



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Aplicación del Cálculo Estocástico al estudio de dos Modelos: La descarga de una neurona y La estructura temporal de las tasas de interés

Trabajo Especial de Grado presentado ante
la ilustre Universidad Central de Venezuela
por la **Br. Daniella C. Fuentes S.** para
optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. José Rafael León.

Caracas, Venezuela.
Febrero 2012.

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Aplicación del Cálculo Estocástico al estudio de dos Modelos: La descarga de una neurona y La estructura temporal de las tasas de interés**”, presentado por la **Br. Daniella C. Fuentes S.**, titular de la Cédula de Identidad **17.587.656**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. José Rafael León.
Tutor

Dra. Mairene Colina.
Jurado

Msc. José Benito Hernández.
Jurado

Dedicatoria.

A dos personas muy importantes:
Mi Tirikiti (Mi Papá Igor Iván) y Mi Oli (Mi Mami Ana).

A mis hermanos:
Igor E. Gabriella.

A mi ahijada:
Kamila Victoria.

Quienes me han acompañado en este largo camino y me han brindado
alegrías infinitas.

GRACIAS...

“ZUTTO ZUTTO SAGASHI TSUZU KETE”.

“No te rindas, sigue adelante”.

Anónimo.

Agradecimientos.

Hoy es el gran día de decirle a todos muchísimas *GRACIAS...*, entonces significa que he terminado mi gran proyecto, ése que comencé un lunes 25 de octubre de hace algunos años, cuantos no importa, en mi Gran **U.C.V.** cuando me abrió las puertas diciéndome que ya era formalmente parte de su comunidad y el día en que la **Facultad de Ciencias** me dijo bienvenida a la Casa que Vence las Sombras.

Tengo que agradecerle en primer lugar a Dios, La Virgen y Los Ángeles, ejes fundamentales en mi vida académica y personal, a quienes infinitamente les pedí para que este día llegara y me permitiera culminar por las puertas grandes de Aula Magna y bajo un techo espectacular como son las Nubes de Calder.

A mi Padres, Mi Tirikitiki, aunque no estés físicamente conmigo, el cielo está de fiesta y se que me acompañaste, y lo seguirás haciendo a pesar de que no te vea. Y a Ti, Mi Oli (mi Mamá) que eres mi ejemplo, mi fortaleza, esto también es parte de ti, lo logramos Doctorísima y podemos decir que es un Cálculo Estocástico o algo así por el estilo.¹

A mis hermanos Igor E. y Gaby, compañeros de risas, lágrimas, suspiros, anhelos, aunque no lo crean también fueron y son parte de esto y de lo que soy hoy y seré mañana. Hermanitos, los quiero y los espero pronto bajo el mismo techo pero cuando ustedes sean los protagonistas.

Mi Familia que estuvo conmigo, me acompañó, estudió conmigo aunque no supiera nada de lo que les decía, Muchas Gracias de forma especial a Mi tía Hilda, Mariselita, Isa, Maryangel, Guille, por supuesto no puedo dejar de nombrar a mi Kami y Alonso, disfrutemos juntos este gran logro.

A ti Ale, mi amigo, mi novio, aunque parezca mentira son años los que ya llevamos juntos de la mano, tú sabes cuanto he querido y luchado por esto y

¹“Hasta las Matemáticas tienen Esperanza...”

se cuanto me has ayudado y acompañado a lograrlo.

Mi Querido Tutor, Prof. José “Chichi” León, por darme la oportunidad de estar bajo su guía en la recta final de mi carrera, y por la paciencia tan grande para que este proyecto hoy saliera. Gracias Profe.

Maire, a ti también mil gracias, por toda tu gran y valiosa ayuda, esos consejos cuando iba casi llorando diciéndote que me iba, pero viste, lo logré me quedé y terminé. Tarde pero seguro, sin olvidar esas tarde en los Consejos a los que tengo mucho que agradecer, con los cuales también crecí.

Mi Escuela de Matemática, con las cuales compartí con Profesores de excelente calidad, profesores que se volvieron amigos, compañeros, y en algunos casos ni quería verlos, pero a ellos también tengo que agradecerles porque formaron parte de mi formación académica, en especial a Manuel Maia, Angel Padilla, Tomás Guardia, Francisco Tovar, Adriana Padrón, Jocer Franquiz, Jonnathan Otero, Imanol Ajuria, Cristina Balderrama, Mercedes Arriojas, Carmen Da Silva, José Benito Hernández, Inés Nuñez, Juan Guevara. Quisiera agradecer de manera especial a Giovanni Figueroa, Hugo Villaroel y Jesús Romero (Biología), porque creo que sin ustedes hoy no estuviese escribiendo estas páginas².

Mi Topo-Medida-Team, el Sr. Materano y el Sr. Zea, adivinen que: termine... y está listo. Ustedes fueron, son y seguirán siendo parte de mi y de éste trabajo, apureñense y los veo seguro en Julio. A mi Super TEM digo CEM, que fue testigo y parte de ésto, a mi Barrio Matemático, Mi Laboratorio de Geometría y por supuesto las tardes de nunca acabar y la mañanas largas en los Consejos. De manera especial a Grandes amigos; y como es un trabajo con fundamentos en probabilidades están siendo nombrados sin orden y sin repetición específica ni preferencial: Marwill Quintero, Gari Roa, Andreina Ron, Leo Prato, Gaby Márquez, María Montilla, Coraiza López, Sahid Leal, David “Chapy” Camacho, Delimar Pérez, Natasha Rodríguez, David Rondón, Linda Arvelo, Carlos Luis González y a todas y cada una de esas personas que formaron parte de mi gran libro de vida que me faltan por nombrar y otras que por una u otra razón ya no me acompañan.

A todos e^∞ *GRACIAS...*

²porque está permitido usar siempre las neuronas.

Índice general

Introducción.	viii
1. Cálculo Estocástico Básico.	1
1.1. Preliminares de Probabilidad.	1
1.2. Procesos Estocásticos.	4
1.3. Movimiento Browniano.	7
1.4. Esperanza Condicional.	12
1.4.1. Esperanza Condicional dada una σ -álgebra.	13
1.5. Martingala.	18
1.6. Integral Estocástica de Itô.	20
1.6.1. Procesos Simples.	21
1.6.2. Integral de Itô para procesos simples.g	22
2. Ecuaciones Diferenciales e Integrales Estocásticas.	27
2.1. Lema de Itô.	27
2.2. Integral de Stratonovich.	30
2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.	35
2.3.1. Ecuación Diferencial Determinista.	35
2.3.2. Ecuación Diferencial Estocástica de Itô.	36
2.4. Existencia y Unicidad de la Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica.	38
2.4.1. Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica de Itô.	48
3. Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.	55
3.1. Solución Numérica.	55
3.2. Aproximación por el Método de Euler.	56
3.3. Esquema de Aproximación de Milstein.	58

3.4. Modelo de Simulación para una Ecuación Diferencial Estocástica con Solución Analítica.	61
3.4.1. Método Numérico del Esquema de Euler.	64
3.4.2. Método Numérico del Esquema de Milstein.	65
3.5. Modelo Biológico.	70
3.6. Modelo Financiero.	78
Anexos.	85
Bibliografía.	94

Introducción.

En los últimos años los procesos estocásticos han tenido un gran auge pues han permitido interpretar, modelar y predecir una gran variedad de fenómenos físicos, biológicos, económicos, etc. Estos procesos caracterizan una sucesión de variables aleatorias que evolucionan en función de otra variable, generalmente el tiempo.

Los procesos estocásticos y más precisamente los procesos de difusión permiten ajustar modelos teóricos para realizar predicciones futuras, y debido a la complejidad de algunos de estos modelos se resuelven utilizando técnicas computacionales como lo son métodos numéricos o de simulación.

Este trabajo se centra en la simulación de dos modelos particulares de un proceso estocástico conocido como *Movimiento Browniano*, nombrado así en honor al botánico Robert Brown, en 1827, quién lo describe como un movimiento vigoroso que realizaban las partículas de polen suspendidas en el agua, de forma irregular y en algunos casos en forma de zigzag. Posteriormente, el Movimiento Browniano fue estudiado por Einstein en 1905 y Norbert Wiener entre 1920 y 1923, quién lo formaliza de manera precisa como un modelo matemático para las trayectorias de las partículas, hallando una función continua pero no diferenciable en ningún punto, definido de la siguiente forma:

“El Movimiento Browniano es un proceso estocástico gaussiano, centrado ($B(t), t > 0$) definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, el cual satisface ciertas condiciones.” (Ver capítulo 1).

Las trayectorias del Movimiento Browniano van a requerir de la construcción de una nueva herramienta matemática para su integración conocida como *integral estocástica*, la cual será fundamental para conocer la solución de la

ecuación diferencial estocástica como un proceso de difusión, y así encontrar la solución a nuestros dos modelos de estudio, los cuales son:

- *Modelo Biológico:* se quiere estudiar y simular la descarga neuronal. Las descargas ocurren, debido a que el cerebro contiene miles de millones de células nerviosas que se comunican entre sí mediante procesos químicos y físicos de forma específica. Existe una relación entre este proceso biológico y un proceso estocástico, que es conocido como modelo de difusión neuronal y se basa en un proceso estocástico bajo el Movimiento Browniano, conocido por *Ornstein-Uhlenbeck*, el cual describe una ecuación con media revertida de la siguiente forma (ver [2]):

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \gamma dB_t; \quad X_0 = x_0 > 0; \quad (1)$$

donde $a, b, \gamma > 0$ son constantes y B_t es un Movimiento Browniano.

- *Modelo Financiero:* se busca estudiar y simular la estructura temporal de las tasas de interés y la relación entre los rendimientos de los valores o bonos y su plazo de vencimiento. Obteniendo de este como se pueden predecir los cambios en las variables que afectan la curva de rendimiento. Al igual que en el caso anterior existe una relación entre éste modelo y un proceso estocástico. El mismo es conocido como Cox-Ingersoll-Ross o (modelo CIR), introducido en 1985 por John C. Cox, Jonathan E Ingersoll y Stephen A. Ross. El modelo viene descrito mediante la siguiente ecuación estocástica (ver [1]):

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \gamma\sqrt{X_t} \vee 0 dB_t; \quad X_0 = x_0 > 0; \quad (2)$$

donde $a, b, \gamma > 0$ son constantes y B_t es un Movimiento Browniano.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1, se introducen los conceptos básicos de probabilidades y del *cálculo estocástico básico* (*Movimiento Browniano* y sus propiedades).

En el capítulo 2, mostramos el *cálculo diferencial e integral estocástico* para lo cual nos valemos de la analogía estocástica de la regla de la cadena clásica, conocida como *lema de Itô*.

Finalmente, en el capítulo 3 se busca la solución numérica de la integral estocástica mediante los *métodos de aproximación de Euler y Milstein* resaltando sus diferencias y conveniencias, y utilizarlos posteriormente en las ecuaciones (1) y (2) y así observar como varían las soluciones aproximadas a medida que varían los parámetros.

Capítulo 1

Cálculo Estocástico Básico.

En este capítulo se darán algunos conceptos básicos de probabilidades que nos servirán a lo largo de todo este trabajo, También se introducirán nuevos conceptos entre ellos el Movimiento Browniano, sus propiedades y además se estudiará el comportamiento de las trayectorias de éste proceso y se hará una representación gráfica de las mismas.

1.1. Preliminares de Probabilidad.

Definición 1.1 Una σ -álgebra \mathfrak{F} , sobre Ω , es una colección de subconjuntos de Ω , que satisface las siguientes condiciones:

- $\emptyset \in \mathfrak{F}$.
- Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $A^c \in \mathfrak{F}$.
- Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathfrak{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Se conoce como espacio medible al par (Ω, \mathfrak{F}) .

Definición 1.2 Una **medida de probabilidad** \mathbb{P} sobre un espacio medible (Ω, \mathfrak{F}) es una función definida en \mathfrak{F} como:

$$\mathbb{P} : \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1],$$

tal que:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(A) \geq 0; \forall A \in \mathfrak{F}$.
- \mathbb{P} es σ -aditiva, es decir, si $\{A_n\}_{n \geq 1}$ es una colección de elementos de \mathfrak{F} disjunta 2 – 2 entonces:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

Se conoce como espacio de probabilidad a la terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$.

Definición 1.3 Sea $X : (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ una función medible, se dice que X es una **variable aleatoria real** (v.a. real), si para todo $A \subseteq B(\mathbb{R})$, se tiene que $X^{-1}(A) \subseteq \mathfrak{F}$.

Definición 1.4 Un **vector aleatorio** es un vector $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es una variable aleatoria definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$; y se interpreta $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ como una función medible.

Definición 1.5 A cada variable aleatoria X se le asocia una función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F_X(t) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\}) = P(X \leq t),$$

y satisface:

- Continua a la derecha.
- Monótona creciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

Ahora bien, si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio la **función de distribución** está definida por:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}) \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 1.6 Sea $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función a valores reales, f_X es una **función de densidad** si satisface las siguientes condiciones:

- $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

- $f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

En particular, si la función de distribución tiene densidad f_X entonces,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n,$$

Definición 1.7 Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio, la **esperanza de X** está definida como:

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]).$$

Usualmente se denota por: $\mathbb{E}[X] = \vec{\mu}_X$.

Definición 1.8 Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio, la **matriz de covarianza de X** está definida como:

$$\Sigma = \Sigma_X = (\text{cov}(X_i, X_j), \text{con } i, j = 1, \dots, n),$$

donde,

$$\text{cov}(X_i, X_i) = \mathbb{E}[X_i X_i] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \text{Var}(X_i).$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].$$

pero en el caso de que X, Y sean independientes la $\text{cov}(X, Y)$ es nula. También Σ_X se puede obtener como:

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])^T], \\ (X - \mathbb{E}[X]) &= (X_1 - \mathbb{E}[X_1], X_2 - \mathbb{E}[X_2], \dots, x_n - \mathbb{E}[X_n]). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.1 Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ es un vector aleatorio tal que su densidad f_X verifica que:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}((X-\bar{\mu})\Sigma^{-1}(X-\bar{\mu})')},$$

donde: $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ es la función de media de X , y Σ es una matriz $n \times n$ definida como la función de covarianza de X y $(X - \bar{\mu})'$ es la transpuesta de $(X - \bar{\mu})$, así llamamos X **vector gaussiano**.

Además podemos decir que $X \sim N(\bar{\mu}, \Sigma)$.

Definición 1.9 Sean x_1, \dots, x_n variables aleatorias, son **independientes** si para toda colección de índices $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$, con $1 \leq n$ entero, y todo subconjunto $B_1, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{X_1 \in B_1\} \cap \{X_2 \in B_2\} \cap \dots \cap \{X_n \in B_n\}) = \\ \mathbb{P}(\{X_1 \in B_1\})\mathbb{P}(\{X_2 \in B_2\})\dots\mathbb{P}(\{X_n \in B_n\}), \end{aligned}$$

donde B_1, \dots, B_n son Borelianos.

Observación 1.1

Las variables aleatorias x_1, \dots, x_n son independientes si y sólo si su función de distribución conjunta puede escribirse como:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\dots F_{X_n}(x_n).$$

Sea $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatorio con densidad f_X entonces x_1, \dots, x_n son independientes si y sólo si

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_n}(x_n).$$

1.2. Procesos Estocásticos.

A continuación se considerarán los procesos estocásticos. Estos procesos se pueden entender como los procesos dependientes de leyes causales y probabilísticas, por lo que están sometidos al azar y son objeto de análisis estadístico. Este tipo de procesos nos servirán para poder comprender la correlación, la cual se entiende estadísticamente como la relación entre varios datos.

Definición 1.10 Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}} = \{X(t, \omega) : t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, donde \mathcal{T} es un espacio de parámetros. Ahora bien la aplicación

$$\omega \longrightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega,$$

es una variable aleatoria para cada $t \in [0, \mathcal{T}]$ y para cada $\omega \in \Omega$ la aplicación

$$t \longrightarrow X_t(\omega),$$

recibe el nombre de **trayectoria del proceso**.

En la siguiente gráfica (Figura 1.1) se muestra un ejemplo de las trayectorias un proceso estocástico, donde cada color corresponde a una trayectoria del mismo.

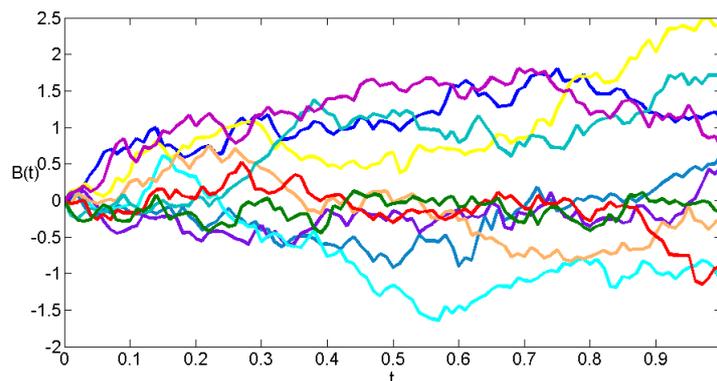


Figura 1.1: Trayectorias del proceso estocástico, con $N = 100$.

Observación 1.2

El índice t es frecuentemente interpretado como el tiempo y $X_t(\omega)$ como los estados del proceso en el tiempo. Además si \mathcal{T} es numerable el proceso se llama **a tiempo discreto**; en otro caso se llama **a tiempo continuo**.

Definición 1.11 Sea $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico, se dice que el proceso $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ tiene **distribución finito dimensional** F si cada vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \subseteq \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ tiene distribución F .

Ejemplo 1.2 Sea $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico, se dice que $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es **gaussiano** si sus distribuciones finito dimensionales son gaussianas, es decir, cada vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ tiene densidad gaussiana o normal; donde la distribución de un proceso gaussiano está determinado por su función de media y covarianza.

Definición 1.12 Si $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso estocástico entonces:

i. La función $\mu_X : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t),$$

es la **Función de Esperanza** asociada a un proceso estocástico.

ii. La función $C_X : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$C_X(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t),$$

es la llamada **Función de Covarianza**.

En particular, cuando $t = s$ tenemos la función $\sigma_X : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\sigma_X(t) = \text{cov}(X_t, X_t) = \text{Var}(X_t),$$

que no es más que la **Varianza de X**.

Definición 1.13 Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es **estacionario**, si sus características no cambian en el transcurso del tiempo, es decir, si para cualquier colección $\{t_i\}_{i=1}^n$ en \mathcal{T} , se verifica que:

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}),$$

siempre que h sea tal que $\{t_{i+h}\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$.

Observación 1.3

Cuando X es un proceso gaussiano la definición de estacionaridad ocurre si y sólo si

$$\mu_X(t) = \mu_X(t + h),$$

y

$$C_X(t, s) = C_X(t + h, s + h),$$

mejor aún, la definición de estacionaridad en los procesos gaussianos es equivalente a lo siguiente: μ_X es una función constante y $C_X(t, s) = \tilde{C}(|t - s|)$ para cualquier función \tilde{C} de una variable.

Definición 1.14 Si $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso estocástico. Para cualquier colección $\{t_i\}_{i=1}^n$ de elementos de \mathcal{T} llamamos a la colección de variables aleatorias

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

Incrementos de X asociados a la colección $\{t_i\}_{i=1}^n$.

Definición 1.15 Sea X un proceso estocástico decimos que:

i. X tiene incrementos independientes cuando:

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

es una colección de variables aleatorias independientes.

ii. X tiene incrementos estacionarios si para cualquier t y s en \mathcal{T} se cumple que:

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

siempre que h sea tal que $t+h$ y $s+h$ estén en \mathcal{T} .

Definición 1.16 Sean $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ y $Y = \{Y_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ dos procesos estocásticos definidos bajo el mismo espacio de probabilidad. Decimos que X e Y son **independientes** si para cualquier par de colección $\{X_{t_i}\}_{i=1}^n$ y $\{Y_{s_j}\}_{j=1}^m$ de variables aleatorias en X e Y respectivamente se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n, Y_{s_1} \in C_1, \dots, Y_{s_m} \in C_m) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n) \mathbb{P}(Y_{s_1} \in C_1, \dots, Y_{s_m} \in C_m), \end{aligned}$$

donde $A_1, \dots, A_n, C_1, \dots, C_m$ son Borelianos.

1.3. Movimiento Browniano.

Definición 1.17 Un proceso $\mathcal{B} = \{B_t : t \in [0, \infty)\}$ es llamado **Movimiento Browniano (M.B.)** o **Proceso de Wiener** si satisface las siguientes condiciones:

i. $B_0 = 0$.

ii. \mathcal{B} es un proceso de incrementos independientes y estacionarios, es decir, para cualquier colección t_1, t_2, \dots, t_n de elementos de \mathcal{T} .

$$B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}},$$

son variables independientes y para cada t y s en \mathcal{T} .

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t+h} - B_{s+h},$$

donde h es tal que $t+h$ y $s+h$ están en \mathcal{T} .

iii. Para cada $t \in \mathcal{T}$ $B_t \sim N(0, t)$.

iv. Las trayectorias de \mathcal{B} son funciones continuas.

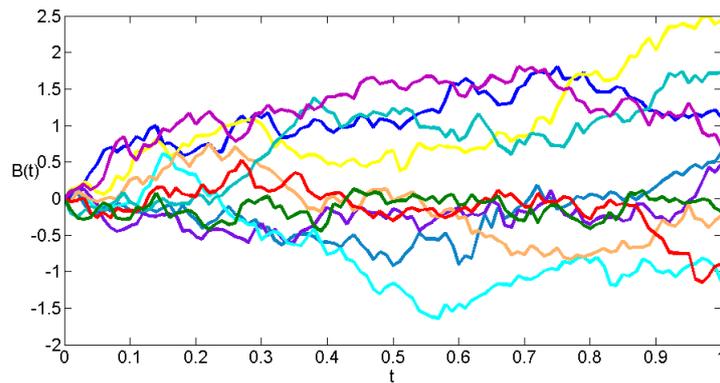


Figura 1.2: Trayectorias del Movimiento Browniano, con $N = 100$.

Propiedades del Movimiento Browniano.

i. El Movimiento Browniano es un proceso gaussiano.

En efecto, sean t_1, \dots, t_n elementos de \mathcal{T} y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números reales cualquiera, y consideremos la variable aleatoria

$$\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_n B_{t_n} = (\lambda_1 - \lambda_2) B_{t_1} + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) B_{t_{n-1}} + \lambda_n B_{t_n} \quad (1.1)$$

con $\lambda_i = \sum_{j=i}^n \alpha_j$

Ahora bien, veamos que esta combinación lineal es una variable aleatoria normal.

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2)B_{t_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)B_{t_2} + \dots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)B_{t_n} \\ &= \lambda_1 B_{t_1} + \lambda_2 (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + \lambda_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

Por otra parte aplicando las propiedades (ii.) y (iii.) del M.B. que nos garantizan que sus incrementos son independientes y que B_t es una variable aleatoria $N \sim (0, t)$ para cada $t \in \mathcal{T}$, obtenemos

$$\lambda_1 B_{t_1} + \lambda_2 (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + \lambda_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

es una variable aleatoria normal. Finalmente sustituyendo (1.2) en (1.1) conseguimos que:

$$\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_n B_{t_n},$$

es normal y esto garantiza que B_{t_1}, \dots, B_{t_n} tiene distribución gaussiana.

- ii. Los incrementos son normales, si t y s son reales cualesquiera en \mathcal{T} tales que $s < t$ porque

$$B_t - B_s \stackrel{d}{=} B_{t-s} - B_0 = B_{t-s} \sim N(0, t-s).$$

- iii. Para cada t y s en \mathcal{T} se puede ver que la $cov(B_t, B_s) = \min(s, t)$.
En efecto, supongamos $s < t$, por definición

$$\begin{aligned} cov(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] - \mathbb{E}[B_t] \mathbb{E}[B_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s] \\ &= \mathbb{E}[B_t B_s - B_s^2 + B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s + B_s^2]. \end{aligned}$$

Luego aplicando la linealidad de la esperanza se tiene que

$$= \mathbb{E}[(B_t - B_s) B_s] + \mathbb{E}[B_s^2].$$

Dado que $B_t - B_s$ y B_s son independientes, se sigue que

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[B_t - B_s] \mathbb{E}[B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= 0 + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= Var(B_s) = s. \end{aligned}$$

Así

$$\text{cov}(B_t, B_s) = s = \text{mín}(s, t).$$

El caso $t < s$ es análogo.

- iv. Para cada $t \in \mathcal{T}$. La función de media del M.B. $B = \{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ está dada por:

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[B_t] = 0.$$

Observación 1.4

De acuerdo con las propiedades (iii.) y (iv.) del Movimiento Browniano se tiene una definición equivalente para el mismo; dada por

Definición 1.18 Un Movimiento Browniano es un proceso gaussiano con trayectorias continuas tal que:

$$\mu_B(t) = \mathbb{E}[B_t] = 0.$$

La **función de media de** $B = \{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$.

$$C_B(t, s) = \text{cov}(B_t, B_s) = \text{mín}(s, t).$$

La **función de covarianza de** $B = \{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$.

Definición 1.19 Sean a y b en \mathbb{R} con $a < b$ y sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es tal que:

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(a_{i-1})| < \infty,$$

donde τ son las posibles particiones del intervalo $[a, b]$ entonces decimos que f es de **variación acotada**.

Observación 1.5

- i. Las trayectorias del (M.B.) son continuas, sin embargo no son diferenciables en ningún punto. Aunque se puede demostrar que es posible construir la derivada de un Movimiento Browniano como proceso estocástico generalizado, dicho proceso será un proceso gaussiano, centrado y con varianza infinita e independiente en diferentes instantes de tiempo.
- ii. Las trayectorias del (M.B.) no tienen variación acotada sobre cualquier intervalo finito de \mathcal{T} , es decir,

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)| = \infty,$$

donde τ son las posibles particiones del intervalo $[0, \mathcal{T}]$.

Ejemplo 1.3 Sea $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un Movimiento Browniano.

1. Sea $\mathcal{T} = [0, 1]$ y $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido por:

$$X_t = B_t - tB_1.$$

Es conocido como **Puente Browniano**.

2. Sea $\mathcal{T} = [0, \infty]$ y $Y = \{Y_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido por:

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t.$$

Es conocido como **Movimiento Browniano con deriva μ** .

3. Sea $\mathcal{T} = [0, \infty]$ y $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido por:

$$Z_t = e^{\mu t + \sigma B_t}. \tag{1.3}$$

para $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Es conocido como **Movimiento Browniano geométrico**.

Se pueden ver que los procesos anteriores son gaussianos a excepción del proceso $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ que no lo es.

Definición 1.20 Sea $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico, el proceso X es **H-Autosimilar** si para algún $H > 0$ y cualquier colección de índices t_1, t_2, \dots, t_n de \mathcal{T} se cumple que:

$$(T^H X_{t_1}, \dots, T^H X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, \dots, X_{Tt_n}),$$

para cualquier $T > 0$ tal que t_1, \dots, Tt_n son elementos de \mathcal{T} .

1.4. Esperanza Condicional.

Definición 1.21 Si X e Y son v.a discretas, la **probabilidad condicional de X dado $Y = y$** , se define para todo y con $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ como:

$$\mathbb{P}(X = x|Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}. \quad (1.4)$$

La función de distribución condicional de X dado $Y = y$ está definida por:

$$F(x|y) = \mathbb{P}(X \leq x|Y = y), \quad (1.5)$$

y la esperanza condicional de X dado que $Y = y$ se define como:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x|Y = y). \quad (1.6)$$

Definición 1.22 Si X e Y tienen función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$, la **función de densidad condicional de X dado $Y = y$** , está definida para todos los y con $f_Y(y) > 0$ por:

$$f_{X|Y}(x|y) = f(x, y)f_Y(y), \quad (1.7)$$

donde $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$ es la **función de densidad marginal de Y** .

La **función de distribución condicional de X , dado $Y = y$** , está definida por:

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(x|y)dx, \quad (1.8)$$

La **esperanza condicional de X dado $Y = y$** , está dada por:

$$\mathbb{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx, \quad (1.9)$$

Definición 1.23 Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ y sea $B \subset \mathfrak{F}$ con $\mathbb{P}(B) > 0$. La **esperanza condicional de X dado B** se define por:

$$\mathbb{E}[X|B] = \frac{\mathbb{E}[X1_B]}{\mathbb{P}(B)}, \quad (1.10)$$

donde,

$$\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in B. \\ 0 & \text{si } \omega \in B^c. \end{cases}$$

denota la función indicatriz de B .

Definición 1.24 Sean X e Y variables aleatorias sobre Ω , donde $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$ tal que,

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (Y = y_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \end{aligned}$$

Definimos esperanza condicional de X dado Y como una variable aleatoria

$$\phi := \mathbb{E}[X|Y] : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \mathbb{1}_{A_i}(\omega).$$

1.4.1. Esperanza Condicional dada una σ -álgebra.

En lo que sigue se podrá definir la esperanza condicional $\mathbb{E}[X|G]$ donde G es una sub-álgebra de \mathfrak{F} y \mathfrak{F} es una σ -álgebra sobre Ω . En particular cuando $G = \sigma(Y)$ para una v.a Y cualquiera, se tiene que:

$$\mathbb{E}[X | G] = \mathbb{E}[X | \sigma(Y)],$$

donde usualmente se denota $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)] = \mathbb{E}[X | Y]$, y $\sigma(Y) = \{Y \in A : A \in B(\mathbb{R})\}$.

Definición 1.25 Una variable aleatoria $Z = \mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]$, es llamada **esperanza condicional de X dada la σ -álgebra \mathfrak{F}** si:

- i. Z está contenida en \mathfrak{F} , es decir, $\sigma(Z) \subset \mathfrak{F}$.

ii. Z satisface la relación $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$ para todo $A \in \mathfrak{F}$.

Ejemplo 1.4 (Esperanza condicional bajo una condición discreta).

Sea Y una variable aleatoria discreta. Definamos los subconjuntos $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$, que constituyen una partición disjunta de Ω . Cada elemento A de $\sigma(Y)$ es de la forma

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \cap A = \bigcup_{i \in I} \{\omega : Y(\omega) = y_i\} \quad I \subset \mathbb{N}.$$

En la definición (1.24) se expresa $\mathbb{E}[X|Y]$ como la variable aleatoria Z tal que

$$Z(\omega) = \mathbb{E}[X|A_i], \quad \omega \in A_i.$$

Z es una función de Y y no de X , por tanto $\sigma(Z) \subset \sigma(Y)$, además, como $\mathbb{E}[X] < \infty$ y utilizando el teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}] &= \mathbb{E}\left[X \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i}\right] \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A]. \end{aligned}$$

Por otra parte, vemos que Z es una variable aleatoria discreta con esperanza

$$\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X|A_i]\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[X\mathbb{1}_{A_i}].$$

Así Z satisface la relación que define (1.25). Por lo tanto es la esperanza condicional de X dada la σ -álgebra $\sigma(Y)$. Es decir que en el caso de una variable aleatoria discreta Y , se tiene que $\mathbb{E}[X|Y]$ y $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ representan la misma variable aleatoria.

Observación 1.6

Una característica importante de la esperanza condicional es que si $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, entonces $\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]$ existe.

Propiedades de la Esperanza Condicional:

Sean X_1, X_2 en $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ variables aleatorias y sea G una σ -álgebra de \mathfrak{F} se tiene que:

i. La esperanza condicional es lineal:

$$\mathbb{E}[\alpha X_1 + \beta X_2 | \mathfrak{F}] = \alpha \mathbb{E}[X_1 | \mathfrak{F}] + \beta \mathbb{E}[X_2 | \mathfrak{F}].$$

con α, β en \mathbb{R} .

Para demostrar esta propiedad basta utilizar la definición (1.25) y considerar $Z = \alpha X_1 + \beta X_2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z | \mathfrak{F}] \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_A] \quad A \in \mathfrak{F} \\ &= \mathbb{E}[\alpha X_1 \mathbb{1}_A + \beta X_2 \mathbb{1}_A] \\ &= \alpha \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_A] + \beta \mathbb{E}[X_2 \mathbb{1}_A] \\ &= \alpha \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1 | \mathfrak{F}] \mathbb{1}_A] + \beta \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_2 | \mathfrak{F}] \mathbb{1}_A] \\ &= \alpha \mathbb{E}[X_1 | \mathfrak{F}] + \beta \mathbb{E}[X_2 | \mathfrak{F}]. \end{aligned}$$

ii. La esperanza de X y $\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}]$, (tomando $A = \Omega$),

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}]],$$

debido a que,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}] \mathbb{1}_\Omega] \\ &= \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\Omega] \\ &= \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

iii. Si la σ -álgebra, generada por la variable aleatoria X , está contenida en \mathfrak{F} entonces,

$$\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}] = X.$$

En particular, si X es una función de Y , $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$ entonces $\mathbb{E}[X | Y] = X$.

La información que está contenida en \mathfrak{F} proporciona información acerca de la variable aleatoria X . Ahora bien, si se conoce la estructura de X se puede considerar como no-aleatoria y se puede escribir el valor de $X(\omega)$ en frente de la esperanza condicional $\mathbb{E}[1 | \mathfrak{F}] = 1$.

$$\mathbb{E}[X | \mathfrak{F}](\omega) = \mathbb{E}[X(\omega) | \mathfrak{F}] = X(\omega) \mathbb{E}[1 | \mathfrak{F}] = X(\omega),$$

iv. Si X y la σ -álgebra \mathfrak{F} son independientes, entonces $\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathbb{E}[X]$.

Se sabe que si X e Y son variables aleatorias independientes entonces $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$.

Formalmente se puede decir que las variables aleatorias X y $\mathbb{1}_A$ son independientes para todo $A \in \mathfrak{F}$. Ahora bien, por la independencia se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] \\ &= \mathbb{E}[X]\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[\mathbb{1}_A], \quad A \in \mathfrak{F}.\end{aligned}$$

v. Si la σ -álgebra $\sigma(X)$ generada por la variable aleatoria X , está contenida en \mathfrak{F} , entonces para cualquier variable aleatoria G

$$\mathbb{E}[XG|\mathfrak{F}] = X\mathbb{E}[G|\mathfrak{F}].$$

En particular, si X es una función de Y , tal que $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$, entonces $\mathbb{E}[XG|Y] = X\mathbb{E}[G|Y]$, donde se está tomando a X como una constante.

vi. Si \mathfrak{F} y \mathfrak{F}' son dos σ -álgebras tales que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$, entonces

$$\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']|\mathfrak{F}] \tag{1.11}$$

$$\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']|\mathfrak{F}']. \tag{1.12}$$

Para demostrar (1.11) vamos a considerar $A \in \mathfrak{F}$ y $Z = \mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]$.

Luego por la propiedad de la definición (1.25) se tiene que $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Z\mathbb{1}_A]$, utilizando la propiedad (v.) y por hipótesis se tiene que $A \in \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ entonces

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']|\mathfrak{F}]\mathbb{1}_A = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']\mathbb{1}_A|\mathbb{F}].$$

Aplicando la propiedad (ii.) se tiene que:

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']\right]\right)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}[X\mathbb{1}_A].$$

Por lo que $Z' = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}']\right]\mathbb{1}_A$ satisface la definición (1.25), dado que $\mathbb{E}[X|\mathbb{F}]$ es única entonces se tiene que $Z = Z'$. Así queda demostrada la ecuación (1.11).

Veamos ahora la ecuación (1.12), para esto basta considerar la propiedad (iii.), dado que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ y que $\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]$ no contiene más información que \mathfrak{F}' , es decir, que se puede considerar a $\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]$ como una constante entonces:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathfrak{F}'|\mathfrak{F}]] = \mathbb{E}[X|\mathfrak{F}]\mathbb{E}[1|\mathfrak{F}'] = \mathbb{E}[X|\mathfrak{F}].$$

Ejemplo 1.5 Sea $\{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un M.B y sea $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ su **Filtración Natural**, es decir, para cada $t \in \mathcal{T}$ $\mathfrak{F}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$. Si s y t son elementos de \mathcal{T} se cumple que $\mathbb{E}[B_s | \mathfrak{F}_t] = B_{\min(s,t)}$. En efecto

1. Si $s < t$

$$\mathbb{E}[B_s|\mathfrak{F}_t] = B_s \quad \text{o} \quad B_{\min(s,t)},$$

2. Si $s > t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s|\mathfrak{F}_t] &= \mathbb{E}[B_s + B_t - B_t|\mathfrak{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_s - B_t|\mathfrak{F}_t] + \mathbb{E}[B_t|\mathfrak{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[B_s - B_t] + \mathbb{E}[B_t|\mathfrak{F}_t] \\ &= B_t. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6 Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un proceso estocástico tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i - X_{i-1}$ representa: La ganancia neta de un jugador en el instante de tiempo i . Sea $\{\mathfrak{F}_i\}_{i-1}$ una filtración con respecto a la cual X_i es adaptado, donde \mathfrak{F}_i representa: La información que posee el jugador en el instante de tiempo i . Entonces, si

$$\mathbb{E}[X_i - X_{i-1}|\mathfrak{F}_{i-1}] = 0,$$

estamos hablando “probabilísticamente” de un “juego justo”.

Observación 1.7

En el caso particular asociado al ejemplo 1.6, se puede observar una propiedad que se demostrará en la siguiente sección, que se conoce con el nombre de **Propiedad de Martingala**. Además

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_i - X_{i-1} | \mathfrak{F}_{i-1}] = 0 &\iff \\ \mathbb{E}[X_i | \mathfrak{F}_{i-1}] - \mathbb{E}[X_{i-1} | \mathfrak{F}_i] = 0 &\iff \\ \mathbb{E}[X_i | \mathfrak{F}_{i-1}] - X_{i-1} = 0 &\iff \\ \mathbb{E}[X_i | \mathfrak{F}_{i-1}] = X_{i-1}, \quad \mathbb{E}[|X|] < \infty. \end{aligned}$$

1.5. Martingala.

Para definir las martingalas se debe introducir la idea de filtración.

Supongamos que $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ es una colección de σ -álgebras sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ tales que $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F} \quad \forall n$.

Definición 1.26 La colección $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ de sub- σ -álgebras de \mathfrak{F} tales que $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}_{n+1} \quad \forall n \geq 0$ es llamada una **filtración**, en el caso continuo

$$\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}.$$

Si $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{F} \quad \forall t \in \mathcal{T}$ y $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t \quad \forall 0 \leq s \leq t$.

Definición 1.27 Diremos que el proceso estocástico $X = \{X_n, n \geq 0\}$ es **adaptado a la filtración** $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 0}$ si

$$\sigma(X_n) \subseteq \mathfrak{F}_n \quad \forall n \geq 0,$$

Para el caso continuo se tiene que $\sigma(X_t) \subseteq \mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}$.

Definición 1.28 La filtración natural del proceso es la generada por el mismo y ésta es definida como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_n &= \sigma(X_m, m \leq n), \\ (\mathfrak{F}_t &= \sigma(X_s, s \leq t)). \end{aligned}$$

Sea $X = \{X_n, n \geq 0\}$ un proceso estocástico sobre (Ω, \mathfrak{F}) y supongamos que se tiene información de \mathfrak{F}_n a tiempo presente ¿cómo influye esta información acerca del proceso X en el futuro?

Esta información se obtiene con $\mathbb{E}[X_n | \mathfrak{F}_m]$, para el caso continuo se tiene $\mathbb{E}[X_t | \mathfrak{F}_s]$.

Definición 1.29 Sea $X = \{X_t, t \in \mathcal{T}\}$ un proceso estocástico, X es llamado una **martingala a tiempo continuo** (discreto $X = \{X_n, n \geq 0\}$) respecto a la filtración $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ ($\{\mathfrak{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$), si:

i. X es integrable, es decir,

$$\mathbb{E}[|X_t|] < \infty \quad \forall t \in \mathcal{T}, \quad \left(\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \right).$$

ii. X es \mathfrak{F}_t (\mathfrak{F}_n)-medible.

X es adaptado a su filtración, es decir,

$$\{X_s\}_{s \in \mathcal{T}} \text{ es adaptado a } \{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}} \quad \left(\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ es adaptado a } \{\mathfrak{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

iii.

$$\mathbb{E}[X_t | \mathfrak{F}_s] = X_s, \quad \forall s \leq t, \quad \left(\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathfrak{F}_n] = X_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \right).$$

Observación 1.8

Una propiedad importante de las martingalas es la siguiente.

La función esperanza de una martingala es constante, debido a que, para cualquier par s y t en \mathcal{T} con $s < t$ se verifica lo siguiente:

$$\mathbb{E}[X_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t | \mathfrak{F}_s]] = \mathbb{E}[X_t].$$

Ejemplo 1.7 Sea $\{B_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ un Movimiento Browniano entonces el proceso $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ definido por:

$$X_t = B_t^2 - t,$$

es una martingala con respecto a la filtración natural del M.B. con $s < t$.

Demostración 1.1

Veamos que se cumplen las propiedades de la definición (1.29).

i. $\mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[|B_t^2 - t|] \leq \mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[t] = t + t = 2t < \infty.$

ii. Se cumple por la definición (1.27), por lo tanto, $B_s \subset \mathfrak{F}_t$ entonces $\sigma(B_s) \subset \mathfrak{F}_t$ y por lo tanto es medible.

iii. $\mathbb{E}[X_t|\mathfrak{F}_s] = X_s^2.$

En efecto, en primer lugar se tiene que $\mathbb{E}[X_t|\mathfrak{F}_s] = \mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathfrak{F}_s].$ Y consideremos

$$\begin{aligned} B_t^2 - t &= (B_t - B_s + B_s)^2 - t = (B_t - B_s)^2 + 2(B_t - B_s)B_s + B_s^2 - t \\ \mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathfrak{F}_s] + 2\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s|\mathfrak{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2|\mathfrak{F}_s] - \mathbb{E}[t]. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $(B_t - B_s)$ es independiente de B_s y además $(B_t - B_s)$ es independiente de \mathfrak{F}_s , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 - t|\mathfrak{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + 2B_s\mathbb{E}[(B_t - B_s)] + B_s^2 - t \\ &= (t - s) + B_s^2 + 0 - t = B_s^2 - s = X_s. \end{aligned}$$

1.6. Integral Estocástica de Itô.

La integral estocástica surge de la necesidad de resolver determinados problemas, en los que aparecen implicados ciertos procesos estocásticos, como el Movimiento Browniano; por ejemplo el cálculo de integrales del tipo

$$\int_0^t f(s, \omega) dB_s(\omega). \quad (1.13)$$

El hecho de que las trayectorias del Movimiento Browniano no sean diferenciables, ni de variación acotada, impide integrar en el sentido de Riemann-Stieltjes o Lebesgue-Stieltjes. Ya que, para cada $\omega \in \Omega$ no se puede definir (1.13) como una integral de Lebesgue-Stieltjes, debido a que $B_s(\omega)$ no es una función de Stieltjes, esto ocurre del hecho de que el *M.B.* tiene variación no acotada. Así surge la necesidad de crear una nueva integral, que en casos de regularidad del integrando sí coincidirá con la integral de Riemann-Stieltjes.

Observación 1.9

Sea $\{\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, X\}$ una colección de variables aleatorias decimos que X_n convergen en L^2 a X ($X_n \xrightarrow{L^2} X$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

1.6.1. Procesos Simples.

Sea $X = \{X_t\}_{t \in [0, \mathcal{T}]}$ un proceso estocástico, se conoce como proceso simple aquel donde existe una partición tal que, la trayectoria que se considere de cada $\omega \in \Omega$ es una función simple adaptado a la σ -álgebra natural del M.B.

Definición 1.30 Un proceso $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_t\}_{t \in [0, \mathcal{T}]}$ es **simple** si existe una partición $\mathcal{T}_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \mathcal{T}$ y una sucesión finita de variables aleatorias $\{z_k, k = 1, \dots, n\}$ tales que:

$$\mathcal{C}_t = \sum_{k=1}^n z_k \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k]}(t) + z_n \delta_{\mathcal{T}}(t),$$

y la sucesión $\{z_k\}_{k=1}^n$ es adaptada a la filtración $\mathfrak{F}_{t_k} = \sigma\{B_{t_j} : 0 \leq t_j \leq t_k\}$, $\mathbb{E}[z_k^2] < \infty \forall k$ y

$$\delta_{\mathcal{T}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = \mathcal{T}. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos a continuación una representación gráfica de un proceso simple adaptado a una trayectoria del Movimiento Browniano, donde se puede apreciar que de color azul la trayectoria y de color verde el proceso simple, para un intervalo $[0, 1]$ con $N = 100$.

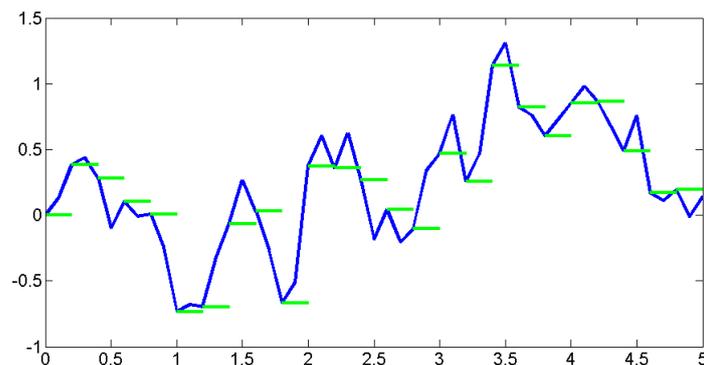


Figura 1.3: Proceso Simple, según el Mov. Browniano, con $N = 100$.

1.6.2. Integral de Itô para procesos simples.g

Definición 1.31 La *integral estocástica de Itô* para un proceso simple \mathcal{C} sobre $[0, \mathcal{T}]$ se define por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{C}) &= \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{C}_s dB_s \\ &= \sum_{k=1}^n z_{k-1} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^n z_{k-1} \Delta_k B. \end{aligned}$$

Por otro lado, si se tiene que $[0, t] \subseteq [0, \mathcal{T}]$, tal que $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $\mathcal{I}_t(\mathcal{C})$ está definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t(\mathcal{C}) &= \int_0^t \mathcal{C}_s \mathbb{1}_{[0, t]} dB_s \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} z_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + z_{t_k} (B_t - B_{t_{k-1}}). \end{aligned}$$

Observación 1.10

1. Cuando a todos los elementos del espacio muestral se le asigna la misma trayectoria el proceso estocástico, se denomina **proceso constante**.
2. Se conoce como **función determinística** cuando la función no depende de los elementos del espacio muestral.

Propiedades de la integral estocástica de Itô.

1. El proceso de Itô es una Martingala.
Veamos que se cumplen las tres propiedades.

a. $\mathbb{E}[|\mathcal{I}_t(\mathcal{C})|] < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathcal{I}_t(\mathcal{C})|] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{k-1} z_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + z_{t_k}(B_t - B_{t_{k-1}})\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k-1} |z_{i-1}\Delta_{t_i} B| + |z_{t_k}(B_t - B_{t_{k-1}})|\right] \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} [\mathbb{E}[|z_{i-1}\Delta_{t_i} B|] + \mathbb{E}[|z_{t_k}(B_t - B_{t_{k-1}})|]] < \infty. \end{aligned}$$

b. $\mathcal{I}_t(\mathcal{C})$ es \mathfrak{F}_t -medible.

Es directo de la definición.

c. Para cada par t y s en $[0, \mathcal{T}]$ con $s \leq t$ se cumple que

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}_t(\mathcal{C})|\mathfrak{F}_s] = \mathcal{I}_s(\mathcal{C}).$$

Sea $0 = t_0 < \dots < t_n = \mathcal{T}$ una partición de $[0, \mathcal{T}]$; $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t(\mathcal{C}) &= \sum_{i=1}^n z_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \mathcal{I}_{t_{k-1}}(\mathcal{C}) + z_{t_k}(B_{t_s} - B_{t_{k-1}}) + z_{t_k}(B_t - B_s). \end{aligned}$$

Por otro parte se tiene que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) &= \sum_{i=1}^{k-1} z_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + z_{t_k}(B_{t_s} - B_{t_{k-1}}) + z_{t_k}(B_t - B_s) \\ &= \mathcal{I}_s(\mathcal{C}) + z_{t_k}(B_t - B_s) = \mathcal{I}_s. \quad (l.q.q.d.) \end{aligned}$$

2. $\mathbb{E}[\mathcal{I}_t(\mathcal{C})] = 0$.

Es una consecuencia directa de la definición.

3. $\mathcal{I}_t(\mathcal{C})$ satisface la propiedad de isometría.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{C}_s dB_s\right)^2\right] = \int_0^t \mathbb{E}[\mathcal{C}_s^2] ds,$$

para todo $t \in [0, \mathcal{T}]$.

Demostración 1.2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t C_s dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n z_{t_{k-1}}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_{t_{k-1}} z_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[z_{t_{k-1}} z_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right].
\end{aligned}$$

Consideremos $\mathbb{E}[z_{t_{k-1}} z_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})]$ y observemos qué ocurre.

Sea $\sigma_j = \sigma\{B_{t_i}, t_i < t_j\}$.

Supongamos $k < j$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[z_{t_{k-1}} z_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \sigma_j]\right]. \quad (1.14)$$

Por la independencia de $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})$ con respecto a σ_j y la medibilidad de las otras variables aleatorias respecto a esta σ -álgebra se tiene que

$$(1.14) = \mathbb{E}[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \mathbb{E}[z_{t_{k-1}} z_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] = 0.$$

Caso $j < k$ es análogo.

Si $k = j$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \mathcal{C}_s dB_s \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^n z_{t_{k-1}}^2 (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[z_{t_{k-1}}^2 (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[z_{t_{k-1}}^2 \right] \mathbb{E} \left[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[z_{t_{k-1}}^2 \right] (t_k - t_{k-1}) \\
&= \int_0^t \mathcal{C}_s^2 ds.
\end{aligned}$$

La integral de Itô es lineal, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos procesos simples, entonces

$$\int_0^t (\alpha \mathcal{C}_1 + \beta \mathcal{C}_2) dB_s = \alpha \int_0^t \mathcal{C}_1 dB_s + \beta \int_0^t \mathcal{C}_2 dB_s.$$

4. Las trayectorias de $\mathcal{I}_t(\mathcal{C})$ son continuas.

Demostración 1.3

Sea $\mathcal{L}_2[0, \mathcal{T}]$ el espacio de todos los procesos medibles.

$$\Phi = \{ \mathcal{C}(t, \omega) : t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega \} = \{ \mathcal{C}_t(\omega) \}_{t \in \mathbb{R}_+},$$

adaptados a la filtración

$$\sigma_t = \sigma \{ B_s : s \leq t \},$$

tales que

$$\| \mathcal{C} \|_{2, \mathcal{T}}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{C}_s^2(\omega) ds \right] < \infty,$$

la métrica asociada a este espacio es

$$\| \mathcal{C} \|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\| \mathcal{C} \|_{2, \mathcal{T}}^2 \wedge 1).$$

Este espacio es completo respecto a esta norma, es decir, es Banach. Se denotará por \mathcal{L}_0 al espacio vectorial de las funciones simples. Se puede ver que $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_2$ y las funciones simples son densas en \mathcal{L}_2 . Esto significa que existe una sucesión de procesos simples

$$\mathcal{C}_n(t) = \sum_{k=1}^n z_{t_{k-1}} \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k]}(t) \quad z_{t_{k-1}} \in \sigma_{k-1},$$

tales que \mathcal{C}_n converge a \mathcal{C} para $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_2[0, \mathcal{T}]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{\mathcal{T}} (\mathcal{C}_n(t) - \mathcal{C}(t))^2 dt \right] \xrightarrow{\rightarrow \infty} 0.$$

Así definimos para $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_2[0, \mathcal{T}]$

$$\int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{C}(s) dB_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{C}_n(s) dB_s.$$

Observación 1.11

La integral para funciones de $\mathcal{L}_2[0, \mathcal{T}]$ satisface las propiedades de la integral para las funciones simples, además lo anterior se justifica que está bien definido, ya que existe $\int_0^{\mathcal{T}} \mathcal{C}_n(s) dB_s$ que es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}_2[0, \mathcal{T}]$.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales e Integrales Estocásticas.

En este Capítulo se presentará la analogía estocástica de la regla de la cadena clásica, conocida como lema de Itô, también se realizará la construcción de la integral de Stratonovich y se introducirán las ecuaciones diferenciales estocásticas.

2.1. Lema de Itô.

El lema de Itô permite realizar una analogía de la regla clásica de la cadena de diferenciación que se conoce, a la diferenciación estocástica, es decir,

$$[f(g(s))] = f'(g(s))g'(s),$$

donde f, g funciones diferenciables.

La forma integral de esta regla de la cadena se expresa a través del teorema fundamental del cálculo como,

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))g'(s)ds = \int_0^t f'(g(s))dg(s),$$

y lo que se quiere realizar es un reemplazo de la función $g(t)$ por un Movimiento Browniano $B_t, t \geq 0$.

Enunciemos formalmente el lema de Itô.

Lema 2.1 Sea f una función de clase \mathcal{C}^2 , entonces

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(B_x)d_x, \quad (2.1)$$

donde (2.1) se conoce como **fórmula de Itô**.

Demostración 2.1

Supongamos sin pérdida de generalidad que $s = 0$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ una partición de $[0, t]$. Como $f \in \mathcal{C}^2$, entonces f'' es continua; luego haciendo el desarrollo de Taylor de orden 2 entorno al punto a tal que $a \in [0, t]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(B_{t_i}) &= f(a) + f'(a)(B_{t_i} - a) + \frac{f''(a)}{2}(B_{t_i} - a)^2, \\ f(B_{t_{i+1}}) &= f(a) + f'(a)(B_{t_{i+1}} - a) + \frac{f''(a)}{2}(B_{t_{i+1}} - a)^2. \end{aligned}$$

Observe que, se tiene una serie telescópica.

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i})].$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i}) &= f'(a)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2} [(B_{t_{i+1}} - a)^2 - (B_{t_i} - a)^2] \\ &= f'(a)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2} [B_{t_{i+1}}^2 - 2aB_{t_{i+1}} + a^2 - B_{t_i}^2 + 2aB_{t_i} - a^2] \\ &= f'(a)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2} [B_{t_{i+1}}^2 - 2aB_{t_{i+1}} - B_{t_i}^2 + 2aB_{t_i}]. \end{aligned}$$

Considerando $a = B_{t_i}$, se obtiene

$$f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i}) = f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(B_{t_i})}{2} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2]. \quad (2.2)$$

Así,

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2} f''(B_{t_i}) [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2].$$

Por otro lado, veamos que $(dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 = dt$.

Sea $\sigma_t = \sigma\{(B_{t+dt} - B_t)\}_{t \in [0, t]}$, la σ -álgebra que hace a $(B_t + dt - B_t)$ medible.

Luego aplicando las propiedades de la esperanza condicional.

$$\begin{aligned}
 (B_{t+dt} - B_t)^2 &= \mathbb{E}[(B_{t+dt} - B_t)^2 | \sigma_t] \\
 &= \mathbb{E}[B_{t+dt}^2 | \sigma_t] - 2\mathbb{E}[B_{t+dt}B_t | \sigma_t] + \mathbb{E}[B_t^2 | \sigma_t] \\
 &= \mathbb{E}[B_{t+dt}^2] - 2\mathbb{E}[B_{t+dt}B_t] + \mathbb{E}[B_t^2] \\
 &= t + dt + 2((t + dt) \wedge t) + t \\
 &= t + dt - 2t + t = dt.
 \end{aligned}$$

Luego tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la ecuación (2.2), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) &\longrightarrow \int_0^t f'(B_s)dB_s, \\
 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} f''(B_{t_i})[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] &\longrightarrow \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds.$$

Lema 2.2 (Extensión I).

Sea $f(t, x)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas, entonces

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_1(x, B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x, B_x) dB_x, \quad s < t,$$

Veamos a continuación el enunciado de otra extensión general del lema de Itô.

Consideremos un proceso de la forma $f(t, X_t)$, donde X está dado por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t A_s^{(1)} ds + \int_0^t A_s^{(2)} dB_s, \quad (2.3)$$

y ambas, $A_s^{(1)}$ y $A_s^{(2)}$ están adaptadas al Movimiento Browniano, donde se puede asumir que están bien definidas las integrales de Riemann e Itô, respectivamente.

El proceso (2.3), es conocido como **Proceso de Itô**.

Lema 2.3 (*Extensión II*).

Sea X un proceso de Itô y $f(t, x)$ una función cuyas derivadas parciales de segundo orden son continuas, entonces

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(s, X_s) &= \int_s^t \left[f_1(y, X_y) + A_y^{(1)} f_2(y, X_y) + \frac{1}{2} (A_y^{(2)})^2 f_{22}(y, X_y) \right] dy \\ &+ \int_s^t A_y^{(2)} f_2(y, X_y) dB_y, \quad s < t. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. Integral de Stratonovich.

Existen una gran variedad de integrales estocásticas, una de ellas ya se estudió, que fue la integral estocástica de Itô, y en esta sección se va a estudiar un nuevo método para la resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô, que es llamado **cálculo de Stratonovich**.

La idea principal en la integral de Itô fue la aproximación de $\mathcal{I}_t(C)$ por las sumas de Riemann-Stieltjes de la forma:

$$\mathcal{I}_t(C) = \sum_{i=1}^{k-1} C_{t_{i-1}} \Delta_i B + C_{t_{k-1}} (B_t - B_{t_{k-1}}) \quad \text{para } t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad (2.5)$$

para particiones $\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \mathcal{T}$, tal que $\|\tau_n\| = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$.

Sea $\mathcal{B} = (B_t, t \geq 0)$ un *M.B.* y sea $\mathcal{C} = (C_t, t \in [0, \mathcal{T}])$ un proceso integrable dado por

$$C_t = f(B_t),$$

con $t \in [0, \mathcal{T}]$, y f una función dos veces diferenciable en $[0, \mathcal{T}]$. Definiendo la suma de Riemann-Stieltjes como:

$$\tilde{\mathcal{S}}_n = \sum_{i=1}^n f(B_{y_i}) \Delta_i B,$$

donde $y_i = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$, $i = 1, \dots, n$, en este caso se tiene que $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{S}}_n^2] < \infty$.

Se puede demostrar que el límite de media cuadrática de la suma de Riemann-Stieltjes (2.2) existe si $\|\tau_n\| \rightarrow 0$.

Definición 2.1 Se define la *integral estocástica de Stratonovich* de $f(B)$, para B Movimiento Browniano, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{T}}(f(B)) &= \int_0^{\mathcal{T}} f(B_s) \circ dB_s \quad t \in [0, \mathcal{T}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{S}}_n. \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación diferencial de Itô, se considerará una transformación de la fórmula, que relaciona la integral de Itô y la de Stratonovich con el mismo proceso $f(B)$ de integración.

Supongamos que

$$\int_0^{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(f(B_t))^2] dt < \infty, \quad y \quad \int_0^{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(f'(B_t))^2] dt < \infty. \quad (2.6)$$

Veamos que se verifica el desarrollo de Taylor,

$$f(B_{y_i}) = f(B_{t_{i-1}}) + f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}}) + \dots$$

donde se puede despreciar los términos de altos orden. Entonces un aproximado de la suma de Riemann-Stieltjes de $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}(f(B))$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n f(B_{y_i})\Delta_i B &= \sum_{i=1}^n f(B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \dots \\
&= \sum_{i=1}^n f(B_{t_{i-1}})\Delta_i B + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})^2 + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}})(B_{y_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{y_i}) + \dots \\
&= \tilde{\mathcal{S}}_{n^1} + \tilde{\mathcal{S}}_{n^2} + \tilde{\mathcal{S}}_{n^3} + \dots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por la definición de la integral de Itô $\tilde{\mathcal{S}}_{n^1}$ tiene límite de media cuadrática $\int_0^{\mathcal{T}} f(B_s)dB_s$. Una aplicación de la condición (2.6) muestra que $\tilde{\mathcal{S}}_{n^3}$ tiene límite de media cuadrática cero, por los incrementos y que $\tilde{\mathcal{S}}_{n^2} \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} f'(B_t)dt$ en media cuadrática.

Combinando las convergencias en media cuadrática de $\tilde{\mathcal{S}}_{n^i}$, para $i = 1, 2, 3$; se obtiene finalmente (2.7).

Definición 2.2 *Supongamos f una función tal que satisface (2.6). Entonces se verifica la fórmula de transformación.*

$$\int_0^{\mathcal{T}} f(B_t) \circ dB_t = \int_0^{\mathcal{T}} f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} f'(B_t)dt. \tag{2.8}$$

De esta manera se obtiene que $(\mathcal{S}_t(f(B)), t \in [0, \mathcal{T}])$ no es una martingala; esto se puede comprobar a través de la esperanza.

Ahora tomando en particular la función $f(t) = g'(t)$. Una aplicación del lema de Itô, para $Y_t = g(B_t)$.

Donde la aplicación del lema es: “Sea f dos veces continuamente diferenciable, la fórmula:”

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(B_x)dx, \quad s < t,$$

entonces aplicando el lema se obtiene:

$$\begin{aligned}
g(B_{\mathcal{T}}) - g(B_0) &= \int_0^{\mathcal{T}} g'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} g''(B_s)ds \\
&= \int_0^{\mathcal{T}} f(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} f'(B_s)ds,
\end{aligned}$$

por otra parte, se tiene que:

$$\int_0^{\mathcal{T}} g'(B_s) \circ dB_s = \int_0^{\mathcal{T}} f(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} f'(B_s) ds.$$

Por lo tanto, se tiene que la integral estocástica de Stratonovich satisface la regla de la cadena clásica, es decir:

$$\int_0^{\mathcal{T}} g'(B_s) \circ dB_s = g(B_{\mathcal{T}}) - g(B_0). \quad (2.9)$$

Observación 2.1

De la afirmación anterior (2.9) la integral estocástica de Stratonovich no es la integral clásica, es decir, la integral de Riemann. Lo que se obtuvo fue una estructura similar que corresponde a la regla de la cadena.

Ejemplo 2.1

Supongamos:

a. Sea $g(t) = t^2$. Entonces $g'(t) = 2t$, de (2.9) se obtiene que:

$$\int_0^{\mathcal{T}} B_t \circ dB_t = \frac{1}{2} B_{\mathcal{T}}^2 - \frac{1}{2} B_0^2 = \frac{1}{2} B_{\mathcal{T}}^2.$$

b. Sea $g(t) = e^t$. Entonces $g'(t) = e^t$, de (2.9) se tiene que:

$$\int_0^{\mathcal{T}} B_t \circ dB_t = e^{B_{\mathcal{T}}} - e^{B_0} = e^{B_{\mathcal{T}}} - 1.$$

*Concluimos de la última relación que el proceso $X_t = e^{B_t}$, $t \in [0, \mathcal{T}]$ es la que se conoce como la **Exponencial de Stratonovich**.*

Veamos ahora la fórmula de la integral estocástica de Stratonovich de forma más general.

Sea $\mathcal{C} = f(B)$ un proceso integrable tal que:

$$\mathcal{C}_t = f(0, X_t), \quad t \in [0, \mathcal{T}], \quad (2.10)$$

donde $f(t, x)$ es una función con derivadas parciales continuas de segundo orden.

El proceso X supone un proceso de Itô dado por la ecuación diferencial estocástica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(r, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s,$$

donde las funciones $a(t, x)$ y $b(t, x)$ satisfacen la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Pero para funciones de la forma (2.10) no es tan sencillo dar una extensión de la integral. Una posible forma puede ser mediante la integral de Riemann-Stieltjes dada por:

$$\tilde{\mathcal{S}}_n = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}, \frac{1}{2}(X_{t_{i-1}} + X_{t_i}))\Delta_i B,$$

luego la media del límite $\int_0^{\mathcal{T}} f(t, X_t)dB$ de estas sumas de Riemann-Stieltjes existe si

$$\int_0^{\mathcal{T}} \mathbb{E}[f(t, X_t)]^2 dt < \infty.$$

Entonces se puede demostrar que esta definición coincide con que $f(t, x) = f(x)$, $X = B$.

Por otro lado, si asumimos que $f = f(t, x)$ y $X = B$, entonces la fórmula de transformación se da por:

$$\int_0^{\mathcal{T}} f(t, X_t) \circ dB_t = \int_0^{\mathcal{T}} f(t, X_t)dB_t + \frac{1}{2} \int_0^{\mathcal{T}} b(t, X_t) f_2(t, X_t) dt,$$

donde $f_2(t, x)$ es la derivada parcial de f con respecto a x .

Ahora bien, se pueden definir varias integrables estocásticas diferentes, es decir, para cada $p \in [0, 1]$, se tiene una partición $\tau_n = \{t_i\}_{i=1} \subset [0, \mathcal{T}]$ y un proceso $\mathcal{C} = \{C_t\}_{t \in [0, \mathcal{T}]}$ adaptado al $M.B$.

Se puede definir la suma de Riemann-Stieltjes como:

$$\tilde{\mathcal{S}}_{n(p)} = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_{y_i(p)} \Delta_i B,$$

donde $y_i(p) = t_{i-1} + p(t_i - t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$.

2.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

La Ecuación Diferencial Estocástica (E.D.E) puede ser entendida como una Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O), que en términos estocásticos es conocida como **Ecuación Diferencial Determinista**, la cual es perturbada por un ruido aleatorio.

Se introducirá la Ecuación Diferencial Estocástica de Itô, su explicación y soluciones. Se darán las condiciones de existencia y unicidad de la solución de la Ecuación Estocástica de Itô.

Denotaremos por \mathfrak{F}_t , $0 \leq t \leq \mathcal{T}$ a la σ -álgebra natural con respecto a las variables $X_t(s)$ para $s \leq t$ y por $\mathcal{L}^2 [0, \mathcal{T}]$ al espacio de todos los procesos medibles adaptados a $\{B_s; s \leq t\}$, para $s, t \in [0, \mathcal{T}]$.

2.3.1. Ecuación Diferencial Determinista.

Algunos aspectos importantes de una ecuación diferencial ordinaria que hay que resaltar son:

1. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son funciones, ellas describen la ecuación o la dinámica de un proceso de la vida real a lo largo de un período de tiempo.
2. En orden de obtener una única solución, es que se tiene que conocer la condición inicial $x(0) = x_0$. Si esta solución $x(t)$ comienza a partir del punto x_0 en el momento $t = 0$, es decir, la función $x(t)$ es completamente determinable en el futuro, lo que es equivalente a decir, para $t > 0$.
3. Las soluciones explícitas de las ecuaciones diferenciales son excepciones de la regla. En general, se tiene que contar con las soluciones numéricas para las ecuaciones diferenciales.
4. Integrando ambos lados de la ecuación diferencial

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (2.11)$$

para una función $a(t, x)$; se obtiene una ecuación integral equivalente:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s, x(s)) ds.$$

Aunque esta ecuación transformada en general puede resolver ecuaciones como: $\frac{dx}{a_2(x)} = a_1(t)dt$, la cual proviene de una separación de variables. Esto permite dar una idea de como se puede definir una ecuación diferencial estocástica como una ecuación integral estocástica.

2.3.2. Ecuación Diferencial Estocástica de Itô.

Definición 2.3 Definimos la **Ecuación Diferencial Aleatoria** como:

$$dX_t = a(t, X_t)dt, \quad X_0(\omega) = Y(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

donde a es una función continua; X_t es un proceso estocástico donde $t \in [0, \mathcal{T}]$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^+$ y $Y(\omega)$ es una variable aleatoria.

La solución de éstas ecuaciones se obtiene utilizando las técnicas conocidas de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

La principal diferencia con una E.D.O., es el término aleatorio, el cual es introducido en la condición inicial, y por esta razón las ecuaciones diferenciales deterministas pueden considerarse aleatorias al perturbar su condición inicial.

Definición 2.4 Definimos la **Ecuación Diferencial Estocástica (E.D.E.)** a las expresiones de la forma:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \\ X_0(\omega) &= Y(\omega), \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $B = \{B_t, t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano; a y b son funciones continuas.

El proceso X_t se dice solución de la ecuación diferencial estocástica sobre $[0, \mathcal{T}]$ si cumple las siguientes condiciones:

1. X_t, B_t son \mathfrak{F}_t -medible y $(B_{t+s} - B_t)$ es independiente de \mathfrak{F}_t .
2. $a(t, X_t), b(t, X_t) \in \mathcal{L}^2[0, \mathcal{T}]$.

Por lo tanto, la solución X_t , si existe, es entonces un proceso estocástico.

Una posible interpretación de la ecuación (2.12) es la transformación de $dX_t = X_{t+dt} - X_t$, el cual es causado por una variación del tiempo dt , con un factor $a(t, X_t)$ combinado con un cambio $dB_t = B_{t+dt} - B_t$ del Movimiento Browniano, con respecto a al factor $b(t, X_t)$, es decir,

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \\ X_{t+dt} - X_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)(B_{t+dt} - B_t) \\ X_t - X_0 &= \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq \mathcal{T}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la ecuación (2.12), se puede representar de la siguiente forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad 0 \leq t \leq \mathcal{T}, \quad (2.13)$$

donde la primera integral del lado derecho es la integral de Riemann y la segunda es la integral estocástica de Itô. La ecuación (2.13) es conocida como la **Ecuación Diferencial Estocástica de Itô**.

Para las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas se han encontrado dos tipos de soluciones, las cuales son conocidas como soluciones fuertes y débiles.

Definición 2.5 Una **Solución Fuerte** de una E.D.E. de Itô (2.13) es un proceso estocástico, $X = (X_t, t \in [0, \mathcal{T}])$, el cual satisface las siguientes condiciones:

- i. X_t y B_t son medibles respecto a $\mathfrak{F} = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ y $(B_{t+s} - B_s)$ es independiente de \mathfrak{F}_t
- ii. Las integrales en (2.13) están bien definidas como Riemann o integrales estocásticas de Itô respectivamente.

iii. X es una función de la trayectoria del Movimiento Browniano y de las funciones coeficientes $a(t, x)$ y $b(t, x)$.

Definición 2.6 Las **Soluciones Débiles** de X son suficientes si el objetivo es determinar las características de la distribución de X como las funciones de esperanza, varianza y covarianza del proceso.

Una solución fuerte o débil de X de la E.D.E. de Itô (2.13) es conocida como **difusión**. En particular, se considera $a(t, x) = 0$ y $b(t, x) = 1$ en (2.13) obteniendo:

$$X_t = X_0 + \int_0^t dB_s, \quad 0 \leq t \leq \mathcal{T},$$

y así el Movimiento Browniano es un proceso de difusión.

Observación 2.2 En lo que sigue, se considerará únicamente la solución fuerte de la E.D.E. de Itô.

2.4. Existencia y Unicidad de la Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica.

Definición 2.7 Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de Ω definimos:

$$\limsup_{n \geq 1} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n,$$

donde

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \forall k \geq 1,$$

esto es

$$\forall k \exists n_0 \geq k \text{ tal que } x \in A_{n_0}.$$

Lema 2.4 (Borel - Cantelli.)

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ entonces $\mathbb{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 0$.

Demostración 2.2

Por la definición de sub- σ -aditividad, se tiene que si \mathbb{P} es una medida en (Ω, \mathfrak{F}) , entonces para toda sucesión de subconjuntos $A_n \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Por hipótesis, se tiene que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \quad \text{entonces} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \longrightarrow 0 \quad \text{con} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Luego,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \geq 1} A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Lema 2.5 Sean $\varphi(t)$ y $\alpha(t)$ funciones medibles y acotadas tal que para alguna constante $\lambda > 0$

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \lambda \int_0^t \varphi(s) ds,$$

entonces,

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \alpha(s) ds. \quad (2.14)$$

Demostración 2.3

Denotemos $\psi(t)$ el lado derecho de la ecuación (2.14), es decir,

$$\psi(t) = \alpha(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \alpha(s) ds, \quad \psi(0) = \alpha(0). \quad (2.15)$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \alpha'(t) + \lambda\alpha(t) + \lambda^2 \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\alpha(s)ds \\ &= \alpha'(t) + \lambda\psi(t),\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\psi'(t) - \lambda\psi(t) = \alpha'(t).$$

Multipliquemos convenientemente por la expresión $e^{\lambda(t-s)}$.

$$\begin{aligned}e^{\lambda(t-s)}\psi(t) - \lambda e^{\lambda(t-s)}\psi(t) &= e^{\lambda(t-s)}\alpha'(t) \\ e^{\lambda(t-s)}\psi(t) - \psi'(0) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\alpha(s)ds \\ &= \alpha(s)e^{\lambda s}\Big|_0^t + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\alpha(s)ds \\ &= \alpha(s) + \lambda e^{-\lambda t} - \alpha(0) + \lambda \int_0^t e^{\lambda s}\alpha(s)ds.\end{aligned}$$

Recordemos que,

$$\psi(t) = \alpha(t) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\alpha(s)ds.$$

Denotemos,

$$\Delta(t) = \psi(t) - \varphi(t),$$

entonces,

$$\begin{aligned}\Delta(t) &\geq \alpha(t) + \lambda \int_0^t \psi(s)ds - \left(\alpha(t) + \int_0^t \varphi(s)ds\right) \\ &= \lambda \int_0^t (\psi(s) - \varphi(s))ds \\ &= \lambda \int_0^t \Delta(s)ds \geq \lambda^2 \int_0^t \int_0^s \Delta(u)duds.\end{aligned}$$

Utilizando Fubini, se tiene,

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 \int_0^t \int_u^t \Delta(s) ds du \\
&= \lambda^2 \int_0^t (t-u) \Delta(u) du \geq \lambda^3 \int_0^t (t-u) \int_0^u \Delta(s) ds \\
&= \lambda^3 \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \Delta(s) ds \geq \dots \geq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t (t-s) \int_0^t (t-s)^{n-1} \Delta(s) ds,
\end{aligned}$$

entonces, si $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \Delta(s) ds \rightarrow 0.$$

Así

$$\Delta(t) \geq 0; \quad \forall t \in [0, \mathcal{T}].$$

Teorema 2.3 Existencia y Unicidad.

Sean $a(t, x)$ y $b(t, x)$ funciones de $[0, \mathcal{T}] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} tales que:

- I. $a(t, x), b(t, x)$ son medibles tanto en su primera como segunda coordenada.
- II. $a(t, x), b(t, x)$ satisfacen las condiciones de Lipschitz, es decir, existe una constante k tal que $t \in [0, \mathcal{T}]$ y $x, y \in \mathbb{R}$.
 - i. $|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq k|x - y|$.
 - ii. $|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$.
- III. $X(0)$ no depende de B_t y $\mathbb{E}[X_0]^2 < \infty$.

Entonces existe una solución de la E.D.E.(2.12) tal que:

1. X_t es continua casi siempre con probabilidad uno y $X_t = X_0$ para $t = 0$.
2. $\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \mathbb{E}[X_t]^2 < \infty$. Además si X_t^1 y X_t^2 son soluciones de la E.D.E.(2.12) que satisfacen (1.) y (2.) entonces,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_t^1 - X_t^2| = 0\right) = 1.$$

Demostración 2.4

Veamos primero la unicidad.

Supongamos que X_t^1 y X_t^2 son soluciones de la E.D.E. (2.12), así que ellas satisfacen:

$$X_t^i = X_0 + \int_0^t a(t, X_s^i) ds + \int_0^t b(t, X_s^i) dB_s, \quad i = 1, 2.$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^1 - X_t^2]^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^t [a(s, X_s^1) - a(s, X_s^2)] ds + \int_0^t [b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)] dB_s\right]^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [a(s, X_s^1) - a(s, X_s^2)] ds\right]^2 + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)] dB_s\right]^2. \end{aligned}$$

Por isometría y por la desigualdad de Cauchy.

$$\leq 2 \int_0^t \mathbb{E}\left[a(s, X_s^1) - a(s, X_s^2)\right]^2 ds + 2 \int_0^t \mathbb{E}\left[b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)\right]^2 ds.$$

Ambas satisfacen la condición de Lipschitz, por lo que,

$$\begin{aligned} &\leq 2k^2t \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^1 - X_s^2\right]^2 ds + 2k^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^1 - X_s^2\right]^2 ds \\ &\leq 2k^2(t+1) \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^1 - X_s^2\right]^2 ds \\ &\leq \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^1 - X_s^2\right]^2 ds, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda = 2k^2(t+1). \quad (2.16)$$

Por lo tanto se tiene que,

$$\mathbb{E}\left[X_t^1 - X_t^2\right]^2 \leq \lambda \int_0^t \mathbb{E}\left[X_s^1 - X_s^2\right]^2 ds.$$

Sea $\varphi(t) = \mathbb{E}[X_t^1 - X_t^2]^2$, por el lema (2.5) se tiene que para $\alpha(t) = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t^1 - X_t^2]^2 &\leq 0, \\ \mathbb{E}[X_t^1 - X_t^2]^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

entonces

$$\varphi(t) \leq \lambda \int_0^t \mathbb{E}[X_s^1 - X_s^2]^2 ds = 0.$$

Así para cada $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$\mathbb{P}(|X_t^1 - X_t^2| = 0) = 1 \quad \text{c.s.}$$

Sea N un subconjunto de $[0, \mathcal{T}]$ denso, numerable; de la continuidad de X_t^1 y X_t^2 , se tiene que,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in N} (|X_t^1 - X_t^2| = 0)\right) = 1.$$

Si A es un compacto de $[0, \mathcal{T}]$ entonces

$$\mathbb{P}\left(\sup_A (|X_t^1 - X_t^2|) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{(A \cap N)} (|X_t^1 - X_t^2| = 0)\right) = 1,$$

en particular para $t \in [0, \mathcal{T}]$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} (|X_t^1 - X_t^2| = 0)\right) = 1.$$

Por lo tanto, se demuestra la unicidad.

Veamos la existencia.

Esta demostración se construye de forma iterativa.

Dado que se conoce,

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dB_t \quad (2.17)$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s. \quad (2.18)$$

La solución de forma iterativa se tiene de la siguiente forma:

Sea $X_0(t) = X(0)$ y

$$X_n(t) = X_0(t) + \int_0^t a(s, X_{n-1}(s))ds + \int_0^t b(s, X_{n-1}(s))dB_s. \quad (2.19)$$

La idea es ver que X_n es una sucesión de Cauchy lo que implicaría que ella converge a un X , el cuál será la solución.

Veamos que ocurre con $(X_{n+1} - X_n)$ en \mathcal{L}_2 , es decir, se quiere acotar $\mathbb{E}[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1}(t) - X_n(t)]^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^t [a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s))]ds + \int_0^t [b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s))]dB_s\right]^2 \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s))]ds\right]^2 + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s))]dB_s\right]^2 \\ &\leq 2t \int_0^t \mathbb{E}[a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s))]^2 ds + 2 \int_0^t \mathbb{E}[b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s))]^2 ds \\ &\leq 2(t+1)k^2 \int_0^t \mathbb{E}[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds \\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E}[X_n(s) - X_{n-1}(s)]^2 ds, \end{aligned}$$

donde λ es dado en (2.16).

Repitiendo este proceso iterativamente se puede ver que

$$\mathbb{E} \left[X_{n+1}(t) - X_n(t) \right]^2 \leq \lambda^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[X_1(s) - X_0(s) \right]^2 ds.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_1(s) - X_0(s) \right]^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^t a(s, X_0(s)) ds + \int_0^t b(s, X_0(s)) dB_s \right]^2 \\ &\leq 2t \mathbb{E} \left[\int_0^t a(s, X_0(s)) ds \right]^2 + \mathbb{E} \left[\int_0^t b(s, X_0(s)) ds \right]^2 \\ &\leq 2tk^2 \mathbb{E} [1 + |X_0|^2] = 2tk^2 (1 + \mathbb{E} [X_0]^2). \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E} [X_0]^2 < \infty$ existe C tal que $\mathbb{E} [X_0]^2 \leq C$.

Recordemos que $t \leq \mathcal{T}$ y además $(t-s) \leq \mathcal{T}$.

Luego

$$\mathbb{E} \left[X_{n+1}(t) - X_n(t) \right]^2 \leq C \frac{(\lambda \mathcal{T})^n}{n!}.$$

Esta cota es para un t fijo, el siguiente paso es ver que ocurre con el supremo sobre los $0 \leq t \leq \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}(t) - X_n(t) \right| &= \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| \int_0^t [a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s))] ds + \right. \\ &\quad \left. \int_0^t [b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s))] dB_s \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \int_0^t \left| a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s)) \right| ds + \\ &\quad \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| \int_0^t b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s)) dB_s \right| \\ &\leq \int_0^{\mathcal{T}} \left| a(s, X_n(s)) - a(s, X_{n-1}(s)) \right| ds + \\ &\quad \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| \int_0^t b(s, X_n(s)) - b(s, X_{n-1}(s)) dB_s \right|. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy y la condición de Lipschitz, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| X_{n+1}(t) - X_n(t) \right|^2 \right] &\leq 2\mathcal{T} \int_0^{\mathcal{T}} k^2 \mathbb{E} \left[\left| X_n(s) - X_{n-1}(s) \right|^2 ds \right] + \\ &8k^2 \mathcal{T} \int_0^{\mathcal{T}} \mathbb{E} \left[\left| X_n(s) - X_{n-1}(s) \right|^2 ds \right], \end{aligned}$$

iterando, se tiene que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}(t) - X_n(t) \right|^2 \right] \leq \frac{C_1 \lambda^{n-1} \mathcal{T}^{n-1}}{(n-1)!},$$

donde $C_1 = k^2(2\mathcal{T} + 8)\mathcal{T}$.

Luego, se obtiene la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}(t) - X_n(t) \right| > \frac{1}{n^2} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{n-1} \mathcal{T}^{n-1}}{(n-1)!} n^4 < \infty.$$

Definamos

$$A_n = \left\{ \omega : \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega) \right| > \frac{1}{n^2} \right\},$$

entonces,

$$\{\text{lím sup } A_n\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\omega : \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega) \right| > \frac{1}{n^2} \right).$$

Por el lema de Borel - Cantelli (2.4).

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ entonces $\mathbb{P}(\text{lím sup } A_n) = 0$, de donde

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\omega : \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} \left| X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega) \right| > \frac{1}{n^2} \right) \right) = 0 \quad \text{c.s.}$$

Ahora, sea $N = \{\text{lím sup } A_n\}$, es decir $\mathbb{P}(N) = 0$.

Si $\omega \notin N$ entonces $\omega \in (\limsup A_n)^c$, luego

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left(\omega : \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega)| \leq \frac{1}{n^2} \right),$$

es decir, $\exists k \geq 1$ y $n \geq k$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Así,

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

entonces, si $\omega \notin N$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega)| < \infty.$$

Haciendo $k \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{k+1}^t(\omega) - X_k^t(\omega)| &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq \mathcal{T}} |X_{n+1}^t(\omega) - X_n^t(\omega)| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

luego, $\{X_k^t(\omega)\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de los procesos continuos de $[0, \mathcal{T}]$, es decir que, de la aplicación del lema de Borel - Cantelli (2.4) se sigue la convergencia uniforme casi siempre y con probabilidad uno de:

$$X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |X_{n+1}(t) - X_n(t)|.$$

La suma de estas series converge con probabilidad uno, uniformemente al límite $X_n(t)$, lo que significa que $X_n(t)$ converge a un proceso aleatorio $X(t)$ que resulta ser continuo.

Si $n \rightarrow \infty$ en la ecuación (2.19), entonces $X(t)$ va a ser una solución de la ecuación diferencial estocástica, según la cual $X(t)$ es medible con respecto a la σ -álgebra \mathfrak{F}_t .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n(t)]^2 &\leq 3\left[\mathbb{E}[X_0]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t a(s, X_{n-1}(s))ds\right]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t b(s, X_{n-1}(s))dB_s\right]^2\right] \\ &\leq 3\mathbb{E}[X_0]^2 + 3\lambda \int_0^t \mathbb{E}[X_{n-1}(s)]^2 ds. \end{aligned}$$

Aplicando esta estimación sucesivamente a $X_{n-1}(s), X_{n-2}(s), \dots$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n(t)]^2 &\leq 3\mathbb{E}[X_0]^2 + 3\mathbb{E}[(X_0)^2 3\lambda t] + (3\lambda)^2 \int_0^t (t-s)\mathbb{E}[X_{n-2}(s)]^2 ds \\ &\leq 3\mathbb{E}[X_0]^2 + 3\lambda t 3\mathbb{E}[X_0]^2 + 3\mathbb{E}[X_0]^2 \frac{(3\lambda t)^2}{2} + \dots \\ &\leq 3\mathbb{E}[(X_0)^2 e^{3\lambda t}]. \end{aligned}$$

Si $n \rightarrow \infty$ entonces,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[X(t)]^2 \leq 3\mathbb{E}[(X_0)^2 e^{3\lambda t}] < \infty.$$



2.4.1. Solución de la Ecuación Diferencial Estocástica de Itô.

En esta sección se verán algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô utilizando el lema de Itô, el candidato natural son las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, donde ellas son “simples” y tienen una única solución fuerte en el intervalo $[0, T]$, representadas de la siguiente forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t (c_1 X_s + c_2) ds + \int_0^t (\sigma_1 X_s + \sigma_2) dB_s, \quad t \in [0, T]; \quad (2.20)$$

para constantes $c_i, \sigma_i, i = 1, 2$. La ecuación (2.20), se conoce como **Ecuación Diferencial Estocástica Lineal**.

Ejemplo 2.2 Consideremos el Movimiento Browniano Geométrico (1.3) como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô con ruido multiplicativo y la ecuación diferencial estocástica lineal de Itô.

$$X_t = X_0 + c \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s, \quad t \in [0, \mathcal{T}]; \quad (2.21)$$

para constantes $c, \sigma > 0$, donde (2.21) es conocida como **Ecuación Diferencial Estocástica Lineal de Itô con ruido multiplicativo**, ya que existe una relación con el proceso X , el M.B., y las integrales de Riemann e Itô.

Por otro lado, si se aplica el lema de Itô (2.2) al M.B. Geométrico (1.3) se obtiene.

$$X_t = X_0 e^{(c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.22)$$

Veamos como X satisface (2.21), aplicando el lema de Itô (2.2).

Supongamos que $X_t = f(t, B_t)$ para alguna función derivable $f(t, x)$ y utilizando el lema de Itô (2.2).

$$\begin{aligned} X_t = & X_0 + \int_0^t \left[f_1(x, B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, B_x) \right] ds + \\ & \int_0^t f_2(x, B_x) dB_x, \quad s < t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

El proceso X es un proceso de Itô y por lo tanto se pueden identificar las integrales de Riemann e Itô, de las ecuaciones (2.21) y (2.23). Así conjuntamente con la continuidad de las trayectorias del M.B. y sus respectivas σ -álgebras, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales para f .

$$\begin{cases} cf(t, x) = f_1(t, x) + \frac{1}{2} f_{22}(t, x), \\ \sigma f(t, x) = f_2(t, x), \end{cases}$$

Para (2.2) se tiene que:

$$\sigma^2 f(t, x) = f_{22}(t, x),$$

por lo que la ecuación (2.2) se puede simplificar de la siguiente manera:

$$\left(c - \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(t, x) = f_1(t, x), \quad \sigma f(t, x). \quad (2.24)$$

Reescribiendo $f(t, x)$ como un producto de 2 funciones

$$f(t, x) = g(t)h(x),$$

entonces (2.24) se convierte en

$$\begin{aligned} \left(c - \frac{1}{2}\sigma^2\right) g(t) &= g'(t) \\ \sigma h(x) &= h'(x). \end{aligned}$$

Ambas pueden ser resueltas por separación de variables

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0)e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t}, \\ h(x) &= h(0)e^{\sigma x}. \end{aligned}$$

entonces

$$f(t, x) = g(0)h(0)e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma x}.$$

Ahora bien, renombrando

$$X_0 = f(0, B_0) = f(0, 0) = g(0)h(0),$$

finalmente

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 e^{(c-\frac{1}{2}\sigma^2)t} + \sigma_t^B, \quad t \in [0, \mathcal{T}].$$

por lo que satisface la ecuación (2.22).

Así la solución para una ecuación diferencial estocástica de Itô puede ser derivada como una solución de una ecuación diferencial ordinaria o determinista, y se puede ver que la ecuación (2.22) es solución única de (2.21), partiendo de la ecuación (2.20).

Veamos a continuación otro ejemplo conocido como **Proceso de Ornstein-Uhlenbeck**.

Ejemplo 2.3

Consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal,

$$X_t = X_0 + c \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s, \quad t \in [0, \mathcal{T}]. \quad (2.25)$$

donde la ecuación (2.25) es conocida como **Ecuación de Langevin**.

La diferencia fundamental entre la ecuación (2.21) y la (2.25) es que el M.B. y el proceso X no están relacionados directamente en la integral de Itô de (2.25). Ésta ecuación se puede escribir como:

$$dX_t = cX_t dt + \sigma dB_t, \quad (2.26)$$

donde se fija $dt = 1$, entonces (2.26) se tiene como:

$$X_{t+1} - X_t = cX_t + \sigma(B_{t+1} - B_t), \quad (2.27)$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= (c+1)X_t + \sigma(B_{t+1} - B_t) \\ &= \phi X_t + \sigma(B_{t+1} - B_t), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde $\phi = (c+1)$ es una constante, y como $(B_{t+1} - B_t) \sim N(0, 1)$ entonces se tiene que $\sigma(B_{t+1} - B_t) \sim N(0, \sigma^2)$, así (2.27) se puede escribir como:

$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_t, \quad (2.29)$$

por lo que $Z_t \sim N(0, \sigma^2)$, y la ecuación (2.29) es equivalente a la ecuación de Langevin en caso discreto autoregresivo de orden 1.

Por conveniencia tomemos $Y_t = e^{-ct} X_t$. Además los procesos X e Y satisfacen la misma condición inicial, es decir,

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-ct} X_t, \\ Y_0 &= e^0 X_0 = X_0. \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Itô (Extensión II (2.3)), se tiene que:

$$\begin{cases} f(t, x) = e^{-ct}x, \\ f_1(t, x) = -cf(t, x), \\ f_2(t, x) = e^{-ct}, \\ f_{22}(t, x) = 0, \\ A^{(1)} = cx, \quad A^{(2)} = \sigma. \end{cases} \quad (2.30)$$

por lo que,

$$Y_t - Y_0 = \int_0^t \left[f_1(s, X_s) + cX_s f_2(s, X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{22}(s, X_s) \right] ds + \int_0^t \left[\sigma f_2(s, X_s) \right] dB_s;$$

sustituyendo (2.30), obtenemos que

$$\begin{aligned} Y_t - Y_0 &= \int_0^t \left[-ctY_s + cY_s \right] ds + \int_0^t \left[\sigma e^{-cs} \right] dB_s \\ &= \int_0^t \left[\sigma e^{-cs} \right] dB_s \\ Y_t &= X_0 + \int_0^t \left[\sigma e^{-cs} \right] dB_s, \\ e^{-ct} X_t &= X_0 + \int_0^t \left[\sigma e^{-cs} \right] dB_s \\ X_t &= e^{ct} X_0 + e^{ct} \int_0^t \left[\sigma e^{-cs} \right] dB_s. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Por lo tanto la ecuación (2.31), es solución de la ecuación de Langevin.

Cuando X_0 es constante este proceso solución de la ecuación de Langevin es conocida como **Proceso de Ornstein-Uhlenbeck (O.U.)**

Falta verificar que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es gaussiano.

Para demostrar que el proceso X dado por (2.31) es realmente una simulación para la ecuación (2.25). Se considera el lema de Itô, para el proceso:

$$X_t = \mu(t, Z_t),$$

donde $Z_t = \int_0^t e^{-cs} dB_s$ y $\mu(t, z) = e^{ct} X_0 + \sigma e^{ct} z$. Más aún la ecuación de Langevin es una ecuación diferencial estocástica lineal de Itô, se puede concluir del razonamiento de la ecuación (2.20), que X es la única solución para (2.25).

Verificamos que el proceso de Orsntein-Uhlenbeck es gaussiano.

Sea $X_t = e^{ct} X_0 + e^{ct} \int_0^t [\sigma e^{-cs}] dB_s$, y X_0 constante.

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $X_0 = 0$. Basta ver la distribución de $\int_0^t [\sigma e^{-cs}] dB_s$. Ahora bien

$$\int_0^t [\sigma e^{-cs}] dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

como e^{-cs} es una función real, entonces se tiene el límite de media cuadrática, donde $S_n = \sum_{i=1}^n e^{-ct_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$, y $\tau_n = \{t_i\}_{i \geq 0}$ es una partición de $[0, \mathcal{T}]$.

Veamos que $S_n \sim N\left(0, \sum_{i=1}^n e^{-2ct_{i-1}} (t_i - t_{i-1})\right)$.

Calculemos primero su varianza.

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_n) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n e^{-ct_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}\left(e^{-ct_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(e^{-ct_{i-1}}\right)^2 \text{Var}\left((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n e^{-2ct_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

tomando $X_0 = 0$, pero $\sum_{i=1}^n e^{-2ct_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$ se aproxima a la integral de Riemann de e^{-2cs} , entonces

$$\sum_{i=1}^n e^{-2ct_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) - \int_0^t e^{-2cs} ds = \frac{1}{2c}(1 - e^{-2ct}),$$

luego

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \text{Var}\left(\sigma e^{-ct} \int_0^t e^{-cs} dB_s\right) \\ &= \left(\sigma e^{ct}\right)^2 \text{Var}\left(\int_0^t e^{-cs} dB_s\right) \\ &= \sigma^2 e^{2ct} \frac{1}{2c}(1 - e^{-2ct}) \\ &= \frac{\sigma^2}{2c}(e^{2ct} - 1). \end{aligned}$$

Por otra parte por definición sabemos que

$$\mathbb{E}[X_t] = 0, \text{ entonces por el ejemplo (1.2) se tiene que } X_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2c}(e^{2ct} - 1)\right).$$

$$\text{Si } X_0 \neq 0 \text{ entonces } X_t \sim N\left(X_0 e^{ct}, \frac{\sigma^2}{2c}(e^{2ct} - 1)\right).$$

Por lo tanto $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso gaussiano.

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

En este capítulo se verán las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, que se estudiaron en el capítulo anterior. Para esto se estudiarán las soluciones numéricas, con métodos de aproximación conocidos como: esquema de Euler y de Milstein, y por último se aplicará la simulación de difusiones que usualmente se usan para modelar el potencial neuronal entre dos spikes y modelos financieros. Los modelos son:

1. La ecuación de Ornstein-Uhlenbeck con media revertida [5], [2].

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \gamma dB_t; \quad X_0 = x_0 > 0,$$

donde $a, b, \gamma > 0$ son constantes y B_t es un Movimiento Browniano.

2. El modelo conocido como Cox-Ingersoll-Ross [1].

$$dX_t = (a - bX_t)dt + \gamma\sqrt{X_t \vee 0}dB_t; \quad X_0 = x_0 > 0,$$

con $a, b, \gamma > 0$ de nuevo constantes y B_t es un Movimiento Browniano.

3.1. Solución Numérica.

Las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas que admiten una solución analítica son una excepción; por lo que se requiere de técnicas numéricas para la aproximación de la solución, éstas son conocidas como **soluciones numéricas**.

Las soluciones numéricas tienen dos propósitos fundamentales, el primero es la visualización de los momentos de las trayectorias de una solución. Una colección de trayectorias es conocida como **Escenario**, y permite conocer como será el comportamiento de las mismas. Lo cuál facilita obtener una posible predicción del proceso estocástico en un instante de tiempo.

El segundo propósito, tal vez el más importante, es lograr aproximaciones acerca de las características de la distribución de la solución dadas por: la esperanza, varianza, covarianza y la densidad de transición.

El objetivo fundamental es resolver numéricamente la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t, \quad t \in [0, \mathcal{T}], \quad (3.1)$$

donde B_t es un Movimiento Browniano, y $a(x), b(x)$ son funciones continuas Lipschitz. Además si $\mathbb{E}[X_0]^2 < \infty$, se garantiza la existencia y unicidad de la solución fuerte.

Los métodos que se utilizarán en este trabajo son la aproximación por el Método de Euler y por el Método de Milstein, que se verán a continuación.

3.2. Aproximación por el Método de Euler.

Una solución numérica $X^{(n)} = (X_t^{(n)}, t \in [0, \mathcal{T}])$ de la ecuación diferencial estocástica (3.1), es un proceso estocástico que aproxima la solución $X = (X_t, t \in [0, \mathcal{T}])$.

Para generar la solución numérica es necesario considerar una partición τ_n de $[0, \mathcal{T}]$ de la siguiente forma:

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \mathcal{T},$$

donde

$$\delta_n = \text{dist}(\tau_n) = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i.$$

El proceso $X^{(n)}$ es calculado solo en un punto t_i de la partición τ_n , buscando que la solución X_t sea con trayectorias simples y continuas; para obtener

$X_t^{(n)}$ sobre (t_{i-1}, t_i) y realizar una interpolación lineal y simple de los puntos $(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}^{(n)})$ y $(t_i, X_{t_i}^{(n)})$.

Un esquema de aproximación numérica determina $X_t^{(n)}$ en los puntos t_i . Una forma de obtener una solución numérica es reemplazar el diferencial en la ecuación (3.1) por diferencias, lo que permite obtener el siguiente esquema.

Esquema de Aproximación de Euler.

Considerando la siguiente notación

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} \quad \text{y} \quad \Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

la aproximación numérica es la siguiente:

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} &= X_0 \\ X_{t_1}^{(n)} &= X_0^{(n)} + a(X_0^{(n)})\Delta_1 + b(X_0^{(n)})\Delta_1 B \\ X_{t_2}^{(n)} &= X_{t_1}^{(n)} + a(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 + b(X_{t_1}^{(n)})\Delta_2 B \\ X_{t_3}^{(n)} &= X_{t_2}^{(n)} + a(X_{t_2}^{(n)})\Delta_3 + b(X_{t_2}^{(n)})\Delta_3 B \\ &\vdots \\ X_{t_{n-1}}^{(n)} &= X_{t_{n-2}}^{(n)} + a(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} + b(X_{t_{n-2}}^{(n)})\Delta_{n-1} B \\ X_{T_n}^{(n)} &= X_{t_{n-1}}^{(n)} + a(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n + b(X_{t_{n-1}}^{(n)})\Delta_n B. \end{aligned} \tag{3.2}$$

En la práctica se eligen los puntos equidistantes t_i tal que:

$$\delta_n = \text{dist}(\tau_n) = \frac{T}{n},$$

y

$$X_{i\frac{T}{n}}^{(n)} = X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)} + a(X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)})\delta_n + b(X_{(i-1)\frac{T}{n}}^{(n)})\Delta_i B \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.3}$$

Ahora bien, si se está interesado en la aproximación de la trayectoria de X , entonces se quiere que $X^{(n)}(\omega)$, sea lo más parecido a la trayectoria de $X(\omega)$ dada por una trayectoria Browniana $B(\omega)$.

Una medida de aproximación de la trayectoria se puede estimar de la siguiente forma:

$$e_s(\delta_n) = \mathbb{E}[X_T(\omega) - X_T^{(n)}(\omega)],$$

donde e_s es el error que da la aproximación fuerte de la trayectoria de X , y se conoce como: **solución numérica fuerte**. Esta aproximación es la más cercana a X y $X^{(n)}$, o de otra forma, el error encontrado entre la solución analítica y la solución numérica, se representa como:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, \mathcal{T}]} |X_t(\omega) - X_t^{(n)}(\omega)| \right],$$

obteniéndose el siguiente lema.

Lema 3.1 *Se dice que $X^{(n)}$ es la solución numérica fuerte de una ecuación diferencial estocástica (3.1) si*

$$e_s(\delta_n) \rightarrow 0 \text{ cuando } \delta_n = \text{dist}(\tau_n) \rightarrow 0.$$

Ahora bien, si se desea comparar la calidad de la aproximación $X^{(n)}$ para X , se introduce el término de *Orden de Convergencia*, enunciado en el siguiente lema.

Lema 3.2 *La solución numérica $X^{(n)}$ converge fuertemente a X con orden $\gamma > 0$, si existe una constante $c > 0$ tal que*

$$e_s(\delta_n) \leq c\delta_n^\gamma \text{ para } \delta_n \leq \delta_0.$$

Observación 3.1

La aproximación de Euler converge fuertemente con orden $\frac{1}{2}$, [6].

3.3. Esquema de Aproximación de Milstein.

La aproximación de Euler puede mejorarse, para esto se considera la Aproximación de Milstein. Considérese la ecuación (3.1) en su forma integral, es decir,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t b(X_s)dB_s, \quad t \in [0, \mathcal{T}].$$

Para los puntos t_i de la partición τ_n , se puede considerar la diferencia $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ y se obtiene:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dB_s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Se puede ver la aproximación de Euler como la discretización de las integrales (3.4), si realizamos las siguientes consideraciones:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} a(X_s)ds \approx a(X_{t_{i-1}})\Delta_i, \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)dB_s \approx b(X_{t_{i-1}})\Delta_i B,$$

y se reemplaza el término X_{t_i} con $X_{t_i}^{(n)}$, se obtiene:

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B, \quad i = 1, \dots, n.$$

De igual forma la aproximación de Milstein toma en cuenta estas consideraciones, pero adiciona un término, el cuál está vinculado de alguna manera al desarrollo de Taylor y por esta razón dicha aproximación también es conocida como: **Expansión de Taylor-Itô** en relación a (3.4).

Para obtener explícitamente el mencionado esquema de aproximación de Milstein hay que aplicar el Lema de Itô (Extensión II), véase capítulo 2 del presente trabajo (2.3); para los integrandos $a(X_s)$ y $b(X_s)$ en (3.4). En lo que sigue se considerará la siguiente notación a, b, a' por $a(X_s), b(X_s), a'(X_s)$.

Ahora bien, tomando el lema de Itô se tiene,

$$\begin{aligned} X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[a(X_{t-1}) + \int_{t_{i-1}}^s (aa' + \frac{1}{2}b^2a'')dy + \int_{t_{i-1}}^s ba'dB_y \right] ds \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[b(X_{t_{i-1}}) + \int_{t_{i-1}}^s (ab' + \frac{1}{2}b^2b'')dy + \int_{t_{i-1}}^s bb'dB_y \right] dB_s, \\ X_{t_i} - X_{t_{i-1}} &= a(X_{t_{i-1}})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}})\Delta_i B + R_i, \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde el último término está dado por el resto, es decir,

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_{t_{i-1}}^s bb'dB_y \right] dB_s + R_i^{(2)}. \quad (3.6)$$

La integral estocástica doble $R_i^{(1)}$ es aproximada por

$$R_i^{(1)} \approx b(X_{t_{i-1}})b'(X_{t_{i-1}}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^s dB_y \right) dB_s. \quad (3.7)$$

Se denotará la integral doble por I .

Como se estudió en el capítulo anterior, se sabe que $(dB_s)^2 = ds$ y por lo tanto,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (dB_s)^2 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} ds = \Delta_i.$$

Considerando la integral doble, se tiene que

$$(\Delta_i B)^2 = \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dB_s \right) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dB_y \right) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} dB_y \right) dB_s. \quad (3.8)$$

La última integral se podría interpretar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^s dB_y \right) dB_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_s^{t_i} dB_y \right) dB_s + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (dB_s)^2 \\ &= 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^s dB_y \right) dB_s + \Delta_i \\ &= 2I + \Delta_i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Entonces de los resultados en (3.7), (3.8) y (3.9) se tiene que

$$R_i^{(1)} \approx \frac{1}{2} b(X_{t_{i-1}})b'(X_{t_{i-1}})[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i]. \quad (3.10)$$

Luego, bajo las suposiciones de suavidad de los coeficientes dadas para las funciones $a(x)$ y $b(x)$ se puede ver que $R_i^{(2)}$ es más pequeño respecto a $R_i^{(1)}$, por lo tanto $R_i^{(1)}$ determina el orden de magnitud del resto R_i . Por otro lado, combinando las ecuaciones (3.5) y (3.10) se obtiene el Esquema de Aproximación por Milstein. En el siguiente esquema se puede apreciar que hay

mucha similitud con el Esquema de Euler, así como ya se ha mencionado anteriormente. En lo que sigue se puede apreciar que se tiene un término adicional el cual es el que contiene los incrementos cuadrados del $M.B.$

Esquema de Aproximación de Milstein.

$$X_0^{(n)} = X_0 \quad \text{y para } i = 1, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} X_{t_i}^{(n)} &= X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B \\ &+ \frac{1}{2}b(X_{t_{i-1}}^{(n)})b'(X_{t_{i-1}}^{(n)})[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este esquema tiene la particularidad que mejora la calidad de la solución numérica, obteniéndose así que la aproximación de Milstein converge fuertemente con orden 1. [6]

3.4. Modelo de Simulación para una Ecuación Diferencial Estocástica con Solución Analítica.

Como se sabe, con frecuencia las ecuaciones diferenciales estocásticas no tienen una solución analítica, o si la tiene no se puede determinar la distribución teórica; pero en ambos casos se necesita hallar una solución numérica de la ecuación diferencial estocástica con métodos numéricos.

A continuación se simularán numéricamente, los modelos matemáticos conocidos por Método de Aproximación de Euler y Método de Aproximación de Milstein, para dar una solución numérica a una ecuación diferencial estocástica.

Para ello se considerarán las ecuaciones que poseen solución analítica y aprovecharemos este mismo hecho para determinar cual de los dos métodos resulta más eficiente.

Se utilizará el paquete computacional conocido como “MATLAB”¹. Este paquete está diseñado para efectuar cálculos numéricos con vectores y matrices, además de ofrecer la posibilidad de crear funciones dentro de su interfaz con un lenguaje de programación bastante fácil.

Para describir estos métodos, se define en primer lugar el Movimiento Browniano, el intervalo $[0, \mathcal{T}]$ es discretizado en $[0, 1]$, en $\delta t = \frac{T}{N}$ partes iguales, con $T, N \in \mathbb{N}$. Se utiliza un generador de números aleatorios independientes y distribuidos $N(0, 1)$ conocido como: “randn”; para luego crear el vector “B” del *M.B.*, con el comando “cumsum”, el cual realiza una suma acumulativa del vector “dB”.

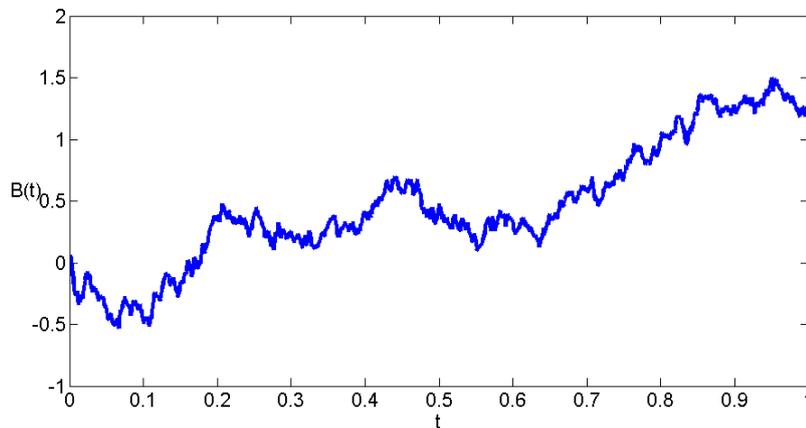


Figura 3.1: Movimiento Browniano para $N = 1000$.

Para este ejemplo se utilizó $T = 1$ y $N = 1000$.

Ahora bien, se considera la siguiente ecuación diferencial estocástica lineal a partir de la ecuación (3.1).

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dB(t), \quad (3.12)$$

¹nombrado así por su abreviación en inglés “MATriz LABoratory”

donde los coeficientes *deriva* μ y *difusión* σ son constantes reales y consideramos la condición inicial $X_0 = X(0)$; en este caso $a(X) = \mu X$ y $b(X) = \sigma X$. Hay que destacar que las constantes μ, σ son positivas y si $\mu > \sigma$ entonces la solución es creciente, por otro lado si $\mu \leq \sigma$ entonces la solución se aproxima casi al $M. B.$ La solución analítica de esta E.D.E esta dada por:

$$X(t) = X(0)e^{((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t))}. \quad (3.13)$$

El código para esta solución numérica está dado a partir del $M.B.$ considerado en la parte anterior, ver en la página [85].

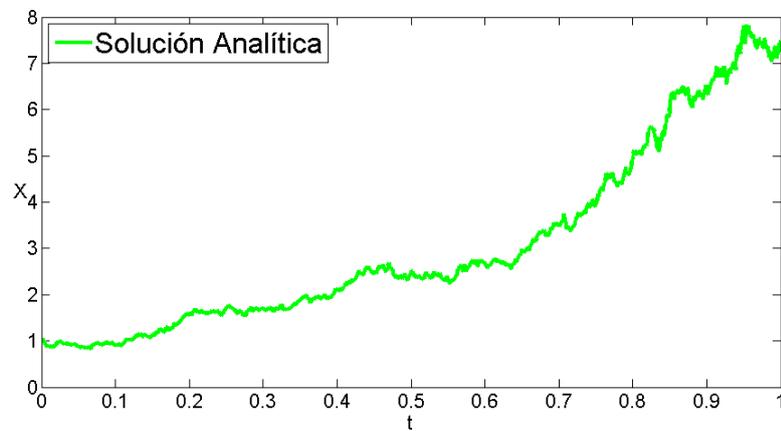


Figura 3.2: Aproximación de la Solución Analítica para $N = 1000$.

En la gráfica anterior (Figura 3.2) se puede apreciar la trayectoria de la solución numérica (3.13). Para realizar ésta simulación se consideraron los siguientes parámetros: $T = 1$, $N = 1000$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.5$ y $X_0 = 1$.

Ahora bien, considerando la E.D.E., (3.12) con su respectiva solución analítica (3.13), se le aplicará las aproximaciones de Euler y Milstein, buscando cuál es la mejor aproximación con diferentes tamaños de particiones.

3.4.1. Método Numérico del Esquema de Euler.

Para la realización del método numérico de (3.12) a través del esquema de Euler, lo primero que se considera es la discretización del intervalo $[0, \mathcal{T}]$. Sea $\Delta t = \frac{T}{L}$, para algún entero positivo L , y $\tau_i = i\Delta t$. La aproximación numérica $X(\tau_i)$ se denota por X_i . Por lo que la aproximación de Euler del esquema (3.2) toma la siguiente forma:

$$X_i = X_{i-1} + \mu(X_{i-1})\Delta t + \sigma(X_{i-1})(B(\tau_i) - B(\tau_{i-1})). \quad (3.14)$$

En la implementación del método, se generan los incrementos $B(\tau_i) - B(\tau_{i-1})$, al expresar de forma discreta las trayectorias Brownianas. Por conveniencia para escoger el tamaño del paso Δt , éste debe ser un múltiplo entero, $R \geq 1$ del incremento δt para la trayectoria Browniana. Esto garantiza que el conjunto de puntos $\{t_i\}$ contenga al conjunto de puntos $\{\tau_i\}$ de la solución calculada por E.E. ²

Al aplicar el método, los incrementos $B(\tau_i) - B(\tau_{i-1})$ que se generan, se consideran de la siguiente forma: $\Delta t = R\delta t$ y

$$B(\tau_i) - B(\tau_{i-1}) = B(iR\delta t) - B((i-1)R\delta t) = \sum_{k=iR-R+1}^{iR} dB_k. \quad (3.15)$$

La ecuación (3.15), representa una serie telescópica, la cual es tomada de esta forma, para asegurar las condiciones de normalidad que se tienen de la definición del $M.B$. Además se calcula el error entre la solución exacta y la solución por el esquema de Euler en el punto final $t_n = T$. El código en "MATLAB" para el esquema de Euler, se puede ver en la página [85].

De esta forma se obtiene la siguiente gráfica.

²En lo que sigue se considerará E.E como esquema de Euler y E.M como esquema de Milstein.

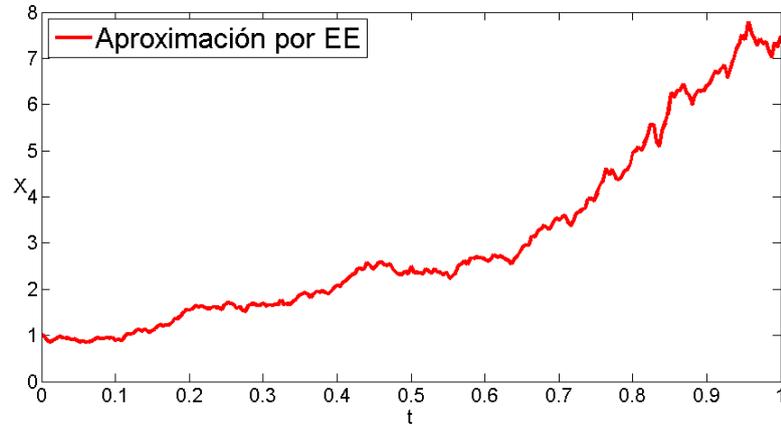


Figura 3.3: Aproximación según el Esquema de Euler, para $N = 1000$.

Para la gráfica anterior (Figura 3.3) se puede observar la trayectoria de la solución numérica (3.13) según la aproximación del esquema de Euler. Se consideraron los siguientes valores para su simulación: $T = 1$, $N = 1000$, $R = 4$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.5$, $X_0 = 1$, $\text{graf} = 1$, y el error que se obtuvo fue $\text{emerrE} = 0.0143$.

3.4.2. Método Numérico del Esquema de Milstein.

Para la implementación del método numérico de (3.12) a través del esquema de Milstein, se considera el mismo intervalo discretizado $[0, \mathcal{T}]$ que se utilizó para el esquema de Euler, con la diferencia de que $\Delta t = dt$ utilizado en el *M.B.* original. La aproximación numérica al igual que el caso anterior $X(\tau_i)$ se denota por X_i . Por lo que la aproximación de Milstein (3.11) se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 X_i &= X_{i-1} + \mu(X_{i-1})dt + \sigma(X_{i-1})(B(\tau_i) - B(\tau_{i-1})) \\
 &+ \frac{1}{2}\sigma(X_{i-1})\sigma'(X_{i-1})[(B(\tau_i) - B(\tau_{i-1}))^2 - dt]. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Para poner en marcha el método, hay que resaltar que el último término de la ecuación anterior (3.16), no se toma en cuenta, ya que el valor de σ

es constante por lo tanto su derivada es cero. De igual forma los incrementos $B(\tau_i) - B(\tau_{i-1})$, representan la serie telescópica del caso anterior, para cumplir las mismas hipótesis. Además se calcula el error entre la solución exacta y la solución por el esquema de Milstein en el punto final $t_n = T$. El código con el cual fue simulado el esquema de Milstein en “MATLAB”, se puede revisar en la página [86].

De esta forma se obtiene la siguiente gráfica.

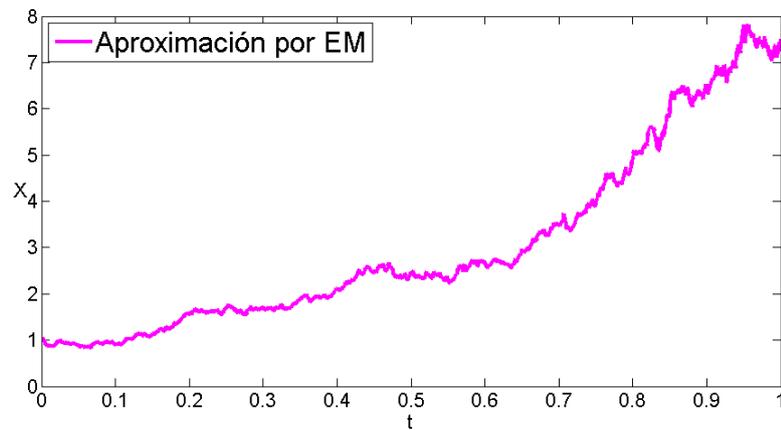


Figura 3.4: Aproximación según el Esquema de Milstein, para $N = 1000$.

En ésta gráfica (Figura 3.4) se puede apreciar la trayectoria de la solución de la ecuación (3.13) mediante el esquema de Milstein, y para el cual se utilizaron los siguientes datos: $T = 1$, $N = 1000$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.5$, $X_0 = 1$, $\text{graf} = 1$, y el error que se obtuvo fue $\text{emerrM} = 0.0066$.

Como se puede ver en las figuras (3.3) y (3.4), se obtuvieron resultados parecidos. En ambos casos se utilizaron las mismas variables. Dando como principal diferencia los dominios, ya que, en el esquema de Euler se toman subintervalos del intervalo inicial, y el esquema de Milstein lo considera completo.

En lo siguiente se consideraron N variables aleatorias, dando como resultado las siguientes gráficas con sus respectivos errores; donde las condiciones iniciales se mantuvieron $T = 1$, $\mu = 1.5$, $\sigma = 0.5$, $X_0 = 1$.

Para $N = 100$. Se obtuvieron las siguientes gráficas.

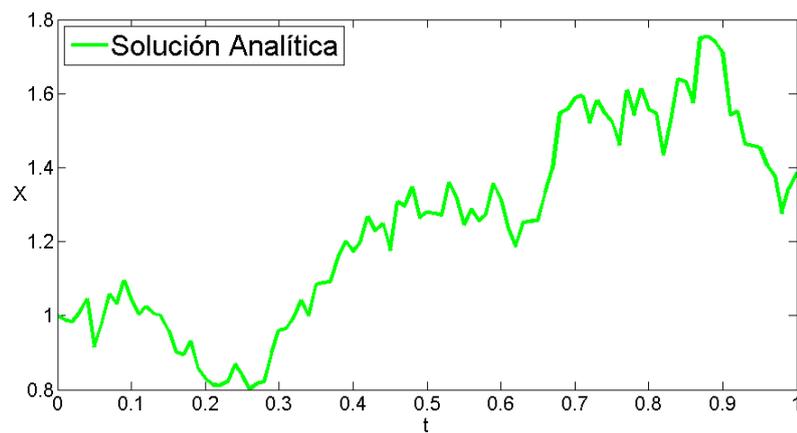


Figura 3.5: Solución Analítica para una E.D.E conocida, $N = 100$.

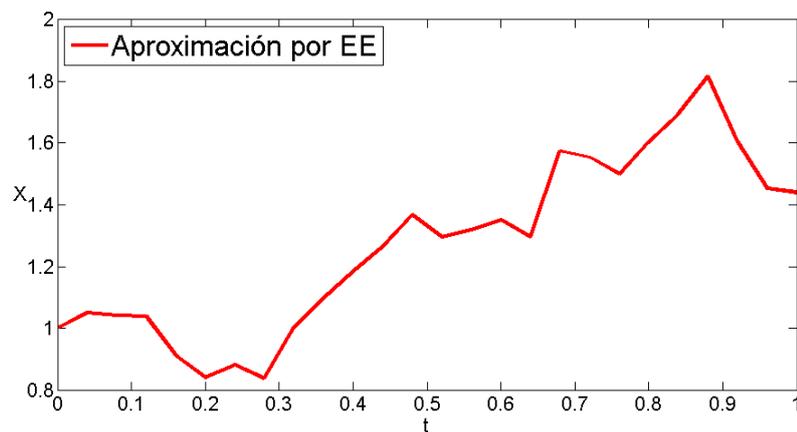


Figura 3.6: Aproximación según el Esquema de Euler, para $N = 100$.

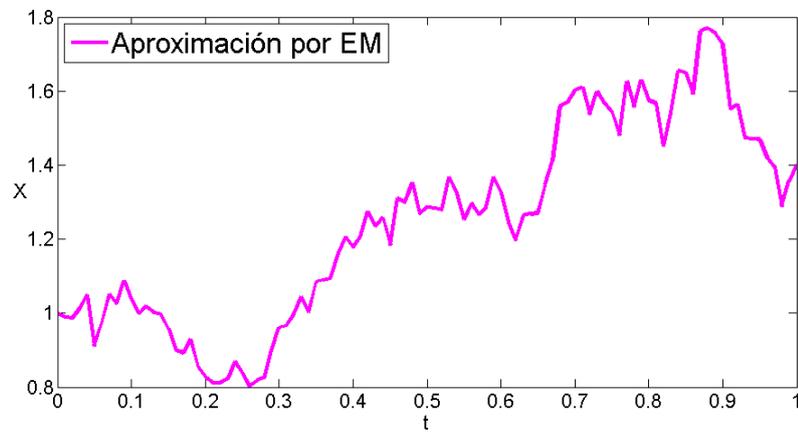


Figura 3.7: Aproximación según el Esquema de Milstein, para $N = 100$.

Para $N = 1000$. Ver las figuras (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4).

Para $N = 10000$. Se obtuvieron las siguientes gráficas.

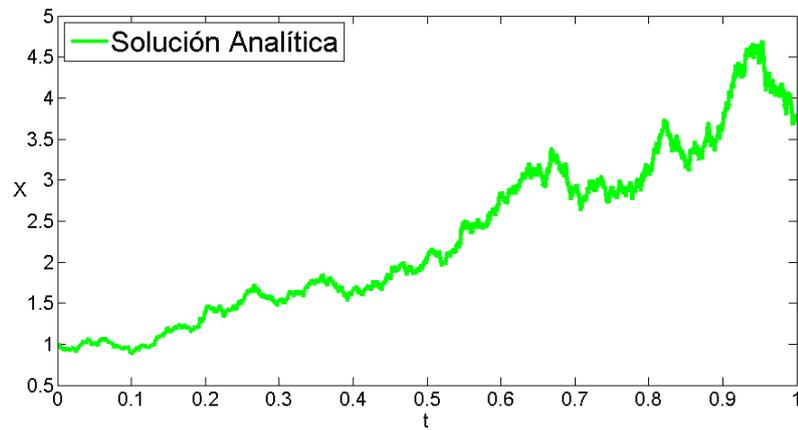


Figura 3.8: Solución Analítica para una E.D.E conocida, $N = 10000$.

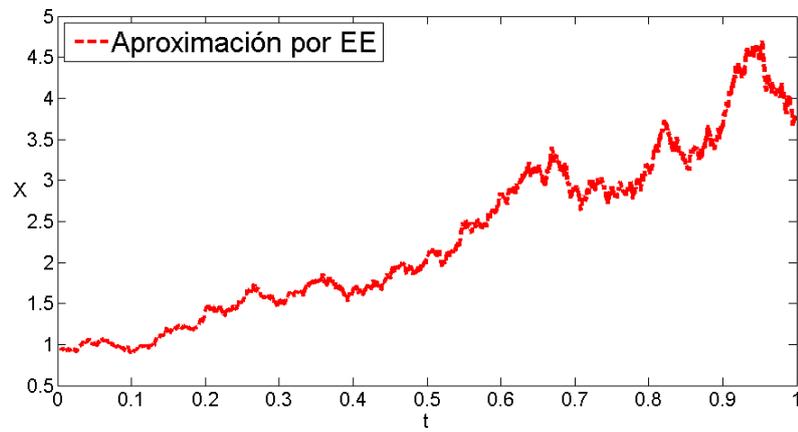


Figura 3.9: Aproximación según el Esquema de Euler, para $N = 10000$.

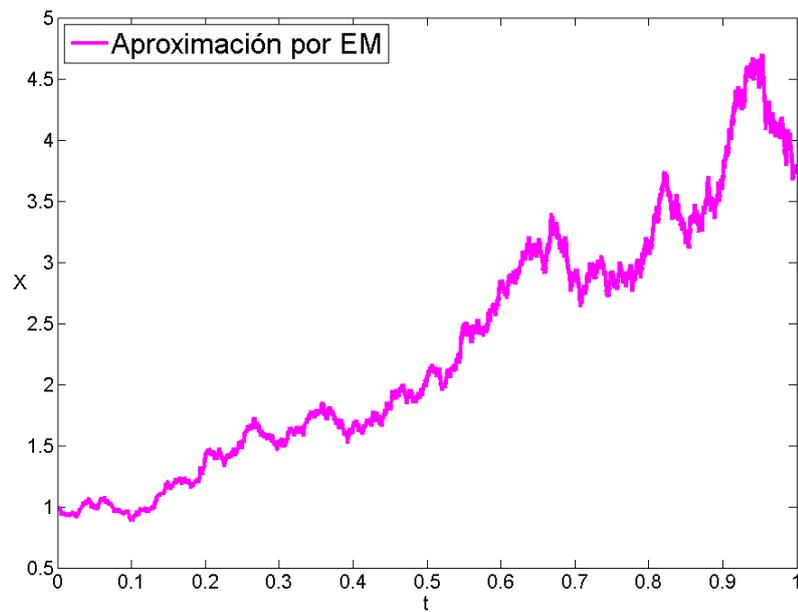


Figura 3.10: Aproximación según el Esquema de Milstein, para $N = 10000$.

Se puede apreciar que a medida que se va aumentando la cantidad de variables aleatorias, las aproximaciones a la solución analítica son mejores, esto se puede comprobar con los errores para ambas simulaciones, determinando cuál de las dos es más efectiva.

Observemos la siguiente tabla:

N	Error de Euler	Error de Milstein
$N = 100$	$\text{emerrE} = 0.0535$	$\text{emerrM} = 0.0138$
$N = 1000$	$\text{emerrE} = 0.0143$	$\text{emerrM} = 0.0066$
$N = 10000$	$\text{emerrE} = 0.0024$	$\text{emerrM} = 0.0016$

La tabla confirma lo que se había dicho: el error presentado por ambos esquemas se va reduciendo. Así mismo se puede observar que el error del esquema de Milstein es menor que en el esquema de Euler. Lo que resalta la efectividad del esquema de Milstein.

A continuación veamos dos problemas específicos.

3.5. Modelo Biológico.

El primer problema al que se hace referencia es a un *Modelo Biológico*, el cual consiste en la simulación del comportamiento de la neurona, específicamente de su descarga. Las descargas ocurren debido a que el cerebro contiene miles de millones de células nerviosas que están conectadas entre sí de forma específica, ya sea por una relación química o una relación física, pero en ambos casos ocurre un paso de energía que permite la descarga neuronal.

Este modelo es neuronal estocástico, además estudia los estimadores de los parámetros de entrada. Fue introducido en primer momento por Feller y tiempo después por Ornstein-Unlenbeck (O.U.) [5] al principio del siglo pasado, y sus resultados han sido aplicados en diferentes áreas, una de ellas, la financiera, la cual se tratará más adelante.

El Modelo Biológico que se estudiará se conoce por modelo neuronal estocástico de fuga, integración y disparo, conocido en inglés por sus siglas

LIF, es una herramienta común, el estudio de las propiedades reales de los sistemas neuronales representando la similitud de las neuronas reales y las simuladas matemáticamente.

En este modelo, la neurona es caracterizada por una sola ecuación diferencial estocástica que describe la evolución del potencial de la membrana neuronal bajo cierto tiempo t . Aunque debido a su simplicidad; el modelo LIF se considera determinista, y al añadir un tipo de ruido específico, por lo general este ruido es gaussiano, se convierte en un modelo de Ornstein-Uhlenbeck, si se añade un ruido de Poisson el mismo determina otro modelo. En este caso se considerará un ruido gaussiano.

Un potencial de acción (spike) se produce cuando la membrana se tensa, alcanzando cierto punto de elasticidad en el umbral de tensión, correspondiendo al primer momento de paso, ver la figura (3.12), es decir, de esta forma se describe el proceso estocástico asociado a la tensión. En el momento de la generación del pico, la tensión instantáneamente vuelve a su valor inicial y los intervalos de tiempo entre los potenciales de acción se identifican como intervalos: “interspike” experimentalmente observables por sus siglas en inglés (ISIS). La importancia de los interspike se desprende de la hipótesis general la cual acepta que la información transferida en el sistema nervioso está codificada por el tiempo de los potenciales de acción.

Con este modelo, lo que se busca es la obtención de los métodos de estimación de parámetros de información, sobre la base de datos de los intervalos de tiempo entre los potenciales de acción. Este modelo se conoce como **modelo de Feller**.

Los parámetros del modelo de Feller se pueden dividir en dos categorías: los parámetros de entrada, los cuales dependerán de la actividad de las neuronas en la red; y los parámetros intrínsecos de la propia neurona, independientemente de su actividad. La estimación de los parámetros de entrada se consideran, sólo en el caso de que los parámetros intrínsecos sean conocidos y fijos.

Los cambios en el potencial de membrana entre dos descargas neuronales consecutivas está representado por Y_t ; un proceso estocástico indexado por el tiempo t . El nivel de referencia para el cual el potencial de membrana se

considere en reposo será la tensión inicial (o el valor de inicio después de un punto), es decir, $Y_0 = y_0 = 0$.

Un potencial de acción se produce cuando la tensión de la membrana Y_t excede un umbral de tensión por primera vez, por simplicidad se supone igual a una constante $S_y > 0$. Formalmente, el intervalo interspike es identificado por la primera vez que pase el umbral,

$$T = \inf\{t > 0 : Y_t \geq S_y\}. \quad (3.17)$$

Los intervalos interspike forman un proceso de renovación y el tiempo inicial siempre se puede identificar con Y_0 , siendo el parámetro de entrada por el ruido blanco, Y_t es un proceso de difusión.

Este modelo matemáticamente, lo podemos entender de la siguiente forma, un proceso de difusión $X = \{X_t; t \geq 0\}$, representado por la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad (3.18)$$

donde $B = \{B_t, t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano; $\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son la media y la varianza locales respectivamente, como funciones reales. Para el modelo neuronal de O.U., la ecuación diferencial estocástica está dada de la siguiente forma:

$$dY_t = \left(-\frac{Y_t}{\tau} + \mu \right) dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = y_0 = 0, \quad (3.19)$$

donde μ es una constante que define la entrada del impulso neuronal, $\tau > 0$ especifica el tiempo que la membrana permanece constante en la ausencia de entradas, $\sigma \geq 0$ es el segundo parámetro y con él se determina la amplitud del ruido blanco. El término de difusión σ de la ecuación (3.19) es independiente del estado, haciendo que el proceso no tenga límites, que es fisiológicamente poco realista. Por el contrario el modelo que se trabajará es más realista, introduciendo así un potencial de reversión el cual permite que la corriente total de la membrana cambie. De esta forma se puede introducir un potencial

de reversión inhibitor $V_I < 0$ que limita al proceso desde abajo, la ecuación está dada por,

$$dY_t = \left(-\frac{Y_t}{\tau_y} + \mu_y \right) dt + \sigma_y \sqrt{Y_t - V_I} dB_t, \quad Y_0 = y_0 = 0. \quad (3.20)$$

Existe una analogía entre los parámetros del modelo de Feller y el modelo de O.U, que aparecen en las ecuaciones (3.19) y (3.20), que pueden ser divididos en dos grupos: para los parámetros de entrada, μ_y y σ_y ; y para los parámetros intrínsecos τ_y , y_0 , V_I y S_y , los cuales describen la señal de entrada independiente de las neuronas. El proceso (3.20) define un proceso de difusión, el cual puede ser transformado mediante los siguientes cambios de variables, $X_t = Y_t - V_I$, obteniendo así la siguiente ecuación:

$$dX_t = \left(-\frac{X_t}{\tau} + \mu \right) dt + \sigma \sqrt{X_t} dB_t; \quad X_0 = x_0 = -V_I, \quad (3.21)$$

donde $\mu = \mu_y - \frac{V_I}{\tau_y}$, $\tau = \tau_y$ y $\sigma = \sigma_y$. De esta forma, se identifica el intervalo del interspike T , como el primer momento de paso del umbral, $S = S_y - V_I$ dado por el proceso X_t .

Las trayectorias del modelo de Feller fueron simuladas a través de las ecuaciones (3.20) y (3.21), bajo los esquemas de Euler y Milstein con un tamaño de paso $1/100msec$ para los diferentes parámetros de entrada. En todas las simulaciones se consideraron los siguientes valores siguiendo el trabajo [5]: $\tau = 10msec$, $S = 20mV$, $x_0 = 10mV$, estos valores corresponden al proceso (3.21) y para el proceso (3.20) se consideraron: $\tau_y = 10msec$, $S_y = 10mV$, $y_0 = 0mV$ y $V_I = -10mV$. En ambos casos se utilizó una data $N = 1000$ y se tomaron los siguientes casos, con sus respectivas gráficas.

Casos	μ	σ
A	4,5	3,0
B	4,0	2,0
C	3,0	1,0

Para resolver numéricamente las ecuaciones (3.20) y (3.21) se desarrollaron códigos en “MatLab” los cuales se puede ver en las páginas [88] y [90].

Por lo que se obtienen las siguientes gráficas. La línea verde es la aproximación obtenida del esquema de Euler, la línea roja es la aproximación del esquema de Milstein, y la línea azul es el umbral, que es la guía que permite determinar si hay o no diferencia de potencial, para que se realice el impulso nervioso.

Para el caso A, con la ecuación (3.20):

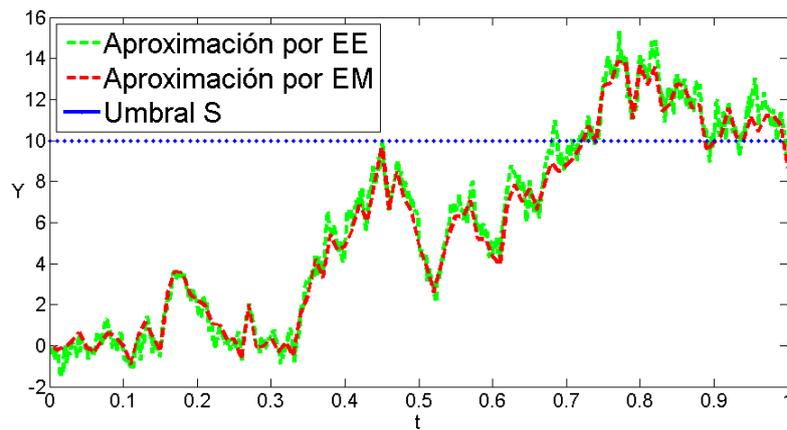


Figura 3.11: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Para el caso A, con la ecuación (3.21):

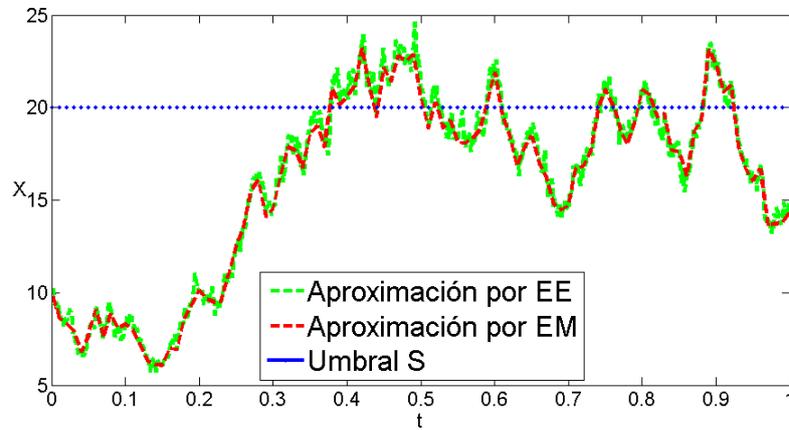


Figura 3.12: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Para el caso B, con la ecuación (3.20):

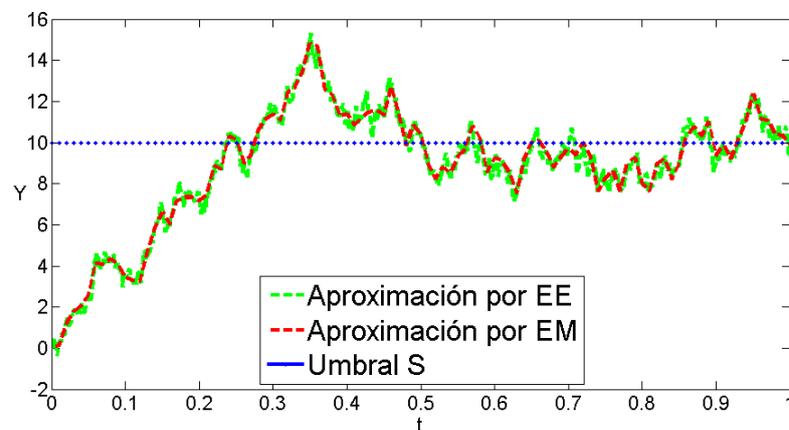


Figura 3.13: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Para el caso B, con la ecuación (3.21):

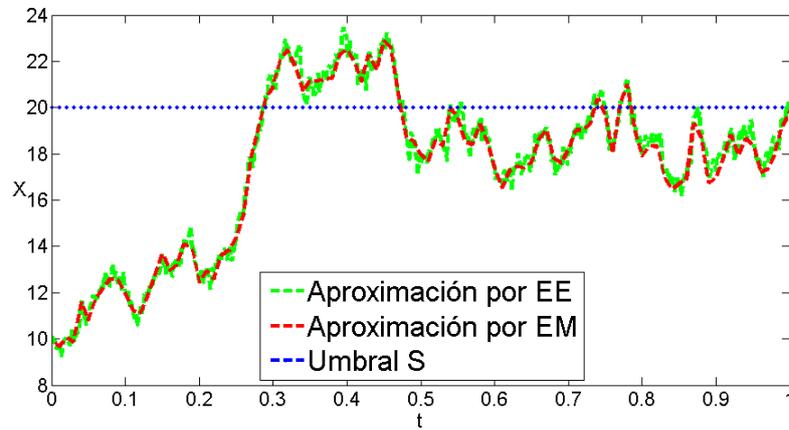


Figura 3.14: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Para el caso C, con la ecuación (3.20):

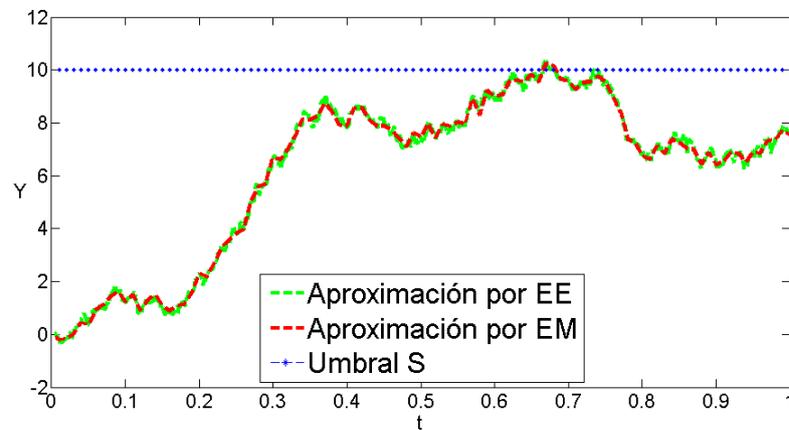


Figura 3.15: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Para el caso C, con la ecuación (3.21):

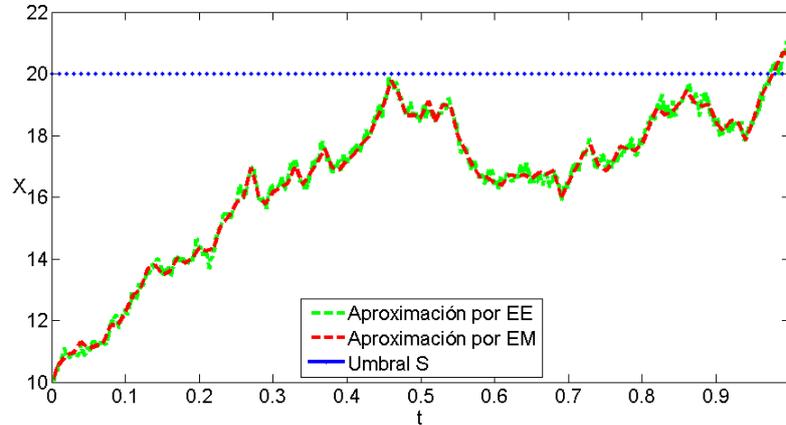


Figura 3.16: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para la descarga neuronal, con $N = 1000$.

Lo más importante de éste modelo biológico es ver la frecuencia de la descarga neuronal, y no la amplitud. En nuestro caso particular, el problema se centra en las oscilaciones, ellas permiten que se realicen disparos consecutivos o descargas si se mantienen alrededor del umbral (línea azul). Una condición que hay que resaltar, una condición para que se produzca el disparo es que el paso sobre el umbral, ocurra con pendiente positiva, debido a que el proceso tiene un comienzo y un fin. El cual está determinado por el regreso de la oscilación, es decir, que si se produjo un impulso, pero no hay un retorno inmediato, entonces hubo un solo potencial de acción, como se puede apreciar en el caso A de la ecuación (3.21) que se observa en la gráfica (3.12).

Otra conclusión que se aprecia es que para la ecuación (3.21), es más difícil de que ocurran oscilaciones alrededor del umbral, esto se debe al valor del umbral, es decir, que si se aumenta el potencial de membrana es más difícil que se produzcan las descargas. Para la ecuación (3.21) se utilizó $S = 20mV$ y para la ecuación (3.20) se utilizó $S_y = 10mV$. De está forma se puede apreciar en las gráficas la dificultad de que ocurra el paso. La explicación biológica es porque la membrana biológica tiene un potencial de reposo que lo mantiene activamente. Si hay más oscilaciones hay más disparos. Por eso

en el caso C, que las oscilaciones son menores, se puede apreciar que hay menos disparos, que en los casos anteriores.

3.6. Modelo Financiero.

El segundo problema que se considerará es un Modelo Financiero, el cual fue introducido por John Cox, Jonathan Ingersoll y Stephen Ross en 1985, conocido como CoxIngersoll-Ross o modelo CIR, [1]. El mismo expone y simula la estructura temporal de tasas de interés en los precios de los bonos. El objetivo principal del modelo es cómo prevenir los cambios en los precios futuros según las variables que se tengan en la curva de interés. Algunas de estas son: las anticipaciones, la aversión al riesgo, inversiones alternativas, y las preferencias de los periodos de consumo, que determinan el precios de los bonos.

La estructura temporal de tasas de interés mide la relación entre los rendimientos de los valores o bonos, que por defecto se diferencian sólo en su plazo de vencimiento. El modelo da una forma de extraer información y predecir cómo los cambios en las variables afectan la curva de rendimiento.

En consecuencia, según la teoría de las expectativas, en el futuro próximo todos los títulos y deuda de la misma calidad estiman el valor del bono, sin importar sus fechas de vencimiento, las cuales deberían ofrecer la misma rentabilidad. Esto ocurre debido a que los inversionistas buscan oportunidades para hacer ganancias, eliminando todos los diferenciales de rentabilidad entre títulos lo cual hace que la curva de rendimientos, que definimos más abajo, sea más plana.

La curva de rendimiento o de interés está dada por dos variables que afectan el precio del bono, los cuales son: el tiempo, y la tasa de interés. Lo que se desea es tener conocimiento de lo que va a ocurrir en un cierto tiempo x_0 , con una cierta tasa de interés r_0 , y así determinar el precio del bono de la siguiente forma:

$$B = \frac{c}{(1+i)} + \dots + \frac{c_N}{(1+i)^N}.$$

Donde B , representa el bono o el cupón el cual es determinado por la tasa

que dé el cupón mensualmente c , entre 1 más la tasa de interés que paga el título o el cupón. Esto puede expresarse o entenderse gráficamente de la siguiente forma.

Para cierto $x_1 < x_2$ se puede tener como “tendencia” una línea recta, donde este es el estado que debería pasar si hay ciertas condiciones en la realidad, pero sigue siendo un estado teórico, como muestra la siguiente gráfica.

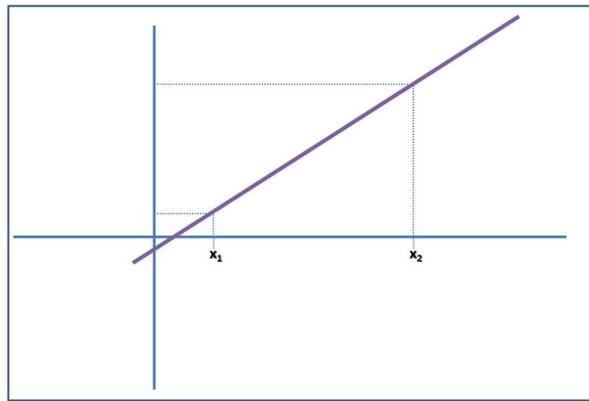


Figura 3.17: Precio del Bono, con tendencia de línea recta.

El caso ideal para $x_1 < x_2$ se obtiene una constante, en donde no hay ninguna variable que afecte el precio del bono, como se muestra en la siguiente gráfica.

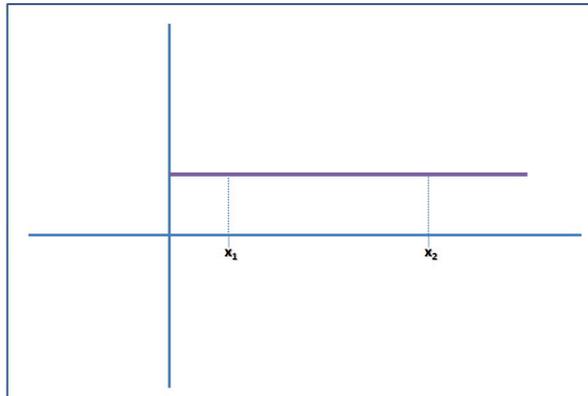


Figura 3.18: Precio del Bono, en estado ideal.

En muchos casos, en especial en Venezuela, tiende a ocurrir que para $x_1 < x_2$ se puede obtener que haya el mismo rendimiento, resultando que la curva sea por ejemplo cóncava hacia abajo como ocurre en la siguiente gráfica, donde el precio del bono tuvo varias ofertas y demandas, pero para la fecha del vencimiento tiende a tener el mismo rendimiento que al inicio.

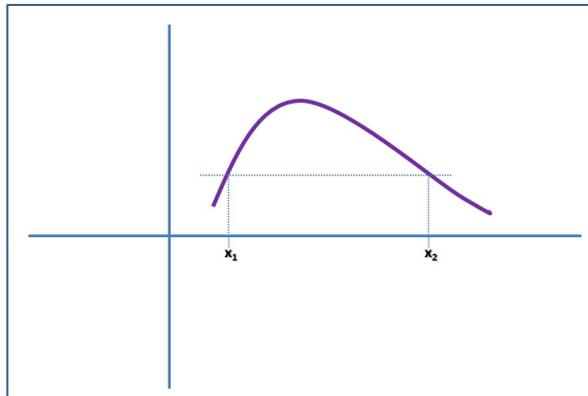


Figura 3.19: Precio de Bono, caso especial cuando tiene el mismo rendimiento.

De esta forma se pueden obtener los siguientes resultados: mientras el numerador sea más grande el precio es menor, y de la misma forma ocurre que si

el numerador es pequeño, precio mayor. Pero esto no siempre ocurre, debido a que en un mundo de incertidumbre, ya que uno de los factores de riesgo es que el cupón en la mayoría de los casos no vale lo mismo ahora que dentro de 30 años. Esa es otra de las variables que se tiene que tener en cuenta. Sin embargo, cuando se introduce la incertidumbre sobre las futuras tasa el análisis se vuelve mucho más complejo. En general, las teorías anteriores de la estructura temporal han tomado el modelo de seguridad como punto de partida y se ha procedido mediante el examen de generalizaciones estocásticas.

El modelo que se plantea matemáticamente, para este problema es el siguiente, donde se considera r como la tasa de interés que se desea obtener:

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dB. \quad (3.22)$$

Este modelo se corresponde a un proceso continuo. El proceso es atraído hacia un lugar central θ , el parámetro $k > 0$ determina la velocidad de ajuste, que corresponde solamente a la media; σ^2 es una constante que establece criterios de limitación, la cual implica directamente que la tasa de interés inicial no negativo, nunca podrá convertirse en negativo; y $B = \{B_t, t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano.

El comportamiento de la tasa de interés implícita en esta estructura tiene las siguientes propiedades:

- i. Las tasas de interés negativas no están autorizados.
- ii. Si la tasa de interés llega a cero, posteriormente puede convertirse en positiva.
- iii. La variación absoluta de la tasa de interés aumenta cuando la tasa de interés se incrementa.
- iv. Hay una distribución en estado estacionario de la tasa de interés.

Las trayectorias del modelo CIR fueron simuladas a través de la ecuación (3.22), bajo los esquemas de Euler y Milstein con un tamaño de paso 1/100 para los diferentes parámetros de entrada. En todas las simulaciones se consideraron los siguientes valores: $k = 0,01452980$, $\theta = 0,09114096$,

$\sigma = 0,002260929$ y $r_0 = 0,5$, los datos provienen de la estimación de intereses interbancarios de depósitos mensuales observados del 10/31/1994 al 03/27/1996 (345 observaciones); en ambos casos se utilizó una data $N = 1000$. [4].

Para resolver numéricamente la ecuación (3.22) se desarrollaron códigos en “MatLab” los cuales se puede ver en la página [92].

Obteniendo así las siguientes gráficas que muestran las trayectorias de la solución según el esquema de Euler y el esquema de Milstein.

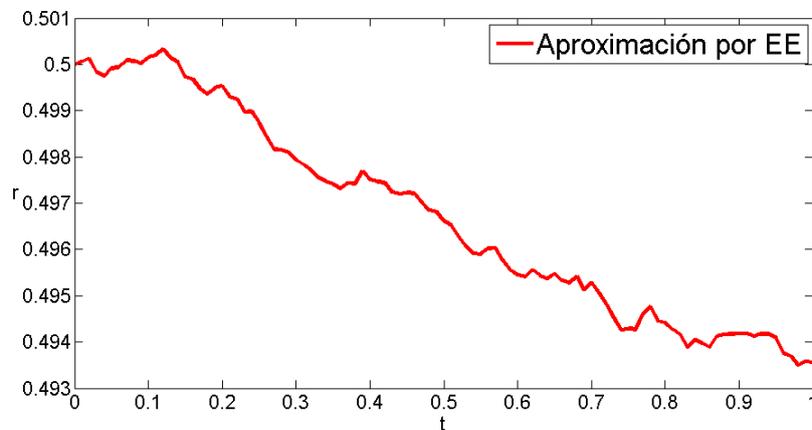


Figura 3.20: Aproximación según el Esquema de Euler para el modelo financiero, con $N = 1000$.

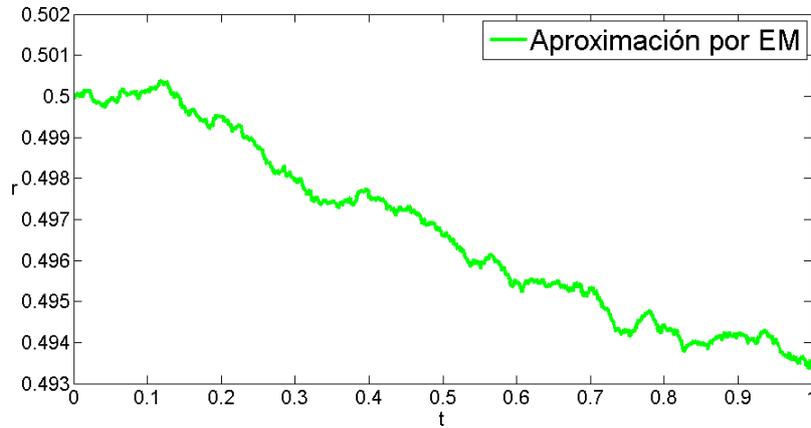


Figura 3.21: Aproximación según el Esquema de Milstein para el modelo financiero, con $N = 1000$.

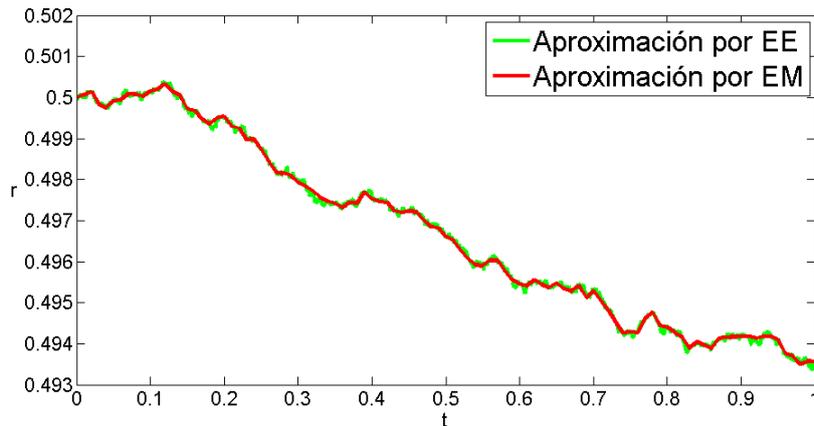


Figura 3.22: Aproximación según el Esquema de Euler y Esquema de Milstein para el modelo financiero, con $N = 1000$.

En este caso, para los valores que se consideraron en la simulación de las gráficas anteriores para las aproximaciones del esquema de Euler y del esquema de Milstein muestran la tendencia de la estimación de la tasa de interés de los depósitos interbancarios mensuales observados por dos años, los cuales fueron

progresivamente obteniendo una “tendencia” de decrecimiento, alcanzando su valor más alto al inicio de la venta del bono. Lo que se puede interpretar como una “caída” del valor del bono.

Anexos.

1. Anexo código de la Solución Analítica.

<i>Código de la solución analítica.</i>
<code>Xsa = X0*exp((mu-0.5*sigma^2)*([dt:dt:T])+sigma*B); plot([0:dt:T],[X0,Xsa], 'g--*')</code>

2. Anexo código del Esquema de Euler.

<i>Código del Esquema de Euler.</i>
Las variables de entrada.
T: tamaño de intervalo. R: número de pasos, N: número de variables aleatorias. dt: intervalos del MB. dB: incrementos del MB. L paso de tamaño.
Parámetros de la Solución: μ, σ, X_0
Xsa: Solución Analítica conocida,
Los valores que retorna son:
Xee: vector solución del EE. Dt: Delta(t), para el nuevo dominio del plot. emerrE: error entre la solución analítica y Euler.

Función de MATLAB:
<pre> function [Xee, Dt, emerrE] = Solucion_Eschema_Euler(T,R,N,dt,dB,mu,sigma,X0,Xsa,graf) DT = R*dt (Delta(t)) Dt=R*dt; L=N/R; Xee = zeros(1,L); Xtemp = X0; for j = 1:L Binc = sum(dB(R*(j-1) + 1:R*j)); Xtemp = Xtemp + mu*Xtemp*Dt + sigma*Xtemp*Binc; Xee(j) = Xtemp; end length([X0,Xee]) plot([0:Dt:T],[X0,Xee], 'r--') xlabel('t') ylabel('X','Rotation',0) legend('Aproximación por EE') title('Aproximación de EE, de una EDEL') Error emerrE = abs(Xee(end) - Xsa(end)) end </pre>

3. Anexo código del Esquema de Milstein.

<i>Código del Esquema de Milstein.</i>
Las variables que se consideran para pasarle a la función que realiza la solución por el esquema de Milstein.
T: tamaño de intervalo. N: número de variables aleatorias. dt: intervalos del MB. dB: incrementos del MB.
Parámetros de la Solución: μ , σ , X_0
Xsa: Solución Analítica conocida,
Los valores que retorna son:
Xm: vector solución del EM. emerrM: error entre la solución analítica y la calculada por Milstein.

Función de MATLAB:

```
function [Xm, emerrM] =
Solucion_Esquema_Mislteim(T,N,dt,dB,mu,sigma,X0,Xsa,graf)
    Xm = zeros(1,N);
    XtempM = X0;
    for j = 1:N
        BincM = sum(dB((j-1) + 1:j));
        XtempM = XtempM + mu*XtempM*dt + sigma*XtempM*BincM;
        Xm(j) = XtempM;
    end
    plot([0:dt:T],[X0,Xm], 'm--')
    xlabel('t')
    ylabel('X','Rotation',0)
    legend('Aproximación por EM')
    title('Aproximación de EM, de una EDEL')
    Error
    emerrM = abs(Xm(end) - Xsa(end))
end
```

4. Anexo código de la ecuación de Orstein-Uhlenbeckn para la ecuación (3.20).

Ecuación de Orstein-Uhlenbeckn con media revertida, para el Modelo Neuronal.
$dY = ((- Y/\tau_y) + \mu_y)*Dt +$ $(\gamma_y*\sqrt{Y - V})*dB, y_0 > 0$
Movimiento Browniano. [B,dB,dt] = Movimiento_Browniano(T, N,graf)
<pre> Solución por Euler. for j = 1:L [YeeOU, Dt, L] = Ecua_OU_Euler_Yt(T,R,N,dt,dB,tau_y,mu_y,gamma_y,V,y0,graf); DT = R*dt (Delta(t)) Dt=R*dt; L=N/R; YeeOU = zeros(1,L); YtempOU = y0; for j = 1:L BincOU = sum(dB(R*(j-1) + 1:R*j)); YtempOU = YtempOU + ((- YtempOU/tau_y) + mu_y)*Dt + (gamma_y*sqrt(YtempOU - V))*BincOU; YeeOU(j) = YtempOU; end plot([0:Dt:T],[y0,YeeOU], 'r--') xlabel('t') ylabel('Y_t','Rotation',0) legend('Aproximación por EE') title('Aproximación de EE, del Modelo de OU') end </pre>

```

Solución por Milstein
    YmOU =
Ecua_OU_Milstein_Yt(T,N,dt,dB,tau_y,mu_y,gamma_y,V,y0,graf);
    YmOU = zeros(1,N);
    YtempMOU = y0;
    for j = 1:N
        BincMOU = sum(dB((j-1) + 1:j));
        YtempMOU = YtempMOU + ((- YtempMOU / tau_y) + mu_y)*dt +
            (gamma_y*sqrt(YtempMOU - V))*BincMOU;
        YmOU(j) = YtempMOU;
    end
    plot([0:dt:T],[y0,YmOU], 'g--')
        xlabel('t')
        ylabel('X','Rotation',0)
        legend('Aproximación por EM')
        title('Aproximación de EM, del Modelo OU')
    end

plot([0:dt:T],[y0,YmOU], 'g--')
    xlabel('t')
    ylabel('Y_t','Rotation',0)
    title('Aproximación de EE y EM, del Modelo OU')
    hold on
    plot([0:Dt:T],[y0,YeeOU], 'r--')
    plot([0:Dt:T], S_y, 'b--')
        xlabel('t')
        ylabel('X','Rotation',0)
    legend('Aproximación por EE', 'Aproximación por EM',
        'Umbral S')

```

5. Anexo código de la ecuación de Orstein-Uhlenbeckn para la ecuación (3.21).

Ecuación de Orstein-Uhlenbeckn con media revertida, para el Modelo Neuronal
$dX = ((- X/\tau) + \mu)*Dt + (\gamma*\sqrt{X})*dB, x0 >0$
<code>[B,dB,dt] = Movimiento_Browniano(T, N,graf)</code>
<p style="text-align: center;">Solución por Euler.</p> <pre> [XeeOU, Dt, L] = Ecua_OU_Euler(T, R, N,dt, dB,tau, mu, gamma, x0,graf) Dt=R*dt; L=N/R; XeeOU = zeros(1,L); XtempOU = x0; for j = 1:L BincOU = sum(dB(R*(j-1) + 1:R*j)); XtempOU = XtempOU + ((- XtempOU/tau) + mu)*Dt + (gamma*sqrt(XtempOU))*BincOU; XeeOU(j) = XtempOU; end </pre>
<pre> plot([0:Dt:T],[x0,XeeOU], 'r--') xlabel('t') ylabel('X','Rotation',0) legend('Aproximación por EE') title('Aproximación de EE, del Modelo de OU') end </pre>
<p style="text-align: center;">Solución por Milstein.</p> <pre> XmOU = Ecua_OU_Milstein(T, N, dt, dB,tau, mu, gamma, x0,graf) XmOU = zeros(1,N); XtempMOU = x0; for j = 1:N BincMOU = sum(dB((j-1) + 1:j)); XtempMOU = XtempMOU + ((- XtempMOU / tau) + mu)*dt + (gamma*sqrt(XtempMOU))*BincMOU; XmOU(j) = XtempMOU; end </pre>

```
plot([0:dt:T],[x0,XmOU], 'g--')
    xlabel('t')
    ylabel('X','Rotation',0)
    legend('Aproximación por EM')
title('Aproximación de EM, del Modelo OU')
end
```

```
plot([0:dt:T],[x0,XmOU], 'g--')
    xlabel('t')
    ylabel('X','Rotation',0)
title('Aproximación de EM, del Modelo OU')
    hold on
    plot([0:Dt:T],[x0,XeeOU], 'r--')
    plot([0:Dt:T], S, 'b--')
        xlabel('t')
        ylabel('X','Rotation',0)
legend('Aproximación según EE', 'Aproximación según EM',
        'Umbral S')
title('Aproximación de EE, del Modelo de OU')
```

6. Anexo código de la ecuación para el Modelo CIR de la ecuación (3.22).

Ecuación para el Modelo Financiero
$dX_r = k(\text{tita} - X_r)dr + \text{GAMMA} (X_r)^{(1/2)}dW_r; x_0 > 0 +$
$[B, dB, dt] = \text{Movimiento_Browniano}(T, N, \text{graf})$
<pre> Solución por Euler. [XeeCIR, Dr]= Ecua_CIR_Euler(T, R, N,dt, dB, k,tita, GAMMA, x0cir,graf); EE L paso de tamaño Dr = R*dt (Delta(t)) Dr=R*dt; L=N/R; XeeCIR = zeros(1,L); XtempCIR = x0cir; for j = 1:L BincCIR = sum(dB(R*(j-1) + 1:R*j)); XtempCIR = XtempCIR + (k*(tita - XtempCIR))*Dr + (GAMMA*sqrt(XtempCIR))*BincCIR; XeeCIR(j) = XtempCIR; end plot([0:Dr:T],[x0cir,XeeCIR], 'r--') xlabel('x') ylabel('r','Rotation',0) legend('Aproximación según el Esquema de Euler') title('Aproximación según el Esquema de Euler, del Modelo CIR') end </pre>

```
Solución por Milstein
XmCIR =
Ecuacion_CIR_Milstein(T,N,dt,dB,k,tita,GAMMA,x0cir,graf);
XmCIR = zeros(1,N);
XtempMCIR = x0cir;
for j = 1:N
    BincMCIR = sum(dB((j-1) + 1:j));
    XtempCIR = XtempMCIR + (k*(tita - XtempMCIR))*dt +
        (GAMMA*sqrt(XtempMCIR))*BincMCIR;
    XmCIR(j) = XtempCIR
end
plot([0:dt:T],[x0cir,XmCIR], 'g--')
xlabel('x')
ylabel('r','Rotation',0)
legend('Aproximación por EM')
title('Aproximación según el Esquema de Milstein,
del Modelo CIR')
end
```

Bibliografía

- [1] Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S. *A theory of the term structure of interest rates*. *Econometrica* 53, 385-407 (1985).
- [2] Ditlevsen, S., Lnáský, P. *Estimation of the input parameters in the Feller neuronal model*. *Physical review E* 73, 061910 (2006).
- [3] Feller, William. *Introducción a la Teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Vol II (1978). Editorial Limusa.
- [4] Fernández Navas, Javier. *Pricing Interest-Rate Derivatives with Yield-Curve Term Structure Models*. *Matemática de las operaciones financieras*. Editorial Universitat de Barcelona. 745-770 (1997).
- [5] Lnáský, P., Lánská, V. *Diffusion approximation of the neuronal model with synaptic reversal potentials*. *Biol. Cybern.* 56, 19-26 (1987).
- [6] Mikhosch T. *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*, Vol 6 (1998).
- [7] Resnick, Sidney I. *A Probability Path*. Birkhäuser (1998).
- [8] Shinomoto, S., Sakai, Y., Funahashi, S. *The Ornstein-Uhlenbeck process does not reproduce spiking statistics of neurons in prefrontal cortex*. *Neural Comput.* 11, 935-951 (1999).
- [9] Wan, F., Tuckwell, H. *The response of a spatially distributed neuron for white noise current injection*. *Biol. Cybernetics* 33, 39-55 (1979).