UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Funciones Fuertemente Convexas y Fuertemente Midconvexas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Gari R. Roa C.** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela

Octubre, 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Funciones Fuertemente Convexa**", presentado por la **Br. Gari R. Roa C.**, titular de la Cédula de Identidad **17.677.464**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr.Nelson Merentes

Tutor

Dr. Sergio Rivas

Jurado

Dr. Jose Luis Sánchez

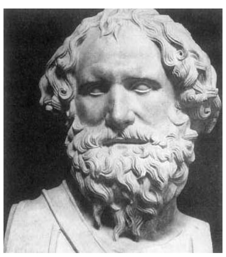
Jurado

“ Este trabajo esta dedicado a mi familia,
mis amigos y profesores que me ayudaron
a llegar donde estoy donde estoy ahora.”

***Gari Roa**.*

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN



Arquímedes

La noción de convexidad se remonta a la época de Arquímedes (Circa 250 A.C.), en conexión con la famosa estimación de π (usando polígonos regulares inscritos y circunscritos). Él notó un hecho importante, que el perímetro de una figura convexa es menor que el perímetro de cualquier otra figura convexa que la rodea.

Sin embargo, estudios sistemáticos y con rigor matemático son presentados a finales del siglo XIX y principios del siglo XX como se puede ver en los siguientes trabajos:

El alemán Otto Hölder [16] en 1889 en el trabajo titulado *Über einen Mittelwertsatz,* demostró la forma discreta de la hoy llamada desigualdad de Jensen, bajo una hipótesis con mayor grado de regularidad para la función f, es decir, que la segunda derivada es no negativa $f''(x) > 0$, en su dominio.

O. Hölder

J. Hadamard

El francés Jacques Hadamard [11] obtuvo en 1893, en el trabajo titulado *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann,* una desigualdad para integrales de funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$.

Por otra parte, el austriaco Otto Stolz [36] en el trabajo titulado *Grundzüge der Differential und Integralrechnung,* demostró en 1893 que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y satisface la desigualdad

O. Stolz

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

entonces f tiene derivada por la izquierda y por la derecha en cada punto de (a, b).

Entre 1905-1906 el matemático danés J. L. W. V. Jensen ([17], [18]) en los trabajos *Om konvese Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier* y *Sur les fonctions convexes et les inéga-*

J. L. Jensen

lités entre les valeurs moyennes reconoce la importancia de esta noción y expresó lo siguiente "Parece ser que la noción de función convexa es tan fundamental como la de función positiva o función creciente". Jensen considera la ecuación (0.1) para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de resultados el cual (0.1) junto con la desigualdad implica la continuidad de f.

Durante el siglo XX se realizó una intensa actividad de investigación en este campo de la matemática y se obtuvieron resultados significativos en el Análisis Funcional Geométrico, la Economía Matemática y Análisis Convexo, entre otras ramas. La ampliación en la comunidad relacionada con los estudios de Matemática en el tema de funciones convexas se debe al muy util libro de G. H. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya [12], titulado "*Inequations*"(Para más detalles de la historia del desarrollo de las funciones convexas se remite a [24]).

Uno de los resultados más importantes de las funciones convexas es que satisfacen las desigualdades siguientes:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)\,ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{0.2}$$

para todo $x, y \in I,\ x < y$. El lado izquierdo de (0.2) fue demostrado por Jaques Hadamard [11] en 1893, para el caso en que las funciones f con derivada creciente en un intervalo cerrado de la recta real. En esa época la noción de funciones convexas estaba en proceso de contrucción. Hoy en día esta desigualdad es llamada desigualdad de Hadamard. Mientras el lado derecho de la desigualdad (0.2) se le atribuye a Charles Hermite y fue demostrado en 1883. En la actualidad la desigualdad (0.2) hoy en dia es llamada desigualdad Hermite-Hadamard.

Ch. Hermite

Una forma de generalizar el concepto de una función convexa, fue introducido por el estadounidense Edwin Beckenbach [3] en 1937 en el trabajo *Generalized convex functions*, reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas pertenecientes a una familia de funciones de dos parámetros $\mathcal{F}$. Las funciones convexas generalizadas son obtenidas de muchas de las propiedades conocidas para la función convexa clásica, como se puede ver en los trabajos de E. Beckenbach, M. Bessenyei, Zs. Páles y Nikodem en [3], [6], [27] respectivamente o el libro titulado *Convex Functions,* de A. W. Roberts, D. E. Varberg [31].

E. Beckenbach

En el año 1952, el polaco Stanislaw M. Ulam y el estadounidense Donald H. Hyers [15] demuestran en el artículo *Approximately convex functions*, que dada una función f definida en una bola abierta centrada en cero de radio dos, entonces puede ser aproximada por una función convexa.

S. Ulam

Dadas dos funciones f y g definidas sobre un espacio vectorial a valores reales, unos de los problemas de interés en la matemática es determinar condiciones necesarias y suficientes sobre f y g para que exista una función h que separe a f y g ($f \leq h \leq g$) y que cumpla cierta condición, por ejemplo: continuidad, convexidad, cuasiconvexidad, cuasiconcavidad, monotonía, linealidad, etc. Existen varios trabajos donde se estudian estos problemas, como es el caso del trabajo titulo *A sandwich with convexity,* donde en el año 1994, los polacos Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem [2] demuestran que dos funciones reales f y g definidas sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y que satisfacen la desigualdad

K. Baron

J. Matkowski

K. Nikodem

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) \quad x, y \in I \quad \text{y} \quad [0,1],$$

pueden ser separadas por una función convexa.

En la misma dirección en el que crece el conocimiento matemático mediante el trazado de la historia, se desarrollan también resultados de funciones midconvexas como son los resultados de los siguientes matemáticos:


F. Bernstein


G. Doetsch

En los estudios pioneros de Jensen [17] y [18], se demostró que si una función convexa (actualmente denominada función midconvexa) está acotada superiormente en (a, b), entonces f es continua allí. Dando especial atención a los límites superiores e inferiores, los alemanes Felix Bernstein y Gustav Doetsch [5] fueron capaces de demostrar en l915 la forma débil de Jensen. En otras palabras, demuestran que toda función midconvexa acotada en un subconjunto abierto no vació del dominio es continua.


W. Sierpiński

En el año 1920, el polaco Wacław Sierpiński [35] demuestra en "*Sur les fonctions convexes mesurables*" el siguiente resultado: Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función midconvexa y medible entonces f es continua sobre I (y por lo tanto convexa).

Por otra parte el ucraniano Alexander Ostrowski en 1929, en el artículo "*Uber die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen und verwandte Funktionalgleichunge*" demuestra que toda función midconvexa acotada sobre un subconjunto del dominio con medida de Lebesgue positiva es continua.


A. Ostrowski

En la vida diaria se experimenta convexidad todo el tiempo y de muchas maneras, el ejemplo más prosaico es nuestra posición de pie, que se fija siempre y cuando la proyección vertical de nuestro centro de gravedad se encuentra dentro de la dotación convexa de los pies. Además, la convexidad tiene un gran impacto en nuestra vida cotidiana a través de sus numerosas aplicaciones a distintas areas del conocimiento como: Medicina, Finanzas, Economía, Ingeniería, Computación entre otras.

Un problema matemático importante es investigar cómo las funciones se obtienen bajo la acción de los medios. El caso más conocido es la convexidad del punto medio (o convexidad tipo Jensen), que son aquellas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ que verifican la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in I$. Si la función $f : I \to \mathbb{R}$ es midconvexa y continua entonces la función f es convexa si (ver el Corolario 1.9 para más detalle). Por inducción matemática se puede extender la desigualdad anterior a combinaciones convexas de un número finito de puntos en I y junto a la variable aleatoria asociado a un espacio de probabilidad arbitraria. Estas extensiones son conocidos como la desigualdad discreta de Jensen y la desigualdad integral de Jensen respectivamente.

Para concluir esta introducción, se dará información de la forma como esta estructurado este trabajo especial de grado. Se ha dividido en tres capítulos subdividido cada uno de ellos en secciones, no muy extensas en la mayoría de los casos. Esto permitirá una lectura más ágil del texto.

En el capítulo 1 se comienza introduciendo la noción de funciones convexas y funciones midconvexas dadas por J. Jensen [17]-[18] en 1905-1906 con algunos ejemplos, propiedades y resultados.

En el capítulo 2 se expondrá la noción de funciones fuertemente convexas dadas por T. Polyak [30] en 1966 con algunos ejemplos, propiedades y resultados desarrollados por N. Merentes y K. Nikodem [21] en 2010.

En el capítulo 3 se expondrá la noción de funciones fuertemente midconvexas que viene dada como un caso particular de las funciones fuertemente convexas, propiedades y resultados desarrollados por A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J. L. Sánchez [1] en 2011.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo, se dará una introducción de convexidad por medio de Teoremas, Definiciones, Proposiciones, Ejemplos, entre otros tópicos que se relacionan con este tema y además nos servirán para el desarrollo de los próximos capítulos en este Trabajo Especial de Grado.

1.1 Funciones Convexas

El estudio de las funciones convexas como una clase de funciones es generalmente atribuida al danés Johan Ludwich William Valdemar Jensen por sus primeros trabajos entre los años 1905 y 1906 ([17] y [18]). Sin embargo, él no fue el primero en trabajar las funciones convexas, puesto que la forma discreta de la desigualdad de Jensen la demostró el alemán Otto Hölder en 1889 ([16]) bajo una hipótesis más fuerte la cual es que la segunda derivada sea no negativa (es decir $f''(x) > 0$). Por otra parte, el austriaco Otto Stolz demostró en 1893 ([36]) que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y satisface la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right), \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

entonces f tiene derivada por la izquierda y por la derecha en cada punto de (a, b). El francés Jacques Hadamard obtuvo en 1893 ([11]) una desigualdad para integrales para funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$. Jensen utiliza (1.1) para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de resultados el cual junto con (1.1) implica la continuidad de f.

Acontinuación se da la definición de función convexa y una serie de ejemplos que ilustran la definición

Definición 1.1.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es una función convexa si satisface*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.2}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Si la desigualdad es en sentido contrario se dice que la función f es cóncava.

La función f se considera *estrictamente convexa* siempre que la desigualdad (1.2) sea estricta para $x \neq y$.

En la Fig 1.1, la interpretación geométrica de una función convexa establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa entonces el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$,$(x_2, f(x_2)) \in \text{Gra}f$ nunca está por debajo del Gra$f$.

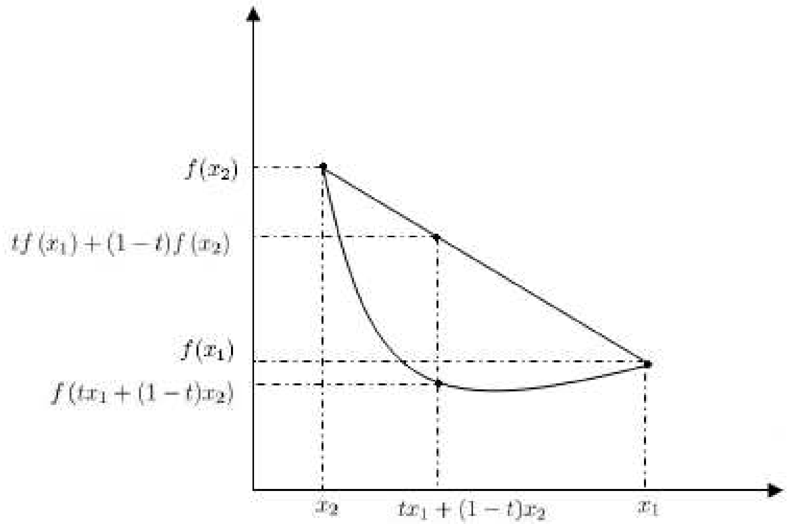


Figura 1.1: Función convexa, $I = [x_2, x_1]$

Si se invierte la desigualdad (1.2) se dice que la función f es cóncava. La función f es estrictamente cóncava si la desigualdad es estricta cuando $x \neq y$ y $t \in (0, 1)$.

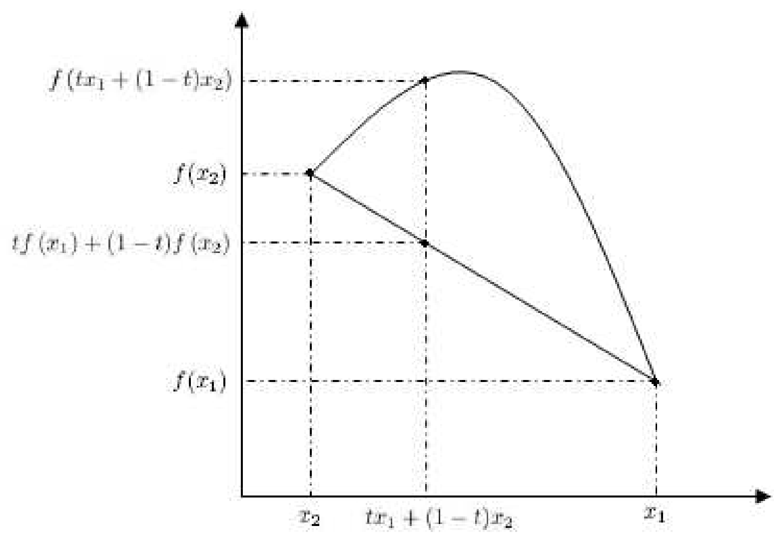


Figura 1.2: Función cóncava, $\quad I = [x_2, x_1]$

Análogamente, la interpretación geométrica de una función cóncava establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función cóncava entonces el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$,$(x_2, f(x_2)) \in$ Gra$f$ nunca está por arriba del Gra$f$, como lo muestra la Fig 1.2.

A continuación se presenta una serie de ejemplos de funciones convexas, es decir, se demuestra que cumplen con la desigualdad (1.2).

Ejemplo 1.1.1. *Sea $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$, para que f sea convexa se debe cumplir que*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 1],$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 \\ &= tx^2 + (1-t)y^2 - (t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2) \\ &= t(1-t)x^2 - 2t(1-t)xy + (1-t)(1-1+t)y^2 \\ &= t(1-t)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= t(1-t)(x-y)^2, \quad t \in [-1, 1], \end{aligned}$$

entonces $f(x) = x^2$ es convexa. Geométricamente lo se puede comprobar en la siguiente figura:

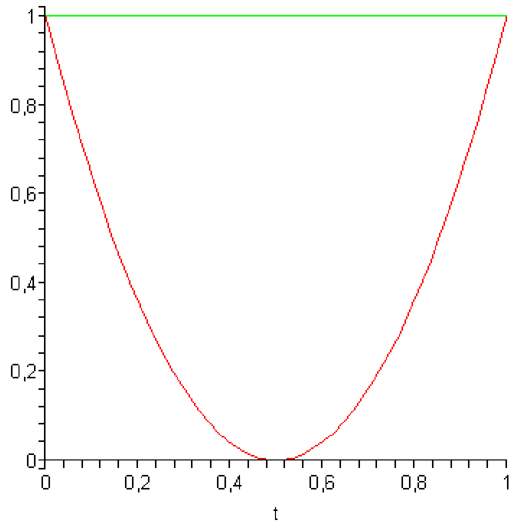


Figura 1.3: $f(x) = x^2, \quad I = [0,1]$

Ejemplo 1.1.2. *Sea* $f(x) = |x|, \quad x \in [-1,2]$, *se verifica que* f *es una función convexa. Así*

$$f(tx + (1-t)y) = |tx + (1-t)y|$$

usando la desigualdad triangular

$$|tx+(1-t)y| \leq |tx|+|(1-t)y| = t|x|+(1-t)|y| = tf(x)+(1-t)f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1]$$

entonces $f(x) = |x|$ *es convexa, tal como lo muestra la siguiente figura:*

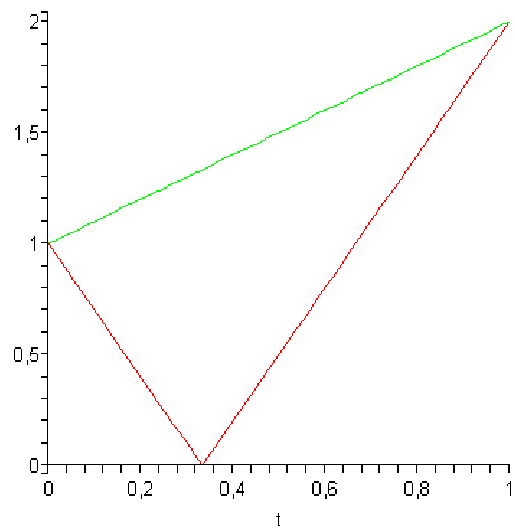


Figura 1.4: $f(x) = |x|, \quad I = [-1, 2]$

Cabe destacar que el Ejemplo 1.1.1 muestra el caso de una función estrictamente convexa, mientras que el Ejemplo 1.1.2 no. Además el Ejemplo 1.1.2 muestra que las funciones convexas no son necesariamente derivables en todo punto (ver Figura 1.5).

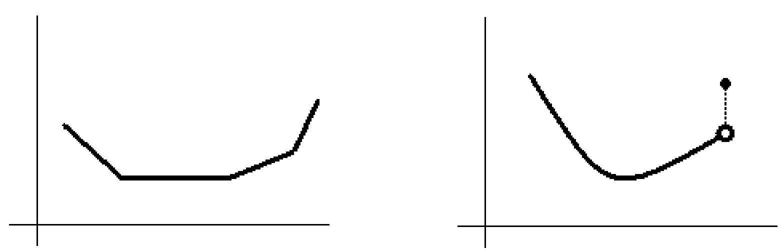


Figura 1.5: Las funciones convexas pueden ser no derivables o discontinuas.

En la proxima sección se expondran resultados sobre la continuidad y la diferenciabilidad de funciones convexas.

1.1.1 Continuidad y Diferenciabilidad

En esta sección se estudiaran las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de las funciones convexas. Se iniciará con una proposición que expresa que toda función convexa definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ y acotado es acotada.

Proposición 1.1.1 (ver [31])**.** *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función convexa, entonces es acotada en* $[a, b]$*.*

Demostración:

Sea f una función convexa en un intervalo $[a, b]$, se considera $M = \max\{f(a), f(b)\}$ y $z \in [a, b]$, existe un $\lambda \in [0, 1]$ tal que

$$z = \lambda a + (1 - \lambda)b,$$

entonces

$$f(z) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \lambda M + (1 - \lambda)M = M,$$

luego f es acotada superiormente en $[a, b]$.

Además f está acotada inferiormente. En efecto, seleccionando un $t > 0$ adecuadamente se puede asegurar que $(a + b)/2 + t$, esté en el intervalo de $[a, b]$ y así

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \end{aligned}$$

se reescribe

$$f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right),$$

como

$$-f((a + b)/2 - t) \geq -M,$$

resulta

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m;$$

y por lo tanto f es acotada.

$\square$

Es necesario que el intervalo en que está definida la función sea cerrado y acotado ya que en caso contrario puede suceder que la función no sea acotada, esto se comprueba mediante los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.1.3. *Las funciones* $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = tag(x)$ *y* $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = e^x$

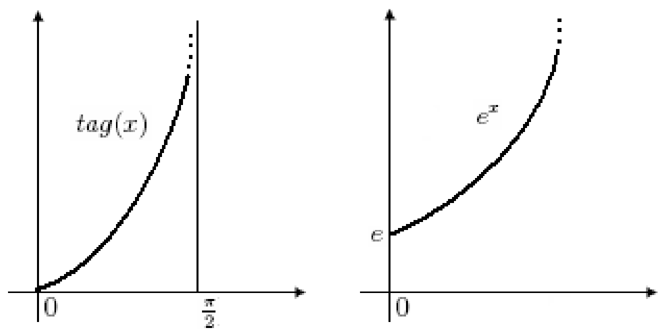


Figura 1.6: Geométricamente se observa que no son acotadas superiormente.

De estos ejemplos se tiene que las funciones pueden ser convexas en un intervalo y no acotadas superiormente, en ese intervalo.

El comportamiento de una función en los extremos en un intervalo I puede ser de varias maneras, sin embargo en el intervalo I^0 quien es el interior de I tiene propiedades importantes, para exponer algunos resultados que clarifiquen este tema, se expone acontinuación la noción de Lipschitzidad

Definición 1.1.2. *Se dice que una función* $f : I \to \mathbb{R}$ *satisface la condición Lipschitz (o es Lipschitz) en el intervalo* I *si para todo* $x, y \in I$ *existe una constante* K *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|. \tag{1.3}$$

La constante K se denomina constante de Lipschitzidad.

Se demostrará que toda función convexa $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en el interior de I.

Teorema 1.1.1 (ver [31])**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces f es Lipschitz en cualquier intervalo $[a, b]$ contenido en el interior I^0 de I. Consecuentemente, f es absolutamente continua en $[a, b]$ y continua en I^0.*

Demostración:

Se considera $\varepsilon > 0$ de tal manera que $a - \varepsilon$ y $b + \varepsilon$ pertenezcan a I, y sean m y M el ínfimo y el máximo de f respectivamente en $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$.

Si $x, y \in [a, b]$ son tales que $x \neq y$, y como $\left| \frac{1}{|y - x|}(x - y) \right| = 1$, resulta que

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y - x|}(y - x) \in [a - \varepsilon, b + \varepsilon].$$

Luego,

$$y = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|} z + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |y - x|} x.$$

En consecuencia, se considera

$$\lambda = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|} \in (0, 1),$$

resulta que $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$ y como f es una función convexa se obtiene

$$f(y) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda) f(x) = \lambda(f(z) - f(x)) + f(x),$$

por lo tanto

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M - m) < \frac{|y - x|}{\varepsilon}(M - m) = K|y - x|,$$

donde $K = \dfrac{M - m}{\varepsilon}$, y como para cualquier $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$, se considera

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|,$$

es decir, f es Lipschitz en el intervalo $[a, b]$.

Usando que f es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$, se puede obtener $\delta > 0$ tal que para cualquier colección $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$ de intervalos disjuntos de $[a, b]$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta.$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} K|b_i - a_i| = K \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < K\delta.$$

Claramente, si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$, se cumple que toda función convexa es absolutamente continua. Finalmente, la continuidad de f en I^0 es una consecuencia de la arbitrariedad de $[a, b]$.

□

Por otro lado, la derivada de una función convexa puede ser estudiada en términos de derivada por la izquierda y por la derecha definidas como sigue:

Definición 1.1.3. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $x, y \in I$, entonces las derivadas laterales se definen en caso de existir tal como sigue:*

Derivada por la izquierda

$$f'_{-}(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y derivada por la derecha

$$f'_{+}(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

El siguiente Teorema establece que las derivadas laterales de una función convexa existen, son monótonas y crecientes en I^0 (interior de I).

Teorema 1.1.2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa [estrictamente convexa] entonces en cada $x \in I^0$ existen las derivadas laterales y las funciones $f'_{-}(x)$ y $f'_{+}(x)$ son crecientes [estrictamente crecientes] en I^0.*

Se considera los siguientes puntos $w < x < y < z$ en I^0 con P, Q, R y S los puntos correspondientes en la gráfica de f (ver figura 1.7); es decir

$$P = (w, f(w)),\ Q = (x, f(x)),\ R = (y, f(y)) \ \text{y} \ S = (z, f(z)).$$

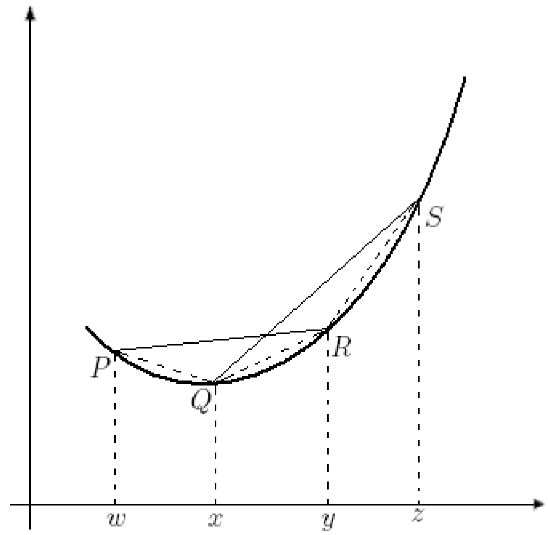


Figura 1.7: Relación entre las pendientes.

Sin pérdida de generalidad, se considera la siguiente notación para la pendiente de la recta que da dos puntos, tal como sigue $pendiente(AB) = pend(AB)$. Con esta notación se obtiene

$$pend(PQ) \leq pend(PR) \leq pend(QR) \leq pend(QS) \leq pend(RS) \tag{1.4}$$

y las desigualdades son estrictas si f es estrictamente convexa. Como $pend(PR) \leq pend(QR)$, entonces la $pend(QR)$ aumenta cuando $x \uparrow y$, y de manera similar la $pend(PR)$ disminuye a medida que $z \downarrow y$.

Estos hechos garantizan que $f'_{-}(y)$ y $f'_{+}(y)$ existen y satisfacen

$$f'_{-}(y) \leq f'_{+}(y) \tag{1.5}$$

para todo $y \in I^0$.

Por otra parte, considerando (1.4), se tiene

$$f'_{+}(w) \leq \frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_{-}(y),$$

y la desigualdad es estricta si y sólo si prevalece la convexidad estricta; de esta desigualdad y por (1.5) se obtiene

$$f'_-(w) \leq f'_+(w) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$$

y así se establece la monotonía de $f'_-(y)$ y $f'_+(y)$.

□

Hay varios resultados importantes que tienen relación con las propiedades de continuidad de f'_+ y f'_-. El carácter monótono de f'_+ significa que el límite de $f'_+(x)$ existe cuando $x \downarrow w$. De la desigualdad

$$f'_+ \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y de la continuidad de f se sigue que

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+ \leq \lim_{x \downarrow w} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(w)}{y - w}.$$

Si $y \downarrow w$ se obtiene

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+ \leq \lim_{y \downarrow w} \frac{f(y) - f(w)}{y - w} = f'_+(w).$$

Por otra parte, ya que $x > w$, la monotonicidad de f'_+ implica que $f'_+(x) \geq f'_+(w)$. Por lo tanto

$$\lim_{x \downarrow w} f'_+(x) = f'_+(w) \tag{1.6}$$

y argumentos similares demuestran que

$$\lim_{x \uparrow w} f'_+(x) = f'_-(w). \tag{1.7}$$

Se señala que (1.6) y (1.7) son válidas en los extremos de I, siempre que f esté bien definida y sea continua en I. Por último se destaca que las condiciones análogas a (1.6) y (1.7) para el límite lateral izquierdo y derecho se mantiene para $f'_-(x)$.

□

En las condiciones del Teorema 1.1.1 no se puede asegurar la continuidad en un extremo del intervalo, por ejemplo la función $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ definida por $f(a) = 1$ y $f(t) = 0$ si $a < t < b$, es convexa en $[a, b)$, pero no es continua en a.

Teorema 1.1.3. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa en el intervalo abierto I entonces el conjunto E donde f' no existe es numerable. Además, f' es continua en $I \backslash E$.*

Demostración:

De (1.6) y (1.7), se concluye que $f'_+(w) = f'_-(w)$ si y sólo si f'_+ es continua en w. Así que E consiste en el conjunto de las discontinuidades de la función creciente f'_+ y por consiguiente es numerable; para más detalles ver [23]. En $I \backslash E$, f'_+ es continua, así f' coincide con f'_+ en $I \backslash E$ y también es continua allí.

$\square$

Ahora se representa una función convexa como una integral, afortunadamente, se pueden tomar en el sentido de Riemann o de Lebesgue.

Teorema 1.1.4 (Ver [31])**.** *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa [estrictamente convexa] si y sólo si existe una función $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ creciente [estrictamente creciente] y un punto $d \in (a, b)$ tal que para todo $x \in (a, b)$,*

$$f(x) - f(d) = \int_d^x g(t)\, dt. \tag{1.8}$$

Demostración:

Supóngase primero que f es convexa, y sean $g = f'_+$ la cual existe y es creciente por el Teorema 1.1.2 y d cualquier punto de (a, b). En virtud del Teorema 1.1.1, f es absolutamente continua en $[d, x]$. Del Teorema clásico de la integral de Lebesgue (Ver [23], p.225) se tiene que

$$f(x) - f(d) = \int_d^x f'_+(t)\, dt = \int_d^x g(t)\, dt.$$

Por otra parte, si f es estrictamente convexa, $g = f'_+$ será estrictamente creciente (ver Teorema 1.1.2).

Inversamente, supóngase (1.8) que g es creciente y sean α y β escalares positivos tales que $\alpha + \beta = 1$; entonces, para $x < y$ en (a, b), se tiene que

$$\alpha f(x) + \beta f(y) - (\alpha + \beta) f(\alpha x + \beta y) = \beta \int_{\alpha x + \beta y}^{y} g(t)\, dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(t)\, dt.$$

$$\begin{aligned}
\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y) &= \alpha f(x)+\beta f(y)-(\alpha+\beta)f(\alpha x+\beta y)\\
&= \beta(f(y)-f(\alpha x+\beta y))-\alpha(f(\alpha x+\beta y)-f(x))\\
&= \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)\,dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)\,dt\\
&\geq \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(\alpha x+\beta y)\,dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(\alpha x+\beta y)\,dt\\
&= \beta g(\alpha x+\beta y)(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha g(\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta y-x)\\
&= g(\alpha x+\beta y)(\beta(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha(\alpha x+\beta y-x))\\
&= g(\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta y-(\alpha x+\beta y))=0.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y)\geq 0$$

para todo $\alpha,\beta\in[0,1]$, $\alpha+\beta=1$ y $x,y\in(a,b)$. Por lo tanto f es convexa. Además, como g es una función creciente se verifican

$$x<t<\alpha x+\beta y \ \text{ entonces } \ g(t)\leq g(\alpha x+\beta y)$$

$$\alpha x+\beta y<t<y \ \text{ entonces } \ g(\alpha x+\beta y)\leq g(t).$$

Por último, se nota que la estimación realizada anteriormente es estricto cuando g es estrictamente creciente.

$\square$

El Teorema anterior demuestra que para una función diferenciable, la convexidad implica que la derivada es creciente. A continuación se presenta otra manera de ver la convexidad de una función.

Teorema 1.1.5 (Ver [31]). *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b). Entonces f es convexa [estrictamente convexa] si y sólo si f' es una función creciente [estrictamente creciente].*

Demostración:

Supóngase f' una función creciente [estrictamente creciente]. Entonces, el Teorema fundamental del calculo se asegura que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\, dt. \tag{1.9}$$

para cualquier $c \in (a, b)$, en virtud del Teorema1.1.4 se tiene que f es convexa.

Recíprocamente, si la derivada f' es creciente [estrictamente creciente] y existe en todos los puntos del dominio de la función f, entonces de acuerdo con la relación (1.9) y de la aplicación del Teorema 1.1.4 con $g(t) = f'(t)$ para todo $t \in (a, b)$, se concluye que f es convexa [estrictamente convexa].

□

Corolario 1.1.1 (Ver [31], [34]). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada en (a, b). Si f es una función convexa en [a,b] si y sólo si $f'' \geq 0$ en (a, b). Además si $f'' > 0$ en (a, b), entonces f es estrictamente convexa en el intervalo (a, b).*

Demostración:

f' es una función creciente si y sólo si f'' es una función no negativa y si f' es una función estrictamente creciente entonces f'' es una función positiva. Esto combinado con el Teorema 1.1.5 nos da el resultado.

□

Ejemplo 1.1.4. *Sea $f(x) = x^4$, $x \in (-1, 1)$ se demostrará que $f'' \geq 0$ en $(-1, 1)$. En efecto*

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^3, \ x \in (-1, 1)$$

y derivando nuevamente,

$$f''(x) = (4x^3)' = 12x^2 \geq 0$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Como $f''(x) \geq 0, \ x \in (-1, 1)$ por el Corolario 1.1.1 se tiene que f es una función convexa en $(-1, 1)$.

El recíproco del Corolario 1.1.1 es falso, es decir, el hecho de que f sea estrictamente convexa en (a, b) no implica que $f'' > 0$. En el Ejemplo 1.1.4 f es estrictamente convexa y no cumple que $f'' > 0$ ya que cuando $x = 0$ entonces $f''(x) = 0$.

La próxima caracterización depende de la idea geométrica que en cualquier punto de la gráfica de una función convexa, existe una recta que se encuentra por debajo o sobre la gráfica (Fig.1.8).

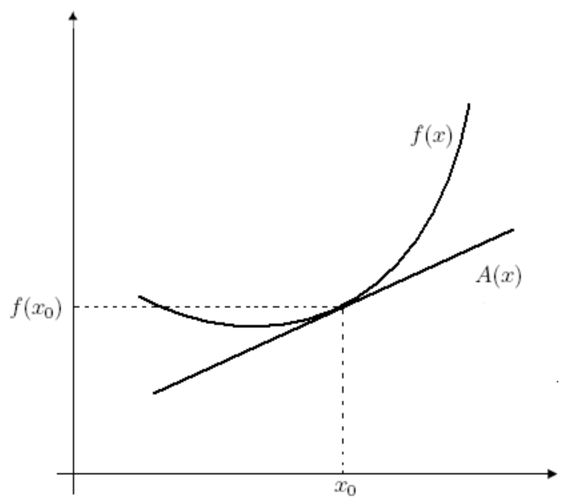


Figura 1.8: Recta de soporte de f en x_0.

Formalmente, se puede escribir que:

Definición 1.1.4. *Sea f una función definida en el intervalo I. f tiene el soporte en $x_0 \in I$, si existe una función afín $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ que pasa por $(x_0, f(x_0))$, tal que $A(x) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.*

La función afín A es llamada *recta soporte de f en x_0.*

Teorema 1.1.6 (Ver [31]). *Una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si existe al menos una recta de soporte de f para cada $x_0 \in (a, b)$.*

Demostración:

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa, $x_0 \in (a, b)$ y $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ tal que si $x > x_0$, entonces

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m$$

y si $x < x_0$, entonces

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m.$$

En ambos casos se obtiene que $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$. Se denota $A(x)$ como

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0).$$

Inversamente, se supone que f tiene una recta soporte para cada punto de (a, b), donde $x, y \in (a, b)$. Si $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)y, \quad \lambda \in [0, 1]$, sea $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ el soporte de la función f en x_0. Entonces,

$$f(x_0) = A(x_0) = \lambda A(x) + (1-\lambda)A(x) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)$$

por lo tanto f es convexa.

$\square$

El próximo resultado no es una caracterización de las funciones convexas, pero se relaciona con el Teorema 1.1.6

Teorema 1.1.7 (Ver [31]). *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es diferenciable en x, si y sólo si la recta soporte de f en x_0 es única. Y en este caso,*

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

proporciona este único soporte.

Demostración:

Esta demostración se desprende del Teorema 1.1.6, es decir, para cada $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ existe una recta de apoyo de f en x_0. Por lo tanto la unicidad de la recta significa $f'_-(x) = f'(x_0)$, es decir, $f'(x_0)$ existe. Por otro lado, se concidera que $f'(x_0)$ existe; además de cualquier recta de soporte

$$A(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

nos da que $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$. Para $x_1 < x_0 < x_2$, se obtiene

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq m \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

considerando límite $x_1 \uparrow x_0$ y $x_2 \downarrow x_0$ se obtiene $f'_-(x_0) \leq m \leq f'_+(x_0)$, la diferenciabilidad en x_0 implica la unicidad de m, por lo tanto el soporte de A en x_0; es decir; que $m = f'(x_0)$, reescribiendo a $A(x)$,

$$A(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

□

1.1.2 Teorema del Sandwich

Dadas dos funciones definidas en un intervalo I tal que $f \leq g$. Un problema de interés es determinar si existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ que separe a f y a g, es decir tal que $f \leq h \leq g$. Existen situaciones donde este problema tiene respuesta negativa como son los casos que se muestran en las siguientes figuras (ver [10])

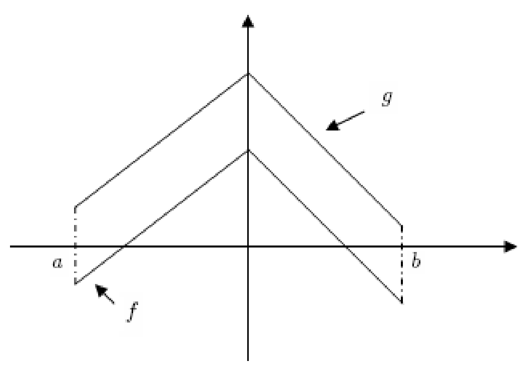


Figura 1.9:

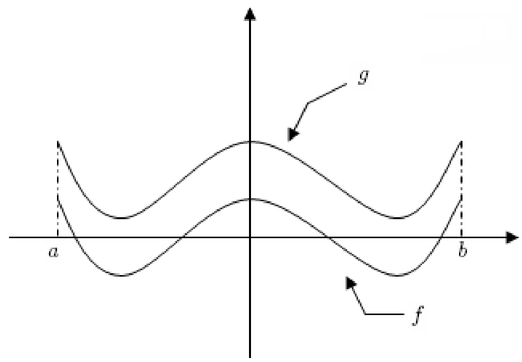


Figura 1.10:

Una situación como la mostrada en la Figura 1.9 ocurre cuando se considera $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 1 - |x|$ y $g(x) = 2 - |x|$. Si existiese $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ convexa tal que $f \leq h \leq g$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= f(0) = f(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1) \\
&\leq h(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}1) \\
&\leq \frac{1}{2}h(-1) + \frac{1}{2}h(1) \\
&\leq \frac{1}{2}g(-1) + \frac{1}{2}g(1) \\
&\leq \frac{1}{2}(-|-1| + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-|1| + \frac{1}{2}) \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción; por lo tanto, no existe una función convexa que separe a las funciones f y g. Por supuesto, también existen casos donde la función h existe, por ejemplo si f y g son convexas o en una situación como en la ilustrada en la Figura 1.11

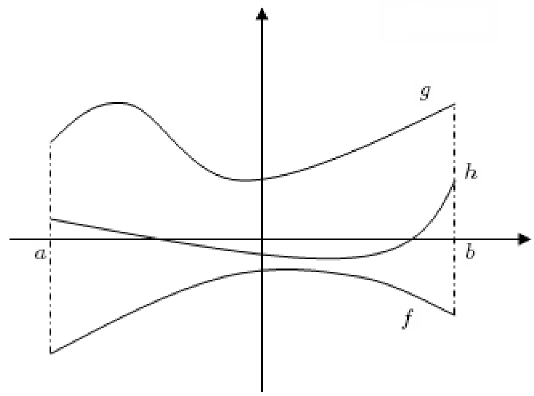


Figura 1.11:

La respuesta del problema que se plantearon fue dada por Karol Baron, Janusz Matkowski y Kazimierz Nikodem en el año 1994 [2], quienes dieron una caracterización de las funciones reales que pueden ser separadas por funciones convexas. Para detalles de la demostración se refiere al lector a [2].

Teorema 1.1.8 (ver [2]). *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales que satisfacen*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \quad x, y \in I, \quad t \in [0,1], \tag{1.10}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$ si y sólo si existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$f \leq h \leq g.$$

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 1.1.8 no puede ser generalizado para funciones definidas en un subconjunto convexo del plano (complejo).

Ejemplo 1.1.5 (Ver [27], [10]). *Sean $D \subset \mathbb{C}$ la bola abierta centrada en cero de radio dos y z_1, z_2, z_3 tres raíces (diferentes) de la unidad. Se definen las funciones $f, g : D \to \mathbb{R}$ por*

$$f(z) = \begin{cases} 0 & si\ z \neq 0, \\ 1 & si\ z = 0. \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} 0 & si\ z \in \{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3 & si\ z \in D \backslash \{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases}$$

se verá que se cumple (1.10). En primer lugar se considera

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \ y \ \ z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

así gráficamente se obtiene

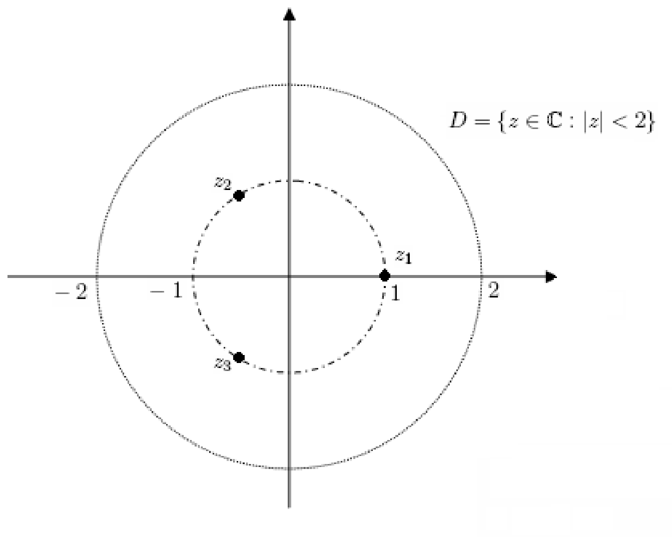


Figura 1.12:

Se puede observar que 0 *no es combinación convexa de dos raíces cúbicas de la unidad. En efecto, sean* $x, y \in D$ *y* $t \in (0, 1)$, *existen dos posibilidades*

1. $tx + (1-t)y = 0$,

2. $tx + (1-t)y \neq 0$.

En el primer caso $f(tx + (1-t)y) = 0$, *como* $tg(x) + (1-t)g(y)$ *es una combinación convexa de* $g(x), g(y) \in [0, 3]$, *resulta*

$$tg(x) + (1-t)g(y) \geq 0,$$

luego

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

En el segundo caso $x = \dfrac{t-1}{t}y$, $y = \dfrac{t}{1-t}x$ *y* $f(tx + (1-t)y) = 1$,

$$tg(x) = \begin{cases} 0 & si\, x \in \{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3t & si\, x \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases} \qquad (1-t)g(y) = \begin{cases} 0 & si\, y \in \{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3(1-t) & si\, y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases}$$

sumando ambas funciones, y considerando que x *y* y *no pueden ser ambas raíces cúbicas de la unidad, resulta que:*

$$tg(x) + (1-t)g(y) = \begin{cases} 3(1-t) & si\, x \in \{z_1, z_2, z_3\}, \quad y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3t & si\, y \in \{z_1, z_2, z_3\}, \quad x \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}, \\ 3 & si\, x, y \in D\backslash\{z_1, z_2, z_3\}. \end{cases}$$

Si $x^3 = 1$, *entonces*

$$2 \geq |y| = \frac{t}{1-t}|x| = \frac{t}{1-t}$$

que equivale a

$$3 - 3t = 3(1-t) \geq 1.$$

Si $y^3 = 1$, *entonces*

$$2 \leq |z| = \frac{1-t}{t}$$

y en consecuencia

$$3t \geq 1.$$

Por último si $x^3 \neq 1$ *y* $y^3 \neq 1$ *entonces* $f(tx + (1-t)y) = 1 \leq 3$. *Entonces* $f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$ *para todo* $x, y \in D$ *y* $t \in [0, 1]$ *para cualquier caso.*

Supóngase que existe una función convexa $h : D \to \mathbb{R}$ *que satisface que* $f \leq h \leq g$. *Entonces usando que* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, *por ser raíces de la unidad, se tiene que*

$$\begin{aligned} 1 = f(0) = f\left(\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\right) &\leq h\left(\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)\right) \\ &\leq \frac{1}{3}(h(z_1) + h(z_2) + h(z_3)) \\ &\leq \frac{1}{3}(g(z_1) + g(z_2) + g(z_3)) = 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. La contradicción viene de haber supuesto que existe una función convexa h que satisface que $f \leq h \leq g$.

Si f es una función real definida en I tal que f es convexa entonces se cumple que para todo $\varepsilon > 0$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x)(1-t)f(y) + \varepsilon, \;\; x, y \in I, \; t \in [0,1]. \tag{1.11}$$

Recíprocamente si f satisface (1.11) para todo $\varepsilon > 0$ entonces f es convexa.

Sin embargo, existen funciones que satisfacen (1.11) para algún numero positivo ε y esto es lo que se conoce como función ε-convexa realizada en [14] por el estadounidense Donald Hyers en el año 1941. De manera más formal:

Definición 1.1.5. *Sean f una función real definida en I y $\varepsilon > 0$. Se dice que f es ε-convexa si f satisface la desigualdad:*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon, \;\; x, y \in I, \; t \in [0,1].$$

Con el siguiente ejemplo se iludtra la definición 1.1.5 en forma explicita.

Ejemplo 1.1.6. *La función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = -x^2 + 1,$$

es 1-convexa, ya que el mayor valor que toma la expresión $f(tx+(1-t)y)$ es 1 y el menor valor de la expresión $tf(x) + (1-t)f(y) + 1$ es 1, luego

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + 1, \;\; x, y \in [-1,1], \; t \in [0,1].$$

En el año 1952, D. H. Hyers y S. M. Ulam demuestran en [15] que *si f es una función real definida en $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ε-convexa entonces existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x) - h(x)| \leq k_n\varepsilon, \;\; x \in I,$$

donde $k_n = (n^2 + 3n)/(4n + 4)$ *y* n *es la dimensión del espacio donde se encuentra el dominio.*

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema 1.1.8.

Corolario 1.1.2 (Ver [2]). *Sea* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función* ε*-convexa, entonces existe una función* $h : I \to \mathbb{R}$ *convexa tal que*

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I.$$

Demostración:

Se considera la función $g(x) = f(x) + \varepsilon$ y como f es una función ε-convexa se tiene

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \quad x, y \in I, \quad t \in [0,1],$$

entonces en virtud del Teorema 1.1.8 se sigue que existe una función convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq h(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) + \varepsilon,$$

restando $\dfrac{\varepsilon}{2}$ en ambos lados se obtiene

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq h(x) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir,

$$|h(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } x \in I.$$

$\square$

1.1.3 Desigualdad de tipo Jensen

En ésta sección se presentarán desigualdades que generalizan la desigualdad que aparece en la noción de función convexa, dadas por J. W. Jensen en [17] y [18] en el año 1905 y 1906 respectivamente.

Teorema 1.1.9 (Ver [17], [18]). *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i),$$

para todo $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, $t_1, ..., t_n > 0$ tales que $t_1 + ... + t_n = 1$ y $\bar{x} = t_1x_1 + ... + t_nx_n$.

Demostración:

Se fija $x_1, ..., x_n \in I$ y $t_1, ..., t_n > 0$ tales que $t_1 + ... + t_n = 1$. Sea $\bar{x} = t_1x_1 + ... + t_nx_n$ y se considera una función $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = a(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$, donde g satisface que $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ y $g(x) \leq f(x),\ \ x \in I$.

Entonces, para todo $i = 1, ..., n$, se obtiene que

$$f(x_i) \geq g(x_i) = a(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x}),$$

multiplicando ambos lados por t_i y aplicando sumatoria se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq a \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq f(\bar{x}),$$

$\square$

Acontinuación se enuncia y demuestra un Teorema análogo al Teorema 1.1.9 , relativo a la forma integral de la desigualdad de Jensen.

Teorema 1.1.10 (Ver [21]). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida de probabilidad, I un intervalo abierto y $\varphi : X \to I$ una función integrable Lebesgue. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa,entonces*

$$f\left(\int_X \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x)) d\mu.$$

Demostración:

Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función de la forma $g(x) = a(x - m) + f(m)$ que soporta a f en m e integrando sobre X en ambos lados de la desigualdad $f(\varphi(x)) \geq g(\varphi(x))$, para todo $x \in X$.

$$\begin{aligned}
\int_X f(\varphi(x))d\mu &\geq \int_X g(\varphi(x))d\mu \\
&= \int_X a(\varphi(x) - m)d\mu + \int_X f(m)d\mu \\
&= a\int_X (\varphi(x) - m)d\mu + f(m)\int_X d\mu,
\end{aligned}$$

usando el hecho de que X es un espacio de probabilidad, entonces $\int_X d\mu = 1$

$$\begin{aligned}
\int_X f(\varphi(x))d\mu &\geq a\left(\int_X \varphi(x)d\mu - m\int_X d\mu\right) + f(m) \\
&= a(m - m) + f(m) \\
&= f(m),
\end{aligned}$$

reescribiendo la última desigualdad y sustituyendo $m = \int_X \varphi(x)d\mu$

$$f\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x))d\mu.$$

$\square$

Para cerrar esta sección se dará un ejemplo que ayuda a ilustrar el Teorema 1.1.10.

Ejemplo 1.1.7. *Sean $\varphi : E \to [0, +\infty)$ y $f(t) := t^p$ con $p \geq 1$. Entonces*

$$\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right)^p \leq \int_X (\varphi(x))^p d\mu,$$

siempre que las integrales existan. Como los integrandos son positivos, es claro que bastará suponer que φ es integrable y $(\varphi(x))^p$ medible, para evitar integrales infinitas.

1.1.4 Desigualdad de tipo Hermite-Hadamard

Uno de los resultados más fundamentales que se deducen de la noción de funciones convexas es la siguiente desigualdad. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa entonces la función f satisface la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\, ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1.12}$$

para todo $x, y \in I,\ \ x < y$. El lado izquierdo de (1.12) fue demostrado por Jaques Hadamard en 1893 antes de que las funciones convexas fuesen formalmente introducidas. Para funciones con derivadas crecientes en un intervalo cerrado, es algunas veces llamada desigualdad de Hadamard y el lado derecho la desigualdad de Jensen. En 1985, D. S. Mitrinović y I. B. Lacković en [22] señalan que la desigualdad (1.12) es debido a Charles Hermite quien la obtiene en los años 1883, diez años antes que Hadamard.

Esta desigualdad clásica de Hermite-Hadamard juega un rol importante en el análisis de la convexidad y tiene una amplia literatura que trata sus aplicaciones, generalizaciones y refinamientos (para más detalles ver [9], [24], [6] y sus referencias). También se conoce que si f es continua, entonces la desigualdad de Hermite-Hadamard caracterizan la convexidad de f.

Teorema 1.1.11 (Ver [11])**.** *Si una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa entonces*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\, ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1.13}$$

para todo $x, y \in\ I,\ \ x < y$. Inversamente, si f es continua y satisface el lado derecho o izquierdo de (1.13) para todo $x, y \in I,\ \ x < y$, entonces es convexa.

Demostración:

El lado derecho de (1.13) se obtiene de integrar la desigualdad (1.2) en el intervalo

[0,1] con respecto a t, tal como sigue:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\ dt &\leq \int_0^1 tf(x)\ dt + \int_0^1 (1-t)f(y)\ dt\\ &\leq \frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}\\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2}.\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $s = tx+(1-t)y$ en la integral

$$\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\ dt = \frac{1}{x-y}\int_y^x f(s)\ ds,$$

se obtiene el lado derecho la desigualdad (1.13)

$$\frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\ ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Por otra parte, para demostrar el lado izquierdo de la desigualdad (1.13) se realiza la siguiente transformación

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\ ds &= \frac{1}{x-y}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s)\ ds + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s)\ ds\right)\\ &= \frac{1}{x-y}\left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(s_1)\ ds_1 + \int_{\frac{x+y}{2}}^y f(s_2)\ ds_2\right).\end{aligned}$$

Haciendo los siguientes cambios de variables

$$s_1 = \frac{x+y-t(x-y)}{2} \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{x+y+t(x-y)}{2},$$

en la desigualdad anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right)+f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right)\right]\ dt,$$

ahora usando la convexidad de la función se llega a la desigualdad

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{x+y-t(x-y)}{2}\right)+f\left(\frac{x+y+t(x-y)}{2}\right)\right]\ dt \geq & \int_0^1 f\left(\frac{x+y}{2}\right)\ dt\\ =& \ f\left(\frac{x+y}{2}\right),\end{aligned}$$

se obtiene el lado izquierdo la desigualdad (1.13)

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ \leq \ \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\, ds.$$

$\square$

Acontinuación se dará varios ejemplos para ilustrar el poder de la desigualdad de Hermite-Hadamard:

Ejemplo 1.1.8. *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)}$, *con* $x \geq 0$. *Sustituyendo en (1.13) se obtiene*

$$\frac{2x}{2+x} \ < \ \ln(1+x) \ < \ \frac{x^2+2x}{2x+2}.$$

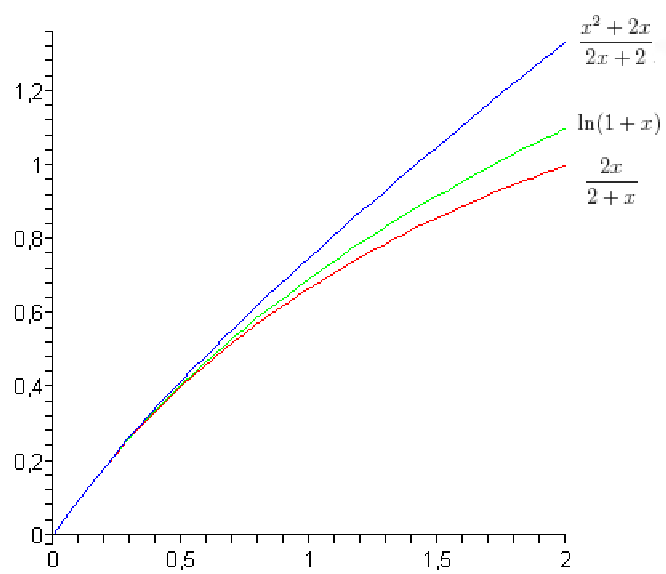


Figura 1.13:

Particularmente,

$$\frac{1}{n+1/2} \ < \ \ln(n+1)-\ln(n) \ < \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ *en el intervalo* $(n-1, n)$.

Ejemplo 1.1.9. *Sea $f(x) = e^x$, con $x \in \mathbb{R}$. Sustituyendo $f(x)$ en la desigualdad (1.13) se obtiene*

$$e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^b - e^a}{b-a} < \frac{e^b + e^a}{2} \quad para\ a \neq b \in \mathbb{R},$$

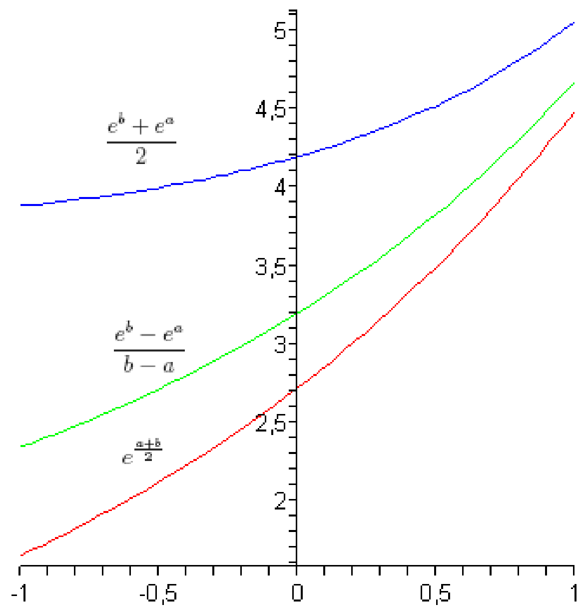


Figura 1.14:

y si se hace un cambio de variable $a = \ln(y)$ y $b = \ln(x)$ queda de la siguiente manera,

$$\sqrt{xy} < \frac{x-y}{\ln(x) - \ln(y)} < \frac{x+y}{2} \quad para\ x \neq y \in (0, \infty),$$

Ejemplo 1.1.10. *Dada $f(x) = sen(x)$, con $x \in (0, \pi)$, se obtiene*

$$\frac{sen(a) + sen(b)}{2} < \frac{cos(a) - cos(b)}{b-a} < sen\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

y esto implica la conocida desigualdad $tan(x) > x > sen(x)$ (para $x \in [0, \pi/2]$).

1.1.5 Funciones Aditivas y Funciones Midconvexas

En esta sección se presentan las definiciones de función aditiva y función midconvexa. Se demostrará que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua aditiva entonces es lineal y toda función midconvexa y continua es convexa. Para mayor detalle se refiere al lector a [19].

Definición 1.1.6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que la función f es aditiva si satisface la ecuación de Cauchy*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1.14}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

La siguiente proposición es una consecuencia de la Definición 1.1.6 para n puntos de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.1.2 (Ver [33])**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función aditiva entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{1.15}$$

para cada $n \in N$ y para cualesquiera $x_1, x_2, ...x_n \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Si $n = 2$ se obtiene la igualdad (1.14) que es la definición de función aditiva.

Supóngase que la igualdad (1.15) es cierta para $n-1$ sumandos y se demuestra que también es cierta para n. En efecto:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &= f\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \end{aligned}$$

$\square$

Los dos siguientes Teoremas se caracterizan por ser las soluciones de la ecuación de Cauchy.

Teorema 1.1.12 (Ver [33]). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface la ecuación de Cauchy. Entonces,*

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Demostración:

Para $x = y = 0$ se tiene de (1.14) que

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

es decir

$$f(0) = 2f(0),$$

donde

$$f(0) = 0.$$

Por otra parte

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x),$$

lo cual es equivalente a

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, f es una función impar.

Considerando $x_1 = ... = x_n = x$ y (1.15) se obtiene

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x),$$

por lo tanto

$$f(nx) = nf(x)$$

Ahora bien, si $\lambda \in \mathbb{Z}$ se tiene para $\lambda \geq 0$ que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

y si $\lambda < 0$, como $-\lambda > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f((-\lambda)(-x)) = -\lambda f(-x) \\ &= -\lambda(-f(x)) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

En los dos casos, si $\lambda \in \mathbb{Z}$ entonces

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Dado que para cualquier caso $\lambda \in \mathbb{Q}$ existen $k \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\lambda = k/m$ se obtiene que $kx = m(\lambda x)$ y por consecuencia

$$kf(x) = f(kx) = f(m(\lambda x)) = mf(\lambda x),$$

de donde $f(\lambda x) = \dfrac{k}{m} f(x) = \lambda f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$.

$\square$

El siguiente Teorema se demuestra que toda solución de la ecuación de Cauchy es lineal cuando la función además de aditiva es continua.

Teorema 1.1.13 (Ver [34])**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función aditiva y continua. Entonces*

$$f(x) = f(1)x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}$ y se considera una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \leq 1}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = x,$$

y $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f(\lambda_n) = f(1\lambda_n) = f(1)\lambda_n.$$

Considerando el limite cuando $n \to \infty$ y usando la continuidad de f, se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(1)\lambda_n = f(1) \lim_{n\to\infty} \lambda_n \\ &= f(1)x. \end{aligned}$$

Es decir $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

□

A continuación se presenta el concepto de función midconvexa dado por J. L. W. Jensen en 1905 [18], estas funciones también son conocidas como funciones convexas en el punto medio o también funciones Jensen-convexas (ver [18], [33] y [34]).

Definición 1.1.7. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice midconvexa (o convexa en el punto medio) si y solo si satisface la desigualdad*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1.16}$$

para todo $x, y \in I$. Si la desigualdad es estricta para $x \neq y$, f es llamada estrictamente midconvexa.

Obsérvese que de acuerdo con la definición, toda función convexa es midconvexa. El recíproco en general no es cierto, sin embargo se verá que bajo ciertas condiciones, ambas definiciones son equivalentes.

En primer lugar se obtiene que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función aditiva entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

es decir, toda función aditiva es midconvexa.

El siguiente teorema es una consecuencia de la Definicion 1.1.7 para n puntos del intervalo I.

Teorema 1.1.14 (Ver [33]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Entonces*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)), \tag{1.17}$$

para todo entero positivo n y cualesquiera $x_i \in I$, i=1,...,n.

Demostración:

Si $n = 2$ la desigualdad (1.17) es la definición de función midconvexa. Supóngase que la relación es cierta para $n = 2^m$ tal que $m \in \mathbb{N}$, se demostrará que también es cierta para $n = 2^{m+1}$. En efecto, sean

$$x' = \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i,\ x'' = \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i,$$

entonces

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=1}^{2^m} x_i + \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i + \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right)\right) \\
&= f\left(\frac{1}{2}(x' + x'')\right) = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right).
\end{aligned}$$

Usando la midconvexidad de f y la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{x' + x''}{2}\right) &\leq \frac{f(x') + f(x'')}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i\right) + f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} f(x_i) + \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} f(x_i)\right) \\
&= \frac{1}{2^{m+1}}\left(\sum_{i=1}^{2^m} f(x_i) + \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} f(x_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i),
\end{aligned}$$

lo que implica que si $n = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f(x_i).$$

Ahora se verá el caso en que n no es de esta forma, es decir $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario $(n > 2)$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < 2^m$. Definiendo

$$y = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

se considera

$$y = \frac{(x_1 + \cdots + x_n) + (2^m - n)y}{2^m} = \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2^m} y\right)$$

y por la primera parte de la demostración se tendrá que

$$\begin{aligned}
f(y) &= f\left(\frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2^m} y\right)\right) \\
&\leq \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=n+1}^{2^m} f(y)\right) \\
&= \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^m - n)f(y)\right)
\end{aligned}$$

es decir,

$$2^m f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^m - n)f(y),$$

de donde

$$nf(y) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

y por consiguiente

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

con lo que concluye la demostración.

□

Una vez expuesto este resultado se tiene las condiciones para demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 1.1.15 (Ver [34]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa entonces*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1.18}$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Demostración:

Sea $\lambda = k/n$ donde $k \in \{0,1,2,...,n\}$ y $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. De acuerdo con la desigualdad (1.17) se tiene que para todo $x, y \in I$ se verifica

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right)y\right) &= f\left(\frac{kx + (n-k)y}{n}\right) \\ &\leq \frac{kf(x) + (n-k)f(y)}{n} \\ &= \frac{k}{n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)f(y), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

□

Se finaliza esta sección con el siguiente Teorema, el cual establece que toda función midconvexa y continua es convexa.

Teorema 1.1.16 (Ver [34]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa y continua, entonces f es una función convexa.*

Demostración:

Sean $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ y $\{\lambda_n\}_{n \leq 1}$ una sucesión de números racionales pertenecientes al intervalo cerrado $[0,1]$ ($\lambda_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$) que converge a λ.

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Entonces, por el Teorema 1.1.15, se obtiene que

$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y).$$

Utilizando esto y el hecho de que f es una función continua se obtiene

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lim_{n\to\infty} \lambda_n x + (1 - \lim_{n\to\infty} \lambda_n)y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

Es decir

$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y).$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0,1]$.

□

A continuación se presenta un conjunto de resultados que nos garantizan que una función midconvexa es continua y como consecuencia del Teorema 1.1.16 convexa, pero antes se demuestra un Lema que nos será de gran utilidad y en el que se imponen condiciones a una función midconvexa para que sea localmente acotada en su dominio.

Lema 1.1.1 (ver [33]). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Si una función midconvexa $f : I \to \mathbb{R}$ es acotada superiormente en un entorno de un punto de I^0, entonces f es localmente acotada, es decir, para cada $x \in I$ existe un entorno sobre el cual f es acotada.*

Demostración:

Supóngase sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y $f(0) = 0$, en caso contrario se considera $g : (I - x_0) \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) := f(x + x_0) - f(x_0)$$

lo cual es una función midconvexa.

Primero se demostrará que si f es acotada superiormente en $(-r, r) \subset I^0$ por M tal que $r > 0$, entonces es acotada inferiormente en $(-r, r)$ y así f es acotada en $(-r, r)$.

Sea $x \in (-r, r)$, entonces

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x).$$

Por hipótesis f es midconvexa y $f(0) = 0$, luego

$$0 = f(0) = f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)) \leq \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

Así, $f(x) \geq -f(-x),\ x \in (-r, r)$.

Ahora bien si $x \in (-r, r)$, entonces $-x \in (-r, r)$ y como f es acotada superiormente en $(-r, r)$, $f(-x) \leq M$, se ontiene $f(x) \geq -f(-x) \leq -M$ y por lo tanto f es acotada inferiormente en $(-r, r)$.

Se demostrará que f es localmente acotado en I. Sean $z \in I$ con $z \neq 0$ y $\lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tales que $\lambda z \in [0, 1]$ y considera el entorno de z y radio $\delta := (1 - \lambda)r$, es decir, $(z - \delta, z + \delta) = (1 - \lambda)(-r, r) + z$.

Sea $u \in (z - \delta, z + \delta)$ entonces existe $x \in (-r, r)$ tal que $u = (1 - \lambda)x + z$, donde $\lambda \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Como f es midconvexa y acotada en $(-r, r)$, entonces

$$f(u) = f\left((1 - \lambda)x + \frac{\lambda}{\lambda}z\right) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f\left(\frac{z}{\lambda}\right) \leq M + f\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

Así f es acotada superiormente en $(z-\delta, z+\delta)$ y por lo tanto es acotada en $(z-\delta, z+\delta)$, luego es localmente acotada en D.

$\square$

En el año 1915 los alemanes Felix Bernstein y Gustav Doetsh demuestran en [5] que si $f : I^0 \to \mathbb{R}$ es midconvexa y acotada superiormente sobre un entorno de $x_0 \in I^0$ entonces f es continua sobre I^0.

Teorema 1.1.17 (**Bernstein-Doetsch** [5], [31])**.** *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es acotada superiormente en un entorno de un punto $x_0 \in I^0$ entonces f es continua en I.*

Demostración:

Sin pérdida de generalidad se supondra que $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ y además que f es acotada superiormente por M en el entorno $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I^0$.

Sean $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $x \in I$ tal que $|x| < \varepsilon r$. Como $x = (1 - \varepsilon)0 + \varepsilon\dfrac{x}{\varepsilon}$ resulta de la midconvexidad de f la siguiente estimación

$$f(x) \leq (1 - \varepsilon)f(0) + \varepsilon f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \varepsilon M.$$

Por otra parte, como $0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\left(\frac{-x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon+1}x$ y f es midconvexa se obtiene:

$$0 = f(0) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} f\left(\frac{-x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon+1} f(x)$$

$$0 \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} M + \frac{1}{\varepsilon+1} f(x)$$

luego $-\varepsilon M \leq f(x)$.

Por lo tanto, si $|x| < r\varepsilon$ entonces $|f(x)| \leq \varepsilon M$, obteniéndose la continuidad de f en 0.

Hasta aquí se ha demostrado que si $f : I \to \mathbb{R}$ es midconvexa y acotada superiormente en un entorno de x_0 entonces es continua en x_0.

En virtud del Lema 1.1.1 se obtiene que si f es acotada superiormente en un entorno de un punto x_0, entonces es localmente acotada en todo su dominio, en consecuencia f es continua sobre I.

$\square$

A continuación se expondra un Lema que nos permitirá demostrar dos resultados en los cuales se dan condiciones más débiles para que una función midconvexa sea continua.

Lema 1.1.2 (**Steinhaus** [19]). *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos arbitrarios tal que $\mu_i(A) > 0$, $\mu_i(B) > 0$ donde $\mu_i(A) = \sup\{\mu(F) : \ F \subset A, \ F \text{ es cerrado}\}$ y μ es la medida de Lebesgue. Entonces*

$$int(A + B) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Como $\mu_i(A) > 0$ y $\mu_i(B) > 0$ entonces existen compactos $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$ tales que $\mu(A_1) > 0$ y $\mu(B_1) > 0$, por esta razón se supone que A y B son compactos.

Se define para cada $r \in \mathbb{R}^n$ la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$h(t) = \mu(A \cap B_t) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \, 1_{B_t} dx,$$

donde $B_t = t - B$ se puede demostrar que h en $\mathbb{R}^n$ usando la desigualdad siguiente:

$$|h(t+a) - h(t)| = |\mu(A \cap B_{t+a}) - \mu(A \cap B_t)| \leq \mu(B_{t+a} \div B_t) < \varepsilon$$

Por otra parte en virtud del Teorema de Fubbini:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(u)du \right) dx = \mu(A)\mu(B) > 0$$

como h es continua y $\int_{\mathbb{R}^n} h(t)dt > 0$ entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(t_0) > 0$, y como h es continua existe $B_r(t_0)$ entonces $\mu(A \cap B_t) > 0$ y así $A \cap B_t$ y eso incluye que $B_r(t_0) \subset A + B$, por lo tanto $int(A + B) \neq \emptyset$.

Para mayor detalle de la demostración se refiere al lector a [19].

$\square$

En el año 1929, El Ucraniano Alexander Markowich Ostrowski demostró en [28] el siguiente resultado si $f : I \to \mathbb{R}$ es midconvexa y existe un conjunto con medida de Lebesgue positiva $M \subset I$ sobre el cual f es continua en I. Se presenta acontinuación una versión de este teorema valiéndonos del Lema de Steinhaus 1.1.2.

Teorema 1.1.18 (**Ostrowski** [28]). *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es una función acotada superiormente en I y $\mu(I) > 0$, entonces f es una función continua en I*

Demostración:

Sean $x, y \in I$ y supongase que f es acotada por arriba en I por M, como f es midconvexa se obtiene

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq M,$$

así f es acotada sobre $I + I/2$. Por otro lado $\mu\left(\frac{I}{2}\right)$ y en virtud del Lema de Steinhaus 1.1.2 se tiene que $int\left(\frac{I+I}{2}\right) \neq \emptyset$, luego por el Teorema de Bernstein-Doetsh 1.1.17 se obtiene que f es continua sobre I.

$\square$

En el año 1920, el polaco Wacław Sierpiński en [35] demuestra el siguiente resultado: Si $f : I \to \mathbb{R}$ es midconvexa y medible entonces es continua sobre I.

Teorema 1.1.19 (**Sierpiński** [35]). *Sean I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función midconvexa. Si f es una función medible entonces es continua sobre I.*

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define el conjunto

$$L_n = \{x \in I : \; f(x) \leq n\},$$

este conjunto es medible, pues $L_n = f^{-1}((-\infty, n]), \; n \geq 1$.

Por otra parte

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((-\infty, n]) = f^{-1}(\mathbb{R}) = I$$

Como I es abierto, entonces $\mu(I) > 0$ y por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(L_n) > 0$.

Por el Lema de Steinhaus 1.1.2

$$int\left(\frac{L_n + L_n}{2}\right) \neq \emptyset.$$

Se elige $z \in \dfrac{L_n + L_n}{2}$ y en consecuencia, por el Teorema de Bernstein-Doetsch 1.1.17 resulta que f es continua.

□

La hipótesis de que I sea abierto es condición necesario para la validez del teorema anterior. Por ejemplo:

Ejemplo 1.1.11. *Si $n = 1, \; I = [-1, 1]$ y $f : I \to \mathbb{R}$ está definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \;\; x \in (-1, 1), \\ 2 & si \;\; x = |1|, \end{cases}$$

entonces f satisface el Teorema 1.1.19 en $[-1, 1]$, es medible y acotada en I, pero es discontinua en 1 y -1.

1.1.6 Funciones Convexas Generalizadas

Una forma de generalizar el concepto de una función convexa, fue introducido por el estadounidense Edwin Beckenbach [3] en 1937, reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas pertenecientes a una familia $\mathcal{F}$ de funciones de dos parámetros. Las funciones convexas generalizadas son obtenidas de muchas de las propiedades conocidas para la función convexa clásica (Ver [3], [6], [27], [31]). Su definición fue motivada al considerar la clase de funciones de una variable real definida de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones reales continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia de dos parámetros si para los puntos $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in I \times \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ existe exactamente una $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi(x_i) = y_i \ \text{ para } \ i = 1, 2.$$

La única función $\varphi \in \mathcal{F}$ definida por los puntos $a = (x_1, y_1),\ b = (x_2, y_2)$ se denota por $\varphi_{(x_1,y_1),\,(x_2,y_2)}$.

Definición 1.1.8. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es convexa con respecto a $\mathcal{F}$ (brevemente, $\mathcal{F}$-convexa) si para todo $x_1, x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2$*

$$f(x) \leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(x) \ \ \textit{para todo} \ \ x \in [x_1, x_2].$$

La definición anterior es motivada por considerar la clase

$$\mathcal{F} = \{ax + b : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}$ es una familia de dos parámetros y $\mathcal{F}$-convexidad coincide con la convexidad clásica, como lo muestra la Figura 1.15.

Definición 1.1.9 (Ver [4] y [31])**.** *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es midconvexa con respecto a $\mathcal{F}$ (brevemente, $\mathcal{F}$-midconvexa) si para todo $x_1, x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2$*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ \ \textit{para todo} \ \ x \in [x_1, x_2].$$

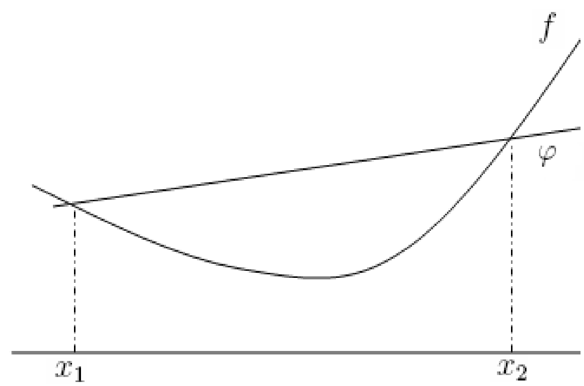


Figura 1.15:

Teorema 1.1.20 (Ver [31]). *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si f es $\mathcal{F}$-convexa.*

Demostración:

Fijando $x_1, x_2 \in I$ y considerando $\varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))} \in \mathcal{F}$, se tiene que $\varphi(x) = ax + b$, donde los coeficientes son determinados únicamente por las condiciones $\varphi(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2$. Por consiguiente, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene

$$\begin{aligned}\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &= a(tx_1 + (1-t)x_2) + b \\ &= atx_1 + a(1-t)x_2 + b + bt - bt \\ &= t(ax_1 + b) + (1-t)(ax_2 + b) \\ &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2).\end{aligned}$$

Como, si f es $\mathcal{F}$-convexa, entonces

$$\begin{aligned}f(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1 + (1-t)x_2) \\ &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2),\end{aligned}$$

lo que significa que f es convexa.

Inversamente, si f es convexa, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\ &= \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1 + (1-t)x_2), \end{aligned}$$

lo que demuestra que f es $\mathcal{F}-$convexa.

$\square$

Ahora consideredo una función f es $\mathcal{F}$-convexa para alguna familia $\mathcal{F}$. Se iniciara con el tema de continuidad de funciones convexas y midconvexa. Los tres primeros teoremas se deben a Beckenbach y Bing en 1945.

Teorema 1.1.21 (Ver [31])**.** *Si f es $\mathcal{F}$-convexa en (a,b), entonces f es continua en (a,b).*

Este Teorema claramente extiende el Teorema 1.1.1 para generalizar funciones convexas y los dos Teoremas siguientes similarmente extiende los Teoremas de Bernstein-Doetsch (1.1.17) y Ostrowski (1.1.18).

Teorema 1.1.22 (Ver [31])**.** *Si f es $\mathcal{F}$-midconvexa en (a,b) y es acotada superiormente en cualquier subintervalo de (a,b) entonces f es continua en (a,b).*

Teorema 1.1.23 (Ver [31])**.** *Si f es $\mathcal{F}$-midconvexa y es acotada superiormente en $E \subset (a,b)$ de medida positiva, entonces f es continua en (a,b).*

1.2 Conceptos Básicos de Teoría de la Medida

En está sección se presentará definiciones y ejemplos de teoría de la Medida que nos sirven para llegar a la construcción de la integral de Lebesgue que más adelante la se utilizará para presentar las propiedades de las funciones fuertemente convexas en los próximos capítulos.

Definición 1.2.1. *Sea X un conjunto no vacío y Σ una colección de subconjuntos de X. Se dice que Σ es una σ-álgebra en X si sólo si*

1. *El conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a Σ.*
2. *Si $E \in \Sigma$, su complemento $E^c = X \backslash E$ también pertenece a Σ.*
3. *La unión de conjuntos numerables $E_1, E_2, E_3, ...,$ de Σ también pertenece a Σ.*

Ejemplo 1.2.1. *Dado el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$, una posible σ-álgebra sería*

$$\Sigma = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

En primer lugar, los elementos de Σ son diferentes subconjuntos de X, entre los cuales está el conjunto vacío (condición 1). En segundo lugar, los complementos de cada uno de los elementos de Σ también pertenecen a Σ (condición 2):

$$\emptyset^c = X = \{a, b, c, d\} \in \Sigma,$$

$$\{a, b\}^c = \{c, d\} \in \Sigma,$$

$$\{c, d\}^c = \{a, b\} \in \Sigma$$

y

$$X^c = \emptyset \in \Sigma.$$

Es fácil comprobar que la tercera condición se cumple, puesto que todas las posibles uniones de elementos de Σ pertenecen a Σ, por ejemplo

$$\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\} = X \in \Sigma.$$

Los elementos de la σ-álgebra se denominan conjuntos Σ-medibles (o simplemente conjuntos medibles). Un par ordenado (X, Σ), donde X es un conjunto y Σ es una $\sigma-$álgebra sobre X, es un espacio medible.

Definición 1.2.2. *Sean $X \neq \emptyset$ y Σ una σ-álgebra sobre X. El par (X, Σ) se llama espacio medible.*

Es importante no confundir este término con el relacionado espacio de medida. Un espacio de medida consiste en un espacio medible dotado de una medida μ.

Definición 1.2.3. *Sea $A \subseteq X$, A es un conjunto medible Lebesgue si para cada entero positivo n el conjunto acotado $A \cap [-n, n)$ es un conjunto medible Lebesgue. La medida de Lebesgue es*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [-n, n)).$$

Definición 1.2.4 (Integral de Lebesgue)**.** *El procedimiento para la construcción de la Integral de Lebesgue se inicia realizando una partición en el rango de valores de la función f:*

1. *Se realiza una partición finita del intervalo $[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$ en n subintervalos $[y_{i-1}, y_i]$, $\pi : \min_{x\in[a,b]} = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, de longitudes respectivas $\Delta_i \equiv \Delta_i([y_{i-1}, y_i]) = y_i - y_{i-1}$, $i \in I = 1, 2, ..., n$.*
2. *Se define $|\pi| = \sup_{i\in I} |\Delta_i| = \sup_{i\in I} |y_i - y_{i-1}|$.*
3. *Se plantea medir las bases de los rectángulos definidos por esas alturas*

   $$\Delta_i = y_i - y_{i-1} \ \text{tal que} \ y_{i-1} \leq f(x) < y_i,$$

   se define $B_i =$ conjunto de puntos X para los que $f(x)$ pertenece a

   $$[y_{i-1}, y_i) = \{x \in [a, b] / f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\} \subset [a, b], \ i \in I$$

   y $\mu(B_i)$ es la medida del conjunto B_i.
4. *Se contruye la suma $\sum_{i\in I} \underset{x\in B_i}{f_i(x)}\, \mu(B_i)$.*
5. *Se considera, el limite $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{i\in I} f_i(x)\mu(B_i) = \int_{[a,b]} f\, dx \equiv$ Integral de Lebesgue.*

Definición 1.2.5. *Sean (Ω, Σ) un Espacio Medible arbitrario que cumple que $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\Omega) = 1$, de tal modo que a la terna (Ω, Σ, μ) se le denomina un Espacio de Medida de Probabilidad o simplemente un Espacio Probabilístico.*

Luego fue generalizado por varios autores como Kuczman, Kurepa, Sander entre otros (ver [19] para más detalles).

CAPÍTULO 2

FUNCIONES FUERTEMENTE CONVEXAS

En el año 2011, Nelson Merentes y Kazimierz Nikodem en [21] exponen propiedades de funciones fuertemente convexas, el cual es una generalización de las funciones convexas expuestas en el capitulo anterior. Primero, se caracterizarán las funciones reales definidas en I; los cuales pueden ser separas por una función fuertemente convexa con módulo c. Luego, se demostrará una contraparte de las desigualdades clásica de Jensen y Hermite-Hadamard. Finalmente, se demuestra que la convexidad fuerte es equivalente a la convexidad generalizada en el sentido de Beckenbach con respecto a una cierta familia de dos parámetros.

2.1 Funciones Fuertemente Convexas

Las funciones fuertemente convexas fueron introducidas en 1966 por el ruso Teodorovich Polyak [30]; quien las utilizó para demostrar la convergencia de un algoritmo de tipo gradiente para minimizar una función. Estas funciones juegan un papel importante en la teoría de la optimización y economía matemática (desarrollo de la matemática en la economía). Muchas propiedades y aplicaciones de ellas se pueden encontrar en la literatura (véase, por ejemplo [13], [21], [26], [30], [31]).

Definición 2.1.1. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $c > 0$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama fuertemente convexa con módulo c si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \tag{2.1}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$.

A continuación se da una interpretación geométrica de las funciones fuertemente convexas con módulo c.

Para $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios y $c > 0$ fijo, se considera la función

$$h(x) = cx^2 + ax + b,$$

para $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ y $t \in (0, 1)$ en la Figura 2.1 se puede ver que la curva h en el intervalo (x_1, x_2) está siempre por debajo de la recta $th(x_1) + (1-t)h(x_2)$ la cual une los puntos $(x_1, h(x_1))$ y $(x_2, h(x_2))$. Por otra parte, la igualdad

$$th(x_1) + (1-t)h(x_2) - h(tx_1 + (1-t)x_2) = ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2,$$

es independiente de a y b (porque, geométricamente, se pueden trasladar las figuras y el resultado sigue siendo el mismo).

$$\begin{aligned}
th(x_1) + (1-t)h(x_2) - h(tx_1 + (1-t)x_2) = {} & t(cx_1^2 + ax_1 + b) + (1-t)(cx_2^2 + ax_2 + b) \\
& -c(tx_1 + (1-t)x_2)^2 - a(tx_1 + (1-t)x_2) - b \\
= {} & tcx_1^2 + tax_1 + tb + cx_2^2 + ax_2 + b - tcx_2^2 \\
& -tax_2 - tb - ct^2x_1^2 - c(1-t)^2x_2^2 \\
& -2ct(1-t)x_1x_2 - atx_1 - ax_2 + atx_2 \\
= {} & cx_1^2(t - t^2) - 2ct(1-t)x_1x_2 \\
& + cx_2^2(1 - t - (1-t)^2) \\
= {} & ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2
\end{aligned}$$

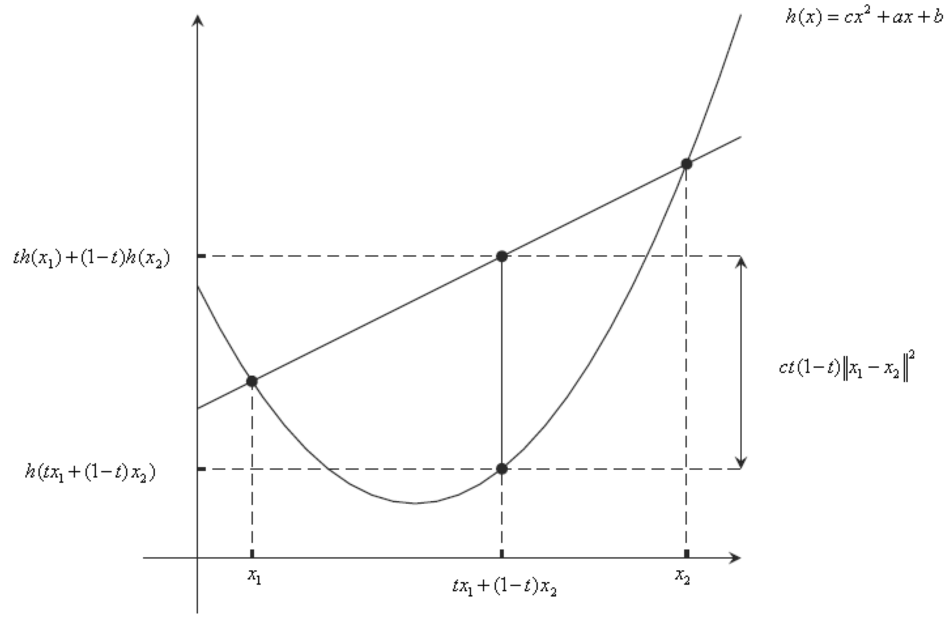


Figura 2.1: Interpretación geométrica de $ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2$

Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una función fuertemente convexa con módulo c. Se elige las constantes a y b tales que para $h(x) = cx^2 + ax + b$ se tiene que $h(x_1) = \varphi(x_1)$ y $h(x_2) = \varphi(x_2)$. Usando la interpretación obtenida de la Figura 2.1 se puede ver fácilmente que

$$ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2 = th(x_1) + (1-t)h(x_2) - h(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Luego por la desigualdad (2.1) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &\geq ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2 \\ &= th(x_1) + (1-t)h(x_2) - h(tx_1 + (1-t)x_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

por lo tanto

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \leq h(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Así para $t \in (0,1)$ se considera $x_0 = tx_1 + (1 - tx_2) \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\varphi(x_0) \leq h(x_0).$$

La interpretación geométrica de esta desigualdad puede observarse en la Figura 2.2: la gráfica de una función fuertemente convexa (con módulo c) está por debajo de la gráfica $h(x) = cx^2 + ax + b$ en los puntos $x_1, x_2 \in I$. Esto también muestra las conexiones entre la convexidad fuerte y convexidad generalizada en el sentido de Beckenbach (ver [3]): cualquier función fuertemente convexa con módulo c es convexa con respecto a una familia de dos parámetros de funciones cuadráticas $\mathcal{F}_c = \{cx^2 + ax + b, \ \ a, b \in \mathbb{R}\}$ que se estudiará en el próximo capítulo.

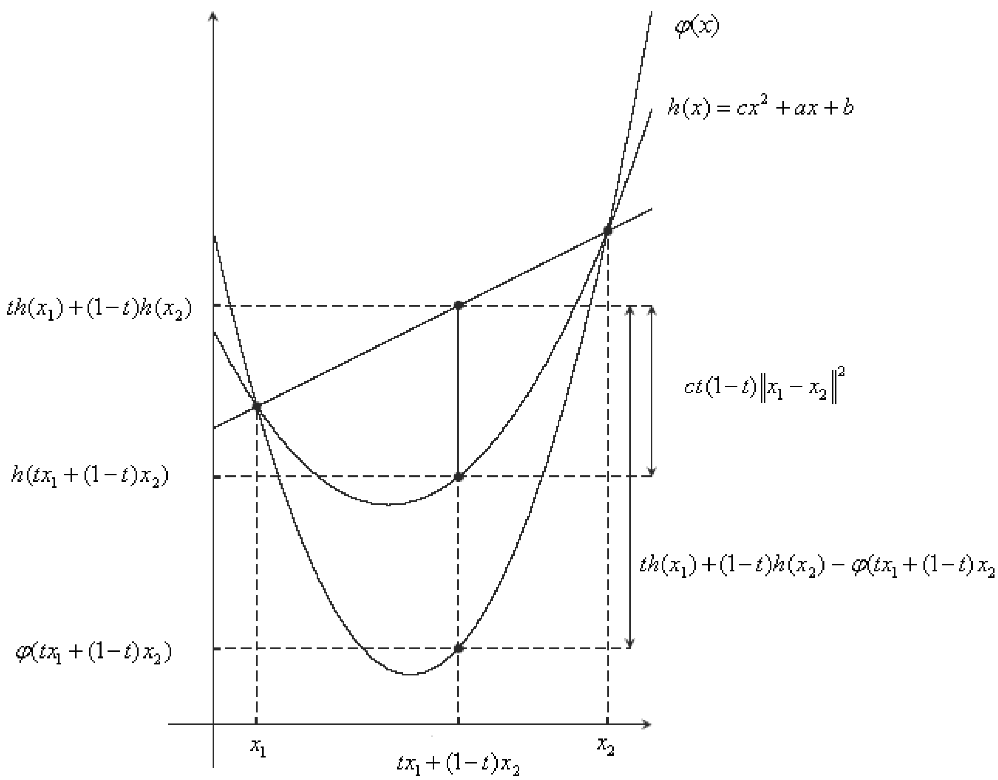


Figura 2.2: Interpretación geométrica de convexidad fuerte

Observe ahora que la desigualdad (2.2), como consecuencia de la Definición 2.1.1, para cualquier intervalo $(x_1, x_2) \in I$. Su parte izquierda es igual a la llamada *diferencia de Jensen* de φ (esta es fuertemente convexa con módulo c) mientras que el lado derecho es la *diferencia de Jensen de una función arbitraria* $h(x) = cx^2 + ax + b$ (esta diferencia es independiente de a y b). Así, la desigualdad (2.2) significa que la diferencia de Jensen de cualquier función fuertemente convexa con módulo c es mayor o igual a la diferencia de Jensen de cualquier polinomio de segundo grado con coeficiente principal c.

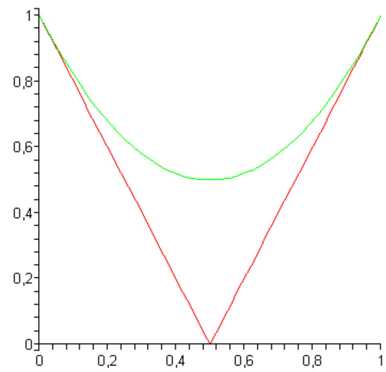


Figura 2.3: $f(x) = |x|, \;\; I = [-1, 1], \; c = 0,3$

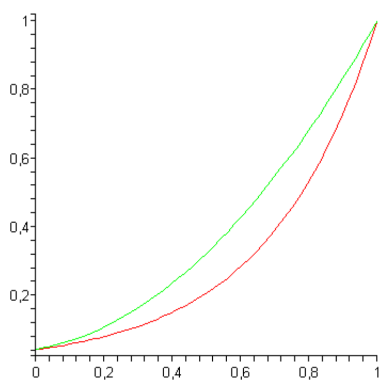


Figura 2.4: $f(x) = e^x$, $I = [-8, 0]$, $c = 0,18$

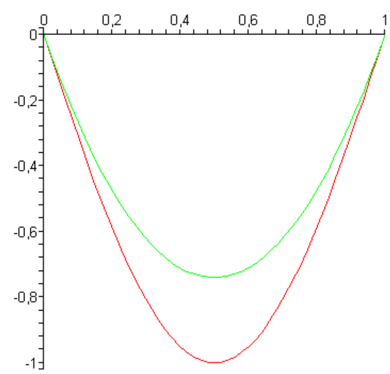


Figura 2.5: $f(x) = sen(x)$, $I = [-\pi, 0]$, $c = 0,2$

Si f es fuertemente convexa en I, entonces f es acotada inferiormente; el conjunto de nivel $\{x : f(x) < \lambda\}$ es acotada para cada λ y f tiene un único mínimo en cualquier subintervalo cerrado de I. Como la convexidad fuerte es una consolidación de la noción de convexidad, algunas propiedades de funciones fuertemente convexa son sólo "versiones fuertes" de propiedades conocidas de funciones convexas. Por ejemplo,

Lema 2.1.1 (Ver [21]). *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c si y sólo si la función $g : I \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - cx^2$ es convexa.*

Demostración:

Sea f una función fuertemente convexa entonces

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \qquad x, y \in I\ , t \in [0,1]$$

es decir,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) &\leq -c(t-t^2)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &\leq -c(t^2x^2 + 2t(1-t)xy + (1-t)^2y^2 - tx^2 - (1-t)y^2) \\ &\leq -c(tx + (1-t)y)^2 + c(t^2x^2 + (1-t)^2y^2) \end{aligned}$$

reescribiendo,

$$f(tx + (1-t)y) - c(tx + (1-t)y)^2 \leq t(f(x) - cx^2) + (1-t)(f(y) - cy^2)$$

sustituyendo $g(x) = f(x) - cx^2$ en la desigualdad anterior

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

entonces, g es convexa.

La implicación inversa es análoga.

$\square$

Teorema 2.1.1 (Ver [21]). *Una función f es fuertemente convexa con módulo c si y sólo si para todo $x_0 \in I^0$ existe $m \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + m(x - x_0) + f(x_0), \ \ x \in I,$$

es decir, f tiene un soporte cuadrático en x_0.

Demostración:

Se define $g(x) = f(x) - cx^2$, entonces usando el Lema 2.1.1 se obtiene que g es convexa y considerando el Teorema 1.1.6, para todo $x_0 \in I^0$ existe $m_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) \geq g(x_0) + m_1(x - x_0)$$

sustituyendo $g(x) = f(x) - cx^2$ queda de la siguiente manera,

$$f(x) - cx^2 \geq f(x_0) - cx_0^2 + m_1(x - x_0)$$

reescribiendo,

$$f(x) \geq c(x^2 - x_0^2) + m_1(x - x_0) + f(x_0) = c(x - x_0)^2 + 2cx_0x + m_1(x - x_0) + f(x_0).$$

Ahora se considera $m(\cdot) := m_1(\cdot) + 2cx_0(\cdot)$

$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + m(x - x_0) + f(x_0).$$

Para demostrar la inversa, fijando arbitrariamente $x, y \in I^0$ y $t \in (0, 1)$, donde $z_0 := tx + (1 - t)y$ y considerando un soporte de f en z_0 de la forma

$$h_1(z) = c\|z - z_0\|^2 + m(z - z_0) + f(z_0), \quad z \in D,$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &\geq c\|x - z_0\|^2 + m(x - z_0) + f(z_0) \\ &= c(1 - t)\|x - y\|^2 + m(x - z_0) + f(z_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(y) &\geq c\|y - z_0\|^2 + m(y - z_0) + f(z_0) \\ &= ct\|x - y\|^2 + m(y - z_0) + f(z_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geq c2t(1 - t)\|x - y\|^2 + (tm(x - z_0) + (1 - t)m(y - z_0)) + f(z_0).$$

Finalmente, la linealidad de m implica que

$$tm(x - z_0) + (1 - t)m(y - z_0) = 0,$$

se concluye que

$$\begin{aligned} f(z_0) = f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - 2ct(1-t)\|x - y\|^2 \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)\|x - y\|^2, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que f es una función fuertemente convexa con módulo c.

$\square$

Proposición 2.1.1 (Ver [31]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función fuertemente convexa con módulo c, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2}f(y) - \dfrac{1}{4}c(x-y)^2.$
2. *Para cada $x_0 \in I$, existe una función lineal m tal que*
$$f(x) \geq c(x - x_0)^2 + m(x - x_0) + f(x_0).$$
3. *Para f diferenciable, $f(x) \geq c(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*
4. *Para f diferenciable, $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geq 2c(x - y)^2$.*
5. *Para f doblemente diferenciable, $f''(x) \geq 2c$.*

Demostración:

- (1) implica (2):

  Por el Teorema 2.1.1.

- (2) implica (3):

  Como f es una función fuertemente convexa se tiene que f es una función convexa y por el Teorema 1.1.7 la diferenciabilidad de f implica la unicidad de m, en otras palabras

$$m(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

lo que nos queda es sustituir

$$f(x) \geq c(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

- (3) implica (4):

De (3) se tiene que para todo $x, y \in I$

$$f(x) \geq c(x-y)^2 + f'(y)(x-y) + f(y) \quad \text{y} \quad f(y) \geq c(y-x)^2 + f'(x)(y-x) + f(x),$$

sumando las desigualdades anteriores se obtiene

$$(f'(x) - f'(y))(x-y) \geq 2c(x-y)^2.$$

- (4) implica (5):

De (4) se tiene que

$$\frac{f'(x) - f'(y)}{x-y} \geq 2c$$

como $f''(x)$ existe, entonces aplicando límite

$$f''(x) = \lim_{x \to y} \frac{f'(x) - f'(y)}{x-y} \geq \lim_{x \to y} 2c = 2c.$$

- (5) implica (1):

Reescribiendo (5) y por el Teorema 1.1.1, $f''(x) \geq 2c$, si sólo si, $f - cx^2$ es convexa, luego por el Lema 2.1.1 f es fuertemente convexa y tomando $t = \frac{1}{2}$, nos queda la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \frac{1}{4}c(x-y)^2.$$

$\square$

2.2 Teorema del Sandwich

En el año 2010, Nelson Merentes y Kazimierz Nikodem en [21] generalizan el Teorema del Sandwich para funciones convexas, caracterizando las funciones reales definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ los cuales pueden ser separadas por funciones fuertemente convexas.

Definición 2.2.1. *Dado $\varepsilon > 0$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$ se llama función $\varepsilon-$fuertemente convexa con módulo c si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 + \varepsilon,$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$.

Teorema 2.2.1 (Ver [21])**.** *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en I y $c > 0$. Entonces existe una función fuertemente convexa $h : I \to \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$ en I si y sólo si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \quad x, y \in I, \quad t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Demostración:

Sea h una función fuertemente convexa, por definición se tiene que

$$h(tx + (1-t)y) \leq th(x) + (1-t)h(y) - ct(1-t)(x-y)^2. \tag{2.4}$$

Además se considera $f \leq h \leq g$, entonces

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(tx + (1-t)y)$$

y

$$th(x) + (1-t)h(y) \leq tg(x) + (1-t)g(y),$$

restando en ambos lados $ct(1-t)(x-y)^2$ en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente

$$th(x) + (1-t)h(y) - ct(1-t)(x-y)^2 \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \tag{2.5}$$

usando (2.4) y (2.5) se obtiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2.$$

Ahora, se asume que f y g satisfacen (2.3) y considerando las funciones $f_1, g_1 : I \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_1(x) = f(x) - cx^2, \tag{2.6}$$

$$g_1(x) = g(x) - cx^2 \tag{2.7}$$

donde $x \in I$.

A través de (2.6) se obtiene

$$f_1(tx + (1-t)y) = f(tx + (1-t)) - c(tx + (1-t)y)^2,$$

por (2.3)

$$\begin{aligned} f_1(tx + (1-t)y) &\leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2 - c(tx + (1-t)y)^2 \\ &= tg(x) + (1-t)g(y) - ctx^2 - c(1-t)y^2, \end{aligned}$$

despejando $g(x)$ de (2.7) se tiene que

$$f_1(tx + (1-t)y) \leq tg_1(x) + (1-t)g_1(y),$$

para todo $x, y \in I, \quad t \in [0,1]$. Por el Teorema Baron-Nikodem-Matkowski (ver [2]), existe una función convexa $h_1 : I \to \mathbb{R}$ tal que $f_1 \leq h_1 \leq g_1$ en I.

Definiendo $h(x) = h_1(x) - cx^2, \ \ x \in I$. Entonces, por el Lema 2.1.1, h es una función fuertemente convexa con módulo c y $f \leq h \leq g$ en I.

$\square$

Como consecuencia del Teorema del Sandwich, se obtiene el resultado de la estabilidad de Hyers-Ulam para funciones fuertemente convexas Definición 2.2.1 (ver [15] para el Teorema clásico Hyers-Ulam).

Corolario 2.2.1. *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función ε-fuertemente convexa con módulo c, entonces existe una función $h : I \to \mathbb{R}$ fuertemente convexa con módulo c tal que*

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in I.$$

Demostración:

Sea $g = f + \varepsilon$. Se demostrará que f y g satisfacen (2.3)

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 + \varepsilon \\ &= tf(x) + t\varepsilon - t\varepsilon + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 + \varepsilon \\ &= t(f(x) + \varepsilon) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 + (1-t)\varepsilon \\ &= t(f(x) + \varepsilon) + (1-t)(f(y) + \varepsilon) - ct(1-t)(x-y)^2, \quad x, y \in I. \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 2.2.1, existe una función $h_1 : I \to \mathbb{R}$ fuertemente convexa con módulo c, tal que

$$f \leq h_1 \leq g = f + \varepsilon \quad \text{en } I.$$

Sea $h = h_1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, así

$$f \leq h + \frac{\varepsilon}{2} \leq f + \varepsilon,$$

entonces, se resta $f + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leq h - f \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

que equivale a

$$|f - h| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } \; x \,\epsilon\, I$$

y claramente, h es fuertemente convexa con módulo c.

□

2.3 Desigualdad de tipo Jensen

En [21] N. Merentes y K. Nikodem extendieron la definición de función fuertemente convexa a combinaciones convexas de n puntos y obtuvieron la versión clásica de la desigualdad discreta de Jensen.

Dados $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0,1]$ y $\overline{x} = tx_1 + (1-t)x_2$, donde

$$t(1-t)(x_1 - x_2)^2 = t(x_1 - \overline{x})^2 + (1-t)(x_2 - \overline{x})^2, \tag{2.8}$$

esto se obtiene sabiendo que $(x_1 - \overline{x})^2 = (1-t)^2(x_1 - x_2)^2$ y $(x_2 - \overline{x})^2 = t^2(x_1 - x_2)^2$, entonces se sustituye en (2.8)

$$t(x_1 - \overline{x})^2 + (1-t)(x_2 - \overline{x})^2 = t(1-t)^2(x_1 - x_2)^2 + (1-t)t^2(x_1 - x_2)^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2,$$

se puede reescribir la desigualdad (2.1) usando la igualdad (2.8) y se obtiene

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - c(t(x_1 - \overline{x})^2 + (1-t)(x_2 - \overline{x})^2).$$

Extendiendo esta relación a combinaciones convexas de n puntos se obtiene la siguiente versión de la desigualdad clásica discreta de Jensen.

Teorema 2.3.1 (Ver [21])**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una funciónfuertemente convexa con módulo c, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) - c\sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \overline{x})^2,$$

para todo $x_1, x_2, ..., x_n \in I$, $t_1, ..., t_n > 0$ tal que $t_1 + ... + t_n = 1$ y $\overline{x} = t_1x_1 + ... + t_nx_n$.

Demostración:

Fijados $x_1, ..., x_n \in I$ y $t_1, ..., t_n > 0$ tales que $t_1 + ... + t_n = 1$. Sea $\bar{x} = t_1x_1 + ... + t_nx_n$ y se considera una función $g : I \to \mathbb{R}$ de tal manera que $g(x) = c(x - \bar{x})^2 + a(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$, donde g satisface que $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ y $g(x) \leq f(x)$, $x \in I$.

Entonces, para todo $i = 1, ..., n$, se obtiene

$$f(x_i) \geq g(x_i) = c(x_i - \bar{x})^2 + a(x_i - \bar{x}) + f(\bar{x})$$

multiplicando ambos lados por t_i y aplicando sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x})^2 + a \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x})^2 + f(\bar{x}),$$

es decir,

$$f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \bar{x})^2.$$

□

De manera similar se puede demostrar una contraparte de la integral de la desigualdad de Jensen mostrada en el capítulo 1 para funciones fuertemente convexas.

Teorema 2.3.2 (Ver [21]). *Sean* $(X, \sum, \mu)$ *un espacio de medida de probabilidad,* I *un intervalo abierto y* $\varphi : X \to I$ *un función integrable Lebesgue. Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *es una función fuertemente convexa con módulo* c*, entonces*

$$f\left(\int_X \varphi(x) d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x)) d\mu - c \int_X (\varphi(x) - m)^2 d\mu,$$

donde $m = \int_X \varphi(x) d\mu$.

Demostración:

Sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función de la forma $g(x) = c(x-m)^2 + a(x-m) + f(m)$ que soporta a f en m e integrando sobre X en ambos lados de la desigualdad $f(\varphi(x)) \geq g(\varphi(x)) \;\; x \in X$.

$$
\begin{aligned}
\int_X f(\varphi(x))d\mu &\geq \int_X g(\varphi(x))d\mu \\
&= \int_X c(\varphi(x)-m)^2 d\mu + \int_X a(\varphi(x)-m)d\mu + \int_X f(m)d\mu \\
&= c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu + a\int_X (\varphi(x)-m)d\mu + f(m)\int_X d\mu,
\end{aligned}
$$

usando el hecho de que X es un espacio de probabilidad, así que $\int_X d\mu = 1$,

$$
\begin{aligned}
\int_X f(\varphi(x))d\mu &\geq c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu + a(\int_X \varphi(x)d\mu - m\int_X d\mu) + f(m) \\
&= c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu + a(m-m) + f(m) \\
&= c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu + f(m),
\end{aligned}
$$

se reescribe la última desigualdad y sustituyendo $m = \int_X \varphi(x)d\mu$, tal que

$$
f\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x))d\mu - c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu.
$$

$\square$

2.4 Desigualdad de tipo Hermite-Hadamard

El siguiente resultado, expuesto en [21], es una generalización de la desigualdad de Hermite-Hadamard para funciones fuertemente convexa.

Teorema 2.4.1 (Ver [21])**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Si una función $f : I \to \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c entonces*

$$
f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(x-y)^2 \leq \frac{1}{x-y}\int_x^y f(s)\, ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2 \tag{2.9}
$$

para todo $x, y \in I$, $x < y$. Inversamente, si f es una función continua y satisface el lado derecho o izquierdo de (2.9) para todo $x, y \in I$, $x < y$, entonces f fuertemente convexa con módulo c.

Demostración:

El lado derecho de (2.9) (lo se denotara por (D)) se obtiene de integrar la desigualdad (2.1) en el intervalo [0,1].

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,dt &\le \int_0^1 tf(x)\,dt + \int_0^1 (1-t)f(y)\,dt - \int_0^1 ct(1-t)(x-y)^2\,dt\\ &\le \frac{f(x)}{2}+\frac{f(y)}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)c(x-y)^2\\ &\le \frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{c}{6}(x-y)^2.\end{aligned}$$

si se hace un cambio de variable $s = tx+(1-t)y$ en la integral de

$$\int_0^1 f(tx+(1-t)y)\,dt = \frac{1}{x-y}\int_y^x f(s)\,ds \ \text{ o } \ \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)\,ds.$$

Ahora se demuestra el lado izquierdo de (2.9) el cual se denota por(L). Sea $s_0 = \dfrac{x+y}{2}$, sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función de la forma $g(s) = c(s-s_0)^2 + a(s-s_0) + g(s_0)$ que soporta a f en s_0 e integrando en ambos lados de la desigualdad $g(s) \le f(s)$ en $[x, y]$, así

$$\begin{aligned}\int_x^y f(s)\,ds &\ge \int_x^y g(s)\,ds\\ &\ge \int_x^y c(s-s_0)^2\,ds + \int_x^y a(s-s_0)\,ds + \int_x^y f(s_0)\,ds\\ &\ge \frac{c}{3}(y-s_0)^3 - \frac{c}{3}(x-s_0)^3 + \frac{a}{2}(y-s_0)^2 - \frac{a}{2}(x-s_0)^2 + (y-x)f(s_0)\\ &\ge \frac{c}{3}\left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^3 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^3\right) + \frac{a}{2}\left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right) + (y-x)f(s_0)\\ &\ge \frac{c}{12}(y-x)^3 + (y-x)f(s_0).\end{aligned}$$

Entonces reescribiendo lo anterior nos queda,

$$\frac{c}{12}(y-x)^3 + (y-x)f(s_0) \ge \int_x^y f(s)\,ds,$$

se divide $(y-x)$ en ambos lados de esta desigualdad

$$\frac{c}{12}(y-x)^2 + f(s_0) \ge \frac{1}{(y-x)}\int_x^y f(s)\,ds.$$

Si f es continua y satisface (D) o (L), entonces $g : I \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - cx^2,\ x \in I$, también es continua y satisface ambos lados de la desigualdad de Hermite-Hadamard, respectivamente. En ambos casos esto implica que g es convexa. Consecuentemente, por el Lema 2.1.1, f es una función fuertemente convexa con módulo c.

$\square$

2.5 Relación con la Convexidad Generalizada

S demostrará en esta sección que la convexidad fuerte es equivalente a la convexidad fuerte generalizada con respecto a una cierta familia de dos parámetros. Se puede caracterizar la convexidad fuerte de manera similar en el caso de convexidad (ver Teorema 1.1.20).

Dado un número fijo $c > 0$ se define

$$\mathcal{F}_c = \{cx^2 + ax + b, \ \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Claramente, $\mathcal{F}_c$ es una familia de dos parámetro y se cumple el siguiente teorema

Teorema 2.5.1 (Ver [21]). *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c, si y sólo si, f es $\mathcal{F}_c$-convexa.*

Demostración:

Fijando $x_1, x_2 \in I$ y considerando $\phi = \phi_{(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))} \in \mathcal{F}_c$. Entonces $\phi(x) = cx^2 + ax + b$, donde los coeficientes a, b son determinados únicamente por las condiciones $\phi(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2$. Por consiguiente, por cada $t \in [0, 1]$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\phi(tx_1 + (1-t)x_2) &= c(tx_1 + (1-t)x_2)^2 + a(tx_1 + (1-t)x_2) + b \\
&= c(t^2x_1^2 + 2t(1-t)x_1x_2 + (1-t)^2x_2^2) + a(tx_1 + (1-t)x_2) + b - bt + bt \\
&= t(cx_1^2 + ax_1 + b) + (1-t)(cx_1^2 + ax_1 + b) - ct(1-t)(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) \\
&= tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - ct(1-t)(x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

de aquí, si f es $\mathcal{F}_c$-convexa, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leq \phi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1+(1-t)x_2) \\ &= tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-ct(1-t)(x_1-x_2)^2, \end{aligned}$$

lo que significa que f es una función fuertemente convexa con módulo c.

Inversamente, si f es una función fuertemente convexa con módulo c, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-ct(1-t)(x_1-x_2)^2 \\ &= \phi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1+(1-t)x_2), \end{aligned}$$

lo que demuestra que f es $\mathcal{F}_c-$convexa.

$\square$

CAPÍTULO 3

FUNCIONES FUERTEMENTE MIDCONVEXAS

En el año 2010, Antonio Azocar, Jóse Giménez, Kazimierz Nikodem y Jóse Luís Sánchez en [1] generalizan las propiedades de funciones midconvexas, como ya fue reflejado en el capitulo 1, para funciones fuertemente midconvexas con módulo c. En esta sección se presentará algunas propiedades de funciones fuertemente midconvexas. En primer lugar, las contrapartes de los Teoremas clásicos de Bernstein-Doetsch, Ostrowski y Sierpińnski son presentadas. Además se obtiene una versión de Rodé del teorema de soporte de funciones fuertemente midconvexas y un resultado de tipo Kuhn sobre la relación entre las funciones fuertemente midconvexas y funciones fuertemente t-convexas. Por último, se establece una conexión entre midconvexidad fuerte y convexidad generalizada en el sentido de Beckenbach.

3.1 Funciones Fuertemente Midconvexas

Sean X un espacio normado, D un subconjunto no vacío de X y $c > 0$.

Definición 3.1.1. *Una función $f : D \to \mathbb{R}$ se dice que es fuertemente midconvexa (o* *fuertemente Jensen convexa) con módulo c si*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \text{ para toda } x, y \in D \tag{3.1}$$

Nótese que al asumir $\lambda = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2.1) se obtiene la definición de una función fuertemente midconvexa.Considerando que la noción usual de funciones convexas y funciones midconvexas corresponden al caso $c = 0$. A continuación se presentan algunas propiedades elementales de tales funciones:

Proposición 3.1.1 (Ver [33]). *Sean D un subconjunto convexo de un espacio normado X y $c > 0$. Entonces:*

1. *Para cualquier $a > 0$: $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c, si y sólo si la función af fuertemente midconvexa con módulo ca.*

2. *Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ son funciones fuertemente midconvexas con módulo c, entonces $f + g$ es una función fuertemente midconvexa con módulo $2c$.*

3. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c y $0 < c_1 < c$, entonces f es es una función fuertemente midconvexa con módulo de c_1.*

4. *Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c, $x_0 \in D$, y $b \in \mathbb{R}$, entonces la función $g : (D - x_0) \to \mathbb{R}$ definida como*

$$g(x) := f(x + x_0) + b$$

es una función fuertemente midconvexa con módulo c.

Demostración:

1. De la definición de función fuertemente midconvexa con módulo c, se tiene

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2$$

se multiplica por a,

$$af\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{af(x)+af(y)}{2} - \frac{ac}{4}\|x-y\|^2$$

es decir que af es una función fuertemente midconvexa con módulo ac.

2. Se obtiene que si f y g son funciones fuertemente midconvexas con módulo c entonces

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2$$

y

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2.$$

Se define $h(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) + g\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} + \frac{g(x)+g(y)}{2} - \frac{2c}{4}\|x-y\|^2 \\ &= \frac{f(x)+g(x)+f(y)+g(y)}{2} - \frac{2c}{4}\|x-y\|^2 \\ &= \frac{h(x)+h(y)}{2} - \frac{2c}{4}\|x-y\|^2, \end{aligned}$$

entonces h es una función fuertemente midconvexa con módulo $2c$ que equivale a decir que $f+g$ es una función fuertemente midconvexa con módulo $2c$.

3. Se considera que $0 < c_1 < c$ entonces $-c < -c_1$, luego multiplicando por $\frac{1}{4}\|x-y\|^2$,

$$-\frac{c}{4}\|x-y\|^2 < -\frac{c_1}{4}\|x-y\|^2$$

y ahora sumando $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$,

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c_1}{4}\|x-y\|^2.$$

Usando que f es una función fuertemente midconvexa con módulo c

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c_1}{4}\|x-y\|^2,$$

es decir; f es una función fuertemente midconvexa con módulo c_1.

4. Definiendo $g(x) = f(x+x_0) + b$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}+x_0\right)+b \\
&\leq \frac{f(x+x_0)+f(y+x_0)}{2}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{4}\|x+x_0-y-x_0\|^2 \\
&= \frac{f(x+x_0)+b+f(y+x_0)+b}{2}-\frac{c}{4}\|x-y\|^2 \\
&= \frac{g(x)+g(y)}{2}-\frac{c}{4}\|x-y\|^2,
\end{aligned}
$$

entonces g es una función fuertemente midconvexa con módulo c.

3.2 Resultados de tipo Bernstein-Doetsch

Es claro que, toda función fuertemente convexa es fuertemente midconvexa, el siguiente ejemplo muestra que la inversa no ocurre.

Ejemplo 3.2.1. *Sean $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función discontinua aditiva (ver Definición 1.1.6) y $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $f(x):=a(x)+x^2$, entonces f es fuertemente midconvexa con módulo 1 pero no es fuertemente midconvexa (con cualquier módulo) porque no es continua.*

En la clase de funciones continuas, la midconvexidad fuerte es equivalente a convexidad fuerte esto se debe a al Corolario 3.2.1. De hecho, la convexidad fuerte puede ser deducida de la midconvexidad fuerte en condiciones muchos más débiles que la continuidad. Se iniciara con el siguiente lema:

Lema 3.2.1 (Ver [1])**.** *Sean D un subconjunto convexo de un espacio normado y $c>0$. Si $f:D\to\mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c entonces*

$$
f\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)\leq\frac{k}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(y)-c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)||x-y||^2, \quad (3.2)
$$

para todo $x,y\in D$ y para todo $k,n\in\mathbb{N}$ tal que $k<2^n$.

Demostración:

Por inducción se tiene que para $n = 1$, la ecuación (3.2) se reduce a la ecuación (3.1). Asumiendo que (3.2) es válido para n y todo $k < 2^n$, se demuestra que es válido para $n+1$. Sea $x, y \in D$ fijos y se considera $x < 2n+1$. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $k < 2^{n+1}$. Entonces de (3.1) y (3.2) , se obtiene

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}y\right) \\
&\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) + \frac{1}{2}f(y) \\
&- \frac{c}{4}\left\|\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y - y\right\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y) - c\frac{k}{2^n}\left(1 - \frac{k}{2^n}\right)||x-y||^2\right) \\
&- \frac{1}{2}f(y) + \frac{c}{4}\frac{k^2}{2^{2n}}\|x-y\|^2 \\
&= \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 + \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y) - c\frac{k}{2^{n+1}}\left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)\|x-y\|^2,
\end{aligned}$$

lo cual termina la demostración.

$\square$

Dado que el conjunto de los números diádicos de $[0, 1]$ es denso en $[0, 1]$, se obtiene el siguiente resultado como una consecuencia inmediata del Lema 3.2.1.

Corolario 3.2.1 (Ver [1])**.** *Sea D un subconjunto convexo de un espacio normado y $c > 0$. Asumiendo que $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua. Entonces f es una función fuertemente convexa con módulo c si y sólo si f es una función fuertemente midconvexa con módulo c.*

Teorema 3.2.1 (Ver [1])**.** *Sean D un subconjunto abierto convexo de un espacio normado y $c > 0$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c y acotada superiormente por un conjunto con interior no vacío, entonces f es una función continua y fuertemente convexa con módulo c.*

Demostración:

Si f es una función fuertemente midconvexa, entonces también es midconvexa. Como f es acotada por arriba en un conjunto con interior no vacío, entonces f es una función continua por el Teorema Bernstein-Doetsch. En consecuencia, por el Corolario 3.2.1, f es una función fuertemente convexa con módulo de c.

$\square$

Teorema 3.2.2 (Ver [1]). *Sean D un subconjunto abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $c > 0$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c y acotada superiormente por un conjunto $A \subset D$ con medida de Lebesgue positiva ($\mu(A) > 0$), entonces f es una función continua y fuertemente convexa con módulo c.*

Demostración:

Supóngase que $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$. Como f es una función fuertemente midconvexa con módulo c se tiene que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 \leq M$$

para todo $x, y \in A$. Esto significa que f es acotada superiormente por el conjunto $\frac{A+A}{2}$. Como $\mu(A) > 0$, se sigue, por el Lema Clásico de Steinhaus 1.1.2, que el $int(\frac{A+A}{2}) \neq \emptyset$. Por el Teorema 3.2.1 se tiene que f es una función continua y fuertemente convexa con módulo c.

$\square$

Teorema 3.2.3 (Ver [1]). *Sean D un subconjunto abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $c > 0$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función medible Lebesgue y fuertemente midconvexa con módulo c, entonces f es una función continua y fuertemente convexa con módulo c.*

Demostración:

Para cada $m \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$A_m := \{x \in D : f(x) \leq m\}.$$

Como $D = \bigcup A_m$, entonces existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{m_0}) > 0$. Por lo tanto, f es una función acotada superiormente por un conjunto medible Lebesgue positivo, por el Teorema 3.2.2 se tiene que f es una función continua y fuertemente convexa con módulo c.

□

3.3 Resultados de tipo Kuhn

En esta sección se presenta una generalización de la versión del teorema de Kuhn para las funciones t_0-convexas y se da paso a las funciones fuertemente t_0-convexa.

Definición 3.3.1. *Sean $f : D \to \mathbb{R}$ una función y t_0 un número fijo en $(0, 1)$ entonces f es una función t_0-convexa si*

$$f(t_0x + (1 - t_0)y) \leq t_0f(x) + (1 - t_0)f(y) \tag{3.3}$$

para todo $x, y \in D$.

Definición 3.3.2. *Sean t_0 un número fijo en $(0, 1)$ y $c > 0$. Se dice que una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente t_0-convexa con módulo c si*

$$f(t_0x + (1 - t_0)y) \leq t_0f(x) + (1 - t_0)f(y) - ct_0(1 - t_0)\|x - y\|^2 \tag{3.4}$$

para todo $x, y \in D$.

Cabe destacar, que las *funciones t_0-convexas* y *funciones fuertemente t_0-convexas con módulo c* coinciden cuando $c = 0$ es decir las desigualdades (3.3) y (3.4) son iguales. En esta sección se presenta una contraparte del Teorema para funciones t_0-convexas.

Teorema 3.3.1 (Ver [8]). *Sea D un subconjunto convexo de un espacio normado X y sea $t_0 \in (0, 1)$ un número fijo. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente t_0-convexa con módulo c, entonces f es una función fuertemente midconvexa con módulo c.*

Demostración:

Se fija $x, y \in D$ y se define $z := \dfrac{x+y}{2}$. Se considera los puntos

$$u := t_0\, x + (1-t_0)\, z \quad \text{y} \quad v := t_0\, z + (1-t_0)\, y.$$

Entonces, se puede obtener la siguiente igualdad

$$z = (1-t_0)\, u + t_0\, v.$$

Aplicando tres veces (3.4) en la condición (3.1) de la definición de función fuertemente t_0-convexa, se obtiene que

$$\begin{aligned}
f(z) &\leq (1-t_0)f(u) + t_0 f(v) - ct_0(1-t_0)\|u-v\|^2 \\
&\leq (1-t_0)\big[t_0 f(x) + (1-t_0)f(z) - ct_0(1-t_0)\|x-z\|^2\big] \\
&\quad + t_0\big[t_0 f(z) + (1-t_0)f(y) - ct_0(1-t_0)\|z-y\|^2\big] - ct_0(1-t_0)\|u-v\|^2 \\
&= t_0(1-t_0)[f(x)+f(y)] + [(1-t_0)^2 + t_0^2]f(z) \\
&\quad - c\, t_0\,(1-t_0)\,\big[(1-t_0)\,\|x-z\|^2 + t_0\|z-y\|^2 + \|u-v\|^2\big],
\end{aligned}$$

y de la última desigualdad, después de reagrupar y simplificar, se obtiene

$$2\, f(z) \;\leq\; f(x) + f(y) \;-\; c\,[(1-t_0)\,\|x-z\|^2 + t_0\|z-y\|^2 + \|u-v\|^2\big]. \tag{3.5}$$

Ahora, como $\|x-z\| = \|z-y\| = \|u-v\| = \dfrac{\|x-y\|}{2}$, obteniéndose que

$$(1-t_0)\,\|x-z\|^2 + t_0\|z-y\|^2 + \|u-v\|^2 \;=\; \frac{\|x-y\|^2}{2}.$$

Consecuentemente, la desigualdad (3.5), puede ser reescrita como

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \;=\; f(z) \;\leq\; \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2,$$

lo cual demuestra que f es una función fuertemente midconvexa con módulo c.

□

Observación 3.3.1. *Del Teorema anterior y el Corolario 3.2.1 se puedo inferir que si una función $f : D \to \mathbb{R}$ es continua y fuertemente t_0-convexa con módulo c (con $t_0 \in (0,1)$ fijo), entonces f es fuertemente convexa con módulo c. Similarmente se puede reformular los Teoremas 3.2.1, 3.2.2 y 3.2.3 de funciones fuertemente t_0-convexas.*

3.4 Teorema de Soporte

Es conocido que las funciones convexas se caracterizan por tener como soporte una función afín en todo punto de su dominio (ver [31]). En 1978 el alemán Gerd Rodé en [32] demuestra un resultado análogo para funciones midconvexas, el cual señala que las mismas tienen soporte del tipo Jensen (que es una función aditiva más una constante), (véase [25] para demostraciones más simples). En esta sección se presenta una contraparte de este resultado para funciones fuertemente midconvexas. En la siguiente demostración se usara la siguiente caracterización para funciones fuertemente midconvexas con módulo c en espacios con producto interno (ver en [26]).

Lema 3.4.1 (Ver [26],[1])**.** *Sean X con producto interno, D un subconjunto de X y $c > 0$. Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c si y sólo si existe una función midconvexa $g : D \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = g(x) + c\|x\|^2$$

para todo $x \in D$.

Demostración:

Supóngase que $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c. Se define a

$$g(x) =: f(x) - c\|x\|^2.$$

Entonces, aplicando la ley del paralelogramo se obtiene

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - c\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \\ &\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 - \frac{c}{4}\|x+y\|^2 \\ &= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) \\ &= \frac{g(x)+g(y)}{2}, \end{aligned}$$

de esta manera resulta que g es midconvexa. La implicación inversa es análoga.

$\square$

Observación 3.4.1. *En [26] se demuestra que la hipótesis que* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio con producto interno no es redundante en el Lema 3.4.1. Más aún, la condición que, para toda* $f : D \to \mathbb{R}$, f *es una función fuertemente midconvexa si y sólo si* $f - \|\cdot\|$ *es una función midconvexa, caracteriza los espacios con producto interno entre todos los espacios normados.*

En los capítulos anteriores se habla de recta de soporte (Definición 1.7), soporte cuadrático (Teorema 2.1.1), ahora se vió la necesidad de hacer una definición que las generalicen.

Definición 3.4.1. *Dada una función* $h : D \to \mathbb{R}$, *se dice que es un soporte para la función* $f : D \to \mathbb{R}$ *en un punto* $x_0 \in D$, *si* $h(x_0) = f(x_0)$ *y* $h(x) \geq f(x)$ *para todo* $x \in D$.

Teorema 3.4.1 (Ver [1]). *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio real con producto interno,* D *un subconjunto abierto convexo de* X *y* $c > 0$. *Una función* $f : D \to \mathbb{R}$ *es fuertemente midconvexa con módulo* c *si y sólo si, en cada punto* $x_0 \in D$, f *tiene soporte de la forma*

$$h(x) = c\|x - x_0\|^2 + a(x - x_0) + f(x_0),$$

donde $a : X \to \mathbb{R}$ *es una función aditiva (que depende de* x_0*).*

Demostración:

Supóngase, en primer lugar, que $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c y fijando $x_0 \in D$. Entonces, por el Lema 3.4.1, existe una función midconvexa $g : D \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + c\|x\|^2,$$

para todo $x \in D$. Por lo tanto, por el Teorema de Rodé, la función g tiene soporte en x_0 de la forma

$$h_1(x) = a_1(x - x_0) + g(x_0), \;\; x \in D$$

donde $a_1 : X \to \mathbb{R}$ es una función aditiva (en el sentido de Jensen). En virtud de la Definición 3.4.1 sea $h : D \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) := c\|x\|^2 + a_1(x - x_0) + g(x_0)$$

que soporta a f en x_0. Ahora, como $g(x_0) = f(x_0) - c\|x_0\|^2$, se puede expresar a la función h de la siguiente manera

$$\begin{aligned} h(x) &= c(\|x\|^2 - \|x_0\|^2) + a_1(x - x_0) + f(x_0) \\ &= c\|x - x_0\|^2 + 2\,c\,\langle x_0, x - x_0\rangle + a_1(x - x_0) + f(x_0) \\ &= c\|x - x_0\|^2 + a(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

donde $a := a_1 + 2\,c\,\langle x_0, \cdot\rangle$ es también una función aditiva (en el sentido de Jensen).

Para demostrar la inversa, fijando arbitrariamente $x, y \in D$, donde $z_0 := \dfrac{x+y}{2}$ y se considera un soporte de f en z_0 de la forma

$$h_1(z) = c\|z - z_0\|^2 + a(z - z_0) + f(z_0), \;\; z \in D.$$

Entonces

$$f(x) \;\geq\; c\|x - z_0\|^2 + a(x - z_0) + f(z_0)$$

y

$$f(y) \;\geq\; c\|y - z_0\|^2 + a(y - z_0) + f(z_0).$$

Por lo tanto

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq \frac{c}{2}(\|x - z_0\|^2 + \|y - z_0\|^2) + \frac{1}{2}(a(x - z_0) + a(y - z_0)) + f(z_0).$$

Nótese que

$$\frac{c}{2}(\|x - z_0\|^2 + \|y - z_0\|^2) \;=\; \frac{c}{4}\|x - y\|^2,$$

y por la aditividad de a se tiene que

$$a(x - z_0) + a(y - z_0) = 0,$$

se concluye que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(z_0) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2,$$

lo cual demuestra que f es una función fuertemente midconvexa con módulo c.

$\square$

3.5 Desigualdad de tipo Jensen

En esta sección se presentará dos versiones de la desigualdad clásica de Jensen para funciones fuertemente midconvexas con módulo c y luego se demuestra que las funciones fuertemente midconvexas con módulo c son funciones fuertemente $q-$convexas con módulo c para todo $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Note primero que si $s = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, entonces

$$\frac{1}{4}\|x_1 - x_2\|^2 = \frac{1}{2}(\|x_1 - s\|^2 + \|x_2 - s\|^2)$$

por lo tanto la condición (3.1) la definición de función fuertemente midconvexa con módulo c puede ser reescrita de la siguiente forma

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{1}{2}(\|x_1 - s\|^2 + \|x_2 - s\|^2), \quad x, y \in D.$$

Extendiendo esta relación a combinaciones convexas de n puntos se obtiene la Desigualdad de tipo Jensen.

Teorema 3.5.1 (Ver [1])**.** *Sea D un subconjunto abierto y convexo de un espacio X con producto interno. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c,* *entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$, *y* $x_1, x_2...., x_n \in D$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i - s\|^2,$$

donde $s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Demostración:

Se fija $x_1, x_2, ..., x_n \in D$ y se concidera $s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Por el Teorema 3.4.1 existe una función aditiva a tal que f tiene en s un soporte de la forma

$$h(x) = c\|x - s\|^2 + a(x - s) + f(s).$$

Así, para cada $i = 1, 2, ..., n$,

$$f(x_i) \geq h(x_i) = c\|x_i - s\|^2 + a(x_i - s) + f(s).$$

Simplificando estas n desigualdades, y usando el hecho de que

$$\sum_{i=1}^{n} a(x_i - s) = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - ns\right) = 0,$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq c\sum_{i=1}^{n} ||x_i - s||^2 + \sum_{i=1}^{n} a(x_i - s) + nf(s)$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) &\geq \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n} ||x_i - s||^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a(x_i - s) + f(s) \\ &\geq \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n} ||x_i - s||^2 + \frac{1}{n}a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - ns\right) + f(s) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) = f(s) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n} ||x_i - s||^2.$$

$\square$

Teorema 3.5.2 (Ver [1]). *Sea D un subconjunto abierto y convexo de un espacio X con producto interno. Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función fuertemente midconvexa con módulo c, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - c\sum_{i=1}^{n} q_i \|x_i - s\|^2,$$

para todo $x_1, ..., x_n \in D$, $q_1, ..., q_n \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ con $q_1 + ... + q_n = 1$ y $s = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$.

Demostración:

Se fija $x_1, ..., x_n \in D$ y $q_1 = \frac{k_1}{l_1}, ..., q_n = \frac{k_n}{l_n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ con $q_1 + ... + q_n = 1$. Sin pérdida de generalidad se asume que $l_1 = l_2 = ... = l_n = l$. Además $k_1 + ... + k_n = l$, considerando $y_{11} = ... = y_{1k_1} =: x_1$, $y_{21} = ... = y_{2k_2} =: x_2$, $y_{n1} = ... = y_{nk_n} =: x_n$.

Entonces

$$s = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} y_{ij}.$$

Por lo tanto, usando el Teorema 3.5.1, se obtiene

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) &= f\left(\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(y_{ij})\right) \\ &\leq \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(y_{ij}) - \frac{c}{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \|y_{ij} - s\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i) - c\sum_{i=1}^{n} q_i \|y_{ij} - s\|^2. \end{aligned}$$

□

Bajo las mismas condiciones para los espacios X y D se obtiene el siguiente Corolario.

Corolario 3.5.1 (Ver [1]). *Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c si y sólo si*

$$f(qx + (1-q)y) \leq qf(x) + (1-q)f(y) - cq(1-q)\|x - y\|^2,$$

para todo $x, y \in D$ y $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Demostración:

Se fija $x, y \in D$, $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ y se considera $s := qx + (1-q)y$. Entonces, por el Teorema 3.5.2, se obtiene

$$\begin{aligned} f(qx + (1-q)y) &\leq qf(x) + (1-q)f(y) - c(q\|x-s\|^2 + (1-q)\|y-s\|^2) \\ &= qf(x)(1-q)f(y) - cq(1-q)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

La inversamente se obtiene de la misma desigualdad.

□

3.6 Relación con la Convexidad Generalizada

La idea geométrica de convexidad de una función es la siguiente:

Una función f es convexa si y sólo si para dos puntos distintos en el gráfico de f, el segmento unido por los dos puntos se encuentra por encima de la parte correspondiente del gráfico de f.

En [3] E. F. Beckenbach generaliza esta idea reemplazando la recta por gráficas de funciones continuas que pertenecen a una familia de funciones de dos parámetros $\mathcal{F}$. De esta sección se demostrará que la midconvexidad fuerte que es equivalente a la convexidad generalizada con respecto a una cierta familia de dos parámetros.

Definición 3.6.1 (Ver [4] y [31])**.** *Una función $f : D \to \mathbb{R}$ es midconvexa con respecto a $\mathcal{F}$ (abreviada, $\mathcal{F}$-midconvexa) si para $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \phi_{(x_1, f(x_1)),\,(x_2, f(x_2))}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Teorema 3.6.1 (Ver [1])**.** *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y c un número positivo. Considere una familia de dos parámetros $\mathcal{F}_c := \{cx^2 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^I$. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es fuertemente midconvexa con módulo c, si y sólo si, es $\mathcal{F}_c$-midconvexa.*

Demostración:

Sean $x_1, x_2 \in I$. Si $\varphi = \varphi_{(x_1,f(x_1)),\ (x_2,f(x_2))} \in \mathcal{F}_c$, entonces $\varphi(x) = cx^2+ax+b$, donde los coeficientes a, b son determinados únicamente por las condiciones $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) &= c\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + b \\
&= c\left(\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}\right) + a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + b \\
&= \frac{1}{2}\big(cx_1^2+ax_1+b\big) + \frac{1}{2}\big(cx_2^2+ax_2+b\big) - \frac{c}{4}\big(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\big) \\
&= \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} - \frac{c}{4}\big(x_1-x_2\big)^2 \\
&= \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{c}{4}\big(x_1-x_2\big)^2.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, si f es una función fuertemente midconvexa con módulo c, si y sólo si, es $\mathcal{F}_c$-midconvexa.

$\square$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo especial de grado se realizó un estudio sobre la noción de funciones convexas; basado en algunas de sus propiedades de regularidad y diferenciabilidad; además de sus resultados tales como la desigualdad de Jensen (para el caso discreto y el caso continuo) y la desigualdad Hermite-Hadamard, Teorema del Sandwich y además la Generalización dada por Beckenbach.

Se estudiaron las funciones midconvexas como un caso particular de las funciones convexas, destacando algunas caracterizaciones y presentando que la continuidad de la función es la condición necesaria y suficiente para que la midconvexidad implique convexidad. Luego se presentó un conjunto de resultados de los matemáticos Bernstein, Doetsch, Sierspiński y Ostrowski que dieron condiciones a las funciones midconvexas para que f sea continua.

Además se presento la noción de funciones fuertemente convexas con módulo c, por el ruso T. Polyak en 1966 como un refinamiento de las funciones convexas dada por J. Jensen en 1905-1906, donde se demostraron propiedades y resultados heredadas por las funciones convexas mencionadas anteriormente.

De igual manera, se realizó un estudio de las funciones fuertemente midconvexas planteando algunas de sus propiedades, resultados del tipo Bernstein-Doetsch, Doetsch, Sierspiński, Ostrowski, Kuhn, un teorema de soporte y relaciones con la convexidad generalizada.

Para finalizar, cabe destacar que los resultados expuestos en este trabajo de grado están en varios artículos de investigación publicados entre los años 1889-2011 se puede ver como una contribución pedagógica para la comprensión del tema.

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J. L. Sánchez, *On strongly midconvex functions,* Opuscula Math. 31 (2011), no. 1, 15-26.

[2] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem, *A sandwich with convexity,* Math. Pannonica 5/1 (1994),139-144.

[3] E. F. Beckenbach, *Generalized convex functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 363-371.

[4] E. F. Beckenbach, R. H. Bing,*On generalized convex functions,* Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 220-230.

[5] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen,* Math. Ann. 76 (1915), 514-526.

[6] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions,* Math. Inequal. Appl. 6/3 (2003), 379-392.

[7] M. Bessenyei, Zs. Páles, *Characterization of convexity via Hadamard's inequality,* Math. Inequal. Appl. 9/1 (2006), 53-62.

[8] Z. Daróczy, Zs. Páles, *Convexity wiht given infinite weight sequences,* Stochastica, 11/1 (1987), 5-12.

[9] S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications,* RGMIA Monographs, Victoria University, 2002. (ONLINE:HTTP://rgmia.uv.edu.au/monographs/).

[10] B. C. Escobar, *Algunos Teoremas de Separación de Funciones,* Tesis de Grado, Univercidad Nacional Abierta, Vicerectorado Académico, Caracas, 2001.

[11] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann,* J. Math. Pures Appl. 58 (1893), 171-215.

[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood , G. Polya, *Inequalities,* Cambridge Mathematical Library, 2nd Edition, 1952, Reprinted 1988.

[13] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.

[14] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27, 222-224, (1941).

[15] D. H. Hyers, S. M. Ulam, *Approximately convex functions,* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952). 821-828.

[16] O. Hölder, *Über einen Mittelwertsatz,* Nachr. Ges. Wiss. Göettingen, (1889), 38-47.

[17] J. L. Jensen, *Om konvese Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier*, Nyt Tidsskr. Math. 16B (1905), 49-69.

[18] J. L. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes.* Acta Math. 30 (1906), 175-193.

[19] M. Kuczman, *An Introduction to the Theory of Funcional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality* PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985. Section Editon: Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[20] N. Kuhn, *A note on t-convex functions, General Inequalities*, 4 (Oberwolfach, 1983)(W. Walter, ed.), International Series of Numerical Mathematics, vol. 71, Birkhuser-Basel-Boston-Stuttgart, 1984, 269-276.

[21] N. Merentes, N. Nikodem, *Remarks on strongly convex functions,* Aequationes Mathematicae, 80 (2010), no. 1-2, 193-199.

[22] D. S. Mitrivić, I. B. lacković, *Hermite and convexity,* Aequationes Math. 28 (1985), 229-232.

[23] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable,* Frederick UNGAR Publishing Co. vol. I, New York, 1961.

[24] C. P. Nicculescu, L. -E. Persson, *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach* CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[25] K. Nikodem, *On the support of midconvex operators,* Aequationes Math. 42 (1991), 182-189.

[26] K. Nikodem, Zs. Páles, *Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions,* Banach J. Math. Anal. 5 (2011) 1, 83-87.

[27] K. Nikodem, Zs. Páles, *Generalized convexity and separation theorems,* J. Conv. Anal. 14/2 (2007), 239-247.

[28] A. Ostroswski, *Uber die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen und verwandte Funktionalgleichungen,* Jahresber. Deut. Math. Ver. 38 (1929), 54-62.

[29] E. S. Polovinkin, *Strongly convex analysis,* Sbornik Math. 187/2 (1996), 103-130.

[30] B. T. Polyak, *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions,* Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 72-75.

[31] A. W. Roberts, D. E. Varberg, *Convex Functions,* Academic Press, New York-London, 1973.

[32] G. Rode, *Eine abstracte Version des Satzes yon Hahn-Banach,* Arch. Math. 31 (1978), 474-481.

[33] L. Rodríguez, *Funciones Midconvexas y La Ecuación Funcional de Jensen*, Univercidad Central de Venezuela, Caracas, 1997.

[34] H. R. Romero, *Funciones Convexas*, Tesis de Grado, Universidad Nacional Abierta, Centro Local Zulia, Maracaibo, 1999.

[35] W. Sierpinski, *Sur les fonctions convexes mesurables,* Fund. Math. 1 (1920), 125-129.

[36] O. Stolz, *Grundzüge der Differential und Integralrechnung,* Vol. 1. Teubner, Leipzig (1893).