UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Representación del movimiento browniano fraccionario a partir de la ecuación del calor estocástica

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Henry Navarro** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dra. Stella Brassesco.
Co – Tutor: Dra. Mairene Colina.

Caracas, Venezuela
Febrero 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Representación del movimiento browniano fraccionario a partir de la ecuación del calor estocástica**", presentado por el **Br. Henry Navarro**, titular de la Cédula de Identidad **18.934.948**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Stella Brassesco
Tutor

Mairene Colina
Co–Tutor

José Rafael León
Jurado

José Benito Hrnández
Jurado

A mi madre, la persona a quien le debo todo lo que soy ahora, a quien le debo la vida y más, la única que ha luchado por mi. Le dedico mi tesis, mi vida y todos mis logros...

Agradecimientos

A la Dra. Stella Brassesco, mi tutora de tesis de pregrado, a quien le agradezco por haberme recibido como su alumno durante casi dos años. Si de algo estoy seguro, es que durante ese tiempo me enseñó todo lo que pudo, por eso le debo todos esos conocimientos que aprendí con ella y le agradezco por su gran esmero en cada corrección que hizo a mi tesis, fue fundamental en la elaboración de este trabajo y por lo tanto le debo parte de mi título de Licenciado en Matemática.

A la Dra. Mairene Colina, quien más que mi co–tutora de tesis fue una madre durante toda mis estudios y estuvo siempre dispuesta a ayudarme en todo momento, le agradezco por sus valiosas sugerencias y la revisión detallada del trabajo.

A toda mi familia, compañeros de estudios y amigos más allegados por estar siempre pendientes de mi desde el mismo momento en que inicié mis estudios hasta que finalicé mi carrera.

Por supuesto, a mi bella universidad, de la que me siento orgulloso por haber dejado mi huella y haber pertenecido a “La Casa que Vence las Sombras” mi U...U...UCV.

Al Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC) por haberme permitido ingresar a sus instalaciones para poder llevar a cabo toda mi investigación, por permitirme utilizar su excelente biblioteca, su comedor y por tener el personal administrativo mejor calificado que me hicieron sentir como en mi propio hogar.

Gracias totales...

Índice general

Introducción

Desde que en el siglo XVII Newton y Leibnitz pusieron las bases de lo que ahora llamamos *Cálculo Diferencial*, las ecuaciones diferenciales han sido una herramienta matemática fundamental para modelar sistemas físicos.

La teoría de las ecuaciones en derivadas parciales es con toda seguridad la disciplina de las matemáticas con una más clara motivación aplicada. Tengamos en cuenta que la inmensa mayoría de estas ecuaciones deben sus nombres a personalidades científicas de la ciencia tecnológica aplicada y surgen como modelos matemáticos asociados a diferentes fenómenos de la física (movimiento vibratorio, difusión del calor, ...), química (procesos de reacción-combustión), entre otros. Por todo ello, el estudio de estas ecuaciones es muy importante y resulta de indudable interés.

Las leyes físicas que gobiernan un sistema determinan las ecuaciones correspondientes, que después intentamos resolver, es decir, de las cuales intentamos obtener una expresión del estado del sistema en el instante de tiempo t. A veces el sistema físico que queremos modelar es demasiado complejo no sólo para resolver efectivamente las ecuaciones asociadas sino incluso para llegar a formular un conjunto de ecuaciones diferenciales que sea suficientemente representativo de sus características. Resulta que en muchas de estas situaciones "desesperadas" es posible usar cierta información parcial al alcance sobre las fuerzas que interactúan y a cambio obtener determinados resultados parciales del problema.

Supongamos que se tiene un sistema físico modelado por una ecuación en derivadas parciales. Supongamos que el sistema tiene una perturbación aleatoria, tal vez por algún tipo de ruido blanco. ¿Como evolucionan en el tiempo? Piénsese por ejemplo en una guitarra dejada sin cuidado al aire libre. Si llamamos $u(x,t)$ a la posición de una de las cuerdas en el punto x y el tiempo t, entonces $u(x,t)$ podría satisfacer la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{x}^2}.$$

Sin embargo, si una tormenta de arena soplase, la cuerda sería bombardeada por una serie de granos de arena. Representemos la intensidad del bombardeo en el punto x y en el instante de tiempo t por $\dot{W}$. El número de granos golpeando la cuerda en un punto e instante dado será en gran parte independiente del número de golpes en otro punto e instante, de modo que, después de restar una intensidad media, $\dot{W}$ podría ser aproximado por un ruido blanco, y la ecuación final sería:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{W},$$

donde $\dot{W}$ es un ruido blanco que depende del tiempo y el espacio, o, en otras palabras, un ruido blanco de dos parámetros.

Una peculiaridad de esta ecuación (no es de extrañar teniendo en cuenta el comportamiento de las ecuaciones en derivadas parciales estocásticas) es que ninguna de las derivadas parciales en ella existen. Sin embargo uno puede reescribirla como una ecuación integral, y entonces mostrar que en esta forma existe una solución la cual es continua, aunque no diferenciable.

En una dimensión mayor (con un parche de tambor, por ejemplo, en lugar de una cuerda) esto no funciona: la solución resulta ser una distribución, no una función. Este es uno de los obstáculos técnicos en el tema: hay que ocuparse de la solución distribución - valor, y esto ha generado una serie de enfoques, la mayoría con un uso bastante amplio de análisis funcional.

Nuestro mayor enfoque será (tal y como lo dice el título) a la Ecuación del Calor. Ésta fue presentada en 1807 por el matemático francés Joseph Fourier, quien por primera vez realiza estudios sobre la propagación del calor y su teoría es recibida con una inesperada aceptación, pero que debido a su falta de rigor matemático no es publicada sino hasta 1822 cuando él mismo era el Secretario Permanente de la Academia de Ciencias de París.

La ecuación del calor describe cómo se distribuye la temperatura en un cuerpo sólido en función del tiempo y el espacio. El interés en su estudio radica en las múltiples aplicaciones que tiene en diversas ramas de la ciencia. En las matemáticas generales, representa la típica ecuación en derivadas parciales parabólica y concretamente en la estadística está relacionada con los procesos aleatorios. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(x,t),$$

donde Δ representa el laplaciano de u y F un agente externo. Nuestro objetivo está en el estudio de esta ecuación cuando la función F es un proceso estocástico, es decir ¿Que pasaría si la ecuación del calor fuese perturbada por un agente externo aleatorio?, en esto se basará nuestro estudio.

Obtendremos, a partir de la ecuación del calor estocástica perturbada por un ruido blanco un movimiento browniano fraccionario y posteriormente estudiaremos ciertas propiedades de este proceso tales como "tocar puntos" y "tener dobles puntos". Para esto, se requiere un estudio previo referente a la teoría de proceso gaussianos para posteriormente resolver la ecuación del calor estocástica y estudiar propiedades de regularidad de la solución de dicha ecuación. El siguiente paso será entender el por qué de la necesidad de colorear el ruido en la ecuación del calor estocástica y luego óbtener el movimiento browniano fraccionario para así estudiar algunas propiedades de éste.

CAPíTULO 1

Vectores Gaussianos Aleatorios

1. Vectores Gaussianos Aleatorios

Definición 1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una *variable aleatoria* es una función medible

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

que a cada $\omega \in \Omega$ le asigna un valor $X(\omega)$.

Definición 1.2. Sea T un conjunto cualquiera. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un proceso estocástico (o proceso aleatorio) con espacio de parámetros T es una colección de variables aleatorias a valores en $\mathbb{R}$ indexadas por T. Es decir, un proceso estocástico X es una colección

$$\{X_t : t \in T\}$$

donde cada X_t es una variable aleatoria.

Definición 1.3. Una variable aleatoria G se dice que tiene *distribución normal o Gaussiana* o que está *normalmente distribuida*, con parámetros μ y $\sigma^2 (\sigma > 0)$, si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
La función de distribución de una variable aleatoria normal es

$$P(G \leq t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.4. Sea $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ un vector de variables aleatorias y $t = (t_1, \ldots, t_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Diremos que la distribución de G es *Gaussiana* si

$$\langle G, t \rangle = \sum_{j=1}^{n} G_j t_j$$

es una variable aleatoria Gaussiana. Se puede demostrar, que esta definición es equivalente a decir que G es Gaussiana si y solo si existe $\mu \in \mathbb{R}^n$ y una matriz C no negativa definida de orden n tal que

$$\mathbb{E}\left[e^{\langle it, G\rangle}\right] = e^{\langle it, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Ct\rangle}.$$

DEFINICIÓN 1.5. Sea $G = \{G(t)\}_{t\in T}$ una colección de variables aleatorias indexadas por T. Decimos que G es un *proceso Gaussiano* si $(G(t_1), \ldots, G(t_n))$ es un vector de variables aleatorias Gaussianas para cada $t_1, \ldots, t_n \in T$

Presentaremos un resultado que garantice la existencia de un proceso gaussiano dada una función de covarianza simétrica no negativa definida. Para esto, procederemos al igual que en [**5**] (Khoshnevisan. Davar pág. 3) y comenzamos con el siguiente teorema.

TEOREMA 1.6. *Sea T un conjunto cualquiera, $\mu : T \to \mathbb{R}$ y $C : T \times T \to \mathbb{R}$ tal que $C(s,t) = C(t,s)$ para todo $t, s \in T$ y para $F \subseteq T$, $\{C(s,t)\}_{s,t\in F}$ es una matriz no negativa definida. Entonces existe un proceso Gaussiano $\{X_t\}_{t\in T}$ con función de media μ y función de covarianza C.*

DEMOSTRACIÓN. Puede verificarse la prueba al detalle en [**2**] (Dudley R. M. pág. 443). □

PROPOSICIÓN 1.7. *Sea $T = [0,\infty)$, $\mu(t) = 0$, y $C(s,t) = \min(s,t)$ para todo s, $t \in [0,\infty)$, entonces C es no negativa definida.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, para todo $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ y $t_1, \ldots, t_k \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}C(t_j,t_l) &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\,\text{mín}(t_j,t_l) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t_j]}(x)\mathbb{1}_{[0,t_l]}(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\mathbb{1}_{[0,t_j]}(x)\mathbb{1}_{[0,t_l]}(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left\|\sum_{j=1}^{k}\mathbb{1}_{[0,t_j]}(x)z_j\right\|^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

□

La función C es también simétrica pues $\text{mín}(s,t) = \text{mín}(t,s)$, se puede demostrar que ésta es la función de covarianza de algún proceso Gaussiano (Ver [**10**] Wschebor, Mario pág. 12) $B := \{B(t)\}_{t\geq 0}$. A tal proceso lo llamaremos *movimiento Browniano*.

Enunciaremos ahora sin demostración la siguiente proposición

Proposición 1.8. *Sea $\{G(t)\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano, $E, F \subset T$. Los procesos $\{G(t)\}_{t\in E}$ y $\{G(s)\}_{t\in F}$ son Gaussianos independientes si y sólo si $C(s,t) = 0$ para todo $s \in E$ y $t \in F$. Es decir, que para todo $s_1,\ldots,s_n \in E$ y todo $t_1,\ldots,t_m \in F$, los vectores $(G(s_1),\ldots,G(s_n))$ y $(G(t_1),\ldots,G(t_m))$ son Gaussianos aleatorios independientes si $C(s,t) = 0$.*

Proposición 1.9. *Sea $s > 0$, entonces el proceso $\{B(t+s) - B(s)\}_{t\geq 0}$ es independiente de $\{B(u)\}_{0\leq u\leq s}$.*

Demostración. Gracias a la Proposición 1.8 es suficiente demostrar que para $t \geq 0$ y $0 \leq u \leq s$ se tiene

$$\mathbb{E}[(B(t+s) - B(s))B(u)] = 0$$

pero esto es sencillo de probar pues

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(B(t+s)-B(s))B(u)] &= \mathbb{E}[(B(t+s)B(u)] - \mathbb{E}[B(s)B(u)] \\ &= \text{mín}(t+s,u) - \text{mín}(s,u) \\ &= u-u \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Definición 1.10. Sea $T = \mathbb{R}_+^n = [0,\infty)^n$, definimos la *Hoja Browniana* como el proceso Gaussiano $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+^n}$ con función de media $\mu(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+^n$ y función de covarianza

$$C(s,t) = \prod_{j=1}^{n} \text{mín}(s_j,t_j),$$

para todo $s,t \in \mathbb{R}_+^n$. Claramente, C es una función simétrica no negativa definida sobre $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$. La hoja Browniana suele llamarse también proceso de Wiener de n parámetros.

Definición 1.11. Sea $B = \{B(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+^n}$ una hoja Browniana, definimos el siguiente proceso estocástico de n parámetros X como sigue:

$$X(t) = \frac{B(e^{t_1},\ldots,e^{t_n})}{e^{\frac{t_1+\cdots+t_n}{2}}}.$$

Este proceso es llamado *Hoja de Ornstein - Uhlenbeck*.

Definición 1.12. Sea $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la colección de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ Borel – medibles. Definimos el *Ruido Blanco en* $\mathbb{R}^n$ como el proceso Gaussiano $\dot{W} = \{\dot{W}(A)\}_{A\in T}$ con función de media $\mathbb{E}[\dot{W}(A)] = 0$ para todo $A \in T$ y función de covarianza

$$C(A,B) = Cov(\dot{W}(A),\dot{W}(B)) = \lambda^{(n)}(A\cap B),$$

donde $\lambda^{(n)}$ denota la medida de Lebesgue n-dimensional.

Notación 1.13. *En adelante, denotaremos por* x *al vector* $\mathrm{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ *mientras que un elemento en* $\mathbb{R}$ *lo denotaremos con* x.

Proposición 1.14. *La covarianza de un Ruido Blanco es una función sobre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, no negativa definida.*

Demostración. Para realizar esta demostración se procede de manera similar a como se hizo en la proposición 1.7. Esto es,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}C(A_j,A_l) &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}Cov(\dot{W}(A_j),\dot{W}(A_l))\\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\lambda^{(n)}(A_j\cap A_l)\\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!\mathrm{I}_{A_j\cap A_l}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(\mathrm{x})1\!\!\mathrm{I}_{A_l}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k} z_j\overline{z_l}\,1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(\mathrm{x})1\!\!\mathrm{I}_{A_l}(\mathrm{x})\,d\mathrm{x}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left\|\sum_{j=1}^{k} z_j 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}(\mathrm{x})\right\|^2 d\mathrm{x}\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

2. Integral de Wiener

Hasta ahora hemos presentado algunos de los procesos gaussianos aleatorios más estudiados, en esta sección tenemos como objetivo principal construir la integral de Wiener la cual se define a partir de un Ruido Blanco.

Definición 1.15. Sea $1 \leq p < \infty$ y $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ un espacio de medida, llamaremos $L^p(\mu)$ al conjunto de funciones medibles con potencia p integrable, es decir

$$L^p(\mu) = \{f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty] : f \textit{ es medible y } \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

La expresión $(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu)^{1/p}$ se suele denotar por $\|f\|_p$ y se le llama norma p de f.

Sea $\dot{W}$ un ruido blanco en $\mathbb{R}^n$. Queremos definir $\dot{W}(h)$ donde h es una "buena" función. Primero identificamos $\dot{W}(A)$ con $\dot{W}(1\!\!1_A)$. Más generalmente, definimos para todo $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ disjuntos y $c_1, \ldots c_k \in \mathbb{R}$

$$\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j 1\!\!1_{A_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \dot{W}(A_j).$$

Las variables aleatorias $\dot{W}(A_1), \ldots, \dot{W}(A_k)$ son independientes pues $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ son disjuntos y por lo tanto, si $i \neq j$

$$\begin{aligned} C(A_i, A_j) &= \lambda^N(A_i \cap A_j) \\ &= \lambda^N(\emptyset) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \left\| \dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j 1\!\!1_{A_j}\right) \right\|^2_{L^2(P)} &= \mathbb{E}\left[\left(\dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j 1\!\!1_{A_j}\right)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_i c_j \dot{W}(A_i)\dot{W}(A_j)\right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, debe ocurrir que $i = j$ pues en caso contrario $C(A_i, A_j) = 0$ tal y como vimos anteriormente, entonces

$$\left\| \dot{W}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}\right)\right\|_{L^2(P)}^2 = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k} c_j^2 \dot{W}^2(A_j)\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{k} c_j^2 \mathbb{E}\left[\dot{W}^2(A_j)\right]$$
$$= \sum_{j=1}^{k} c_j^2 \lambda^{(N)}(A_j)$$
$$= \left\|\sum_{j=1}^{k} c_j 1\!\!\mathrm{I}_{A_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 .$$

La teoría clásica de integración nos permite afirmar que para toda función $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos encontrar h_n de la forma $\sum_{j=1}^{k(n)} c_{jn} 1\!\!\mathrm{I}_{A_{j,n}}$ tal que $A_{1,n}, \ldots, A_{k(n),n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ son disjuntos y $||h - h_n||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto y el cálculo anterior nos dice que $\{\dot{W}(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(P)$. Denotemos su límite por $\dot{W}(h)$. Esto es lo que llamamos *integral de Wiener de* $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

La principal característica de la integral de Wiener es que

$$||\dot{W}(h)||_{L^2(P)} = ||h||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

es decir, $\dot{W} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(P)$ es una isometría.

En adelante, usaremos la siguiente notación

NOTACIÓN 1.16. *Denotaremos la integral de Wiener de la siguiente manera:*

$$\dot{W}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{y})\, dW_{\mathrm{y}},$$

donde $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\dot{W}$ *es un ruido blanco en* $\mathbb{R}^n$.

CAPíTULO 2

Solución de la Ecuación del Calor Estocástica

En este capítulo tenemos como objetivo principal resolver la ecuación del calor con una perturbación estocástica dada por un ruido blanco aditivo en dos situaciones diferentes: cuando $x \in I \subset \mathbb{R}$ y cuando $x \in \mathbb{R}$. Para esto utilizaremos dos métodos muy conocidos en la teoría de resolución de ecuaciones en derivadas parciales: mediante series de Fourier y posteriormente utilizando la transformada de Fourier.

La ecuación que deseamos resolver es la siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dot{W}, \tag{2.1}$$

donde $\dot{W}$ es un proceso estocástico llamado ruido blanco el cual fue definido en el capítulo anterior.

Resulta que en nuestro caso de interés, cuando $\dot{W}$ es un ruido aleatorio, la ecuación (2.1) no tiene un significado clásico.

Como en toda ecuación en derivadas parciales, el objetivo de hallar su solución es determinar la función $u(x,t)$ que satisface (2.1) dado un dato incial y establecidas condiciones sobre el espacio en que está x. En la ecuación del calor la función $u(x,t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t en el punto x, en nuestro caso tenemos una perturbación aleatoria $\dot{W}$ que convierte una ecuación de un modelo físico en un modelo estocástico.

1. Solución Ecuación del Calor por Series de Fourier

Tal y como dijimos en los preliminares de este capítulo estamos interesados en resolver la ecuación (2.1), en nuestro caso consideraremos el siguiente problema donde $0 < x < L$ y $t > 0$, se consideran también condiciones de Dirichlet y un dato inicial que será la función f.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dot{W} \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ahora bien, supongamos que la solución del problema anterior puede ser expresada de la siguiente manera:

$$u(x,t) = h(x)p(t),$$

derivando se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = h(x)p'(t),$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = h''(x)p(t).$$

Al sustituit en el problema (2.2) se obtiene el siguiente problema de Sturm - Liouville:

$$\begin{cases} h'' = -\lambda h \\ h(0) = 0, \quad h(L) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

el cual, tiene como solución los autovalores

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

y autofunciones

$$g_n(x) = \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1}^{n=\infty}.$$

Escribimos ahora la solución $u(x,t)$ en terminos de las autofunciones

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Supongamos que $\dot{W}$ es ahora una función a valores reales que depende de (x,t) es decir, $\dot{W}$ no es un ruido blanco sino que lo consideraremos como una función F, esto es

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Realizamos entonces también la expansión de F y f por Series de Fourier, esto es

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde los $F_n(t)$ y f_n son los coeficientes de la serie de Fourier, los cuales se expresan a seguir

$$F_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L F(x,t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

y

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Sustituimos ahora las funciones expandidas mediante series de Fourier en (2.2), obteniendo así la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$u_n'(t) + \frac{1}{2}u_n(t)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2 = F_n(t)dx.$$

Utilizando la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ se sigue

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

de donde

$$u_n(0) = f_n.$$

Obteniendo así el siguiente problema de valor inicial que se resuelve utilizando métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{aligned} u_n'(t) + \frac{1}{2}\lambda_n u_n(t) &= F_n(t) \\ u_n(0) &= f_n. \end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

Multiplicamos la ecuación diferencial del problema (2.4) por el factor integrante $\mu(t) = e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}$, esto es

$$u_n'(t)e^{\frac{1}{2}\lambda_n t} + \frac{1}{2}\lambda_n u_n(t)e^{\frac{1}{2}\lambda_n t} = F_n(t)e^{\frac{1}{2}\lambda_n t}. \tag{2.5}$$

Notemos que la ecuación (2.5) puede ser escrita también de la siguiente manera

$$\frac{d}{ds}(u_n'(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s}) = F_n(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s}.$$

Integrando desde 0 hasta t respecto de la variable s en ambos lados de la igualdad

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(u_n'(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s})ds = \int_0^t \dot{F}_n(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s}ds.$$

Por teorema fundamental del cálculo

$$u_n(t)e^{\frac{1}{2}\lambda_n t} - u_n(0) = \int_0^t F(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s}ds,$$

de donde

$$u_n(t) = \left(\int_0^t F(s)e^{\frac{1}{2}\lambda_n s}ds + u_n(0)\right)e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{2}{L}\int_0^t \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} F(y,s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{1}{2}\lambda_n(t-s)}dyds \\ &+ \frac{2}{L}\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}dyds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Consideraremos la ecuación anterior como la solución del problema (2.2) mediante el uso de series de Fourier cuando F es un campo escalar. Ahora bien, si retomamos nuevamente $F = \dot{W}$ como un ruido blanco entonces la expresión (2.6) (siguiendo nuestra notación), se escribe como

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{2}{L}\int_0^t \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{1}{2}\lambda_n(t-s)}dW_{y,s} \\ &+ \frac{2}{L}\int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{1}{2}\lambda_n t}dyds. \end{aligned}$$

En vista del procedemiento realizado, esta última expresión será (por conveniencia) la solución al problema (2.2) que consideraremos cuando $\dot{W}$ es un ruido blanco.

2. Solución de la Ecuación del Calor por Transformada de Fourier

Definición 2.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la *Transformada de Fourier de f* la cual denotaremos por $\mathcal{F}[f]$ como

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \omega, \mathrm{x}\rangle} f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x},$$

escrito en coordenadas, tendríamos

$$\mathcal{F}[f](\omega_1, \dots, \omega_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n)} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

La transformada de Fourier es útil para resolver ecuaciones en derivadas parciales, debido a que convierte una diferenciación en una multiplicación algebraica simple. Es común preguntarse si existe alguna otra transformada que permita retornarse a la función que se tenía anteriormente, por esta razón, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.2. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos la *Transformada Inversa de Fourier de f* la cual denotaremos por $\mathcal{F}^{-1}[f]$ como

$$\mathcal{F}^{-1}[f](\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \omega, \mathrm{x}\rangle} f(\omega)\, d\omega.$$

Ya que $|e^{\pm\langle i\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}\rangle}| = 1$ para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ y $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, las integrales de las definiciones anteriores convergen para cada $\omega, \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$.

Anteriormente indicamos que el operador $\mathcal{F}^{-1}$ invierte a $\mathcal{F}$, esto quiere decir, que para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si $\mathcal{F}[f] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\right](\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}),$$

para cada $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema es de vital importancia en la resolución de la ecuación del calor y es muy útil cuando se tiene un producto de transformadas de Fourier

Teorema 2.3. *(Teorema de Convolución). Consideremos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}[f * g] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$\frac{f * g}{(2\pi)^n} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]].$$

Demostración. Realizaremos la demostración para el caso $n = 1$, el caso $n > 1$ se realiza de manera análoga. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nótese que

$$\begin{aligned}\int\int |f(z)g(x-z)|dxdz &= \int |f(z)| \int |g(z-x)|\, dxdz \\ &= \int |f(z)|\, \|g\|_1\, dz \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

Del teorema de Fubini tenemos que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, así que su transformada de Fourier está definida. Luego,

$$\mathcal{F}[f*g] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)e^{iz\omega}dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)e^{iz\omega}\, dxdz.$$

Obsérvese que $|f(x)g(z-x)e^{iz\omega}| = |f(x)g(z-x)|$ por lo tanto, aplicando nuevamente el Teorema de Fubini

$$\mathcal{F}[f*g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(z-x)e^{iz\omega}dz\right)dx.$$

Haciendo el cambio $y = z - x$; tenemos $dy = dz$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f*g] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{i(y+x)\omega}dy\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\omega}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{iy\omega}dy\right)dx \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\omega}dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{iy\omega}dy\right) \\ &= 2\pi\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].\end{aligned}$$

Hemos obtenido lo siguiente

$$\mathcal{F}[f*g] = 2\pi\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g],$$

podemos aplicar transformada inversa de Fourier en ambos lados de la igualdad y obtenemos

$$\frac{f*g}{2\pi} = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]].$$

$\square$

Nuestro interés ahora es resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{W} \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

con $x \in \mathbb{R}$ (similar a 2.2) utilizando el operador antes mencionado, para esto debemos calcular la transformada de Fourier de las derivadas que se encuentran involucradas en la ecuación del calor, es decir, debemos realizar los siguientes cálculos:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{\partial u}{\partial t}\right](\omega,t) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\left[\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\omega,t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](\omega,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}u(x,t)\,dx\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u](\omega,t). \end{aligned}$$

Por otra parte, queremos calcular $\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$, para esto realizaremos integración por partes y además si consideramos que $u \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$ como en [**4**] (Haberman. Richard) entonces las contribuciones en los puntos extremos de la integración por partes se anulan, todo esto se resume al siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right](\omega,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{i\omega x}u(x,t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}u(x,t)\,dx \\ &= -i\omega\mathcal{F}[u](\omega,t). \end{aligned}$$

Podemos obtener de modo similar las transformadas de Fourier de orden superior y así

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right](\omega,t) = (-i\omega)^n\mathcal{F}[u](\omega,t).$$

Con esto, procedemos a resolver el problema (2.7) utilizando transformada de Fourier.

Suponemos ahora (al igual que antes) que $\dot{W}$ es una función F que depende de (x, t). Aplicamos a toda la ecuación en derivadas parciales dada en (2.2) la transformada de Fourier, esto es

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](\omega,t)=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\omega,t)+\mathcal{F}\left[F\right](\omega,t).$$

Para simplificar la notación denotaremos $\widehat{u}=\mathcal{F}[u]$, entonces

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}+\frac{1}{2}\omega^2\widehat{u}=\widehat{F}. \tag{2.8}$$

Nótese que la la expresión (2.8) es una ecuación diferencial ordinaria de variable dependiente t la cual se resuelve multiplicando ambos miembros de la igualdad por el factor integrante $\mu(t)=e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}$, obteniendo

$$e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}+e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}\frac{1}{2}\omega^2\widehat{u}=\widehat{F}(\omega,t)e^{\frac{1}{2}\omega^2 t},$$

equivalentemente,

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\widehat{u}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}\right)ds=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}ds,$$

utilizando teorema fundamental del cálculo se sigue

$$\widehat{u}(\omega,t)e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}-\widehat{u}(\omega,0)=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}ds,$$

ahora bien, sabemos que $\widehat{u}(\omega,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{i\omega x}$, así

$$\widehat{u}(\omega,t)e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,0)e^{i\omega x}dx=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}ds,$$

pero las condiciones iniciales del problema (2.2) nos indican que $u(x,0)=f(x)$ así

$$\widehat{u}e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}ds.$$

Por definición, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega x}dx=\mathcal{F}[f]$ entonces

$$\widehat{u}e^{\frac{1}{2}\omega^2 t}-\mathcal{F}[f]=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}ds,$$

despejamos $\widehat{u}$ y se obtiene

$$\widehat{u}(\omega,t)=\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}ds+\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t},$$

aplicamos ahora transformada inversa de Fourier en ambos lados de la igualdad, es decir

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{u}\right](x,t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{\frac{1}{2}\omega^2 s}e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}ds\right]+\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right].$$

Calculemos ahora por separado las inversas de transformada de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{-\frac{1}{2}\omega^2(t-s)}ds\right] \tag{2.9}$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right] \tag{2.10}$$

Para resolver (2.10) usamos el Teorema de Convolución, el cual nos permite escribir la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right] = \frac{\left(f * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right]\right)(x)}{2\pi}.$$

Ahora bien, realizando una completación de cuadrados en el exponente de la función exponencial se sigue

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t(\omega^2+\frac{2i\omega x}{t})}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t(\omega^2+\frac{2i\omega x}{t}+(\frac{ix}{t})^2-(\frac{ix}{t})^2)}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t(\omega+ix)^2-\frac{x^2}{2t}}d\omega \\
&= e^{-\frac{x^2}{2t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t(\omega+ix)^2}d\omega \\
&= e^{-\frac{x^2}{2t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\frac{u^2}{2}}du \\
&= e^{-\frac{x^2}{2t}}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

Luego, si sustituimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right] &= \frac{\left(f * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}\right]\right)(x)}{2\pi} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dy.
\end{aligned}$$

De manera análoga se resuelve (2.9) obteniéndose

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{-\frac{1}{2}\omega^2(t-s)}ds\right] = \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y,s)e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dyds.$$

Luego la solución $u(x,t)$ viene dada por:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(y,s)e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dyds. \tag{2.11}$$

Al igual que en la sección anterior, retomaremos como $F = \dot{W}$ un ruido blanco definido anteriormente, entonces la expresión (2.11) puede escribirse (usando la notación convenida desde el principio) como:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}dy + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}dW_{y,s}.$$

Resolver el problema (2.7) considerando desde un principio que $\dot{W}$ es un ruido blanco no está correcto matemáticamente hablando, ya que $\dot{W}$ no es una función sino un proceso estocástico que no se puede realizar en un espacio de funciones, por esta razón tal y como se hizo en la sección anterior tomaremos por conveniencia esta última expresión como la solución al problema (2.7).

CAPíTULO 3

Regularidad de la Solución de la Ecuación del Calor Estocástica

En el capítulo anterior obtuvimos un proceso $u(x,t)$ a partir de la ecuación del calor, el cual es un proceso gaussiano centrado. Aquí, queremos estudiar ciertas propiedades de tal proceso, estudiaremos principalmente la covarianza y continuidad de Hölder del mismo, por esta razón introducimos las siguientes definiciones.

Definición 3.1. Sean X y $\overline{X}$ dos procesos estocásticos indexados por algún conjunto T. Decimos que $\overline{X}$ es una modificación de X si y sólo si

$$P\left(\overline{X}(t) = X(t)\right) = 1,$$

para todo $t \in T$.

Definición 3.2. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es globalmente Hölder continua con índice α si existe una constante C tal que para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})| \leq C\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^\alpha.$$

Así mismo, diremos que f es una función localmente Hölder continua con índice α si para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existe una constante C_K tal que

$$|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})| \leq C_K\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^\alpha,$$

para todo $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in K$.

Proposición 3.3. *(Teorema de Kolmogorov)*
Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^n}$ un proceso indexado por $\mathbb{R}^n$. Si para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ existen constantes $C_K, p_K > 0$ y $\gamma_K > n$ tales que

$$\mathbb{E}\left[|X(s) - X(t)|^{p_K}\right] \leq C_K\|s - t\|^{\gamma_K},$$

para todo $s, t \in K$ entonces X tiene una modificación $\overline{X}$ la cual es Hölder continua (localmente).

DEMOSTRACIÓN. La prueba se puede verificar al detalle en [**5**] (Khoshnevisan. Davar). □

Recordemos que la solución de la ecuación del calor obtenida anteriormente es la siguiente:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,dW_{y,s},$$

Debemos tener en cuenta que el término

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dy$$

es determinístico, es decir, no es un proceso aleatorio y por lo tanto, consideraremos la solución de la ecuación del calor pero con la condición inicial donde $f \equiv 0$, es decir, consideraremos el siguiente proceso

$$z(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,dW_{y,s}. \tag{3.1}$$

Este proceso es Gaussiano centrado, y para procesos Gaussianos, la Hölder continuidad de la covarianza con cualquier exponente mayor o igual a cero es suficiente para garantizar la continuidad casi segura de las trayectorias del proceso. Esto es así porque la diferencia entre dos variables aleatorias conjuntamente Gaussianas es Gaussiana y cualquier momento de esta diferencia es sólo una potencia de la varianza de la diferencia. Es decir, para algún $k_n \in \mathbb{R}$ que sólo depende de n, es sencillo de demostrar que

$$\mathbb{E}[\|Y\|^n] = k_n \left(\mathbb{E}[\|Y\|^2]\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Por esta razón, para procesos Gaussianos la Hölder continuidad de la covarianza con exponente mayor o igual a 2 es suficiente garantía para que valga el Teorema de Kolmogorov. Sobre el proceso (3.1) realizaremos nuestro estudio y enunciamos el siguiente teorema

TEOREMA 3.4. *El proceso z(x,t) definido por*

$$z(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,dW_{y,s}$$

tiene función de covarianza

$$\mathbb{E}[z(x,t)z(\widetilde{x},\widetilde{t})] = \int_0^{t\wedge\widetilde{t}} \frac{e^{-\frac{(x-\widetilde{x})^2}{2\left((t-s)+(\widetilde{t}-s)\right)}}}{\sqrt{2\pi\left((t-s)+(\widetilde{t}-s)\right)}}\, ds.$$

Demostración. Informalmente podemos decir que el proceso $\dot{W}$ tiene como función de covarianza $\mathbb{E}[\dot{W}(x,t)\dot{W}(y,s)] = \delta(x-y)\delta(t-s)$, utilizando esto se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z(x,t)z(\widetilde{x},\widetilde{t})] &= \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{[0,t]}(s)e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot \frac{\mathbb{1}_{[0,\widetilde{t}]}(s)e^{-\frac{(\widetilde{x}-y)^2}{2(\widetilde{t}-s)}}}{\sqrt{2\pi(\widetilde{t}-s)}}\, dyds \\
&= \int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot \frac{e^{-\frac{(\widetilde{x}-y)^2}{2(\widetilde{t}-s)}}}{\sqrt{2\pi(\widetilde{t}-s)}}\, dyds \\
&= \int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-y)^2}{(t-s)}+\frac{(\widetilde{x}-y)^2}{(\widetilde{t}-s)}\right)}}{2\pi\sqrt{(t-s)(\widetilde{t}-s)}}\, dyds \\
&= \int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{((t-s)+(\widetilde{t}-s))y^2+2((\widetilde{t}-s)x+(t-s)\widetilde{x})y+(\widetilde{t}-s)x^2+(t-s)\widetilde{x}^2}{(t-s)(\widetilde{t}-s)}\right)}}{2\pi\sqrt{(t-s)(\widetilde{t}-s)}}\, dyds
\end{aligned}$$

Luego completamos cuadrados y la integral anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[z(x,t)z(\widetilde{x},\widetilde{t})] \\
&= \int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{((t-s)+(\widetilde{t}-s))\left(y+\frac{((\widetilde{t}-s)x+(t-s)\widetilde{x})}{(t-s)(\widetilde{t}-s)}\right)^2+\left(\frac{((\widetilde{t}-s)x^2+(t-s)\widetilde{x}^2)}{((t-s)+(\widetilde{t}-s))}-\left(\frac{(\widetilde{t}-s)x+(t-s)\widetilde{x}}{((t-s)+(\widetilde{t}-s))}\right)^2\right)(((t-s)+(\widetilde{t}-s)))}{(t-s)(\widetilde{t}-s)}\right)}}{2\pi\sqrt{(t-s)(\widetilde{t}-s)}}dyds.
\end{aligned}$$

La integral más interna (la que se integra respecto a dy), a pesar de parecer muy extensa se resuelve de manera similar a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$, y da como resultado lo siguiente

$$\mathbb{E}[z(x,t)z(\widetilde{x},\widetilde{t})] = \int_0^{t\wedge\widetilde{t}} \frac{e^{-\frac{(x-\widetilde{x})^2}{2\left((t-s)+(\widetilde{t}-s)\right)}}}{\sqrt{2\pi\left((t-s)+(\widetilde{t}-s)\right)}} \tag{3.2}$$

□

Ahora bien, nuestro objetivo es demostrar la siguiente desigualdad:

$$\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t))^2] \leq Ch^\alpha$$

donde, C, α son constantes positivas y $0 < h < 1$. Es decir, veremos que la solución de la ecuación del calor es una función Hölder continua.

En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t))^2] &= \mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t)+z(x,t+h)-z(x,t+h))^2]\\ &\leq 2\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t+h))^2]\\ &\quad + 2\mathbb{E}[(z(x,t+h)-z(x,t))^2]\end{aligned}$$

Estudiaremos por separado las siguientes esperanzas

$$\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t+h))^2] \tag{3.3}$$

y

$$\mathbb{E}[(z(x,t+h)-z(x,t))^2]. \tag{3.4}$$

Efectivamente, para hallar $\mathbb{E}[(z(x,t))^2]$ sólo debemos hacer $x=\widetilde{x}$ y $t=\widetilde{t}$ en la ecuación (3.2) y de esta forma se obtiene la siguiente integral, la cual es sencilla de calcular

$$\mathbb{E}[(z(x,t))^2] = \mathbb{E}[z(x,t)z(x,t)] \ = \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-x)^2}{2((t-s)+(t-s))}}}{\sqrt{2\pi\left((t-s)+(t-s)\right)}} = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2\pi(2(t-s))}} \ = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}.$$

Utilizando este hecho y teniendo en cuenta la linealidad de la esperanza se obtienen los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(z(x,t+h)-z(x,t))^2] &= \mathbb{E}[(z(x,t+h))^2] - 2\mathbb{E}[z(x,t+h)z(x,t)] + \mathbb{E}[(z(x,t))^2]\\ &= \frac{\sqrt{t+h}}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{2(t-s)+h}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Es posible demostrar que $\sqrt{t+h}-\sqrt{t}\leq\sqrt{h}$, utilizando este hecho obtenemos la cadena de desigualdades que vemos a continuación

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(z(x,t+h)-z(x,t))^2] &= \frac{\sqrt{t+h}}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{du}{\sqrt{2u+h}}+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\\
&= \frac{\sqrt{t+h}}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{2t+h}-\sqrt{h})+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{t+h}-\frac{2(\sqrt{2t+h}-\sqrt{h})}{\sqrt{2}}+\sqrt{t}\right)\\
&\leq \sqrt{t+h}-\sqrt{4t}+\sqrt{2h}+\sqrt{t}\\
&\leq \sqrt{t+h}-\sqrt{t}+\sqrt{2h}\\
&\leq \sqrt{h}+\sqrt{2h}\\
&\leq (1+\sqrt{2})\sqrt{h}.
\end{aligned}$$

de esta manera, hemos acotado la esperanza (3.4).

Para abreviar la notación podemos hacer $t+h=\widetilde{t}$ en (3.3).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t+h))^2] &= \mathbb{E}[(z(x+h,t+h))^2]-2\mathbb{E}[z(x+h,t+h)z(x,t+h)]\\
&\quad+\mathbb{E}[(z(x,t+h))^2]\\
&= \mathbb{E}[(z(x+h,\widetilde{t}))^2]-2\mathbb{E}[z(x+h,\widetilde{t})z(x,\widetilde{t})]+\mathbb{E}[(z(x,\widetilde{t}))^2]\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\widetilde{t}}\frac{ds}{\sqrt{2(\widetilde{t}-s)}}-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\widetilde{t}}\frac{e^{-\frac{h^2}{4(\widetilde{t}-s)}}}{\sqrt{2(\widetilde{t}-s)}}ds\\
&\quad+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\widetilde{t}}\frac{ds}{\sqrt{2(\widetilde{t}-s)}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\widetilde{t}}\frac{1-e^{-\frac{h^2}{4(\widetilde{t}-s)}}}{\sqrt{2(\widetilde{t}-s)}}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, es posible demostrar también que $1-e^{-x}\leq x^{\beta}$ cuando $0<\beta<\frac{1}{2}$, teniendo en cuenta esto se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t+h))^2] &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\widetilde{t}} \frac{1}{\sqrt{\widetilde{t}-s}}\left(\left(\frac{h^2}{4(\widetilde{t}-s)}\right)^{\beta}\wedge(1)\right)ds \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{h^2\wedge\widetilde{t}} \frac{1}{\sqrt{u}}du + \frac{2}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}\int_{h^2}^{\widetilde{t}\wedge h}\frac{h^{2\beta}}{u^{\beta+\frac{1}{2}}}du \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^{h^2\wedge\widetilde{t}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}h^{2\beta}\,\frac{u^{\frac{1}{2}-\beta}}{\frac{1}{2}-\beta}\Big|_{h^2}^{\widetilde{t}\wedge h} \\
&= \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{h^2\wedge\widetilde{t}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}\frac{h^{2\beta}}{\frac{1}{2}-\beta}\left((\widetilde{t}\wedge h)^{\frac{1}{2}-\beta}-(h^2)^{\frac{1}{2}-\beta}\right) \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}}h + \frac{2}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}\frac{h^{2\beta}}{\frac{1}{2}-\beta}\left(h^{\frac{1}{2}-\beta}-(h^2)^{\frac{1}{2}-\beta}\right) \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}}h + \frac{2}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}\frac{h^{\frac{1}{2}+\beta}}{\frac{1}{2}-\beta}.
\end{aligned}
$$

Luego, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t))^2] &\leq 2\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t+h))^2] \\
&\quad + 2\mathbb{E}[(z(x,t+h)-z(x,t))^2] \\
&\leq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{h} + \frac{8}{\sqrt{2\pi}}h + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\frac{h^{\frac{1}{2}+\beta}}{\frac{1}{2}-\beta}
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si consideramos $0<h<1$ tenemos $h^{\frac{1}{2}+\beta}\leq\sqrt{h}$ y $h\leq\sqrt{h}$ entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(z(x+h,t+h)-z(x,t))^2] &\leq 2(1+\sqrt{2})\sqrt{h} + \frac{8}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{h} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}4^{\beta}}\sqrt{h} \\
&= \left(2(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right)\sqrt{h} \\
&= Ch^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Justamente, lo que queríamos demostrar.

CAPíTULO 4

Solución de la Ecuación del Calor Estocástica en dimensión n $>$ 1

En adelante, resolveremos la Ecuación del Calor Estocástica para dimensión $n > 1$. Nos limitaremos a resolverla para $n = 3$ por razones de notación, los demás casos son análogos, entonces procederemos a resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\triangle u + F(\mathrm{x}, t) \\ u(\mathrm{x}, 0) = f(\mathrm{x}), \end{cases} \tag{4.1}$$

donde, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ y F es una función cuyas características determinaremos posteriormente.

Tal y como se dijo, nuestro interés ahora es resolver el problema (4.1) utilizando la transformada de Fourier, para esto debemos calcular dicha transformada de las derivadas que se encuentran involucradas en la ecuación del calor, es decir, debemos realizar los siguientes cálculos:

$$\mathcal{F}\left[\tfrac{\partial u}{\partial t}\right](\omega, t) \text{ y } \mathcal{F}\left[\triangle u\right](\omega, t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](\omega, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}\frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{x}, t)\,d\mathrm{x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}u(\mathrm{x}, t)\,d\mathrm{x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u](\omega, t). \end{aligned}$$

Por otra parte, queremos calcular $\mathcal{F}\left[\langle\nabla, u\rangle\right](\omega,t)$ para posteriormente obtener una generalización para $\mathcal{F}\left[\triangle u\right](\omega,t)$, esto es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\langle\nabla, u\rangle\right] &= \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial x_3}\right](\omega,t)\\ &= \mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right](\omega,t)+\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}\right](\omega,t)+\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_3}\right](\omega,t).\end{aligned}$$

Calcularemos entonces, únicamente $\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]$, para las demás variables el resultado es equivalente

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right](\omega,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3)}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathrm{x},t)\,dx_1dx_2dx_3.$$

Para continuar con el cálculo realizaremos integración por partes en la integral más interna (la que se integra respecto dx_1) y procedemos de manera análoga como en el caso unidimensional, todo esto se resume en la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2x_2+\omega_3x_3)}\left(e^{i\omega x_1}u(\mathrm{x},t)|_{-\infty}^{\infty}-i\omega_1\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x_1}u(\mathrm{x},t)dx_1\right)dx_2dx_3\right]\\ &= \frac{-i\omega_1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_1x_1+\omega_2x_2+\omega_3x_3)}u(\mathrm{x},t)dx_1dx_2dx_3\\ &= -i\omega_1\mathcal{F}\left[u\right](\omega,t).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}\left[\langle\nabla, u\rangle\right](\omega,t)=-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\mathcal{F}\left[u\right](\omega,t).$$

Podemos obtener de modo similar las transformadas de fourier de orden superior y así

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\triangle u\right](\omega,t) &= -(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\mathcal{F}[u](\omega,t)\\ &= -\|\omega\|^2\mathcal{F}[u](\omega,t).\end{aligned}$$

Con esto, procedemos a resolver el problema (4.1) utilizando transformada de Fourier.

Aplicamos a toda la ecuación en derivadas parciales dada en (4.1) la transformada de Fourier, esto es

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right](\omega,t)=\frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\triangle u\right]+\mathcal{F}\left[F(\mathrm{x},t)\right].$$

Para simplificar un poco la notación denotaremos como $\widehat{u} = \mathcal{F}[u]$

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\omega\|^2 \widehat{u} = \widehat{F}(\omega, t). \tag{4.2}$$

Nótese que la expresión (4.2) es una ecuación diferencial ordinaria la cual se resuelve multiplicando ambos miembros de la igualdad por el factor integrante $\mu(t) = e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}$, obteniendo

$$e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\frac{1}{2}\|\omega\|^2 \widehat{u} = \widehat{F}(\mathrm{x}, t)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t},$$

equivalentemene,

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left(\widehat{u}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\right) ds = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\, ds,$$

utilizando teorema fundamental del cálculo se sigue

$$\widehat{u}(\omega, t)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t} - \widehat{u}(\omega, 0) = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\, ds,$$

ahora bien, sabemos que $\widehat{u}(\omega, 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}u(\mathrm{x}, 0)d\mathrm{x}$, así

$$\widehat{u}e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}u(\mathrm{x}, 0)\, d\mathrm{x} = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\, ds,$$

pero las condiciones iniciales del problema (4.1) nos indica que $u(\mathrm{x}, 0) = f(\mathrm{x})$ así

$$\widehat{u}e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\, ds.$$

Por definición $\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle}f(\mathrm{x})d\mathrm{x} = \mathcal{F}[f]$ entonces

$$\widehat{u}e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t} - \mathcal{F}[f] = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}\, ds,$$

despejamos $\widehat{u}(\omega, t)$ y se obtiene

$$\widehat{u}(\omega, t) = \int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2 s}e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}ds + \mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}.$$

Aplicamos ahora transformada inversa de Fourier en ambos lados de la igualdad, es decir

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{u}\right](\omega, t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2(t-s)}ds\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right]$$

Calculemos ahora por separado las transformadas inversas de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega, s)e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2(t-s)}\, ds\right] \tag{4.3}$$

y

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right] \tag{4.4}$$

Para resolver (4.4) usamos el Teorema de Convolución, el cual nos permite escribir la siguiente expresión:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right] = \frac{f * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right](\mathrm{x})}{(2\pi)^3},$$

Ahora bien, calculemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\langle\omega,\mathrm{x}\rangle} e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3)+\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)t}\, d\omega \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 x_1+\omega_2 x_2)+\frac{1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)t}\, dx_2 dx_3\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 x_1+\frac{1}{2}\omega_1^2 t}\, dx_1\right) \\
&= \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}\|^2}{2t}}(\sqrt{2\pi})^3}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

Con este cálculo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f]e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right] &= \frac{f(\mathrm{x}) * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2 t}\right]}{2\pi} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathrm{y})e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, d\mathrm{y}.
\end{aligned}$$

De manera análoga se resuelve (4.3) obteniéndose

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t \widehat{F}(\omega,s)e^{-\frac{1}{2}\|\omega\|^2(t-s)}\, ds\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(\mathrm{y},s)e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^3}\, d\mathrm{y}ds. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, la solución al problema (4.1) será

$$u(\mathrm{x},t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{F(\mathrm{y},t)e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\, d\mathrm{y}ds + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathrm{y})e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\, d\mathrm{y}$$

Análogamente se obtiene este resultado cuando $n > 3$, si aunado a esto tomamos como condición inicial $f \equiv 0$ (al igual que en el capítulo 3) entonces se tiene como solución de

(4.1) para dimensión n el siguiente resultado

$$u(\mathrm{x},t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{F(\mathrm{y},s)e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\,d\mathrm{y}ds \tag{4.6}$$

Ahora bien, en secciones anteriores pudimos estudiar propiedades de la solución de la Ecuación del Calor Estocástica "sin problemas", pero en este caso el proceso

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\,dW_{\mathrm{y},s}$$

no existe pues

$$\mathbb{1}_{s\in[0,t]}\frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\notin L^2([0,t]\times\mathbb{R}^n),$$

por lo que, debemos estudiar regularidad de una manera diferente a como tratamos el caso unidimensional, lo cual es un tema de estudio del siguiente capítulo.

CAPíTULO 5

Regularidad de la solución en dimensión n > 1

Tal y como se indicó anteriormente, para dimensión $n > 1$ la regularidad de la solución se estudia de manera totalmente diferente, esto es debido a que la covarianza

$$\mathbb{E}[z(\mathrm{x},t)z(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})]$$

donde

$$z(\mathrm{x},t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n} dW_{\mathrm{y},s} \tag{5.1}$$

es divergente, tal y como veremos a continuación mediante un cálculo de la varianza. Ahora bien, de acuerdo con nuestra notación en el capítulo 1 si consideramos

$$\dot{W}\left(\mathbb{1}_{s\leq t} f(\mathrm{y},s)\right) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{y},s)\, dW_{\mathrm{y},s},$$

entonces

$$\mathbb{E}[\dot{W}(f)\dot{W}(g)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{x},t)g(\mathrm{x},t)\, d\mathrm{x}dt, \tag{5.2}$$

De esta manera de (5.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z^2(\mathrm{x},t)] &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{(t-s)}}}{(2\pi(t-s))^n} d\mathrm{y}ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{y}\|^2}{u}}}{(2\pi u)^n} d\mathrm{y}du.
\end{aligned}$$

Realizamos ahora un cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, esto es $\|\mathrm{y}\| = w$, $d\mathrm{y} = w^{n-1}\operatorname{sen}^{n-2}(\varphi_1)\operatorname{sen}^{n-3}(\varphi_2)\cdots\operatorname{sen}(\varphi_{n-2})\, dwd\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1}$. Se puede verificar la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi_1)\operatorname{sen}^{n-3}(\varphi_2)\cdots\operatorname{sen}(\varphi_{n-2})\,d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-1} = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

A este valor lo llamaremos σ, el cual es un valor finito. Teniendo en cuenta esto, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z^2(\mathrm{x},t)] &= \sigma\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{u}}}{(2\pi u)^n} w^{n-1}\,dwdu \\
&= \sigma\int_0^t\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{(2\pi u)^n} (\sqrt{uv})^{n-2}\frac{u}{2}\,dvdu \\
&= \sigma\int_0^t \frac{u^{\frac{n-2}{2}-1}}{2\,(2\pi u)^n}\,du \int_0^\infty e^{-v}v^{\frac{n}{2}-1}\,dv \\
&= \sigma\frac{1}{2\,(2\pi)^n}\int_0^t u^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)}\,du\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= \sigma\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\,(2\pi)^n}\int_0^t u^{-\left(\frac{n}{2}+2\right)}\,du \\
&= \sigma\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\,(2\pi)^n}\cdot\left.\frac{u^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right|_0^t \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Por esta razón, nos vemos en la necesidad de estudiar lo que significa colorear el ruido, que no es más que cambiar la covarianza del proceso $\dot{W}$ de tal manera que converja. Para este caso, dejamos expresado el kernel (o función de Green) del calor en función de la variable de fourier ω y consideraremos ahora en lugar de $\dot{W}$ (ruido blanco) un ruido coloreado que denotaremos por $\dot{F}$, cuya función de covarianza será informalmente

$$\mathbb{E}[\dot{F}(\mathrm{x},t)\dot{F}(\mathrm{y},s)] = \delta(t-s)C(\mathrm{x}-\mathrm{y}),$$

donde $C(\mathrm{x})$ es una función cuyas características definiremos posteriormente. Es decir $\dot{F}$ será un funcional lineal aleatorio gaussiano centrado, indexado en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$, el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto sobre $(\mathrm{x},t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ con función de covarianza

$$\mathbb{E}[\dot{F}(f)\dot{F}(g)] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{x},t)g(\mathrm{y},t)C(\mathrm{x}-\mathrm{y})\,d\mathrm{y}d\mathrm{x}dt.$$

Tendremos entonces (por notación) que $u(\mathrm{x},t) = \dot{F}(g_{\mathrm{x},t})$ donde

$$g_{\mathrm{x},t}(\mathrm{y},s) = \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\mathbb{I}_{s\leq t}.$$

Luego, si dejamos expresada la función g en términos de la variable de Fourier tendremos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t)u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|\omega\|^2(t-s)}{2}}e^{\frac{-\|\widetilde{\omega}\|^2(\widetilde{t}-s)}{2}}\times \\ \times\ e^{-i\langle\omega,\mathrm{x}-\mathrm{y}\rangle}e^{-i\langle\widetilde{\omega},\widetilde{\mathrm{x}}-\widetilde{\mathrm{y}}\rangle}C(\mathrm{y}-\widetilde{\mathrm{y}})d\mathrm{y}d\widetilde{\mathrm{y}}d\omega d\widetilde{\omega}ds.\end{aligned}$$

Ahora, realizamos el cambio $z = \mathrm{y} - \widetilde{\mathrm{y}}$ obteniendo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t)u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})] &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|\omega\|^2(t-s)}{2}}e^{\frac{-\|\widetilde{\omega}\|^2(\widetilde{t}-s)}{2}}\times \\ &\quad\times e^{-i\langle\omega,\mathrm{x}-\mathrm{z}-\widetilde{y}\rangle}e^{-i\langle\widetilde{\omega},\widetilde{x}-\widetilde{y}\rangle}C(\mathrm{z})\,d\mathrm{z}d\widetilde{\mathrm{y}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|\omega\|^2(t-s)}{2}}e^{\frac{-\|\widetilde{\omega}\|^2(\widetilde{t}-s)}{2}}\times \\ &\quad\times\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\omega,\mathrm{x}-\mathrm{z}\rangle}e^{-i\langle\widetilde{\omega},\widetilde{\mathrm{x}}\rangle}C(\mathrm{z})d\mathrm{z}\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{y}}\rangle}e^{-i\langle\widetilde{\omega},\widetilde{\mathrm{y}}\rangle}d\widetilde{\mathrm{y}}\right)d\omega d\widetilde{\omega}ds.\end{aligned}$$

Ahora bien, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\omega+\widetilde{\omega},\widetilde{\mathrm{y}}\rangle}d\widetilde{\mathrm{y}} = \delta(\omega+\widetilde{\omega})$, por lo que tendremos entonces $\widetilde{\omega} = -\omega$ obteniendo así que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t)u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})] &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}-\mathrm{z}\rangle}C(\mathrm{z})d\mathrm{z}\right)d\omega ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\rangle}e^{-i\langle\omega,\mathrm{z}\rangle}C(\mathrm{z})d\mathrm{z}\right)d\omega ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}e^{i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\rangle}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\omega,\mathrm{z}\rangle}C(\mathrm{z})d\mathrm{z}\right)d\omega ds.\end{aligned}$$

Ahora bien, nótese que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\omega,\mathrm{z}\rangle}C(\mathrm{z})\,d\mathrm{z} = \mathcal{F}^{-1}[C](\omega) = \widehat{C}(\omega)$ entonces

$$\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t)u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}e^{i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\rangle}\widehat{C}(\omega)d\omega ds. \tag{5.3}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}ds &= \int_0^{t\wedge\widetilde{t}} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}(t+\widetilde{t}-2s)}ds\\ &= e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}(t+\widetilde{t})}\int_0^{t\wedge\widetilde{t}} e^{\|\omega\|^2 s}ds\\ &= e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}(t+\widetilde{t})}\frac{e^{\|\omega\|^2 s}}{\|\omega\|^2}\Bigg|_0^{t\wedge\widetilde{t}}\\ &= \frac{e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}(t+\widetilde{t})}}{\|\omega\|^2}\left(e^{\|\omega\|^2(t\wedge\widetilde{t})}-1\right).\end{aligned}$$

Ahora bien, se puede probar que $|t-\widetilde{t}| = (t+\widetilde{t}) - 2(t\wedge\widetilde{t})$, entonces

$$\int_0^{t\wedge\widetilde{t}} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{2}[(t-s)+(\widetilde{t}-s)]}ds = \frac{1}{\|\omega\|^2}\left(e^{-\|\omega\|^2|t-\widetilde{t}|} - e^{-\|\omega\|^2(t+\widetilde{t})}\right),$$

sustituyendo este resultado en (5.3) se sigue que

$$\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t)u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t})] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-\|\omega\|^2|t-\widetilde{t}|} - e^{-\|\omega\|^2(t+\widetilde{t})}\right)e^{i\langle\omega,\widetilde{\mathrm{x}}-\mathrm{x}\rangle}\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}d\omega$$

Vamos a proceder ahora de manera similar al caso unidimensional, es decir, calcularemos únicamente

$$\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t)-u(\widetilde{\mathrm{x}},\widetilde{t}))^2]$$

por las razones que se explicaron anteriormente. En efecto, para todo $h\geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t))^2] &= \mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t)+u(\mathrm{x},t+h)-u(\mathrm{x},t+h))^2]\\ &\leq 2\mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t+h))^2]\\ &\quad + 2\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t+h)-u(\mathrm{x},t))^2]\end{aligned}$$

Estudiaremos por separado las siguientes esperanzas

$$\mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t+h))^2] \tag{5.4}$$

y

$$\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t+h)-u(\mathrm{x},t))^2]. \tag{5.5}$$

Comenzaremos con la ecuación (5.4). Debemos acotar esta esperanza, para esto se prueban las desigualdades $|1-e^{-a}| \leq (a \wedge 1)$ y $|1-e^{i\langle \mathrm{y},\mathrm{x}\rangle}| \leq C\|\mathrm{y}\|\|\mathrm{x}\|$, donde C es una constante, $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$ y $a > 0$. Adicionalmente, utilizaremos la desigualdad triangular. Luego, si f es integrable a Riemann se satisface la siguiente igualdad

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x}\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathrm{x})|\, d\mathrm{x}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h \leq 1$ y $\|\mathrm{h}\| \leq 1$, utilizando todos estos argumentos procedemos con nuestros cálculos, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t+h))^2] &= \mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h))^2] - 2\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t+h)u(\mathrm{x},t+h)] \\
&\quad + \mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t+h))^2] \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\right. \\
&\quad - 2\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right)e^{i\langle\omega,\mathrm{h}\rangle}\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega \\
&\quad \left.+\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\right).
\end{aligned}$$

Agrupando todos los términos y factorizando se tiene para alguna constante k

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(u(\mathrm{x}+\mathrm{h},t+h)-u(\mathrm{x},t+h))^2] &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right)\left(1-e^{i\langle\omega,\mathrm{h}\rangle}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}\left|1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right|\left|1-e^{i\langle\omega,\mathrm{h}\rangle}\right|\frac{\left|\widehat{C}(\omega)\right|}{\|\omega\|^2}\,d\omega \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}\left(2\|\omega\|^2(t+h)\wedge 1\right)\left|1-e^{i\langle\omega,\mathrm{h}\rangle}\right|\frac{\left|\widehat{C}(\omega)\right|}{\|\omega\|^2}\,d\omega \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}2\|\omega\|^2(t+h)k(\|\omega\|\|\mathrm{h}\|\wedge 1)\frac{\left|\widehat{C}(\omega)\right|}{\|\omega\|^2}\,d\omega \\
&\leq 4(t+h)k\int_{\mathbb{R}^n}(\|\omega\|\|\mathrm{h}\|\wedge 1)\left|\widehat{C}(\omega)\right|\,d\omega.
\end{aligned}$$

Realizamos ahora un procedimiento similar para acotar la esperanza (5.5), esto es

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t+h)-u(\mathrm{x},t))^2]\\
&=\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t+h))^2]-2\mathbb{E}[u(\mathrm{x},t+h)u(\mathrm{x},t)]+\mathbb{E}[(u(\mathrm{x},t))^2]\\
&=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2(t+h)}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\right.\\
&\quad-2\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-\|\omega\|^2h}-e^{-\|\omega\|^2(2t+h)}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\\
&\quad\left.+\int_{\mathbb{R}^n}\left(1-e^{-2\|\omega\|^2t}\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(2\left(1-e^{-\|\omega\|^2h}\right)-e^{-2\|\omega\|^2t}\left(e^{-2\|\omega\|^2h}-2e^{-\|\omega\|^2h}+1\right)\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(2\left(1-e^{-\|\omega\|^2h}\right)-e^{-2\|\omega\|^2t}\left(e^{-\|\omega\|^2h}-1\right)^2\right)\\
&\leq\int_{\mathbb{R}^n}\left(2\|\omega\|^2h+\|\omega\|^2h\right)\frac{\widehat{C}(\omega)}{\|\omega\|^2}\,d\omega\\
&=3h\int_{\mathbb{R}^n}\left|\widehat{C}(\omega)\right|d\omega
\end{aligned}
$$

Nótese ahora que si $\widehat{C}(\omega)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces del Teorema de Kolmogorov se sigue la Hölder continuidad de las realizaciones del proceso $u(\mathrm{x},t)$ dado por

$$u(\mathrm{x},t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n}\,dW_{\mathrm{y},s},$$

tal y como se muestra en [**1**] (Doering, Charles R.). En conclusión, es suficiente pero no necesario que $\widehat{C}(\omega)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ para asegurar la continuidad casi segura del proceso $u(\mathrm{x},t)$.

CAPíTULO 6

Representación del Movimientro Browniano Fraccionario y Aplicaciones

1. MBF a partir de la Ecuación del Calor Estocástica

Este capítulo está basado en el artículo [**6**] "*A connection between the stochastic heat equation and fractional brownian motion, and a simple proof of a result of Talagrand*" de Carl Mueller y Wu Zhixin. En dicha publicación se consiguieron una serie de errores y por esta razón fue necesario reestructurar algunas funciones que en dicho artículo se definen, puntualizar ciertos parámetros, enunciar correctamente la mayoría de los lemas, proposiciones y teoremas, así como también rehacer las demostraciones de cada uno de ellos. Para ser precisos, en el artículo el apéndice A, lema 3 y proposición 1 fueron modificados por el lema 6.2, lema 6.4 y teorema 6.6 del presente trabajo respectivamente.

Esto fue notificado a uno de los autores del artículo (Carl Mueller) y éste admitió (luego de varias discusiones) haber errado en los cálculos, prometiendo una nueva versión con agradecimientos al autor de este trabajo Henry Navarro y a la tutora del mismo la Dra. Stella Brassesco. Luego de unos meses se publicó en efecto la nueva versión con el nombre "*Erratum: A connection between the stochastic heat equation and fractional brownian motion, and a simple proof of a result of Talagrand*" [**7**].

A seguir, consideraremos un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano Fraccionario (MBF) $X_t = X_t^H$, el cual es un proceso gaussiano que toma valores en $\mathbb{R}$. El valor H es llamado parámetro de Hurst y es un valor tal que $H \in (0, 1]$. El proceso X_t será un MBF si satisface la siguiente definición:

Definición 6.1. Sea $T = [0, \infty)$ y $X_t = X_t^H$ un proceso estocástico indexado por T que toma valores en $\mathbb{R}$. X_t es un *Movimiento Browniano Fraccionario* si satisface:

(1) $X_0 = 0$ con probabilidad 1.

(2) X_t es un proceso Gaussiano con incrementos estacionarios. Esto es, para todo $t, h > 0$, $X_{t+h} - X_t$ es independiente de t.

(3) Para $c > 0$ tenemos que $X_{ct} = c^H X_t$ en distribución (propiedad de reescalamiento).

(4) X_1 tiene distribución normal estándar en $\mathbb{R}$.

En adelante, llamaremos al Movimiento Browniano Fraccionario simplemente como MBF.

En capítulos anteriores tratamos la ecuación del calor estocástica cuando ésta tenía condicion inicial en $t = 0$, es decir, tratamos un problema similar al siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\triangle u + F \\ u(\mathrm{x}, 0) = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ y F es un ruido (o un término estocástico).

De manera análoga se puede obtener la solución del problema cuando la condición inicial no está evaluada en $t = 0$, es decir cuando tenemos como condición inicial $u(\mathrm{x}, t_0) = 0$, con $t_0 \neq 0$. Para esto, simplemente se integra inciando el límite inferior en t_0 y se obtendría como solución

$$u(\mathrm{x}, t) = \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2(t-s)}}}{\left(\sqrt{2\pi(t-s)}\right)^n} F(\mathrm{y}, s) d\mathrm{y} ds.$$

Es decir, la ecuación anterior no es más que una traslación del problema (6.1) sujeto a la condición inicial evaluada en t_0, lo cual, no afecta los cálculos realizados anteriormente.

Ahora bien, en este capítulo trataremos el siguiente problema en el cual $t_0 \to -\infty$, es decir, nuestra condición inicial estará ahora “trasladada a menos infinito” y F será remplazado por $\dot{F}$, el cual informalmente podemos decir que es un proceso gaussiano centrado con función de covarianza

$$\mathbb{E}[\dot{F}(\mathrm{x}, t)\dot{F}(\mathrm{y}, s)] = \delta(t - s)h(\mathrm{x} - \mathrm{y}),$$

en la cual $h(\mathrm{x})$ será o bien $\|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$ o bien $\delta(\mathrm{x})$, donde la función δ es la Delta de Dirac y α es un parámetro que será definido posteriormente. Nuestra intención es obtener a partir de tal problema una representación del MBF. Consideramos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\triangle u + \dot{F}(\mathrm{x}, t) \\ u(\mathrm{x}, -\infty) = 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

donde $(\mathrm{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Para ser precisos, $\dot{F}$ es un funcional lineal aleatorio gaussiano centrado, indexado en $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto sobre $(\mathrm{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ con función de covarianza para $h(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x})$

$$\mathbb{E}[\dot{F}(f)\dot{F}(g)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}, t) g(\mathrm{x}, t)\, d\mathrm{x} dt \tag{6.3}$$

y para $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$

$$\mathbb{E}[\dot{F}(f)\dot{F}(g)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}, t) g(\mathrm{y}, t) \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|^{-\alpha}\, d\mathrm{y} d\mathrm{x} dt \tag{6.4}$$

En ambos casos, la covarianza es no negativa definida. Se puede demostrar que es posible extender $\dot{F}(f)$ a todas las funciones tales que

$$\mathbb{E}[\dot{F}(f)\dot{F}(f)] < \infty.$$

A esta clase de funciones la llamaremos $\mathcal{H}$, es decir

$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) : Var[\dot{F}(f)] < \infty\}.$$

Obsérvese que $\mathcal{H}$ dependerá implícitamente de α y n.

El problema (6.2) se resuelve de manera similar a como se hizo en capítulos anteriores y se obtendría como solución la función

$$u(\mathrm{x}, t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{x} - \mathrm{y}, t - s)\, dF_{\mathrm{y},s}, \tag{6.5}$$

donde la función G es el kernel del calor o función de Green asociada a la ecuación del calor que viene dada por

$$G(\mathrm{x}, t) = \begin{cases} (2\pi t)^{\frac{-n}{2}} \cdot e^{-\frac{\|\mathrm{x}\|^2}{2t}}, & si\ t > 0 \\ 0, & si\ t \leq 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Pero la varianza del proceso definido en (6.5) no es finita, razón por la cual, consideramos el siguiente proceso, para $t \geq 0$

$$U(\mathrm{x}, t) = u(\mathrm{x}, t) - u(0, 0) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{x} - \mathrm{y}, t - s) - G(-\mathrm{y}, -s)\, dF_{\mathrm{y},s}, \tag{6.7}$$

cuya varianza sí es finita, como vemos a continuación.

Lema 6.2. *Sea $g(\mathrm{y}, s) = g_{\mathrm{x},t}(\mathrm{y}, s) = G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s)-G(-\mathrm{y}, -s)$, entonces para todo $t > 0$ tenemos*

$$g(\mathrm{y}, s)\mathbb{1}_{s \leq t} \in \mathcal{H}$$

Para demostrar este lema necesitamos utilizar la siguiente proposición

Proposición 6.3. *Sea $f > 0$ y F dos funciones tales que $F'(u) = f(u)$ y $\lim_{u \to \infty} F(u) - F(u + v) = 0$ para todo $v > 0$ entonces*

$$\int_0^{\infty} f(u) - f(u + v)\, du = \int_0^{v} f(u) du$$

Demostración. La prueba es sencilla, sólo necesitamos seguir las hipótesis de la proposición, utilizar teorema fundamental del cálculo y realizar convenientemente un cambio de variable. El cálculo lo vemos a continuación

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(u) - f(u + v)\, du &= \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} f(u) - f(u + v)\, du \\
&= \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} f(u)\, du - \int_0^{b} f(u + v)\, du \\
&= \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} f(u)\, du - \int_v^{b+v} f(z)\, dz \\
&= \lim_{b \to \infty} F(b) - F(0) - F(b + v) + F(v) \\
&= \lim_{b \to \infty} F(b) - F(b + v) + F(v) - F(0) \\
&= F(v) - F(0) = \int_0^{v} f(u)\, du.
\end{aligned}$$

□

Demostración. (Del lema 6.2). La prueba de este lema es de gran relevancia debido a que estaremos acotando la varianza del proceso $U(\mathrm{x}, t)$, lo cual nos permitirá obtener más adelante un reescalamiento de tal proceso y a su vez, definir el MBF que deseamos.

Debemos ver que

$$\mathbb{E}[U^2(\mathrm{x},t)] < \infty.$$

Tenemos pues dos casos, supongamos que $h(x) = \delta(x)$. Recordemos que este caso sólo se trata cuando $n = 1$ por las razones que se explicaron en capítulos anteriores.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(x,t)] &= \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} [G(x-y,t-s) - G(-y,-s)]^2\, dyds \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} G^2(x-y,t-s) - 2G(x-y,t-s)G(-y,-s) + G^2(-y,-s)\, dyds \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbb{R}} G^2(x-y,t-s) - 2G(x-y,t-s)G(-y,-s) + G^2(-y,-s)\, dyds \\
&\quad + \int_{0}^{t}\int_{\mathbb{R}} G^2(x-y,t-s)\, dyds
\end{aligned}$$

Ahora bien, la igualdad de Chapmann – Kolmogorov nos permite escribir lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}} G(a-y,b-s)G(c-y,d-s)dy = G(a-c,a+d-2s).$$

A seguir, utilizamos este último argumento y realizamos el cambio de variable $-2s = u$ en la primera integral

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(x,t)] &= \int_{-\infty}^{0} G(0,2(t-s)) - 2G(x,t-2s) + G(0,-2s)\, ds + \int_{0}^{t} G(0,2(t-s))\, ds \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{G(0,2t+u)}{2} - \frac{2G(x,t+u)}{2} + \frac{G(0,u)}{2}\, du + \int_{0}^{t} G(0,2(t-s))\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2t+u}} + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t+u)}}}{\sqrt{t+u}}\, du + \sqrt{2t}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2t+u}} + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{t+u}} + \frac{1}{\sqrt{t+u}} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t+u)}}}{\sqrt{t+u}}\, du + \sqrt{2t}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2t+u}} - \frac{1}{2\sqrt{t+u}} + \frac{1}{2\sqrt{u}} - \frac{1}{2\sqrt{t+u}}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{t+u}} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t+u)}}}{\sqrt{t+u}}\, du + \sqrt{2t}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[U^2(x,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2t+u}} - \frac{1}{\sqrt{t+u}}du + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{t+u}}du$$
$$+ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t+u}}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2(t+u)}}\right)du + \sqrt{2t}\Bigg).$$

Utilizando ahora la proposición 6.3 y por definición de G se tiene

$$\mathbb{E}[U^2(x,t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{\sqrt{t+u}}du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}}du$$
$$+ \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t+u}}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2(t+u)}}\right)du + \sqrt{2t}\Bigg).$$

Es sencillo de probar que, $1-e^{-a} \leq \text{mín}\{1,a\}$ para todo $a>0$, utilizando esto se sigue

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(x,t)] &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{t}-\sqrt{2t}+\sqrt{t}++\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t+u}}\left(1\wedge\frac{x^2}{2(t+u)}\right)du+\sqrt{2t}\right)\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{t}-\sqrt{2t}+\sqrt{t}+\int_0^{\frac{x^2-2t}{2}\vee 0}\frac{1}{\sqrt{t+u}}du+\int_{\frac{x^2-2t}{2}\vee 0}^\infty \frac{x^2}{2(t+u)^{\frac{3}{2}}}du+\sqrt{2t}\right)\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2\sqrt{t}+\int_0^{\frac{x^2-2t}{2}\vee 0}\frac{1}{\sqrt{t+u}}du+\int_{\frac{x^2-2t}{2}\vee 0}^\infty \frac{x^2}{2(t+u)^{\frac{3}{2}}}du\right)\\
&<\infty.
\end{aligned}$$

Hemos probado que $\mathbb{E}[U^2(x,t)] < \infty$, lo cual era justamente lo que queríamos demostrar. Ahora bien, necesitamos probar la misma desigualdad pero en el caso en que $h(x) = \|x\|^{-\alpha}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(\mathrm{x},t)] = \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}&[G(\mathrm{x}-\mathrm{y},t-s)-G(-\mathrm{y},-s)]\times\\
&[G(\mathrm{x}-\mathrm{y}',t-s)-G(-\mathrm{y}',-s)]\|\mathrm{y}-\mathrm{y}'\|^{-\alpha}\,d\mathrm{y}d\mathrm{y}'ds\\
= \int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}&G(\mathrm{x}-\mathrm{y},t-s)G(\mathrm{x}-\mathrm{y}',t-s)\|\mathrm{y}-\mathrm{y}'\|^{-\alpha}\\
&-G(\mathrm{x}-\mathrm{y},t-s)G(-\mathrm{y}',-s)\|\mathrm{y}-\mathrm{y}'\|^{-\alpha}\\
&-G(-\mathrm{y},-s)G(\mathrm{x}-\mathrm{y}',t-s)\|\mathrm{y}-\mathrm{y}'\|^{-\alpha}\\
&+G(-\mathrm{y},-s)G(-\mathrm{y}',-s)\|\mathrm{y}-\mathrm{y}'\|^{-\alpha}\,d\mathrm{y}d\mathrm{y}'ds.
\end{aligned}$$

Realizamos ahora cambios de variables convenientes de tal manera que la nueva variable temporal "v" esté $0 < v < \infty$ y adicionalmente realizamos el cambio $\mathrm{y} - \mathrm{y}' = \mathrm{z}$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(x,t)] = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} & G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, v) G(\mathrm{x}-\mathrm{y}+z, v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& - G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, v+t) G(\mathrm{z}-\mathrm{y}, v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& - G(\mathrm{x}-\mathrm{y}+\mathrm{z}, v+t) G(-\mathrm{y}, v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& + G(-\mathrm{y}, u) G(\mathrm{z}-\mathrm{y}, v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \, d\mathrm{y} d\mathrm{z} dv \\
= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} & G(\mathrm{z}, 2v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& - G(\mathrm{x}-\mathrm{z}, 2v+t) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& - G(\mathrm{x}-\mathrm{z}, 2v+t) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \\
& + G(\mathrm{z}, 2v) \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \, d\mathrm{z} dv \\
= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} & 2[G(\mathrm{z}, 2v) - G(\mathrm{x}-\mathrm{z}, 2v+t)] \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \, d\mathrm{z} dv \\
= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} & [G(\mathrm{z}, v) - G(\mathrm{x}-\mathrm{z}, v+t)] \|\mathrm{z}\|^{-\alpha} \, d\mathrm{z} dv.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la identidad de Plancherel nos indica que si h, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} hg$, $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\hat{g}$ existen entonces

$$
\int_{-\infty}^{\infty} hg = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}\hat{g}.
$$

Ahora bien, es sencillo de probar que

$$
\widehat{G}(\mathrm{z}, v) = \frac{e^{-\frac{v\|\omega\|^2}{2}}}{2\pi}.
$$

$$
\widehat{G}(\mathrm{x}-\mathrm{z}, v+t) = \frac{e^{i<\omega,x>} e^{-\frac{(v+t)\|\omega\|^2}{2}}}{2\pi}.
$$

Luego, procediendo de manera similar a [**8**] página 51, considerando $0 < \alpha < 2$ se prueba que

$$
\mathcal{F}\left[\|\mathrm{z}\|^{-\alpha}\right](\omega) = k(\alpha)\|\omega\|^{-(n-\alpha)},
$$

donde

$$k(\alpha) = \frac{2^{n-\alpha}\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}.$$

De esta manera, si llamamos $c(\alpha) = k(\alpha) \cdot \frac{1}{2\pi}$ se sigue

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U^2(x,t)] &= c(\alpha)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{-\frac{v\|\omega\|^2}{2}} - e^{i<\omega,x>}e^{-\frac{(v+t)\|\omega\|^2}{2}}\right] \|\omega\|^{-n+\alpha}\, d\omega dv \\ &= c(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega \\ &= c(\alpha)\int_{\|\omega\|<1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega \\ &\quad + c(\alpha)\int_{\|\omega\|>1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega.\end{aligned}$$

Trataremos por separado las siguientes integrales

$$\int_{\|\omega\|>1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2} d\omega. \tag{6.8}$$

$$\int_{\|\omega\|<1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2} d\omega. \tag{6.9}$$

Comenzaremos con (6.8). Se puede demostrar que $|1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}| < 2$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\|\omega\|>1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega &\leq \left|\int_{\|\omega\|>1} \left(1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega\right| \\ &\leq \int_{\|\omega\|>1} \left(\left|1 - e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right|\right) \|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega \\ &< \int_{\|\omega\|>1} 2\|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega.\end{aligned}$$

Realizamos el cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ donde $\|\omega\| = r$, y procediendo de la misma forma a como se hizo en el capítulo 5, tendremos que $\sigma = 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(\frac{n}{2})$ es el área de la esfera.

Luego al igual que como consideramos anteriormente para $0 < \alpha < 2$ se sigue

$$\begin{aligned}\int_{\|\omega\|>1} 2\|\omega\|^{-n+\alpha-2}\, d\omega &= 2\sigma \int_1^\infty r^{-n+\alpha-2} r^{n-1}\, dr \\ &= 2\sigma\int_1^\infty r^{\alpha-3}\, dr \\ &= \frac{2\sigma}{2-\alpha}.\end{aligned}$$

Para acotar (6.9) utilizaremos la fórmula de Euler la cual nos permite escribir la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\int_{\|\omega\|<1}\left(1-e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right)\|\omega\|^{-n+\alpha-2}d\omega \\ =\int_{\|\omega\|<1}\left(1-\cos(\|\omega\|\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right)\|\omega\|^{-n+\alpha-2}d\omega \\ +i\int_{\|\omega\|<1}\left(\operatorname{sen}(\|\omega\|\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right)\|\omega\|^{-n+\alpha-2}d\omega,\end{aligned}$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$ es el ángulo entre los vectores ω y x. Haremos ahora nuevamente un cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ tomaremos $\|\omega\| = r$ donde $0 < r < 1$.

En el capítulo 5 explicamos que al integral todas las variables angulares obtendríamos el valor $\sigma = 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(\frac{n}{2})$. En este caso queremos hacer algo similar, pero esta vez llamaremos σ_0 (el cual es un valor finito) al resultado de intregrar todos los diferenciales angulares hasta φ_{n-2}, es decir

$$\sigma_0 = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \operatorname{sen}^{n-2}(\varphi_1)\operatorname{sen}^{n-3}(\varphi_2)\cdots\operatorname{sen}(\varphi_{n-2})\, d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{n-2}.$$

Nótese que σ_0 es un valor finito. De esta manera, nos quedará sin integrar, el diferencial respecto al ángulo φ_{n-1}.

Ahora bien, este cambio a coordenadas polares necesitamos realizarlo de tal manera que el ángulo φ_{n-1} coincida con el ángulo entre ω y x, para esto trasladamos los ejes cartesianos de tal forma que uno de estos ejes coincida con el vector fijo x. De esta manera el cambio a coordenadas polares no perderá generalidad, es decir $\|\omega\| = r$, $d\omega = r^{n-1}dr$ (por las razones antes explicadas) y además estaremos logrando que $\varphi_{n-1} = \theta$, que es justamente lo que nosotros necesitamos. Todo esto se resume al siguiente cálculo

$$\int_{\|\omega\|<1}\left(1-e^{i<\omega,x>}\cdot e^{-\frac{t\|\omega\|^2}{2}}\right)\|\omega\|^{-n+\alpha-2}\,d\omega$$
$$=\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(1-cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{tr^2}{2}}\right)r^{-n+\alpha-2}r^{n-1}\,d\theta dr$$
$$+\,i\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{tr^2}{2}}r^{-n+\alpha-2}r^{n-1}\,d\theta dr.$$

Nótese que la integral $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx=0$ para todo $a\in\mathbb{R}$ mediante el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))dx&=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx\\&=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}(-a\cos(x-\pi))\,dx\\&=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx+\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(-a\cos(z))\,dz\\&=\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(a\cos(x))\,dx-\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(a\cos(z))\,dz\\&=0,\end{aligned}$$

entonces
$$\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{tr^2}{2}}r^{-n+\alpha-2}r^{n-1}\,d\theta dr=0.$$
Con esto, resta por acotar únicamente el término
$$\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))e^{-\frac{tr^2}{2}}\right)r^{-n+\alpha-2}r^{n-1}\,d\theta dr,$$

pero,
$$\begin{aligned}&\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))+\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))(1-e^{-\frac{tr^2}{2}})\right)r^{\alpha-3}d\theta dr\\\le&\left|\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))+\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))(1-e^{-\frac{tr^2}{2}})\right)r^{\alpha-3}d\theta dr\right|\\\le&\,\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))+\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))(1-e^{-\frac{tr^2}{2}})\right|\right)r^{\alpha-3}d\theta dr.\end{aligned}$$

Procedemos ahora a acotar el integrando, para esto utilizamos la desigualdad triangular y se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))+cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))(1-e^{-\frac{tr^2}{2}})\right| r^{\alpha-3}\\
&\leq \left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))\right| r^{\alpha-3}+\left|cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))(1-e^{-\frac{tr^2}{2}})\right| r^{\alpha-3}\\
&\leq \left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))\right| r^{\alpha-3}+\left|1-e^{-\frac{tr^2}{2}}\right| r^{\alpha-3}\\
&\leq \left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))\right| r^{\alpha-3}+\frac{tr^2}{2} r^{\alpha-3}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, usando la fórmula de Taylor: $\cos(y)=1-\frac{y^2}{2}+\frac{cy^4}{4!}$ donde $|c|\leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|1-\cos(r\|\mathrm{x}\|\cos(\theta))\right| r^{\alpha-3}+\frac{tr^2}{2} r^{\alpha-3} &= \left|r^2\|\mathrm{x}\|^2\cos^2(\theta)+\frac{cr^4\|\mathrm{x}\|^4\cos^4(\theta)}{4!}\right| r^{\alpha-3}+\frac{tr^{\alpha-1}}{2}\\
&= r^{\alpha-1}\|\mathrm{x}\|^2\cos^2(\theta)+r^{\alpha+1}\frac{c\|\mathrm{x}\|^4\cos^4(\theta)}{4!}+\frac{tr^{\alpha-1}}{2}\\
&\leq r^{\alpha-1}\|\mathrm{x}\|^2+r^{\alpha+1}\frac{c\|\mathrm{x}\|^4}{4!}+\frac{tr^{\alpha-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Integramos ahora respecto a las variables θ y r, es decir

$$\sigma_0\int_0^1\int_0^{2\pi} r^{\alpha-1}\|\mathrm{x}\|^2+r^{\alpha+1}\frac{c\|\mathrm{x}\|^4}{4!}+\frac{tr^{\alpha-1}}{2}d\theta dr=2\pi\sigma_0\left(\|\mathrm{x}\|+\frac{c\|\mathrm{x}\|^4}{4!}+\frac{t}{2}\right)<\infty.$$

Finalmente, para $0<\alpha<2$

$$\mathbb{E}[U^2(x,t)]<2\pi\sigma_0\left(\|\mathrm{x}\|+\frac{c\|\mathrm{x}\|^4}{4!}+\frac{t}{2}\right)+\frac{2\sigma}{2-\alpha}<\infty. \tag{6.10}$$

Para efectos de nuestro interés requerimos hallar $\mathbb{E}[U^2(0,t)]$, para esto, hacemos $x=0$ y utilizamos la proposición 6.3, obteniendo el siguiente resultado en el caso $h(x)=\delta(x)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(0,t)] &= \int_0^\infty G(0,s)-G(0,t+s)\,ds\\
&= \int_0^t G(0,s)\,ds\\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,ds\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Y si $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$ se utilizan coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, $\|\mathrm{z}\| = w$, y al igual que antes $\sigma = 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(\frac{n}{2})$ será el área de la esfera y tendremos únicamente $d\mathrm{z} = w^{n-1}dw$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(0,t)] &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} 2[G(\mathrm{z},2v) - G(\mathrm{z},2v+t)]\|\mathrm{z}\|^{-\alpha}\, d\mathrm{z}dv \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{z},u)\|\mathrm{z}\|^{-\alpha}\, d\mathrm{z}dv \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{\|\mathrm{z}\|^2}{2v}}}{(2\pi v)^{\frac{n}{2}}}\|\mathrm{z}\|^{-\alpha}\, d\mathrm{z}dv \\
&= \frac{\sigma}{2\pi}\int_0^t \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{w^2}{2v}}}{(2\pi v)^{\frac{n}{2}-1}}\frac{w}{v} w^{-\alpha+n-2}.
\end{aligned}$$

Realizamos ahora el cambio de variable $\frac{w^2}{2v} = p$ obteniendo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U^2(0,t)] &= \frac{\sigma}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-p}(2v)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n}{2}-1}p^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n}{2}-1}}{(2\pi u)^{\frac{n}{2}-1}}\, dpdv \\
&= \frac{\sigma}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left(\int_0^t (2v)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dv\right)\left(\int_o^\infty e^{-p}p^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{n}{2}-1}\, dp\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\left(\int_0^t (2v)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dv\right) \\
&= \frac{\sigma}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\frac{(2t)^{-\frac{\alpha}{2}+1}}{-\frac{\alpha}{2}+1} \\
&= \frac{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{(2-\alpha)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}t^{1-\frac{\alpha}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Ahora bien, es de suma importancia considerar los siguientes lemas previos con su respectiva demostración:

LEMA 6.4. *$U(0,t)$ satisface la siguiente relación de reescalamiento. Sea $c > 0$, entonces:*

a) Si $h(x) = \delta(x)$: $\quad U(0,ct) \stackrel{\mathcal{D}}{=} c^{\frac{1}{4}}U(0,t)$,

b) y si $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$: $\quad U(0,ct) \stackrel{\mathcal{D}}{=} c^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}U(0,t)$.

Demostración. Tenemos al igual que en la prueba de otros lemas dos casos. Supongamos que $h(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x})$ (en cuyo caso $n = 1$), para verificar esta propiedad, sólo debemos ver que

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[U(0,t)U(0,t')],$$

entonces por la ecuación (6.3) se tiene

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = \int_{-\infty}^{c(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}}[G(-y,ct-s)-G(-y,-s)]\times \\ [G(-y,ct'-s)-G(-y,-s)]\,dyds.$$

Realizamos ahora los siguientes cambios de variable $cr = s$ y $w = \frac{y}{\sqrt{c}}$

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}}[G(-\sqrt{c}w,c(t-r))-G(-\sqrt{c}w,-cr)]\times \\ [G(-\sqrt{c}w,c(t'-r))-G(-\sqrt{c}w,-cr)]\mathbb{1}_{-cr>0}\,dwdr.$$

por definición de G

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}|w|)^2}{2c(t-r)}}}{(2\pi c(t-r))^{1/2}}-\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}|w|)^2}{2(-cr)}}}{(2\pi(-cr))^{n/2}}\right]\times \\ \left[\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}|w|)^2}{2c(t'-r)}}}{(2\pi c(t'-r))^{1/2}}-\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}|w|)^2}{2(-cr)}}}{(2\pi(-cr))^{1/2}}\right]dwdr.$$

nuevamente por definición de G

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}}[G(-w,t-r)-G(-w,-r)]\times \\ [G(-\mathrm{w}',t'-r)-G(-w',-r)]\,dwdw'dr \\ = c^{\frac{1}{2}}\,\mathbb{E}[U(0,t)U(0,t')].$$

Veamos ahora la demostración de b), es decir, suponemos ahora que $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$. Procedemos de manera similar para demostrar que

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1-\frac{\alpha}{2}}\mathbb{E}[U(0,t)U(0,t')].$$

En efecto, por la ecuación (6.4)

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = \int_{-\infty}^{c(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}[G(-\mathrm{y},ct-s)-G(-\mathrm{y},-s)]\times$$
$$[G(-\mathrm{y}',ct'-s)-G(-\mathrm{y}',-s)]h(\mathrm{y}-\mathrm{y}')\,d\mathrm{y}d\mathrm{y}'ds.$$

Realizamos ahora los siguientes cambios de variable $cr = s$, $\mathrm{w} = \frac{\mathrm{y}}{\sqrt{c}}$ y $\mathrm{w}' = \frac{\mathrm{y}'}{\sqrt{c}}$

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1+n-\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}[G(-\sqrt{c}\mathrm{w},c(t-r))-G(-\sqrt{c}\mathrm{w},-cr)]\times$$
$$[G(-\sqrt{c}\mathrm{w}',c(t'-r))-G(-\sqrt{c}\mathrm{w}',-cr)]\times$$
$$\mathbb{1}_{-cr>0}\|\mathrm{w}-\mathrm{w}'\|^{-\alpha}\,dwdw'dr,$$

por definición de G

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1+n-\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}\|\mathrm{w}\|)^2}{2c(t-r)}}}{(2\pi c(t-r))^{n/2}}-\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}\|\mathrm{w}\|)^2}{2(-cr)}}}{(2\pi(-cr))^{n/2}}\right]\times$$
$$\left[\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}\|\mathrm{w}\|)^2}{2c(t'-r)}}}{(2\pi c(t'-r))^{n/2}}-\frac{e^{-\frac{(\sqrt{c}\|\mathrm{w}\|)^2}{2(-cr)}}}{(2\pi(-cr))^{n/2}}\right]$$
$$\|\mathrm{w}-\mathrm{w}'\|^{-\alpha}\,d\mathrm{w}d\mathrm{w}'dr,$$

nuevamente por definición de G

$$\mathbb{E}[U(0,ct)U(0,ct')] = c^{1-\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{(t\wedge t')}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}[G(-\mathrm{w},t-r)-G(-\mathrm{w},-r)]\times$$
$$[G(-\mathrm{w}',t'-r)-G(-\mathrm{w}',-r)]\|\mathrm{w}-\mathrm{w}'\|^{-\alpha}d\mathrm{w}d\mathrm{w}'dr$$
$$= c^{1-\frac{\alpha}{2}}\mathbb{E}[U(0,t)U(0,t')],$$

lo que finaliza la prueba.

□

Lema 6.5. *Los procesos $U(\mathrm{x}+\mathrm{x}',t+t')-U(\mathrm{x},t)$ y $U(\mathrm{x}',t')$ son iguales en distribución.*

Demostración. Debemos ver que

$$U(\mathrm{x}+\mathrm{x}',t+t')-U(\mathrm{x},t)\overset{\mathcal{D}}{=}U(\mathrm{x}',t'),$$

y para esto mostraremos que

$$\mathbb{E}[(U(\mathrm{x}+\mathrm{x}',t+t')-U(\mathrm{x},t))(U(\mathrm{x}+\mathrm{x}'',t+t'')-U(\mathrm{x},t))] = \mathbb{E}[U(\mathrm{x}',t')U(\mathrm{x}'',t'')].$$

Nótese que,

$$U(\mathrm{x}+\mathrm{x}', t+t') - U(\mathrm{x}, t) = \int_{-\infty}^{t+t'} \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{x}+\mathrm{x}'-\mathrm{y}, t+t'-s) - G(-\mathrm{y}, -s)\, dF_{\mathrm{y},s}$$
$$- \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s) - G(-\mathrm{y}, -s)\, dF_{\mathrm{y},s}.$$

Ahora bien, por definición $G(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = 0$ si $t \leq 0$, entonces

$$U(\mathrm{x}+\mathrm{x}', t+t') - U(\mathrm{x}, t) = \int_{-\infty}^{t+t'} \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathrm{x}+\mathrm{x}'-\mathrm{y}, t+t'-s) - G(x-\mathrm{y}, t-s)\, dF_{\mathrm{y},s}. \tag{6.11}$$

Tenemos dos casos, supongamos que $h(\mathrm{x}) = \delta(\mathrm{x})$ entonces utilizando teorema de Fubini la esperanza

$$\mathbb{E}[(U(\mathrm{x}+\mathrm{x}', t+t') - U(\mathrm{x}, t))(U(\mathrm{x}+\mathrm{x}'', t+t'') - U(\mathrm{x}, t))]$$

está dada por

$$\int_{-\infty}^{t'+(t\wedge t'')} \int_{\mathbb{R}^n} [G(\mathrm{x}+\mathrm{x}'-y, t+t'-s) - G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s)][G(\mathrm{x}+\mathrm{x}''-y, t+t''-s) - G(\mathrm{x}-\mathrm{y}, t-s)] d\mathrm{y} ds$$

Realizando ahora los cambios de variable $t - s = -s'$ y $\mathrm{x} - \mathrm{y} = -\mathrm{y}'$ se sigue

$$= \int_{-\infty}^{(t'\wedge t'')} \int_{\mathbb{R}^n} [G(\mathrm{x}'-\mathrm{y}', t'-s') - G(-\mathrm{y}', -s')][G(\mathrm{x}''-\mathrm{y}', t''-s') - G(\mathrm{y}', -s')] d\mathrm{y}' ds'$$
$$= \mathbb{E}[U(\mathrm{x}', t')U(\mathrm{x}'', t'')].$$

Si suponemos ahora que $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$ se procede de manera similar, los cálculos son análogos.

□

Consideremos ahora el siguiente proceso

$$X_t = K_\alpha U(0, t),$$

donde $U(0, t)$ es el proceso considerado anteriormente a partir de la solución de la ecuación del calor estocástica evaluado en la posición $\mathrm{x} = 0$ y
para $h(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{-\alpha}$

$$K_\alpha = \left[\frac{(2-\alpha)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{1-\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

mientras que para $h(x) = \delta(x)$

$$K_\alpha = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

tendremos entonces la siguiente proposición

TEOREMA 6.6. *Consideraremos las siguientes restricciones:*

DIMENSIÓN DE n	INTERVALO DE α	INTERVALO DE H
$n = 1$	$0 < \alpha \leq 1$	$\frac{1}{4} \leq H < \frac{1}{2}$
$n \geq 1$	$0 < \alpha < 2$	$0 < H < \frac{1}{2}$

Sea $X_t = K_\alpha U(0,t)$ según lo definido anteriormente, entonces el proceso X_t es un Movimiento Browniano Fraccionario con parámetro de Hurst

$$H = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & si\ h(x) = \delta(x)\ (n=1) \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{\alpha}{4}, & si\ h(\mathrm{x}) = \|x\|^{-\alpha}\ (n \geq 1). \end{cases} \tag{6.12}$$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar este teorema basta con verificar que se satisfacen los cuatro axiomas de Movimiento Browniano Fraccionario mencionados anteriormente, esto es:

Axioma 1:

Esto se sigue inmediatamente de (6.7).

Axioma 2:

Se sigue del Lema 6.5.

Axioma 3:

La propiedad de reescalamiento se sigue del Lema 6.4.

Axioma 4:

Sólo debemos probar que

$$\mathbb{E}[X_1 X_1] = 1.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1 X_1] &= \mathbb{E}[K_\alpha^2 U^2(1,0)] \\ &= K_\alpha^2 \mathbb{E}[U^2(1,0)].\end{aligned}$$

Ahora bien, del lema 6.2 $\mathbb{E}[U^2(t,0)] = K_\alpha^{-2}$ luego

$$\mathbb{E}[X_1 X_1] = K_\alpha^2 \mathbb{E}[U^2(1,0)] = K_\alpha^2 K_\alpha^{-2} = 1.$$

Con estos cuatro axiomas hemos probado entonces que el proceso $X_t = K_\alpha U(0,t)$ es un MBF, y de esta forma se concluye la prueba. $\square$

2. Aplicaciones del MBF: tocar puntos y dobles puntos

Anteriormente, definimos el MBF unidimensional, en esta sección se hace necesario definir el MBF en $\mathbb{R}^d$ y lo hacemos a continuación

Definición 6.7. Sea $t \geq 0$ y $H \in (0, \frac{1}{2}$, definimos el movimiento browniano fraccionario en $\mathbb{R}^n$ como el proceso

$$X_t^H = X_t = (U_1(t), U_2(t), \ldots, U_d(t)),$$

donde $U_i : i = 1, \ldots, d$ son movimientos brownianos fraccionarios independientes con mismo parámetro de Hurst H.

Es decir, un MBF en $\mathbb{R}^d$ no es más que copias independientes de MBF's unidimensionales con el mismo parámetro de Hurst. En esta sección nos dedicamos a realizar un estudio acerca de ciertas propiedas del Movimiento Browniano Fraccionario, consideraremos los valores H y d (párametro de Hurst y dimensión del espacio donde toma valores el MBF, respectivamente) donde el MBF toca puntos y tiene dobles puntos, es decir, responderemos a las siguientes interrogantes:

(1) ¿Cuáles valores de d, H hacen que el MBF X_t toque puntos?
(2) ¿Cuáles valores de d, H hacen que el MBF X_t tenga dobles puntos?

Por esta razón es necesario introducir las siguientes definiciones

Definición 6.8. Decimos que un proceso estocástico X_t *toca puntos* si para cada $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene una probabilidad positiva de que $X_t = z$ para algún $t > 0$. Es decir, si se satisface que

$$\mathbb{P}(X_t = z) > 0$$

Definición 6.9. Decimos que un proceso estocástico X_t tiene *dobles puntos* si se tiene una probabilidad positiva de que $X_t = X_s$ para algunos tiempos positivos $t \neq s$. Es decir, si se satisface que

$$\mathbb{P}(X_t = X_s) > 0$$

Con esto, procedemos entonces a enunciar los teoremas más importantes de esta sección.

TEOREMA 6.10. *Supongamos que $0 < H < \frac{1}{2}$, tal que $\frac{1}{H}$ es un entero, entonces para la dimensión $d = \frac{1}{H}$, el Movimiento Browniano Fraccionario no toca puntos.*

TEOREMA 6.11. *Supongamos que $0 < H < \frac{1}{2}$, tal que $\frac{2}{H}$ es un entero, entonces para la dimensión $d = \frac{2}{H}$, el Movimiento Browniano Fraccionario no tiene dobles puntos.*

A continuación, mostramos unos lemas previos que será de gran utilidad en la demostración de estos dos teoremas. Esto es debido a que los cálculos realizados en la prueba de éste son muy similares a los que debemos realizar en las demostraciones de los teoremas, lo enunciamos como sigue.

LEMA 6.12. *(Argumento de Lévy) Sea B_t un Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$ entonces el proceso X_t no toca puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\lambda^{(n)}$ denota la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ y sea B_t un Movimiento Browniano en $\mathbb{R}^n$. Para efectos de nuestra prueba, $n = 2$. Denotemos también $B[a, b]$ al conjunto $B[a, b] = \{B_t : a \leq t \leq b\}$. Es suficiente entonces probar que

$$\mathbb{E}[m(B[0, 2])] = 0, \tag{6.13}$$

ya que tendríamos

$$0 = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{z \in B[0,2]}\, d\lambda^{(2)}\right] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}(z \in B[0, 2]) d\lambda^{(2)},$$

y con esto, $\mathbb{P}(z \in B[0, 2]) = 0$ para casi todo z.

Definimos ahora para $0 \leq t \leq 1$ los procesos

$$Y_t = B_{1+t} - B_1.$$

$$Z_t = B_{1-t} - B_1.$$

Notemos que Y_t, Z_t son Movimientos Brownianos estándar bi–dimensionales. Es sencillo probar que estos procesos son independientes mediante el siguiente cálculo de covarianza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_t Z_t] &= \mathbb{E}[(B_{1+t} - B_1)(B_{1-t} - B_1)] \\
&= \mathbb{E}[B_{1+t}B_{1-t} - B_{1+t}B_1 - B_1 B_{1-t} + (B_1)^2] \\
&= \mathbb{E}[B_{1+t}B_{1-t}] - \mathbb{E}[B_{1+t}B_1] - \mathbb{E}[B_1 B_{1-t}] + \mathbb{E}[(B_1)^2] \\
&= 1 - t - 1 - (1 - t) + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el proceso B_t es un movimiento Browniano estándar y por tanto satisface la siguiente propiedad conocida como reescalamiento

$$B_{ct} = c^{1/2} B_t,$$

para todo $t \in [a, b]$ y $c > 0$. Además, si $\lambda^{(d)}$ es la medida de Lebesgue d-dimensional entonces

$$\lambda^{(d)}(c \cdot A) = c^d \lambda^{(d)}(A), \tag{6.14}$$

para todo conjunto A en la σ–álgebra de Borel y $c \in \mathbb{R}$. Para este caso tenemos $d = 2$. Teniendo aclarados estos dos argumentos, podemos escribir la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[0,2])] &= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(\sqrt{2}B[0,1])] \\
&= \mathbb{E}[2\lambda^{(2)}(B[0,1])] \\
&= 2\mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[0,1])] \\
&= 2\mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[1,2])] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[0,1])] + \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[1,2])] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1])] + \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Z[0,1])].
\end{aligned}$$

Por otra parte, la teoría de conjuntos nos permite escribir lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda^{(2)}(B[0,2])] &= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1] \cup Z[0,1])] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1])] + \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Z[0,1])] - \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])].
\end{aligned}$$

Con esto, se tiene entonces que

$$\mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])] = 0.$$

Utilizando ahora el teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E}[\lambda^{(2)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^2} 1\!\!1_{z\in Y[0,1]} 1\!\!1_{z\in Z[0,1]} d\lambda^{(2)}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Y[0,1]} 1\!\!1_{z\in Z[0,1]}\right] d\lambda^{(2)}\end{aligned}$$

Ahora bien, los procesos Y_t y Z_t son independientes, si aunado a esto utilizamos la desigualdad de Cauchy–Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Y[0,1]} 1\!\!1_{z\in Z[0,1]}\right] d\lambda^{(2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Y[0,1]}\right] \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Z[0,1]}\right] d\lambda^{(2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Y[0,1]}\right]\right)^2 d\lambda^{(2)} \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z\in Y[0,1]}\right] d\lambda^{(2)}\right)^2 \\ &= \left(\mathbb{E}[m(Y[0,1])]\right)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{E}[m(Y[0,1])] = 0$ y así (6.13) sigue de la definición de Y. $\square$

Ahora bien, usaremos un procedimiento similar al realizado en la prueba del argumento de Lévy para probar los dos teoremas enunciados anteriormente, exceptuando que $\mathbb{R}^2$ es reemplazado por $\mathbb{R}^d$ el cual es el espacio donde toma valores el MBF d-dimensional.

Ya que X_t toma valores en $\mathbb{R}^d$ entonces (6.14) se mantiene, además $H = \frac{1}{d}$. Luego, al igual que en el Argumento de Lévy podemos escribir la siguiente cadena de igualdades

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,2])] = 2\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,1])] = 2\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[1,2])], \tag{6.15}$$

donde $m(\cdot)$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$. También, tal y como se hizo anteriormente, sean

$$Y_t = X_{1+t} - X_1,$$

$$Z_t = X_{1-t} - X_1,$$

y sea $\mathcal{G}_t$ la σ–álgebra generada por $U(\mathrm{x}, t)$, con $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. Tenemos entonces el siguiente lema

Lema 6.13. *Los procesos* $Y[0,1]$, $Z[0,1]$ *son condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos dado* $\mathcal{G}_1$

Demostración. Para mostrar que $Y[0,1]$, $Z[0,1]$ son iguales en distribución usamos simplemente la definición de Y, Z y procedemos de manera similar a como se hizo en la prueba del Lema 6.5, adicionalmente se prueba la independencia condicional usando argumentos similares al del argumento de Lévy Teniendo entonces lo que se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
Y_t &= X_{1+t} - X_1 \\
&= K_\alpha U(1+t,0) - K_\alpha U(1,0) \\
&= K_\alpha \int_{-\infty}^{1+t} \int_{\mathbb{R}^n} G(-\mathrm{y}, 1+t-s) - G(-\mathrm{y}, 1-s)\, dF\mathrm{y}, s \\
&\overset{\mathcal{D}}{=} K_\alpha \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}^n} G(-\mathrm{y}, 1+t-s) - G(-\mathrm{y}, 1-s)\, dF\mathrm{y}, s \\
&\overset{\mathcal{D}}{=} -K_\alpha \int_{-\infty}^{1} \int_{\mathbb{R}^n} G(-\mathrm{y}, 1-s) - G(-\mathrm{y}, 1-t-s)\, dF\mathrm{y}, s \\
&= K_\alpha (U(0,1-t) - U(0,1)) \\
&= X_{1-t} - X_1 \\
&= Z_t.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto Y_t, Z_t son procesos iguales en distribución. □

Demostración. (Teorema 6.10)
Usaremos el lema anterior y un procedimiento análogo al realizado en la prueba del argumento de Lévy, pero esta vez tomando esperanza condicional. Debemos probar entonces que

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1])|\mathcal{G}_1] = 0.$$

Consideramos los procesos X_t, Y_t como antes y procedemos de manera similar. Ya dijimos que (6.15) se satisface, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,2])|\mathcal{G}_1] &= 2\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,1])|\mathcal{G}_1] \\
&= 2\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[1,2])|\mathcal{G}_1] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,1])|\mathcal{G}_1] + \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[1,2])|\mathcal{G}_1] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1])|\mathcal{G}_1] + \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Z[0,1])|\mathcal{G}_1].
\end{aligned}$$

Pero por otra parte, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(X[0,2])|\mathcal{G}_1] &= \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1] \cup Z[0,1])|\mathcal{G}_1] \\
&= \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1])|\mathcal{G}_1] + \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Z[0,1])|\mathcal{G}_1] - \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])|\mathcal{G}_1],
\end{aligned}$$

y con esto tendríamos

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])|\mathcal{G}_1] = 0.$$

Ahora, por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1] \cap Z[0,1])|\mathcal{G}_1] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^n} 1\!\!1_{z \in Y[0,1]} 1\!\!1_{z \in Z[0,1]} \, d\lambda^{(d)} |\mathcal{G}_1\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Y[0,1]} 1\!\!1_{z \in Z[0,1]} |\mathcal{G}_1\right] d\lambda^{(d)}.
\end{aligned}$$

Utilizamos ahora la independencia de los procesos $X[0,1]$, $Y[0,1]$ probada en el lema anterior y nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Y[0,1]} 1\!\!1_{z \in Z[0,1]} |\mathcal{G}_1\right] d\lambda^{(d)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Y[0,1]} |\mathcal{G}_1\right] \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Z[0,1]} |\mathcal{G}_1\right] d\lambda^{(d)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Y[0,1]} |\mathcal{G}_1\right]\right)^2 d\lambda^{(d)} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left[1\!\!1_{z \in Y[0,1]} |\mathcal{G}_1\right] d\lambda^{(d)}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1])|\mathcal{G}_1]\right)^2.
\end{aligned}$$

Con esto, $\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(Y[0,1])|\mathcal{G}_1] = 0$ y el teorema se sigue de la definición de Y. $\square$

Demostración. (Teorema 6.11)
Para esta prueba debemos mostrar que X_t no tiene dobles puntos. Usaremos un argumento similar al del teorema anterior, pero esta vez aplicado al proceso de dos parámetros $V(s,t) = X(t) - X(s)$.

Necesitamos mostrar que $V(s,t)$ no tiene ceros a menos que $s = t$. Para simplificar la prueba, mostraremos que $V(s,t)$ no tiene ceros para $(s,t) \in \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R} = [0,2] \times [4,6]$.

Para los demás rectángulos cuya intersección con la bisectriz tiene medida 0 el argumento es el mismo. Subdividimos $\mathcal{R}$ en cuatro subrectángulos $\mathcal{R}_i : i = 1, \ldots, 4$ los cuales son una traslación de $[0,1]^2$. Nuevamente, utilizando propiedades de reescalamiento, podemos ver que para cada $i = 1, \ldots, 4$

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(V(\mathcal{R}))] = 4\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(V(\mathcal{R}_i))].$$

Ahora bien, sea $\mathcal{H}_1$ la σ–álgebra generado por el conjunto $\{u(1, \mathrm{x}) : \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n\}$ y supongamos que los $\mathcal{R}_i$‘s son de la forma $\mathcal{R}_i = [0,1] \times [4,5]$ y $\mathcal{R}_i = [1,2] \times [4,5]$. Así, tal y como se hizo anteriormente para cada par $i \neq j \in 1, \ldots, 4$ tenemos

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(V(\mathcal{R}_i) \cap V(\mathcal{R}_j))|\mathcal{H}_1] = 0.$$

Se puede probar que $V(\mathcal{R}_i)$ y $V(\mathcal{R}_j)$ son procesos condicionalmente independientes, y procediendo como antes se concluye con probabilidad uno

$$\mathbb{E}[\lambda^{(d)}(V(\mathcal{R}_i))\big|\mathcal{H}_1] = 0,$$

y esto concluye la prueba. $\square$

Bibliografía

[1] Doering. Charles R., *Nonlinear parabolic stochastic differential equations with additive colored noise on $R^d \times R^+$: A regulated stochastic quantization*, Commun. Math. Phys., 109, 537-561, 1987. Citado en página 37

[2] Dudley. R. M., *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press, 2002. Citado en página 5

[3] Faris. W.G. and Jona-Lasinio. G., *Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 15, 10, 3025, (1982).

[4] Haberman. Richard, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno*, Prentice Hall, (2003). Citado en página 17

[5] Khoshnevisan. Davar, *A primer on stochastic partial differential equations*, 1-38, (2009). Citado en página 5, 22

[6] Mueller. Carl and Wu. Zhixin, *A connection between the stochastic heat equation and fractional Brownian motion, and a simple proof of a result of Talagrand*, Electronic Communications in Probability, 14, 55-65, (2009). Citado en página 38

[7] Mueller. Carl and Wu. Zhixin, *Erratum: A connection between the stochastic heat equation and fractional Brownian motion, and a simple proof of a result of Talagrand*, Electronic Communications in Probability, (2012). Citado en página 38

[8] Strichartz. Robert S., *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, World Scientific Publishing Co. Inc., (2003). Citado en página 44

[9] Walsh. J. B., *An introduction to stochastic partial differential equations*, Lectures Notes in Mathematics, (1986). Citado en página

[10] Wschebor. Mario, *One – Paremeter Gaussian Processes: Lectures on the Distribution of the Maximum*, Decimocuarta Escuela Venezolana de Matemáticas, (2001). Citado en página 6