



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Espectro del Grafo de Cayley de un Grupo Finito

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Reyfel Mendoza** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Manuel Maia.

Caracas, Venezuela

Octubre 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Espectro del Grafo de Cayley de un Grupo Finito**”, presentado por el **Br. Reyfel Mendoza**, titular de la Cédula de Identidad **19.753.462**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Manuel Maia
Tutor

Dra. Cristina Balderrama
Jurado

Dr. Mauricio Angel
Jurado

Dedicatoria

Esta trabajo especial de grado va dedicado a mis padres y a mi familia, con una mención especial de mi querida abuela que no pudo acompañarme hasta el final.

Agradecimientos

Gracias a Dios, porque creo en él y siento que me ha acompañado en cada paso de mi vida.

Gracias a mis padres y al resto de mi familia por haberme educado bien y haberme brindado apoyo a lo largo de mis estudios.

Gracias a mis profesores, a todos y cada uno de ellos, por haber tomado parte importante en mi formación académica.

Gracias a mi tutor, por haberme guiado a lo largo de este TEG.

Gracias a mis amigos y compañeros de estudios porque con ellos compartí momentos agradable e hicieron más placentero el paso de esta carrera.

Este Trabajo Especial de Grado fue financiado en parte gracias al proyecto PG 03-8261-2011/1 del Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares	3
1. Nociones y Resultados Básicos de la Teoría de Grafos	3
2. Grafos de Cayley	11
3. Nociones Básicas de Espacios con Producto Interno	17
Capítulo 2. Representaciones de Grupos	23
1. Representaciones Lineales y Matriciales	23
2. Subrepresentaciones e Irreducibilidad	26
3. Caracteres	29
4. Lema de Schur y Relaciones de Ortogonalidad	30
5. Número de Representaciones Irreducibles	33
6. Unitariedad	35
7. Descomposición en Irreducibles de la Representación Regular	36
8. Producto Directo de Grupos	38
9. Representaciones de Grupos Cíclicos	40
10. Representaciones de Grupos Abelianos Finitos	41
11. Grupo Diedral	42
Capítulo 3. Análisis de Fourier en Grupos Finitos.	46
1. Producto Convolución	46
2. Grupos Abelianos Finitos.	49
3. Grupos no Abelianos Finitos.	53
Capítulo 4. Espectros de Grafos de Cayley	56
1. Grupos Abelianos	56
2. Grupos no Abelianos	58

3. Grafos de Cayley Coloreados	60
4. Aplicaciones Combinatorias	72
Bibliografía	74

Introducción

Hay muchas aplicaciones de la matemática en otras ciencias. Tal es el caso de la teoría de grafos. Hoy día es rara la disciplina científica o humanística que no utilice la teoría de grafos, podemos nombrar, por ejemplo, a la sociología en dinámica de grupos, a la física teórica que usa diagramas de Feynmann, etc.

Un grafo no es más que un conjunto de puntos llamados vértices junto con un conjunto de pares de vértices llamado conjunto de aristas. Una fuente natural de grafos viene dada por los **grafos de Cayley**.

Los grafos de Cayley son grafos que pueden ser construidos a partir de un grupo G y de un subconjunto $S \subseteq G$ con ciertas relaciones. El uso de tales grafos para el análisis de propiedades de grupos finitos fue popularizado por Cayley a finales del siglo XIX. Hoy día, estos grafos han sido estudiados ampliamente para resolver problemas de teoría de números (como encontrar ciertas cotas), problemas computacionales, problemas en combinatoria, etc. El estudio de estos grafos forma parte de la teoría algebraica de grafos.

La teoría algebraica de grafos es el área de la matemática que estudia a los grafos mediante las propiedades algebraicas de las matrices asociadas a estos. Particularmente, *la teoría espectral de grafos* estudia las relaciones entre las propiedades de un grafo y el espectro (multiconjunto de autovalores) de la matriz de adyacencia o de la matriz de Laplace asociada a este.

La teoría espectral es muy útil y usada hoy día. Por ejemplo, el segundo autovalor más grande de un grafo provee información acerca de su expansión y propiedades de aleatoriedad, el autovalor más pequeño suministra información acerca de su número de independencia y número cromático.

En este trabajo nos interesará calcular espectros de grafos de Cayley. Para esto usaremos herramientas como:

- *La teoría de representaciones de grupos finitos*, que nace en 1896 en el trabajo del matemático alemán F. G Frobenius. Trabajo motivado por una carta que le envía R. Dedekind en donde le propone la solución al problema de factorizar un determinante asociado a un grupo; solución que Dedekind no había podido probar en general. Frobenius creó la teoría de representaciones para darle solución a este problema, y hoy día, estas ideas se han extendido a otras ramas de la matemática.
- *El análisis armónico*, que es una extensión del análisis de Fourier clásico proveniente de cambiar la línea real \mathbb{R} por cualquier grupo arbitrario G . (Aquí deben hacerse las consideraciones necesarias para el caso en que G es abeliano o no). Esta teoría no está separada de la teoría de representaciones de grupos en el sentido que (cuando se consideran grupos arbitrarios) las representaciones son usadas para reemplazar el rol que cumplen las funciones exponenciales en el análisis de Fourier clásico.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se introducirá en primer lugar, nociones básicas de teoría de grafos en general con conceptos como matriz de adyacencia y espectro; luego se dará la definición de grafo de Cayley, con varios ejemplos y propiedades básicas y veremos también un poco de espacios con producto interno. Posteriormente, en el segundo capítulo veremos algo de teoría de representaciones de grupos junto con los teoremas fundamentales de esta teoría y mostraremos representaciones de ciertos grupos. Más adelante, en el tercer capítulo veremos cómo el análisis de Fourier sobre grupos finitos nos proporciona los ingredientes finales para habilitar el cálculo del espectro de grafos de Cayley. Y finalmente en el cuarto capítulo, calcularemos el espectro de algunos grafos y daremos algunas aplicaciones combinatorias.

Preliminares

La teoría de grafos nace a raíz de un trabajo publicado por el matemático Leonhard Euler en 1736, trabajo en el cual el matemático resolvía un problema conocido en la época como “el problema de los puentes de Königsberg”. Hoy día esta teoría ha crecido grandemente y así también sus aplicaciones. En este capítulo daremos las definiciones más básicas. Veremos lo que es un grafo de Cayley y algunas de las propiedades relacionadas a la teoría de grupos y además las nociones básicas de espacios con producto interno. Muchas de las cosas expuestas en este capítulo fueron extraídas de [4] [9], [8] y [3].

1. Nociones y Resultados Básicos de la Teoría de Grafos

Definición 1.1. Un **grafo** es un par $\Gamma = (V, E)$, donde V es un conjunto finito de elementos llamados **vértices** y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V llamados **aristas**.

Observación 1.2. Los grafos pueden ser representados geoméricamente dibujando cada vértice como un punto en el plano, y cada arista como un segmento de recta o curva que una los vértices correspondientes. Debemos tener cuidado a la hora de dibujar las aristas para que, aparte de sus puntos extremos, no contengan ningún otro punto que represente un vértice del grafo.

Ejemplo 1.3. La Figura 1.1 muestra algunos ejemplos de grafos.

El **orden** del grafo Γ es el número $|V|$ de sus vértices. Si $\alpha = \{x, y\} \in E$, entonces α **une** los vértices x y y , y x y y son vértices de α . Si $x = y$, entonces α es un **lazo**.

Definición 1.4. Un **subgrafo** de Γ es un grafo H con conjunto de vértices $W \subseteq V$ y cuyas aristas son algunas, posiblemente todas, de las aristas de Γ que unen vértices en W . El subgrafo H es un **subgrafo inducido** de Γ siempre que cada arista de Γ que una vértices en W , sea también una arista de H .

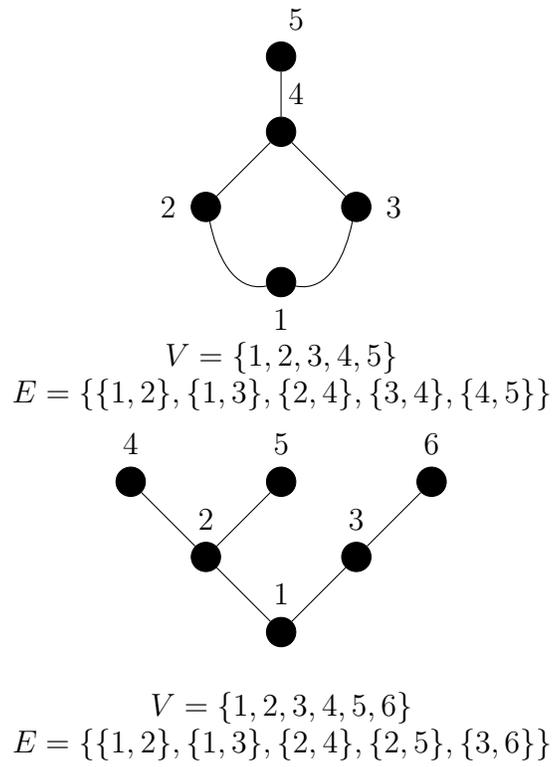


FIGURA 1.1. Algunos Grafos

El subgrafo H es un **subgrafo generador** de Γ siempre que $W = V$, es decir, siempre que H contenga todos los vértices de Γ (pero no necesariamente todas las aristas).

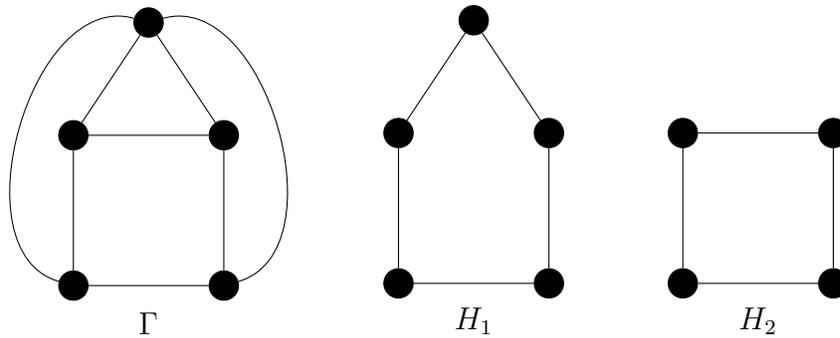


FIGURA 1.2. Subgrafos de un Grafo

Un grafo Γ y dos subgrafos H_1 y H_2 se muestran en la Figura 1.2. El grafo H_1 es un subgrafo generador de Γ , y el grafo H_2 no es un subgrafo generador pero sí es un subgrafo inducido.

Definición 1.5. Sea Γ un grafo. Un **camino** en Γ es una sucesión γ de vértices ($u = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = v$) tal que $\{x_i, x_{i+1}\}$ es una arista para cada $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Las aristas del camino γ son esas k aristas y la **longitud** de γ es k . Si $u = v$, entonces γ es un **camino cerrado**. Si $u = v$ y los vértices $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$ son todos distintos, entonces γ es un ciclo. El grafo Γ es **conexo** si para cada par de vértices distintos u y v existe un camino que une a u y a v . Un grafo que no es conexo es llamado **disconexo**.

Ejemplo 1.6. En el grafo de la Figura 1.6, $\gamma_1 = (1, 4, 3)$ y $\gamma_2 = (1, 5, 2, 3)$ son caminos que unen a los vértices 1 y 3 de longitudes 2 y 3 respectivamente. $\gamma_3 = (1, 4, 3, 2, 5, 1)$ es un camino cerrado, más aún, es un ciclo. Y el grafo es conexo.

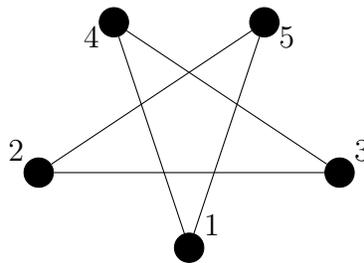


FIGURA 1.3. Grafo Conexa

Definición 1.7. En un grafo Γ , el **grado** de un vértice u es el número de aristas que contienen a u .

Definición 1.8. Un grafo es **regular** si cada vértice tiene el mismo grado. Si k es el grado común, entonces el grafo es **regular de grado k** .

Definición 1.9. El **grafo completo** K_n de orden n es el grafo regular de orden $n - 1$ en el cual cada par de vértices distintos forman una arista.

Ejemplo 1.10. En la Figura 1.10 se muestra el grafo completo para $n = 6$.

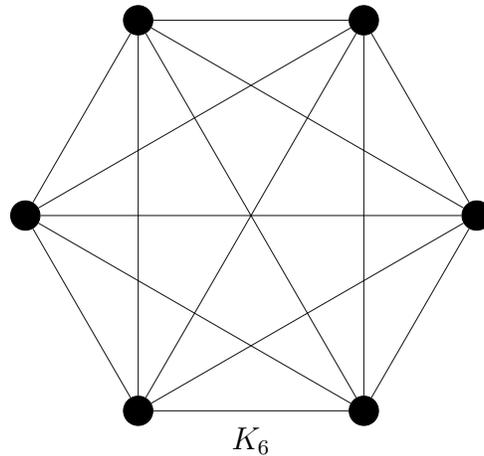


FIGURA 1.4. Un Grafo Completo

Definición 1.11. Sea Γ_1 un grafo con conjunto de vértices V y sea Γ_2 un grafo con conjunto de vértices W . Un isomorfismo de Γ_1 a Γ_2 es una biyección $\phi : V \rightarrow W$ tal que $\{x, y\}$ es una arista en Γ_1 si y sólo si $\{\phi(x), \phi(y)\}$ es una arista de Γ_2 . Si ϕ es un isomorfismo de Γ_1 a Γ_2 , entonces claramente $\phi^{-1} : W \rightarrow V$ es un isomorfismo de Γ_2 a Γ_1 . Los grafos Γ_1 y Γ_2 son **isomorfos** siempre que exista un isomorfismo entre ellos.

Ejemplo 1.12. Los grafos Γ_1 y Γ_2 de la Figura 1.5 son isomorfos. Basta considerar la función ϕ

$$\begin{aligned} & \phi \\ a & \leftrightarrow 1 \\ b & \leftrightarrow 2 \\ c & \leftrightarrow 3 \\ d & \leftrightarrow 4 \\ e & \leftrightarrow 5 \end{aligned}$$

Definición 1.13. Un **grafo dirigido** (digrafo) Γ consta de un conjunto finito V de elementos llamados **vértices** y un conjunto E de pares ordenados de vértices llamados **aristas** (dirigidas). El **orden** del digrafo Γ es el número $|V|$ de sus vértices. Si $\alpha = (x, y)$ es una arista, entonces x es el **vertice inicial** de α e y es el **vertice final**, y decimos que α es una arista de x a y . Si $x = y$ decimos que α es un lazo con vértice final e inicial igual a x .

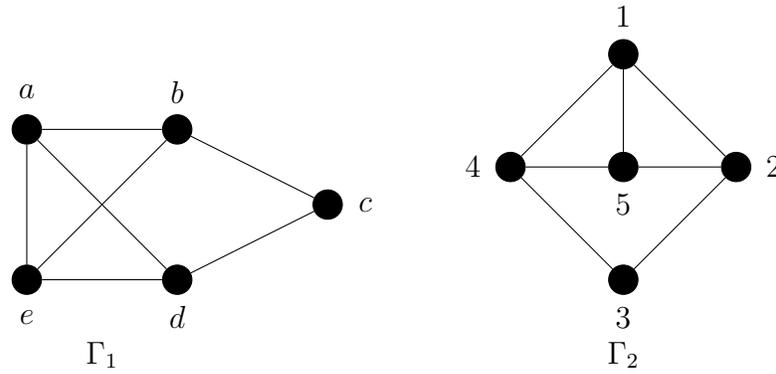


FIGURA 1.5. Grafos Isomorfos

Las demás definiciones para digrafos se extienden, a partir de las definiciones de grafos, de manera natural.

Definición 1.14 (Matriz de adyacencia). Sea Γ un grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas E . La matriz de adyacencia $A = (a_{ij})$, con respecto a esta enumeración de los vértices, está dada por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{si } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Ejemplo 1.15. La matriz de adyacencia de K_6 (Ejemplo 1.10) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición 1.16. El **espectro** de un grafo Γ es el conjunto de todos los autovalores de su matriz de adyacencia junto con sus respectivas multiplicidades. Si $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_s$ son los distintos autovalores de la matriz de adyacencia de un grafo Γ y $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_s)$ sus respectivas multiplicidades, entonces escribimos

$$\text{Spec}(\Gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.17. El polinomio característico de la matriz de adyacencia del grafo K_6 (Ejemplo 1.10) es

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 15\lambda^4 - 40\lambda^3 - 45\lambda^2 - 24\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^5.$$

Entonces el espectro correspondiente al grafo es

$$\text{Spec}(K_6) = \left(\begin{array}{cc} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{array} \right).$$

Proposición 1.18. Si A y B son dos matrices de adyacencia de un grafo $\Gamma = (V, E)$ usando enumeraciones diferentes para los vértices, entonces A y B tienen los mismos autovalores.

DEMOSTRACIÓN. Sean $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ los vértices del grafo Γ y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de adyacencia de Γ con respecto a esta enumeración de los vértices, es decir

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\sigma \in S_n$, el grupo simétrico sobre $\{1, \dots, n\}$, y tomemos a $B = (b_{ij})$ como la matriz de adyacencia de Γ con respecto a la enumeración de los vértices $V = \{v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$, es decir

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)}\} \in E \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Consideremos a $[\sigma]$ como la matriz que se obtiene de la matriz identidad (I) permutando sus filas según σ , es decir,

$$[\sigma]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $[\sigma]$ es invertible y que $[\sigma]^{-1}$ satisface que

$$[\sigma]_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que el coeficiente ij de la matriz $[\sigma]^{-1}A[\sigma]$ cumple que

$$\begin{aligned} [\sigma]^{-1}A[\sigma]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [\sigma]_{ik}^{-1} \left(\sum_{l=1}^n a_{kl} [\sigma]_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n [\sigma]_{ik}^{-1} a_{k\sigma(j)} \\ &= a_{\sigma(i)\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)}\} \in E \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \\ &= b_{ij}. \end{aligned}$$

De donde $B = [\sigma]^{-1}A[\sigma]$.

Y por último, observe que si $p_A(\lambda)$ y $p_B(\lambda)$ son los polinomios característicos de A y B respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det([\sigma]^{-1}A[\sigma] - \lambda I) \\ &= \det([\sigma]^{-1}A[\sigma] - \lambda[\sigma]^{-1}[\sigma]) \\ &= \det([\sigma]^{-1}(A - \lambda I)[\sigma]) \\ &= \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

De donde se deduce inmediatamente que A y B tienen los mismos autovalores. \square

Como el espectro de un grafo es independiente de la enumeración de los vértices, podríamos pensar que el espectro quizá pudiera describir la estructura de un grafo salvo isomorfismos. Pero este no es el caso. Si dos grafos son isomorfos, es claro que tienen el mismo espectro, pero existen grafos que tienen el mismo espectro y no son isomorfos. Esos grafos son llamados **coespectrales**.

Ejemplo 1.19. Los grafos de la Figura 1.6 no son isomorfos, sin embargo, el polinomio característico de ambos es

$$p(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda + 1).$$

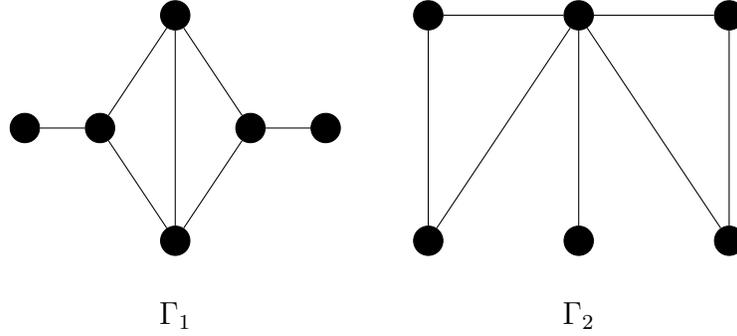


FIGURA 1.6. Grafos Coespectrales

Es de notar que la matriz de adyacencia de un grafo es siempre simétrica y por tanto diagonalizable con autovalores reales, por el teorema espectral para matrices. Se puede obtener información importante de los autovalores, tal como el número de árboles generados, por ejemplo. También, se puede verificar que A_{ij}^n (la entrada ij de la matriz A^n) es el número de caminos de longitud n de v_i a v_j .

Proposición 1.20. *Sea A la matriz de adyacencia de un grafo Γ con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_m\}$. El coeficiente ij de A^n , A_{ij}^n , es el número de caminos de longitud n de v_i a v_j .*

DEMOSTRACIÓN. Procedemos por inducción.

El caso $n = 1$ es trivial, pues A es la matriz de adyacencia.

Supongamos que el enunciado de la proposición es cierto para $n = k - 1$. Y probemos para $n = k$.

El coeficiente ij de la matriz A^k viene dado por

$$A_{ij}^k = \sum_{m=1}^m A_{im}^{k-1} a_{mj}.$$

Observe que el coeficiente $A_{im}^{k-1} a_{mj}$ es distinto de cero solamente en el caso en que hay A_{im}^{k-1} caminos de longitud $k - 1$ del vértice v_i al vértice v_m y un camino del vértice v_m al vértice v_j , es decir, A_{im}^{k-1} caminos de longitud k que van del vértice v_i al vértice v_j y que pasan en su penúltimo paso por el vértice v_m . Como la suma es sobre todos los posibles vértices v_m , se tiene el resultado requerido. \square

Ejemplo 1.21. Considere el grafo en la Figura 1.21 con su matriz de adyacencia.

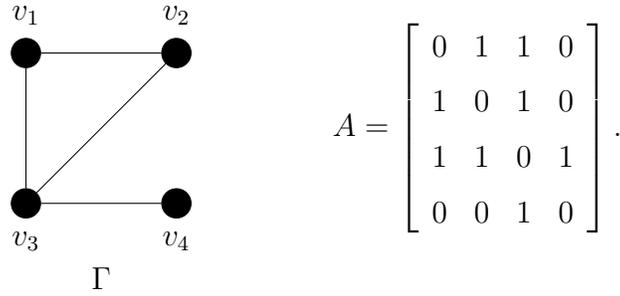


FIGURA 1.7. Grafo y Matriz de Adyacencia

El cuadrado de la matriz de adyacencia A_Γ viene dado por:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fíjese que $A_{33}^2 = 3$ es el número de caminos de longitud 2 que comienzan y terminan en V_3 ((v_3, v_1, v_3) , (v_3, v_2, v_3) y (v_3, v_4, v_3)) y $A_{12}^2 = 1$ indica que hay un solo camino de longitud 2 entre el vértice v_1 y el vértice v_2 (a saber (v_1, v_3, v_2)).

Para seguir ilustrando un poco, tomemos ahora el cubo de la matriz de adyacencia A

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notece que $A_{13}^3 = 4$ indica que hay 4 caminos de longitud 3 entre el vértice v_1 y el vértice v_3 ((v_1, v_3, v_1, v_3) , (v_1, v_2, v_1, v_3) , (v_1, v_3, v_2, v_3) y (v_1, v_3, v_4, v_3)) y $A_{11}^3 = 2$ nos indica que hay 2 caminos de longitud 3 que comienzan y terminan en el vértice v_1 ((v_1, v_2, v_3, v_1) y (v_1, v_3, v_2, v_1)).

2. Grafos de Cayley

Definición 1.22. Sea G un grupo finito. Diremos que un subconjunto S de G es **simétrico** si:

- $e \notin S$, donde e es el elemento neutro de G ;
- $s \in S$ implica que $s^{-1} \in S$.

Si S es un subconjunto simétrico de G , entonces el **grafo de Cayley** de G con respecto a S es el grafo $C(G, S)$ con conjunto de vértices igual a G y existe una arista $\{g, h\}$ conectando a g y a h si $gh^{-1} \in S$, o equivalentemente, si $hg^{-1} \in S$.

Observación 1.23. En esta definición S puede ser vacío, caso en el cual el grafo de Cayley no tiene ninguna arista.

Una definición más general es la siguiente:

Definición 1.24. Si G un grupo finito y $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función a valores complejos definida sobre G . El **grafo de Cayley coloreado** $X(G, \alpha)$ es el grafo dirigido completo con conjunto de vértices G , donde a cada arco $(g_1, g_2) \in G \times G$ se le asocia un color $\alpha(g_2g_1^{-1})$.

Entonces la Definición 1.22 es equivalente a:

Si $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ es la función característica de un subconjunto simétrico $S \subset G$, es decir,

$$\alpha(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in S; \text{ y} \\ 0 & \text{si } g \notin S, \end{cases}$$

entonces $X(G, \alpha)$ es un **grafo de Cayley**. En este casos estamos considerando a $X(\alpha, S) = C(G, S)$ como el (di)grafo formado borrando las aristas de color 0 del grafo coloreado.

Ejemplo 1.25. Sea $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Entonces todos los posibles grafos de Cayley se pueden ver en la Figura 1.8.

Ejemplo 1.26. Si $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y $S = \{[1], -[1]\}$ entonces $C(G, S)$ es el ciclo de n vértices. Para ver el grafo para $n = 5$ en la Figura 1.26.

Ejemplo 1.27. Sea \mathbb{Z}_2^n , $n \geq 1$, y supongamos que S es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{Z}_2^n$ con exactamente una coordenada igual a 1. El grafo de Cayley resultante $C(\mathbb{Z}_2^n, S)$ es el llamado **hipercubo** n -dimensional. En la Figura 1.27 se muestran los casos $n = 3$ y $n = 4$.

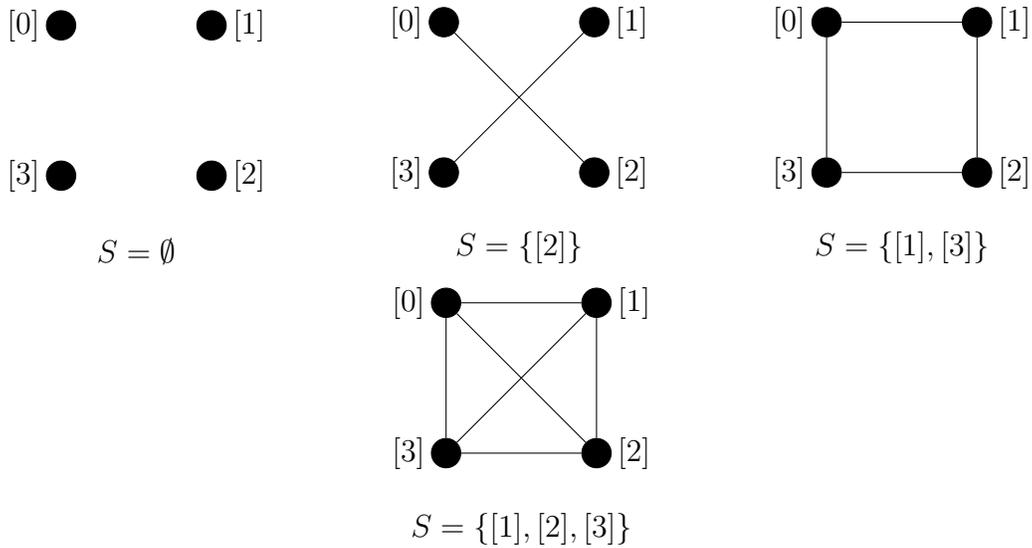


FIGURA 1.8. Posibles Grafos de Cayley para $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

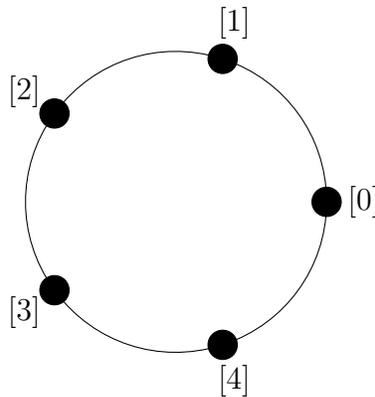


FIGURA 1.9. Ciclo de 5 vértices

Ejemplo 1.28. Sea $G = S_4$, el grupo simétrico sobre $\{1, 2, 3, 4\}$, y tomemos a S como el conjunto de todas las transposiciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$. El grafo de Cayley resultante $C(S_4, S)$ se muestra en la Figura 1.28.

Ejemplo 1.29. Sea $G = D_n$, el grupo diedral de orden $2n$ (para una descripción de D_n ver la sección 11 del Capítulo 2), y tomemos $S = \{r, r^{n-1}, s\}$. El grafo de Cayley resultante $C(D_n, S)$ está dibujado en la Figura 1.29 para el caso $n = 5$.

Las siguientes propiedades de los grafos de Cayley son de fácil verificación:

Teorema 1.30. Sea $\Gamma = C(G, S)$ un grafo de Cayley. Entonces,

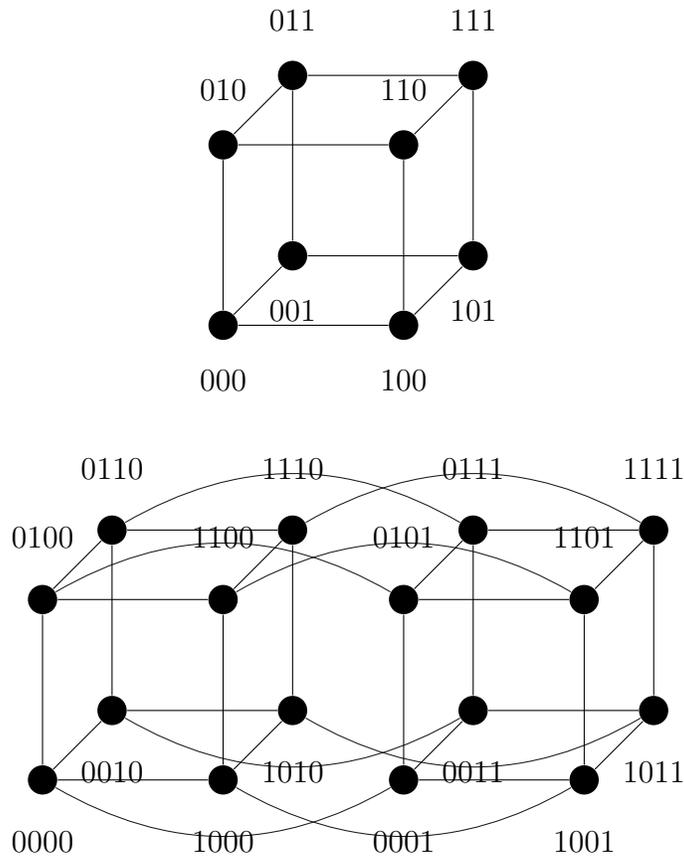


FIGURA 1.10. Hipercubos

- (1) Γ es regular de grado $|S|$.
- (2) Γ es conexo si, y sólo si S genera a G .

DEMOSTRACIÓN. Para la parte (1). Sea $g \in G$. Entonces el conjunto de las aristas que contienen a g viene dado por $E_g = \{\{g, sg\} : s \in S\}$ pues $(sg)(g^{-1}) = s \in S$. Y es claro que el grado de g es $|E_g| = |S|$.

Para la parte (2).

Si Γ es conexo entonces para cada par de vértices $g, h \in G$ existe un camino que los une. En particular, si $h = 1_G$ la identidad de G entonces existe un camino $\gamma = (g = g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n = 1_G)$ donde cada $\{g_i, g_j\}$, $i < j$, forma una arista; es decir, existe $s_i \in G$ tal que $g_i = s_i g_j$. Y así, $g = g_0 = s_0 s_1 \dots s_{n-1} 1_G = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Como g es arbitrario, se tiene que S genera a G .

Definición 1.31. La matriz de adyacencia A de un grafo de Cayley coloreado $X(G, \alpha)$ es la matriz de orden $|G| \times |G|$ en cuya fila- g_2 columna- g_1 la entrada $a_{g_2g_1}$ es $\alpha(g_2g_1^{-1})$ para todos $g_1, g_2 \in G$.

Observación 1.32. En el caso de grafos de Cayley, la matriz de adyacencia de $C(G, S)$ corresponde a la definición estandar: hay una arista de g_1 a g_2 si, y sólo si, $a_{g_2g_1} = \alpha(g_2g_1^{-1}) = 1$, lo cual es equivalente a decir que existe un $s \in S$ tal que $g_2 = sg_1$.

Ejemplo 1.33. Sea $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $S = \{\pm[1]\}$. Entonces el grafo de Cayley de G con respecto a S es el dibujado en la Figura 1.13.

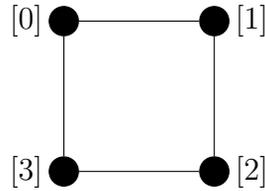


FIGURA 1.13. El grafo de Cayley de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ con respecto a $\{\pm[1]\}$

La matriz de adyacencia del grafo de la Figura 1.13 es:

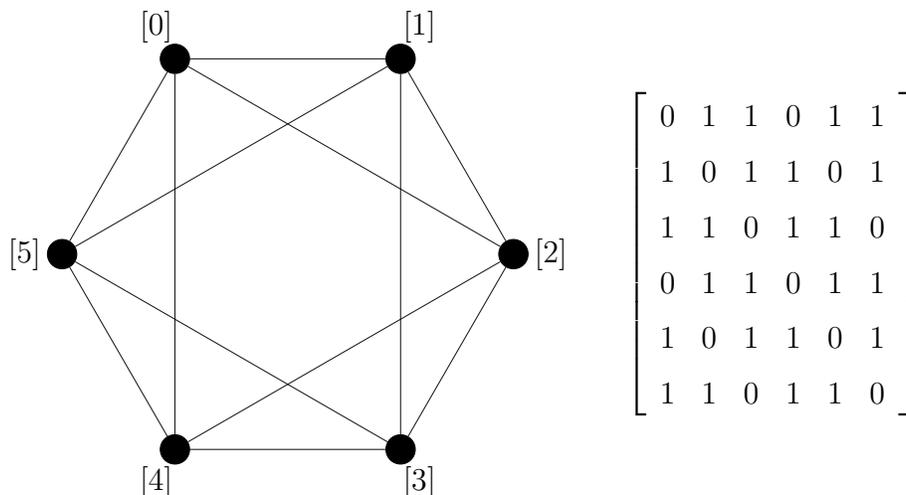
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.34. Si $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $S = \{[1], [2], [4], [5]\}$, entonces el grafo de Cayley y la matriz de adyacencia están en la Figura 1.34.

Los grafos que hemos considerado en los dos ejemplos anteriores son grafos de Cayley de grupos cíclicos. Tales grafos tienen un nombre especial.

Definición 1.35 (Grafo circulante). Un grafo de Cayley de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es llamado **grafo circulante** (de n vértices).

La matriz de adyacencia de un grafo circulante es un caso especial de matriz conocida como matriz circulante.



Definición 1.36 (Matriz circulante). Una **matriz circulante** $n \times n$ es una matriz de la forma

$$(1.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ a_2 & \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Equivalentemente, una matriz A es circulante si existe una función $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $A_{ij} = f([j] - [i])$. En (1.1), tenemos que $a_i = f([i])$ para $0 \leq i \leq n-1$. Si S es un subconjunto simétrico de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, entonces la matriz circulante correspondiente a la función indicadora δ_S del conjunto S es la matriz de adyacencia del grafo de Cayley de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con respecto a S .

3. Nociones Básicas de Espacios con Producto Interno

Sea V un espacio vectorial complejo, i.e, un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} . Un **producto interno** en V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades: para todo $x, y, z \in V$ y $c \in \mathbb{C}$,

- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\langle cx + y, z \rangle = c\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Un espacio vectorial en el que está definido un producto interno es llamado **espacio con producto interno**.

Ejemplo 1.37. El espacio vectorial complejo \mathbb{C}^n es un espacio con producto interno con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ son vectores en \mathbb{C}^n .

Observación 1.38. Todos los resultados en esta sección serán enunciados para espacios de dimensión finita, aun cuando hay resultados que valen para dimensión infinita.

Supongamos que V es un espacio complejo con producto interno. La **norma** (o longitud) de un vector $x \in V$, denotada por $\|x\|$, está definida como el número (no negativo) $\sqrt{\langle x, x \rangle}$. Dos vectores x y y en V se dicen **ortogonales** o **perpendiculares** (en símbolos $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$. Los últimos tres ítems de las propiedades del producto interno implican que el único vector ortogonal a cada vector en V es el vector cero. Por esta razón la norma del vector cero es igual a cero. Un vector no nulo x es llamado **unitario** si $\|x\| = 1$. Un subconjunto E de V es llamado **conjunto ortonormal** si cada vector en E es un vector unitario y además es ortogonal a cada otro vector en E . Si E es un conjunto ortonormal y también es una base para V entonces se dice que E es una base ortonormal.

Sea $\Lambda : V \rightarrow W$ un operador lineal, donde W es también un espacio con producto interno sobre los complejos. Se dice que el operador Λ : es sobre V si $W = V$, es un funcional lineal si $W = \mathbb{C}$, y una isometría si es biyectivo y preserva el producto interno, i.e.,

$$\langle \Lambda(x), \Lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

para todo $x, y \in V$. Es fácil verificar que la inversa de una isometría es también una isometría. De este modo, podemos hablar de una isometría entre dos espacios con producto interno. Dos espacios con producto interno se dicen isométricos (en símbolos $V \simeq W$) si existe una isometría entre ellos.

Supongamos que V es un espacio con producto interno sobre los complejos. El conjunto V^* de todos los funcionales lineales sobre V es un espacio vectorial complejo con respecto a las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas punto a punto como sigue:

para $f, g \in V^*$ y $c \in \mathbb{C}$, la suma de f y g , denotada por $f + g$, y la multiplicación por un escalar de f por c , denotada por cf , están definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$cf(x) = c(f(x))$$

para todo $x \in V$. El espacio vectorial V^* es llamado el espacio dual de V .

Para exhibir algunos elementos de V^* , para cada $y \in V$, definimos la función $\ell_y : V \rightarrow \mathbb{C}$ por $\ell_y(x) = \langle x, y \rangle$. Como el producto interno es lineal en la primera variable, ℓ_y es un funcional lineal sobre V , esto es, $\ell_y \in V^*$. De hecho, cada funcional lineal sobre V puede ser obtenido de esta manera si V es de dimensión finita.

Teorema 1.39. *Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita sobre los complejos. La función $\ell : V \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal si, y sólo si existe un único vector $y \in V$ tal que $\ell(x) = \langle x, y \rangle$ para cada $x \in V$.*

Del Teorema se deduce que hay una correspondencia biunívoca entre V y V^* , que está dada por $v \leftrightarrow \ell_v$, donde $\ell_v(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in V$. Ya que

$$(1.2) \quad \ell_{cv} = \bar{c}\ell_v \text{ y } \ell_{v+v'} = \ell_v + \ell_{v'},$$

para todo $v, v' \in V$ y $c \in \mathbb{C}$, la correspondencia $v \leftrightarrow \ell_v$, que es conjugada lineal, induce un producto interno en V^* definido en términos del producto interno en V por la ecuación

$$(1.3) \quad \langle \ell_v, \ell_{v'} \rangle = \overline{\langle v, v' \rangle}.$$

En consecuencia, la relación $\|\ell_v\| = \|v\|$ se satisface para cada $v \in V$; es decir, cada funcional lineal sobre V tiene norma finita.

Para cada $v \in V$, el funcional lineal ℓ_v , es llamado el **dual** de v , es frecuentemente denotado por v^* . Con esta notación, tenemos

$$(1.4) \quad v^*(x) = \langle x, v \rangle.$$

En general, una base de V induce una base para V^* . Más aún, bases ortonormales inducen bases ortonormales.

Ahora se ilustrará un caso especial. Suponga que la dimensión de V es n y $E = \{e_j \mid j = 1, \dots, n\}$ es una base ortonormal para V . Ya que cada elemento en V^* es de la forma v^* para algún

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j \in V,$$

por (1.2) tenemos que

$$v^* = \sum_{j=1}^n \overline{\langle v, e_j \rangle} e_j^*.$$

Se sigue que el conjunto $E^* = \{e_j^* \mid j = 1, \dots, n\}$ genera al espacio V^* . Mas aún, la relación (1.3) implica que E^* es un conjunto ortonormal, por tanto es una base ortonormal de V^* . En consecuencia tenemos que $\dim V = \dim V^*$. La base E^* es conocida como la **base dual** de E .

Sea S un conjunto finito no vacío y sea V_S el conjunto de todas las funciones a valores complejos definidas sobre S . Entonces V_S es un espacio vectorial con respecto a la suma y multiplicación por un escalar definidas punto a punto. Además, V_S se transforma en un espacio producto interno si definimos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s) \overline{g(s)}.$$

Con esta definición, es simple contruir una base ortonormal para V_S . Para cada $s \in S$, sea $\delta_s : S \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = t \\ 0 & \text{si } s \neq t. \end{cases}$$

Entonces es obvio que el conjunto $\Delta_S = \{\delta_s \mid s \in S\}$ es una base ortonormal para V_S , llamada la base estandar. Como S es un conjunto finito, V_S es un espacio producto interno de dimensión finita sobre los complejos. De hecho, $V_S \sim \mathbb{C}^n$, donde $n = |S|$. Por esta razón, S sirve como conjunto de índices para cualquier base de V_S .

Supongamos, además, que $B_S = \{B_s \mid s \in S\}$ es otra base ortonormal de V_S . Puesto que cada $x \in V_S$ puede ser escrito unicamente como

$$x = \sum_{s \in S} \langle x, B_s \rangle B_s = \sum_{s \in S} B_s B_s^*(x),$$

el operador identidad sobre V_S puede ser expresado en términos de la base B_S y su dual B_S^* como

$$(1.5) \quad I = \sum_{s \in S} B_s B_s^*.$$

En términos de la base dual Δ_S^* , tenemos

$$B_s^* = \sum_{t \in S} \langle B_s^*, \delta_t^* \rangle \delta_t^* = \sum_{t \in S} t \in S \langle \delta_t, B_s \rangle \delta_t^*,$$

por consiguiente

$$I = \sum_{s, t \in S} \langle \delta_t, B_s \rangle B_s \delta_t^*.$$

Se sigue que la imagen de cualquier $x \in V_S$ bajo cualquier operador lineal Λ sobre V_S está dada por

$$\Lambda(x) = \sum_{s, t \in S} \langle \delta_t, B_s \rangle \Lambda(B_s) \delta_t^*(x).$$

por tanto,

$$(1.6) \quad \Lambda = \sum_{s, t \in S} \langle \delta_t, B_s \rangle \Lambda(B_s) \delta_t^*.$$

En la ecuación (1.6), para cada $s \in S$, $\Lambda(B_s)$ puede ser cualquier vector en V_S . Ahora destacaremos un operador que envía B_s a el único elemento de la base Δ_S que está asociado con B_s en una forma muy natural: para un $s \in S$ fijo, por (1.5),

$$(1.7) \quad B_s = \sum_{t \in S} B_t B_t^*(B_s) = \sum_{t \in S} \delta_s(t) B_t.$$

La unicidad de esta expresión (de B_s en la base B_S) induce una correspondencia biyectiva $B_s \leftrightarrow \delta_s$, que es independiente de cualquier enumeración (o indexado de elementos) de la base B_S . A través de esta correspondencia, definimos un operador lineal \mathcal{F} sobre V_S como $\mathcal{F}(B_s) = \delta_s$ para cada $s \in S$.

El siguiente teorema es consecuencia de la definición de \mathcal{F} y la ecuación (1.6).

Teorema 1.40. *Asuma lo siguiente:*

- S es un conjunto finito no vacío y V_S es el espacio producto interno asociado de funciones a valores complejos definidas sobre S ;

- $\Delta_S = \{\delta_s \mid s \in S\}$ y $B_S = \{B_s \mid s \in S\}$ son dos bases ortonormales de V_S , donde Δ_S es la base estándar;
- \mathcal{F} es el operador lineal sobre V_S tal que $\mathcal{F}(B_s) = \delta_s$ para cada $s \in S$, donde δ_s es el único vector en Δ_S asociado a B_s por la ecuación (1.7)

Entonces

$$(1) \mathcal{F} = \sum_{s,t \in S} \langle \delta_t, B_s \rangle \delta_s \delta_t^*$$

(2) \mathcal{F} es una isometría, y

(3) $\mathcal{F}f(s) = \langle f, B_s \rangle$, para cualquier $f \in V_S$. (Aquí escribimos $\mathcal{F}f$ para $\mathcal{F}(f)$.)

Representaciones de Grupos

El propósito original de la teoría de representaciones era servir de herramienta para obtener información de grupos finitos mediante métodos de algebra lineal. El primer gran logro de la teoría de representaciones fue el teorema de Burnside pq , que establece que un grupo no abeliano de orden $p^a q^b$, con p, q primos, no puede ser simple. La teoría de representaciones se extiende ahora a otras áreas. Nosotros la usaremos como herramienta para el cálculo del espectro de cierto grafos.

En este capítulo veremos los teoremas más fundamentales de esta teoría y mostraremos las distintas representaciones de ciertos grupos. Las referencias para este capítulo son [8], [5] y [1].

1. Representaciones Lineales y Matriciales

Para un grupo finito G denotamos por $\mathbb{C}[G]$ al espacio vectorial complejo de dimensión $|G|$ generado por los elementos de G , con base $\{e_g\}_{g \in G}$. Así, un elemento $\phi \in \mathbb{C}[G]$ tiene la forma

$$\phi = \sum_{g \in G} \mu_g e_g, \quad \mu_g \in \mathbb{C}.$$

Podemos identificar a $\mathbb{C}[G]$ con el espacio vectorial V_G de todas las funciones, a valores complejos, definidas sobre G . Esto es, una función $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ corresponde a el vector $\phi = \sum_{g \in G} \phi(g) e_g$ y viceversa. En particular, los vectores $\{e_g\}_{g \in G}$ de la base estandar corresponden a las funciones

$$e_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = g \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El producto interno de dos vectores $\phi, \psi \in \mathbb{C}[G]$ está definido por

$$(2.1) \quad \langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}$$

donde $\overline{\psi(g)}$ denota el complejo conjugado de $\psi(g)$.

Usamos el símbolo δ para la delta de Kronecker, esto es,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definición 2.1. Sea G un grupo finito, y sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Una **representación lineal** de G sobre V es un homomorfismo de grupo $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, donde $\text{GL}(V)$ denota al grupo de todas las transformaciones lineales biyectivas de V en V . El **grado** de una representación es la dimensión de V .

Ejemplo 2.2 (Representación Regular). Sea G un grupo finito. **La representación regular** (izquierda) ρ_{reg} de G sobre $\mathbb{C}[G]$ está definida por su acción sobre la base $\{e_h\}_{h \in G}$: para todos $g, h \in G$

$$\rho_{reg}(g)e_h = e_{gh}.$$

La representación regular tiene grado $|G|$.

Ejemplo 2.3. Sea $G = \{e, g, g^2, g^3\}$ el grupo cíclico de orden 4. $V = \mathbb{C}$. Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de G sobre V . Veamos como sería ρ . Notemos que $\rho(h)$ para todo $h \in G$ debe ser una transformación lineal e invertible sobre \mathbb{C} . Como \mathbb{C} tiene dimensión 1 sobre \mathbb{C} , para cada $h \in G$ existe un único número complejo $a \neq 0$ tal que $\rho(h)(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{C}$; y así $\rho(h) = a$. Y la condición de que ρ sea un homomorfismo de grupo implica que:

$$\rho(e) = 1,$$

y si $\rho(g) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}^*$ (el grupo multiplicativo de los complejos), entonces

$$c^4 = (\rho(g))^4 = \rho(g^4) = \rho(e) = 1.$$

Esto nos dice que c tiene que ser una raíz cuarta de la unidad y en consecuencia, G tiene sólo cuatro representaciones de grado 1 posibles, las veremos en la siguiente tabla.

	e	g	g^2	g^3
ρ_1	1	1	1	1
ρ_2	1	i	-1	$-i$
ρ_3	1	-1	1	-1
ρ_4	1	$-i$	-1	i

Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación lineal de G de grado d y sea $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ una base de V . La **representación matricial** de ρ relativa a B es una función ϱ que asocia a cada $g \in G$ la matriz $d \times d$, $\varrho(g)$, de $\rho(g)$ relativa a B . Para $1 \leq i, j \leq d$, escribimos $\varrho_{ij}(g)$ para el coeficiente ubicado en la posición ij (fila i , columna j) de $\varrho(g)$. En otras palabras, los $\varrho_{ij}(g)$ son los únicos números complejos que satisfacen

$$\rho(g)b_j = \sum_{i=1}^d \varrho_{ij}(g)b_i$$

para todo $1 \leq i, j \leq d$. Una representación matricial ϱ define una colección de d^2 vectores en $\mathbb{C}[G]$. Es decir, para todo $1 \leq i, j \leq d$

$$\varrho_{ij} = \sum_{g \in G} \varrho_{ij}(g)e_g$$

es un vector en $\mathbb{C}[G]$.

Definición 2.4. Dos representaciones $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ y $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ son **equivalentes** si existe una transformación lineal biyectiva $T : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\rho_2(g) = T\rho_1(g)T^{-1}$ para todo $g \in G$.

Ejemplo 2.5. Definamos $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ por

$$\phi[m] = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{bmatrix},$$

que es la matriz de rotación por $2\pi m/n$, y $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ por

$$\psi[m] = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi mi}{n}} \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que ϕ y ψ son representaciones. Consideremos ahora

$$T = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde

$$T^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}.$$

cálculos directos muestran que

$$\begin{aligned} T^{-1}\phi[m]T &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi m}{n}) & -\sin(\frac{2\pi m}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi m}{n}) & \cos(\frac{2\pi m}{n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi mi}{n}} & ie^{\frac{2\pi mi}{n}} \\ -e^{-\frac{2\pi mi}{n}} & ie^{-\frac{2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 2ie^{\frac{2\pi mi}{n}} & 0 \\ 0 & 2ie^{-\frac{2\pi mi}{n}} \end{bmatrix} \\ &= \psi[m]. \end{aligned}$$

Y así, $\phi \sim \psi$.

2. Subrepresentaciones e Irreducibilidad

Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación lineal y sea W un subespacio vectorial de V . El subespacio W es ρ -**invariante** si para todo $g \in G$ y $w \in W$ se satisface que $\rho(g)w \in W$.

Si W es un subespacio ρ -invariante de V , entonces la restricción $\rho|_W$ de ρ a W es una representación de G sobre W . Tal representación se dice que es una **subrepresentación** de ρ .

Una representación $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ se dice **irreducible** si esta no tiene ningún otro subespacio ρ -invariante aparte de los triviales, 0 y V .

Recordemos de algebra lineal que un espacio vectorial V es la *suma directa* de subespacios vectoriales W y W' , denotado $V = W \oplus W'$, si cada $v \in V$ se puede escribir de manera única como una suma $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W'$. El subespacio W' es llamado el *complemento* de W en la descomposición $V = W \oplus W'$. Recordemos además que los complementos de W (y así la descomposición de V en una suma directa que incluye a W) están en una correspondencia biyectiva con proyecciones sobre W . Es decir, una proyección

P de V sobre W asociada con la descomposición $V = W \oplus W'$ es la transformación lineal definida por $Pv = w$ para todo $v \in V$. Recíprocamente, el kernel de una transformación lineal P con imagen W y $Pw = w$ para todo $w \in W$ es un complemento de W en V .

Teorema 2.6 (Teorema de Maschke). *Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de un grupo finito G sobre un espacio vectorial complejo de dimensión finita V y sea W un subespacio ρ -invariante de V . Entonces existe un complemento ρ -invariante W' de W .*

DEMOSTRACIÓN. Sea P la proyección asociada con algún complemento de W en V . Definimos una transformación lineal P' mediante

$$P' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)P\rho(g)^{-1}.$$

Puesto que W es ρ -invariante y $Pw = w$ para todo $w \in W$, tenemos que $P'w = w$ para todo $w \in W$. Además, W es la imagen de P' pues W es la imagen de P y $\rho(g)$ y $\rho(g)^{-1}$ envían a W sobre W para todo $g \in G$. Así, P' es una proyección sobre W que corresponde a algún complemento W' de W . Ahora, sea $w' \in W'$. Es suficiente mostrar que $P'\rho(g)w' = 0$ para todo $g \in G$ para establecer que W' es ρ -invariante (porque en este caso, como P' es la proyección asociada a $W \oplus W'$ se tendría que $\rho(g)w' \in W'$). Para cada $g \in G$ tenemos

$$\rho(g)P'\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho(gh)P\rho(gh)^{-1} = P'.$$

Así, $P'\rho(g)w' = \rho(g)P'w' = \rho(g)0 = 0$. □

El teorema de arriba establece que una representación reducible se descompone en suma directa de subrepresentaciones que actúan sobre subespacios ρ -invariantes de V . Es decir, sea W un subespacio ρ -invariante de V . Entonces, por el teorema de arriba, podemos encontrar un complemento ρ -invariante W' de W . Así, $\rho(g)v = \rho(w + w') = \rho(w) + \rho(w') = \rho(g)|_W w + \rho(g)|_{W'} w'$ para todo $v \in V$ y por tanto, ρ es simplemente la suma directa de dos subrepresentaciones $\rho|_W$ y $\rho|_{W'}$ que actúan sobre W y W' respectivamente. Esto lo indicamos escribiendo $\rho = \rho|_W \oplus \rho|_{W'}$.

Ejemplo 2.7. Consideremos $G = \{e, g, g^2\}$ el grupo cíclico de orden 3, $V = \mathbb{C}[G]$ y $\rho_{reg} : G \rightarrow \text{GL}(V)$ la representación regular. Consideremos a W como el subespacio de V generado por el vector $e_e + e_g + e_{g^2}$ de V . W es un subespacio ρ_{reg} -invariante. Es suficiente ver que:

$$\rho_{reg}(h)(e_e + e_g + e_{g^2}) = e_e + e_g + e_{g^2} \quad \text{para todo } h \in G.$$

Lo que vamos a hacer es hallar un complemento W' de W ρ_{reg} -invariante; para ello, sea $U = \mathbb{C}\{g, g^2\}$. Es sencillo verificar que U es un complemento de W (si $v \in U \cap W$, $v = c_1(e_e + e_g + e_{g^2})$ y $v = c_2e_g + c_3e_{g^2}$ de donde $c_1(e_e + e_g + e_{g^2}) - (c_2e_g + c_3e_{g^2}) = 0$ obteniendo que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, es decir, $v = 0$ y la $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$), es decir, $V = W \oplus U$ (podemos usar cualquier otro complemento). Sea $P : V \rightarrow V$ la proyección asociada a la descomposición $V = W \oplus U$, es decir, si $v = \mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2}$ entonces $P(v) = \mu_e(e_e + e_g + e_{g^2})$. Y definamos P' como $P' = \frac{1}{3} \sum_{h \in G} \rho_{reg}(h) P \rho_{reg}(h)^{-1}$. Lo que nos sugiere la demostración del teorema de Maschke es que el kernel de P' es un complemento de W ρ_{reg} -invariante. Pongamos a $W' = \text{Ker } P'$ y veamos cómo son los elementos de W' . Sea $v = \mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2} \in W'$.

$$\begin{aligned}
P'(v) &= P'(\mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2}) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{h \in G} \rho_{reg}(h) P \rho_{reg}(h)^{-1} (\mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2}) \\
&= \frac{1}{3} \sum_{h \in G} \rho_{reg}(h) P (\mu_e e_{h^{-1}e} + \mu_g e_{h^{-1}g} + \mu_{g^2} e_{h^{-1}g^2}) \\
&= \frac{1}{3} (\rho_{reg}(e) P (\mu_e e_{ee} + \mu_g e_{eg} + \mu_{g^2} e_{eg^2}) + \rho_{reg}(g) P (\mu_e e_{g^2e} + \mu_g e_{g^2g} + \mu_{g^2} e_{g^2g^2}) \\
&\quad + \rho_{reg}(g^2) P (\mu_e e_{ge} + \mu_g e_{gg} + \mu_{g^2} e_{gg^2})) \\
&= \frac{1}{3} (\rho_{reg}(e) P (\mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2}) + \rho_{reg}(g) P (\mu_e e_{g^2} + \mu_g e_e + \mu_{g^2} e_g) \\
&\quad + \rho_{reg}(g^2) P (\mu_e e_g + \mu_g e_{g^2} + \mu_{g^2} e_e)) \\
&= \frac{1}{3} (\rho_{reg}(e) (\mu_e (e_e + e_g + e_{g^2})) + \rho_{reg}(g) (\mu_g (e_e + e_g + e_{g^2})) \\
&\quad + \rho_{reg}(g^2) (\mu_{g^2} (e_e + e_g + e_{g^2}))) \\
&= \frac{1}{3} (\mu_e (e_e + e_g + e_{g^2}) + \mu_g (e_e + e_g + e_{g^2}) + \mu_{g^2} (e_e + e_g + e_{g^2})) \\
&= \frac{1}{3} ((\mu_e + \mu_g + \mu_{g^2}) (e_e + e_g + e_{g^2})) = 0e_e + 0e_g + 0e_{g^2}
\end{aligned}$$

de donde $\mu_e + \mu_g + \mu_{g^2} = 0$, y así, $W' = \{v = \mu_e e_e + \mu_g e_g + \mu_{g^2} e_{g^2} : \mu_e + \mu_g + \mu_{g^2} = 0\}$. Tomemos ahora una base para W' , por ejemplo $\{e_g - e_e, e_{g^2} - e_e\}$. Para ver que W' es invariante ρ_{reg} -invariante, basta notar que:

$$\rho_{reg}(e)(e_g - e_e) = e_g - e_e; \quad \rho_{reg}(g)(e_g - e_e) = e_{g^2} - e_e - (e_g - e_e); \quad \rho_{reg}(g^2)(e_g - e_e) = -(e_{g^2} - e_e)$$

son elementos de W' y que

$$\rho_{reg}(e)(e_{g^2}-e_e) = e_{g^2}-e_e; \quad \rho_{reg}(g)(e_{g^2}-e_e) = -(e_g-e_e); \quad \rho_{reg}(g^2)(e_{g^2}-e_e) = e_g-e_e-(e_{g^2}-e_e)$$

también lo son. Ahora por último, consideremos la base para V , $\{e_e+e_g+e_{g^2}, e_g-e_e, e_{g^2}-e_e\}$, la representación matricial ϱ_{reg} de ρ_{reg} en esa base, para cada $g \in G$ es:

$$\varrho_{reg}(e) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad \varrho_{reg}(g) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]; \quad \varrho_{reg}(g^2) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

3. Caracteres

Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal con una matriz (a_{ij}) . Recordemos de Álgebra lineal que la **traza** de A es el escalar

$$\text{Tr}A = \sum_i a_{ii},$$

el cual es independiente de la elección de la base de V con respecto a la que la matriz (a_{ij}) es contruida.

Definición 2.8. Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de G sobre V . El **caracter** $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ está definido por

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}\rho(g)$$

para todo $g \in G$.

Lema 2.9. Sea χ un caracter de una representación ρ de grado d . Entonces,

- a) $\chi(1) = d$
- b) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ para todo $g \in G$
- c) $\chi(ghg^{-1}) = \chi(g)$ para todo $g, h \in G$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de (a) y (c) se siguen directamente de la definición de representación y las propiedades de la traza. Para (b), sea $g \in G$, y observe que $g \in G$ tiene orden finito, esto es, existe un entero positivo m tal que $g^m = 1$. Así, $\rho(g)^m = \rho(1) = I$, donde I denota a la función identidad de V . Pero esto implica que los autovalores λ de $\rho(g)$ satisfacen $\lambda^m = 1$ (pues si λ es un autovalor de una matriz A entonces λ^m es un autovalor

de A^m y como el autovalor de $I = A^m$ es 1 con multiplicidad n , ya está), así los autovalores λ son raíces m -ésimas de la unidad. En consecuencia, como la traza de una transformación lineal es la suma de sus autovalores, tenemos que

$$\overline{\chi(g)} = \overline{\text{Tr}\rho(g)} = \sum \overline{\lambda_i} = \sum \lambda_i^{-1} = \text{Tr}\rho(g)^{-1} = \text{Tr}\rho(g^{-1}) = \chi(g^{-1})$$

□

Recordemos que escribimos $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ si $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ es la suma directa de subrepresentaciones $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ que actúan sobre subespacios V_i de V tales que $V = V_1 \oplus V_2$.

Teorema 2.10. *Sean $\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ y $\rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ dos representaciones lineales de G , sean χ_1 y χ_2 sus caracteres. Entonces, el caracter de $\rho_1 \oplus \rho_2$ es $\chi_1 + \chi_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B_1 = \{b_i^{(1)}\}_{i=1}^{d_1}$ una base para V_1 y $B_2 = \{b_i^{(2)}\}_{i=1}^{d_2}$ una base para V_2 . Así, la unión $B_1 \cup B_2$ es una base para la suma directa (externa) $V = V_1 \oplus V_2$. La traza $\chi(g) = \text{Tr}(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)$ relativa a $B_1 \cup B_2$ claramente es $\text{Tr}\rho_1(g) + \text{Tr}\rho_2(g) = \chi_1(g) + \chi_2(g)$, lo cual prueba el hecho porque la traza es independiente de la base. □

4. Lema de Schur y Relaciones de Ortogonalidad

Teorema 2.11 (Lema de Schur). *Sean $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, dos representaciones irreducibles de G y sea T una transformación lineal de V_1 en V_2 tal que $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ para todo $g \in G$. Entonces,*

- a) *si ρ_1 y ρ_2 son no-equivalentes, entonces $T = 0$.*
- b) *si $V_1 = V_2$ y $\rho_1 = \rho_2$, entonces $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el contrarecíproco de (a). Supongamos $T \neq 0$. Tomemos $W_1 = \text{Ker} T$. Entonces, para $w \in W_1$ tenemos que $T\rho_1(g)w = \rho_2(g)Tw = \rho_2(g)0 = 0$ para todo $g \in G$. Así, W_1 es ρ_1 -invariante. Como ρ_1 es irreducible, tenemos que $W_1 = 0$ ó $W_1 = V_1$. La última alternativa es imposible debido a que $T \neq 0$. Ahora, tomemos $W_2 = \text{Im} T$. Entonces, para $w = Tv \in W_2$ tenemos que $\rho_2(g)w = T\rho_1(g)v$ para todo $g \in G$. Así, W_2 es ρ_2 -invariante y por consiguiente, $W_2 = V_2$ ó $W_2 = 0$. Lo último es imposible

debido a que $T \neq 0$. Ahora, como $\text{Ker } T = 0$ y $\text{Im } T = V_2$, se tiene que T es biyectiva y por lo tanto, ρ_1 y ρ_2 son equivalentes.

Para (b), sea λ un autovalor de T . Tomemos $T' = T - \lambda I$. Como λ es un autovalor, $\text{Ker } T' \neq 0$ (el autovector asociado a λ está en el kernel de T'). Como $\rho_2 T' = T' \rho_1$, la parte (a) muestra que esto es posible sólo cuando $T' = 0$, y en consecuencia tenemos que $T = \lambda I$. \square

Corolario 2.12. *Asumamos que ρ_1 y ρ_2 son como arriba. Sea T una transformación lineal de V_1 en V_2 y tomemos*

$$T' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) T \rho_1(g)^{-1}.$$

Entonces,

- a) si ρ_1 y ρ_2 son no-equivalentes, entonces $T' = 0$.
- b) si $V_1 = V_2$ y $\rho_1 = \rho_2$, entonces $T' = \lambda I$ para $\lambda = (\frac{1}{d}) \text{Tr } T$, donde d es el grado de ρ_1 .

DEMOSTRACIÓN. Los cálculos siguientes muestran que la igualdad $\rho_2(g)T' = T'\rho_1(g)$ se satisface para todo $g \in G$:

$$\begin{aligned} \rho_2(g)T'\rho_1(g)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_2(g)\rho_2(h)T\rho_1(h)^{-1}\rho_1(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_2(gh)T\rho_1(gh)^{-1} = T'. \end{aligned}$$

Ahora, la parte (a) se sigue directamente de la parte (a) del lema de Schur. De igual forma, la parte (b) de lema de Schur implica que $T' = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Nos resta calcular λ . Observe que

$$\text{Tr } T' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr} \rho_1(g) T \rho_1(g)^{-1} = \text{Tr } T$$

y $\text{Tr } T' = \text{Tr } \lambda I = d\lambda$. Resolviendo para λ produce que $\lambda = (\frac{1}{d}) \text{Tr } T$. \square

Corolario 2.13. *Asumamos que ρ_1 y ρ_2 son como arriba. Fijemos bases arbitrarias para V_1 y V_2 y denotemos por $\varrho^{(1)}$ y $\varrho^{(2)}$ las representaciones matriciales correspondientes de ρ_1 y ρ_2 . Entonces,*

a) si ρ_1 y ρ_2 son no-equivalentes, tenemos que

$$(2.2) \quad \sum_{g \in G} \varrho_{ij}^{(1)}(g) \varrho_{rs}^{(2)}(g^{-1}) = 0$$

para todo i, j, r, s .

b) si $V_1 = V_2$ y $\rho_1 = \rho_2$, entonces

$$(2.3) \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho_{ij}^{(1)}(g) \varrho_{rs}^{(2)}(g^{-1}) = \frac{\delta_{is} \delta_{jr}}{d},$$

donde d es el grado de $\rho_1 = \rho_2$.

DEMOSTRACIÓN. Asumiendo la notación del corolario previo, sean (t_{ab}) y (t'_{ab}) las matrices de T y T' relativas a las bases escogidas para V_1 y V_2 . Cálculos sencillos nos muestran que

$$t'_{is} = \frac{1}{|G|} \sum_{g, a, b} \varrho_{ia}^{(2)}(g) t_{ab} \varrho_{bs}^{(1)}(g^{-1}),$$

para todo i, s . La parte (a) del corolario anterior muestra que $t'_{is} = 0$ para todas las matrices (t_{ab}) ; en particular, esto se satisface para la matriz $t_{ab} = \delta_{aj} \delta_{br}$ (es decir, la matriz E_{jr} de orden $|V_2| \times |V_1|$ que tiene un 1 en la posición jr y 0 en las demás), lo cual prueba la parte (a). Similarmente, la parte (b) del corolario anterior nos dice que $t_{is} = \delta_{is} \left(\frac{1}{d}\right) \sum_{a, b} t_{ab} \delta_{ab}$ en el caso en que $\rho_1 = \rho_2$ y $V_1 = V_2$. Tomando $t_{ab} = \delta_{aj} \delta_{br}$ nos queda

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho_{ij}^{(2)}(g) \varrho_{rs}^{(1)}(g^{-1}) = \frac{1}{d} \sum_{a, b} \delta_{is} \delta_{aj} \delta_{br} \delta_{ab} = \frac{1}{d} \delta_{is} \delta_{jr}$$

□

Las relaciones (2.2) y (2.3) son conocidas como las relaciones de Schur.

Teorema 2.14.

- a) Si χ es el caracter de una representación irreducible, entonces $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.
- b) Si χ y χ' son los caracteres de dos representaciones irreducibles no-equivalentes, entonces $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos del Lema 2.9 que $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Así,

$$\begin{aligned} \langle \chi, \chi' \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi'(g)^{-1} = \sum_{i,j} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho_{ii}(g) \varrho'_{jj}(g^{-1}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ y } \rho' \text{ son equivalentes;} \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

□

donde la última igualdad se sigue de las relaciones de Schur (2.2) y (2.3).

Teorema 2.15. *Sea ρ una representación lineal de G sobre V y sea $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ una descomposición de ρ en subrepresentaciones irreducibles. Entonces, para alguna representación irreducible ρ' de G sobre V , el producto interno $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle$ da el número de ρ_k equivalentes a ρ' en la descomposición escogida.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ implica, por el teorema (2.10) que $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \cdots + \chi_{\rho_n}$. Como las ρ_k son irreducibles, el hecho se sigue del teorema previo. □

Corolario 2.16.

- El número de ρ_k equivalentes a ρ' no depende de la descomposición escogida.
- Dos representaciones con el mismo caracter, son equivalentes.
- Suponga que ρ se descompone como $\bigoplus_{k=1}^n m_k \rho_k$, donde m_k indica la multiplicidad de la representación irreducible ρ_k en ρ , y las ρ_k son no equivalentes entre sí. Entonces,

$$(2.4) \quad \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_{k=1}^n m_k^2.$$

En particular, $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$ si, y sólo si, ρ es irreducible.

5. Número de Representaciones Irreducibles

Una función $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada **función de clases** si $\phi(ghg^{-1}) = \phi(h)$ para todo $g, h \in G$. Denotamos por $cf(G)$ al espacio vectorial de todas las funciones de clases a valores complejos definidas sobre G . Claramente, $cf(G)$ es un subespacio de $\mathbb{C}[G]$.

Teorema 2.17. *La dimensión de $cf(G)$ es igual al número de clases de conjugación de G .*

DEMOSTRACIÓN. Una función de clases debe ser constante sobre cada clase de conjugación de G (debido a que si g y h están en la misma clase de conjugación, existe $k \in G$ tal que $h = k g k^{-1}$ y si ϕ es de clase, $\phi(h) = \phi(k g k^{-1}) = \phi(g)$); los valores sobre las clases de conjugación pueden ser escogidos arbitrariamente. \square

Corolario 2.18. *El número de representaciones irreducibles no-equivalentes de G es finito.*

DEMOSTRACIÓN. El caracter de una representación de G es una función de clases por el Lema (2.9). Los caracteres de las representaciones irreducibles no-equivalentes de G forman, por el Teorema (2.14) un conjunto ortonormal en $cf(G)$. El cardinal de tal conjunto está acotado por la dimensión de $cf(G)$, la cual es finita. \square

Lema 2.19. *Sea ϕ una función de clases sobre G y sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación lineal de G . Definamos una transformación lineal $\hat{\rho}(\phi)$ de V en sí mismo por*

$$(2.5) \quad \hat{\rho}(\phi) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(g).$$

Entonces, si ρ es irreducible y tiene grado d , tenemos

$$\hat{\rho}(\phi) = \frac{|G|}{d} \langle \phi, \bar{\chi}_\rho \rangle I,$$

donde I denota a la transformación identidad de V .

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in G$ y observe que

$$\rho(g) \hat{\rho}(\phi) \rho(g)^{-1} = \sum_{h \in G} \phi(h) \rho(g h g^{-1}) = \sum_{h \in G} \phi(g^{-1} h g) \rho(h) = \hat{\rho}(\phi)$$

debido a que ϕ es una función de clases. La parte (b) del Corolario (2.12) implica que

$$\hat{\rho}(\phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \hat{\rho}(\phi) \rho(g^{-1}) = \lambda I$$

para $\lambda = (1/d) \text{Tr } \hat{\rho}(\phi)$. Y como

$$\text{Tr } \hat{\rho}(\phi) = \sum_{g \in G} \phi(g) \text{Tr } \rho(g) = \sum_{g \in G} \phi(g) \chi_\rho(g) = |G| \langle \phi, \bar{\chi}_\rho \rangle,$$

el hecho se sigue. \square

Teorema 2.20. *Los caracteres de las representaciones irreducibles de G forman una base ortonormal para $cf(G)$. [De donde, el número de representaciones irreducibles no-equivalentes de G es igual al número de clases de conjugación de G por el Teorema 2.17.]*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.14 los caracteres χ_1, \dots, χ_n de las representaciones irreducibles no-equivalentes de G forman un sistema ortonormal en $cf(G)$, así, es suficiente mostrar que su espacio generado es $cf(G)$. Para esto, es suficiente mostrar que si $\langle \phi, \bar{\chi}_k \rangle = 0$ para todo $k = 1, \dots, n$ entonces $\phi \equiv 0$. [Note que los χ_k forman una base ortonormal si, y sólo si, $\bar{\chi}_i$ también la forman.] Sea ϕ una función de clases que satisface $\langle \phi, \bar{\chi}_k \rangle = 0$ para todo $k = 1, \dots, n$. Entonces, cualquier representación ρ de G satisface que $\hat{\rho}(\phi) = 0$ porque cada uno de sus constituyentes irreducibles ρ_k satisfacen que $\hat{\rho}_k(\phi) = (|G|/d_k)\langle \phi, \bar{\chi}_k \rangle I = 0$ por Lema 2.19. En particular, para la representación regular izquierda ρ_{reg} [Ejemplo 2.2] tenemos, para todo $g \in G$,

$$\hat{\rho}(\phi)e_1 = \sum_{g \in G} \phi(g)\rho_{reg}(g)e_1 = \sum_{g \in G} \phi(g)e_g = 0,$$

lo cual implica que $\phi \equiv 0$. □

6. Unitariedad

Recordemos de álgebra lineal que una transformación lineal de un espacio producto interno de dimensión finita sobre los complejos V en sí mismo es unitaria si preserva el producto interno, esto es, para todo $v, v' \in V$, $\langle Tv, Tv' \rangle = \langle v, v' \rangle$. Esto es equivalente a decir que T es biyectiva y $T^{-1} = T^*$, donde T^* es el operador adjunto definido por $\langle Tv, v' \rangle = \langle v, T^*v' \rangle$ para todo $v, v' \in V$. Recordemos además, que si (t_{ij}) es una matriz de T relativa a una base ortonormal de V , entonces (\bar{t}_{ji}) es la matriz de T^* relativa a esa base. En particular, si T es unitaria, entonces la inversa de (t_{ij}) simplemente es su traspuesta conjugada compleja (\bar{t}_{ji}) .

Teorema 2.21. *Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación lineal de G . Entonces, existe un producto interno sobre V relativo al cual la transformación lineal $\rho(g)$ es unitaria para cada $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre V . [Un producto interno siempre existe ya que V tiene dimensión finita.] Es sencillo verificar que

$$(v|v') = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)v' \rangle$$

es un producto interno de V sobre el cual, cualquier $\rho(g)$ es unitaria. □

Sean $\rho_k : G \rightarrow \text{GL}(V_k)$, $k = 1, 2$ representaciones irreducibles no-equivalentes de G y sea d_k el grado de ρ_k .

Corolario 2.22. *Para $k = 1, 2$, fijemos una base que sea ortonormal en un producto interno relativo al cual $\rho_k(g)$ es unitaria para cada $g \in G$. Denotemos por $\varrho^{(k)}$ la representación matricial de ρ_k relativa a esta base. Entonces,*

$$(2.6) \quad \langle \varrho_{ij}^k, \varrho_{rs}^t \rangle = \frac{\delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kt}}{d_k}$$

para todo $1 \leq k, t \leq 2, 1 \leq i, j \leq d_k, y 1 \leq r, s \leq d_t$.

DEMOSTRACIÓN. Por unitariedad, las entradas de las matrices $\varrho^{(k)}(g)$ satisfacen que

$$\varrho_{ij}^{(k)}(g)^{-1} = \overline{\varrho_{ji}^{(k)}(g)}$$

para todo $g \in G$ y $1 \leq i, j \leq d_k$. Así, (2.6) resulta de combinar las relaciones de Schur (2.2) y (2.3). (Esto es, en la parte de representaciones matriciales se vió que $\varrho_{ij} = \sum_{g \in G} \varrho_{ij}(g) e_g$. Utilizando esto, y la unitariedad tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varrho_{ij}^{(k)}, \varrho_{rs}^{(t)} \rangle &= \left\langle \sum_{g \in G} \varrho_{ij}^{(k)}(g) e_g, \sum_{h \in G} \varrho_{rs}^{(t)}(h) e_h \right\rangle \\ &= \sum_{g, h \in G} \varrho_{ij}^{(k)}(g) \overline{\varrho_{rs}^{(t)}(h)} \langle e_g, e_h \rangle \\ &= \sum_{g, h \in G} \varrho_{ij}^{(k)}(g) \overline{\varrho_{rs}^{(t)}(h)} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} e_g(x) e_h(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho_{ij}^k(g) \varrho_{sr}^t(g)^{-1} = \frac{\delta_{ir} \delta_{js} \delta_{kt}}{d_k} \end{aligned}$$

y esto lo prueba.) □

7. Descomposición en Irreducibles de la Representación Regular

Recordemos la representación regular ρ_{reg} de G sobre $\mathbb{C}[G]$ del Ejemplo 2.2.

Teorema 2.23. *El caracter χ_{reg} de la representación ρ_{reg} está dado por:*

$$(2.7) \quad \chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{si } g \neq 1. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $g \in G$ la matriz de $\rho_{reg}(g)$ relativa a la base G es una matriz de permutación definida para todo $h_1, h_2 \in G$ por

$$\varrho_{h_1, h_2} = \begin{cases} 1 & \text{si } h_2 = gh_1 \text{ y} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora, observe que $\chi_{reg}(g) = \sum_h \varrho_{hh}(g)$ y que $\varrho_{hh}(g) = 1$ si, y sólo si, $g = hh^{-1} = 1$. \square

Denotemos por χ_1, \dots, χ_n a los caracteres de las representaciones irreducibles no-equivalentes ρ_1, \dots, ρ_n de G , y denotemos por d_1, \dots, d_n a los grados de las representaciones.

Corolario 2.24. *Para todo $k = 1, \dots, n$, tenemos que*

$$\langle \chi_{reg}, \chi_k \rangle = d_k.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos, del Lema 2.9 que $\chi_k(1) = d_k$. Ahora,

$$\langle \chi_{reg}, \chi_k \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{reg} \overline{\chi_k(g)} = \frac{1}{|G|} \chi_{reg}(1) \overline{\chi_k(1)} = \frac{1}{|G|} |G| d_k = d_k$$

\square

Así, ρ_{reg} se descompone en la suma directa $\rho_{reg} = \bigoplus_{k=1}^n d_k \rho_k$.

Corolario 2.25. *Los grados d_k satisfacen la relación $\sum_{k=1}^n d_k^2 = |G|$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.15, tenemos

$$|G| = \chi_{reg}(1) = \sum_{k=1}^n d_k \chi_k(1) = \sum_{k=1}^n d_k^2$$

\square

Corolario 2.26. *Para $k = 1, \dots, n$, sea $\rho^{(k)}$ una de representación matricial unitaria de ρ_k . Entonces, los vectores*

$$(2.8) \quad \overline{\varrho}_{ij}^{(k)} \in \mathbb{C}[G], \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i, j \leq d_k$$

forman una base ortogonal para $\mathbb{C}[G]$.

DEMOSTRACIÓN. La ortogonalidad dos a dos [y por tanto la independencia lineal] fue demostrada en el Corolario 2.22. Los vectores generan $\mathbb{C}[G]$ por el corolario previo. \square

La base (2.8) incorpora una factorización conveniente de $\mathbb{C}[G]$ en subespacios ρ_{reg} -invariantes como se demostrará en el siguiente lema. Sean $\phi, \psi : G \rightarrow \mathbb{C}$. El producto convolución de ϕ con ψ , $\phi * \psi$, está definido por

$$(\phi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \phi(gh^{-1})\psi(h)$$

para cada $g \in G$. Un cálculo directo muestra que la representación regular izquierda ρ_{reg} y el producto convolución se relacionan mediante

$$(2.9) \quad \rho_{reg}(g)\phi(h) = \rho_{reg}(g) \sum_{y \in G} \phi(y)e_y(h) = \sum_{y \in G} \phi(y)e_{gy}(h) = \phi(g^{-1}h) = (e_g * \phi)(h).$$

Lema 2.27. *Para $k = 1, \dots, n$, sea $\varrho^{(k)}$ una representación matricial unitaria que corresponde a ρ_k . Entonces, para todo $g \in G$ y $1 \leq i, j \leq d_k$,*

$$(2.10) \quad \rho_{reg}(g)\bar{\varrho}_{ij}^{(k)} = e_g * \bar{\varrho}_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{d_k} \varrho_{li}^{(k)}(g)\bar{\varrho}_{lj}^{(k)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $g, h \in G$. Mediante cálculos directos, obtenemos.

$$(e_g * \bar{\varrho}_{ij}^{(k)})(h) = \sum_{z \in G} e_g(hz^{-1})\bar{\varrho}_{ij}^{(k)}(z) = \bar{\varrho}_{ij}^{(k)}(g^{-1}h) = \sum_{l=1}^{d_k} \varrho_{li}^{(k)}(g)\bar{\varrho}_{lj}^{(k)}(h)$$

□

Así, para todo $k = 1, \dots, n$ y $1 \leq j \leq d_k$, los vectores $\{\bar{\varrho}_{ij}^{(k)}\}_{1 \leq i \leq d_k}$ constituyen una base para subespacios ρ_{reg} -invariantes de dimensión d_k en $\mathbb{C}[G]$.

8. Producto Directo de Grupos

Definición 2.28. Sean $X = (x_{ij})$ e Y matrices. Entonces, el producto tensorial de X e Y es la matriz por bloques

$$X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_{11}Y & x_{12}Y & \cdots \\ x_{21}Y & x_{22}Y & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Definición 2.29. Dados espacios vectoriales V y W , el producto tensorial de V y W es el conjunto

$$V \otimes W = \left\{ \sum_{ij} c_{ij} v_i \otimes w_j : c_{ij} \in \mathbb{C}, v_i \in V, w_j \in W \right\}$$

sujeto a las relaciones

$$(c_1 v_1 + c_2 v_2) \otimes w = c_1 (v_1 \otimes w) + c_2 (v_2 \otimes w)$$

y

$$v \otimes (d_1 w_1 + d_2 w_2) = d_1 (v \otimes w_1) + d_2 (v \otimes w_2)$$

.

$V \otimes W$ es también un espacio vectorial. De hecho, si $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_d\}$ y $\mathbf{C} = \{w_1, \dots, w_f\}$ son bases para V y W respectivamente, entonces $\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq f\}$ es una base para $V \otimes W$.

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales de dimensión finita sobre los complejos. Denotamos por $V_1 \otimes V_2$ el producto tensorial de V_1 y V_2 . Sean G y G' grupos finitos. Sea $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ una representación de G y sea $\rho' : G' \rightarrow \text{GL}(V')$ una representación de G' . Denotamos por $G \times G'$ el producto directo de G y G' . Definimos la representación $\rho \sharp \rho' : G \times G' \rightarrow \text{GL}(V \otimes V')$ por medio de

$$(\rho \sharp \rho')(g, g') = \rho(g) \otimes \rho'(g')$$

para todo $(g, g') \in G \times G'$.

Teorema 2.30. Sean ρ_1, \dots, ρ_k las representaciones irreducibles no equivalentes de G y $\rho'_1, \dots, \rho'_{k'}$ las representaciones irreducibles no equivalentes de G' . Entonces, $\rho_i \sharp \rho'_j : G \times G' \rightarrow \text{GL}(V_i \otimes V_j)$, donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq k'$, es un conjunto completo de representaciones irreducibles no equivalentes de $G \times G'$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que

$$\chi_{\rho_i \sharp \rho'_j}(g, g') = \text{Tr } \rho_i(g) \otimes \rho'_j(g') = \text{Tr } \rho_i(g) \text{Tr } \rho'_j(g') = \chi_{\rho_i}(g) \chi_{\rho'_j}(g'),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \chi_{\rho_i \# \rho'_j}, \chi_{\rho_n \# \rho'_l} \rangle &= \frac{1}{|G \times G'|} \sum_{g, g'} \chi_{\rho_i \# \rho'_j}(g, g') \overline{\chi_{\rho_n \# \rho'_l}(g, g')} \\
&= \left(\frac{1}{|G|} \sum_g \chi_{\rho_i}(g) \overline{\chi_{\rho_n}(g)} \right) \left(\frac{1}{|G'|} \sum_{g'} \chi_{\rho'_j}(g') \overline{\chi_{\rho'_l}(g')} \right) \\
&= \langle \chi_{\rho_i}, \chi_{\rho_n} \rangle \cdot \langle \chi_{\rho'_j}, \chi_{\rho'_l} \rangle = \delta_{in} \delta_{jl}.
\end{aligned}$$

Así, las $\chi_{\rho_i \# \rho'_j}$ son no equivalentes e irreducibles dos a dos, por el Teorema 2.14 y el Corolario 2.16. Para establecer la completitud es suficiente (recordando el Corolario 2.25) mostrar que la suma de los cuadrados de los grados de las representaciones es igual a $|G \times G'|$. El grado de $\rho_i \# \rho'_j$ claramente es $d_i d'_j$, donde d_i es el grado de ρ_i y d'_j es el grado de ρ'_j . Luego, $\sum_{i,j} (d_i d'_j)^2 = (\sum_i d_i^2) (\sum_j d_j'^2) = |G| |G'| = |G \times G'|$. \square

En esta parte sólo nos interesaran las representaciones irreducibles de un grupo G , ya que cualquier otra representación sera una suma directa de representaciones irreducibles.

9. Representaciones de Grupos Cíclicos

Las representaciones irreducibles de un grupo abeliano son de grado 1. Pues si G es un grupo abeliano y $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ es una representación irreducible de G ; para $h \in G$ podemos tomar $T = \rho(h) : V \rightarrow V$ y como para todo $g \in G$ se cumple que :

$$\begin{aligned}
T \circ \rho(g) &= \rho(h) \rho(g) \\
&= \rho(hg) \\
&= \rho(gh) \\
&= \rho(g) \rho(h) \\
&= \rho(g) \circ T
\end{aligned}$$

se tiene por el Lema de Schur que $\rho(h) = \lambda_h I$ para algún $\lambda_h \in \mathbb{C}$. Sea ahora $v \neq 0 \in V$.

$$\begin{aligned}
\rho(h)(v) &= (\lambda_h I)(v) \\
&= \lambda_h v \in \mathbb{C}\{v\}.
\end{aligned}$$

La irreducibilidad de ρ nos hace concluir que $V = \mathbb{C}\{v\}$.

Consideremos $C_n = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ el grupo cíclico de orden n . Recordemos que por el Teorema 2.20 el número de representaciones irreducibles de C_n es igual al número de clases de conjugación. Las clases de conjugación de C_n son conjuntos unipuntuales, pues $g^i g^n g^{-i} = g^m$ si, y sólo si, $m = n$ y así, la clase de conjugación de $g^n \in C_n$ es $\{g^n\}$. Hay tantas clases de conjugación, y representaciones irreducibles, como elementos en C_n . Haciendo un análisis parecido al del Ejemplo 2.3 y teniendo en cuenta lo escrito arriba, llegamos a la conclusión de que todas las representaciones irreducibles de C_n son:

$$\rho_k(g) = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde i es la unidad imaginaria.

Recordemos que

$$(2.11) \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2km\pi i}{n}} = \begin{cases} n & m = 0; \text{ y} \\ 0 & m \neq 0. \end{cases}$$

Notese que además, si χ_k es el caracter de ρ_k , es claro que $\chi_k(g^m) = e^{\frac{2km\pi i}{n}}$, para todo $g^m \in C_n$ y se cumplen las relaciones de ortogonalidad, pues:

$$\langle \chi_k, \chi_r \rangle = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \chi_k(g^m) \overline{\chi_r(g^m)} = \frac{1}{n} e^{\frac{2(k-r)m\pi i}{n}} = \delta_{kr},$$

donde la última igualdad ocurre en virtud de (2.11).

10. Representaciones de Grupos Abelianos Finitos

En general, si G es un grupo abeliano finito y no trivial, $G \cong C_{q_1} \times C_{q_2} \times \dots \times C_{q_k}$, donde cada $C_{q_i}, i = 1, \dots, k$, es cíclico. En virtud del Teorema 2.30, si identificamos a $h \in G$ con $(g^{\alpha_1}, \dots, g^{\alpha_k}) \in C_{q_1} \times C_{q_2} \times \dots \times C_{q_k}$, todas las representaciones de G estan dadas por:

$$\rho_{t_1 \dots t_k}(h) = \rho_{t_1} \# \rho_{t_1} \# \dots \# \rho_{t_k}(g^{\alpha_1}, \dots, g^{\alpha_k}) = e^{\frac{2t_1 \alpha_1 \pi i}{q_1}} \dots e^{\frac{2t_k \alpha_k \pi i}{q_k}}.$$

donde $0 \leq \alpha_j \leq q_j - 1$ y las ρ_{t_j} , con $1 \leq t_j \leq q_j$ y $1 \leq j \leq k$, son las representaciones irreducibles de C_{q_j} .

Ejemplo 2.31. Consideremos por ejemplo \mathbb{Z}_n^r , el producto directo del grupo \mathbb{Z}_n r -veces. Un elemento $x \in \mathbb{Z}_n^r$ es visto como una r -tupla $x = (x_1, \dots, x_n)$ de elementos de \mathbb{Z}_n .

Nuevamente, por el Teorema 2.30 las representaciones irreducibles de grado 1 $\rho_x : \mathbb{Z}_n^r \rightarrow \text{GL}(V)$ que corresponde a $x \in \mathbb{Z}_n^r$ satisfacen

$$(2.12) \quad \rho_x(y)v = e^{\frac{2(\sum_{k=1}^r x_k y_k)\pi i}{n}} v$$

para todos $y \in \mathbb{Z}_n^r$ y $v \in V$. Dado que las representaciones tienen grado uno, el caracter χ_x es “igual” a la representación, es decir,

$$(2.13) \quad \chi_x(y) = e^{\frac{2(\sum_{k=1}^r x_k y_k)\pi i}{n}}$$

para todos $x, y \in \mathbb{Z}_n^r$.

11. Grupo Diedral

El grupo diedral D_n , para cualquier entero positivo n , es el grupo de $2n$ elementos generado por los elementos r y s , donde r tiene orden n , s tiene orden 2, y conjugar por s transforma a r en r^{-1} :

$$r^n = 1, \quad r^2 = 1, \quad sr s^{-1} = r^{-1}.$$

Geoméricamente, podemos pensar a r como una rotación en sentido antiorario, con ángulo de $2\pi/n$ y a s como una reflexión, a través de una línea fija, que deja invariante a la figura. Los distintos elementos de D_n son

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}.$$

Esta vista geométrica nos sugiere inmediatamente la idea de una representación real de dimensión 2: haciendo actuar a r sobre \mathbb{R}^2 a través de rotaciones en sentido antihorario con ángulos de $2\pi/n$ y a s a través de reflexiones por el eje x .

En la base estándar de \mathbb{R}^2 esas transformaciones lineales tienen las siguientes formas matriciales:

$$\varrho_{\mathbb{R}}(r) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi/n & -\sin 2\pi/n \\ \sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{bmatrix}, \quad \varrho_{\mathbb{R}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es interesante ver qué pasa cuando llevamos esto al plano complejo y tomamos esta representación sobre \mathbb{C}^2 . Escogemos en \mathbb{C}^2 la base dada por los autovectores de $\varrho(r)$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\varrho_{\mathbb{C}}(r)b_1 = \eta b_1 \quad \text{y} \quad \varrho_{\mathbb{C}}(r)b_2 = \eta^{-1}b_2,$$

donde $\eta = e^{2\pi i/n}$, y

$$\varrho_{\mathbb{C}}(s)b_1 = b_2 \quad \text{y} \quad \varrho_{\mathbb{C}}(s)b_2 = b_1.$$

Así, las matrices de $\varrho_{\mathbb{C}}(r)$ y $\varrho_{\mathbb{C}}(s)$ en la base dada por b_1 y b_2 son

$$\begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cambiando nuestra perspectiva, de la base estandar a la base dada por b_1 y b_2 , obtenemos una representación de dimensión 2 ϱ_1 sobre \mathbb{C}^2 dada por

$$\varrho_1(r) = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{bmatrix}, \quad \varrho_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En general, tenemos la representación ρ_m especificada por

$$\varrho_m(r) = \begin{bmatrix} \eta^m & 0 \\ 0 & \eta^{-m} \end{bmatrix}, \quad \varrho_m(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

para cualquier $m \in \mathbb{Z}$; por supuesto, para evitar repetición, podemos considerar $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. El valor de ϱ_m sobre todos los elementos de D_n está dado por

$$\varrho_m(r^j) = \begin{bmatrix} \eta^{mj} & 0 \\ 0 & \eta^{-mj} \end{bmatrix}, \quad \varrho_m(sr^j) = \begin{bmatrix} 0 & \eta^{-mj} \\ \eta^{mj} & 0 \end{bmatrix}.$$

ϱ_m es reducible si y sólo si, existe un vector no nulo $v \in \mathbb{C}^2$ que sea invariante bajo $\varrho_m(r)$ y $\varrho_m(s)$. Ser invariante por $\varrho_m(s)$ significa ser un múltiplo escalar de $(1, 1) \in \mathbb{C}$. Pero $\mathbb{C}(1, 1)$ es también invariante por $\varrho_m(r)$ sólo cuando $\eta^m = \eta^{-m}$.

Así, ρ_m para $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ es irreducible si $n \neq 2m$ y es reducible se $n = 2m$.

No todas las ϱ_m son inequivalentes debido a que $\varrho_{-m} = \varrho_{n-m}$. Por esta razón, reduciremos nuestra atención a ϱ_m con $1 \leq m \leq n/2$.

Hasta ahora hemos identificado $n/2 - 1$ representaciones irreducibles no equivalente si n es par, y $(n - 1)/2$ si n es impar.

Consideremos ahora una representación unidimensional θ de D_n . Primero, de $\theta(s)^2$ vemos que $\theta(s) = \pm 1$. Si aplicamos θ a la relación $sr s^{-1} = r^{-1}$, obtenemos que $\theta(r) = \theta(r)^{-1}$, de donde $\theta(r) = \pm 1$. Pero de la relación $r^n = 1$ se deduce entonces, que $\theta(r)$ puede ser -1 sólo cuando n es par. Así, tenemos las siguientes representaciones unidimensionales.

$$\theta_{+, \pm}(r) = 1, \quad \theta_{+, \pm}(s) = \pm 1 \text{ si } n \text{ es impar, } \theta_{-, \pm}(r) = \pm 1, \theta_{-, \pm}(s) = \pm 1 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Esto nos da cuatro representaciones unidimensionales si n es par y dos si n es impar.

Así, tenemos identificadas un total de $3 + n/2$ representaciones irreducibles si n es par y $(n + 3)/2$ si n es impar.

Para concluir, determinaremos todas las clases de conjugación de D_n .

Ya que $sr s^{-1} = r^{-1}$, se sigue que

$$s(r^j s) s^{-1} = r^{-j} r = r^{n-j} s.$$

Esto indica que la estructura de las clases de conjugación son diferentes para cuando n es par y cuando es impar. De hecho, note que conjugar $r^j s$ por r resulta en incrementar a j por 2.

$$r(r^j s)r^{-1} = r^{j+1} r s = r^{j+2} s.$$

Si n es par, las clase de conjugación son:

$$\{1\}, \{r, r^{n-1}\}, \{r^2, r^{n-2}\}, \dots, \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}, \{r^{n/2}\}, \{s, r^2 s, \dots, r^{n-2} s\}, \{r s, r^3 s, \dots, r^{n-1} s\}.$$

Note que hay $3 + n/2$ clases de conjugación, y esto es exactamente el número de representaciones irreducibles no equivalentes para n par.

Si n es impar, las clase de conjugación son:

$$\{1\}, \{r, r^{n-1}\}, \{r^2, r^{n-2}\}, \dots, \{r^{(n-1)/2}, r^{(n+1)/2}\}, \{s, r s, r^2 s, \dots, r^{n-2} s, r^{n-1} s\}.$$

Note que hay $(n + 3)/2$ clases de conjugación, y esto es exactamente el número de representaciones irreducibles no equivalentes para n impar.

Análisis de Fourier en Grupos Finitos.

Este capítulo lo empezamos viendo cómo el producto convolución le da estructura de anillo a $\mathbb{C}[G]$, luego veremos cómo ponemos en juego lo que ya sabemos de teoría de representaciones sobre grupos abelianos y grupos no abelianos con análisis armónico para obtener los ingredientes finales que nos habiliten para calcular el espectro de los grafos de Cayley. Para mas detalles ver [4].

1. Producto Convolución

Recuerde que dado un grupo G , denotamos por $\mathbb{C}[G]$ al conjunto de todas las funciones a valores complejos definidas sobre G . Y denotamos por $Z(\mathbb{C}[G])$ al subconjunto de funciones de $\mathbb{C}[G]$ que son constantes sobre cada clase de conjugación.

Definición 3.1 (Convolución). Sea G un grupo finito y $a, b \in \mathbb{C}[G]$. Entonces la convolución $a * b : G \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$(3.1) \quad a * b(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y)$$

Observe que el producto convolución satisface:

$$(3.2) \quad e_g * e_h(x) = \sum_{y \in G} e_g(xy^{-1})e_h(y) = e_{gh}(x),$$

para todo $g, h \in G$.

Proposición 3.2. *El producto convolución junto con la suma punto a punto, hacen de $\mathbb{C}[G]$ un anillo con unidad, con e_1 como unidad del anillo.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo mostraremos la propiedades más relevantes.

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}[G]$ y $x \in G$ entonces

$$\begin{aligned}
 a * (b + c)(x) &= \sum_{y \in G} a(xy^{-1})(b + c)(y) \\
 &= \sum_{y \in G} a(xy^{-1})(b(y) + c(y)) \\
 &= \sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y) \sum_{y \in G} a(xy^{-1})c(y) \\
 &= a * b(x) + a * c(x).
 \end{aligned}$$

Así, el producto convolución es distributivo respecto a la suma.

Note que si $a, b \in \mathbb{C}[G]$, entonces

$$a = \sum_{g \in G} a(g)e_g, \quad b = \sum_{g \in G} b(g)e_g$$

y

$$a * b = \sum_{g, h \in G} a(g)b(h)e_g * e_h = \sum_{g, h \in G} a(g)b(h)e_{gh}.$$

Si aplicamos el cambio de variables $x = gh, y = h$ obtenemos

$$a * b = \sum_{x \in G} \left(\sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y) \right) e_x = \sum_{x \in G} a * b(x)e_x$$

lo que verifica la cerradura del producto convolución.

Sea $a \in \mathbb{C}[G]$, entonces

$$a * e_1(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})e_1(y) = a(x)$$

la parte $e_1 * a(x) = a(x)$ es similar, y en consecuencia e_1 es la unidad del anillo.

Para terminar, verificaremos que el producto satisface las leyes de asociatividad.

Sean $a, b, c \in \mathbb{C}[G]$, entonces

$$(3.3) \quad [(a * b) * c](x) = \sum_{y \in G} [a * b](xy^{-1})c(y) = \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} a(xy^{-1}z^{-1})b(z)c(y).$$

Si hacemos el cambio de variables $u = zy$ (y así, $y^{-1}z^{-1} = u^{-1}, z = uy^{-1}$). El lado derecho de (3.3) se transforma en

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in G} \sum_{u \in G} a(xu^{-1})b(uy^{-1})c(y) &= \sum_{u \in G} a(xu^{-1}) \sum_{y \in G} b(uy^{-1})c(y) \\
&= \sum_{u \in G} a(xu^{-1})[b * c](u) \\
&= [a * (b * c)](x).
\end{aligned}$$

□

Recordemos que el centro $Z(R)$ de un anillo R consiste de todos aquellos elementos $a \in R$ tales que $ab = ba$ para todo $b \in R$.

Proposición 3.3. *Las funciones de clases forman el centro de $\mathbb{C}[G]$. Es decir, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clases si, y sólo si, $a * f = f * a$, para todo $a \in \mathbb{C}[G]$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es una función de clases y sea $a \in \mathbb{C}[G]$. Entonces

$$a * f(x) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})f(y) = \sum_{y \in G} a(xy^{-1})f(yx^{-1})$$

la última igualdad es gracias a que f es una función de clases. Hacemos $z = xy^{-1}$ y el lado derecho de (1) se transforma en

$$\sum_{z \in G} a(z)f(xz^{-1}) = \sum_{z \in G} f(xz^{-1})a(z) = f * a(x)$$

lo que prueba que $a * f = f * a$.

Para la otra dirección, Sea f en el centro de $\mathbb{C}[G]$.

Note que si $g, h \in G$ entonces

$$\begin{aligned}
f(gh) &= \sum_{y \in G} f(gy^{-1})e_{h^{-1}}(y) = f * e_{h^{-1}}(g) \\
&= e_{h^{-1}} * f(g) = \sum_{y \in G} e_{h^{-1}}(hy^{-1})f(y) = f(hg)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$f(ghg^{-1}) = f(hg^{-1}g) = f(h),$$

lo que completa la demostración. □

2. Grupos Abelianos Finitos.

Si G es un grupo abeliano finito, entonces $\mathbb{C}[G] = Z(\mathbb{C}[G])$. Por tanto, $\mathbb{C}[G]$ es un anillo conmutativo. El secreto para estudiar la estructura de anillo sobre $\mathbb{C}[G]$ está en la transformada de Fourier.

Definición 3.4 (Grupo dual). Sea G un grupo abeliano finito y sea \widehat{G} el conjunto de todos los caracteres irreducibles $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$. Al conjunto \widehat{G} lo llamamos grupo dual de G .

Por supuesto, dado el nombre de grupo dual, deberíamos probar que \widehat{G} es un grupo, aún cuando no usemos este hecho.

Proposición 3.5. Sea G un grupo abeliano finito. Definimos un producto sobre \widehat{G} vía la multiplicación punto a punto, esto es, $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Entonces \widehat{G} es un grupo abeliano de orden $|G|$ con respecto a esta operación binaria.

DEMOSTRACIÓN. Primero observe que si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, entonces

$$\begin{aligned} \chi_1 \cdot \chi_2(g_1g_2) &= \chi_1(g_1g_2)\chi_2(g_1g_2) = \chi_1(g_1)\chi_1(g_2)\chi_2(g_1)\chi_2(g_2) \\ &= \chi_1(g_1)\chi_2(g_1)\chi_1(g_2)\chi_2(g_2) = (\chi_1\chi_2)(g_1)(\chi_1\chi_2)(g_2) \end{aligned}$$

y así \widehat{G} es cerrado bajo este producto. Trivialmente, el producto es asociativo y conmutativo. El inverso está dado por $\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}$. Así, G es un grupo abeliano. También sabemos que el número de caracteres irreducibles de G es $|G|$ y esto completa la demostración. \square

Ejemplo 3.6. Sea $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Entonces $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$, donde

$$\chi_k([m]) = e^{2\pi i km/n}.$$

Se puede verificar fácilmente que la función $[k] \mapsto \chi_k$ es un isomorfismo de grupos entre G y \widehat{G} .

Ahora introduciremos un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}]$ llamado transformada de Fourier.

Definición 3.7. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}[G]$. La **transformada de Fourier** $\widehat{f} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ está definida por

$$\widehat{f}(\chi) = |G|\langle f, \chi \rangle = \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi(g)}.$$

Los números complejos $|G|\langle f, \chi \rangle$ son los **coeficientes de Fourier** de f .

Ejemplo 3.8. Si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, entonces

$$\widehat{\chi_1}(\chi_2) = |G|\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \begin{cases} |G| & \text{si } \chi_1 = \chi_2 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por las relaciones de ortogonalidad y así $\widehat{\chi_1} = |G|e_{\chi_1}$.

Teorema 3.9 (Inversión de Fourier). *Si $f \in \mathbb{C}[G]$, entonces*

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es un cálculo sencillo:

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} |G|\langle f, \chi \rangle \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi.$$

□

Proposición 3.10. *La transformación $T : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}(\widehat{G})$ dada por $Tf = \widehat{f}$ es una transformación lineal invertible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $|G| = n$. Por definición $T(c_1f_1 + c_2f_2) = \widehat{c_1f_1 + c_2f_2}$. Ahora.

$$\begin{aligned} c_1\widehat{f_1} + c_2\widehat{f_2}(\chi) &= n\langle c_1f_1 + c_2f_2, \chi \rangle \\ &= c_1n\langle f_1, \chi \rangle + c_2n\langle f_2, \chi \rangle \\ &= c_1\widehat{f}(\chi) + c_2\widehat{f_2}(\chi) \end{aligned}$$

Así T es lineal. El Teorema 3.9 implica que T es inyectiva y como $\dim \mathbb{C}[G] = n = \dim \mathbb{C}(\widehat{G})$, tenemos que T es sobreyectiva y por tanto invertible.

□

Sea A un grupo abeliano. Hay dos maneras de convertir a $\mathbb{C}[A]$ en un anillo: una es utilizando la convolución; La otra es utilizar la multiplicación punto a punto: $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$. Se puede observar que e_1 es la identidad para el producto convolución y que la función constantemente igual a 1 es la identidad para la multiplicación. El siguiente teorema muestra que la transformada de Fourier da un isomorfismo entre esos dos anillos.

Teorema 3.11. *La transformada de Fourier satisface*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

En consecuencia, la transformación lineal $T : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}]$ dada por $Tf = \widehat{f}$ es un isomorfismo de anillos entre $(\mathbb{C}[G], +, *)$ y $(\mathbb{C}[\widehat{G}], +, \cdot)$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que por la Proposición 3.10 T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Así que para mostrar que es un isomorfismo de anillos es suficiente mostrar que $T(f * g) = Tf \cdot Tg$, es decir, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. Sea $n = |G|$.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\chi) &= n \langle f * g, \chi \rangle \\ &= n \cdot \frac{1}{n} \sum_{x \in G} (f * g)(x) \overline{\chi(x)} \\ &= \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} \sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y) \\ &= \sum_{y \in G} g(y) \sum_{x \in G} f(xy^{-1}) \overline{\chi(x)} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = xy^{-1}$ (a así, $x = zy$). Obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\chi) &= \sum_{y \in G} g(y) \sum_{z \in G} f(z) \overline{\chi(zy)} \\ &= \sum_{y \in G} g(y) \overline{\chi(y)} \sum_{z \in G} f(z) \overline{\chi(z)} \\ &= \sum_{z \in G} f(z) \overline{\chi(z)} \sum_{y \in G} g(y) \overline{\chi(y)} \\ &= n \langle f, \chi \rangle \cdot n \langle g, \chi \rangle \\ &= \widehat{f}(\chi) \widehat{g}(\chi) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Ejemplo 3.12 (Funciones periódicas sobre \mathbb{Z}). Sean $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ con período n . Su convolución está definida por

$$f * g(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(n-k)g(k).$$

La transformada de Fourier es

$$\widehat{f}(m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)e^{-2\pi imk/n}.$$

El teorema de inversión dice que

$$f(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)e^{2\pi imk/n}.$$

La fórmula de la multiplicación dice que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$. En la práctica es más eficiente calcular $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$ y luego aplicar la fórmula de inversión para obtener $f * g$ que calcular $f * g$ directamente.

Nuestra meta en el próximo capítulo será describir los autovalores de el grafo de Cayley de un grupo abeliano. Primero necesitamos un lema sobre la álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$.

Lema 3.13. *Sea G un grupo abeliano y $f \in \mathbb{C}[G]$. Definimos el operador convolución $A : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ por $A(h) = f * h$. Entonces A es lineal y χ es un autovector de A con autovalor $\widehat{f}(\chi)$ para todo $\chi \in \widehat{G}$. En consecuencia A es un operador diagonalizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $g, h \in \mathbb{C}[G], c \in \mathbb{C}$ y $x \in G$ entonces

$$\begin{aligned} A(cg + h)(x) &= f * (cg + h)(x) \\ &= \sum_{y \in G} f(xy^{-1})(cg + h)(y) \\ &= \sum_{y \in G} f(xy^{-1})(cg(y) + h(y)) \\ &= c \sum_{y \in G} f(xy^{-1})g(y) + \sum_{y \in G} f(xy^{-1})h(y) \\ &= c(f * g)(x) + f * h(x) \\ &= cA(g) + A(h). \end{aligned}$$

Lo que verifica la linealidad.

Sea ahora $n = |G|$ y supongamos que $\chi \in \widehat{G}$. Observe que

$$\widehat{f * \chi} = \widehat{f} \cdot \widehat{\chi} = \widehat{f} \cdot ne_\chi$$

donde la última igualdad se obtuvo en virtud del Ejemplo 3.8. Claramente se tiene que

$$(\widehat{f} \cdot ne_\chi)(\theta) = \begin{cases} \widehat{f}(\theta)n & \text{si } \chi = \theta \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para $\theta \in \widehat{G}$ y así, $\widehat{f} \cdot ne_\chi = \widehat{f}(\chi)ne_\chi$. Aplicando la inversa de la transformada de Fourier a $\widehat{f * \chi} = \widehat{f}(\chi)ne_\chi$ y usando que $\widehat{\chi} = ne_\chi$, obtenemos que $f * \chi = \widehat{f}(\chi)\chi$. En otras palabras, $A\chi = \widehat{f}(\chi)\chi$ y por tanto, χ es un autovector de A con autovalor $\widehat{f}(\chi)$.

Ya que los elementos de \widehat{G} forman una base ortonormal de autovectores para A , se sigue que A es diagonalizable. \square

Este enfoque puede ser generalizado a grupos no abelianos, siempre que el conjunto simétrico S sea cerrado bajo conjugación. Antes de ver la generalización, veremos un poco de análisis de Fourier para grupos no abelianos.

3. Grupos no Abelianos Finitos.

Para un grupo no abeliano G , $\mathbb{C}[G] \neq Z(\mathbb{C}[G])$, y $\mathbb{C}[G]$ es un anillo no conmutativo. Por lo tanto, no podemos encontrar una transformada de Fourier que convierta el producto convolución en una multiplicación punto a punto (debido a que la multiplicación punto a punto es conmutativa). En lugar de eso, trataremos de reemplazar la multiplicación punto a punto por la multiplicación de matrices.

Definición 3.14 (Transformada de Fourier). Sea G un grupo finito no abeliano, $\rho^{(1)}, \dots, \rho^{(s)}$ las representaciones irreducibles no equivalentes de G , d_1, \dots, d_s los respectivos grados y $f \in \mathbb{C}[G]$. Definimos la **transformada de Fourier** $T : \mathbb{C}[G] \rightarrow M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$ mediante

$$Tf = (\widehat{f}(\rho^{(1)}), \dots, \widehat{f}(\rho^{(s)}))$$

donde

$$(3.4) \quad \widehat{f}(\rho^{(k)})_{ij} = |G| \langle f, \rho_{ij}^{(k)} \rangle = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\rho_{ij}^{(k)}(g)}.$$

Note que (3.4) se puede escribir de manera mas compacta como

$$\widehat{f}(\varrho^{(k)}) = \sum_{g \in G} f(g) \overline{\varrho_g^{(k)}},$$

y es de notar también que esta es una expresión muy parecida a la del Lemma 2.19.

Teorema 3.15 (Inversión de Fourier). *Sea $f \in \mathbb{C}[G]$. Entonces*

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j,k} d_k \widehat{f}(\varrho^{(k)})_{ij} \varrho_{ij}^{(k)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Calculamos utilizando la ortonormalidad de los $\sqrt{d_k} \varrho_{ij}^{(k)}$

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i,j,k} \langle f, \sqrt{d_k} \varrho_{ij}^{(k)} \rangle \sqrt{d_k} \varrho_{ij}^{(k)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i,j,k} d_k |G| \langle f, \varrho_{ij}^{(k)} \rangle \varrho_{ij}^{(k)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i,j,k} d_k \widehat{f}(\varrho^{(k)})_{ij} \varrho_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

como se quería. □

Proposición 3.16. *La transformacion $T : \mathbb{C}[G] \rightarrow M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar que T es lineal, es suficiente probar que

$$\widehat{(c_1 f_1 + c_2 f_2)}(\varrho^{(k)}) = c_1 \widehat{f_1}(\varrho^{(k)}) + c_2 \widehat{f_2}(\varrho^{(k)})$$

para $1 \leq k \leq s$. Observe que

$$\begin{aligned} \widehat{(c_1 f_1 + c_2 f_2)}(\varrho^{(k)}) &= \sum_{g \in G} (c_1 f_1 + c_2 f_2)(g) \overline{\varrho_g^{(k)}} \\ &= c_1 \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{\varrho_g^{(k)}} + c_2 \sum_{g \in G} f_2(g) \overline{\varrho_g^{(k)}} \\ &= c_1 \widehat{f_1}(\varrho^{(k)}) + c_2 \widehat{f_2}(\varrho^{(k)}) \end{aligned}$$

que era lo que se quería.

El teorema de inversión de Fourier implica que T es inyectiva. Y como

$$\dim \mathbb{C}[G] = |G| = d_1^2 + \cdots + d_s^2 = \dim M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$$

se sigue que T es un isomorfismo. □

Teorema 3.17 (Wedderburn). *La transformada de Fourier*

$$T : \mathbb{C}[G] \rightarrow M_{d_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{d_s}(\mathbb{C})$$

es un isomorfismo de anillos.

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 3.16 establece que T es un isomorfismo de espacios vectoriales. Por tanto, para mostrar que es un isomorfismo de anillos, es suficiente probar que $T(a * b) = Ta \cdot Tb$. Para ello, verificaremos que $\widehat{a * b}(\varrho^{(k)}) = \widehat{a}(\varrho^{(k)}) \cdot \widehat{b}(\varrho^{(k)})$ para $1 \leq k \leq s$. El cálculo es análogo al caso abeliano:

$$\begin{aligned} \widehat{a * b}(\varrho^{(k)}) &= \sum_{x \in G} (a * b)(x) \overline{\varrho_x^{(k)}} \\ &= \sum_{x \in G} \overline{\varrho_x^{(k)}} \sum_{y \in G} a(xy^{-1})b(y) \\ &= \sum_{y \in G} b(y) \sum_{x \in G} a(xy^{-1}) \overline{\varrho_x^{(k)}}. \end{aligned}$$

Haciendo $z = xy^{-1}$ (así, $x = zy$) obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{a * b}(\varrho^{(k)}) &= \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} a(z) \overline{\varrho_{zy}^{(k)}} \\ &= \sum_{y \in G} b(y) \sum_{z \in G} a(z) \overline{\varrho_z^{(k)}} \cdot \overline{\varrho_y^{(k)}} \\ &= \sum_{z \in G} a(z) \overline{\varrho_z^{(k)}} \sum_{y \in G} b(y) \overline{\varrho_y^{(k)}} \\ &= \widehat{a}(\varrho^{(k)}) \cdot \widehat{b}(\varrho^{(k)}) \end{aligned}$$

y esto completa la demostración. □

Espectros de Grafos de Cayley

El espectro de un grafo, como ya hemos dicho anteriormente, da mucha información acerca de la estructura de éste. En este capítulo veremos como calcular el espectro de grafos de Cayley de grupos abelianos y grupos no abelianos. Y por último veremos algunas aplicaciones combinatorias. Las referencias para este capítulo son [8], [7] y [11].

1. Grupos Abelianos

El Lema 3.13 es el ingrediente clave para calcular los autovalores de la matriz de adyacencia de un grafo de Cayley de un grupo abeliano finito. Sólo resta ver a la matriz de adyacencia como un operador convolución.

Teorema 4.1. *Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo abeliano, y $S \subseteq G$ un conjunto simétrico. Sean χ_1, \dots, χ_n los caracteres irreducibles de G y sea A la matriz de adyacencia del grafo de Cayley de G con respecto a S (usando el orden dado para los elementos de G). Entonces:*

- (1) *Los autovalores de la matriz de adyacencia A son los números reales*

$$\lambda_i = \sum_{s \in S} \chi_i(s)$$

donde $1 \leq i \leq n$;

- (2) *La base ortonormal correspondiente de autovectores está dada por los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$*

donde

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{|G|}} (\chi_i(g_1), \dots, \chi_i(g_n))^T.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ y sea $\delta_S = \sum_{s \in S} e_s$ la función característica (o función indicadora) del conjunto S ;

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $F : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ el operador convolución

$$F(g) = \delta_S * g.$$

El Lema 3.13 implica que los caracteres irreducibles χ_i son autovectores de F y que el autovalor correspondiente es

$$\widehat{\delta}_S(\chi_i) = n \langle \delta_S, \chi_i \rangle = \sum_{x \in S} \delta_S(x) \overline{\chi_i(x)} = \sum_{s \in S} \overline{\chi_i(s)} = \sum_{s \in S} \chi_i(s) = \lambda_i$$

donde la penúltima igualdad es obtenida tomando $s = x^{-1}$ y usando que las representaciones de grado uno son unitarias, $\chi_i(x^{-1}) = \overline{\chi_i(x)}$, y que S es simétrico.

Se sigue que si B es la base $\{\delta_{g_1}, \dots, \delta_{g_n}\}$ para $\mathbb{C}[G]$, entonces la matriz $[F]_B$ de F con respecto a esta base tiene autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y autovectores v_1, \dots, v_n . La ortonormalidad de los v_i es una consecuencia de la ortonormalidad de los χ_i ; el escalar $1/\sqrt{|G|}$ viene del hecho que los δ_{g_i} son ortonormales con respecto al producto interno $(f_1, f_2) = |G| \langle f_1, f_2 \rangle$. Por lo tanto, sólo resta demostrar que $A = [F]_B$.

Para este fin, calculamos

$$F(\delta_{g_j}) = \delta_S * \delta_{g_j} = \sum_{s \in S} \delta_s * \delta_{g_j} = \sum_{s \in S} \delta_{sg_j}$$

por la Ecuación 3.2. Recordemos que $([F]_B)_{ij}$ es el coeficiente de δ_{g_i} en $F(\delta_{g_j})$, entonces concluimos que

$$\begin{aligned} ([F]_B)_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } g_i = sg_j \text{ para algún } s \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } g_i g_j^{-1} \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ &= A_{ij} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Finalmente, para verificar que λ_i es real, sólo haremos notar que si $s \in S$, entonces $s^{-1} = s$ y en ese caso $\chi_i(s) = \chi_i(s^{-1}) = \overline{\chi_i(s)}$ es real, o $s \neq s^{-1} \in S$ y $\chi(s) + \chi(s^{-1}) = \chi(s) + \overline{\chi(s)}$ es real. \square

Particularizando esto ahora al caso de matrices circulantes, tenemos:

Ejemplo 4.2. Sea A una matriz circulante de grado n , la cual es la matriz de adyacencia de el grafo de Cayley de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con respecto al conjunto simétrico S . Entonces los autovalores de A son

$$\lambda_k = \sum_{[m] \in S} e^{2\pi i k m / n}$$

donde $k = 0, \dots, n-1$ y una base correspondiente de autovectores normales está dada por v_0, \dots, v_{n-1} , donde

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, e^{2\pi i k 2/n}, \dots, e^{2\pi i k (n-1)/n})^T.$$

Ejemplo 4.3. Si A es la matriz de adyacencia del grafo circulante del Ejemplo 1.34, entonces los autovalores de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ donde

$$\lambda_k = e^{\pi i k / 3} + e^{-\pi i k / 3} + e^{2\pi i k / 3} + e^{-2\pi i k / 3} = 2 \cos \pi k / 3 + 2 \cos 2\pi k / 3$$

para $k = 1, \dots, 6$.

2. Grupos no Abelianos

Proposición 4.4. Sea G un grupo finito y sean $\varrho^{(1)}, \dots, \varrho^{(s)}$ un conjunto completo de representaciones irreducibles no equivalentes de G . Sean χ_i y d_i el caracter y el grado de $\varrho^{(i)}$ respectivamente. Supongamos que $a \in Z(\mathbb{C}[G])$ y definamos un operador lineal $A : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ por $A(b) = a * b$. Entonces, para cada $1 \leq k \leq s$, $\varrho_{ij}^{(k)}$ es un autovector de A con autovalor $\frac{|G|}{d_k} \langle a, \chi_k \rangle$.

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que $A(\varrho_{ij}^{(k)}) = \lambda_k \varrho_{ij}^{(k)}$. Para ello debemos calcular $a * \varrho_{ij}^{(k)}$. Primero observe que del Corolario 2.22 se tiene que

$$\varrho_{ij}^{(k)}(\varrho^{(m)})_{rs} = |G| \langle \varrho_{ij}^{(k)}, \varrho_{rs}^{(m)} \rangle = \frac{|G| \delta_{ir} \delta_{js} \delta_{km}}{d_k}$$

de donde

$$\widehat{\varrho_{ij}^{(k)}}(\varrho^{(m)}) = \begin{cases} \frac{|G|}{d_k} E_{ij} & \text{si } m = k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y del Lema 2.19 tenemos que

$$\widehat{f}(\varrho^{(k)}) = \frac{|G|}{d_k} \langle f, \chi_k \rangle I$$

Ahora,

$$\widehat{a * \varrho_{ij}^{(k)}}(\varrho^{(m)}) = \widehat{a}(\varrho^{(m)}) \cdot \widehat{\varrho_{ij}^{(k)}}(\varrho^{(m)}) = \begin{cases} \frac{|G|^2}{d_k^2} \langle a, \chi_k \rangle E_{ij} & \text{si } k = m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y aplicando el teorema de inversión (Teorema 3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} a * \varphi_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{r,s,m} d_m \widehat{(a * \varrho_{ij}^{(k)})}(\varrho^{(m)})_{rs} \varrho_{rs}^{(m)} \\ &= \sum_{r,s} \frac{|G|}{d_k} \langle a, \chi_k \rangle \delta_{ir} \delta_{sj} \varrho_{rs}^{(k)} \\ &= \frac{|G|}{d_k} \langle a, \chi_k \rangle \varrho_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

como se quería demostrar, aquí $\lambda_k = \frac{|G|}{d_k} \langle a, \chi_k \rangle$ □

Como los $\sqrt{d_k} \varphi_{ij}^{(k)}$ forman una base ortonormal de autovectores para A , se sigue que A es diagonalizable.

Proposición 4.5. *Sea S un conjunto simétrico que además es cerrado bajo conjugación ($gSg^{-1} = S$ para todo $g \in G$). Entonces los autovalores de la matriz de adyacencia A del grafo de Cayley de G con respecto a S son $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ donde*

$$\lambda_k = \frac{1}{d_k} \sum_{s \in S} \chi_k(s).$$

y λ_k tiene multiplicidad d_k^2 .

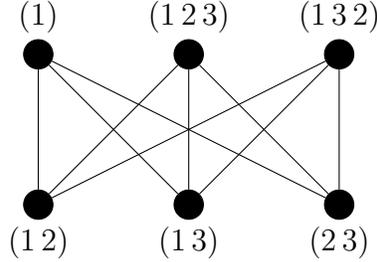
DEMOSTRACIÓN. Consideremos, como en el caso abeliano, a la función δ_S (la función indicadora del conjunto S). Ésta es una función de clases debido a que S es cerrado bajo conjugación. Como antes, la matriz de adyacencia A es el operador definido por $A(b) = \delta_S * b$.

Aplicando la proposición anterior a este caso, se obtiene que los autovalores vienen dados por

$$\lambda_k = \frac{|G|}{d_k} \langle \delta_S, \chi_k \rangle = \frac{|G|}{d_k} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \delta_S(g) \overline{\chi_k(g)} = \sum_{s \in S} \chi_k(s).$$

□

Ejemplo 4.6. Sean $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ el grupo simétrico sobre $X = \{1, 2, 3\}$ en notación cíclica, y $S = \{(12), (13), (23)\} = K_{(12)}$. Donde $K_{(12)}$ denota la clase de conjugación del elemento (12) . Consideremos el grafo de Cayley $C(S_3, S)$ dibujado abajo.



Tomando en cuenta que los caracteres de S_3 coinciden con los caracteres de D_3 y aplicando la proposición anterior, obtenemos que los autovalores de $C(S_3, S)$ son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{d_1} \sum_{s \in S} \chi_1(s) = \frac{1}{1} |K_{(12)}| \chi_1((12)) = 3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{d_2} \sum_{s \in S} \chi_2(s) = \frac{1}{1} |K_{(12)}| \chi_2((12)) = -3$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{d_3} \sum_{s \in S} \chi_3(s) = \frac{1}{2} |K_{(12)}| \chi_3((12)) = 0$$

Así, el espectro de $C(S_3, S)$ es el multiconjunto $\{-3, 0, 0, 0, 0, 3\}$.

3. Grafos de Cayley Coloreados

Sea G un grupo finito y sea $X(G, \alpha)$ un grafo de Cayley coloreado. En esta sección vemos la matriz de adyacencia (a_{gh}) de X como una transformación lineal $A : \mathbb{C}[g] \rightarrow \mathbb{C}[G]$ definida por

$$Ae_h = \sum_{g \in G} a_{gh} e_g$$

para todos $g, h \in G$.

El siguiente teorema conecta el estudio de los grafos coloreados Cayley sobre G con la teoría de representaciones de G .

Teorema 4.7. *Sea $X(G, \alpha)$ un grafo coloreado Cayley. Entonces, la matriz de adyacencia A (cuando es vista como una transformación lineal de $\mathbb{C}[G]$ es sí mismo) satisface*

$$A = \sum_{g \in G} \alpha(g) \rho_{reg}(g),$$

donde ρ_{reg} es la representación regular izquierda de G sobre $\mathbb{C}[G]$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ y $h \in G$. Tenemos que

$$A\phi(h) = \sum_{g \in G} \alpha(hg^{-1})\phi(g) = \sum_{g \in G} \alpha(g)\phi(g^{-1}h) = \sum_{g \in G} \alpha(g)\rho_{reg}(g)\phi(h).$$

□

Así, la descomposición de ρ_{reg} en subespacios ortogonales invariantes (lema 2.21) produce inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 4.8. *Sea $X(G, \alpha)$ un grafo coloreado Cayley, y sean $\rho_k : G \rightarrow \text{GL}(V_k)$, $k = 1, \dots, n$, un conjunto completo de representaciones irreducibles no equivalentes de G . Sea d_k el grado de ρ_k , y sea $\varrho^{(k)}$ una representación matricial unitaria de ρ_k . Entonces, para todo $k = 1, \dots, n$ y $1 \leq i, j \leq d_k$,*

$$(4.1) \quad A\bar{\varrho}_{ij}^{(k)} = \sum_{g \in G} \alpha(g)\rho_{reg}(g)\varrho_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{d_k} \left(\sum_{g \in G} \alpha(g)\varrho_{li}^{(k)}(g) \right) \bar{\varrho}_{lj}^{(k)}.$$

Corolario 4.9. *Denotemos por \mathcal{E}_k al conjunto de autovalores de la transformación lineal $\hat{\rho}_k(\alpha)$. Entonces,*

- (1) *el conjunto de autovalores de A es igual a $\cup_{k=1}^n \mathcal{E}_k$; y*
- (2) *si el autovalor λ ocurre con multiplicidad $m_k(\lambda)$ en $\hat{\rho}_k(\alpha)$, entonces la multiplicidad de λ en A es $\sum_{k=1}^n d_k m_k(\lambda)$.*

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (4.1) muestra que los vectores $B_j^{(k)} = \{\bar{\varrho}_{ij}^{(k)}\}_{1 \leq i \leq d_k}$ generan un subespacio A -invariante $W_j^{(k)}$ de $\mathbb{C}[G]$ de dimensión d_k [ver Lema 2.21]. Más aún, (4.1) muestra que A restringido a $W_j^{(k)}$ tiene (relativa a $B_j^{(k)}$) forma matricial

$$\sum_{g \in G} \alpha(g)\varrho^{(k)}(g),$$

la cual es la matriz de $\hat{\rho}_k(\alpha)$ relativa a la base usada para contruir la $\varrho^{(k)}(g)$. Ahora, ya que $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{j=1}^{d_k} W_j^{(k)}$, el polinomio característico $f(\lambda)$ de A y los polinomios característicos $g_k(\lambda)$ de $\hat{\rho}_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, están relacionados por

$$f(\lambda) = \prod_{k=1}^n g_k(\lambda)^{d_k}.$$

□

Cuando α es una función de clase, podemos decir aún más gracias al Lema 2.19.

Corolario 4.10. *Sea α una función de clases. Entonces, cada vector en la base ortogonal $\{\bar{\varrho}_{ij}^{(k)}\}$ de $\mathbb{C}[G]$ es un autovector de A . El autovalor asociado con $\bar{\varrho}_{ij}^{(k)}$ es*

$$(4.2) \quad \lambda_k = \frac{|G|}{d_k} \langle \alpha, \bar{\chi}_k \rangle = \frac{1}{d_k} \sum_{g \in G} \alpha(g) \chi_k(g).$$

DEMOSTRACIÓN. El Lema 2.19 da para una función de clases α que

$$\sum_{g \in G} \alpha(g) \varrho_{li}^{(k)}(g) = \frac{|G|}{d_k} \langle \alpha, \bar{\chi}_k \rangle \delta_{li},$$

y sustituyendo en (4.1) se obtiene el resultado. □

Ejemplo 4.11 (Grafos de Hamming). El **grafo de Hamming** $H(n, r)$ es el grafo de Cayley $X(\mathbb{Z}_r^n, S)$, donde S es el conjunto de todos los elementos de \mathbb{Z}_r^n con exactamente una coordenada no nula. En particular, el grafo de Hamming $H(n, 2)$ es el hipercubo n -dimensional.

Ahora determinaremos los autovalores y autovectores de $H(n, r)$. Ya que \mathbb{Z}_r^n es abeliano, toda sus clases de equivalencia son conjuntos unipuntuales. Esto implica que la función característica α del conjunto S es una función de clases, y podemos aplicar el Corolario 4.10.

Los autovectores de la matriz de adyacencia A de $H(n, r)$ son así $\{\bar{\varrho}^{(x)}\}_{x \in \mathbb{Z}_r^n}$, donde

$$\bar{\varrho}^{(x)}(y) = e^{\frac{2\pi(\sum_{j=1}^n x_j y_j)i}{r}}, \quad y \in \mathbb{Z}_r^n$$

es conjugada compleja de la representación unidimensional asociada con $x \in \mathbb{Z}_r^n$. El autovalor correspondiente λ_x puede ser hallado usando (4.2) y la fórmula del caracter (2.13): La función característica de S es

$$\alpha(y) = \begin{cases} 1 & \text{si hay exactamente un } i \text{ tal que } y_i \neq 0; \text{ y} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Así, si denotamos por $w_H(x)$ el número de coordenadas no nulas en x , tenemos

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \sum_{y \in \mathbb{Z}_r^n} \alpha(y) \chi_x(y) = \sum_{j=1}^n \sum_{y_j=1}^{r-1} e^{\frac{2\pi x_j y_j i}{r}} = -n + \sum_{j=1}^n \sum_{y_j=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi x_j y_j i}{r}} \\ &= -n + (n - w_H(x))r = (r-1)n - rw_H(x),\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de (2.11).

Por ejemplo, los autovectores $\bar{\varrho}^{(x)}$ junto con sus autovalores λ_x para $n = 3$ y $r = 2$ están dados en la siguiente tabla:

y	000	001	010	011	100	101	110	111	λ
$\bar{\varrho}^{(000)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	3
$\bar{\varrho}^{(001)}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
$\bar{\varrho}^{(010)}$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$\bar{\varrho}^{(011)}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
$\bar{\varrho}^{(100)}$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
$\bar{\varrho}^{(101)}$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
$\bar{\varrho}^{(110)}$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
$\bar{\varrho}^{(111)}$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-3

Ejemplo 4.12 (El grupo diedral). Ahora consideraremos el grupo diedral D_n , $n \geq 3$, y el conjunto generador $S = \{r, r^{n-1}, s\}$, el cual es simétrico, pero no una unión de clases de conjugación. Por simplicidad, consideraremos n impar. El espectro de la matriz de adyacencia de $C(D_n, S)$ puede ser calculado usando el Corolario 4.9. Para las dos representaciones unidimensionales

$$\theta_{1'}(sr^j) = 1, \quad \theta_{2'}(s^k r^j) = (-1)^k,$$

obtenemos

$$\hat{\theta}_1(\alpha) = 3 \quad \hat{\theta}_2(\alpha) = 1.$$

Para las restantes $(n-1)/2$ representaciones 2-dimensionales, $1 \leq m \leq (n-1)/2$,

$$\varrho^{(m)}(r^j) = \begin{pmatrix} \eta^{mj} & 0 \\ 0 & \eta^{-mj} \end{pmatrix}, \quad \varrho^{(m)}(sr^j) = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{-mj} \\ \eta^{mj} & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$\hat{\rho}(\alpha) = \begin{pmatrix} \eta^m + \eta^{-m} & 1 \\ 1 & \eta^{-m} + \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos 2\pi m/n & 1 \\ 1 & 2 \cos 2\pi m/n \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la $\hat{\rho}(\alpha)$ son fáciles de determinar

λ	$m(\lambda)$	η
$\lambda_{1'} = 3$	1	$(1)^T$
$\lambda_{2'} = 1$	1	$(1)^T$
$\lambda_k = 2 \cos 2m\pi/n \pm 1, 1 \leq m \leq (n-1)/2$	1, 1	$(1, 1)^T, (1, -1)^T$

los cuales son los autovalores de A por el Corolario 4.9. De (4.1) obtenemos que el correspondiente conjunto de autovectores de A está formado por las combinaciones lineales $\sum_i \zeta_i \bar{\rho}_{ij}^{(k)}$, donde $\zeta = (\zeta_i)^T$ es un autovector de $\hat{\rho}^{(k)}(\alpha)$ correspondiente a λ .

Ejemplo 4.13 (El Grafo de los Desarreglos).

Definición 4.14. Sea S_n el grupo simétrico de las permutaciones de $X = \{1, 2, \dots, n\}$, y $\mathcal{D}_n = \{\sigma \in S_n : \sigma(x) \neq x, \forall x \in X\}$ los **desarreglos** de X , también conocido como el conjunto de las permutaciones de S_n libres de puntos fijos. (Note que \mathcal{D}_n es simétrico, pues el inverso de un desarreglo es un desarreglo, y no contiene a la identidad.) Lamaremos a $\Gamma_n = (S_n, \mathcal{D}_n)$ el **grafo de desarreglos de X** .

$\Gamma_n = (S_n, \mathcal{D}_n)$ es conexo ($n \geq 3$). Esto es porque cada permutación puede ser escrita como producto de transposiciones adyacentes $(k, k+1)$, y estas, a su vez, pueden ser expresadas como el producto de dos desarreglos $(1, 2, \dots, n)^2$ y $(n, n-1, \dots, 1)^2(k, k+1)$. (Para $n = 3$ no se cumple debido a que el producto $(3, 2, 1)(k, k+1)$ no es un desarreglo para ningun k .) Así, para $n \geq 3$ los desarreglos generan S_n .

Definición 4.15. Una partición de un entero positivo n es una sucesión $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ de enteros positivos tales que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_h$ y $\sum_{i=1}^h \lambda_i = n$. Escribimos $\lambda \vdash n$ para indicar que λ es una partición de n .

Como es bién sabido, los caractere irreducibles χ_λ de S_n son indexados en las particiones $\lambda \vdash n$. Así como el tipo cíclico de una permutación de S_n es la partición cuyas partes son las longitudes de esos ciclos, las clases de conjugación también son indexadas por las particiones.

La **representación estandar** de S_n correspondiente a la partición $\lambda = (n - 1, 1)$ juega un rol importante en el resultado. Es construida como sigue. Sea V un espacio vectorial producto interno de dimensión n con base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Entonses S_n actúa sobre V permutando cada vector

$$\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

y extendiendo la acción linealmente. Esta representación es conocida como la **representación natural** de S_n . Es claro que S_n deja fijo al espacio unidimensional U generado por el vector $\sum_i e_i$, así que U nos proporciona la representación trivial de S_n (que es irreducible). El complemento ortogonal $W = U^\perp$ también nos proporciona una representación irreducible de dimensión $n - 1$, es decir, la representación estandar, y tenemos entonces la descomposición en subespacios invariantes

$$V = U \oplus W.$$

Como los caracteres son aditivos sobre la suma directa, se sigue que

$$\chi_W = \chi_V - \chi_U.$$

$\chi_V(\sigma)$ sólo cuenta el número de puntos fijos de σ , así

$$(4.3) \quad \chi_W(\sigma) = \#\{\text{puntos fijos de } \sigma\} - 1.$$

De (4.3) y el Corolario 4.10, el autovalor del grafo de desarreglo correspondiente a la representación estandar es

$$\eta_W = \frac{1}{\chi_W(1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_n} \chi_W(\sigma) = \frac{-|\mathcal{D}_n|}{n - 1}.$$

Ejemplo 4.16 (El Grafo del Sudoku). Para un entero $n \geq 2$ un n -**Sudoku** es un arreglo de $n \times n$ bloques cuadrados conformados cada uno por $n \times n$ celdas. En la Figura 4.16 se muestra el formato más usado, que es cuando $n = 3$. Cada celda debe ser llenada con un número entre 1 y n^2 , de tal modo que cada bloque, fila o columna contenga todos los números de 1 a n^2 . Para un Sudoku como los que aparecen en los periódicos, algunas de las celdas ya están llenas (en la Figura 4.16 se ven más oscuras). El objetivo es llenar las celdas restantes con las condiciones ya explicadas.

9	1	4	2	5	6	3	7	8
7	6	5	3	1	8	2	9	4
3	8	2	7	9	4	6	5	1
1	2	6	9	8	7	5	4	3
5	4	7	6	3	2	1	8	9
8	9	3	1	4	5	7	6	2
6	5	1	8	2	9	4	3	7
4	3	9	5	7	1	8	2	6
2	7	8	4	6	3	9	1	5

FIGURA 4.1. Sudoku 3×3

El **grafo del Sudoku** $Sud(n)$ tiene como vértices a las n^2 celdas de un n -Sudoku. Dos vértices (celdas) son adyacentes, si están en el mismo bloque, en la misma fila o en la misma columna.

Mostraremos que $Sud(n) = Cay(\Gamma, S)$ para un grupo abeliano Γ y un conjunto simétrico S .

Los vértices de $Sud(n)$ los representaremos por elementos

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Gamma = \mathbb{Z}_n^4, \mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Para una celda dada, el primer par de coordenadas (x_1, x_2) indica el bloque de la celda. El segundo par (x_3, x_4) describe la posición de la celda dentro del bloque. De acuerdo a los diferentes tipos de aristas en $Sud(n)$ el conjunto S es particionado en tres subconjuntos, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$$S_1 = \{(0, 0, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_n, (x_3, x_4) \neq (0, 0)\},$$

$$S_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{Z}_n, x_2 \neq 0\},$$

$$S_3 = \{(x_1, 0, x_3, 0) : x_1, x_3 \in \mathbb{Z}_n, x_1 \neq 0\}$$

Las aristas dentro de cada bloque son provistas por S_1 . Las aristas restantes, dentro de una fila o una columna, son provistas por S_2 y S_3 . Resulta claro que S es un conjunto simétrico y que no contine a la identidad (el $(0,0,0,0)$). Así, $Sud(n) = Cay(\Gamma, S)$.

Los autovalores para este grafo vienen dados por

$$\lambda_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = \sum_{s \in S_1} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) + \sum_{s \in S_2} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) + \sum_{s \in S_3} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_1} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) &= \sum_{(x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_n^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{2k_3 x_3 \pi i} e^{2k_4 x_4 \pi i} \\ &= \sum_{(x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_n^2} e^{2k_3 x_3 \pi i} e^{2k_4 x_4 \pi i} - 1 \\ &= \left(\sum_{x_3 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_3 x_3 \pi i} \right) \left(\sum_{x_4 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_4 x_4 \pi i} \right) - 1 \\ &= \left(\begin{cases} n & \text{si } k_3 = 0 \\ 0 & \text{si } k_3 \neq 0 \end{cases} \right) \left(\begin{cases} n & \text{si } k_4 = 0 \\ 0 & \text{si } k_4 \neq 0 \end{cases} \right) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_2} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) &= \sum_{(x_2, x_4) \in \mathbb{Z}_n^2, x_2 \neq 0} e^{2k_2 x_2 \pi i} e^{2k_4 x_4 \pi i} \\ &= \left(\sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_2 x_2 \pi i} \right) \left(\sum_{x_4 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_4 x_4 \pi i} \right) \\ &= \left(\sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_2 x_2 \pi i} - 1 \right) \left(\sum_{x_4 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_4 x_4 \pi i} \right) \\ &= \left(\begin{cases} n - 1 & \text{si } k_2 = 0 \\ -1 & \text{si } k_2 \neq 0 \end{cases} \right) \left(\begin{cases} n & \text{si } k_4 = 0 \\ 0 & \text{si } k_4 \neq 0 \end{cases} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S_3} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) &= \sum_{(x_1, x_3) \in \mathbb{Z}_n^2, x_1 \neq 0} e^{2k_1 x_1 \pi i} e^{2k_3 x_3 \pi i} \\
&= \left(\sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_1 x_1 \pi i} \right) \left(\sum_{x_3 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_3 x_3 \pi i} \right) \\
&= \left(\sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_1 x_1 \pi i} - 1 \right) \left(\sum_{x_3 \in \mathbb{Z}_n} e^{2k_3 x_3 \pi i} \right) \\
&= \left(\begin{cases} n-1 & \text{si } k_1 = 0 \\ -1 & \text{si } k_1 \neq 0 \end{cases} \right) \left(\begin{cases} n & \text{si } k_3 = 0 \\ 0 & \text{si } k_3 \neq 0 \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

Y sólo pueden ocurrir los siguientes casos.

Caso 1, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ (puede ocurrir de una sola manera). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = 3n^2 - 2n - 1.$$

Caso 2, $k_1 \neq 0$ y $k_2 = k_3 = k_4 = 0$ o $k_2 \neq 0$ y $k_1 = k_3 = k_4 = 0$ (puede ocurrir de $2(n-1)$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = 2n^2 - 2n - 1.$$

Caso 3, $k_3 \neq 0$ y $k_2 = k_4 = 0$ o $k_4 \neq 0$ y $k_1 = k_3 = 0$ (puede ocurrir de $2n(n-1)$ maneras).

En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = n^2 - n - 1.$$

Caso 4, $k_3 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ y $k_4 = 0$ o $k_4 \neq 0$, $k_1 \neq 0$ y $k_3 = 0$ (puede ocurrir de $2n(n-1)^2$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = -n - 1.$$

Caso 5, $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ y $k_3 = k_4 = 0$ (puede ocurrir de $(n-1)^2$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = n^2 - 2n - 1.$$

Caso 6, $k_3 \neq 0$ y $k_4 \neq 0$ (puede ocurrir de $n^2(n-1)^2$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2 k_3 k_4}(s) = -1.$$

Ejemplo 4.17 (Grafo Pandiagonal Cuadrado Latino). Un **cuadrado Latino** es una matriz $n \times n$ con entradas en $\{1, \dots, n\}$ tal que cada número $1, \dots, n$ aparece exactamente una vez en cada fila y en cada columna. Para un **cuadrado Latino pandiagonal** deben cumplirse dos condiciones adicionales. Cada número $1, \dots, n$ tiene que aparecer exactamente una vez en la diagonal principal y en sus paralelas así como en la diagonal secundaria y sus paralelas. Hasta ahora, se ha probado que un cuadrado Latino pandiagonal $n \times n$ existe, si y sólo si $n \cong \pm 1 \pmod{6}$. En la Figura 4.17 se muestra un cuadrado Latino pandiagonal 7×7 .

1	2	3	4	5	6	7
6	7	1	2	3	4	5
4	5	6	7	1	2	3
2	3	4	5	6	7	1
7	1	2	3	4	5	6
5	6	7	1	2	3	4
3	4	5	6	7	1	2

FIGURA 4.2. Cuadrado Latino pandiagonal 7×7

Para $n \geq 2$ el **grafo cuadrado Latino pandiagonal** $PLSG(n)$ tiene por conjunto de vértices a las n^2 entradas de la matriz $n \times n$ y dos vértices son adyacentes si ellos están en la misma fila, la misma columna, la misma paralela a la diagonal principal o la misma paralela a la diagonal secundaria.

Los vértices de el $PLSG(n)$ los identificaremos con los elementos de $\Gamma = \mathbb{Z}_n^2$. El conjunto S podemos particionarlo en cuatro partes, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, de acuerdo al tipo de aristas en $PLSG(n)$. Las aristas que relacionan a los elementos de la misma fila o la misma columna estan provistas por los conjuntos

$$S_1 = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{Z}_n, x_2 \neq 0\}, \quad S_2 = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{Z}_n, x_1 \neq 0\}.$$

Las aristas que relacionan elementos de la diagonal principal o alguna de sus paralelas son proporcionadas por el conjunto $S_3 = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{Z}_n, x_1 \neq 0\}$. Y las aristas restantes

que relacionan elementos en la diagonal secundaria o en alguna de sus paralelas, son proporcionadas por el conjunto

$$S_4 = \{(x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{Z}_n, x_1 \neq 0, x_1 \neq \frac{n}{2} \text{ para } n \text{ par} \}.$$

Nuevamente, S es un subconjunto simétrico que no posee a la identidad y $PLSG(n) = Cay(\Gamma, S)$.

Los autovalores de este grafo vienen dados por:

En el caso en que n es impar

$$\lambda_{k_1 k_2} = \sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = \sum_{s \in S_1} \chi_{k_1 k_2}(s) + \sum_{s \in S_2} \chi_{k_1 k_2}(s) + \sum_{s \in S_3} \chi_{k_1 k_2}(s) + \sum_{s \in S_4} \chi_{k_1 k_2}(s).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_1} \chi_{k_1 k_2}(s) &= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_2 x_2 \pi i / n} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} e^{2k_2 j \pi i / n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} e^{2k_2 j \pi i / n} - 1 \\ &= \begin{cases} n - 1 & \text{si } k_2 = 0 \\ -1 & \text{si } k_2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S_2} \chi_{k_1 k_2}(s) &= \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_1 x_1 \pi i / n} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} e^{2k_1 j \pi i / n} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} e^{2k_1 j \pi i / n} - 1 \\ &= \begin{cases} n - 1 & \text{si } k_1 = 0 \\ -1 & \text{si } k_1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S_3} \chi_{k_1 k_2}(s) &= \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_1 x_1 \pi i/n} e^{2k_2 x_1 \pi i/n} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} e^{2(k_1+k_2)j\pi i/n} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} e^{2(k_1+k_2)j\pi i/n} - 1 \\
&= \begin{cases} n-1 & \text{si } k_1 = -k_2 \\ -1 & \text{si } k_1 \neq -k_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in S_4} \chi_{k_1 k_2}(s) &= \sum_{x_1 \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}} e^{2k_1 x_1 \pi i/n} e^{2k_2 (-x_1) \pi i/n} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} e^{2(k_1-k_2)j\pi i/n} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} e^{2(k_1-k_2)j\pi i/n} - 1 \\
&= \begin{cases} n-1 & \text{si } k_1 = k_2 \\ -1 & \text{si } k_1 \neq k_2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Y sólo pueden ocurrir los siguientes casos. Caso 1, $k_1 = k_2 = 0$ (puede ocurrir de una sola manera). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = 4n - 4$$

Caso 2, $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ (puede ocurrir de $n - 1$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = n - 4$$

Caso 3, $k_2 = 0, k_1 \neq 0$ (puede ocurrir de $n - 1$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = n - 4$$

Caso 4, $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ y $k_1 = -k_2$ (puede ocurrir de $n - 1$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = n - 4$$

Caso 5, $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ y $k_1 = k_2$ (puede ocurrir de $n - 1$ maneras). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = n - 4$$

Caso 6, $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ y $k_1 \neq \pm k_2$ (puede ocurrir de $n^2 - 4n + 3$ maneras, que son las restantes de las n^2 posibles). En este caso

$$\sum_{s \in S} \chi_{k_1 k_2}(s) = -4$$

así, los autovalores son (con la multiplicidad entre corchetes)

$$4n - 4[1], \quad n - 4[4n - 4] \quad - 4[n^2 - 4n + 3].$$

4. Aplicaciones Combinatorias

4.1. El n -ciclo. Considere el n -ciclo $C(\mathbb{Z}_n, \{-[1], [1]\})$ que lo denotaremos por C_n . Los autovalores del n -ciclo tienen la forma

$$\lambda_k = e^{-2k\pi i/n} + e^{2k\pi i/n} = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Así, si n es par

$$\text{Spec}(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 2 \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{2\pi(n/2-1)}{n}\right) & -2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y si n es impar

$$\text{Spec}(C_n) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 2 \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{2\pi(n-1)/2}{n}\right) \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}.$$

El estudio de grafos como en n -ciclo C_n y sus autovalores pueden llevarnos también a identidades combinatorias interesantes.

Ejemplo 4.18. Consideremos $N_0(k)$ como el número de caminos cerrados de longitud k en C_n que comienzan y terminan en 0.

Tomamos a 1 como pasos en sentido antihorario en C_n y -1 como pasos en sentido horario. Entonces, para que el camino comience en cero y termine en cero, deben haber tantos 1's como -1 's o en su defecto, la diferencia entre el número total de pasos en sentido

antihorario y el número total de pasos en sentido horario debe ser un múltiplo de n . Es decir, si hay r 1's y $k - r$ -1's entonces $n \mid 2r - k$.

Ahora, como hay $\binom{k}{r}$ maneras de dar k pasos que tengan r 1's y $k - r$ -1's, tenemos que el numero total de caminos cerrados en C_n que comienzan en cero y terminan en cero viene dado por

$$N_0(k) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq k \\ n \mid 2r - k}} \binom{k}{r}.$$

El número de caminos cerrados de longitud k en C_n que comienzan y terminan en un vértice determinado, coincide con $N_0(k)$. De donde el numero total de caminos cerrados de longitud k en C_n es

$$nN_0(k) = n \sum_{\substack{1 \leq r \leq k \\ n \mid 2r - k}} \binom{k}{r}.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.20 tenemos que si A es la matriz de adyacencia de C_n entonces A_{ii}^k es el numero de caminos de longitud k que comienzan y terminan en el vértice v_i (es decir, camino cerrado). Entonces $\text{Tr } A^k = nN_0(k)$ y obtenemos la siguiente identidad

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq k \\ n \mid 2r - k}} \binom{k}{r} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(2 \cos \left(\frac{2\pi j}{n} \right) \right)^k.$$

4.2. El n -cubo. Recordemos al n -cubo (o hipercubo) del Ejemplo 1.27. Éste no es más que un caso particular del grafo de Hamming $H(n, r)$ cuando $r = 2$ y S es el conjunto de generadores estandar.

Los autovalores del n -cubo tienen la forma

$$\lambda_x = \sum_{y \in S} \chi_x(y) = \sum_{j=1}^n \sum_{y_j=0}^1 e^{\frac{2\pi x_j y_j i}{r}} - n = n - 2w_H(x).$$

Es decir, si $w_H(x) = m$ entonces el autovalor $\lambda_x = n - 2m$. Ahora, el autovalor $n - 2m$ ocurre $\binom{n}{m}$ veces.

Entonces, si A es la matriz de adyacencia del n cubo, el número de caminos cerrados de longitud k en el n -cubo viene dado por

$$\sum_{m=1}^n \binom{n}{m} (n - 2m)^k.$$

Bibliografía

- [1] Ambar N. Sengupta *Representing Finite Groups. A semisimple Introduction*. Springer. 2012
- [2] Audrey Terras. *Fourier Analysis on Finite Groups And Applications*. London Mathematical society Students Texts 43. 1999.
- [3] Bao Luong. *Fourier Analysis on Finite Abelian Groups: Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser. 2009.
- [4] Benjamin Steinberg. *Representation Theory of Finite Groups. An introductory Approach*. Springer. 2012
- [5] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group Representations: Combinatorial Algorithms, and Symetric Functions*. Second Edition. Springer. 2000.
- [6] Cameron Franc. *Cayley Graphs*. <http://www.math.mcgill.ca/goren/667.2010/Cameron.pdf>.
- [7] Mike Krebs and Anthony Shaheen. *Expander Families and Cayley Graphs*. A beginner's Guide. OXFORD University Press. 2011.
- [8] Petteri Kaski. *Eigenvectors and Spectra of Cayley Graph*. Accompanying manuscript to the seminar presentation given in "T-79.300 Postgraduate Course in Theoretical Computer Science", Helsinki University of Technology, Spring Term 2002. http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.300/2002S/esitelmat/kaski_paper_020506.pdf.
- [9] Richard A. Brualdi and Dragoš Cvetković. *Discrete Mathematics and Its Applications: A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Applications*. Taylor & Francis Group, 2009.
- [10] Ulrich Knauer. *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices*. De Gruyter Studies in Mathematics 41, Germany, April 2011.
- [11] Walter Klotz and Torsten Sander. *Integral Cayley Graphs Over Abelian Groups*. Technische Universität at Clausthal, Germany. Published: May 25, 2010.