UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Funciones de χ-Variación Acotada en un intervalo y un Teorema de Representación de Korenblum

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. María V. Sanoja S.** para optar al título de Licenciada en Matemática.
Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
Mayo, 2011

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Funciones de χ-Variación Acotada en un intervalo y un Teorema de Representación de Korenblum**", presentado por la **Br. María V. Sanoja S.**, titular de la Cédula de Identidad **17.802.247**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes
Tutor

Dr. José Luis Sánchez
Jurado

Msc. Maira Valera
Jurado

A mis queridos padres Mariela y Jesús, mis hermanos Ricardo, Ingrid y Deiki, y a mi sobrino Deiker con mucho cariño.

Agradecimientos

Primero que todo, gracias a Dios por haberme dado salud y fuerzas para siempre salir adelante y luchar por mis sueños.

A mis padres, Mariela y Jesús por su confianza y apoyo en cada una de mis decisiones, a mis hermanos Ricardo, Ingrid y Deiki por estar a mi lado cuando más los necesito, a mi sobrino Deiker por brindarme besos y abrazos en todo momento de mi vida.

Gracias a mi tutor, el profesor Nelson Merentes por su gran colaboración, amistad y apoyo incondicional en la realización de este Trabajo Especial de Grado, y por brindarme la oportunidad de ser su tesista.

De igual modo, gracias al profesor José Luis Sánchez, por su colaboración y ayuda en este trabajo a pesar de sus diferentes obligaciones, y por compartir conmigo todos sus conocimientos, así como también, a la profesora Maira Valera, por sus sugerencias y dedicar parte de su tiempo en la revisión de este trabajo.

A mis compañeros Francy, Juan y Amarilis, por su amistad y compañía durante la carrera, a Odalis y Zorely por su colaboración sin pedir nada a cambio.

En fin, a todas aquellas personas y seres queridos, que de alguna manera han compartido conmigo todo este tiempo, mil gracias!!.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En 1881, C. Jordan (ver [4]) introduce la noción de función de variación acotada en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Demuestra que toda función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si, u es la diferencia de funciones monótonas, obteniendo el resultado de Dirichlet (ver [5]) que toda función de variación acotada en $[-\pi, \pi]$, tiene serie de Fourier convergente en todo punto de $[-\pi, \pi]$, este resultado es conocido como el criterio de Dirichlet-Jordan sobre la convergencia de la serie de Fourier. La noción de variación acotada ha sido generalizada de varias maneras, el lector interesado en el tema puede consultar [10], en 1924 N. Wiener introduce la noción de variación cuadrática (ver [17]), la cual puede ser considerada como una distorción cuadrática de la medida de el rango de la función, obteniendo que para esta nueva clase de funciones también su serie de Fourier es puntualmente convergente. En 1937 L.C. Young introduce la noción de φ-variación acotada, donde φ es una φ-función, esta nueva forma distorciona de manera φ la medida en el rango de la función considerada y también vale la convergencia de la serie de Fourier. En el año 1972 D. Waterman (ver [16]) introduce la noción de Λ-variación acotada, donde Λ es una Λ-sucesión y más generalmente en 1985 M. Schramm, (ver [13]) extiende esta última noción al caso de Φ-variación acotada, donde Φ es una Φ-sucesión de funciones.

En estas generalizaciones se obtiene la convergencia de su serie de Fourier, sin embargo, el Teorema de Representación de C. Jordan por medio de funciones monótonas para las funciones de variación acotada no se obtiene.

En 1975 B. Korenblum, (ver [9]) introduce una nueva clase de funciones denominadas χ-variación acotada, la diferencia de ésta con las anteriores es que la distorción es en el dominio de la función y no en el rango, con este nuevo enfoque obtiene el resultado clásico de Jordan sobre la representación por medio de funciones monótonas. Más precisamente, se obtiene el Teorema de Representación de Korenblum; **una función $\mathbf{u} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R}$ tiene χ-variación acotada en $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ si y sólo si u es la diferencia de dos funciones χ-monótonas**. Este resultado lo exponemos en el Capítulo 3 de este Trabajo de Grado.

Este Trabajo Especial de Grado lo hemos estructurado en tres Capítulos, en el Capítulo 1 exponemos la noción de función de variación acotada en un intervalo $[a, b]$ y varios resultados que caracterizan tales funciones, entre ellos el Teorema de Representación de Jordan, un teorema de Banach del año 1925 (ver [1]) sobre la llamada indicatriz de Banach, un resultado de Federer del año 1969 (ver [7]) que involucra la composición de una función Lipschitz(exterior) con una monótona interior. El resultado de Federer nos motiva a exponer en la sección 1.3 la actuación en el caso autónomo del Operador de Composición en el espacio $BV[a, b]$ de variación acotada y desarrollamos explícitamente el teorema de Josephy del año 1981 (ver [6]) que establece condiciones necesarias y suficientes en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúa en $BV[a, b]$.

En el Capítulo 2 expondremos los resultados de B. Korenblum, del año 1975 (ver [9]) donde se define la nueva noción de χ-variación acotada y mostramos varios ejemplos de funciones χ y de χ-variación acotada, también haremos explícitamente demostraciones de propiedades que satisfacen las funciones de χ-variación acotada, similares a las cumplidas por las funciones de variación acotada, entre ellas que esta clase es un espacio vectorial y se le puede dotar de una estructura de espacio de Banach.

En el Capítulo 3 se expone el resultado principal de este Trabajo de Grado que es el Teorema de Representación de Korenblum (ver [9] y [3]) de las funciones de χ-variación acotada por medio de la diferencia de dos funciones χ-decrecientes.

Para concluir la introducción, queremos explicar que los resultados expuestos en este trabajo de grado estan en varios artículos de investigación realizados entre 1975 y el año 2010 y la presentación en un solo folleto puede considerarse un aporte pedagógico para la comprensión del tema, algunos de estos artículos son: Cyphert Daniel S. and Kelingos J. A., *The decomposition of functions of bounded χ-variation into difference of χ-decreasing functions* (1985) (ver [3]), Park Jaekeun, *On the functions of bounded $\kappa\phi$-variations (I)* (2010) (ver [11]), Park Jaekeun and Seong Hoon Cho, *Functions of $\kappa G\phi$-bounded variations* (2003) (ver [12]), Sung Ki Kim and Jongsik Kim, *Functions of $\kappa\phi$-bounded variation* (1986) (ver [14]), entre otros.

CAPÍTULO 1

CLASES DE FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

En el presente Capítulo se describe la noción de funciones de variación acotada en un intervalo $[a, b]$, introducida en el año 1881 por Camille Jordan (Ver [4]), así como también se presentan algunas de las propiedades de éstas funciones. Además presentamos tres maneras conocidas de caracterizar las funciones de variación acotada:

1. Mediante la diferencia de dos funciones monótonas (Teorema de Representación de Jordan) (ver [4]),

2. Mediante la indicatriz de Banach (Ver [1]),

3. Mediante la composición de funciones monótonas con funciones Lipschitz continuas (Teorema de Representación de Federer) [7].

1.1 Funciones de Variación Acotada

Definición 1. *En el año de 1881 Camille Jordan [4], introduce el concepto de función de Variación Acotada en un intervalo* $[a, b]$*, como aquellas funciones* $u : [a, b] \to \mathbb{R}$*, tales* *que el número:*

$$V(u) = V(u;[a,b]) := \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})|,$$

es finito, donde el supremo se considera sobre el conjunto de todas las particiones $\pi : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ *del intervalo* $[a,b]$.

Esta clase de funciones se denota por $BV[a,b]$ y la misma posee una estructura de álgebra y de espacio normado con la norma:

$$||u||_{BV[a,b]} = |u(a)| + V(u), \qquad u \in BV[a,b].$$

Más aún, el espacio $BV[a,b]$ es un espacio completo y, por lo tanto, un espacio de Banach.

A continuación se presentarán algunos ejemplos que ilustran la definición de $BV[a,b]$.

Ejemplo 1:

Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u en $[a,b]$, definida por

$$u(t) = c \qquad \text{para todo} \ \ t \in [a,b].$$

Entonces, la **variación acotada** de la función u en el intervalo $[a,b]$ viene dada por

$$\begin{aligned} V(u) = V(u;[a,b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |c - c| \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$.

Ejemplo 2:

Consideremos $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la función identidad, es decir,

$$u(t) = t \qquad t \in [a, b].$$

Entonces, la **variación acotada** de la función u en el intervalo $[a, b]$ es dada por

$$\begin{aligned}
V(u; [a, b]) &= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} |t_j - t_{j-1}| \\
&= \sup_{\pi} \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1}) \\
&= (t_n - t_0) \\
&= b - a.
\end{aligned}$$

donde $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$.

1.2 Propiedades de las Funciones de variación acotada

A continuación se enuncian y demuestran algunas propiedades de las funciones de variación acotada, como lo son, las caracterizaciones presentadas por Camille Jordan [4] en 1881 mediante la diferencia de funciones monótonas, por Stefan Banach [1] en 1925 mediante la indicatriz de una función continua y por Herbert Federer [7] en 1969 a través de la composición de funciones monótonas con funciones Lipschitz continuas.

1.2.1 Caracterización de Jordan

El resultado más importante dado por C. Jordan cuando introduce el concepto de variación acotada en [4], enuncia que una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si, se puede escribir como diferencia de funciones monótonas, en particular de funciones crecientes.

A continuación presentamos una demostración del resultado presentado por Jordan.

Teorema 1. *Una función $u \in BV[a,b]$ si y sólo si, existen funciones u_1, u_2 en $[a,b]$ monótonas tales que $u = u_1 - u_2$.*

Demostración:

Si u_1 y u_2 son monótonas no es difícil verificar que $u = u_1 - u_2 \in BV[a,b]$.

Ahora supongamos que $u \in BV[a,b]$ y definamos dos funciones $p_u, n_u : [a,b] \to \mathbb{R}$, como:

$$p_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) + u(t) - u(a)), \quad t \in [a,b]$$
$$n_u(t) := \frac{1}{2}(V_u(t) - u(t) + u(a)), \quad t \in [a,b]$$

donde $V_u(t) := V(u; [a,t))$.

Sean $x, y \in [a,b]$, $\;x \leq y$, entonces

$$\begin{aligned} p_u(y) - p_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(y) - u(x)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u; [x,y]) + u(y) - u(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Luego p_u, es una función creciente y como $p_u(a) = 0$, resulta que $p_u(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$.

De manera similar,

$$\begin{aligned} n_u(y) - n_u(x) &= \frac{1}{2}(V_u(y) - V_u(x) + u(x) - u(y)) \\ &= \frac{1}{2}(V(u; [x,y]) + u(x) - u(y)) \geq 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que n_u es creciente y como $n_u(a) = 0$, tenemos que n_u es no negativa.

Así pues, de las definiciones de p_u y n_u resulta que

$$u = p_u - (n_u - u(a)).$$

y además

$$V_u(t) = p_u(t) + n_u(t).$$

$\square$

1.2.2 Caracterización de Banach

Hemos comprobado que las funciones de variación acotada se pueden caracterizar por medio de la diferencia de funciones monótonas. Para el caso, en que u además es continua, S. Banach [1], obtuvo otra caracterización al introducir en 1925 la indicatriz de una función continua u, la cual se denota por I_u, y es una función definida como sigue:

$$I_u : [\text{ínf}\, u, \sup u] \longrightarrow [0, \infty)$$

donde $I_u(x)$ es igual al número de valores de $x \in [0, 2\pi]$ para el cual $u(x) = y$.

Teorema 2. *(Teorema de Beppo-Levi) Sea $(\mathbb{X}, A, \mu)$ un espacio de medida y sean $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

$$u_n : \mathbb{X} \longrightarrow [0, \infty]$$

una sucesión de funciones medibles Borel no negativa, es decir,

$$u_n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{X}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{X}} u_n \, d\mu.$$

Para ver detalles de la demostración del teorema enunciado anteriormente el lector puede remitirse a [8].

Proposición 1. *Sea* $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, y* $I_u : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *la indicatriz de Banach. Entonces la igualdad*

$$Var(u; [a, b]) = \int_{-\infty}^{\infty} I_u(x)\, dx$$

es cierta. En particular, $u \in BV[a, b]$ *si y sólo si,* $I_u \in L_1(\mathbb{R})$.

Demostración:

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, hacemos $\delta_{k,n} := k\dfrac{(b-a)}{2^n}$, y

$$\begin{aligned}
\Delta_{1,n} &:= [a, a + \delta_{1,n}), \\
\Delta_{2,n} &:= [a + \delta_{1,n}, a + \delta_{2,n}), \\
&\vdots \\
\Delta_{2^{n-1},n} &:= [a + \delta_{2^{n-1}-1,n}, a + \delta_{2^{n-1},n}), \\
\Delta_{2^n,n} &:= [a, a + \delta_{2^{n-1},n}].
\end{aligned}$$

Más aún, para $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ denotamos

$$m_{k,n} := \text{ínf}\, u(x) : x \in \Delta_{k,n}, \qquad M_{k,n} := \sup u(x) : x \in \Delta_{k,n},$$

y definimos las funciones:

$$v_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\} \quad \text{y} \qquad g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

por

$$g_{k,n}(x) := \chi_{u^{-1}(y)\cap\Delta_{k,n}} = \begin{cases} 1, & si \;\; u(x) = y \;\; \text{para algún} \;\; x \in \Delta_{k,n}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$g_n := \sum_{k=1}^{2^n} g_{k,n}(y).$$

La monotonía resulta de $2^{n+1} > 2^n$, es decir, $g_{n+1}(y) \geq g_n(y)$.

Afirmamos que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la indicatriz de Banach $I_u(x)$ de u.

En efecto, supongamos primero que $I_u(y) = m$, y sea $u^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ denotado como el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $u(x) = y$.

Escogemos $N \in \mathbb{N}$ tan grande que $2^{-N} < \text{mín}\,(x_i - x_j)$ tal que $1 \leq i, j \leq m, i \neq j$; entonces para $n > N$ todos los elementos en $u^{-1}(x)$ pertenecen a diferentes intervalos $\Delta_{k,n}$ y así, $g_n(x) = m$.

Similarmente, en el caso $I_u(y) = \infty$ un razonamiento análogo demuestra que $g_n(x) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(y)\,dy = \sum_{k=1}^{2^n} (M_{k,n} - m_{k,n}),$$

el lado derecho de la igualdad tiende a la integral de I_u por el teorema de Beppo Levi, y el lado derecho tiende a la $V(u; [a, b])$.

$\square$

1.2.3 Caracterización de Federer

A continuación, presentamos la caracterización de funciones de variación acotada debida a H. Federer en 1969 [7], como composición de funciones monótonas con funciones Lipschitz continuas.

Proposición 2. *Una función u pertenece a $BV([a, b])$ si y sólo si, se puede representar como la composición $u = g \circ \tau$, donde $\tau : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ es creciente y $g \in Lip([c, d])$ con constante de Lipschitz $L \leq 1$.*

Demostración:

Supongamos que $f = g \circ \tau$, donde g y τ tienen las propiedades mencionadas. Dada cualquier partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\} \in \mathcal{P}([a,b])$, obtenemos

$$Var(u,P) = \sum_{j=1}^{m} |g(\tau(t_j)) - g(\tau(t_{j-1}))| \leq \sum_{j=1}^{m} |\tau(t_j) - g\tau(t_{j-1})| = |\tau(b) - \tau(a)|,$$

por lo tanto, $u \in BV([a,b])$. Por el contrario, sean $u \in BV([a,b])$, y $\tau := V_u$ la función de variación (creciente) de u. Sabemos que τ es una aplicación de $[a,b]$ en $[c,d]$, donde $c = 0$ y $d = Var(u;[a,b])$, pero, por supuesto, τ no tiene que ser sobreyectiva.

Si definimos la función g sobre el rango $\tau([a,b]) \subseteq [c,d]$ considerando $g(\tau(x)) := u(x)$, entonces la descomposición $u = g \circ \tau$ está bien definida. Dado que

$$|g(\tau(s)) - g(\tau(t))| = |u(s) - u(t)| \leq Var(u;[s,t]) = |\tau(s) - \tau(t)|$$

para $a \leq s < t \leq b$, la función g es Lipschitz continua con constante Lipschitz igual a 1 sobre $\tau([a,b])$. Podemos extender g de $\tau([a,b])$ a una aplicación Lipschitz continua $\overline{g}$ sobre $[c,d]$ (incluso en toda la recta real $\mathbb{R}$) poniendo (con $0 \leq \lambda \leq 1$)

$$\overline{g}(y) := \begin{cases} (1-\lambda)g(x^-) + \lambda g(x) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x-) + \lambda\tau(x), \\ (1-\lambda)g(x) + \lambda g(x^+) & \text{si} \quad y = (1-\lambda)\tau(x) + \lambda\tau(x^+). \end{cases}$$

Es claro de la construcción que esta “convexificación” $\overline{g}$ tiene la misma constante Lipschitz que g, y así la demostración está hecha.

$\square$

1.3 El Operador de Composición en el espacio $BV[a,b]$

En esta sección se presentan los resultados dados por Michael Josephy [6], en el año 1981 referentes a la actuación del operador de composición en el espacio $BV[a,b]$. Éste resultado nos permite obtener condiciones necesarias y suficientes en $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de tal manera que el operador de composición F, asociado a f, actúe en el espacio $BV[a,b]$.

Definición 2. *Consideremos $\mathcal{F}$ el espacio vectorial de todas las funciones $u:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ y $f:[a,b]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función cualquiera. El operador de composición F, asociado a la función f, es definido del espacio $\mathcal{F}$ al espacio $\mathcal{F}$ por la expresión*

$$F_u(t) := f(t,u(t)), \qquad t\in[a,b], \quad u\in\mathcal{F}.$$

En el caso particular, cuando la función f no dependa de una sola variable; es decir, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, el operador F asociado a f viene definido por:

$$F_u(t) := f(u(t)), \qquad t\in[a,b], \quad u\in\mathcal{F}.$$

Esto último se conoce como caso autónomo mientras que el caso general, cuando $f:\ [a,b]\times\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ se denomina caso no-autónomo.

Corolario 1. *(Invarianza) Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. El operador de composición F, asociado a f, actúa en el espacio $BV[a,b]$ si y sólo si, actúa en el espacio $BV[c,d]$. Es decir, la actuación del operador F no depende del intervalo donde están definidas las funciones.*

Teorema 3. *(Josephy [6]) Consideremos $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea F el operador de composición asociado a la función f. El operador F actúa en el espacio $BV[a,b]$ si y sólo si, f es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Además, el operador F es siempre acotado sobre conjuntos acotados de $BV[a,b]$.*

Demostración:

En virtud del corolario 1 podemos suponer que el intervalo $[a, b]$ es el intervalo $[0, 1]$. Supongamos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz en $\mathbb{R}$. Consideremos $u \in BV[0, 1]$ y

$$\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$$

una partición cualquiera del intervalo $[0, 1]$. Además, tenemos la siguiente estimación

$$\sum_{j=1}^{m} |f(u(t_j)) - f(u(t_{j-1}))| \leq \sum_{j=1}^{m} k(||u||_\infty)|u(t_j) - u(t_{j-1})|$$

donde $k(||u||_\infty)$ es la constante de Lipschitzidad de f en el intervalo $[-||u||_\infty, ||u||_\infty]$.

En consecuencia,

$$V(F_u, [0, 1]) \leq k(||u||_\infty)V(u; [0, 1]) < \infty,$$

y así hemos demostrado que F actúa en el espacio $BV[0, 1]$.

Supongamos, ahora que el operador F de composición, asociado a $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, actúa en el espacio $BV[0, 1]$, sin embargo, la función f no es Lipschitz local en $\mathbb{R}$, en este caso podemos suponer que f no es Lipschitz en el intervalo [0,1].

Como la función f no es Lipschitz en $[0, 1]$ tenemos que dada la sucesión $k_n := (n^2+n)$ existen sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el intervalo $[0, 1]$ tales que

$$|f(u_n) - f(v_n)| \geq (n^2 + n)|u_n - v_n|. \tag{1.1}$$

Como el operador F actúa en el espacio $BV[0, 1]$ y la función identidad $u(s) = s, \quad (s \in [0, 1])$ pertenece al espacio $BV[0, 1]$, se obtiene que $f \in BV[0, 1]$ y así f es acotada. Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer en la demostración, que $|f(t)| \leq \frac{1}{2}, \quad t \in [0, 1]$.

En consecuencia, de la desigualdad (1.1), se deduce la siguiente estimación

$$1 \geq |f(u_n) - f(v_n)| \geq (n^2 + n)|u_n - v_n|.$$

De esta desigualdad deducimos, pasando a subsucesiones en el caso de ser necesario, lo siguiente:

i) Las sucesiones $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ converga a un punto $u^* \in [0,1]$.

ii) $|u_n - u^*| < \dfrac{1}{(n+1)^2}$ para $n = 1, 2 \ldots$

Definamos la función $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la expresión:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = 0, \\ \\ u_n & \text{si} \quad t = \dfrac{1}{n+1} + k|u_n - v_n| \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \\ v_n & \text{si} \quad t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \\ \\ v_1 & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Demostremos que $u \in BV[0,1]$, pero $F_u \notin BV[0,1]$.

Consideremos el número

$$m_n : \left[\frac{u_n - v_n}{n^2 + n}\right],$$

(donde [.] indica la parte entera de un número) y sea Π_n la partición del intervalo $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+1}\right]$ definida por:

$$\Pi_n : \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}|u_n - v_n| < \frac{1}{n+1} + |u_n - v_n| < \cdots <$$

$$\cdots < \frac{1}{n+1} + \frac{2m_n - 1}{2}|u_n - v_n| + \frac{1}{n+1} + m_n|u_n - v_n| < \frac{1}{n}.$$

La variación de la función u en el intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ se puede estimar de la manera siguiente:

$$V\left(u, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \leq 2m_n|u_n - v_n| + |u_{n1} - u*| + |u* - u_n| +$$

$$+|u_n - v_n| \leq \frac{2}{n^2+n} + \frac{1}{n_2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n_2+n} \leq \frac{3}{n^2}.$$

En consecuencia,

$$V(u, [0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} < \infty.$$

Por otro lado, se obtiene la siguiente estimación de la variación de la función F_u

$$V\left(F_u; \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) \geq 2m_n|f(u_n) - f(v_n)| \geq 2m_n(n^2+n)|u_n - v_n| \geq 2.$$

En consecuencia,

$$V(Fu, [0,1]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 < +\infty.$$

$\square$

Para ver más detalles sobre el operador de composición remitimos al lector a [10].

CAPÍTULO 2

ESPACIO DE LAS FUNCIONES DE χ-VARIACIÓN ACOTADA

En el presente Capítulo se describe la noción de χ-variación acotada introducida en 1975 por B. Korenblum en [9]. Se introduce la clase de funciones con χ-variación acotada y se demuestra que tiene estructura de espacio vectorial, espacio Normado y de espacio de Banach, así como también, se enuncian y demuestran algunos resultados importantes referentes a este espacio de funciones.

2.1 Funciones de χ-Variación Acotada

En el año 1975, B. Korenblum [9], considera como generalización de la noción de variación acotada, una nueva clase de variación para las funciones acotadas, llamada χ-variación, la cual se diferencia de las anteriores en que una función de distorción χ es introducida para medir intervalos en el dominio de la función y no en el rango.

Por consiguiente, comenzaremos presentando la noción de la χ-función, la cual puede ser vista como un cambio de escala en la longitud de los subintervalos de $[a, b]$, tal que la longitud de $[a, b]$ es 1, si $\chi(1) = 1$.

Definición 3. *Se dice que la función* $\chi : [0,1] \to [0,1]$ *es una* χ*-función si satisface las siguientes propiedades:*

(i) χ *es continua, con* $\chi(0) = 0$ *y* $\chi(1) = 1$,

(ii) χ *es concava (hacia abajo) y creciente, y*

(iii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\chi(x)}{x} = \infty$.

Proposición 3. *Sea* $\chi : [0,1] \to [0,1]$ *una* χ*-función entonces* χ *es subaditiva, es decir,*

$$\chi(x+y) \leq \chi(x) + \chi(y). \tag{2.1}$$

Demostración:

Para toda función L concava y continua se cumple la siguiente propiedad de las pendientes:

$$\frac{L(a) - L(y)}{a - y} \leq \frac{L(x) - L(0)}{x - 0} \qquad \text{con} \quad 0 < x, y < a.$$

Considerando $L = \chi$ (la cual, por definición es concava y continua, con $\chi(0) = 0$) y $a = x + y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\chi(x+y) - \chi(y)}{(x+y) - y} &\leq \frac{\chi(x) - \chi(0)}{x - 0} \\ \frac{\chi(x+y) - \chi(y)}{x} &\leq \frac{\chi(x)}{x} \end{aligned}$$

de donde

$$\chi(x+y) \leq \chi(x) + \chi(y).$$

$\square$

A continuación, se presentan algunos ejemplos que pueden considerarse de especial importancia entre las alternativas para elegir χ.

Ejemplo 1:

Consideremos la función $\chi_\alpha : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida mediante la siguiente expresión:

$$\chi_\alpha(x) = x^\alpha \qquad \text{para} \quad 0 < \alpha < 1,$$

la cual es conocida como el caso de Gevrey y satisface las propiedades de una χ-función, ya que:

(i) $\chi_\alpha(x)$ es continua en $[0,1]$ y

$$\chi_\alpha(0) = 0^\alpha = 0 \qquad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\chi_\alpha(1) = 1^\alpha = 1 \qquad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1.$$

(ii) Para $0 < \alpha < 1$ tenemos

$$\chi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in [0,1],$$

por lo tanto, $\chi_\alpha(x)$ es creciente y además

$$\chi''_\alpha(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{x^{2-\alpha}} \leq 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in [0,1],$$

de donde se obtiene que $\chi_\alpha(x)$ es concava.

(iii) Para $0 < \alpha < 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\chi_\alpha(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = \frac{1}{0^{1-\alpha}} = \infty.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\chi_\alpha(x)$ es una χ-función.

Ahora, veamos unos casos particulares para ilustrar este ejemplo.

Para el caso en que $\alpha = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\chi_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}}.$$

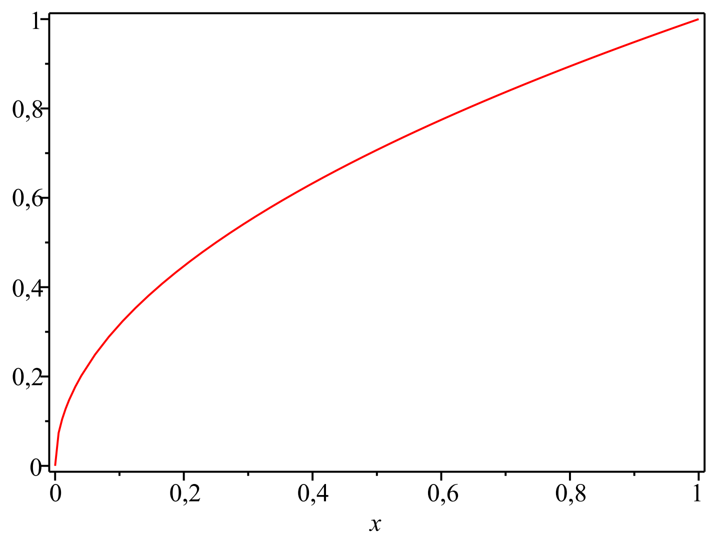

Figura 2.1: Función $\chi_\alpha(x) = x^\alpha$ para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Es una χ-función.

Para $\alpha = \frac{1}{3}$ tenemos que

$$\chi_{\frac{1}{3}}(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$

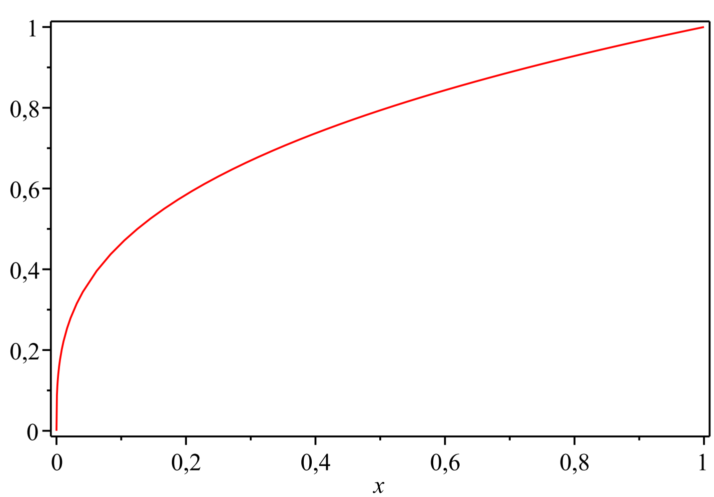

Figura 2.2: Función $\chi_\alpha(x) = x^\alpha$ para $\alpha = \frac{1}{3}$.

Es una χ-función.

Ejemplo 2:

Consideremos la función $\chi_0 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida mediante la siguiente expresión:

$$\chi_0(x) = \begin{cases} x(1-\log x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

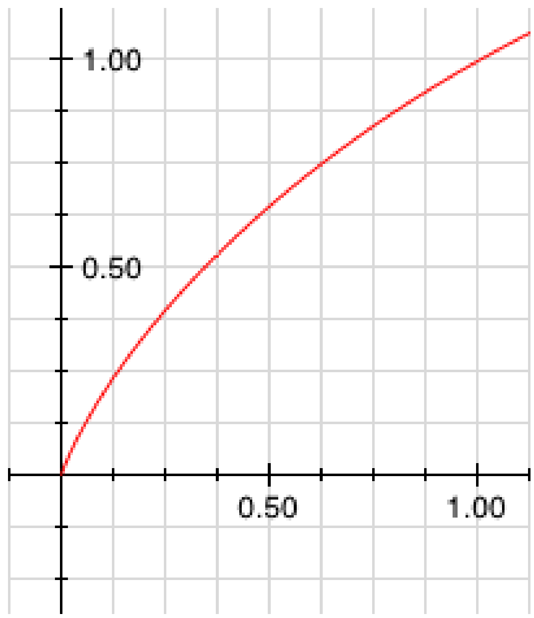

Figura 2.3: Función $\chi_0(x)$.

la cual es usada por B. Korenblum en [9] y satisface las propiedades de una χ-función puesto que:

(i) $\chi_0(x)$ es continua en $[0,1]$, en particular, como

$$\lim_{x\to 0^+} \chi_0(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1-\log(x)) = 0 = \chi_0(0),$$

la función es continua en $x=0$.

Además,

$$\chi_0(0) = 0,$$

$$\chi_0(1) = 1(1-\log(1)) = 1.$$

(ii) Para todo $x \in [0,1]$,

$$\chi_0'(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{\ln(10)} - \frac{1}{\ln(10)} > 0,$$

por lo tanto, $\chi_0(x)$ es creciente y, además,

$$\chi_0''(x) = -\frac{1}{x\ln(10)} \leq 0,$$

de donde se tiene que $\chi_0(x)$ es concava.

(iii) Cumple que,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\chi_0(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\log(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 - \log(x) = 1 - \log(0) = \infty.$$

Por tanto, podemos afirmar que $\chi_0(x)$ es una χ-función.

Ejemplo 3:

Consideremos la función $\chi_1 : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida mediante la siguiente expresión:

$$\chi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}\ln x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

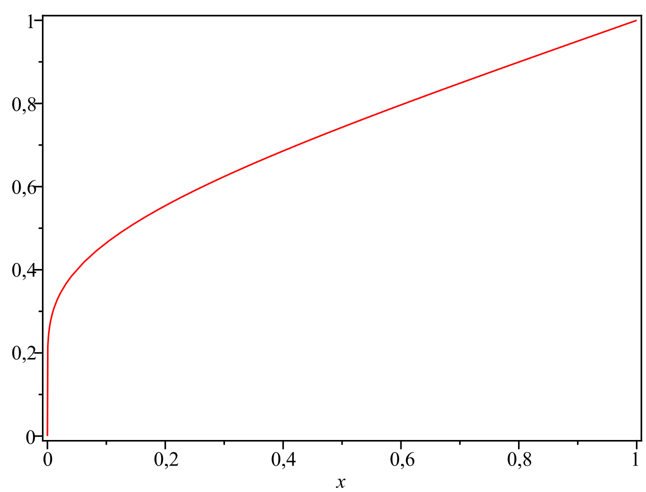

Figura 2.4: Función $\chi_1(x)$.

la cual satisface las propiedades de una χ-función ya que:

(i) $\chi_1(x)$ es continua en $[0,1]$, debido a que

$$\lim_{x\to 0}\chi_1(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(x)} = 0 = \chi_1(0).$$

En consecuencia, la función es continua en $x=0$.

Además,

$$\chi_1(0) = 0,$$
$$\chi_1(1) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(1)} = 1.$$

(ii) Para todo $x \in [0,1]$,

$$\chi_1'(x) = \frac{1}{2x(1-\frac{1}{2}\ln(x))^2} \geq 0,$$

por lo tanto, $\chi_1(x)$ es creciente y además,

$$\chi_1''(x) = \frac{2\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x)^2 - \frac{1}{x}\ln(x)}{4x^2(1-\frac{1}{2}\ln(x))^4} \leq 0,$$

de donde $\chi_1(x)$ es concava.

(iii) Cumple que,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\chi_1(x)}{x} = \infty.$$

En efecto,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\chi_1(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\frac{1}{2}\ln(x))^{-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(x)} = \infty\cdot 0,$$

y aplicando la regla de L' Hopital tenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{2}\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x} = \infty.$$

Por lo tanto, podemos afirmar que $\chi_1(x)$ es una χ-función.

Esta noción de χ-función nos permite introducir la definición de χ-variación acotada.

Definición 4. *Una función real* u *en* $[0,1]$ *se dice de* χ*-variación acotada existe un* $C > 0$ *tal que para cada partición* $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ *de* $[0,1]$*,*

$$\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \leq C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}). \tag{2.2}$$

$C_0 = \text{mín}\, C$ *es llamado la* χ*-variación total de* $u : C_0 = \chi V(u)$*, es decir,*

$$\chi V(u) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})},$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π *de* $[0,1]$*.*

Denotaremos a la familia de todas las funciones de χ-variación acotada por χBV[0,1].

A continuación se presentan algunos ejemplos que ilustran la definición de χ-variación acotada.

Ejemplo 1:

Consideremos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante u en $[0,1]$ definida por

$$u(x) = c \qquad \text{para todo} \quad x \in [0,1].$$

Entonces, la χ-variación acotada de la función u en el intervalo $[0,1]$ viene dada por

$$\begin{aligned}
\chi V(u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})}, \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |c - c|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} = 0,
\end{aligned}$$

donde $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 2:

Sea la función u definida por

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}, & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 1, & \text{si} \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Entonces, la χ-variación acotada de la función u en el intervalo $[0, 1]$ viene dada por

$$\begin{aligned} \chi V(u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{\frac{3}{4}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\ &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

donde $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, es el conjunto de todas las particiones del intervalo $[0, 1]$.

Observación:

En este trabajo sólo consideraremos funciones reales definidas en $[0, 1]$. Los resultados aplicados a una función u sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$, harán referencia a la función $u \circ \alpha$ definida sobre $[0, 1]$, cuando $\alpha(x) = (b-a)x+a$, lo cual demostraremos en el Capítulo 3 con el Lema de Invarianza.

2.2 Propiedades del espacio de funciones con χ-Variación Acotada

A continuación enunciaremos y demostraremos algunas propiedades de la funciones de χ-variación acotada, que permitirán conocer algunas características del mismo. Comenzaremos demostrando que la clase de funciones con χ-variación acotada $\chi BV[0, 1]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial, para ello demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 4. *La clase de funciones con χ-variación acotada $\chi BV[0, 1]$, está dotado de una estructura de espacio vectorial, es decir, $\chi BV[0, 1]$ satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todo $u, v \in \chi BV[0, 1]$, se tiene que $u + v \in \chi BV[0, 1]$.*

2. *Para todo $u, v, w \in \chi BV[0, 1]$, se tiene que $\chi V((u + v) + w) = \chi V(u + (v + w))$.*

3. *Existe una función nula, $l(x) \in \chi BV[0, 1]$, definida como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$ tal que $\chi V(u + l) = \chi V(u)$, para todo $u \in \chi BV[0, 1]$.*

4. *Para todo* $u \in \chi BV[0,1]$*, existe* $-u \in \chi BV[0,1]$ *definido como* $-u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $(-u)(x) = -u(x)$*, entonces* $\chi V(-u+u) = \chi V(l)$*.*

5. *Para todo* $u, v \in \chi BV[0,1]$*, se tiene que* $\chi V(u+v) = \chi V(v+u)$*.*

6. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \chi BV[0,1]$*, se tiene que* $\alpha u \in \chi BV[0,1]$*.*

7. *Para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \chi BV[0,1]$*, se tiene que* $\chi V((\alpha(\beta u)) = \chi V((\alpha\beta)u)$*.*

8. *Para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \chi BV[0,1]$*, se tiene que* $\chi V((\alpha+\beta)u) = \chi V(\alpha u + \beta u)$*.*

9. *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $u \in \chi BV[0,1]$*, se tiene que* $\chi V(\alpha(\beta u)) = \chi V((\alpha\beta)u)$*.*

10. *Para cualquier* $u \in \chi BV[0,1]$ *y el escalar 1, se tiene que* $\chi V(1u) = \chi V(u)$*.*

Demostración:

1. Sean $u, v \in \chi BV[0,1]$, entonces demostraremos que la suma de dos funciones con χ-variación acotada, pertenece a la clase de funciones con χ-variación acotada. En efecto, utilizando la definición de χ-variación acotada y las propiedades del supremo, tenemos:

$$\begin{aligned}
\chi V(u+v) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) - (u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + v(x_i) - u(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1}) + v(x_i) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u(x_i) - u(x_{i-1})) + (v(x_i) - v(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&\leq \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} + \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(u) + \chi V(v) < \infty.
\end{aligned}
$$

Con lo cual tenemos que $u + v \in \chi BV[0,1]$.

2. Sean $u, v, w \in \chi BV[0,1]$, entonces de la definición de χ-variación acotada, y de la propiedad del supremo, se tienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
\chi V((u+v)+w) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |((u+v)+w)(x_i) - ((u+v)+w)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) + w(x_i) - ((u+v)(x_{i-1}) + w(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + v(x_i) + w(x_i) - u(x_{i-1}) - v(x_{i-1}) - w(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + (v+w)(x_i) - (u(x_{i-1}) + (v+w)(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+(v+w))(x_i) - ((u+(v+w))(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(u+(v+w)).
\end{aligned}
$$

3. Sea $l(x) \in \chi BV[0,1]$ la función nula, definida como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, veamos que para cualquier función $u \in \chi BV[0,1]$, la χ-variación acotada de la suma de u con la función nula es igual a la χ-variación acotada de la función u.

   En efecto, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\chi V(u+l) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+l)(x_i) - (u+l)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + l(x_i) - u(x_{i-1}) - l(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})},
\end{aligned}
$$

   como $l(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $l(x_i) = 0$ y $l(x_{i-1}) = 0$ para todo $i \in [1, ..., n]$, de donde se deduce que:

$$\chi V(u+l) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} = \chi V(u).$$

4. Sea $u \in \chi BV[0,1]$ y el inverso aditivo definido como $-u : [0,1] \to \mathbb{R}$, entonces según la noción de χ-variación acotada tenemos:

$$\begin{aligned}
\chi V(-u+u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(-u+u)(x_i) - (-u+u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} | -u(x_i) + u(x_i) - (-u(x_{i-1}) + u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |0-0|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |l(x_i) - l(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} = \chi V(l).
\end{aligned}$$

5. Sean $u, v \in \chi BV[0,1]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\chi V(u+v) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i)-(u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i)+v(x_i)-u(x_{i-1})-v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v(x_i)+u(x_i)-v(x_{i-1})-u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(v+u)(x_i)-(v+u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})} \\
&= \chi V(v+u).
\end{aligned}
$$

6. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in \chi BV[0,1]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\chi V(\alpha u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i)-\alpha u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u(x_i)-u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i-x_{i-1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha||(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= |\alpha| \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= |\alpha| \chi V(u).
\end{aligned}
$$

Con lo cual $\alpha u \in \chi BV[0,1]$.

7. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in \chi BV[0,1]$, entonces de la definición de χ-variación acotada tenemos:

$$
\begin{aligned}
\chi V(\alpha(\beta u)) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha(\beta u(x_i)) - \alpha(\beta u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha(\beta(u(x_i) - u(x_{i-1})))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha\beta(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V((\alpha\beta)u) = |\alpha\beta| \chi V(u).
\end{aligned}
$$

8. Considerando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u \in \chi BV[0,1]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\chi V((\alpha+\beta)u) &= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |(\alpha+\beta)u(x_i) - (\alpha+\beta)u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i) + \beta u(x_i) - \alpha u(x_{i-1}) - \beta u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |(\alpha u + \beta u)(x_i) - (\alpha u + \beta u)(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(\alpha u + \beta u).
\end{aligned}
$$

9. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \chi BV[0,1]$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\chi V(\alpha(u+v)) &= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u+v)(x_i) - \alpha(u+v)(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha(u(x_i) + v(x_i)) - \alpha(u(x_{i-1}) + v(x_{i-1}))|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha u(x_i) + \alpha v(x_i) - \alpha u(x_{i-1}) - \alpha v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(\alpha u + \alpha v)(x_i) - (\alpha u + \alpha v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(\alpha u + \alpha v).
\end{aligned}
$$

10. Sea $u \in \chi BV[0,1]$ y el escalar 1, entonces:

$$
\begin{aligned}
\chi V(1u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(1u)(x_i) - (1u)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(u).
\end{aligned}
$$

$\square$

Como se cumplen todas estas propiedades se tiene que $\chi BV[0,1]$ es un espacio vectorial.

A continuación se presentan algunos resultados relacionados con este espacio de funciones que permitirán comprender algunas características del mismo.

Proposición 5. *Si u es una función de χ-variación acotada en $[0,1]$ entonces u es acotada en $[0,1]$ y además,*

$$|u(x)| \leq |u(0)| + \frac{3}{2}\chi V(u).$$

Demostración:

Sea u una función de χ-variación acotada, entonces para toda partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ del intervalo $[0,1]$ tenemos que

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i - x_{i-1})} \leq \chi V(u).$$

Consideremos para $x \in [0,1]$ la partición $\sigma : 0 = x_0 < x_1 = x < x_2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{|u(x) - u(0)| + |u(1) - u(x)|}{\chi(x-0) + \chi(1-x)} &\leq \chi V(u)\\ |u(x) - u(0)| + |u(1) - u(x)| &\leq \chi V(u).(\chi(x) + \chi(1-x)).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}2|u(x)| &= |u(x) - u(0) + u(x) - u(1) + u(0) + u(1)|\\ &\leq |u(x) - u(0)| + |u(x) - u(1)| + |u(0) + u(1)|\\ &\leq \chi V(u).(\chi(x) + \chi(1-x)) + |u(0)| + |u(1)|\end{aligned}$$

además,

$$|u(1)| \leq |u(0)| + \chi V(u)$$

y entonces

$$2|u(x)| \leq 2|u(0)| + \chi V(u) + \chi V(u).(\chi(x) + \chi(1-x)).$$

Luego como

$$1 \leq \chi(x) + \chi(1-x) < 2,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 2|u(x)| &\leq 2|u(0)| + \chi V(u) + 2\chi V(u) \\ &= 2|u(0)| + 3\chi V(u), \end{aligned}$$

de donde

$$|u(x)| \leq |u(0)| + \frac{3}{2}\chi V(u).$$

□

Proposición 6. *Cada función de variación acotada en el sentido clásico es de χ-variación acotada y la Variación Total $\chi V(u) \leq V(u)$.*

Demostración:

Sea u una función real en $[0,1]$. Si u es de variación acotada sobre $[0,1]$, entonces existe una constante positiva C tal que para cualquier partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| &\leq V(u) \\ &= V(u) \cdot 1 \\ &= V(u)\chi(1) \\ &= V(u)\chi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right) \\ &\leq V(u)\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

lo que implica que u es de χ-variación acotada.

Además,

$$\sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \quad \leq \quad V(u),$$

es decir,

$$\chi V(u) \leq V(u).$$

$\square$

A continuación se presenta con un ejemplo, que no toda función de χ-variación acotada es de variación acotada.

Lema 1. *Existe una sucesión infinita $\{a_i\}$ de números positivos tal que $\sum a_i = 1$ y $\sum \chi(a_i) = +\infty$.*

Demostración:

Escogiendo cualquier sucesión de números positivos α_m de manera que $\sum \alpha_m = 1$. Como χ es concava hacia abajo, se deduce de la definición 3 que $\dfrac{\chi(x)}{x}$ es creciente hacia $+\infty$ cuando $x \to 0^+$. Por lo tanto, para cada $m = 1, 2, ...$ podemos escoger un b_m positivo tan pequeño que $\dfrac{\chi(b_m)}{b_m} \geq \dfrac{1}{\alpha_m}$ y, de manera que $\dfrac{\alpha_m}{b_m} = k_m$ es un entero.

Ahora, escogemos la sucesión $\{a_i\}$ de los números b_m, cada b_m repetido k_m veces. Así,

$$\sum a_i = \sum k_m b_m = \sum \alpha_m = 1,$$

y

$$\sum \chi(a_i) = \sum k_m \chi(b_m) \geq \sum k_m b_m / \alpha_m = \sum 1 = +\infty.$$

$\square$

Ejemplo:

Veamos que no toda función de χ-variación acotada es de variación acotada.

Para los a_i del Lema 1, colocamos $x_0 = 0$, $x_i = a_1 + \cdots + a_i$, $i = 1, 2, \ldots$ y definimos para $0 \leq x \leq 1$ la función u de la siguiente manera

$$u(x) = \begin{cases} \chi(x - x_i) \qquad \text{para} \quad x_i \leq x < x_{i+1} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \quad \text{para} \quad x = 1. \end{cases}$$

Sean $0 \leq x < y < 1$ arbitrarios. Entonces, existe un único entero $m \leq n$ tal que $x_n \leq x < x_{n+1}$ y $x_m \leq y < x_{m+1}$. Pero,

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= \chi(y - x_m) - \chi(x - x_n) \\ &\leq \chi(y - x_n) - \chi(x - x_n) \\ &\leq \chi(y - x_n - x + x_n) \\ &= \chi(y - x), \end{aligned}$$

de donde, $u(y) - u(x) \leq \chi(y - x)$. Por lo tanto, u es χ-decreciente con constante 1, y por el teorema 6, de χ-variación acotada y

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| &\leq 2C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Entonces, $\chi V(u) \leq 2$.

Luego, usando la propiedad de semiaditividad de $V(u)$, tenemos que la variación total de u es

$$\begin{aligned} V(u, [0,1]) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| &\geq \sum_{i=1}^{\infty} V(u, [x_{i-1}, x_i]) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi(a_i) = +\infty. \end{aligned}$$

De donde se tiene que u no es de variación acotada. $\square$

Proposición 7. *Si u es monótona, entonces $\chi V(u) = V(u) = |u(1) - u(0)|$.*

Demostración:

Sea u una función monótona en el intervalo $[0, 1]$, entonces u es de variación acotada en $[0, 1]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que u es monótona creciente, entonces para toda partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0, 1]$ tenemos que

$$\begin{aligned} V(u) &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \\ &= \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} (u(x_i) - u(x_{i-1})) \\ &= \sup_{\pi} \{u(x_n) - u(x_0)\} \\ &= u(1) - u(0). \end{aligned}$$

Análogamente, podemos suponer que sucede para u monótona decreciente, es decir,

$$V(u) = \sup_{\pi} \{u(x_0) - u(x_n)\} = u(0) - u(1)$$

entonces,

$$V(u) = |u(1) - u(0)|.$$

Consideremos $\pi = \{0, 1\}$ la partición trivial de $[0, 1]$, tal que $x_0 = 0, x_1 = 1$ entonces, como cada función de variación acotada es de χ-variación acotada, tenemos que:

$$\begin{aligned} \chi V(u) &= \sup_{\pi} \frac{\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\ &= \sup_{\pi} \frac{|u(1) - u(0)|}{\chi(1)} \\ &= \sup_{\pi} |u(1) - u(0)| \\ &= |u(1) - u(0)| = V(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\chi V(u) = V(u) = |u(1) - u(0)|$. $\square$

Proposición 8. *Sea u una función de χ-variación acotada, entonces para todo punto $x \in [0,1]$ existen los limites laterales $u(x^+)$ y $u(x^-)$.*

Demostración:

Sea u una función de χ-variación acotada en $[0,1]$. Supongamos que $0 \leq a < 1$, y que

$$A = \liminf u(x) \leq \limsup u(x) = B$$

cuando $x \to a^+$.

Así, para cada entero positivo n (suficientemente grande), podemos elegir puntos x_i, con $i = 1, \ldots, n+1$, tales que

$$a < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leq a + \frac{1}{n} < 1$$

y

$$|u(x_{i+1}) - u(x_i)| \geq \frac{(B-A)}{2}, \qquad i = 1, \cdots, n,$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |u(x_{i+1}) - u(x_i)| \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(B-A)}{2} = n\frac{(B-A)}{2}.$$

Ahora, usando la partición $\pi = \{0, x_1, x_2, \ldots x_{n+1}, 1\}$ de $[0,1]$ y la definición (2.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} n\frac{(B-A)}{2} &\leq \sum_{i=1}^{n} |u(x_{i+1}) - u(x_i)| + |u(x_1) - u(0)| + |u(1) - u(x_{n+1})| \\ &\leq C\left(\sum_{i=1}^{n} \chi(x_{i+1} - x_i) + \chi(x_1) + \chi(1 - x_{n+1})\right). \end{aligned}$$

Luego, como $0 \leq a < x_i < x_{i+1} \leq a + \dfrac{1}{n} < 1$, obtenemos que

$$\chi(x_i) < \chi(1) = 1,$$

$$\chi(1-x_i) < \chi(1) = 1,$$

y,

$$\chi(x_{i+1}-x_i) \leq \chi\left(\frac{1}{n}\right)$$

entonces,

$$n\frac{(B-A)}{2} \;\leq\; C\left(n\chi\left(\frac{1}{n}\right)+2\right),$$

por tanto,

$$\frac{(B-A)}{2} \;\leq\; C\left(\chi\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\right).$$

Considerando los límites cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$\frac{(B-A)}{2} \leq C \lim_{n\to\infty}\left(\chi\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\right) = C\chi(0) = 0,$$

de donde $B \leq A$, lo cual es una contradicción y, por lo tanto, $A = B$. Entonces, $\lim\limits_{x\to a^+} u(x)$ existe.

Análogamente, podemos demostrar la existencia de $\lim\limits_{x\to a^-} u(x)$ para $0 < a \leq 1$.

$\square$

Proposición 9. *Sea u una función de χ-variación acotada en $[a,b]$. Entonces u sólo tiene una cantidad numerable de discontinuidades, de primer orden.*

Ahora, demostraremos que el espacio $\chi BV[0,1]$ se puede dotar de una estructura de espacio normado, para lo cual definiremos la siguiente función $||\cdot||_{\chi BV}$ del espacio $\chi BV[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ por:

$$||u||_{\chi BV} = |u(0)| + \chi V(u), \quad \text{para todo} \quad u \in \chi BV[0,1].$$

A continuación, veremos que esta función es una norma y que, por tanto, $(\chi BV[0,1], ||\cdot||_{\chi BV})$ es un espacio normado.

Teorema 4. *El funcional* $||\cdot||_{\chi BV} : \chi BV[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una norma, es decir,* $||\cdot||_{\chi BV}$ *satisface las siguientes propiedades:*

(i) $||u||_{\chi BV} \geq 0$ *para todo* $u \in \chi BV[0,1]$*,*

(ii) $||u||_{\chi BV} = 0$ *si y sólo si* $u = 0$*,*

(iii) $||\lambda f||_{\chi BV} = |\lambda|.||u||_{\chi BV}$ *para todo* $u \in \chi BV[0,1]$ *y para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

(iv) $||u+v||_{\chi BV} \leq ||u||_{\chi BV} + ||v||_{\chi BV}$ *para todo* $u, v \in \chi BV[0,1]$*.*

Demostración:

(i) Sea $u \in \chi BV[0,1]$, entonces

$$||u||_{\chi BV} = |u(0)| + \chi V(u).$$

De la definición de módulo $|u(0)| \geq 0$, además, para cada partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ del intervalo $[0,1]$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \geq 0.$$

Por otro lado, por la subaditividad de χ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) \geq \chi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right) = \chi(1) = 1.$$

De donde

$$\chi V(u) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i - x_{i-1})} \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$||u||_{\chi BV} = |u(0)| + \chi V(u) \geq 0.$$

(ii) Si $||f||_{\chi BV} = 0$ se tiene que

$$|u(0)| + \chi V(u) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad |u(0)| = 0 \quad y \quad \chi V(u) = 0,$$

entonces,

$$|u(0)| = 0 \qquad y \qquad \chi V(u) = \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} = 0,$$

lo que implica que necesariamente

$$u(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = 0 \qquad \text{para todo} \quad x_i, x_{i-1} \in [0,1].$$

Considerando la partición $\pi : 0 = x_1 < x_2 = t < x_3 = 1$, tendremos que

$$|u(t) - u(0)| + |u(1) - u(t)| = 0,$$

de donde se tiene que

$$|u(t) - u(0)| = 0 \qquad y \qquad |u(1) - u(t)| = 0,$$

por lo tanto,

$$0 = u(0) = u(t) = u(1) \qquad \forall t \in [0,1],$$

con lo cual $u = 0$.

Ahora, si $u = 0$, implica que $u(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, por lo tanto $||u||_{\chi BV} = 0$.

(iii) Como $u \in \chi BV[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$||\lambda u||_{\chi BV} = |\lambda u(0)| + \chi V(\lambda u),$$

observemos que para cada partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$ tenemos

$$
\begin{aligned}
\chi V(\lambda u) &= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda u(x_i) - \lambda u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda (u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda|.|(u(x_i) - u(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup_{\pi} \frac{|\lambda| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= |\lambda| \sup_{\pi} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= |\lambda|.\chi V(u).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
||\lambda u||_{\chi BV} &= |\lambda u(0)| + \chi V(\lambda u) \\
&= |\lambda|.|u(0)| + |\lambda|.\chi V(u) \\
&= |\lambda|(|u(0)| + \chi V(u)) \\
&= |\lambda| ||u||_{\chi BV}.
\end{aligned}
$$

(iv) Sean $u, v \in \chi BV[0,1]$, entonces por la definición de χ-variación acotada y las propiedades del supremo obtenemos:

$$\begin{aligned}
\chi V(u+v) &= \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u+v)(x_i) - (u+v)(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) + v(x_i) - u(x_{i-1}) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(u(x_i) - u(x_{i-1})) + (v(x_i) - v(x_{i-1}))|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&\leq \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} + \sup \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})|}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1})} \\
&= \chi V(u) + \chi V(v).
\end{aligned}$$

De esta desigualdad y de la definición de la norma $||\cdot||_{\chi BV}$, resulta que:

$$\begin{aligned}
||u+v||_{\chi BV} &= |u(0) + v(0)| + \chi V(u+v) \\
&\leq |u(0)| + |v(0)| + \chi V(u) + \chi V(v) \\
&= (|u(0)| + \chi V(u)) + (|v(0)| + \chi V(v)) \\
&= ||u||_{\chi BV} + ||v||_{\chi BV}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$||u+v||_{\chi BV} \leq ||u||_{\chi BV} + ||v||_{\chi BV}.$$

Con lo cual $||\cdot||_{\chi BV}$ es una norma. $\square$

Observación:

Si dotamos al espacio $\chi BV[0,1]$ con la norma $||\cdot||_{\chi BV}$, se tiene que $(\chi BV[0,1], ||\cdot||_{\chi BV})$ es un espacio normado.

A continuación demostraremos que el espacio $\chi BV[0,1]$ con la norma $||\cdot||_{\chi BV}$ es un espacio normado completo.

Teorema 5. *El espacio* $(\chi BV[0,1], ||\cdot||_{\chi BV})$ *es un Espacio de Banach.*

Demostración:

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\chi BV[0,1], ||\cdot||_{\chi BV})$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N, tal que si $n, m \geq N$, se tiene que:

$$||u_n - u_m||_{\chi BV} < \varepsilon.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_n(0) = 0$ con $n \geq 1$. De donde tenemos que:

$$\chi V(u_n - u_m) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n, m \geq N. \tag{2.3}$$

Considerando la partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 = x < x_2 = 1$ del intervalo $[0,1]$, se tiene de la definición de χ-variación acotada y de (2.3), lo siguiente:

$$\frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(0)| + |(u_n - u_m)(1) - (u_n - u_m)(x)|}{\chi(x) + \chi(1-x)} < \varepsilon,$$

de donde,

$$\frac{|(u_n - u_m)(x) - (u_n - u_m)(0)|}{\chi(x) + \chi(1-x)} < \varepsilon.$$

Luego, como $u_n(0) = 0$ para todo $n \geq 1$ entonces,

$$\frac{|(u_n - u_m)(x)|}{\chi(x) + \chi(1-x)} < \varepsilon,$$

es decir,

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon(\chi(x) + \chi(1-x)).$$

Por otro lado, para la partición $\pi : 0 < x < 1$ tenemos que:

$$\chi(x) < \chi(1) = 1 \quad \text{y,}$$

$$\chi(1-x) < \chi(1) = 1,$$

entonces $\chi(x) + \chi(1-x) < 2$, de donde

$$|u_n(x) - u_m(x)| < 2\varepsilon.$$

Lo que significa que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que toda sucesión de Cauchy converge, es decir, que existe el límite de la sucesión, y lo denotaremos de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \qquad \text{para todo} \quad t \in [0,1]$$

y $u_n(x) - u_m(x)$ tiende a $u_n(x) - u(x)$ en $[0,1]$ cuando $m \longrightarrow \infty$.

A continuación, demostraremos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge bajo la norma $|| \cdot ||_{\chi BV}$, por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$||u_n(x) - u(x)||_{\chi BV} = ||u_n(x) - \lim_{m\to\infty} u_m(x)||_{\chi BV} = \lim_{m\to\infty} ||u_n(x) - u_m(x)||_{\chi BV},$$

ahora considerando el límite cuando $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(x) - u(x)||_{\chi BV} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} ||u_n(x) - u_m(x)||_{\chi BV} = 0.$$

De donde,

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n(x) - u(x)||_{\chi BV} = 0,$$

lo que implica que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a u en la norma $||\cdot||_{\chi BV}$, luego $(\chi BV[0,1], ||\cdot||_{\chi BV})$ es un espacio de Banach.

$\square$

A continuación, presentaremos la siguiente definición, que nos permitirá introducir en el Capítulo 3 el teorema de descomposición de Korenblum, para las funciones de χ-variación acotada, así como también enunciaremos y demostraremos algunas consecuencias de la misma.

Definición 5. *Una función u sobre $[0,1]$ se dice χ-decreciente con constante $C \geq 0$, si para cada intervalo $I = [x, y]$, con $0 \leq x < y \leq 1$,*

$$u(y) - u(x) \leq C\chi(y - x). \tag{2.4}$$

Ahora, veamos un ejemplo de este tipo de funciones χ-decrecientes.

Ejemplo:

Consideremos u una función Hölder continua sobre $[0,1]$ con exponente α, $0 < \alpha < 1$ entonces existe un $C > 0$ tal que para cada $x, y \in [0,1]$ se tiene que

$$|u(y) - u(x)| \leq C|y - x|^{\alpha},$$

entonces, si consideramos la χ-función $\chi_\alpha(x) = x^\alpha$ con $0 < \alpha < 1$ tenemos que

$$u(y) - u(x) \leq |u(y) - u(x)| \leq C\chi_\alpha(y - x),$$

de donde, se tiene que u es χ_α-decreciente con constante C.

Proposición 10. *Si u es una función decreciente entonces u es χ-decreciente.*

Demostración:

Sea u una función decreciente sobre $[0,1]$, entonces para todo $x, y \in [0,1]$ tal que $x < y$ se tiene que $u(x) \geq u(y)$ y, por lo tanto, $u(y) - u(x) \leq 0$.

Luego, considerando $C = 0$, tenemos que u es χ-decreciente.

$\square$

Proposición 11. *Si u es una función χ-decreciente, entonces u tiene discontinuidades de salto hacia abajo, es decir,*

$$u(a^-) \geq u(a) \geq u(a^+), \qquad x \leq a \leq y.$$

Demostración:

Sea u una función χ-decreciente, entonces para $I = [x, y]$ con $x \leq a \leq y$ tenemos que:

$$\begin{aligned} u(a) - u(x) &\leq C\chi(a - x), \quad \text{y} \\ u(y) - u(a) &\leq C\chi(y - a). \end{aligned}$$

Luego, considerando $x \to a$ y $y \to a$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(a) - u(a^-) &\leq 0, \quad \text{y} \\ u(a^+) - u(a) &\leq 0, \end{aligned}$$

entonces de la proposición 8, tenemos que $u(a^+)$ y $u(a^-)$ existen y, además

$$\begin{aligned} u(a) &\leq u(a^-), \\ u(a^+) &\leq u(a), \end{aligned}$$

de donde,

$$u(a^-) \geq u(a) \geq u(a^+).$$

□

Teorema 6. *Si una función u es χ-decreciente con constante C, entonces u es de χ-variación acotada y*

$$\chi V(u) \leq 2C + |u(1) - u(0)|. \tag{2.5}$$

Demostración:

Sea u una función χ-decreciente sobre $[0,1]$ con constante C, entonces para cada intervalo $I=[x,y]$ con $0\leq x<y\leq 1$, tenemos que

$$u(y)-u(x)\leq C\chi(y-x).$$

Entonces, para toda partición $\pi: 0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ de $[0,1]$, se cumple que

$$u(x_i)-u(x_{i-1})\leq C\chi(x_i-x_{i-1}),$$

además,

$$\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))\leq C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1}). \tag{2.6}$$

Luego, como

$$\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))^{+}+\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))^{-},$$

tenemos, por (2.6), que,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})| &\leq C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})+C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})\\ &= 2C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1}),\end{aligned}$$

por lo tanto, u es de χ-variación acotada.

Por otro lado, para toda partición π de $[0,1]$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))^{+}-\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))^{-}=S^{+}-S^{-},$$

además,

$$u(1)-u(0)=\sum_{i=1}^{n}(u(x_i)-u(x_{i-1}))=S^{+}-S^{-},$$

y

$$u(1)-u(0)\leq|u(1)-u(0)|,$$

entonces,

$$S^+ - S^- \leq |u(1) - u(0)|,$$

es decir,

$$S^+ \leq S^- + |u(1) - u(0)|. \tag{2.7}$$

Del mismo modo, tenemos que para toda partición π de $[0,1]$

$$\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| = S^+ + S^-,$$

utilizando (2.7) y (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| &\leq S^- + S^- + |u(1) - u(0)| \\
&= 2S^- + |u(1) - u(0)| \\
&\leq 2C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) + |u(1) - u(0)| \\
&= 2C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) + |u(1) - u(0)|\chi(1) \\
&= 2C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) + |u(1) - u(0)|\chi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\right),
\end{aligned}$$

y en virtud de la subaditividad de χ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| &\leq 2C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) + |u(1) - u(0)| \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}) \\
&= (2C + |u(1) - u(0)|) \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\chi V(u) \leq 2C + |u(1) - u(0)|.$$

$\square$

A continuación, demostraremos con un ejemplo que no siempre se cumple el recíproco del teorema anterior, es decir, no todas las funciones de χ-variación acotada son χ-decrecientes.

Ejemplo:

Consideremos la función u sobre $[0,1]$, definida por

$$u(x) = \chi(x)^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in [0,1].$$

Como u es monótona creciente, y por lo tanto de variación acotada, entonces por la proposición (6), u es de χ-variación acotada. Luego para el intervalo $I = [0,x]$, con $0 \leq x \leq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{[u(x)-u(0)]}{\chi(x-0)} &= \frac{[u(x)-u(0)]}{\chi(x)} \\ &= \frac{\chi(x)^{\frac{1}{2}} - \chi(0)^{\frac{1}{2}}}{\chi(x)} \\ &= \frac{\chi(x)^{\frac{1}{2}}}{\chi(x)} = \chi(x)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Considerando el límite cuando $x \to 0^+$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{[u(x)-u(0)]}{\chi(x-0)} = \lim_{x\to 0^+} \chi(x)^{-\frac{1}{2}} = \chi(0)^{-\frac{1}{2}} = +\infty.$$

Por lo tanto, u no puede satisfacer (2.4) para cualquier $C > 0$, es decir, no existe un número positivo C, por grande que sea, tal que

$$\frac{[u(x)-u(0)]}{\chi(x)} \leq C.$$

CAPÍTULO 3

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE KORENBLUM

En 1975 cuando B. Korenblum [9] introduce la noción de χ-variación acotada, encuentra como ventaja de este espacio de funciones, que una función de χ-variación acotada puede ser descompuesta en la diferencia de dos funciones χ-decrecientes. En este Capítulo presentamos un teorema análogo de selección de Helly para funciones de χ-variación acotada junto con la demostración del teorema de representación de Korenblum, el cual como se dijo anteriormente, indica que toda función de χ-variación acotada se puede escribir como la diferencia de funciones χ-decrecientes y concluimos presentando el lema de invarianza, el cual nos permite aplicar todos estos resultados a funciones u sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$.

3.1 Teorema de Selección de Helly

A continuación, presentamos un Teorema análogo de selección de Helly, para el espacio de funciones de χ-variación acotada.

Teorema 7 (Teorema de Selección de Helly)**.** *Una familia arbitraria infinita de funciones definidas en* $[0, 1]$*, las cuales son uniformemente acotadas y uniformemente* χ-

decrecientes, contiene una subsucesión, la cual converge en cada punto de $[0,1]$ *a una función* χ*-decreciente.*

Demostración:

Denotemos por $\mathcal{F}$ la familia arbitraria infinita de funciones definidas en $[0,1]$. Supongamos que para cada $u \in \mathcal{F}$ y cada par $0 \leq x < y \leq 1$, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$|u(x)| \leq C, \tag{3.1}$$

y,

$$u(y) - u(x) \leq C\chi(y - x). \tag{3.2}$$

Usando (3.1) podemos en virtud de la técnica de diagonalización de Cantor, encontrar una sucesión de funciones $u_k \in \mathcal{F}$ que convergen puntualmente en cada punto racional de $[0,1]$ a una función φ. Dado que cada u_k satisface (3.2), se obtiene que φ también satisface (3.2) por lo menos para x e y racional.

Definamos φ en puntos irracionales x por

$$\varphi(x) = \lim_{y \to x^-} \varphi(y), \qquad (y \quad \text{racional}). \tag{3.3}$$

Veamos que este límite existe.

Supongamos que

$$A = \liminf \varphi(y) \leq \limsup \varphi(y) = B,$$

cuando $y \to x^-$ con y racional.

Sea $\{y_i\}$ y $\{y_i'\}$ dos sucesiones de puntos racionales que convergen a x, ordenadas de modo que $y_1 < y_1' < y_2 < y_2' < \cdots < x$, tal que $\varphi(y_i) \to A$ y $\varphi(y_i') \to B$ cuando $i \to \infty$.

Así,

$$\varphi(y_i') - \varphi(y_i) \leq C\chi(y_i' - y_i).$$

Considerando los límites cuando $i \to \infty$ tenemos

$$\lim_{i\to\infty}(\varphi(y_i') - \varphi(y_i)) \leq C \lim_{i\to\infty} \chi(y_i' - y_i),$$

entonces

$$B - A \leq C\chi(0) = 0,$$

de donde, $B \leq A$, lo cual es una contradicción y, por lo tanto, $A = B$. En consecuencia, el límite existe.

Como φ satisface (3.1) para parejas de puntos racionales, se deduce de (3.2) y considerando los límites de puntos racionales, que φ satisface (3.1) para todos los pares de puntos, es decir, φ es χ-decreciente con constante C en $[0, 1]$.

Luego, como φ es χ-decreciente, por el teorema 6, φ es de χ-variación acotada y, por lo tanto, tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades , y entonces por un proceso de diagonalización de Cantor, puede ser encontrada una subsucesión de las funciones u_k, la cual converge en cada punto de discontinuidad de φ.

Ahora, veamos que $u_k(x) \to \varphi(x)$ en cada punto de continuidad de φ.

Supongamos que $0 < a < 1$ es un punto de continuidad de φ con $\varepsilon > 0$ dado. Fijando dos puntos racionales y_1 y y_2, con $y_1 < a < y_2$ tal que

$$|\varphi(y_i) - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.4}$$

$$C\chi(|y_i - a|) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.5}$$

Como $u_k \to \varphi$ en puntos racionales, existe $N > 0$ tal que si $k \geq N$ entonces

$$|u_k(y_i) - \varphi(y_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i = 1, 2. \tag{3.6}$$

Luego, para $k \geq N$, por (3.4), (3.5), (3.6) y el hecho de que los u_k son uniformemente

χ-decrecientes, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(a) - u_k(a) &= \varphi(a) - u_k(a) + \varphi(y_2) - \varphi(y_2) + u_k(y_2) - u_k(y_2) \\
&= (u_k(y_2) - u_k(a)) + (\varphi(a) - \varphi(y_2)) + (\varphi(y_2) - u_k(y_2)) \\
&\leq C\chi(|y_2 - a|) + (\varphi(a) - \varphi(y_2)) + (\varphi(y_2) - u_k(y_2)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
u_k(a) - \varphi(a) &= u_k(a) - \varphi(a) + \varphi(y_1) - \varphi(y_2) + u_k(y_1) - u_k(y_1) \\
&= (u_k(a) - u_k(y_1)) + (\varphi(y_1) - \varphi(a)) + (u_k(y_1) - \varphi(y_1)) \\
&\leq C\chi(|a - y_1|) + (\varphi(y_1) - \varphi(a)) + (u_k(y_1) - \varphi(y_1)) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

de donde,

$$|u_k(a) - \varphi(a)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ contiene una subsucesión la cual converge en cada punto de $[0, 1]$ a una función χ-decreciente.

$\square$

3.2 Teorema de Representación de Korenblum

De acuerdo con las definiciones anteriores, presentamos el siguiente teorema que nos permitirá expresar las funciones de χ-Variación Acotada como la diferencia de funciones χ-decrecientes.

Teorema 8 (Teorema de Descomposición)**.** *Cada función u de χ-variación acotada, $\chi V(f) = C$, se puede representar como la diferencia de dos funciones χ-decrecientes, tal que $u = g - h$ donde g, h son funciones χ-decrecientes.*

Demostración:

Si g, h son funciones χ-decrecientes, entonces para cada $0 \leq x < y \leq 1$ tenemos que

$$g(y) - g(x) \leq \overline{C}\chi(y - x) \tag{3.7}$$

$$h(y) - h(x) \leq \overline{C}\chi(y - x). \tag{3.8}$$

Además, si $u(0) = u(1)$, podemos escoger g y h que coincidan con u en $x = 0$ y $x = 1$, entonces en este caso $\overline{C} = \frac{1}{2}C$. En general, $\overline{C} \leq \frac{5}{4}C$.

La demostración de este teorema se realizará en tres etapas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u(0) = 0$. Supongamos primero que el teorema fue demostrado para las funciones que se anulan en $x = 1$ y ahora u es dado con $u(1) \neq 0$. Definamos

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Entonces, si $\pi = 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ es una partición de $[0, 1]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\overline{u}(x_i) - \overline{u}(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n-1} |\overline{u}(x_i) - \overline{u}(x_{i-1})| + |\overline{u}(x_n) - \overline{u}(x_{n-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |\overline{u}(x_i) - \overline{u}(x_{i-1})| + |\overline{u}(1) - \overline{u}(x_{n-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |\overline{u}(x_i) - \overline{u}(x_{i-1})| + |\overline{u}(x_{n-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |u(x_i) - u(x_{i-1})| + |u(x_{n-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| + |u(x_{n-1})|, \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{u}(x_i) - \overline{u}(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| + |u(x_{n-1})|, \tag{3.9}$$

pero, u es acotada por $\frac{3}{2}C$ y así el lado derecho de (3.9) está acotado por

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|+|u(x_{n-1})| &\leq C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})+\frac{3}{2}C\\ &= C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})+\frac{3}{2}C\chi(1)\\ &= C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})+\frac{3}{2}C\chi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\right),\end{aligned}$$

y, en virtud de la subaditividad de χ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|+|u(x_{n-1})| &\leq C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})+\frac{3}{2}C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1})\\ &= \frac{5}{2}C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1}),\end{aligned}$$

de donde,

$$\sum_{i=1}^{n}|\overline{u}(x_i)-\overline{u}(x_{i-1})|\leq\frac{5}{2}C\sum_{i=1}^{n}\chi(x_i-x_{i-1}).$$

Por lo tanto, $\overline{u}$ es de χ-variación acotada y $\chi V(\overline{u})\leq\frac{5}{2}C$.

Luego, como u es de χ-variación acotada se deduce de nuestra suposición que $\overline{u}=\overline{g}-\overline{h}$, donde $\overline{g}$ y $\overline{h}$ se anulan en $x=0$ y $x=1$, y son χ-decrecientes con constante $\frac{5}{4}C$.

Ahora, si $u(1)<0$, se define v por

$$g(x)=\begin{cases}\overline{g}(x) & \text{si} \quad 0\leq x<1\\ u(1) & \text{si} \quad x=1.\end{cases}$$

y consideramos $h=\overline{h}$.

Se deduce entonces que $u = g - h$ para $0 \leq x \leq 1$ y, además, g y h son χ-decrecientes, ya que para cada intervalo $I = [x, y]$ donde $0 \leq x < y = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} g(1) - g(x) &= g(1) + \overline{g}(1) - \overline{g}(x) \\ &\leq u(1) + \frac{5}{4}C\sum_{i=1}^{n}\chi(1-x), \end{aligned}$$

luego, como $u(1) < 0$ tenemos

$$g(1) - g(x) \leq \frac{5}{4}C\sum_{i=1}^{n}\chi(1-x).$$

Si $u(1) > 0$, ponemos $g = \overline{g}$ y definimos h por

$$h(x) = \begin{cases} \overline{h}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -u(1) & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Se deduce entonces que $u = g - h$ para $0 \leq x \leq 1$ y, además, g y h son χ-decrecientes, como para cada intervalo $I = [x, y]$ donde $0 \leq x < y = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} h(1) - h(x) &= h(1) + \overline{h}(1) - \overline{h}(x) \\ &\leq -u(1) + \frac{5}{4}C\sum_{i=1}^{n}\chi(1-x), \end{aligned}$$

luego, como $u(1) > 0$ tenemos

$$h(1) - g(x) \leq \frac{5}{4}C\sum_{i=1}^{n}\chi(1-x).$$

La segunda etapa de la demostración procede de la siguiente manera. Supongamos que este teorema es cierto para funciones continuas lineales a trozos, las cuales se anulan en $x = 0$ y $x = 1$.

Sea u una función arbitraria de χ-variación acotada, tal que $\chi V(u) = C$ y $u(0) = 0 = u(1)$. Enumerando los puntos de discontinuidad de u, y escogiendo una sucesión P_n

de particiones de $[0,1]$ de tal manera que la longitud de las particiones $|P_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$, y asegurándonos la inclusión en P_n de los n primeros puntos de discontinuidad de u de la lista de discontinuidades descrita anteriormente. Entonces, si u_n es una función continua lineal a trozos que coincide con u en los puntos de P_n, es decir, $u_n(x) = u(x)$ para $0 \leq x \leq 1$, tenemos que si consideramos el límite cuando $n \to \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. Por lo tanto, $u_n \to u$, con $0 \leq x \leq 1$.

Así, por el Teorema 3 de [9], p. 204, cada u_n es de χ-Variación Acotada y

$$\chi V(u_n) \leq \chi V(u) = C$$

entonces de nuestra suposición tenemos que $u_n = g_n - h_n$, donde tanto g_n como h_n son χ-decrecientes con constante $\frac{1}{2}C$, y además por el teorema 6 y la proposición 5 tenemos que g_n y h_n son de χ-variación acotada y por tanto, uniformemente acotadas por $\frac{3}{2}C$, es decir,

$$|g_n(x)| \leq \frac{3}{2}C,$$

$$|h_n(x)| \leq \frac{3}{2}C.$$

Así, por el teorema de selección de Helly existen subsucesiones de g_n y h_n, que convergen a funciones g y h respectivamente, las cuales son χ-decrecientes con constante $\frac{1}{2}C$. Luego, como $u_n \to u$ entonces $u = g - h$.

La tercera y última etapa de la demostración, es demostrar este teorema para funciones continuas lineales a trozos, las cuales se anulan en $x = 0$ y $x = 1$.

Supongamos entonces que $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ es una partición fijada de $[0,1]$ y sea u una función continua la cual es lineal en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, con $u(0) = u(1) = 0$. Supongamos que u es de χ-variación acotada, tal que $\chi V(u) = C$. Entonces la desigualdad (2.2) es válida para cada partición de $[0,1]$. En particular, (2.2) es válido para cada subpartición de P. Hay 2^n subparticiones semejantes. Así, tenemos

2^n desigualdades del tipo (2.2) la cual consideramos como hipótesis.

Ahora, se deben construir dos funciones g y h tal que $u = g - h$. Queremos que g y h sean continuas, se anulen en $x = 0$ y $x = 1$, sean lineales en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n+1$ y satisfagan la desigualdad (2.4) con constante $\frac{1}{2}C$ para cada intervalo $I \subset [0, 1]$. Pero, usando la linealidad a trozos de g y h, y la concavidad de χ, es fácil mostrar que g y h necesitan satisfacer la desigualdad (2.4) sólo para intervalos $I = [x_i, x_j]$, donde $x_i < x_j$ son puntos arbitrarios de la partición P fija. .

Así, el problema comienza con una dimensión finita. Encontrar $2n$ números, $g(x_i)$, $h(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ tal que $u(x_i) = g(x_i) - h(x_i)$ (donde u, g y h se anulan en $x = 0$ y $x = 1$), y están sujetas a las desigualdades

$$\begin{aligned} g(x_j) - g(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i), \qquad 0 \leq i < j \leq n+1, \\ h(x_j) - h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i), \qquad 0 \leq i < j \leq n+1. \end{aligned}$$

Pero, colocando $g(x_i) = u(x_i)+h(x_i)$ en estos dos conjuntos de desigualdades tenemos:

$$\begin{aligned} g(x_j) - g(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) \\ u(x_j) + h(x_j) - u(x_i) - h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) \\ h(x_j) - h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (u(x_j) - u(x_i)) \end{aligned}$$

con lo cual podemos resumir el problema de la siguiente manera.

Sea $P : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$ una partición de intervalo $[0, 1]$ fija. Sea $u(0) = u(1) = 0$ y sea $u(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, n es un número real arbitrario sujeto a las 2^n desigualdades de tipo (2.2), una de cada subpartición de P. Debemos encontrar n números $h(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ con $h(0) = h(1) = 0$, que estén sujeto a las desigualdades

$$\begin{aligned} h(x_j) - h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i), \qquad 0 \leq i < j \leq n+1. \\ h(x_j) - h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (u(x_j) - u(x_i)), \qquad 0 \leq i < j \leq n+1. \end{aligned}$$

Usando la notación,

$$a^+ = \text{máx}(a,0), \qquad a^- = \text{máx}(-a,0),$$

podemos combinar los dos conjuntos de desigualdades anteriores en un sólo conjunto

$$h(x_j) - h(x_i) \leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (u(x_j) - u(x_i))^+, \qquad 0 \leq i < j \leq n+1. \tag{3.10}$$

Ante todo, un rango aceptable para cada $h(x_i)$ puede ser fundamentado primero por el conjunto $0 = x_i < x_j < 1$ y luego por el conjunto $0 < x_i < x_j = 1$ en (3.10), es decir, para $0 = x_i < x_j < 1$ tenemos

$$h(x_j) \leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - u(x_j)^+,$$

y para $0 < x_i < x_j = 1$

$$\begin{aligned} -h(x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (-u(x_i))^+, \\ h(x_i) &\geq (-u(x_i))^+ - \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i), \\ h(x_i) &\geq u(x_i)^- - \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i), \end{aligned}$$

obteniendo como resultado que

$$u(x_i)^- - \frac{1}{2}C\chi(1 - x_i) \leq h(x_i) \leq \frac{1}{2}C\chi(x_i) - u(x_i)^+. \tag{3.11}$$

Los intervalos,

$$I_i = \left(u(x_i)^- - \frac{1}{2}C\chi(1 - x_i), \frac{1}{2}C\chi(x_i) - u(x_i)^+ \right),$$

con $i = 1, \ldots, n$, son no vacíos. Puesto que, si colocamos por escrito la desigualdad (2.2) usando la partición $\{0, x_i, 1\}$, obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x_i) - u(0)| + |u(1) - u(x_i)| &= 2|u(x_i)| \\ &= 2u(x_i)^+ + 2u(x_i)^- \\ &\leq C\chi(x_i) + C\chi(1 - x_i), \end{aligned}$$

lo que implica el extremo izquierdo de I_i esta de hecho a la izquierda del extremo derecho, ya que

$$\begin{aligned} 2(u(x_i)^+ + u(x_i)^-) &\leq C\chi(x_i) + C\chi(1-x_i) \\ u(x_i)^+ + u(x_i)^- &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_i) + \frac{1}{2}C\chi(1-x_i) \\ u(x_i)^- - \frac{1}{2}C\chi(1-x_i) &\leq \frac{1}{2}C\chi(x_i) - u(x_i)^+. \end{aligned}$$

Ahora, definimos cada $h(x_j)$ utilizando el siguiente algoritmo recursivo .

Dado

$$h(x_1) = \frac{1}{2}C\chi(x_1) - u(x_1)^+, \tag{3.12}$$

y para cada $j = 2, \ldots, n$ definimos el conjunto

$$h(x_j) = \min_{1\leq i<j} \left\{ \frac{1}{2}C\chi(x_j) - u(x_j)^+, h(x_i) + \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (u(x_j) - u(x_i))^+ \right\}. \tag{3.13}$$

Se deduce de la definición que cada $h(x_j)$ satisface (3.10). La construcción será completada si también podemos mostrar que cada $h(x_j)$ satisface (3.11), es decir, $h(x_j) \in I_j$. Debido a que, la primera expresión de (3.13) es el extremo derecho de I_j, $h(x_j)$ automáticamente satisface la desigualdad derecha de (3.11). El número $h(x_j)$ también va a satisfacer la desigualdad izquierda de (3.11) siempre que para cada $i = 1, \ldots, j-1$, la segunda expresión de (3.13) es mayor o igual que el extremo izquierdo de I_j, es decir,

$$u(x_j)^- - \frac{1}{2}C\chi(1-x_j) \leq h(x_i) + \frac{1}{2}C\chi(x_j - x_i) - (u(x_j) - u(x_i))^+. \tag{3.14}$$

Sin embargo, la desigualdad (3.14) se reduce exactamente a la desigualdad (2.2) para una cierta subpartición, dependiendo del mínimo elegido en (3.13) para cada $h(x_i)$, $i < j$, que aparece en (3.14), puesto que si usamos que para cualquier sucesión de números reales,

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n-1}, \quad \text{tal que}, \quad a_0 = 0 \quad \text{y} \quad a_{n-1} = 0,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})^+ + a_n^- = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}|a_i - a_{i-1}|,$$

de donde, tenemos que

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|u(x_j) - u(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n}(u(x_j) - u(x_{j-1}))^+ + u(x_n)^-,$$

de (3.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|u(x_j) - u(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n}(u(x_j) - u(x_{j-1}))^+ + u(x_n)^- \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} h(x_i) + \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}(\chi(x_j - x_i) + \chi(1 - x_j)) - \sum_{j=1}^{n} u(x_j)^- + u(x_n)^- \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} h(x_i) + \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}(\chi(x_j - x_i) + \chi(1 - x_j)) \\
&- \left(\sum_{j=1}^{n} h(x_j) + \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(1 - x_j)\right) + u(x_n)^-,
\end{aligned}$$

como $h(x_i) \leq h(x_j)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|u(x_j) - u(x_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n} h(x_j) + \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(x_j - x_i) + \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(1 - x_j) \\
&- \sum_{j=1}^{n} h(x_j) - \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(1 - x_j) + u(x_n)^- \\
&\leq \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(x_j - x_i) + u(x_n)^- \\
&\leq \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(x_j - x_i) + h(x_n) + \frac{1}{2}C\chi(1 - x_n) \\
&\leq \frac{1}{2}C\sum_{j=1}^{n}\chi(x_j - x_i) + \frac{1}{2}C\chi(1 - x_n),
\end{aligned}$$

de donde, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} |u(x_j) - u(x_{j-1})| &\leq C\sum_{j=1}^{n} \chi(x_j - x_i) + C\chi(1 - x_n)\\ &= C\left(\sum_{j=1}^{n} \chi(x_j - x_i) + \chi(1 - x_n)\right).\end{aligned}$$

□

A continuación, concluimos este Capítulo enunciando y demostrando el lema de invarianza.

3.3 Lema de Invarianza

En esta sección presentamos el lema de invarianza el cual nos permite aplicar los resultados anteriores a funciones u sobre un intervalo $[a, b]$.

Lema 2 (Lema de invarianza)**.** *Sea u un función definida sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$, entonces u es de χ-variación acotada sobre $[a, b]$ si la función $u((b-a)x+a)$ es de χ-variación acotada en $[0, 1]$.*

Demostración:

Sea $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ definida por $\alpha(x) = (b - a)x + a$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.

Entonces, dada una partición $\pi : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0, 1]$, el conjunto $\alpha(\pi) = \{\alpha(x_0), \alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)\}$ es una partición de $[a, b]$.

Sea $g(x) = u((b - a)x + a) = u \circ \alpha$ una función de χ-variación acotada en $[0, 1]$, entonces existe un $C > 0$ tal que para cada partición π de $[0,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| &\leq C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}),\\ \sum_{i=1}^{n} |u \circ \alpha(x_i) - u \circ \alpha(x_{i-1})| &\leq C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}),\end{aligned}$$

luego, para la partición $\alpha(\pi)$ del intervalo $[a,b]$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} |u(\alpha(x_i)) - u(\alpha(x_{i-1}))| \leq C \sum_{i=1}^{n} \chi(x_i - x_{i-1}),$$

denotando por $y_i = \alpha(x_i)$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |u(y_i) - u(y_{i-1})| \leq C \sum_{i=1}^{n} \chi(y_i - y_{i-1}).$$

Por lo tanto, u es de χ-variación acotada en $[a,b]$.

$\square$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente Trabajo Especial de Grado, hemos expuesto explícitamente la noción de variación acotada dada por Camille Jordan, y algunos resultados relevantes de este espacio de funciones con variación acotada, como lo son: las caracterizaciones dadas por C. Jordan, S. Banach y H. Federer, así como también, acerca de la actuación del Operador de Composición de este espacio. Se ha expuesto una generalización de la noción de variación acotada la cual es conocida como χ-variación acotada en el sentido de B. Korenblum, en donde se introduce una función de distorción χ, además hemos demostrado que la clase de funciones con χ-variación acotada se puede dotar de una estructura de espacio vectorial, así como también, de una norma que hace que sea un espacio Normado y de Banach.

Otros de los resultados relevantes expuestos en este trabajo, de manera explícita, son el Teorema de selección de Helly para funciones de χ-variación acotada, el teorema de Representación de Korenblum; en donde se obtiene que toda función de χ-variación acotada se puede escribir como la diferencia de funciones χ-decrecientes, y por último el lema de invarianza el cual nos permite aplicar todos los resultados de las funciones de χ-variación acotada en el intervalo $[0, 1]$ a funciones u sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$.

El trabajo con estos espacios de funciones de variación acotada, brinda la oportunidad de introducirse en una línea de investigación con un gran campo de acción, dado que es conocido (ver [10]) que existen otros tipos de generalizaciones de estos espacios de funciones con variación acotada, como lo son: la variación en el sentido de Wiener, en el sentido de Waterman, en el sentido de Schramm, etc.

Además, de lo afirmado anteriormente podemos en el futuro tratar de responder las siguientes interrogantes:

- ¿Se puede definir una indicatriz de Banach para las funciones de χ-variación acotada? En el caso afirmativo hallar el llamado teorema de la indicatriz de Banach para las funciones de χ-variación acotada.

- ¿Se puede obtener un Teorema de Representación de Federer sobre la representación por medio de funciones compuestas, a las funciones de χ-variación acotada?. Es decir, u es de χ-variación acotada en $[0,1]$ si y sólo si, existen funciones g y τ tales que g es Lipschitz en $\mathbb{R}$ y τ es χ-monótona y tal que

$$u(t) = g(\tau(t)) \quad t \in [0,1].$$

- Por otra parte, nada se conoce respecto al operador de composición en el caso autónomo y no autónomo en cada clase de funciones; es decir, dado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hallar condiciones necesarias y suficientes de tal manera que el operador de composición F, asociado a f actúa en χBV, que sea acotado, que sea continuo, u otras propiedades. Menos aún se conoce, que sucede en el caso no autónomo donde $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $F_u(t) = f(t, u(t)) \quad t \in [a,b]$ y $u \in \chi BV[a,b]$.

- Y por último, ¿Se puede definir la noción de χ-variación acotada en el plano y, más generalmente, en $\mathbb{R}^n$?.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Banach, S., *Sur les Lignes Rectifiables et les Surface dont l'aire est finite*, fund. Math, 7 (1925), 225-236.

[2] Barrantes, T. (2010). *Funciones de variación acotada Generalizada y un Teorema de Representación Canónica de Chistyakov*, Tesis, Universidad Central de Venezuela. Caracas.

[3] Cyphert Daniel S. and Kelingos J. A., *The decomposition of functions of bounded χ-variation into difference of χ-decreasing functions*, Studia Math, LXXXI (1985), 185-195.

[4] Jordan, C., *Sur la série de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2 (1881), 228-230.

[5] Dirichelt, P. L. *Sur la convergence des séries trigonémetriques que servent á représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés*, Journal für die Reine und Angewandte Mathemait, 4, (1829), 157-159.

[6] Josephy, M., *Composing functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 354-356.

[7] Federer, H. (1969). *Geometric Measure theory*. Heidelberg. Springer-Verlag.

[8] Iribarren Ileana (2006). *Introducción a la Teoría de la medida.* Caracas:Venezuela. UCV. Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico.

[9] Korenblum, B., *An extension of the Nevalinna theory*, Acta Math, 135 (1975), 187-219.

[10] Merentes, N. y Rivas, S., *El Operador de Composición en Espacios con algún tipo de variación acotada*, Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Centro de estudios Avanzados- Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, 18 (1996).

[11] Park Jaekeun, *On the functions of bounded $\kappa\phi$-variations (I)*, J. Appl. Math. Informatics, 28 (2010), 487-498.

[12] Park Jaekeun and Seong Hoon Cho, *Functions of $\kappa G\phi$-bounded variations*, J. Appl. Math. Computing, 13 (2003), No.1-2, 447-455.

[13] Schramm, M., *Functions of ϕ-bounded variation and Riemann-Stieltjes integration*, Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), No.1, 49-63.

[14] Sung Ki Kim and Jongsik Kim, *Functions of $\kappa\phi$-bounded variation*, Bull. Korean Math. Soc. 23 (1986), No.2, 171-175.

[15] L.C. Young, *Sur une generalization de la notion de variation de puissanc p-iéme bornée au sens de N.Wiener*, et sur la convergence des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci., Paris 204, 7 (1937), 470-472.

[16] Waterman, D., *On the convergence of Fourier series of Functions of generalizad bounded vatiation*, Studia Math. 44 (1972), 107-117.

[17] Wiener N., *The quadratic variation of a function and its Fourier coeffcients*, Massachusetts J. Math. And Phys. 3, (1924), 72-94.