{\alpha}(Y))\, 1_{\{Y+VaR^{\alpha}(Y)<0\}}\, 1_{\{X\geq-VaR^{\alpha}(X)\}}\right]}{\mathbb{P}\{Y < -VaR^{\alpha}(Y)\}} \\
\leq \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(Y + VaR^{\alpha}(Y))\, 1_{\{Y<-VaR^{\alpha}(Y)\}}\, 1_{\{X<-VaR^{\alpha}(X)\}}\right]}{\mathbb{P}\{Y < -VaR^{\alpha}(Y)\}} \\
= \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(Y + VaR^{\alpha}(Y))\, 1_{\{X+VaR^{\alpha}(X)<0\}}\right]}{\mathbb{P}\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}} \\
= \; & -VaR^{\alpha}(Y) + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[(Y + VaR^{\alpha}(Y))|X < -VaR^{\alpha}(X))] \\
= \; & \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \leq \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)].
\end{aligned}$$

La primera desigualdad se debe al hecho de que la segunda esperanza de la tercera igualdad es negativa. Entonces,

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \leq \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
-\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \; & \geq \; -\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
CVaR^{\alpha}(Y) \; & \geq \; CVaR^{\alpha}(X),
\end{aligned}$$

se cumple la monotonía no creciente.

3. Subaditividad.

A continuación se demostrará que el CVaR cumple con la propiedad de subaditividad. Sean X, $Y \epsilon \mathcal{F}$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
= \;& -VaR^{\alpha}(X) + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X + VaR^{\alpha}(X) | X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
= \;& -VaR^{\alpha}(X) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}} \\
= \;& -VaR^{\alpha}(X) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}}\, 1_{\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}} \\
& + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X+VaR(X)<0\}}\, 1_{\{X+Y \geq -VaR^{\alpha}(X+Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}} \\
\leq \;& -VaR^{\alpha}(X) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X < -VaR^{\alpha}(X)\}}\, 1_{\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}} \\
& + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X \geq -VaR^{\alpha}(X)\}} 1_{\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}} \\
\leq \;& -VaR^{\alpha}(X) + \frac{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}\left[(X + VaR^{\alpha}(X))\, 1_{\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}}\right]}{\mathbb{P}\{X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)\}} \\
= \;& -VaR^{\alpha}(X) + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[(X + VaR^{\alpha}(X)) | X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)] \\
= \;& \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)].
\end{aligned}
$$

Por simetría en los cálculos también se tiene que

$$\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \leq \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)].$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
CVaR^{\alpha}(X+Y) &= -\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X+Y \mid X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)] \\
&= -\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)] - \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid X+Y < -VaR^{\alpha}(X+Y)] \\
&\leq -\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] - \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \\
&= CVaR^{\alpha}(X) + CVaR^{\alpha}(Y).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple la subaditividad.

4. Invarianza por traslaciones.

A continuación se prueba que el CVaR es invariante bajo traslaciones. Sea $\delta \,\epsilon\, \mathbb{R}$ y $X \,\epsilon\, \mathcal{F}$, se define $Y = X + \delta$, entonces,

$$
\begin{aligned}
CVaR^{\alpha}(Y) &= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-Y \mid Y < -VaR^{\alpha}(Y)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X-\delta \mid X+\delta < -VaR^{\alpha}(X+\delta)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X-\delta \mid X+\delta < -(VaR^{\alpha}(X)-\delta)] \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[-X-\delta \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] - \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-\delta \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] \\
&= \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X \mid X < -VaR^{\alpha}(X)] - \delta \\
&= CVaR^{\alpha}(X) - \delta.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$CVaR^{\alpha}(X+\delta) = CVaR^{\alpha}(X) - \delta.$$

Por lo tanto se cumple la invarianza por traslaciones. Como el CVaR es una medida de riesgo que cumple con las propiedades de homogeneidad, invarianza por traslaciones, monotonía no creciente y la subaditividad, se concluye que el CVaR es una medida coherente.

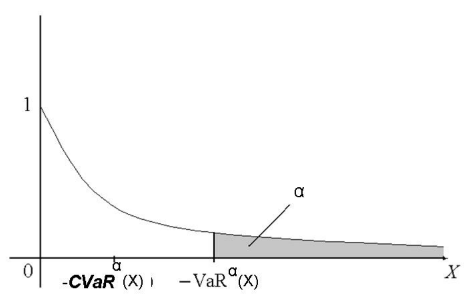

FIGURA 1.7. ***VaR y la cola del VaR (CVaR).***

Definición 1.36. Dada una medida de riesgo ρ, se define

$$A(\rho) = \{X : \rho(X) \leq 0\},$$

como el conjunto A de posiciones aceptables.

Nomenclatura: Una familia de las leyes de probabilidad $\mathbb{Q}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ se denomina ***escenarios generalizados***.[5]

Comentario: Estos escenarios generalizados se pueden usar para describir diferentes percepciones de la realidad.

Definición 1.37. A una clase $\mathbb{Q}$ de escenarios generalizados le podemos asociar una medida de riesgo:

$$\rho(\mathbb{Q})(X) = \sup \{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}.$$

Una medida ρ, definida de esta forma se denomina ***medida basada en escenarios.***

TEOREMA 1.38. *Para una familia de escenarios generalizados $\mathbb{Q}$, se cumple que la medida de riesgo basada en escenarios, $\rho(\mathbb{Q})$, es una medida coherente de riesgo.*

Demostración: Sean $X,\ Y \,\epsilon\, \mathcal{F}$ y $\alpha \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

1. Invarianza por traslaciones

$$\begin{aligned} \rho(Q)(X+\alpha) &= \sup\{E_Q[-X-\alpha] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\} \\ &= \sup\{E_Q[-X] - \alpha : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\} \\ &= \sup\{E_Q[X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\} - \alpha \\ &= \rho(Q)(X) - \alpha \end{aligned}$$

se cumple la invarianza por traslaciones.

2. Subaditividad

$$\begin{aligned}\rho(Q)(X+Y) &= \sup\{E_Q[-X-Y] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\},\\ &= \sup\{E_Q[-X]+E_Q[-Y] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\},\\ &= \sup\{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}+\sup\{E_Q[-Y] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\},\\ &= \rho(Q)(X)+\rho(Q)(Y).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho(Q)(X+Y)=\rho(Q)(X)+\rho(Q)(Y).$$

3. Homogeneidad positiva $\forall\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned}\rho(Q)(\lambda X) &= \sup\{E_Q[-\lambda X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}\\ &= \sup\{\lambda E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}\\ &= \lambda \sup\{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}\\ &= \lambda\, \rho(Q)(X),\end{aligned}$$

se cumple la homogeneidad positiva.

4. Monotonía no creciente: Sea X, $Y \,\epsilon\, \mathcal{F}$ tal que $X \leq Y$. Entonces,

$$E_Q[-X] \geq E_Q[-Y],\ \forall\, Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}.$$

Entonces

$$\sup\{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\} \geq E_Q[-Y],\ \forall\, Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sup\{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\} &\geq \sup\{E_Q[-Y] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\}\\ \rho(Q)(X) &\geq \rho(Q)(Y),\end{aligned}$$

Se concluye que,

$$\rho(Q)(X) = \sup\{E_Q[-X] : Q \,\epsilon\, \mathbb{Q}\},$$

es coherente.

TEOREMA 1.39 (Teorema de representación). *[11] Una medida de riesgo ρ, es coherente si y sólo si existe una familia $\mathcal{P}$ de probabilidades definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que:*

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{P} \epsilon \mathcal{P}} \mathbf{E}^{\mathbb{P}}[-X].$$

Los axiomas de medidas de riesgo coherentes han sido muy influyentes. Actualmente, en muchos casos las propiedades de coherencia se usan para validar los métodos utilizados para la medición de riesgo.

CAPíTULO 2

Método de Análisis de Riesgo de Portafolio (SPAN)

1. Introducción. El SPAN

En 1988, Chicago Mercantile Exchange (CME) desarrolló el método de Análisis de Riesgo de Portafolio SPAN (Standard Portfolio Analysis of Risk), que es un método utilizado para la evaluación y administración de riesgos de diversas industrias.

Al igual que otras medidas de riesgo, el SPAN tiene por finalidad informar a través de reportes financieros las pérdidas esperadas, de manera tal, que accionistas y administradores puedan decidir si tal nivel de riesgo es aceptable o bien si es necesario reducirlo.

El SPAN genera, usando una serie de parámetros, la peor pérdida probable en la que una cartera razonablemente podría incurrir en un período determinado, esta mayor pérdida constituye el margen de riesgo que el inversionista debe colocar para respaldar su inversión.

El SPAN esta basado en escenarios, que es una herramienta que utiliza el inversionista para medir y analizar el riesgo inherente a una determinada cartera de seguros e inversión. Los escenarios permiten simular todos los posibles riesgos que puedan afectar la inversión.

Para el cálculo del margen de riesgo se toman en cuenta diferentes parámetros que permiten evaluar los posibles factores de riesgo que puedan afectar las inversiones, como son la volatilidad, el precio del subyacente, el tiempo de expiración de los contratos, entre otros. Así como también se consideran estrategias financieras según los tipos de contratos y el nivel de correlación que existe entre ellos; esto con la finalidad de ajustar el margen de riesgo del portafolio, según las condiciones del mercado.

2. El SPAN: Una medida de riesgo basada en escenarios

Una técnica muy utilizada en métodos de análisis de riesgo financiero, es la elaboración de escenarios que permitan hacer un estudio de los instrumentos financieros que se encuentren en el portafolio. Estos escenarios pueden derivarse del comportamiento histórico de los activos financieros correspondientes, pueden ser obtenidos directamente de forma subjetiva por los expertos del mercado o una combinación de ambos.

Un escenario, es una familia de medidas de probabilidad, a la que se le asocian posibles factores de riesgos que puedan afectar la inversión.

El método SPAN se aplica, principalmente, a portafolios compuestos sólo por futuros y opciones de compra y venta, y se considera que cada una de las inversiones en el portafolio está expuesta a riesgos específicos. A continuación mencionaremos algunos de estos factores de riesgo.

1. Los futuros de compra y venta están directamente expuestos a un único factor de riesgo: **las variaciones en el precio del subyacente**. Los movimientos en el precio del subyacente impactan de manera directa en los precios de los futuros de compra y de venta.

2. Las opciones están expuestas a distintos factores que inciden en su valor. Según el modelo de Black Scholes, estos factores son: precio del subyacente, precio de ejercicio, tiempo de vencimiento, volatilidad y tasa de interés. En este caso para la aplicación del método SPAN se toman en consideración los siguientes aspectos:

• **Precio del subyacente:** los movimientos en los precios afectarán los precios de las opciones compradas y vendidas, por lo que el precio del subyacente es un factor de riesgo.

• **Precio de ejercicio:** una opción de compra o venta tiene un precio de ejercicio fijo que no constituye un factor de riesgo.

• **Fecha de vencimiento:** en un portafolio pueden existir contratos que tengan iguales y diferentes fechas de vencimientos de contratos futuros y opciones. Para efectos del SPAN, en el caso de las opciones, la parte compradora adquiere el derecho pero no la obligación de ejercer la opción en la fecha de vencimiento; el propietario puede dejar que la opción concluya en la fecha de vencimiento sin ejercerla. Los propietarios de opciones de compra vencidas perderán la prima que pagaron inicialmente, pero eso es lo máximo que pueden perder. En el método SPAN, la fecha de vencimiento no es considerado un factor de riesgo.

• **Volatilidad:** tiene una gran influencia a la hora de valorar opciones. Mide la velocidad con la que varía el precio del activo subyacente.

La volatilidad implícita es la que se valora en el mercado actualmente. Está incorporada en la cotización de las opciones en el mercado, aunque no es exactamente la misma para todas las opciones de un mismo subyacente.
Ejemplo 2.1. Un contrato con 20 opciones de compra de una telefónica con vencimiento el 25 de Marzo, puede tener una volatilidad implícita distinta de la de un contrato con 20 opciones de venta de la misma telefónica con vencimiento el mismo 25 de Marzo, que a su vez puede ser distinta de la que tenga un contrato de 20 opciones de la telefónica con vencimiento el 20 de Junio, etc. La volatilidad implícita varía constantemente, debido a que el precio del activo subyacente sube o baja.

Los aumentos de la volatilidad hacen aumentar el precio de las opciones (call y put), y recíprocamente, los descensos de volatilidad hacen disminuir el precio de las opciones. Esto se debe, a que una volatilidad alta supone un mayor riesgo, y en consecuencia los reguladores del mercado exigen un aumento en la prima de las opciones, lo que hace que el precio de las opciones aumente, lo contrario sucede cuando la volatilidad disminuye.

Siguiendo el principio de "comprar barato y vender caro" a los compradores de opciones les interesa comprar cuando la volatilidad es baja y vender cuando es alta, en caso de que no quieran llevar la operación hasta el vencimiento. Y a los vendedores de opciones les interesa vender cuando la volatilidad es alta y recomprar cuando es baja, en caso de que no quieran llevar la posición hasta el vencimiento.

Por todo lo anterior, la volatilidad es un factor de riesgo.

• **Tasa de interés:** los movimientos en la tasa de interés influyen en el valor de las opciones de compra y de venta, por lo que la tasa de interés es un factor de riesgo. No obstante, la influencia de este factor en la prima de estas opciones es relativamente insignificante, por lo que se opta por no considerarlo como un factor de riesgo. Es el factor de menor efecto en la valoración de opciones.

A las opciones de venta les afecta negativamente la subida de los tipos de interés y aumentarán su valor cuando estos descienden.

Por el contrario las opciones de compra, tendrán mayor valor si los tipos de interés suben pues será menor el precio de ejercicio.

Por todo lo anterior, en la implementación del SPAN, un escenario se caracteriza por el estudio de la variación de la volatilidad y del precio. Estos dos valores son conocidos como la volatilidad y el rango de variación del precio, respectivamente.

Para la determinación del margen de riesgo de un portafolio mediante el SPAN, se consideran 16 escenarios. Cada uno de estos escenarios representa una posible situación del mercado a lo largo de un período, que normalmente es de un día. A continuación damos una descripción breve de los 16 escenarios, que serán descritos en detalle en la próxima tabla.

<u>Escenario 1</u>: el precio de la inversión se mantiene constante a lo largo del período considerado, la volatilidad se incrementa.

<u>Escenario 2</u>: el precio de la inversión se mantiene constante a lo largo del período considerado, la volatilidad disminuye.

Escenario 3-14: el precio de la inversión varía a lo largo del período considerado y la volatilidad se incrementa o disminuye.

Escenario 15 y 16: el precio de la inversión varía a lo largo del período considerado, la volatilidad permanece sin movimiento.

En el *cuadro 1*, que se muestra a continuación, se asignó un porcentaje de (0.30), este valor representa el porcentaje que asignan las bolsas para el cálculo de la pérdida extrema.

He aqui un esquema general de los 16 escenarios usados por el SPAN:

Número	Escenarios de riesgo
1	Precio futuro inalterado; volatilidad sube
2	Precio futuro inalterado; volatilidad baja
3	Precio futuro sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
4	Precio futuro sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
5	Precio futuro por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
6	Precio futuro por debajo de 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
7	Precio futuro sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
8	Precio futuro sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
9	Precio futuro por debajo de 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
10	Precio futuro por debajo del 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
11	Precio futuro sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
12	Precio futuro sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
13	Precio futuro por debajo del 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
14	Precio futuro por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
15	Precio futuro sobre el extremo, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del 30 %.
16	Precio futuro por debajo del extremo, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del el 30 %.

Cuadro 1. Esquema general del portafolio utilizado por el SPAN

El resultado del calculo del margen de riesgo para un escenario en particular se denomina **valor de riesgo**.

3. Parámetros del SPAN

Actualmente existen dos versiones del método SPAN, llamadas SPAN básico y SPAN completo.

Con el SPAN básico, el calculo del margen de riesgo se realiza tomando en cuenta sólo la información proporcionada en cada uno de los escenarios.

El SPAN completo surge ante la necesidad de considerar algunos factores de riesgo que no son tomados en cuenta por el SPAN básico. Estos factores son el riesgo mensual y la correlación existente entre pares de productos que se encuentran en el portafolio.

En resumen, para la determinación del margen de riesgo, las dos versiones del SPAN usan parámetos cuyos valores dependen de las condiciones del mercado.

A continuación se describen estos parámetros.

2.1. Cuota Inicial

Es el requisito mínimo para el mantenimiento de una inversión; es decir, es el monto de capital, que debe proporcionar el inversionista a la casa de bolsa para mantener su contrato en un portafolio.

La cuota inicial del contrato subyacente representa una cuota mínima fija, que todo inversionista debe tener para llevar a cabo una transacción, con la finalidad de respaldar cualquiera que sea la operación que realice en el portafolio. Esta cuota inicial es también llamada cuota prefijada. Se calcula en base a los precios del día anterior.

Una de las herramientas que el CME y el CBT/BOTCC utilizan para determinar la cuota inicial, es revisar los movimientos históricos de los precios de los contratos de opciones y futuros durante diferentes períodos de tiempo, con la finalidad de evaluar los posibles cambios de la volatilidad y de los precios, para así tratar de predecir cambios futuros.

2.2. Compuesto Delta

El delta de una opción es la tasa a la que cambia la prima (P) de una opción en relación a pequeños cambios que se producen en el precio del activo subyacente (S). En términos matemáticos se define el delta como la primera derivada parcial de la prima de una opción con respecto al precio del activo subyacente. Sea:

P_{t_0} = Precio de la prima de una opción en t=0.

P_{t_f} = Precio de la prima de una opción en el tiempo final.

S_{t_0} = Precio del activo subyacente en t=0.

S_{t_f} = Precio del activo subyacente en el tiempo final.

$$\Delta = \frac{dP}{dS} = \frac{P_{t_f} - P_{t_0}}{S_{t_f} - S_{t_0}}.$$

$\Delta = 1$ significa que existe un sincronismo entre el movimiento del subyacente y la prima, de tal manera que un cambio de valor en el primero se reflejará plenamente en la prima. Esto es lo que ocurre en el caso de los futuros.

Por cada punto que varíe el precio del subyacente, el precio teórico del futuro variará en un punto. Esto se debe a que en el contrato futuro independientemente de que el precio del subyacente suba o baje, el titular del contrato futuro obligatoriamente debe pagar el precio que se fijó de antemano y la prima no cambiará.

En el método SPAN el delta es llamado compuesto delta.

El Δ será como máximo 1 y como mínimo -1. El delta de la opción variará entre 0 y 1 para las opciones de compra y menos -1 y 0 para las opciones de venta. El delta para una opción de compra, siempre es positivo, dado que el precio se incrementa con la subida del precio del subyacente. En el caso de una opción de venta, el delta siempre es negativo debido a que el precio de la opción disminuye con un incremento del precio del activo subyacente.

En aras de la simplicidad, el SPAN emplea sólo un delta por contrato, denominado ***delta estadístico***, que es la media ponderada de los compuestos deltas asociados a cada uno de los precios subyacentes.

Ejemplo 2.2. Supongamos que el precio de la prima de una opción es de $1,20$ *puntos (notación que se le da a los precios de instrumentos financieros), y que tiene un* Δ= *+0,50. Si el precio del subyacente sube 1 punto, el valor teórico de esta opción pasará de* $1,20$ *a* $1,70$ *puntos.*

$$\Delta = \frac{P_{t_f} - P_{t_0}}{S_{t_f} - S_{t_0}}.$$

$$0,50 = \frac{P_{t_f} - 1,20}{1}.$$

Despejando,

$$P_{t_f} = 1,20 + (0,5 * 1). \quad = \quad 1,70$$

Si la opción tiene un $\Delta = -0,50$*, una variación positiva de* 1 *punto (media de los movimientos del activo) en el precio del subyacente repercutirá en un descuento de* $0,50$ *puntos en el precio de la opción. Es decir, si nuestra opción vale* $1,1$ *puntos y aumenta* 1 *punto del precio del subyacente, el precio de nuestra opción pasará a valer* $0,60$ *puntos.*

$$P_{t_f} = 1,20 + (-0,5 * 1) = 0,60.$$

Los deltas son anunciados por las casas de bolsas. Estos deltas se calculan en juntas previas y tienen una duración de tres meses para un tipo de producto específico.

La junta se puede anticipar si existen grandes cambios en los precios del subyacente.

Ejemplo 2.3. Se tiene un portafolio de inversión que consta de una opción de compra, y tiene las siguientes características:

$P_{t_0} = \$2310$

$P_{t_f} = \$3010$

$S_{t_0} = \$10870$

$S_{t_f} = \$15950$,

entonces el delta estadístico va a ser igual a:

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{dP}{dS} &= \frac{P_{t_f} - P_{t_0}}{S_{t_f} - S_{t_0}} \\ &= \frac{3010 - 2310}{15950 - 10870} \\ &= \frac{700}{5080} \\ &= 0{,}1378.\end{aligned}$$

El delta estadístico en el caso de una opción a venta es de

$$\begin{aligned}\Delta = -\frac{dP}{dS} &= -\left(\frac{P_{t_f} - P_{t_0}}{S_{t_f} - S_{t_0}}\right) \\ &= -\left(\frac{3010 - 2310}{15950 - 10870}\right) \\ &= -\frac{700}{5080} \\ &= -0{,}1378.\end{aligned}$$

Los compuestos deltas usados por Sydney Futures Exchange (SFE) en abril del 2001 fueron:

Escenarios de Riesgo	Delta
1	0.138
2	0.138
3	0.108
4	0.108
5	0.108
6	0.108
7	0.55
8	0.55
9	0.55
10	0.55
11	0.018
12	0.018
13	0.018
14	0.018
15	0
16	0

Cuadro 2. Compuestos deltas utilizados por el SFE en abril 2001

Como el delta estadístico es el promedio de todos los compuestos delta del portafolio, entonces, para esta tabla el delta estadístico va a ser igual a

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta i}{16} = 0{,}19975.$$

2.3. Factor de escala para los movimientos de los precios

En el método SPAN se usan dos ***escenarios extremos***, que son los correspondientes a las filas 15 y 16 de la matriz de riesgo. En estos escenarios se tiene un porcentaje importante en las posibles pérdidas o ganancias. Este porcentaje varía según las bolsas o cámaras de compensación, asi como también varía el factor que multiplica el margen inicial, que en el *cuadro 1* del ejemplo 2.3 era igual a 3. Llamaremos a este factor ***multiplicador***. En el año 2005, la mayoría de las bolsas fijaron el multiplicador (n) en 2 ó 3 según la bolsa y el porcentaje (p) aproximadamente 30 % ó 35 % por ciento.

Los valores n y p se usan sólo en los escenarios 15 y 16.

Sea I un portafolio de inversión, se define como ***matriz de riesgo inicial*** a la matriz de que contiene los 16 valores de pérdida para cada inversión. Donde el ***valor de pérdida en el escenario i*** (V_{p_i}) con $i = 1, .., 16$, es el primer cálculo que realiza el SPAN, tomando en cuenta las características del escenario i, y el tipo de instrumento derivado, ya sea un futuro o una opción.

Ejemplo 2.4. Supongamos que un portafolio que contiene un contrato futuro, es negociado en la bolsa de Chicago y tiene una cuota inicial de $17250, y para los escenarios 15 y 16 se tienen n=3 y p=30 %. Entonces el valor de la pérdida (V_{p_i}) *en el escenario 15 es*

$$V_{p_{15}} = -17250 * 3 * 30\,\% = 15525,$$

y para el escenario 16

$$V_{p_{16}} = 17250 * 3 * 30\,\% = -15525.$$

2.4. Prima de riesgo inter-mensual (Inter-Month Risk Charge)

La prima de riesgo inter-mensual (RI) es una cuota adicional que las bolsas le agregan al margen de riesgo arrojado por el SPAN, cuando el SPAN está muy por debajo del margen mínimo establecido por la casa de bolsa. Esto se hace con la finalidad de ajustar los márgenes a la situación real del mercado. Esta cuota se calcula como producto de dos factores que representan posibles riesgos en las inversiones. Uno de estos factores, es la cuota establecida por la casa de bolsa, la cual se relaciona con los meses de vencimiento de las inversiones, y el otro factor, es aquel que toma en cuenta el número de días de vencimiento de los contratos.

La prima de riesgo inter-mensual es usada en los casos donde exista una correlación entre fechas de expiraciones diferentes. El margen de riesgo inter-mensual cubre el riesgo que puede existir en una cartera que contiene futuros y opciones con expiraciones diferentes.

Las fechas de expiración de los contratos, se toman en cuenta para la correlación, ya que si los contratos expiran el mismo día, y un contrato generara pérdidas y otro generara ganancias, se compensaría la ganancia de uno con la pérdida del otro.

Ejemplo 2.5. A continuación se presenta un portafolio de inversión que contiene 3 contratos futuros, 3 opciones de compra y 4 opciones de venta, los cuales expiraron en las siguientes fechas:

Tipo de contrato	Fecha de expiración
Futuro	2 de marzo 98
Futuro	13 de marzo
Futuro	7 de abril
Opción a compra	8 de junio 98
Opción a compra	6 agosto del 98
Opción a compra	9 de agosto 98
Opción a venta	3 de octubre del 98
Opción a venta	5 de noviembre 98
Opción a venta	2 de diciembre 98
Opción a venta	12 de enero 99

1. El primer paso para calcular la prima de riesgo inter-mensual consiste en crear un arreglo vertical C, cuyas entradas son las fechas de vencimiento de los contratos. Estas fechas apareceran ordenadas, comenzando por la más próxima. En este arreglo aparecerá una entrada por cada mes, ya que, si existen dos contratos A_1 y A_2 que expiran en el mismo mes, se toma la diferencia en días de ambos contratos; esta diferencia en días se utiliza al final para calcular el riesgo inter-mensual. Para el mes en cuestión se toma cualquiera de los contratos A_1 ó A_2.

Ejemplo 2.6. Implementaremos el procedimiento anterior con los contratos del ejemplo 2.5, se puede observar que en las fechas de vencimiento de los contratos aparecen 8 meses diferentes,

	Fecha de expiración
C_1	marzo 98
C_2	abril 98
C_3	junio 98
C_4	agosto 99
C_5	octubre 98
C_6	noviembre 98
C_7	diciembre 98
C_8	enero 99

La dimensión n del vector columna C es igual al número de meses en que vence algún contrato.

2. El segundo paso consiste en asignar niveles a los contratos correspondientes a fechas contiguas en el arreglo N. Diremos que los contratos con fecha de vencimiento C_k y C_{k+1} están en el **nivel 1** si la diferencia entre las fechas C_k y C_{k+1} es menor o igual a un mes.

Análogamente diremos que los contratos con fecha de vencimiento C_k y C_{k+1} están en el **nivel 2** si la diferencia entre las fechas C_k y C_{k+1} es de 2 a 3 meses. Los contratos con fecha de vencimiento C_k y C_{k+1} están en el **nivel 3** si la diferencia entre las fechas C_k y C_{k+1} es de 4 a 8 meses.

Ejemplo 2.7. (Continuación del ejemplo 2.6). Se procede a relacionar los meses como se señalo en el paso anterior, con la finalidad de formar los niveles:

1. Marzo y abril $\rightarrow$ nivel 1

2. Abril y junio → nivel 2

3. Junio y agosto → nivel 2

4. Agosto y octubre → nivel 2

5. Octubre y noviembre → nivel 1

6. Diciembre y enero → nivel 1

Se crea otro arreglo B, vector columna de dimensión n, con los niveles establecidos antes. La entrada B_j de este vector, para $1 \leq j \leq n-1$, es el nivel correspondiente a las fechas C_j y C_{j+1} del vector columna C.

B_n es el nivel entre C_1 y la fecha C_m más distante de C_1, tal que la diferencia entre ambas es menor o igual a 8 meses.

Ejemplo 2.8. Continuando con el ejemplo 2.7, se crea una matriz con los 6 niveles encontrados; la entrada B_7 de la matriz corresponde al nivel 3 (se relacionó C_1 y C_6)

	Fecha de expiración
B_1	nivel 1
B_2	nivel 2
B_3	nivel 2
B_4	nivel 2
B_5	nivel 1
B_6	nivel 1
B_7	nivel 3

Este orden define una asignación de niveles.

3. A partir del vector de niveles se crea una matriz M_{ij} tal que $i = 1, 2, 3,$ y $j = 1, 2, 3.$ Cada entrada de esta matriz se forma con la unión de dos niveles (ij). Se tiene un elemento del arreglo en un nivel (ij), si se tienen fechas de expiración contiguas en el nivel i y nivel j.

El nivel (ij) representa un monto asignado por la casa de bolsa.

A continuación se presenta un modelo de matriz de niveles, donde M_{ij}, para $i = 1, ..., 3$, $j = 1, ..., 3$:

	Nivel 1 (1 mes)	Nivel 2 (2 a 3 meses)	Nivel 3 (4 a 8 meses)
Nivel 1 (1 mes)	M_{11}	M_{21}	M_{31}
Nivel 2 (2 a 3 meses)	M_{12}	M_{22}	M_{32}
Nivel 3 (4 a 8 meses)	M_{13}	M_{23}	M_{33}

Cuadro 3. Matriz de Niveles.

Esta matriz de niveles se lee columnas por filas, cada entrada de esta matriz representa un valor para N_k. Se utiliza tomando en cuenta los niveles encontrados en el paso anterior. Cada entrada de la matriz de niveles tiene un valor, que es una cuota que determinan las casas de bolsas para calcular el RI.

Después de obtener todos los pares de niveles, se procede a determinar las tarifas en base a los cuales se calculan los montos adicionales que se deben añadir al margen por concepto de riesgo inter-mensual. Estas tarifas son suministrados por la casa de bolsa en la matriz denominada matriz de niveles. Los montos adicionales al margen se calculan en el paso siguiente.

4. A continuación se consideran los días que se descontaron en la elaboración del vector columna C. Z_k es el número de días en el mes, que transcurren para el vencimiento de cada contrato k, $k = 1, 2, ..., N$, donde $1 \leq Z_k < 30$.
Sea

$$W_k = |Z_{k+1} - Z_{k-1}|\,,$$

donde W_k representa la diferencia en días que existe entre el contrato que tiene Z_{k+1} días de vencimiento y el contrato que tiene Z_{k-1} días de vencimiento.

Sea (RI_k) el riesgo mensual por contrato, definido de la siguiente manera,

$$RI_k = M_{ij} * W_k,$$

para $k = 1, 2, ..., n$, $i = 1, 2, 3$, y $j = 1, 2, 3$.

Ejemplo 2.10. Tomando en cuenta las fechas de vencimiento del ejemplo 2.5,

$$W_1 = |Z_2 - Z_1| = |2 - 13| = | - 11| = 11.$$

$$W_2 = |Z_3 - Z_2| = |7 - 11| = |-4| = 4.$$

$$W_3 = |Z_4 - Z_3| = |8 - 4| = |4| = 4.$$

$$W_4 = |Z_5 - Z_4| = |6 - 4| = |2| = 2.$$

$$W_5 = |Z_6 - Z_5| = |9 - 2| = |7| = 7.$$

$$W_6 = |Z_7 - Z_6| = |3 - 7| = |-4| = 4$$

Calculemos el riesgo mensual por contrato.

	Nivel 1 (1 mes)	Nivel 2 (2 a 3 meses)	Nivel 3 (4 a 8 meses)
Nivel 1 (1 mes)	\$350	\$150	\$200
Nivel 2 (2 a 3 meses)	\$450	\$200	\$250
Nivel 3 (4 a 8 meses)	\$450	\$350	\$350

Cuadro 4. Matriz de Niveles del ejemplo 2.6.

$$\begin{aligned} RI_1 &= M_{12} * 11 \\ &= 450 * 11 = 4950. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_2 &= M_{22} * 4 \\ &= 200 * 4 = 800. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_3 &= M_{22} * 4 \\ &= 200 * 4 = 800. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_4 &= M_{21} * 2 \\ &= 150 * 2 = 300. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_5 &= M_{11} * 7 \\ &= 350 * 7 = 2450. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_6 &= M_{13} * 4 \\ &= 450 * 4 = 1800. \end{aligned}$$

Es importante recordar que los pares de los niveles tienen un cifra o cuota que es calculada por la casa de bolsa respectiva.

5. Finalmente el riesgo inter-mensual esta definido como

$$RI = \sum_{k=1}^{n} RI_k,$$

para $k = 1, 2, ..., n$.

Ejemplo 2.11. Para el portafolio del ejemplo 2.5, el riesgo intermensual sería:

$$\begin{aligned} RI &= \sum_{k=1}^{6} RI_k \\ &= 11{,}100. \end{aligned}$$

2.5. Mínima prima de una opción a corto plazo (Short Option Minimum Charge)

Las opciones a corto plazo pueden parecer que tienen poco o ningún riesgo en comparación con las opciones a largo plazo. Sin embargo, en el caso en que las condiciones del mercado (volatilidad, precio, tasa de interés), tengan cambios considerables, se pueden generar grandes pérdidas para los tenedores de contratos a corto plazo, en estas opciones.

Para cubrir los riesgos asociados a la tenencia de opciones a corto plazo, las casas de bolsa establecen una cuota mínima denominada ***mínima prima de una opción a corto plazo***. Esta cuota es uno de los parámetros utilizados por el SPAN.

Los contratos futuros, a diferencia de las opciones, no tienen riesgos extra cuando se trata de inversiones a corto plazo, ya que siempre deben ser ejecutados por el tenedor. Es por eso que en este caso no se establece la prima.

Ejemplo 2.12. Supongamos que el Euro FX (es la sigla de la determinación diaria de los tipos de referencia para las principales monedas frente al euro) tiene una opción a corto plazo que tiene como precio subyacente \$2300 y su cuota inicial es de \$40 por contrato para el mantenimiento de la cuenta. Recordemos que la cuota inicial para el mantenimiento de la cuenta es calculada tomando en cuenta las operaciones realizadas el día anterior. Una cartera que contiene 20 opciones a corto de Euro FX, tendrá un requisito de por lo menos \$800, independientemente de los resultados arrojados por el SPAN.

Ejemplo 2.13. El 12 de abril de 2001 el S&P 500 tenía 1825 contratos de opciones a compra (opción a corto plazo); la cuota que el SPAN básico arrojó para el margen de mantenimiento requerido es menor que \$1. Sin embargo, el CME había fijado a S&P 500 una cuota de \$175 por cada opción a corto plazo. Por lo tanto esta cuota, fué el minímo margen requerido para una opción a corto plazo, ya que resultó mayor a la calculada por el SPAN básico. En consecuencia, en este caso, en lugar del SPAN se tomó en cuenta el margen de la mínima prima de opción a corto plazo.

Si el requisito de margen de mantenimiento dado por el CME, hubiese sido menor, que la prima mínima calculada por el SPAN; entonces esta última prima sería el requisito de margen de mantenimiento para una opción a corto plazo.

2.6. Crédito por correlación entre productos (Inter-Commodity Spread Credits)

El crédito por correlación entre productos (CCP) es una cantidad que se descuenta, del margen de mantenimiento, cuando en el portafolio existen contratos cuyos precios presenten una cierta correlación. Por ejemplo, las posiciones en dos contratos respecto a lados opuestos del mercado (compra o venta) pueden reducir el riesgo, porque las pérdidas a partir de un instrumento se pueden compensar con ganancias en el instrumento relacionado.

Las bolsas o instituciones financieras establecen un porcentaje, que se va a multiplicar por el riesgo estimado de cada contrato. Este porcentaje va a depender de la correlación que existente entre pares de contratos; es decir, las casas de bolsa determinan un cierto porcentaje de correlación entre pares de contratos, tomando en cuenta los tipos de productos;

en base a este porcentaje se calcula el crédito por correlación entre productos.

Es importante resaltar que, en general el riesgo correspondiente a un portafolio con varios contratos va ser siempre menor o igual a la suma de los riesgos individuales de cada uno, ya que si un portafolio sólo tiene un contrato este no tendría ningún descuento por crédito de correlación entre productos. Este descuento siempre es calculado entre pares de productos.

Existen diferentes maneras de calcular este crédito. Sin embargo, la noción de correlación es la misma para todas las casas de bolsa.

Ejemplo 2.14. El margen de mantenimiento individual de un contrato futuro de venta del S&P 500 con vencimiento en el mes de septiembre del 2001 fué de $17,250, y el margen de mantenimiento individual del contrato futuro de compra del NASDAQ con vencimiento en el mes de junio del mismo año fué de $27,000. Luego, si consideramos los contratos como portafolios distintos, el margen de mantenimiento total es la suma de los margenes que es igual a

$$44,250 = 17,250 + 27,000.$$

Sin embargo, los mismos contratos agrupados en un sólo portafolio de inversión, tuvieron un margen de mantenimiento de $17,257. [9, pag 5].

Este margen es mucho menor, debido a las deducciones que se realizan producto de la correlación entre ellos.

2.7. Riesgo Estimado

Este parámetro, requerido para el cálculo del SPAN, es en realidad el margen que se obtiene al aplicar el método SPAN básico. En esta sección describiremos en detalle en que consiste el método.

Para calcular este parámetro, las bolsas hacen un estudio de los contratos derivados basándose en el comportamiento de los precios y en la variación de la volatilidad durante diferentes períodos de tiempos (días, semanas, meses), para así asignarle una cuota inicial o prefijada por portafolio. Las bases de este estudio fueron establecidas en la sección 3 del capítulo 2.

Una vez obtenida la matriz de riesgo inicial y el valor de pérdida de cada contrato, se procede a agrupar todos los contratos del portafolio en una sola matriz, denominada ***matriz de riesgo inicial de todos los contratos***. El resultado de cada entrada de esta matriz se va a multiplicar por la cantidad de contratos que tiene cada inversión.

Luego, se suman por filas (escenarios) las entradas de la matriz de riesgo para obtener la pérdida más grande del portafolio, esta matriz es denominada ***matriz de riesgo***. El **riesgo estimado** va a ser igual a la pérdida más grande asociada a la matriz de riesgo.

A continuación, se presentará la matriz de riesgo donde se encuentran todos los contratos de un portafolio. En la siguiente tabla se mostrarán el riesgo estimado de 1 contrato futuro y 4 opciones (dos de compra y dos de venta); las entradas de la matriz de riesgo son calculadas tomando en cuenta el tipo de contrato y la posición de cada contrato. Todos estos cálculos se desarrollarán de manera detallada en el próximo capítulo.

Líneas	Escenario	futuro	Compra	Compra	Venta	Venta	total
1	Precio futuro inalterado; volatilidad sube	0	-1636	-1675	-324	-408	-4043
2	Precio futuro inalterado; volatilidad baja	0	2123	2185	316	410	5034
3	Precio futuro sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	-5750	-5954	-5933	-136	-165	-17938
4	Precio futuro sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-5750	-2647	-2519	364	478	-10074
5	Precio futuro por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	5750	2384	2279	-566	-720	9127
6	Precio futuro por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	5750	6523	6501	244	307	19325
7	Precio futuro sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	-11500	-10533	-10461	9	23	-32462
8	Precio futuro sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-11500	-7711	-7533	395	523	-25826
9	Precio futuro por debajo 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	11500	6077	5897	-876	-1118	21480
10	Precio futuro por debajo 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	11500	10478	10354	137	155	32624
11	Precio futuro sobre 3/3 del rango de; variación del precio; volatilidad sube	-17250	-15340	-15225	119	167	-47529
12	Precio futuro sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-17250	-12995	-12783	416	552	-42060
13	Precio futuro por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	17250	9415	9155	-1271	-1622	32927
14	Precio futuro por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	17250	13922	13682	-20	-67	44767
15	Precio futuro por encima del extremo , 3 veces el precio de la cuota prefijada, con una cobertura del 30 %	-15525	-14065	-13985	131	175	-43269
16	Precio futuro por debajo del extremo, 3 veces el precio de la cuota prefijada, con una cobertura del 30 %	-15525	6837	6596	-1518	1951	25489

Cuadro 4. Matriz de Riesgo del SPAN para un contrato fururo y 4 opciones

Ejemplo 2.15. En la matriz de riesgo número 4, la mayor pérdida total de el portafolio, ocurre en el escenario número 14. El ***riesgo estimado*** *calculado mediante el método SPAN básico es*

$$44767 = 17250 + 13682 + 13682 - 20 - 67.$$

Es importante señalar que el riesgo estimado es, de todos los parámetros, el más importante, pues además de representar el margen de riesgo que arroja el SPAN básico, es el punto de partida para calcular el riesgo que arroja el SPAN completo.

En el siguiente capítulo, se darán ejemplos detallados del funcionamiento del SPAN básico y del SPAN completo, para finalmente calcular el margen de riesgo de todo un portafolio.

CAPíTULO 3

Cálculo del SPAN

Como se mencionó anteriormente, existen dos clases de SPAN, un SPAN básico que, como señalamos anteriormente, dá como margen el riesgo estimado; y el SPAN completo, que además del riesgo estimado, toma en cuenta todos los otros parámetros descritos en el capítulo anterior.

A continuación se presentarán todas las notaciones que serán usadas en el siguiente capítulo:
Vp_i= Valor de la pérdida en el escenario i.
C= Cuota inicial.
Up=Precio del subyacente.
Lp= Precio de ejercicio.
r= Tasa de interés.
q= Volatilidad.
T= Fecha de vencimiento.
Vol= Volatilidad implícita.
T= Fecha de expiración de la opción.
O_i= Precio de la opción en el escenario i, calculada con la fórmula de Black- Scholes.
RI= Riesgo inter-mensual.
CCP=Crédito por correlación entre productos.
$span$= SPAN básico.
$SPAN$= SPAN completo.

En el capitulo 2, se describió el riesgo estimado, en términos de la suma de las pérdidas estimadas para cada inversión en el portafolio, en cada uno de los escenarios. A continuación describiremos en detalle como se calcula el valor de pérdida en cada escenario. Definimos

i= número de escenario.

$e(i)$= coefiente de pérdida de cada escenario.

$$e(i) = \begin{cases} 0 & \text{si i=1 ó i=2} \\ -1 & \text{si i=3 ó i=4} \\ 1 & \text{si i=5 ó i=6} \\ -2 & \text{si i=7 ó i=8} \\ 2 & \text{si i=9 ó i=10} \\ -3 & \text{si i=11 ó i=12} \\ 3 & \text{si i=13 ó i=14} \end{cases}$$

1. Riesgo Valor

El valor de pérdida para cada entrada de la matriz de riesgo SPAN es calculado de la siguiente manera:

Contratos futuros

Para los escenarios del 1 hasta el 14, el valor de la pérdida es:

$$Vp_i = \frac{e(i)}{3} * C. \tag{3.1}$$

donde $i = 1, 2, ..., 14$.

2. Para el escenario 15 y 16

Sea n el multiplicador y p el porcentaje, ambos asignados por la casa de bolsa. (Ver el parámetro 3, del capítulo 2)

Escenario 15:

$$Vp_{15} = -n * C * p. \tag{3.2}$$

Escenario 16:

$$Vp_{16} = n * C * p. \tag{3.3}$$

Opciones

El precio Up del activo subyacente, es el cotizado al cierre del dia anterior. Para incorporar la condiciones de cada escenario, se calcula un precio Up_i, para el subyacente en el escenario i. El precio del subyacente por escenarios Up_i, se calcula de la siguiente forma:

$$Up_i = Up + \frac{i}{3} * C. \tag{3.4}$$

El precio Up_i en el escenario i es usado para obtener el valor de la opción en este escenario O_i, y se calcula aplicando la fórmula de Black-Scholes.

Luego el valor de la pérdida para cada escenario es:

$$Vp_i = C - O_i \tag{3.5}$$

Para los escenarios 15 y 16, el valor del activo subyacente viene dado por la siguiente fórmula:

Escenario 15:

$$Up_{15} = Up - (n * C)$$

Escenario 16:

$$Up_{16} = Up + (n * C)$$

Se introducen los valores de Up_i, Lp, T, r, en la fórmula de Black- Scholes para obtener el precio de las opciones de compra y venta O_i. Finalmente el valor de la pérdida (Vp_i) para estos escenarios es

$$Vp_i = (C - O_i) * \; p. \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.1. A continuación se presentará la matriz de riesgo de un contrato futuro del S&P 500 del 12 de abril del 2001, que tuvo como cuota inicial C= \$17250. Recordemos que este precio es calculado por las bolsas tomando en cuenta todo el portafolio de inversión del día anterior.

Como sabemos que C= \$17250, p= 30 % y n=3 se utilizan las fórmulas 3.1 y 3.2 para cada una de las entradas de la matriz.

Por ejemplo, en escenario número 9, el precio futuro está $\frac{2}{3}$ por debajo del precio actual; por lo tanto el valor de la pérdida para ese escenario es:

$$\begin{aligned} Vp_9 &= 17250 * \frac{2}{3} \\ &= 11500. \end{aligned}$$

En el escenario 15 el valor de la pérdida se calculó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Vp_{15} &= (3 * 17250) * 0{,}30 \\ &= 5525. \end{aligned}$$

La cantidad positiva representa las posibles pérdidas, y las negativas las ganancias ó créditos. La pérdida más grande del S&P 500 en el portafolio anterior, es de $17250, que en este caso es igual precio del día antes de negociación. Por lo tanto se cumple

$$span = \$17250.$$

Matriz de Riesgo de un Contrato Futuro (Contrato Futuro del S&P 500)

Líneas	Riesgo Valor	Escenarios
1	-$0	Precios futuros inalterados; volatilidad sube
2	$0	Precios futuros inalterados; volatilidad baja
3	-$5750	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
4	-$5750	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
5	$5750	Precios futuros por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
6	$5750	Precios futuros por debajo de 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
7	-$11500	Precios futuros sobre2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
8	-$11500	Precios futuros sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
9	$11500	Precios futuros por debajo de 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
10	$11500	Precios futuros por debajo del 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
11	-$17250	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
12	-$17250	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
13	$17250	Precios futuros por debajo del 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
14	$17250	Precios futuros por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
15	-$15525	Futures up extreme, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del 30 %
16	$ 15525	Futures down extreme, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del 30 %

Cuadro 4. Contrato Futuro del S&P 500

Ejemplo 3.2. A continuación se presentará un ejemplo de un contrato de opcion a compra del Bank Bills de abril del 2000, con las siguientes características:

- T= 0.25 (3 meses ó $\frac{90}{365}$).
- Lp= \$95.
- Up= \$95.01.
- q=0.24 %.
- r= 1 %.

En este ejemplo, la cuota inicial fué C= \$700, con este valor y utilizando la fórmula (3.3) calcularemos el escenario número 10 de este portafolio de inversión; el Up_{10}, *que va a ser el precio del subyacente correspondiente al escenario 10, este valor se usara en la fórmula de Black-Scholes:*

$$\begin{aligned} Up_{10} &= 95 + \frac{2}{3} * 700 \\ &= 95 + 466{,}66 \\ &= 561. \end{aligned}$$

Al introducir Up_{10}, T, Lp, q, r, *en la fórmula de Black-Scholes, nos dió que el valor de la opción es* $0_{10} = 252$, *luego utilizando la fórmula (3.4)*

$$\begin{aligned} Vp_{10} &= 700 - 252 \\ &= 448. \end{aligned}$$

Arreglo de Riesgo de un Contrato de Opciones (Junio 2001 S&P 500 call Price 1200)

Líneas	Valor de Riesgo	Escenarios
1	-$268	Precios futuros inalterados; volatilidad sube
2	$271	Precios futuros inalterados; volatilidad baja
3	-$391	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
4	$135	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
5	-$156	Precios futuros por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
6	$375	Precios futuros por debajo de 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
7	-$525	Precios futuros sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
8	-$30	Precios futuros sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
9	-$54	Precios futuros por debajo de 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
10	$448	Precios futuros por debajo del 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
11	-$669	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
12	-$220	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
13	$37	Precios futuros por debajo del 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube
14	$496	Futuros por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja
15	-$340	Futures up extreme, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del 30 %
16	$155	Futures down extreme, 3 veces el margen de mantenimiento, con una cobertura del 30 %

Cuadro 5. Contrato de Opciones (Junio 2001 S&P 500 call Price 1200)

Ejemplo 3.3: A continuación se muestra un portafolio que contiene contratos de futuros y opciones, se supone que el portafolio tiene 90 días para su expiración y posee las siguientes características:

Nº de contratos y posición	Fecha de vencimiento	Contrato	Precio de ejercicio	Precio subyacente	Delta	Volatilidad
20 largo	Mar 99	Futuro	n/a	96.3	1	0.14 %
10 corto	15 Mar 99	Opción compra	95.00	95.01	0.51	0.24 %
40 corto	18 Jun 99	Opción compra	95.00	94.87	0.44	0.26 %
20 largo	4 Sep 99	Opción compra	95.50	94.69	0.22	0.28 %
10 largo	8 Mar 00	Opción venta	95.75	94.24	-0.85	0.31 %

Cuadro 6. Características de un portafolio del SFE del año 1999

Al final de cada día, se producen las matrices de riesgos del día siguiente, en este ejemplo, estas matrices son creadas por la casa de bolsa SFE (Sydney Futures Exchange, casa de bolsa Australiana) y la cámara de compensación. La cuota inicial en este ejemplo es C=$700.

A cada contrato se le asignan 16 valores, uno por cada escenario. Estos valores son las entradas de la matriz de riesgo y se calculan como se explicó en los dos ejemplos anteriores de futuros y opciones.

Nº	Escenario	Futuro	Opción compra	Opción compra	Opción compra	Opción venta
1	Precios futuros inalterados; volatilidad sube	0	-268	-360	-349	-370
2	Precios futuros inalterados; volatilidad baja	0	271	345	255	237
3	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	-233	-391	-470	-420	-192
4	Precios futuros sobre 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-233	135	245	232	458
5	Precios futuros por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	233	-156	-257	-283	-552
6	Precios futuros por debajo 1/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	233	375	424	273	13
7	Precios futuros sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	-466	-525	-588	-497	-17
8	Precios futuros sobre 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-466	-30	125	201	676
9	Precios futuros por debajo 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	466	-54	-162	-222	-736
10	Precios futuros por debajo 2/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	466	448	486	286	-211
11	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	-700	-669	-714	-579	153
12	Precios futuros sobre 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	-700	-220	- 14	161	891
13	Precios futuros por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad sube	700	37	-74	-166	-924
14	Precios futuros por debajo 3/3 del rango de variación del precio; volatilidad baja	700	496	532	295	-439
15	Futures up extreme , 3 veces el rango de variación del precio, con una cobertura del 30 %	-490	-340	-284	-153	390
16	Futures down extreme, 3 veces el rango de variación del precio, con una cobertura del 30 %	490	155	147	72	-434

Cuadro 7. Matriz de riesgo inicial

El próximo paso para determinar el margen de riesgo del portafolio, consiste en multiplicar el valor de riesgo de cada contrato por la cantidad de contratos que tiene la inversión;

posteriormente se suman estos resultados, obteniendo como resultado la última columna de la matriz de riesgo, que finalmente permitirá calcular el margen de riesgo.

Por ejemplo, para el escenario 1, el riesgo valor es de

$$6400 = 0 + 2680 + 14400 - 6980 - 3700.$$

Nº	(a) Futuro +20	(b) Opción a Compra -10	(c) Opción a Compra -40	(d) Opción a Compra +20	(e) Opción a Venta +10	Riesgo Valor (a)+(b)+(c) +(d)+ (e)
1	0	2680	14400	-6980	-3700	6400
2	0	-2710	-13800	5100	2370	-9040
3	-4660	3910	18800	-8400	-1920	7730
4	-4660	-1350	9800	4640	4580	-6590
5	4660	1560	10280	-5660	-5520	5320
6	4660	-3750	-16960	5460	130	-10460
7	-9320	5250	23520	-9940	-170	9340
8	-9320	300	-5000	4020	6760	-3240
9	9320	540	6480	-4440	7360	4540
10	9320	-4480	-19440	5720	2110	-10990
11	-14000	6690	28560	-11580	1530	11200
12	-14000	2200	560	3220	8910	890
13	14000	370	2960	-3320	-9240	4030
14	14000	4960	-21280	5900	-4390	-10730
15	-9800	3400	11360	-3060	3900	5800
16	9800	1550	-5880	1440	-4340	530

Cuadro 8. Matriz de riesgo.

Es importante señalar que en la metodología usada por SPAN, la pérdida máxima es el mayor valor positivo.

Finalmente, se concluye que el margen de riesgo para esta matriz de riesgo de futuros y opciones según el SPAN básico es

$$span = 11200.$$

3.1. SPAN Completo

El CME, diseño un SPAN más completo que incluye además del SPAN básico los siguientes dos parámetros:
RI= Riesgo inter-mensual.
CCP= Crédito por correlación entre productos.

El CME define al SPAN completo como:

SPAN= span + RI - CCP.

Ejemplo 3.4. Continuación del ejemplo 3.3. Como sabemos el margen de riesgo arrojado por el SPAN básico es span= \$11200. El SFE en juntas previas ha creado la siguiente matriz de niveles para ese portafolio:

Banco Bill SFE	Meses	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Nivel 1	1			
Nivel 2	2 a 3	\$250	\$125	
Nivel 3	4 a 8	\$325	\$225	\$125

Cuadro 10. Niveles del SFE

Observemos que en el *cuadro 6* se encuentran todos los contratos de un portafolio, cada uno con su fecha de expiración. Aplicando lo que se explicó en la sección 2.4 del capitulo 2, tenemos que:

$$\begin{aligned} RI_1 &= M_{22} * 15 \\ &= 125 * 15 \\ &= 1875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_2 &= M_{23} * 3 \\ &= 225 * 3 \\ &= 675. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI_3 &= M_{33} * 1 \\ &= \$125 * 1 \\ &= \$125. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RI &= \sum_{k=1}^{3} RI_k \\ &= 2675. \end{aligned}$$

Ya hemos calculado el SPAN básico y el riesgo inter-mensual. Como no se ha encontrado la correlación entre pares de productos que se necesita para el cálculo del CCP, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} SPAN &= 11200 + 2675 \\ &= 13875. \end{aligned}$$

En el ejemplo que se presentará a continuación se supone que ya se ha calculado la matriz de riesgo y se ha encontrado el riesgo valor de cada contrato. Es importante recordar, que el procedimiento que se utiliza para calcular el CCP es diferente para cada casa de bolsa.

Ejemplo 3.5. A continuación se presentan dos portafolios del Chicago Board of Trade, cada uno contiene 1 contrato. A cada portafolio se le ha calculado el SPAN básico. A estos portafolios se les va a calcular el crédito por correlación entre productos.
Los productos son los siguientes:
1.-*Harina de soya, con un un valor de riesgo de \$1650.*
2.- *Aceite de soya, con un valor de riesgo de \$2175.*

El CBT ha asignado un porcentaje del 70 % para la harina de soya y el aceite de soya, correspondiente a la correlación entre productos. Sea:
$CCP(a)$= *Crédito por correlación entre productos del aceite de soya.*
$CCP(h)$= *Crédito por correlación entre productos de la harina de soya.*

Luego el crédito por correlación entre productos de cada contrato es:

$$\begin{aligned} CCP(h) &= 1650 * 70\,\% \\ &= \$1155. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CCP(a) &= 2175 * 70\,\% \\ &= \$1523. \end{aligned}$$

Luego, se va restar al riesgo valor de cada contrato, el crédito por correlación entre productos que se le cálculo a cada producto, para obtener el margen de mantenimiento SPAN de cada contrato. Sea:

R_a = *Riesgo valor del aceite de soya.*

R_h = *Riesgo valor de la harina de soya.*

$SPAN_h$ = *SPAN de la harina de soya.*

$SPAN_a$= *SPAN del aceite de soya.*

$$\begin{aligned} SPAN_h &= 1650 - 1155 \\ &= 495. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SPAN_a &= 2175 - 1523 \\ &= 652. \end{aligned}$$

Finalmente se suman ambos márgenes y se encuentra el margen total por el crédito de correlación entre productos, que es el margen de mantenimiento final arrojado por el SPAN completo.

$$\begin{aligned} SPAN &= SPAN_h + SPAN_a \\ &= 495 + 652 \\ &= 1147. \end{aligned}$$

CAPíTULO 4

Aspectos Matemáticos del $SPAN$

Consideremos un modelo en el que X e Y representan pérdidas financieras y ρ una medida de riesgo.

Sea Ω es el espacio de resultados o espacio de posibles estados el cual se asume finito. Sea Γ el conjunto de todas las funciones a valores reales en Ω.

Los axiomas de coherencia, que se describieron en la sección 2 del Capítulo I, tienen la siguiente interpretación desde el punto de vista financiero.

Invarianza por traslaciones: $\forall$ X ϵ Γ y todo número real α

$$\rho(X+\alpha) = \rho(X) - \alpha.$$

La invarianza por traslaciones significa que la adición de la cantidad alfa del instrumento sin riesgo al portafolio X debería disminuir el margen de requerimiento en la misma cantidad. Visto de otra manera, si nuestra posición es complementada por una inversión sin riesgo, el riesgo disminuye en esa cantidad.

Del mismo modo, si $\alpha < 0$, se disminuye en esa cantidad la porción libre de riesgo del portafolio, por lo que se incrementa el margen de riesgo de manera proporcional.

Subaditividad: $\forall\, X_1,\, X_2 \,\epsilon\, \Gamma$

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

La subaditividad significa que la adición de dos portafolios X_1 y X_2 no debería dar lugar a una exigencia de margen más alta que la exigencia de margen añadida de los dos portafolios individuales.

Es decir, el riesgo global de un portafolio formado por dos o más activos es menor o igual a la suma de los riesgos individuales. Esta característica, usualmente formulada en términos de la noción de diversificación, expresa la idea de que invertir en una variedad de productos resulta menos riesgoso que invertir en un solo producto. Este principio es ampliamente aceptado.

Homogeneidad positiva: $\forall\ \lambda \geq 0$ y $\forall$ X $\epsilon\ \Gamma$

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X).$$

La homogeneidad positiva quiere decir que el riesgo de una posición varia proporcionalmente a la posición misma.

Monotonía no creciente: $\forall$ X, Y $\epsilon\ \Gamma$ con X $\leq$ Y

$$\rho(X) \geq \rho(Y).$$

La monotonía significa que si una posición es mejor que otra, el riesgo en la mejor es menor que el riesgo en la peor.

SPAN Básico como Medida Coherente de Riesgo

Una medida de riesgo que satisface los axiomas de invarianza por traslaciones, subaditividad , la homogeneidad positiva, y monotonía, es llamada ***coherente***.

En esta sección, demostraremos que el SPAN básico es una medida coherente de riesgo. Para esto daremos una interpretación matemática de los escenarios.

Consideremos los valores para cada escenario $Vp_1, Vp_2, ..., Vp_{16}$ a los cuales se les asocia un peso w_i, $w_i = 1$ para i=1,...,14, $w_{15} = 0{,}35 = w_{16}$.

Para cada $i = 1, ..., 16$, definimos

$$\delta_{X_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } w = X_i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde X_i representa la posible pérdida en el escenario i.

Sea p_i la medida de probabilidad, definida de la siguiente manera,

$$p_i \quad = \quad w_i \, \delta_{Vp_{(X_i)}} + (1 - w_i)\delta_0.$$

para $i = 1, ..., 16$.

Entonces el SPAN se puede escribir como:

$$span(X) = \sup\{E_{p_i}[X] | i = 1, .., 16\}.$$

Como por el teorema 1.38, el *span* es una medida basada en escenarios, entonces el span es una medida coherente de riesgo.

A continuación estudiaremos la coherencia del SPAN completo. Hemos definido el $SPAN$ como:

$$SPAN = span + RI - CCP.$$

Recordemos que RI denota el riesgo intermensual, que es añadido al margen y CCP denota el crédito por correlación entre productos. que se sustrae del margen total.

Verifiquemos las propiedades de coherencia del $SPAN$.

1. Invarianza por traslaciones

$$SPAN(X + \alpha) = span(X + \alpha) + RI(X + \alpha) - CCP(X + \alpha).$$

Por otra parte tenemos que el *span* satisface la propiedad de invarianza bajo traslaciones, entonces

$$span(X+\alpha) = span(X) - \alpha.$$

Por otra parte el RI y el CCP no dependen de la tasa de interés, ya que estos son cuotas que sirven para ajustar el margen de riesgo del portafolio, utilizando la correlación existente en los diversos contratos. Por lo tanto:

$$RI(X+\alpha) = RI(X)$$

$$CCP(X+\alpha) = CCP(X)$$

Luego,

$$\begin{aligned} SPAN(X+\alpha) &= span(X+\alpha) + RI(X+\alpha) - CCP(X+\alpha) \\ &= span(X) + RI(X) + CCP(X) - \alpha \\ &= SPAN(X) - \alpha, \end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la invarianza bajo traslación.

2. Subaditividad

$$SPAN(X_1+X_2) = span(X_1+X_2) + RI(X_1+X_2) - CCP(X_1+X_2).$$

Sabemos que el *span* satisface la propiedad de subaditividad, entonces

$$span(X_1+X_2) = span(X_1) + span(X_2).$$

El RI sólo se presenta cuando existe una relación mensual entre las posiciones y la fecha de vencimiento; y por lo tanto es necesario agregar una cuota. Si tenemos el riesgo intermensual de un portafolio X_1 y el riesgo intermensual de un portafolio X_2, la suma de los riesgos intermensuales de estos dos portafolios, siempre va ser mayor que el riesgo intermensual de X_1+X_2, esto es debido a que para este último portafolio, se crea una sola matriz de niveles, y para los portafolios por separados se crean dos matriz de niveles que deben ser usadas para el calculo del RI. El portafolio $RI(X_1 + X_2)$ sería siempre menor que el $RI(X_1) + RI(X_2)$, ya que para este último se relizarían casi los mismos cálculos que para $RI(X_1 + X_2)$ pero dos veces.

$$RI(X_1 + X_2) \leq RI(X_1) + RI(X_2). \tag{4.1}$$

Por otra parte, sabemos que el CCP se presenta sólo cuando existe una correlación entre pares de productos. El CCP sólo reducirá el *span*, nunca lo incrementará. Si X_1 no tiene ninguna compensación sobre las posiciones del subyacente X_2 y además cada portafolio en particular no tiene ningún producto correlacionado, tenemos que:

$$CCP(X_1) = 0, CCP(X_2) = 0.$$

Por lo tanto,

$$CCP(X_1 + X_2) \geq CCP(X_1) + CCP(X_2).$$

Entonces, por lo anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned} SPAN(X_1 + X_2) &= span(X_1 + X_2) + RI(X_1 + X_2) - CCP(X_1 + X_2) \\ &\leq span(X_1) + span(X_2) + RI(X_1) + RI(X_2) - CCP(X_1) - CCP(X_2) \\ &\leq SPAN(X_1) + SPAN(X_2), \end{aligned}$$

lo cual demuestra la subaditividad en este caso.

Sin embargo, si no ocurre (4.1), nos quedaría que,

$$CCP(X_1 + X_2) \leq CCP(X_1) + CCP(X_2), \tag{4.2}$$

por lo tanto la subaditividad no se cumple.

3. Homogeneidad Positiva

$$SPAN(\lambda X) = span(\lambda X) + RI(\lambda X) - CCP(\lambda X)$$

Sabemos que el *span* cumple con la propiedad de homogeneidad positiva, entonces

$$span(\lambda X) = \lambda span(X).$$

El $RI(\lambda$ X)= $\lambda RI(X)$, ya que si se multiplica un portafolio X por un valor λ, el valor de los niveles con el que ese calculan el RI también se va a multiplicar por λ, es decir, va a aumentar λ veces. Esto se debe a que para calcular los valores que se encuentran en la matriz de nivel, las casas de bolsas toman en cuenta la cantidad de contratos y el valor de cada uno.

El $CCP(\lambda X) = \lambda CCP(X)$, ya que si se multiplica un portafolio X por un valor λ, el valor de todos los contratos que se encuentran en el portafolio se van a multiplicar por λ y por tanto el riesgo estimado del portafolio va a aumentar λ veces. Esto se debe a que para calcular el CCP es necesario calcular la matriz de riesgo, y para ello se toma en cuenta la cantidad de contratos y el valor de cada uno.

$$\begin{aligned} SPAN(\lambda X) &= span(\lambda X) + RI(\lambda X) - CCP(\lambda X) \\ &= \lambda span(X) + \lambda RI(X) - \lambda CCP(X) \\ &= \lambda span(X) + RI(X) - CCP(X)) \\ &= \lambda SPAN(X), \end{aligned}$$

Se cumple la homogeneidad positiva.

4. Monotonía no creciente

Sabemos que el $SPAN = span + RI - CCP$ y que el *span* cumple con la monotonía no creciente, por ser una medida coherente de riesgo.

A continuación se muestra, utilizando los ejemplos 2.11 y 3.4, que RI no cumple con la propiedad de monotonía creciente.

Sean X e Y las posibles pérdidas financieras de dos portafolios, $X = \$11200$, $Y = \$43650$. Entonces, $Y > X$.

Al realizar los cálculos para obtener el riesgo intermensual tenemos que, $RI(X) = \$2675$ $RI(Y) = \$11100$, entonces $RI(Y) > RI(X)$.

En ambos portafolios no se obtuvo descuento por el ICC, debido a que no se encontró ninguna relación, entre los productos financieros que encuentran en cada portafolio. Por tal razón el $SPAN$ se definiría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} SPAN(X) &= span + RI \\ &= 11200 + 2675 \\ &= 13875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SPAN(Y) &= span + RI \\ &= 43650 + 11100 \\ &= 54750. \end{aligned}$$

Luego, el $SPAN(Y) > SPAN(X)$.

Por lo tanto el $SPAN$ no cumple con la propiedad de monotonía no creciente.

Finalmente, se concluye que el ***SPAN completo no es una medida coherente de riesgo.***

A pesar, de que el $SPAN$ completo no es una medida de riesgo coherente, cumple con dos de los axiomas de la coherencia que hacen del $SPAN$ completo un método bastante eficiente y utilizado por diversas casas de bolsa e instituciones financieras como es el caso de CME y la bolsa australiana (Sydney).

4.1 Otras medidas basadas en escenarios

Existen otros métodos basados en escenarios. Uno de estos métodos es el TIMS (Theorical Intermarket Margin System). El TIMS es un método originalmente desarrollado por el OCC (Options Clearing Corporation), es usado para el cálculo de margen de requerimientos, que comprende un margen inicial diario, con respecto al mercado, más un margen que permita cubrir el riesgo de un cambio adverso de precios (margen de riesgo). El TIMS organiza todas las clases de opciones y futuros relacionados con el mismo activo subyacente en la cartera y todos los grupos de contratos cuyo subyacente tienen estrecha correlación de precios.

El TIMS es una medida de análisis de riesgo basada en escenarios. Para la determinación del margen de riesgo el TIMS considera de 10 escenarios, los cuales representan las posibles bajas y alzas de los precios. Ninguna consideración hace acerca de la posibilidad de un cambio en la volatilidad.

El TIMS se puede definir como la máxima pérdida esperada en los 10 escenarios. Para estos diez escenarios de medida de probabilidad existen diferentes factores de riesgo que pueden afectar la inversión.

Otro método también basado en escenarios es el OMS II (Window method), fue desarrollado con el fin de manejar instrumentos de difícil manejo, como son los instrumentos derivados. El OMS II esta constituido por 93 escenarios en los cuales se calcula el peor de los casos; es decir, la mayor pérdida posible en la que pudiera incurrir el portafolio de inversión.

Se puede concluir que SPAN, el TIMS y el OMS II son medidas basadas en escenarios que representan la máxima pérdida esperada en n medidas de probabilidad.

Conclusiones

El CME ha creado dos versiones del SPAN, un SPAN básico que se definió como la máxima pérdida esperada para cada una de las 16 de medidas de probabilidad y un SPAN completo definido como la suma de el SPAN básico con el riesgo intermensual menos el crédito por correlación entre productos. El riesgo intermensual es una cuota que se le agrega al SPAN básico, para cubrir riesgos causados por las variaciones en los precios, durante los meses que se anticipan a la fecha de vencimiento de los contratos que se encuentran en el portafolio. El crédito por correlación entre productos, son deducciones que se le hacen al margen de riesgo del portafolio cuando existe una correlación entre los productos que se negocian.

Se demostró que el SPAN básico es coherente y que el SPAN completo no lo es; ya que no cumple el axioma de la monotonía no creciente, ni con la propiedad de subaditividad.

Se concluye que el SPAN básico es una medida basada en escenarios y se mostró la expresión explícita para esta familia de escenarios.

Es importante resaltar que el SPAN es un método de análisis de riesgo bastante complejo. Por tal razón para la implementación del software (SPAN), se debe conocer el funcionamiento del mismo con la finalidad de verificar si los margenes arrojados podrían evitar futuras pérdidas monetarias.

Con el avance de la ciencia y las diversas investigaciones matemáticas, se deberían crear métodos de análisis de riesgos más confiables, que permitan predecir crisis financieras tanto en las instituciones como en los mercados financieros.

Bibliografía

[1] ACERBI, C., NORDIO, C. AND C.SIRTORI, Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper (2001).

[2] BYLUND, MATTIAS, A Comparation of Margin Calculations Methods for Exchange Traded Contracts. Working paper (Febrero, 2002).

[3] CME, REVIEW OF STANDARD PORTFOLIO ANALYSIS OF RISK ("SPAN"). (Abril, 2001)

[4] D.CRUZ EVARISTO, Introducción a la Teoría de Riesgo, segunda edición. (Mayo, 2004). GLOBAL Ediciones

[5] D. VILLALBA VILÁ, Un modelo de selección de cartera con escenarios y función de riesgo asimétrica, *Revista de Financiación y contabilidad.* (Vol XXVII. nº96, Julio-Septiembre, 1996).

[6] GZYL HENRYK, Teorias Coherentes de Riesgo: Una Introducción al tema. *Universidad Simón Bolívar.* (Julio 2005).

[7] LAWRENCE J. GITMAN Y MICHAEL D. JOEHNK, Fundamentos de Inversión, quinta edición. OUP-Harla (1993).

[8] L.CEFERINO FRANCO Y L.EDUARDO FRANCO, El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo, *Revista de Ingenierías Universidad de Medellín. Enero - Junio 2005*

[9] LONDON SPAN, Margin Specification Changes, *Versión 1.0.* 10^{th} (March, 2001).

[10] LONDON SPAN, Parameter File Changes, *Versión 1.1.* 14^{th} (March, 2001).

[11] S. REVERRE, The complete Arbitarje Desk Book Explains, *Irwin library.* (2001).

[12] Taiwan futures exchange, Q & A on adoption SPAN. Margining System to end Trader. (october, 2008).

[13] Venegas Martínez F, Administración Coherente de Riesgo con Futuros del MexDer. (2005).www.mexder.com.mx/inter/info/mexder/avisos/AdministracionCoherente-de-Riesgos-con-Futuros-del-MexDer.pdf.

[14] Clearing Links, www.cme.com/clearing/rmspan/span/spanbrochure.html. (Consultado en Febrero, 2009)

[15] Risk Management/ CME SPAN, www.cmegroup.com/clearing/risk/management/span.html.Cme. (Consultado en febrero. 2008)

[16] Opciones Financieras- Introducción www.elprisma.com/apuntes/economia/opcionesfinancieras/default.asp. Citado el 20 de Diciembre del (2008)

[17] How Pricing of Derivatives is Done at NSE using Standard Portfolio Analysis of Risk (SPAN) Software Developed by Chicago Mercantile Exchange, www.geocities.com/kstability/content/derivatives/span.html. (Consultado en Febrero, 2009)

[18] Derivatives, www.inosanchez.com/files/mda/mdc/MDC08/MERCADO/DE/DERIVADOS.pdf. (Consultado en Octubre, 2008).

[19] Instrumentos financieros derivados, www.sentimientobursatil.com/varias/crash29.htm. (Artículo escrito por EJA, septiembre. 2002, consultado en Febrero, 2008).

[20] Futures and options www.variancefutures.com/commissions/marginsspan.php.(Consultado en abril, 2009)

[21] Chicago Board Options Exchange www.wjammer.com/jac/handbook/chapter11.pdf.html. (Consultado en Marzo, 2008)

[22] Yue- Kuen Kwok, Mathematical Models of Financial Derivatives. (Hong Kong. 1998). OUP-Harla.