UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

UNA PRESENTACIÓN DE LA JERARQUÍA ACUMULATIVA DE CONJUNTOS

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Randy Alzate** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: José Luis Adames.

Caracas, Venezuela
Mayo 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Una presentación de la jerarquía acumulativa de conjuntos**", presentado por el **Br. Randy Alzate**, titular de la Cédula de Identidad **15872210**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

José Adames
Tutor

Francisco Tovar
Tutor Administrativo

Franklin Galindo
Jurado

Jesús Nieto
Jurado

Dedicatoria

Dedico el presente Trabajo Especial de Grado a mi tutor, el prof. José Luis Adames, como testimonio de reconocimiento por la particular visión que dió al mismo: matemáticas, filosofía y pedagogía caminaron juntas, algo quizás poco común en trabajos de este tipo y que el prof. Adames estimó pertinente valorizar.

Agradecimiento

Deseo agradecer a las siguientes personas: A mi Familia por brindarme su apoyo en todo momento y circunstancia, a mi tutor por brindarme no solo su ayuda a nivel académico sino su amistad, a la familia Matos por siempre ayudarme y en especial a Yeneida Matos: sin tu apoyo incondicional la realización de este trabajo hubiese sido más dificultoso. Tu apoyo tiene un altísimo valor para mí. A mis compañeros -en el significado real de la palabra- Alejandra Aguilera, Edwin Pin, Maria Rodríguez, Sherezade Rivas, Reyfel Mendoza, Alfonso Garmendia y Anabell Araujo por todo su apoyo. Finalmente deseo agradecer a Anaís Bello quién siempre me recordaba que iba a ser licenciado en Matemáticas y me animaba mucho a ello y a Nixon Figuera quien siempre me enseñó el valor de luchar hasta el final. Muchas más personas me ayudaron a la realización del trabajo y de nombrarlas me tomarían más páginas. Muchas Gracias a todos!

Índice general

Introducción

Lo que se conoce como " Teoría de Conjuntos " ha desempeñado a lo largo de la historia reciente sobre los fundamentos de las matemáticas un papel preponderante. Todas las teorías matemáticas tradicionales son interpretables en la Teoría de Conjuntos. En palabras de Jané :

> Que una teoría T sea interpretable en la teoría de conjuntos significa que es posible tratar los objetos de que T se ocupa como conjuntos, y los conceptos, las operaciones y las relaciones que le son propias como conceptos de conjuntos, operaciones con conjuntos y relaciones entre conjuntos, y ello de modo tal que a cada una de las proposiciones expresables en el lenguaje de T se le asocia de manera sistemática una proposición conjuntista y que las proposiciones conjuntistas asociadas a los teoremas de T son teoremas de la teoría de conjuntos. Brevemente, interpretar una teoría matemática en la teoría de conjuntos equivale a reformularla como un fragmento de la teoría de conjuntos. Esto le da a la Teoría de conjuntos una peculiaridad digna de análisis y especial atención.
>
> Ignacio Jané, *¿De qué trata la teoría de conjuntos?* pág. 3

Ahora bien, la elaboración de una teoría de conjuntos correctamente formalizada -es decir, que toda proposición que se derive de los axiomas sea consecuencia lógica de las mismas- requirió del trabajo e investigación de diversos matemáticos en el período comprendido entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Anteriormente, ya los matemáticos hacían uso del objeto "conjunto"de forma ingenua. Fue Gregor Cantor (1845-1918) quien comenzó el estudio de conjuntos de manera abstracta. Vale mencionar que esta primera aproximación de Cantor al objeto conjunto no se encontraba formalizada, más aún, la rigurosidad en matemáticas desde sus báses lógicas formales recién comenzaban a establecerse en aquella época. Sus resultados fueron presentados entre 1874 y 1897. Entre los más sobresalientes, se encuentra la demostración de que el conjunto de los números reales no se puede colocar en correspondencia con el conjunto de los números enteros y el concepto de "números transfinitos". Cantor fue el primero en brindar una definición de lo que él consideraba que era un conjunto y muy especialmente caracterizó a los conjuntos infinitos. Para él, hasta cierto punto era posible manejar a los conjuntos infinitos como una sola entidad de la misma manera en la que se considerarían los conjuntos finitos. Esta noción de *infinito actual* era rechazada por matemáticos contemporáneos, entre ellos por Kroenecker. Este rechazo, sumado a la incomprensión de la gran mayoría de la comunidad matemática por considerar a su teoría excesivamente abstracta y el hecho de que algunos resultados obtenidos parecían llevarle a contradicciones sumió a Cantor en una profunda depresión que lo llevó posteriormente a la muerte. Hoy día el trabajo de Cantor es reconocido y es considerado el padre de la teoría de conjuntos.

En el párrafo anterior hacíamos mención de que la rigurosidad matemática recién comenzaba en la época de Cantor. Con el largo proceso del surgimiento de la Geometría No Euclídea y el problema de los fundamentos de la matemática que ello conllevó se dieron los primeros pasos hacia la rigurosidad matemática, aunque el primer intento de formalización se debe a Gotlob Frege (1848-1925), el cual publicó un trabajo en dos volúmenes, el primero en 1893 y el segundo en 1903 en el que mostraba cómo podrían ser derivadas las matemáticas a partir de ciertos principios lógicos (más aún, la lógica de Frege incluía a la teoría de conjuntos). Pero cuando el segundo volumen iba a ser publicado, Bertrand Russell informa a Frege de una contradicción derivable de los principios lógicos establecidos por él (la conocida Paradoja de Russell). Esta paradoja produjo un gran impacto ya que desdibujó la idea de derivar las matemáticas de la lógica, tal como Frege había propuesto. Más aún, involucra el concepto de conjunto, lo cual hizo necesaria una formalización adecuada de la teoría de conjuntos.

Esto conllevó a Ernst Zermelo(1871-1953) en 1908 a presentar su teoría axiomática de conjuntos. Tales axiomas fueron conocidos como *Aussonderung axioms* los cuales permitieron dar una descripción detallada de los conjuntos sin caer en contradicción alguna (o por lo menos evitar la paradoja de Russell -y otras como las de Burali-Forti y Cantor- ya que Zermelo no pudo probar la consistencia de su teoría). Posteriormente se determinó que para una adecuada teoría de ordinales los axiomas no eran suficientes. El axioma de reemplazo fue introducido por Fraenkel y Skolem -de manera independiente- en 1922 con la finalidad de extender la fuerza del axioma de especificación de Zermelo, así como también posibilitar el conteo de números ordinales más allá de lo que permite el axioma de infinitud. El axioma de regularidad o fundación se encontraba de manera implícita en un artículo de Mirimanoff en 1917 el cual fue explicitado por von Neumann en 1925. Para los objetivos del presente trabajo, llamaremos *ZFC* a los axiomas publicados por Zermelo en 1908: (Extensionalidad, Conjunto Vacío, Pares, Unión, Conjunto Potencia, Separación, Infinitud y Elección) más el axioma de regularidad y el de reemplazo. *ZF* a ZFC sin elección y *Z* a *ZF* sin reemplazo. ZFC es hoy día, los axiomas de la teoría de conjuntos más utilizados por los matemáticos.

Las investigaciones actuales se orientan por dos caminos principales: la primera, investiga sobre las consecuencias de agregar a ZFC nuevos axiomas (para determinar el cardinal del continuo por ejemplo) y la consistencia de esas nuevas teorías. La segunda se orienta en varias direcciones, una de ellas es usar la Teoría de Conjuntos para resolver problemas abiertos en áreas específicas de la matemática.

1. Concepciones sobre la Teoría de Conjuntos

Los antecedentes históricos esbozados en los párrafos anteriores ponen en evidencia los esfuerzos sostenidos para presentar una teoría axiomática que logre, en primer lugar, definir lo que es un conjunto y sus características más relevantes y, en segundo lugar, no llevar a contradicciones. Estos dos aspectos han sido tradicionalmente destacados en la literatura que se ofrece al respecto. Ahora bien, algunos matemáticos, lógicos y, sobre todo, filósofos de la matemática, entre ellos George Boolos (1940-1996) -el cual tomamos como referencia fundamental en el presente trabajo- han ofrecido un tercer aspecto que destacaremos con las interrogantes siguientes: ¿Qué idea intuitiva general se tiene de lo que es un conjunto? ¿La teoría construida refleja dicha noción? Si es así, ¿Dónde?. Se ha hecho hincapié en que toda la teoría de conjuntos parte de la idea que tengamos del objeto “ conjunto”, y dicho objeto se ha vuelto escurridizo, a tal punto que su expresión “ingenua”no es suficiente para describirlo adecuadamente. Es por ello que se hace necesario, primero, explicitar la noción intuitiva de conjunto, ponerla en evidencia, para así evitar que la teoría construida describa, no lo que el conjunto es, sino lo que queremos que sea, y, segundo,tener el cuidado de extraer, hasta donde sea posible, lo más importante de esas nociones sin caer en paradojas. Dos concepciones del objeto conjunto se han establecido para tal fin: la concepción ingenua y la concepción iterativa de conjunto. La primera es inconsistente. La segunda, permite la construcción de la jerarquía acumulativa de conjuntos. Como observa Boolos, los axiomas de Zermelo reflejan la concepción iterativa. Dichas concepciones, sus construcciones y formalizaciones es el objeto central y motivación del presente trabajo especial de grado.

Las primeras definiciones formales de Conjunto las encontramos en los trabajos de Cantor:

> Entendemos por conjunto a cualquier reunión en un todo M de determinados objetos bien distinguidos m de nuestra intuición o nuestro pensamiento.(Cantor, 1897, p.282)

Tambien definió un conjunto como ≪Cualquier pluralidad que se deja concebir como unidad, es decir, cualquier agregado de elementos determinados que en virtud de una ley pueden ser combinados en un todo.≫(Cantor, 1895,p.204). Vale decir que importantes observaciones se le pueden hacer a las anteriores definiciones cantorianas, pero no se puede negar que sugieren -aunque de modo muy superficial- dos elementos a destacar. Primero, que un conjunto está "determinado"por sus elementos, esto es que dos conjuntos con los mismos elementos son idénticos y, segundo, que los elementos de un conjunto están dados *antes* que el conjunto.

Es necesario detallar qué significa que los elementos *determinen* al conjunto. Si los elementos determinan al conjunto entonces sería posible saber si, dado un elemento, se encuentra o no en el conjunto, es decir si *pertenece* o no a él. Para pertenecer al conjunto debería satisfacer alguna propiedad, que poseen los elementos del conjunto. A partir del razonamiento anterior, podría indicarse que toda propiedad posee un conjunto de elementos que lo satisfacen. Lo anterior se conoce como la *concepción ingenua de conjuntos*. Como veremos posteriormente, esta concepción, a pesar de ser elaborada con argumentos sencillos y que reflejaría la primera aproximación natural que cualquier persona con o sin formación matemática podría tener del objeto "conjunto", es inconsistente. Por otro lado, la *concepción iterativa de conjuntos*, se diferencia de la anterior, en el hecho de que es posible "iterar" bajo un procedimiento que me permita construir todos los conjuntos a partir de ciertos elementos dados. Esta concepción permitirá construir la jerarquía acumulativa de conjuntos, la cual (por lo menos hasta ahora) no presenta inconsistencias (siempre que no se considere a toda la jerarquía como un conjunto).

Finalmente, y para hacer explícitos los objetivos y aportes de este trabajo, queremos indicar que la presentación de ambas concepciones, en especial de la concepción iterativa a través de la axiomática de Boolos, pretende ofrecer al lector una excelente herramienta de caracter pedagógico y filosófico que ilustra, de manera loable, los elementos que subyacen en los axiomas de Zermelo y el cómo se puede transitar adecuadamente de una noción a una teoría que describa dicha noción. A nivel matemático, la axiomática de Boolos permite derivar la gran mayoría de los axiomas de Zemelo. Hemos hecho un apartado especial para el axioma de Reemplazo en la cual presentamos una demostración rigurosa de su necesidad -probamos que la axiomática de Zermelo es insuficiente para construir ciertos conjuntos- y su utilización en la construcción de la jerarquía acumulativa.

Capítulo 1

Formalización de las Concepciones Ingenua e Iterativa

Abordaremos ahora la formalización de las concepciones expresadas en la introducción. Para ello, haremos uso de un *sistema formal*, con el que pretendemos capturar y abstraer la esencia de determinadas características del objeto "conjunto", que no es mas que un modelo conceptual, expresado en un determinado *lenguaje formal* que indica de manera adecuada lo que queremos. Con "indica de manera adecuada" hacemos referencia a que el lenguaje nos permita, sin contradicción alguna, decir verdades acerca del objeto "conjunto", en particular las concepciones intuitivas que de dicho objeto tenemos. La formalización se lleva a cabo en cuatro fases. Primero, se prepara un catálogo completo de los símbolos que se han de utilizar. Es decir, se prepara el vocabulario del lenguaje. En segundo lugar, se establecen las "reglas de formación". Estas determinarán cuáles combinaciones de símbolos del vocabulario son aceptadas como "fórmulas bien formadas"(estas reglas son consideradas la gramática del lenguaje). En tercer lugar se establecen las reglas de inferencia o reglas de transformación de fórmulas, las cuales describen de manera precisa cómo se derivan o deducen unas fórmulas de otras. Finalmente se seleccionan ciertas fórmulas como axiomas, las cuales se toman como puntos de partida para derivar teoremas a partir de ellas. Más detenidamente:

Un *lenguaje formal* $\mathcal{L}$ está definido cuando las siguientes condiciones se satisfacen

- Existe un conjunto numerable de símbolos de $\mathcal{L}$. Estos símbolos son el vocabulario de $\mathcal{L}$ y permitirán hacer referencia a los objetos de la teoría. Una secuencia finita de símbolos de $\mathcal{L}$ es llamada una *expresión* de $\mathcal{L}$.

- Existe un subconjunto de expresiones de $\mathcal{L}$ llamado el conjunto de *fórmulas bien formadas* (abreviado como fbf's) de $\mathcal{L}$. Es posible determinar si una expresión es o no una fbf mediante las *reglas de formación*, las cuales indican qué combinaciones de los símbolos del vocabulario son aceptadas como fbf.

- Existe un conjunto finito $R_1, \ldots, R_n$ de relaciones entre fórmulas bien formadas llamadas *reglas de inferencia* las cuales describen la manera precisa de derivar unas fórmulas a partir de otras fórmulas de estructura determinada. Estas reglas no son otras que las reglas de deducción o de transformación de fórmulas. Para cada R_i, existe un único entero positivo j tal que para cada conjunto de j fbf's y cada fbf A, se puede efectivamente decidir si las fbf's j dadas están en relación R_i para A, y, de ser así, A es llamada una *consecuencia directa* de las fbf's dadas en virtud de R_i.

- Existe un conjunto de fbf's llamadas el conjunto de *axiomas* de $\mathcal{L}$. Más aún, de ser posible decidir si una fórmula bien formada es un axioma, como es nuestro caso, $\mathcal{L}$ es llamado una *teoría axiomática* (Por razones de simplicidad llamamos $\mathcal{L}$ a la teoría).

Emplearemos la expresión *prueba* en $\mathcal{L}$ para designar a una secuencia finita $A_1 \ldots A_n$ de fbf's tales que para cada i, A_i es un axioma de $\mathcal{L}$ o A_i es consecuencia directa de alguna de las fbf's precedentes en virtud de las reglas de inferencia. Por *teorema* de $\mathcal{L}$ designaremos a una fbf A de $\mathcal{L}$ que puede ser derivada de los axiomas aplicando sucesivamente las reglas de inferencia.

En el caso de que $\mathcal{L}$ sea axiomático, i.e., si existe un procedimiento efectivo para determinar si una fbf es o no un axioma, la noción de "teorema"no tiene por qué ser también efectiva, ya que, en general, no hay un procedimiento efectivo para determinar si una fbf A dada posee una prueba. Una teoría, que posea un procedimiento efectivo se dice *decidible*; caso contrario es llamada *indecidible*.

Una fbf A se dice una *consecuencia* en $\mathcal{L}$ de un conjunto Γ de fbf's si y sólo si existe una secuencia $A_1, \ldots, A_n$ de fbf's tales que $A = A_n$ y, para cada i, A_i es un axioma ó A_i está en Γ ó A_i es una consecuencia directa por alguna regla de inferencia de alguna de las fbf's precedentes en la secuencia. Tal secuencia es llamada una *prueba* (o *deducción*) de A desde Γ. Los elementos de Γ son llamadas las *hipótesis* o *premisas* de la prueba. Usaremos $\Gamma \vdash A$ para abreviar "A es una consecuencia de Γ ". Si Γ es un conjunto finito $\{B_1, \ldots, B_n\}$, escribiremos $B_1, \ldots, B_n \vdash A$. Si Γ es el conjunto vacío $\emptyset$, entonces $\emptyset \vdash A$ si y sólo si A es un

teorema.
Lo siguiente son propiedades de la noción de consecuencia

- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash A$, entonces $\Delta \vdash A$.
- $\Gamma \vdash A$ si y sólo si existe un subconjunto Δ de Γ tal que $\Delta \vdash A$.
- Si $\Delta \vdash A$ y para cada B en Δ, $\Gamma \vdash B$ entonces $\Gamma \vdash A$.

Es usual encontrar en argumentaciones matemáticas la demostración de una proposición B tomando como hipótesis alguna otra proposición A, concluyéndose luego que "Si A entonces B"es verdadero. Esto se encuentra justificado a través del siguiente teorema.

TEOREMA 1.1 (Teorema de la Deducción). *Si Γ es un conjunto de fórmulas bien formadas; A, B son fórmulas bien formadas, y, se cumple que $\Gamma, A \vdash B \leftrightarrow \Gamma \vdash A \rightarrow B$.*

Por razones de simplicidad y, puesto que no es el objeto principal del presente trabajo prescindiremos de la demostración del presente teorema, mas será referido en posteriores demostraciones.

Decimos que una teoría es *consistente* si no es posible deducir A y $\sim A$ dentro de la misma teoría.

1. Definición de Lógica de Primer Orden

Recordemos que el sistema formal anteriormente señalado, lo utilizaremos para referirnos a conjuntos. Ellos serán los individuos a los que harán referencia los respectivos símbolos del lenguaje. No se cuantificará sobre las propiedades de esos individuos. En la literatura, se habla, entonces, de $\mathcal{L}$ como un lenguaje de *primer orden.* Además, $\mathcal{L}$ es un lenguaje en el cual no se toma en consideración el contenido particular de los entes a los que puedan hacer referencias los símbolos, i.e. es *sintáctico.* Es importante señalar que los objetos descritos por el lenguaje estarán "cuantificados "es decir, habrán cuantificadores. Un cuantificador es una expresión que afirma que una condición se cumple para un cierto número de individuos. Los dos cuantificadores más usados son el cuantificador universal y el cuantificador existencial.

Un lenguaje formal $\mathcal{K}$ de primer orden será aquel que cumpla con las siguientes características:

(1) Símbolos del lenguaje.
   - (,) $\rightarrow$ $\sim$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
- $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
- $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_j^k \ldots$
- $f_1^1, f_1^2, \ldots, f_k^j \ldots$

(2) Reglas de formación de fbf's.

(3) Reglas de deducción.

- Modus Ponens.
- Generalización.

(4) Axiomas.

- Axiomas Lógicos.
- Axiomas Propios.

Por razones expositivas y dado que no es lo central de nuestro trabajo, en lo que sigue, usaremos un conjunto de reglas de inferencia "derivadas", esto es, reglas que se deducen de las anteriores reglas de inferencia y de los axiomas lógicos. Su función es sólo ahorrarnos trabajo y por eso las usaremos. Sea $P(A)$ un predicado que aplica a un objeto de la teoría indicado por la letra "A":

(1) Introducción del existencial:$P(A) \vdash (\exists x)P(x)$.

(2) Eliminación del existencial:$(\exists x)P(x) \vdash P(A)$ (El parámetro A no debe ocurrir en $(\exists x)P(x)$ ni en $P(A)$, tampoco en ninguna hipótesis previa no cancelada).

(3) Introducción del Universal: $P(A) \vdash (x)P(x)$ (Siempre que A esté libre de toda condición o supuesto previo no cancelado).

(4) Eliminación del Universal: $(x)P(x) \vdash P(A)$.

(5) Simplificación: $(A \land B) \vdash A$.

(6) Adjunción: $A, B \vdash (A \land B)$.

(7) Silogismo Disyuntivo:$(A \lor B), \sim A \vdash B$.

(8) Contrapositiva: $A \to B \equiv \sim B \to \sim A$.

Como se puede apreciar, $\mathcal{K}$ posee como símbolos del lenguaje los signos de puntuación del cálculo proposicional, una cantidad no numerable de variables individuales, un número finito o no numerable, posiblemente vacío, de constantes individuales, un número finito o no numerable (no vacío) de letras predicativas y un número finito o no numerable (posiblemente vacío) de letras funcionales. Así, en una teoría $\mathcal{K}$, alguna o todas las letras funcionales y constantes individuales podrían estar ausentes, y algunas (pero no todas) letras predicativas podrían estar ausentes. Las letras funcionales aplicadas a variables y a constantes individuales producen *términos*, esto es,

(1) Variables y constantes individuales son términos.
(2) Si f_i^n es una letra funcional, y $t_1, \ldots, t_n$ son términos entonces $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.
(3) Una expresión es un término si y sólo se puede obtener en una cantidad finita de pasos de acuerdo a (1) ó (2) solamente.

Las letras predicativas aplicadas a términos producen *fórmulas atómicas*, es decir, si A_n^i es una letra predicativa y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Las reglas de formación de fórmulas bien formadas en $\mathcal{K}$ se definen así:

(1) Toda fórmula atómica es una fbf.
(2) Si A y B son fbf's y y es una variable entonces $\sim A$, $A \to B$ y $(y)A$ son fbf.
(3) Una expresión es una fbf si y sólo si se puede obtener en una cantidad finita de pasos de acuerdo a (1) ó (2) solamente.

En $((y)A)$, “A ”es llamado el *alcance* o *campo* del cuantificador “(y)”. Obsérvese que A no necesariamente debe contener a la variable y.

Las reglas de inferencia se explican a continuación:

(1) Modus ponens: Si A y $A \to B$ entonces B.
(2) Generalización: $(x_i)A$ se sigue de A.

Axiomas Lógicos: Si A, B, C son fbf's de $\mathcal{K}$ entonces los siguientes son axiomas lógicos de de $\mathcal{K}$

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $(\sim B \to \sim A) \to ((\sim B \to A) \to B)$
- $(x_i)A(x_i) \to A(t)$
- $(x_i)(A \to B) \to (A \to (x_i)B)$

Las expresiones $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \equiv B$ se definen como sigue

- $(A \wedge B)$ como $\sim (A \to \sim B)$

- $(A \vee B)$ como $(\sim A) \rightarrow B$
- $(A \equiv B)$ como $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

El cuantificador existencial $\exists$ se define de la siguiente manera:

$$(\exists x)A \text{ como } \sim ((x)(\sim A))$$

Las nociones de ocurrencia *libre* y *acotada* de variables en una fbf se definen así: Una ocurrencia de una variable x es acotada en una fbf si y sólo si o es la variable del cuantificador "(x)"ó está al alcance del cuantificador "(x)"en la fbf. En otro caso, se dice que la ocurrencia es *libre* en la fbf.

Los axiomas propios varian de teoría en teoría. Una teoría de primer orden en la cual no hay axiomas propios es llamada un *cálculo de predicados de primer orden.*

2. Interpretaciones. Satisfacibilidad y Verdad. Modelos.

Las fórmulas bien formadas poseen significado sólo cuando una intepretación es dada para los símbolos. Una *interpretación* consiste en un conjunto no vacío D, llamado el *dominio* de la interpretación y una asignación con las siguientes características

- A cada letra predicativa A_n^j le asigna una n-aria relación en D
- A cada letra funcional f_n^j le asigna una función n-aria en D
- A cada constante individual a_i le asigna un elemento fijo en D

Para una interpretación dada, una fbf sin variables libres, es llamada una fbf *cerrada*, la cual representa una proposición que es verdadera o falsa, mientras que una fbf con variables libres satisface (es verdadera) para algunos valores en el dominio de las variables libres y no es satisfecha (falsa) para los otros, siempre que ella no sea una contradicción o una tautología.

Ejemplos

(1) $A_2^1(x_1, x_2)$
(2) $(x_2)A_2^1(x_1, x_2)$
(3) $(\exists x_2)(x_1)A_2^1(x_2, x_1)$

Si tomamos como dominio al conjunto de enteros positivos e interpretamos $A_2^1(y, z)$ como $y \leq z$ entonces (1) representa la relación $y \leq z$ la cual es satisfecha por todos los pares ordenados (a, b) de enteros positivos tales que $a \leq b$, por lo que no siempre es verdadera. (2) representa la propiedad "para cada entero positivo y, $z \leq y$", el cual se satisface sólo para el entero 1, y (3) es una proposición de la que se asegura que hay un mínimo entero positivo. Si tomamos como dominio al conjunto de todos los enteros,(3) es falso.

Una secuencia $s = (b_1, b_2, \ldots)$ *satisface* a una fbf A si y sólo si, cuando se sustituye, para cada i, un símbolo b_i para todas las ocurrencias libres de x_i en A, resulta una proposición verdadera bajo la interpretación dada.

Una fbf A es *verdadera* (para una interpretación dada) si y sólo si cada secuencia en $\sum$ (el conjunto de todas las secuencias) satisface A.

A es *falso* (para una interpretación dada) si y sólo si no hay secuencia en $\sum$ que satisfaga A.

Una interpretación se dice que es un *modelo* para un conjunto γ de fbf's si y sólo si cada fbf en γ es verdadera para la interpretación.

Una fbf A se dice *lógicamente válida* si y sólo si A es verdadera en cualquier interpretación.

Una fbf A se dice *contradictoria* si y sólo si $\sim A$ es lógicamente válida.

A se dice que *implica lógicamente* a B si y sólo si, en cada interpretación, cualquier secuencia que satisfaga A, también satisface B.

A y B son *lógicamente equivalentes* si y sólo si uno implica lógicamente al otro. B es una *consecuencia lógica* de un conjunto Γ de fórmulas bien formadas si y sólo si, en cada interpretación, cada secuencia que satisface cada fórmula bien formada en Γ también satisface B. Cualquier proposición de un lenguaje formal o natural que sea un ejemplo de una fbf lógicamente válida es llamada *lógicamente verdadera* mientras que un ejemplo de una contradicción es llamada *lógicamente falsa*.

Las siguientes proposiciones son consecuencias de las definiciones antes mencionadas

- A implica lógicamente B si y sólo si $A \to B$ es lógicamente válido.
- A y B son lógicamente equivalentes si y sólo si $A \equiv B$ es lógicamente válido.
- Si A implica lógicamente B y A es verdadera en una interpretación dada, también lo es B.
- Si B es una consecuencia lógica de un conjunto Γ de fbf's, y todas las fórmulas en Γ son verdaderas en una interpretación dada, también lo es B.

Capítulo 2

Concepciones Ingenua e Iterativa

En lo que sigue, pasaremos a exponer en detalle las ideas de George Boolos, de su artículo *The iterative conception of set*, publicado en 1971 [**5**]. Esto, con la intención de que podamos comprender, siguiendo la guía explicativa de este excelente autor, las intuiciones mejor recogidas en la teoría de ZF.

Se puede plantear la concepción ingenua de conjunto así: admitiendo la ley del tercero excluido, cualquier predicado en cualquier lenguaje formal aplica a un objeto dado o no aplica. Por tanto, para un predicado cualquiera corresponden dos clases de objetos: la clase de los objetos para el cual el predicado aplica y la clase de los objetos para el cual el predicado no aplica. Así, tendríamos el conjunto de todos los objetos y sólo aquellos objetos para el cual el predicado aplica y el conjunto de los objetos y sólo aquellos objetos para el cual el predicado no aplica. Llamaremos a cualquier conjunto cuyos elementos son exactamente aquellos para los cuales el predicado aplica la *extensión* del predicado. De acuerdo con la definición cantoriana, uno podría establecer la siguiente proposición: "Todo predicado posee una extensión"; llamaremos a toda teoría (formal o no) que incluya a esta proposición la *concepción ingenua de conjuntos* y a la proposición misma, el *principio de extensión*.

Describiremos tal concepción usando el lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{K}$ descrito anteriormente, cuyas variables aplican a conjuntos e individuos (que no son conjuntos) con dos letras predicativas: "S" la cual abrevia "es un conjunto"y la letra predicativa "$\in$" la cual abrevia "es un elemento de". Tal lenguaje se puede presentar así

(1) Símbolos del lenguaje.
 - (,) $\rightarrow$ $\sim$
 - $\in$ S

(2) Reglas de formación de f.b.f. (las ya descritas)

(3) Reglas de deducción.
 - Modus Ponens. (como antes)

- Generalización. (como antes)

(4) Axiomas.

- Axiomas Lógicos. (como antes)
- Axiomas Propios.

Puesto que en nuestro caso estamos refiriéndonos a la teoría de conjuntos, debemos indicar cuales son los axiomas propios que soportan nuestra teoría. Si la concepción ingenua es correcta, debe existir el conjunto (posiblemente vacío) de aquellos objetos para el cual ϕ aplica, donde ϕ es una fórmula de $\mathcal{K}$. Esto es:

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow \phi))$$

siempre que ninguna ocurrencia de y en ϕ sea libre.

Así, tomaremos como axiomas propios al axioma de extensionalidad, es decir:

$$(x)(y)(Sx \wedge Sy \wedge (z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

y a todas las fórmulas:

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow \phi))$$

Y a la teoría cuyos axiomas son los antes mencionados la llamaremos *teoría ingenua de conjuntos*. Así, tenemos expresado en $\mathcal{K}$ "Toda propiedad posee una extensión".

Algunos axiomas de la teoría ingenua de conjuntos son :

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow x \neq x)) \text{ (Axioma del conjunto vacío)}$$

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (x = z \vee x = w))) \text{ (Axioma de Pares)}$$

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (\exists w)(x \in w \wedge w \in z))) \text{ (Axioma de Unión)}$$

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x = x))) \text{ (Conjunto Universal)}$$

El primer axioma establece la existencia de un conjunto sin elementos, es decir, el axioma del conjunto vacío. Por el axioma de extensionalidad, tal conjunto debe ser único. El segundo axioma establece la existencia de un conjunto cuyos elementos son exactamente z y w (Axioma de pares). El tercer axioma establece la existencia de un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de z (Axioma de Unión). Mientras que el cuarto axioma establece la existencia del conjunto de todos los conjuntos, es decir el conjunto universal.

La teoría ingenua de conjuntos ha quedado ahora claramente establecida a través de $\mathcal{K}$, tratando de recoger y explicitar nuestras primeras intuiciones acerca de lo que es un conjunto y sus propiedades básicas. La misma se ha formado de manera natural y parece adecuada a lo que queremos. Pero, es inconsistente.

1. Inconsistencia de la Teoría Ingenua de Conjuntos

Recordemos que una teoría formal se dice *consistente* si para una formula ϕ de la teoría no es posible deducir tanto ϕ como $\sim \phi$ de acuerdo con las reglas de inferencia y los axiomas de la misma. Por tanto, la teoría descrita sería inconsistente si es posible deducir la fórmula $\phi \wedge \sim \phi$. Veamos:

Esta prueba se vale de la conocida paradoja de Russell. Supongamos la existencia del siguiente conjunto: $N = \{A : A \notin A\}$, el cual es el conjunto de todos aquellos conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. En el lenguaje $\mathcal{K}$ esto se expresaria así:

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$$

Es claro que $N \in N \leftrightarrow N \notin N$ pues, si $N \in N$, entonces N posee la propiedad de los conjuntos de N, esto es, $A \notin A$; por tanto, $N \notin N$. Si $N \notin N$, entonces N no debería poseer dicha propiedad y se concluiría que $N \in N$.

De manera que N resulta ser un conjunto paradójico o, al menos, uno tal que de él no puede decidirse la relación de pertenencia con respecto a sí mismo. Aprovechando esta propiedad, podemos construir una prueba formal de la inconsistencia de la teoría ingenua de conjuntos. Primero veamos que N, o lo que es lo mismo, el enunciado

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$$

es deducible de los axiomas lógicos de toda teoría de primer orden. En efecto, procedamos por reducción al absurdo:

(1) $(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$ Supuesto

(2) $Sy_0 \wedge (x)(x \in y_0 \leftrightarrow (Sx \wedge (x \notin x)))$ Eliminación del existencial 1

(3) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow (Sx \wedge (x \notin x)))$ Simplificación 2

(4) $y_0 \in y_0 \leftrightarrow Sy_0 \wedge y_0 \notin y_0$ Eliminación del Universal en 3

(5) $y_0 \in y_0$ Supuesto

(6) $y_0 \in y_0 \rightarrow Sy_0 \wedge (y_0 \notin y_0)$ Definición de $\leftrightarrow$ y simplificación en 4

(7) $Sy_0 \wedge y_o \notin y_0$ Modus Ponens 5,6

(8) $y_0 \notin y_0$ Simplificación 7

(9) $y_0 \in y_0 \wedge y_0 \notin y_0$ Adjunción de 5,8

(10) $y_0 \notin y_0$ Reductio Absurdum 5-9

(11) Sy_0 Simplificación en 2

(12) $Sy_0 \wedge y_0 \notin y_0$ Adjunción $11, 12$

(13) $Sy_0 \wedge y_0 \notin y_0 \to y_0 \in y_0$ Definición de $\leftrightarrow$ y simplificación en 4

(14) $y_0 \in y_0$ Modus Ponens 12, 13

(15) $y_0 \in y_0 \wedge y_0 \notin y_0$ Adjunción 10, 14

(16) $\sim (\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x \notin x)))$ Reductio Absurdum $1 - 15$

Ahora bien, uno de los axiomas propios de la teoría ingenua es justo

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow Sx \wedge x \notin x)).$$

Por lo cual, resulta inconsistente.

Sin embargo, según entendemos siguiendo a Jané, esta forma de entender el problema no se ajusta a lo comprendido por Cantor, y quizá tampoco por Zermelo y Fraenkel. Es una manera más bien desbordada de entender el principio de extensión. Según aquel autor:

> El supuesto carácter evidente del principio ilimitado de comprensión, el responsable de la paradoja, es ilusorio; la versión intuitivamente aceptable es más restringida. Ignacio Jané, *¿De qué trata la teoría de conjuntos?*, pág. 5

En efecto, es deducible de esta cita que la interpretación que subyace al principio de extensión en las páginas de Boolos no recoge con fidelidad los presupuestos intuitivos relativos a qué sean los conjuntos y sus características. En la interpretación "boolosiana"está operando el siguiente supuesto: el hecho de bastar que un conjunto esté determinado (o sea, que esté dada la condición C que se aplica sólo al conjunto o que caracteriza al conjunto) es suficiente para aceptar que ella efectivamente existe; y este supuesto, en efecto, conduce a contradicciones, como quedó demostrado con la paradoja de la teoría ingenua anteriormente expuesta. Hasta allí todo parece ir bien. Pero de hecho, según Jané, con ello nos hemos precipitado:

> Hemos pasado de la suposición de que para cada objeto está determinado si cumple la condición C a la conclusión de que, por tanto, está determinado cuáles son todos los objetos que la cumplen. Para obtener esta conclusión necesitamos

> una premisa adicional: que esté determinado qué objetos hay, es decir, cuáles son todos los objetos. *Ignacio Jané, ¿De qué trata la teoría de conjuntos?*, pág.6

Efectivamente, son dos situaciones diferentes: de "Dado un objeto cualquiera está determinado si él cumple o no la condición C"no se puede concluir siquiera que exista tal objeto. Puedo poseer un mecanismo para separar o distinguir unicornios de centauros, y ni siquiera garantizar la existencia de estos. Por tanto, concluir "Está determinado cuáles son todos los objetos que cumplen la condición C"es asegurar que estos existen y, por ello, decir más de lo anteriormente asegurado. Ello sería sólo posible si alguna proposición adicional referente a su existencia nos los hace aceptar. Jané lo explica así:

> El principio de comprensión intuitivamente motivado sólo se aplica a dominios bien determinados de objetos: de antemano está determinado qué objetos hay; por tanto, si está determinado de cada uno de ellos si cumple la condición C, ha de estar determinado cuáles son los objetos que cumplen la condición. En este caso, pues, la clase determinada por C existe, aunque puede no ser uno de los objetos de que partimos (no lo será si C es la condición de Russell).
> Ignacio Jané, *¿De qué trata la teoría de conjuntos?*, pág. 6

Jané cree que esta forma ilimitada de entender el principio de extensión ha sido rechazada en el pensamiento occidental con antecedentes de vieja data. El ejemplo que nos ofrece es digno de tener en cuenta en nuestro contexto, por lo que lo reproducimos en su extensión:

> Quien, admitiendo que el concepto de número natural es preciso, mantiene que los números naturales son potencialmente infinitos pero no lo son en acto, está negando (aunque no lo exprese de este modo) que la condición de ser un número natural determina un conjunto. No es que niegue que la totalidad de los números naturales sea concebible como un objeto, sino que niega la existencia de esta totalidad; niega, dicho de un modo sugerente, que los números naturales estén todos disponibles para constituir un conjunto, o una clase.
> Ignacio Jané, *¿De qué trata la teoría de conjuntos?* pág. 6

Siguiendo nuestra interpretación, es claro que podemos poseer una forma efectiva de identificar números naturales, pero ello no significa que hemos asegurado que existan en su totalidad infinita. La aclaratoria final de Jané será importante para nosotros. Hablaremos de *dominio* de objetos cuando aseguremos cuáles son los objetos *que hay* y esté determinado cuáles son exactamente. En el caso de la paradoja de Russell con la cual hemos hecho ver que la *concepción ingenua de conjuntos* es inconsistente, no está determinado que conjuntos hay, sólo cuáles serían. Este impasse será efectivamente superado por la teoría de Zermelo-Fraenkel, en el entendido de que todo conjunto supone previamente la construcción (o al menos la existencia) de sus elementos *antes* de que el conjunto en cuestión sea dado. Y este importante hecho intuitivo lo explotará magistralmente Boolos para hacer ver cómo la noción de los conjuntos en ZF supone una concepción "constructiva"(aunque no en sentido fuertemente efectivo, por lo que sería mejor llamarla simplemente *progresiva y acumulativa*, o como él mismo la llama: *iterativa*) de los conjuntos.

2. Concepción Iterativa de Conjuntos

La sección anterior mostró la imposibilidad de sostener la proposición "Toda propiedad posee una extensión"(sin embargo hay que aclarar que existen axiomáticas en que vale la proposición anterior, por ejemplo el sistema axiomático NBG); construimos un lenguaje formal para explicarlo y demostramos su inconsistencia. Se podría estar tentado a considerar entonces que cualquier decisión referente a la adopción de un conjunto de axiomas acerca de conjuntos sería arbitraria, ya que la concepción tradicional de conjunto (que llamamos ingenua), la cual es natural, simple, conlleva inconsistencia. Así, cualquier otra concepción podría parecer totalmente artificial. A pesar de ello, la denominada *concepción iterativa de conjuntos* se ofrece como alternativa viable, diferenciada de la anterior y que (hasta ahora) no ofrece inconsistencia alguna (por Godel es imposible saber si en algún momento se producirá). Dicha concepción no parece ser tan intuitiva como la primera noción pero sí refleja la idea de que los elementos están dados *antes* que el conjunto. Más aún, veremos posteriormente cómo los principales axiomas de Zermelo reflejan tal concepción iterativa.

Para comprender mejor el porqué de la necesidad de proceder de acuerdo a una concepción iterativa, observemos el siguiente axioma de la teoría ingenua

$$(\exists y)(Sy \wedge (x)(x \in y \leftrightarrow (Sx \wedge x = x)))$$

De acuerdo con este axioma, existe el conjunto de todos los conjuntos, y, más aún, el conjunto se contiene a sí mismo (pues y=y, ¿podría ser de otra manera?). Es importante observar en detalle esta afirmación, que el conjunto se contenga a sí mismo significa que se *pertenece a sí mismo como elemento*. Un conjunto puede *incluirse* en sí mismo (como subconjunto) pero el hecho de que se *pertenezca* a sí mismo como elemento parece contradecir el significado usual que se le da a la relación de pertenencia $\in$. La contradicción no hace referencia a que sea equivocado suponer que algún conjunto es elemento de sí mismo, pues el enunciado "$(\exists x)(Sx \wedge x \in x)$" no es inconsistente en sí mismo, pero si se entiende $\in$ como "es un elemento de", el aceptarlo como verdadero implicaría redefinir lo que se entiende por pertenencia, ya que lo que uno espera es que los elementos estén dados *antes* que el conjunto lo esté y no con el conjunto mismo.

Dos consecuencias muy particulares de aceptar que un conjunto se pertenezca a sí mismo son las siguientes

- Si $(\exists x)(Sx \wedge x \in x)$ entonces $(\exists x)(\exists y)(Sx \wedge Sy \wedge x \in y \wedge y \in x)$. Tan particular es que un conjunto se pertenezca a sí mismo como el hecho ahora de que para dos conjuntos x, y dados se pertenezcan uno al otro.
- $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(Sx \wedge Sy \wedge Sz \wedge x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$. Aquí otra patología, es la secuencia cíclica infinita de conjuntos tales que $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ldots$

La concepción iterativa evita estas peculiaridades. Boolos realiza la descripción de la misma en tres partes. La primera consiste en una descripción informal de la idea, se utilizarán expresiones tales como "nivel", "es formado en", "antes de", las cuales son nociones intuitivas de lo que queremos esbozar. En la segunda parte presenta una teoría axiomática que formaliza parcialmente lo esbozado en la primera parte; esta teoría la llamará *teoría de niveles*. La tercera parte consiste en la derivación de los axiomas de la teoría de conjuntos desde la teoría de niveles. La descripción informal de la concepción iterativa es como sigue:

Un conjunto es una colección formada en algún nivel, según el siguiente proceso: se comienza con individuos (si los hay). Un individuo es un objeto que no es un conjunto. En el nivel cero se forman todas las posibles colecciones de individuos. Si no los hay, una sola colección, el conjunto vacío, el cual no contiene elementos, es formado en ese nivel cero. Si hay un solo individuo, dos conjuntos son formados: el conjunto vacío y el conjunto que contiene exactamente a un individuo. Si hay dos individuos, cuatro conjuntos son formados; y en general si hay n individuos, 2^n conjuntos son formados.

En el nivel uno, se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en el nivel cero. En el nivel dos, se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en el nivel cero y uno. En el nivel tres, se forman todas las colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles cero, uno y dos. En el nivel cuatro, se forman todas las colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles cero, uno, dos y tres. Seguimos de esta manera repitiendo el procedimiento para cada nivel. En cada uno de ellos se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles anteriores.

Inmediatamente despúes de todos los niveles cero, uno, dos, tres, cuatro, ... o colecciones de conjuntos finitos, hay un nivel, llamado el nivel omega. En dicho nivel, se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles cero, uno, dos, tres,..., Una de esas colecciones será el conjunto de *todos* los conjuntos formados en los niveles cero, uno, dos, etc.

Despúes del nivel omega viene el nivel omega más uno. En dicho nivel se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles cero, uno, dos,..., hasta omega. En el nivel omega más dos se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles cero, uno, dos,... , omega y omega más uno. En el nivel omega más tres se forman todas las colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles anteriores. Y se sigue sucesivamente repitiendo esta operación.

Inmediatamente despúes de los niveles cero, uno, dos, tres,... omega, omega más uno, omega más dos,... viene el nivel llamado omega más omega. En dicho nivel se forman todas las posibles colecciones de individuos y conjuntos formados en los niveles anteriores. Y así se sigue repitiendo (iterando) la operación indefinidamente (aunque vale aclarar que la axiomática de Boolos, expuesta en su formalidad más abajo, no permite la construcción de niveles hasta ni más alla de *omega más omega*, sólo la permite hasta omega - u omega más n con n en los naturales-, como garantizará el axioma sobre la existencia de un nivel “infinito”, axioma VI de nuestra lista expuesta en el apartado correspondiente). De acuerdo con esta descripción, los conjuntos son formados con elementos que ya se encuentran en niveles anteriores y por lo tanto no se forman a la vez que los conjuntos, es decir, los elementos están dados *antes* que el conjunto. Más aún, se itera repetidamente la operación de formación de conjuntos. He aqui la concepción iterativa de conjuntos descrita de manera informal. Así, no hay conjunto que se pertenezca a sí mismo ni existe el conjunto de todos los conjuntos, pues, en el primer caso, cada conjunto es formado en algún nivel y posee como elementos a conjuntos formados en niveles anteriores y en el segundo caso, de existir el conjunto de todos los conjuntos se detendría la iteración, pero a la vez, se podría seguir a otro nivel reproduciendo nuevos conjuntos a partir de este conjunto universal, lo cual es contradictorio. Además, no existen conjuntos x, y tales que cada uno se pertenezca al otro. Pues si $y \in x$ entonces y debería haber sido formado en un nivel anterior que al que x es formado, y si $x \in y$ entonces x debería haber sido formado en un nivel anterior al que y es formado. Así, se tendría que x debería haber sido formado en un nivel anterior a su misma formación, lo cual es imposible. De manera similar, no hay conjuntos x, y y z tales que x pertenezca a y, y a z, y z a x. De igual manera no existe una secuencia infinita de conjuntos tales que x_1 pertenezca a x_0, x_2 a x_1, x_3 a x_2, etc, pues estaríamos en presencia de conjuntos cuyos elementos iniciales de formación nunca son dados. Por lo tanto, la descripción informal que hemos hecho impide la aparición de las peculariedades antes mencionadas.

Es necesario indicar que nuestra teoría hablará acerca de conjuntos y no de individuos, por lo tanto, todos los elementos de los cuales hablaremos seran conjuntos *puros*, es decir, no poseen individuos como elementos. En nuestra descripción informal, en el nivel cero se encontraría únicamente el conjunto vacío y en los niveles posteriores se formarían conjuntos a partir de él.

3. Teoría de Niveles de George Boolos

Formalizaremos la descripción informal haciendo uso de un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{J}$, en la cual hay dos clases de variables: variables x, y, z las cuales harán referencia a conjuntos y variables r, s, t las cuales harán referencia a niveles -estos niveles suponen los ordinales como más adelante veremos-. Tendrá como letras predicativas: $\in$ y $=$ de $\mathcal{L}$ y dos nuevas: E que significa "está antes de"y F el cual significa "es formado en". Obsérvese que hay mayor cantidad de predicados que en la usual teoría de conjuntos de Zermelo, ésto será relevante para lo que posteriormente referiremos. Las reglas de formación son las mismas de $\mathcal{L}$. Lo anterior es reflejado en la siguiente definición

Denotaremos por $\mathcal{J}$ a un lenguaje formal de primer orden con las siguientes características

(1) Símbolos del lenguaje.
   - (,) $\rightarrow$ $\sim$

- $\in \quad E \quad F$
- $x, y, z, w, \ldots$
- r, s, t

(2) Reglas de formación de fbf's.

(3) Reglas de deducción.

- Modus Ponens.
- Generalización.

(4) Axiomas.

- Axiomas Lógicos.
- Axiomas Propios.

Los axiomas lógicos son los mismos de $\mathcal{L}$. En cuanto a los axiomas propios de la teoría de niveles que deseamos construir, es importante hacer notar las características de los postulados que tomaremos como puntos de partida de nuestra teoría. Los axiomas que indican como deseamos que se comporten los niveles se presentan a continuación

(I) $(s) \sim sEs$ (no reflexividad de E)

(II) $(r)(s)(t)((rEs \wedge sEt) \rightarrow rEt)$ (Transitividad de E)

(III) $(s)(t)(sEt \vee s = t \vee tEs)$ (Conexidad de E)

(IV) $(\exists s)(t)(t \neq s \rightarrow sEt)$ (Existencia de un primer nivel)

(V) $(s)(\exists t)(sEt \wedge (r)(rEt \rightarrow (rEs \vee r = s)))$ (Secuencialidad inmediata de niveles)

Los axiomas que describen cuándo los conjuntos y sus elementos son formados se presentan a continuación

(VI) $(\exists s)((\exists t)tEs \wedge (t)(tEs \rightarrow (\exists r)(tEr \wedge rEs)))$

(VII) $(x)(\exists s)(xFs \wedge (t)(xFt \rightarrow t = s))$

(VIII) $(x)(y)(s)(t)((y \in x \wedge xFs \wedge yFt) \rightarrow tEs)$

(IX) $(x)(s)(t)(xFs \wedge tEs \rightarrow (\exists y)(\exists r)(y \in x \wedge yFr \wedge (t = r \vee tEr)))$

El primer axioma establece que no existe nivel que se encuentre antes de sí mismo (i.e. E es no reflexivo), el axioma II, que E es transitiva mientras que el axioma III nos dice que E es conexo. El axioma IV postula la existencia del nivel 0 y el axioma V establece que inmediatamente después de un nivel hay otro.El axioma VI postula la existencia de un nivel, que no es el primero, que no posee inmediato anterior. En la descripción informal, el nivel omega es uno de tales niveles. El axioma VII establece que cada conjunto es formado en un nivel único. El axioma VIII establece que cada elemento de un conjunto es formado *antes*, i.e. en un nivel anterior al conjunto. El axioma IX postula que si un conjunto es formado en un nivel, entonces, en o despúes de cualquier nivel anterior, al menos uno de sus elementos ha sido formado.

Para distinguir todos los conjuntos posibles en un nivel determinado, a partir de una fórmula χ del lenguaje, tal que dichos conjuntos representan su extensión y, como antes, sus elementos están formados en los niveles anteriores a éste, tomaremos como axiomas todas las fórmulas:

$$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$$

Como queda dicho, χ es una fórmula del lenguaje $\mathcal{J}$ con la condición adicional de que ninguna ocurrencia de y es libre. El anterior axioma indica que para cualquier nivel existe un conjunto de exactamente aquellos elementos para los cuales χ aplica, los cuales están formados antes de dicho nivel. Llamaremos a estos axiomas, *Axiomas de especificación.*
Hay todavía una importante característica contenida en nuestra descripción que aún no ha sido formalizada en la teoría de niveles: la analogía entre el modo en el que los conjuntos son *inductivamente generados* por el procedimiento descrito anteriormente y el modo en el que los números naturales son inductivamente generados desde cero por la aplicación repetitiva de la operación de sucesor. El principio de inducción matemática, posee dos versiones, la primera es

$$(P)[(P(0) \wedge (n)[P(n) \rightarrow P(Sn)]) \rightarrow (n)P(n)]$$

la cual se lee "Si 0 posee una propiedad y siempre que para un número natural, sus antecesores posean la propiedad, entonces cada número natural posee la propiedad."La segunda versión es

$$(P)[(n)((m)[m < n \to P(m)] \to P(n)) \to (n)P(n)$$

la cual se lee, "Si cada número natural tiene una propiedad siempre que todos los nḿeros naturales menores a él la tengan, entonces cada nḿero natural, tiene la propiedad.". Tomaremos esta segunda versión para expresar nuestro principio de inducción acerca de conjuntos y niveles. Diremos que un nivel s es *cubierto* por una propiedad, si la propiedad aplica en cada conjunto formado en s. El análogo para conjuntos y niveles del principio de inducción dirá que "*Si cada nivel es cubierto por una propiedad siempre que todos los niveles anteriores son cubiertos por tal propiedad, entonces cada nivel es cubierto por la propiedad.*" Lo anterior queda expresado en $\mathcal{J}$ así

$$(s)((t)(tEs \to (x)(xFt \to \theta)) \to (x)(xFs \to \chi)) \to (s)(x)(xFs \to \chi),$$

donde χ y θ son fórmulas del lenguaje $\mathcal{J}$. Llamaremos a estos axiomas, *axiomas inductivos*.

4. Derivación de los axiomas de Zermelo a partir de la Teoría de Niveles

Completaremos la descripción de la concepción iterativa expuesta por Boolos, mostrando cómo éste *deriva* los axiomas de una teoría de conjuntos de la teoría de niveles.

- **Axioma del conjunto vacío**: $(\exists y)(x)(x \notin y)$

(1)	$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$	Axiomas de especificación
(2)	$(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x = x \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$	Sustitución en (1)
(3)	$(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x = x \wedge (\exists t)(tE0 \wedge xFt)))$	Eliminación del Universal en (2)
(4)	$(x)(x \in y_0 \leftrightarrow (x = x \wedge (\exists t)(tE0 \wedge xFt)))$	Eliminación del Existencial en (3)
(5)	$x_0 \in y_0 \leftrightarrow (x_0 = x_0 \wedge (\exists t)(tE0 \wedge x_0Ft))$	Eliminación del Universal en (4)
(6)	$(\exists s)(t)(t \neq s \to sEt)$	Axioma IV
(7)	$(t)(t \neq 0 \to 0Et)$	Eliminación del Existencial en (6)
(8)	$t \neq 0 \to 0Et$	Eliminación del Universal en (7)
(9)	$(\exists t)(tE0)$	Hipótesis
(10)	t_0E0	Eliminación del Existencial en (9)
(11)	$t_0 \neq 0 \to 0Et_0$	Eliminación del Universal en (8)
(12)	$t_0 = 0 \vee 0Et_0$	Silogismo Disyuntivo en (11)

(13) $0E0$ Simplificación y Sustitución en (12)

(14) $(s) \sim (sEs)$ Axioma I

(15) $\sim (0E0)$ Eliminación del Universal en (14)

(16) $\sim (0E0) \wedge 0E0$ Adjunción (13),(15)

(17) $\sim (\exists t)(tE0)$ Reductio Absurdum (9)-(16)

(18) $(t)(0Et)$ Equivalencia (17)

(19) $x_0 = x_0$ Tautología

(20) $(x)(\exists s)(xFs \wedge (t)(xFt \to t = s))$ Axioma VII

(21) $(x)(\exists s)(xFs)$ Simplificación en (20)

(22) $(\exists s)(x_0Fs)$ Eliminación del Universal en (21)

(23) $(\exists t)(x_0Ft)$ Sustitución en (22)

(24) x_0Ft_0 Eliminación del Existencial en (23)

(25) $0Et_0$ Eliminación del Universal en (18)

(26) $(x_0Ft_0) \wedge (0Et_0)$ Adjunción (24),(25)

(27) $(\exists t)(x_0Ft \wedge 0Et)$ Introducción del Existencial en (26)

(28) $(x_0 = x_0) \wedge (\exists t)(x_0Ft \wedge 0Et)$ Adjunción (19), (27)

(29) $(x_0 = x_0) \wedge (\exists t)(0Et \wedge x_0Ft)$ Equivalencia (28)

(30) $x_0 \in y_0 \to (x_0 = x_0 \wedge (\exists t)(tE0 \wedge x_0Ft))$Definición de $\leftrightarrow$ y simplificación en (5)

(31) $\sim (x_0 \in y_0) \vee (x_0 = x_0 \wedge (\exists t)(tE0 \wedge x_0Ft))$ Silogismo Disyuntivo

(32) $(x_0 = x_0) \wedge (\exists t)(tE0 \wedge x_0Ft)$ Simplificación (31)

(33) $((x_0 = x_0) \wedge (\exists t)(0Et \wedge x_0Ft)) \wedge ((x_0 = x_0) \wedge (\exists t)(tE0 \wedge x_0Ft))$

Obsérvese que (33) es falsa por lo que $x_0 \in y_0$ es falsa también. Luego

(34) $\sim (x_0 \in y_0)$ Por (33) y definición de $\leftrightarrow$ en (5)

(35) $(x)(x \notin y_0)$ Introducción del Universal en (34)

(36) $(\exists y)(x)(x \notin y)$ Introducción del Existencial en (35)

Q.E.D.

- **Axioma de pares**: $(z)(w)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x = z \vee x = w))$

(1) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Axiomas de Especificación

(2) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((x = z \vee x = w) \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Sustitución en (1)

Obsérvese que la anterior fórmula es un axioma de especificación, según el cual, para cualquier nivel, existe el conjunto de todos los conjuntos formados en un nivel anterior que son idénticos a z o a w. Sea r el nivel en el que z es formado y s el nivel en el que w es formado, sea t el nivel mayor que r y s. Entonces existe el conjunto de todos los conjuntos formados en los niveles anteriores a t que son iguales a z o a w. Así, existe un conjunto que contiene exactamente a z y a w.

(3) $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((x = z \vee x = w) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Universal en (2)

(4) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow ((x = z \vee x = w) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Existencial en (3)

(5) $x_0 \in y_0 \leftrightarrow ((x_0 = z \vee x_0 = w) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge x_0Ft))$ Eliminación del Universal en (4)

- **Axioma de unión**: $(z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\exists w)(x \in w \wedge w \in z))$

(1) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Axiomas de Especificación

(2) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((\exists w)(x \in w \wedge w \in z) \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Sustitución en (1)

Obsérvese que la fórmula anterior es un axioma de especificación que nos dice que para cada nivel, existe el conjunto de todos los elementos de los elementos de z formados en los niveles anteriores. Sea s el conjunto en el que z es formado, cada elemento de z está formado antes de z y, en consecuencia, cada elemento de los elementos de z están formados también antes de z. Luego, existe el conjunto de todos los elementos de los elementos de z.

(3) $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((\exists w)(x \in w \wedge w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Universal en (2)

(4) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow ((\exists w)(x \in w \wedge w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Existencial en (3)

(5) $x_0 \in y_0 \leftrightarrow ((\exists w)(x_0 \in w \wedge w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge x_0Ft))$ Eliminación del Universal en (4)

- **Axioma del conjunto potencia**: $(z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (w)(w \in x \rightarrow w \in z))$

(1) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Axiomas de Especificación

(2) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((w)(w \in x \rightarrow w \in z) \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Sustitución en (1)

Este axioma de especificación nos indica que, para cualquier nivel, existe el conjunto de todos los subconjuntos de z formados en los niveles anteriores. Sea t el nivel en el que z es formado y sea s el inmediato nivel siguiente. Si x es subconjunto de z entonces x está formado antes del nivel s. Pues, de otra forma, por axioma (IX), debería existir un elemento de x que fue formado en o despues de t, por lo tanto, no fuese un elemento de z. Así, existe el conjunto de todos los conjuntos de z formados antes de s.

(3) $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((w)(w \in x \rightarrow w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Universal en (2)

(4) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow ((w)(w \in x \rightarrow w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge xFt)))$ Eliminación del Existencial en (3)

(5) $x_0 \in y_0 \leftrightarrow ((w)(w \in x_0 \rightarrow w \in z) \wedge (\exists t)(tEs' \wedge x_0Ft)))$ Eliminación del Universal en (4)

- **Axioma de infinitud**: $(\exists y)((\exists x)(x \in y \wedge (z) \sim z \in x) \wedge (x)(x \in y \rightarrow (\exists z)(z \in y \wedge (w)(w \in z \leftrightarrow (w \in x \vee w = x)))))$

  (1) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Axiomas de especificación

  (2) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x = x \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Sustitución en (1)

  Obsérvese que cada conjunto x tiene un sucesor. Sea y el conjunto que justamente contiene x y a x (axioma de pares), y sea w el conjunto que contiene exactamente al conjunto x y y (axioma de pares de nuevo), y sea z el conjunto formado por los elementos de los elementos de x (axioma de unión). Entonces, z es un sucesor de x ya que sus elementos son x y los elementos de x. Ahora, nótese que si z es un sucesor de x, x es formado en r y t es el siguiente nivel después de r entonces z es formado en t. Cada elemento de z es formado antes de t. Por lo que z. Así z sería formado en o antes de t por axioma IX. Pero x, el cual está en z es formado e r. Por lo tanto, z es formado en z como querámos ver. La fórmula anterior es un axioma de especificación de acuerdo con el cual, para cualquier nivel, existe el conjunto de todos los conjuntos los cuales formados en los niveles anteriores. Así, existe el conjunto y de todos los conjuntos formado antes de s. y contiene entonces a todos los conjuntos formados en el nivel cero, por lo que tiene al vacío. Además, si y contiene a x, y contiene a todos los sucesores de x, con lo que se cumple lo pedido.

- **Axiomas de separación**: $(z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$.
  (1) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\chi \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Axiomas de Especificación
  (2) $(s)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((x \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs \wedge xFt)))$ Sustitución en (1)
  (3) $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow ((x \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge xFt)))$ Eliminación del Universal en (2)
  (4) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow ((x \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge xFt)))$ Eliminación del Existencial en (3)
  (5) $x \in y_0 \leftrightarrow ((x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0Ft))$ Eliminación del Universal en (4)
  Finalmente, haciendo uso de los axiomas VII y VIII de la teoría de niveles y de la expresión anterior se obtiene lo pedido. Veámoslo:
  (6) $(x_0 \in y_0 \rightarrow ((x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0Ft))) \wedge ((x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0Ft)) \rightarrow x_0 \in y_0$ Definición de Equivalencia en (5)
  (7) $((x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0Ft)) \rightarrow x_0 \in y_0$ Simplificación en (6)
  (8) $x_0 \in z_0 \wedge \phi$ Supuesto
  (9) $(x)(\exists s)(xFs \wedge (t)(xFt \rightarrow t = s))$ Axioma VII
  (10) $(x)(\exists t)(xFt \wedge (t')(xFt' \rightarrow t' = t))$ Sustitución en (9)
  (11) $(\exists t)(x_0Ft \wedge (t')(x_0Ft' \rightarrow t' = t))$ Eliminación del Universal en (10)
  (12) $x_0Ft_0 \wedge (t')(x_0Ft' \rightarrow t' = t_0)$ Eliminación del Existencial en (11)
  (13) x_0Ft_0 Simplificación en (12)
  (14) $(x)(y)(s)(t)((y \in x \wedge xFs \wedge yFt) \rightarrow tEs)$ Axioma VIII
  (15) $(z)(x)(s)(t)((x \in z \wedge zFs \wedge xFt) \rightarrow tEs)$ Sustitución en (14)
  (16) $(x)(s)(t)((x \in z_0 \wedge z_0Fs \wedge xFt) \rightarrow tEs)$ Eliminación del Universal en (15)
  (17) $(s)(t)((x_0 \in z_0 \wedge z_0Fs \wedge x_0Ft) \rightarrow tEs)$ Eliminación del Universal en (16)
  (18) $(t)((x_0 \in z_0 \wedge z_0Fs_0 \wedge x_0Ft) \rightarrow tEs_0)$ Eliminación del Universal en (17)
  (19) $(x_0 \in z_0 \wedge z_0Fs_0 \wedge x_0Ft_0) \rightarrow t_0Es_0$ Eliminación del Universal en (18)
  (20) $(z)(\exists s)(zFs \wedge (t)(zFt \rightarrow t = s))$ Sustitución en (9)
  (21) $(\exists s)(z_0Fs \wedge (t)(z_0Ft \rightarrow t = s))$ Eliminación del Universal en (20)
  (22) $z_0Fs_0 \wedge (t)(z_0Ft \rightarrow t = s_0)$ Eliminación del Existencial en (21)
  (23) z_0Fs_0 Simplificación en (22)

(24) $x_0 \in z_0$ Simplificación en (8)

(25) $x_0 \in z_0 \wedge z_0 F s_0 \wedge x_0 F t_0$ Adjunción (24), (23) y (13)

(26) $t_0 E s_0$ Modus Ponens (25), (19)

(27) $t_0 E s_0 \wedge x_0 F t_0$ Adjunción (26), (13)

(28) $(\exists t)(tEs_0 \wedge x_0 F t)$ Introducción del Existencial en (27)

(29) $(x_0 \in z_0 \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0 F t)$ Adjunción (28), (8)

(30) $x_0 \in y_0$ Modus Ponens (29), (7)

(31) $(x_0 \in z_0 \wedge \phi) \rightarrow x_0 \in y_0$ Teorema de la Deducción (8)-(30)

(32) $x_0 \in y_0$ Supuesto

(33) $x_0 \in y_0 \rightarrow ((x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0 F t))$ Simplificación en (6)

(34) $(x_0 \in z \wedge \phi) \wedge (\exists t)(tEs_0 \wedge x_0 F t)$ Modus Ponens (32), (33)

(35) $x_0 \in z \wedge \phi$ Simplificación (34)

(36) $x_0 \in y_0 \rightarrow (x_0 \in z \wedge \phi)$ Teorema de la Deducción (32)-(35)

(37) $((x_0 \in z_0 \wedge \phi) \rightarrow x_0 \in y_0) \wedge (x_0 \in y_0 \rightarrow (x_0 \in z \wedge \phi))$ Adjunción (31),(36)

(38) $x_0 \in y_0 \leftrightarrow (x_0 \in z \wedge \phi)$ Equivalencia (37)

(39) $(x)(x \in y_0 \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$ Introducción del Universal en (38)

(40) $(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$ Introducción del Existencial en (39)

(41) $(z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$ Introducción del Universal en (40)

Q.E.D.

- **Axiomas de regularidad**: Todas las fórmulas

$$(\exists x)\phi \rightarrow (\exists x)(\phi \wedge (y)(y \in x \rightarrow \sim \psi))$$

La derivación de los axiomas de regularidad se realiza a través de los siguientes pasos:

(1) Tenemos como hipótesis

$$(\exists x)(\phi)$$

(2) Consideremos el axioma de inducción

$(s)((t)(tEs \rightarrow (x)(xFt \rightarrow \theta)) \rightarrow (x)(xFs \rightarrow \chi)) \rightarrow (s)(x)(xFs \rightarrow \chi)$

(3) Sustituimos θ y χ por $\sim \phi$ en la expresión anterior obteniéndose

$(s)((t)(tEs \rightarrow (x)(xFt \rightarrow \sim \phi)) \rightarrow (x)(xFs \rightarrow \sim \phi)) \rightarrow (s)(x)(xFs \rightarrow \sim \phi)$

(4) La contrapositiva de la expresión anterior es

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \rightarrow (\exists s)((t)(tEs \rightarrow (x)(xFt \rightarrow \sim \phi)) \wedge (\exists x)(xFs \wedge \phi))$

(5) Luego, tenemos

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \rightarrow (\exists s)((\exists x)(xFs \wedge \phi) \wedge (t)(tEs \rightarrow (x)(xFt \rightarrow \sim \phi)))$

(6) Eliminamos paréntesis donde no es necesario, quedando

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \rightarrow (\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \wedge (t)(tEs \rightarrow (x)(xFt \rightarrow \sim \phi))$

(7) Simplificando queda

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \rightarrow (\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi \wedge (t)(x)(tEs \wedge xFt \rightarrow \sim \phi))$

(8) Sustituyendo convenientemente tenemos

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi) \rightarrow (\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi \wedge (t)(y)(tEs \wedge yFt \rightarrow \sim \psi))$

(9) El axioma VII nos indica que

$(x)(\exists s)(xFs \ \wedge \ (t)(xFt \rightarrow t = s))$

(10) Luego, sustituyendo en (8) ϕ por $(t)(xFt \rightarrow t = s)$, lo cual es posible pues tenemos por hipótesis (1)

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge (t)(xFt \rightarrow t = s)) \rightarrow (\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi \wedge (t)(y)(tEs \wedge yFt \rightarrow \sim \psi))$

(11) Por (9), (10) y Modus Ponens tenemos

$(\exists s)(\exists x)(xFs \wedge \phi \wedge (t)(y)(tEs \wedge yFt \rightarrow \sim \psi))$

(12) Tenemos como axioma VIII lo siguiente

$(x)(y)(s)(t)((y \in x \ \wedge \ xFs \ \wedge \ yFt) \rightarrow tEs)$

(13) Por (9), (10) y (12) tenemos

$(\exists x)(\phi \wedge (y)(y \in x \rightarrow \sim \psi))$

(14) Luego por teorema de la deducción: Si (2)-(12) y (1) concluyen (13) entonces de (2)-(12) se concluye que

$(\exists x)\phi \rightarrow (\exists x)(\phi \ \wedge \ (y)(y \in x \rightarrow \sim \psi))$

que era lo deseado. Q.E.D.

Este axioma, permite demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1. *No existe conjunto que se pertenezca a sí mismo.*

Demostración.

Supóngase que algún conjunto x se pertenezca a sí mismo, i.e., $(\exists x)(x \in x)$. Entonces,

$$(\exists x)(x \in x) \rightarrow (\exists x)(x \in x \ \wedge \ (y)(y \in x \rightarrow \sim (y \in y))$$

es un axioma de regularidad. Aplicando Modus Ponens se tendría que algún conjunto x se pertenece a sí mismo aunque ningún elemento de x se pertenece a sí mismo. Esto es una contradicción. Por lo que la aseveración del teorema es correcta.

- **Axioma de Extensionalidad**

  Para este autor, este axioma goza de un status epistemológico que no comparte con ninguno de los otros axiomas de ZF. En efecto, si se negase alguno de los axiomas restantes de ZF, se podría suponer que, basándose en esa negación, el axioma es falso. Claro que su falsedad no dejaría de ser de cierta extrañeza, pero visto más de cerca nada tiene por qué inducirnos a pensar que con ello violamos algún principio lógico que hace ininteligible lo propuesto. Piénsese por un momento en la negación del axioma del conjunto vacío. No es contradictorio pensar un dominio en el cual este no exista (recordemos que el cero "0"era desconocido para los matemáticos babilonios), aunque quizás sea poco atractivo desde un punto de vista matemático-conjuntista. O, como hemos tratado de hacer ver siguiendo a Jané, si negáramos la existencia de un subconjunto para un predicado dado, con ello no violamos ningún presupuesto lógico estricto, pues identificar un conjunto por una propiedad dada no es suficiente para asegurar la existencia del mismo.

  Pero si se negase el axioma de extensionalidad o, lo que es lo mismo, creer que es falso, nos llenaría cuanto menos de suspicacia. El valor de verdad de este axioma depende en lo fundamental, sino exclusivamente, de la relación que hay entre el significado de los términos y símbolos lingüísticos involucrados en el mismo. Nos referimos con ello a la noción de "analiticidad". Catalogamos con este término a las oraciones cuyo valor de verdad puede ser determinado sólo en virtud del significado de las expresiones que la conforman. Contrario a las oraciones sintéticas, cuyo valor de verdad requiere de elementos externos al significado de los símbolos que componen la misma, por ejemplo, algún tipo de contrastación empírica.

  Tómese como ejemplo la proposición "ningún soltero es un hombre casado". Esta es una oración analítica porque basta con entender lo que significan "soltero"y "casado"para convencerse de su verdad. Por otra parte, la oración "algunos solteros son doctores"es sintética, dado que para determinar si es verdadera o falsa, habrá que hacer una encuesta o algún tipo de investigación y contrastación empírica allende la afirmación contenida en la oración. De igual modo entendemos que si se afirmase la oración "Existen distintos conjuntos con los mismos elementos"la aceptación y veracidad de tal oración sólo estaría en el significado que se le dé al término "conjuntos". Es de esperar por ello que las nociones "conjunto"y "ser elemento de"no parecerían tener la misma significación si se aceptase como verdadera la proposición "Existen distintos conjuntos con los mismos elementos".

- **Axioma de Elección**

  Para Boolos, el axioma de elección no parece deducirse de la teoría de niveles. Para ver esto valgámonos de la siguiente versión del axioma: "Dado x, si x es un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos, entonces existe un conjunto E, llamado el conjunto de elecciones para x, conteniendo exactamente un elemento de cada uno de los elementos de x."Un posible argumento que sustente la derivación del axioma tendría que proceder así: El conjunto x, formado por conjuntos no vacíos y disjuntos, se forma en el nivel t. Por tanto, los miembros de los miembros de x se forman en etapas anteriores a t. Pero entonces, por el axioma VIII de la teoría de niveles (el cual asegura que cada miembro de un conjunto se forma en una etapa o nivel anterior al nivel en el cual se forma el conjunto mismo), se concluye que E, el conjunto de las elecciones de x, se forma en t o antes de t (pues todos los miembros de x podrían haberse formado mucho antes del nivel t). De todo esto se concluiría que E se forma en t o antes de t (pues sus elementos ya estarían formados). En otras palabras, dado x con las características descritas, existe un conjunto E, que no es más que el conjunto de elecciones de x. Pero acá hemos ido más lejos de lo permitido por la teoría de niveles. En efecto, Boolos nos lo advierte con la siguiente pregunta: ¿cómo sabemos que E realmente se forma? Sabemos que si un conjunto está formado sus elementos se forman en niveles o etapas anteriores, pero no sabemos o podemos asegurar lo contrario: si los elementos de un conjunto están formados, entonces en un cierto nivel se forma el conjunto que contiene exactamente a esos elementos. Esto es lo que parece asegurar Boolos, una consecuencia de lo que es lícito esperar de la axiomática que define a la teoría de niveles. Así que, aceptar que E se forma es tanto como haber aceptado solapadamente el axioma de elección, y caer en un *petitio principii*. De todo esto no se concluye que el axioma de elección no sea indispensable para una teoría de conjuntos -sin el axioma de elección no es posible hacer aritmética cardinal-, como el mismo Boolos asegura, sino que la justificación de su aceptación no parece derivarse de la teoría de niveles como hasta ahora se concibió.

- **Axiomas de Reemplazo**

En este trabajo desarrollaremos ampliamente el por qué de la necesidad de asumir un axioma como este. Es un axioma introducido por Fraenkel en 1922 con la idea de completar los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo, subsanando sus deficiencias en vistas a la construcción o existencia de determinados conjuntos. Con este agregado, la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo pasa a denominarse ZF (o teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel). Una versión del axioma nos la ofrece Boolos:

Una fórmula de $\mathcal{L}$ es un axioma de reemplazo si es la traducción en $\mathcal{L}$ del resultado de sustituir una fórmula de $\mathcal{L}$ para 'F' en

$$F \text{ es una función} \rightarrow (z)(\exists y)(x)(x \in y \leftrightarrow (\exists w)(w \in z \wedge \ F(w) = x))$$

Torreti presenta la primera versión del axioma de reemplazo propuesto por Fraenkel en 1922. Veámosla:

AXIOMA DE REEMPLAZO. Si M es un conjunto y cada elemento de M se reemplaza con (lo que Zermelo llama) *una cosa del dominio* $\mathcal{B}$, M se convierte en otro conjunto.[**4**]

El axioma de Fraenkel así enunciado muestra claramente el porqué del nombre de "reemplazo". Pero este enunciado no está del todo formalizado, Fraenkel mismo subsana esto con una definición más rigurosa, dada en 1925: Si φ es una función y M es un conjunto entonces también es un conjunto la imagen de M por φ, es decir,$\{\varphi(x) : x \in M\}$. Para Fraenkel,la función φ debe estar definida en un cierto conjunto M. Von Neumann hace saber que φ debe estar libre de tal restricción y admitir como argumento cualquier objeto del dominio $\mathcal{B}$. Esta versión de φ concuerda con la que fue presentada por Skolem en el Congreso de Matemáticos Escandinavos de 1922.

Al igual que el anterior, este axioma no se deduce de la teoría de niveles. En efecto, de acuerdo con Boolos, se podría haber enunciado una axiomática de la teoría de niveles que incluyera tal axioma. Por ejemplo, el axioma de *cofinalidad* o *acotación* que enuncia así: "Si cada conjunto está correlacionado con al menos un nivel, no importa cómo, entonces para cada conjunto z existe un nivel s tal que para cada miembro w de z, s es mayor que el nivel, o algunos de los niveles con los cuales w está correlacionado."Este axioma relaciona niveles con conjuntos, pero no es un axioma que estuviese antes incluido, o se dedujera de los axiomas que hemos enunciado en la teoría de niveles.

El argumento de Boolos es que todo lo dicho a partir de los axiomas de su teoría puede modelarse con los conjuntos construidos hasta la etapa $R_\omega = P^\omega(Z_0)$. (Como de hecho haremos ver para el caso de la teoría axiomática de Zermelo en las siguientes páginas). Acá tomaremos a Z_0 como un conjunto infinito (en realidad el menor) cuya existencia está garantizada por el axioma de infinitud. Y la operación P^ω la definiremos informalmente como la aplicación de la operación potencia de un conjunto ω veces; en símbolos: $P^\omega(x) = P \ldots \underbrace{\omega} \ldots P(x)$ (más adelante la definiremos formalmente). En otros términos, y siguiendo nuestra argumentación, los conjuntos construidos hasta R_ω forman un dominio de la teoría. Pero entonces, con esto tendríamos que asegurar que el axioma de reemplazo (o la versión dada antes) no se sigue de esa teoría, pues con él, como veremos para el caso de la axiomática conjuntista Z, podríamos construir conjuntos más potentes que los hasta ahora incluidos en el dominio de la teoría de niveles y de los cuales no se puede asegurar que sigan siendo un modelo (o parte de uno) para dicha teoría. Pero más allá de esta interesante discusión sobre los límites de la teoría de niveles, importante en nuestro contexto es la siguiente aclaratoria: si agregamos reemplazo a la teoría de niveles, se podría definir una sucesión de conjuntos (usando inducción transfinita y la operación potencia de conjuntos, cada R_α se define así: $R_0 = \emptyset, R_{\alpha+1} = R_\alpha \cup P(R_\alpha)$ y $R_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} R_\beta$, si α es un ordinal límite) tal que cada nivel de la teoría de Boolos queda identificado con un R_α, pues el axioma de reemplazo (como veremos para el caso de la teoría axiomática Z) permite asegurar que para cada α,R_α está bien definido, y decir con ello (y esto es lo importante para nosotros) que:

(1) s es una etapa o nivel si $(\exists\alpha)s = R_\alpha$ (y diremos que x es un subconjunto de (del nivel) R_α , mas no un miembro del nivel s o un conjunto en ese nivel)

(2) s es anterior a t si para α y β , $s = R_\alpha$, $t = R_\beta$ y $\alpha < \beta$.

Con estas definiciones estaríamos eliminando el concepto primitivo y fundamental de la teoría de niveles, esto es, aquel al que la teoría le debe su nombre: niveles o etapas, para construir toda la teoría con un solo concepto primitivo: *conjuntos*. Esto tiene consecuencias filosóficas y matemáticas importantes, que en las páginas siguientes trataremos de hacer explícitas (para una explicación detallada de los axiomas de Zermelo-Fraenkel complementaria a las derivaciones ofrecidas se puede consultar "El Naturalismo en Matemáticas "de Penélope Maddy).

5. Justificación del Axioma de Reemplazo

Recordemos que el axioma de reemplazo fue propuesto -independientemente- por Fraenkel y Skolem en 1922. Fraenkel justifica la necesidad del axioma de reemplazo así: Si Z_0 es el conjunto infinito cuya existencia postula el axioma de infinitud de Zermelo, y designamos con Z_n al conjunto potencia $\mathcal{P}(Z_{n-1})$, cuya existencia resulta de la aplicación reiterada del axioma del conjunto potencia a Z_0, entonces los axiomas no garantizan la existencia del conjunto infinito $Z = \{Z_0, Z_1, \ldots\}$ (Z visto como "colección"en el sentido Cantoriano de conjunto). Skolem, por su parte, muestra la insuficiencia del sistema de Zermelo aduciendo el mismo conjunto Z_0 de Fraenkel, pero además ofrece una demostración de dicha insuficiencia.

La demostración se realiza de la siguiente manera:

(1) Sean $P^n(M)$ y $\cup^n(M)$ los conjuntos formados iterando n veces la operación de formar, respectivamente, el conjunto potencia y el conjunto unión de un conjunto M dado.

(2) Por convención, definamos $P^0(M) = \cup^0(M) = M$.

(3) Diremos que M es de *primer rango* si existe $n \geq 0$ tal que $\cup^n(M) = \emptyset$.

Por ejemplo, sea $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. M es de primer rango, basta elegir $n = 3$. Veamos:

- $\cup^1(M) = \{\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\cup^2(M) = \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$
- $\cup^3(M) = \emptyset$

(4) Sea $M = Z_0$. Z_0 no es de primer rango. Veámoslo:

- Z_0 fuese de primer rango si existiese $n \geq 0$ tal que $\cup^n(Z_0) = \emptyset$.

- $\cup^0(Z_0) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\} = Z_0$
  $\cup^1(Z_0) = \{\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\} = Z_0$
  $\vdots$
  $\cup^n(Z_0) = \{\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\} = Z_0$

- Como $\cup^n(Z_0) = Z_0$ para todo $n \geq 0$ entonces Z_0 no es de primer rango, como queríamos ver.

(5) Diremos que M es de k-*ésimo rango* si
  (a) M no es de $(k-1)$-ésimo rango.
  (b) Existe $n \geq 0$ tal que *todos* los elementos de $\cup^n(M)$ son conjuntos de $(k-1)$-ésimo rango.

(6) Afirmamos que Z_0 es de segundo rango. Veámoslo:
  - Z_0 es de segundo rango si
    (a) Z_0 no es de primer rango.
    (b) Existe $n \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^n(Z_0)$ son conjuntos de primer rango.
  - (a) se cumple como vimos en el numeral 4.
  - (b) también se cumple, en efecto, como $\cup^n(Z_0) = Z_0$ para cualquier $n \geq 0$ entonces, los elementos de $\cup^n(Z_0)$, que son los elementos de Z_0, son conjuntos de primer rango. Basta elegir cualquier $n \geq 0$ y se obtiene lo pedido.
  - Por lo tanto, como (a) y (b) se cumplen, Z_0 es de segundo rango.

(7) Sea B un dominio en el que se satisfacen los axiomas de Zermelo. Por el axioma de infinitud, B tiene un conjunto infinito, que hemos llamado Z_0.

(8) Supongamos además que B posee al conjunto $Z = \{Z_0, Z_1, \ldots\}$.

(9) Sea B' el subdominio formado por todos los conjuntos de primer o segundo rango que hay en B.

(10) B' satisface los axiomas de Zermelo. En efecto :
  - En B' se encuentra el conjunto vacío, que es un conjunto de primer rango trivialmente. Por tanto, en B' se satisface el axioma del conjunto vacío.
  - En B' se satisface el axioma de pares, i.e. existe $\{w, z\}$ tal que o es un conjunto de primer rango o es de segundo rango, para dos conjuntos w, z dados de

primer o segundo rango. Si w y z son ambos de primer rango entonces $\{w, z\}$ es de primer rango, en efecto, como w y z son conjuntos de primer rango entonces existen $m, p \geq 0$ tales que $\cup^m(w) = \emptyset$ y $\cup^p(z) = \emptyset$. Sea s=máx$\{m, p\}$. Tomemos $n = s + 1$ y obtenemos lo pedido. Consideremos ahora que uno de los dos conjuntos dados es de segundo rango. Sea w de primer rango y z de segundo rango. Afirmamos que $\{w, z\}$ es de segundo rango. Veamos:

– $\{w, z\}$ es de segundo rango si $\{w, z\}$ no es de primer rango y además si existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(\{w, z\})$ son conjuntos de primer rango.
– Supongamos que $\{w, z\}$ es de primer rango. Luego, existe $p \geq 0$ tal que $\cup^p(\{w, z\}) = \emptyset$. w es de primer rango, por lo que existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(w) = \emptyset$. z es de segundo rango por lo que no existe $r \geq 0$ tal que $\cup^r(z) = \emptyset$. En particular, para $r = m$ tenemos que $\cup^m(w) = \emptyset$ y $\cup^m(z) \neq \emptyset$. Luego, $\cup^m(\{w, z\}) \neq \emptyset$. Para cualquier $p \geq m$ sucede lo mismo. Para $p < m$ sucede que $\cup^p(w) \neq \emptyset$ y $\cup^p(z) \neq \emptyset$ que implica $\cup^p(\{w, z\}) \neq \emptyset$. En consecuencia, para todo $p \geq 0$ sucede que $\cup^p(\{w, z\}) \neq \emptyset$. Luego, es falso que $\{w, z\}$ sea de primer rango.
– Para probar que existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(\{w, z\})$ son conjuntos de primer rango consideremos el hecho de w y z son conjuntos de primer y segundo rango respectivamente. Por tanto, para w existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(z) = \emptyset$ y para z existe $m' \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^{m'}(z)$ son conjuntos de primer rango. Tomemos $s = m'$ donde $m' > m$ y así se obtiene lo pedido.
– Como los dos aspectos anteriores se cumplen, entonces $\{w, z\}$ es de segundo rango.
– Para el caso en que tanto w y z sean conjuntos de segundo rango, para w existe $m \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^m(w)$ son conjuntos de primer rango y para z existe $m' \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^{m'}(z)$ son conjuntos de primer rango. Luego, se toma s =máx$\{m, m'\}$ y se obtiene lo pedido.
– Luego, el axioma de pares se satisface en B'.

- El axioma de unión se satisface en B' siempre que $\cup(w)$ sea un conjunto de primer o segundo rango, para w conjunto de primer o segundo rango dado. Si w es de primer rango se tiene que existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(w) = \emptyset$. Luego, $\cup(w)$ será de primer rango si existe $n \geq 0$ tal que $\cup^n(\cup(w)) = \emptyset$. Basta elegir $n = m$ y se obtiene lo pedido. En caso de que w sea de segundo rango, tenemos que $\cup(w)$ es de segundo rango. En efecto, para que $\cup(w)$ sea de segundo rango debe suceder que $\cup(w)$ no sea de primer rango y que además exista $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(\cup(w))$ sean conjuntos de primer rango. Supongamos que $\cup(w)$ es de primer rango, entonces existiría $n \geq 0$ tal que $\cup^n(\cup(w)) = \emptyset$. Pero w es de segundo rango, por lo que no es de primer rango, i.e. no existe ningún $r \geq 0$ tal que $\cup^r(w) = \emptyset$. Luego, ningún $n \geq 0$ logra que $\cup^n(\cup(w)) = \emptyset$. Por lo tanto, es falso que $\cup(w)$ sea de primer rango. Para verificar que existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(\cup(w))$ sean conjuntos de primer rango, recordemos que, al ser w de segundo rango, existe $m \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^m(w)$ son conjuntos de primer rango. Basta elegir $s = m$ y se obtiene lo pedido. Por lo tanto, el axioma de unión se satisface en B'.
- El axioma de infinitud se satisface en B' si existe un conjunto infinito que sea de primer o segundo rango. En efecto, Z_0 es de segundo rango (como vimos antes) y es infinito.
- El axioma del conjunto potencia se satisface si para w conjunto de primer o segundo rango dado, el conjunto $P(w)$, es decir el conjunto de los subconjuntos de w, es de primer o segundo rango. Consideremos w de primer rango. Afirmamos que $P(w)$ es de primer rango. En efecto, existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(P(w)) = \emptyset$. Como w es de primer rango, existe $n \geq 0$ tal que $\cup^n(w) = \emptyset$. Luego, basta tomar $m = n$ obteniéndose lo pedido. En el caso, de que w sea de segundo rango tendremos que $P(w)$ será también de segundo rango. Veámoslo:
  - $P(w)$ es de segundo rango si $P(w)$ no es de primer rango y además existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(P(w))$ son conjuntos de primer rango.
  - Supongamos que $P(w)$ es de primer rango. Entonces existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(P(w)) = \emptyset$. Pero w es de segundo rango, por lo que no existe $r \geq 0$

tal que $\cup^r(w) = \emptyset$. Además $w \in P(w)$, por lo que para cualquier $r \geq 0$ se tiene que $\cup^r(P(w)) \neq \emptyset$. Por lo que es falso que $P(w)$ sea de primer rango.

- Para probar que existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(P(w))$ son conjuntos de primer rango considérese el hecho de que w es de segundo rango. Esto trae como consecuencia de que existe $m \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^m(w)$ son conjuntos de primer rango. Además $w \in P(w)$, con lo que basta tomar $s = m$ y se obtiene lo pedido.
- Como los dos aspectos anteriores se cumplen, entonces $P(w)$ es de segundo rango.
- Luego, el axioma del conjunto potencia se satisface en B'.

- El axioma de regularidad se satisface si para w conjunto de primer o segundo rango (distinto del vacío) dado, existe $m \in w$ (donde m es de primer o segundo rango) tal que $m \cap w = \emptyset$. En efecto, si w es de primer o segundo rango, sus elementos no pueden ser de un rango mayor al de w (si w es de primero, sus elementos también lo son y si w es de segundo, sus elementos son de primer o segundo rango). Para verificarlo, supongamos que w es de segundo rango y que existe algún elemento w' de w que sea de tercer rango. Entonces, w' no sería de segundo rango y además existiría $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(w')$ son conjuntos de segundo rango. Pero, al ser w de segundo rango, existe $p \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^p(w)$ son conjuntos de primer rango. Pero lo anterior no se cumple para el elemento w'. Por lo que es falso que exista w' conjunto de tercer rango. En el caso en que w sea de primer rango; supongamos que exista p' elemento de w, que sea de segundo rango. Entonces, p' no es de primer rango, por lo que para todo $r \geq 0$ se tiene que $\cup^r(p') \neq \emptyset$. Como w es de primer rango existe $m \geq 0$ tal que $\cup^m(w) = \emptyset$, pero lo anterior no vale para el elemento p'. Así, verificado lo anterior, tenemos que cualquier elemento m de w estará en B'. Por lo que tanto m como w están en B'. Pero como $B' \subset B$, entonces vale en B el axioma de regularidad, por lo que $m \cap w = \emptyset$. De acá que, como pide el axioma, tenemos que para w conjunto de primer o segundo rango (distinto del vacío), existe $m \in w$ (m de primer o segundo rango) tal que $m \cap w = \emptyset$.

- El axioma de especificación (o subconjuntos) se satisface en B' si dado ϕ, fórmula bien formada de nuestro lenguaje y z conjunto de primer o segundo rango se satisface: $(z)(\exists w)(x)(x \in w \leftrightarrow (x \in z \wedge \phi))$ siempre que w sea un conjunto de primer o segundo rango. Supongamos que z sea de primer rango. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $\cup^n(z) = \emptyset$. Afirmamos que existe w subconjunto de z, de primer rango (existe m≥ 0 tal que $\cup^m(w) = \emptyset$) que satisface el axioma. En efecto, como para un cierto n positivo, los elementos de los elementos -n veces- de z son el conjunto vacío, podemos en particular, seleccionar un subconjunto de z, llamemoslo w, que satisfaga ϕ (pues el axioma se satisface en B y B' es un subdominio de B) y tal que sus elementos satisfagan el ser de primer rango, pues dado que los elementos de w son elementos de z, bastaría tomar $m = n$ y se obtiene lo pedido. En el caso de que z sea de segundo rango afirmamos que existe w subconjunto de z, el cual es de segundo rango, que satisface el axioma. En efecto, puesto que z es de segundo rango, tenemos que z no es de primer rango y además existe $s \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^s(z)$ son conjuntos de primer rango. Para que w subconjunto de z sea de segundo rango, debe no ser de primer rango y además debe existir $m \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^m(w)$ sean conjuntos de primer rango. Lo primero se satisface, pues al z no ser de primer rango, ningún elemento de z lo es (para probar esto supongamos que existe un elemento z' de z que sea de primer rango. Entonces existiría $r \geq 0$ tal que $\cup^r(z') = \emptyset$. Pero esto contradice el hecho de que z no es de primer rango). Luego, como $B' \subset B$ existe w subconjunto cuyos elementos son de segundo rango. Lo segundo también se satisface pues basta tomar $m = s$ y se obtiene lo pedido. Luego, el axioma se satisface en B'.
- Por lo tanto, en B' valen los axiomas de Zermelo.

(11) $Z_0 \in B'$ pues Z_0 es de segundo rango. Pero $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ es un conjunto de tercer rango y, por lo tanto no puede pertenecer a B'. Veámoslo:

- $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ es de tercer rango si
  (a) $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ no es de segundo rango.

   (b) Existe $n \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^n(\{Z_0, Z_1, \ldots\})$ son conjuntos de segundo rango.

- Verifiquemos (a):
   (a) Por reducción al absurdo, supongamos que $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ es de segundo rango.
   (b) Entonces se cumplen los dos elementos que siguen:
      – $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ no es de primer rango.
      – Existe $n \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^n(\{Z_0, Z_1, \ldots\})$ son conjuntos de primer rango.
   (c) Pero $\cup^n(\{Z_0, Z_1, \ldots\})$ siempre tendrá como elemento a Z_0 y Z_0 no es de primer rango. Por tanto es falsa la segunda acepción.
   (d) Por lo tanto $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ no es de segundo rango, como queríamos ver.
- Verifiquemos (b):
  Para verificar que existe $n \geq 0$ tal que todos los elementos de $\cup^n(\{Z_0, Z_1, \ldots\})$ son conjuntos de segundo rango obsérvese que Z_0 es un conjunto de segundo rango y $Z_1 = \mathcal{P}(Z_0), Z_2 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(Z_0))\ldots$, y como ya probamos, el conjunto potencia de un conjunto de segundo rango, es un conjunto de segundo rango. Por lo que todos los elementos de $\cup^n(\{Z_0, Z_1, \ldots\})$ son conjuntos de segundo rango; basta elegir cualquier $n \geq 0$ y se obtiene lo pedido.
- Demostrados (a) y (b) se obtiene entonces que $\{Z_0, Z_1, \ldots\}$ es un conjunto de tercer rango, como queríamos ver.

(12) Así, como los axiomas de Zermelo se cumplen en B', no bastan para garantizar la existencia del conjunto $Z = \{Z_0, Z_1, \ldots\}$.

Q.E.D.

Una consecuencia importante de la demostración previa es la siguiente:

Si definimos la siguiente clase,

$$\mathcal{P}^\omega(A) = \{\mathcal{P}^i(A) : i \in \ N\}$$

para una cierta clase A, es claro que $Z = \mathcal{P}^\omega(Z_0)$, por lo que $\mathcal{P}^\omega(Z_0) \notin B'$. Pero entonces, el operador (o "función"en su sentido genérico)

$$\mathcal{P}^\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

tomando como conjunto de partida un elemento $\mathcal{A}$ de B' (dominio en el cual vale Zermelo), no garantiza que su rango sea un conjunto del mismo B', esto es que $\{\mathcal{P}^{\omega}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ esté en B'. Esto muestra que para una función cualquiera dada $\mathcal{H}$, que tenga como conjunto de partida un elemento A de algún dominio $\mathcal{B}$ en el cual vale Zermelo, no podríamos garantizar *de entrada* que $\{\mathcal{H}(a) : a \in A\}$ es un elemento de $\mathcal{B}$.

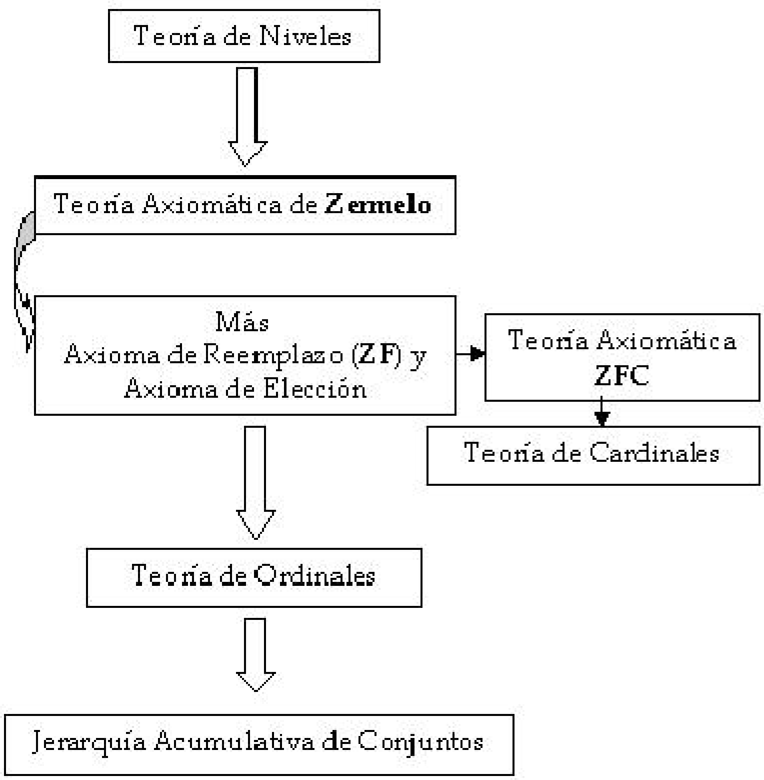
6. Diálogo entre Boolos y Zermelo-Fraenkel

Hemos ideado el siguiente diálogo entre Zermelo-Fraenkel y Boolos con la intención de hacer explícita la conexión de los trabajos que de estos autores hemos venido presentando y las diferencias de perspectivas y propósitos adoptados por ambos, muchas veces no explícitos. Es un diálogo que quizá ya se ha dado allá en las regiones donde habitan los grandes personajes que ya no están físicamente entre nosotros pero de los que seguimos nutriéndonos. He acá nuestro diálogo ficticio:

Boolos: Con el trabajo que acabo de presentarle le hago ver que su propuesta matemática supone una concepción oculta de los conjuntos que ha venido operando mientras tanto y de manera ineludible. Cada uno de los conjuntos se forma posteriormente a sus elementos, lo cual evita las proposiciones extrañas del tipo "$x \in x$"o "$x \in y \wedge y \in x$", etc. Además, hay un momento o nivel específico en el cual se forma y cada nivel contiene los conjuntos ya formados en niveles anteriores, lo que permite construir una Jerarquía Acumulativa de Conjuntos.

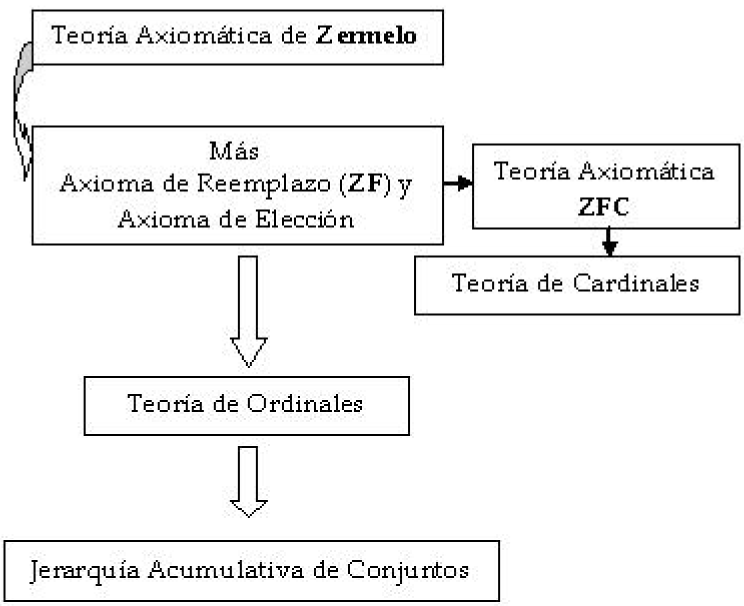
Claro que después se vale del *axioma de reemplazo* para poder seguir aumentando niveles superiores al nivel ω y garantizar además que las construcciones adicionales generen conjuntos deseados por Ud.

Con lo cual le presento el siguiente esquema que hace explícito, aunque en forma resumida, los pasos que Ud. ha seguido y, por ello, toda su intención y concepción sobre los conjuntos (puede leer las flechas rectas y gruesas como "implica", y las curvas como "adicionalmente"):



Si no se lo explicitara de la manera en que lo he hecho, parecería que Ud. obtiene como por arte de magia a los conjuntos que va construyendo, pasando por la construcción previa de los ordinales. Pero lo cierto es que la teoría está cargada y dispuesta para que así funcione. Con el agregado de que no quedaría claro cómo puede Ud. "construir" los conjuntos con ellos mismos a través de la noción de ordinal.

Zermelo-Fraenkel: Parte de lo que Ud. dice es cierto. Sin embargo, le quería replicar diciendo que su propuesta hace redundante el trabajo matemático. Pues Ud. introduce dos nociones primitivas, la de "conjuntos" y la de "etapas" o "niveles", para luego, con la introducción del axioma de reemplazo, axioma sin el cual su propia teoría no podría "construir" la jerarquía acumulativa toda -como Ud. mismo acepta- eliminar la noción de "etapas" y hacerla "isomorfa" a la misma noción de conjuntos con la cual se construye la jerarquía acumulativa. Desde el punto de vista matemático, pues, su trabajo tiene exceso de presupuestos y, con ello, quizá cae en una *petitio principii* pues podemos hacer isomorfos, sino idénticos, por la manifiesta excesiva potencia de su teoría, los conceptos de Teoría de Niveles y Jerarquía Acumulativa de Conjuntos. Apelando, entonces, a la economía de pensamiento, tan cara a los matemáticos, la estrategia correcta se la explicitaré en el siguiente esquema, que no es más que la última parte del suyo:



Claro que Ud. cree que he introducido de forma extraña la noción de conjuntos por centrarme primero en la definición de los ordinales, para luego hacer explícita la jerarquía toda de los conjuntos. Pero ello no es una estrategia contradictoria o algo por el estilo. Una misma noción puede ser entendida de maneras diversas, con tal de que lo que se haga con ella en la propia teoría no resulte contradictorio. En este caso, los conjuntos en cuanto ordinales permiten construir el orden de los conjuntos mismos y, en este sentido, juegan el papel que jugaba en su teoría la noción de etapas. Pero también los conjuntos son conjuntos, y ellos se explicitan en cada etapa, según la "construcción" hecha.

Boolos: Ahora comprendo mejor su estrategia. Quiero decirle que sus palabras me han aclarado lo siguiente: el papel que Ud. está jugando es el de un matemático, nada menos. Pero tampoco nada más. Y con ello me ha aclarado mi propio papel, pues he representado más bien el rol de un filósofo que con intenciones pedagógicas y aclaratorias hace ver lo que su teoría supone en un nivel meta-lingüístico informal, sin el cual Ud. no podría trabajar. Mi intención *primera* ha sido la de presentar una teoría matemática formal -la teoría de niveles- desde la cual deducir estrictamente la suya. Creo que lo he logrado. Sin embargo, ella misma no es atractiva desde el punto de vista matemático por las deficiencias que Ud. mismo apunta. Sin embargo, mi intención *de fondo*, no menos importante que la que he explicitado primeramente, es la que acabo de confesarle y que Ud. indirectamente me ha aclarado. Ud. se vale de la intuición "conjunto"como aquella "jerarquía"que puede ser "construida"de forma acumulativa y por etapas, desde un primer nivel, sin poder abarcar esta totalidad infinita nuevamente por ningún concepto formal de lo infinito mismo.

Zermelo-Fraenkel: Por lo pronto acepto esa diferenciación de roles. Pero quiero advertirle que siempre hay que tener cuidado con los presupuestos que requieren ser aclarados. Pues no siempre se recogen los más ajustados a la situación. Los suyos son una propuesta interesante e importante, *cuasi-matemática*, me atrevería a llamarle, que en el orden filosófico dan la oportunidad de descurtir y poner alerta a los matemáticos; de seguro ello hará avanzar a las matemáticas, como es de esperar, si recordamos todo el inmenso trabajo filosófico que sobre la misma ha dado tantos frutos. Pero sigo creyendo que la filosofía del trabajo matemático es otra: no ir a los presupuestos, sino presentar una teoría formalmente manejable (en el sentido conocido por los matemáticos de este término) y que permita el trabajo de las matemáticas como un todo y en sus distintas parcelas.

Boolos: Yo también lo acepto así por los momentos. . .

Capítulo 3

Jerarquía Acumulativa de Conjuntos

Procederemos ahora a realizar una construcción conjuntista de la concepción iterativa, la cual llamaremos *jerarquía acumulativa de conjuntos*. Este nombre se debe a que la misma hace uso de la noción de "nivel" de la axiomática presentada por Boolos (la cual alude a etapas que van apareciendo una tras otra, donde cada etapa está *jerarquizada* por los conjuntos con los que está relacionado) pero difiere en un aspecto esencial: basta con la noción primitiva de conjunto para hacer referencia a los niveles boolosianos, más áun, el concepto de *ordinal* permite describir a los niveles, a tal punto que, aduciendo la "economía de pensamiento" que Zermelo hacía ver en el diálogo ficticio con Boolos referido en el capítulo anterior, y -más importante aún- el hecho de que una adecuada teoría de conjuntos debería expresar lo mínimo necesario para su construcción, podemos olvidarnos de los niveles y trabajar solamente con la noción de conjuntos. Además, podremos construir toda la jerarquía acumulando conjuntos e iterando con ellos. Cómo lograremos esto es lo que se explicará a continuación.

1. Definiciones previas

Para construir la jerarquía, es necesario hacer referencia a ciertos conceptos que se mencionan a continuación:

Una *relación* se entiende, en términos generales, como una *asociación* entre los elementos de un mismo conjunto o de diversos conjuntos. La naturaleza o características del cómo esten asociados los elementos determinará distintos tipos de relaciones y, algunas de ellas, serán de interés para el quehacer matemático. Formalmente, se ha entendido a una relación binaria como un *conjunto de pares ordenados*. Un par ordenado es un conjunto $\langle x, y\rangle$ tal que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Una *función* la definiremos como una relación f tal que para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ existe un único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$.

Se dice que una relación es un *orden parcial* si se satisface lo siguiente

(1) R es una relación transitiva: $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

(2) R es no reflexivo: $\sim xRx$

TEOREMA 3.1. *Sea $<$ un orden parcial. Entonces para cualesquiera x, y, z:*

(1) *Se cumple a lo sumo una de las tres alternativas:*
$(x < y), (x = y), (y < x)$

(2) $x \leq y \leq x \rightarrow x = y$

Demostración En la parte (1) si tenemos $x < y$ y $x = y$ entonces deberíamos tener $x < x$ lo que contradice irreflexividad. Y, si tenemos $x < y$ y $y < x$ entonces por transitividad $x < x$ lo que contradice irreflexividad nuevamente. En la parte (2) si $x \neq y$ entonces se tendría $x < y < x$ contradiciendo la parte (1).

Decimos que R es un *orden lineal* en A si y sólo si R es una relación binaria en A que es transitiva y que satisface tricotomía en A, i.e. para cualquier x y y en A una de las tres alternativas siguientes

$$x < y, \ x = y, \ y < x$$

se cumple.

Definimos a una *estructura* como el par $\langle A, R \rangle$ en el que A es un conjunto y R es una relación binaria (i.e. $R \subseteq A \times A$). En particular, hablaremos de una *estructura parcialmente (o linealmente) ordenada* si R es un orden parcial (o lineal) en A. Consideremos $<$ un orden parcial y sea D un conjunto. Un elemento m de D se dice un elemento *minimal* de D si y sólo si no existe x en D tal que $x < m$. Y m es el *mínimo* elemento de D si y sólo si $m \leq x$ para todo x en D. Todo elemento mínimo es también minimal. Para un orden lineal en un conjunto que incluya a D los dos conceptos coinciden, ya que

$$\sim (x < m) \rightarrow m \leq x$$

Un *buen orden* en A es un orden lineal en A donde cada subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo. En la axiomática anteriormente presentada, E es un buen orden. Los buenos órdenes son importantes porque se pueden utilizar para indexar construcciones que proceden de “abajo hacia arriba”, donde en cada etapa de la construcción (excepto el último) existe un próximo paso único. Esta construcción es precisamente la que se realiza en la concepción iterativa.

2. Ordinales

Ahora sí, con los conceptos dados anteriormente, es posible definir lo que es un ordinal. Para ello consideremos $\langle M, < \rangle$ una estructura bien ordenada (i.e. una estructura con un orden lineal). Diremos que, para $x \in M$, el conjunto $\{y \in M : y < x\}$ -abreviado $A(x, M)$- es el *segmento* de x en $\langle M, < \rangle$. Una definición análoga, dada por Enderton es la que sigue:

Si $<$ es algún tipo de orden en A (al menos un orden parcial) y $t \in A$, entonces el conjunto

$$segt = \{x | x < t\}$$

es llamado el *segmento inicial hasta t*. [**2**]

Por ejemplo, omega está ordenado por $\in$, y por tanto para $n \in w$ se tiene

$$segn = \{x | x \in n\} = n$$

Si observamos la teoría de niveles a la luz de las definiciones antes mencionadas, podemos apreciar que, la noción primitiva de nivel E, la cual está relacionada con conjuntos (i.e. es una relación, no vista como pares ordenados por Boolos pero sí como una asociación entre conjuntos y niveles -el axioma (VII) relaciona un conjunto con un único nivel, por ejemplo-) es un orden lineal. En efecto, los axiomas (I), (II) y (III) de la teoría por niveles corroboran tal afirmación. Más aún, el axioma (IV) nos indica que E es un buen orden. Estos hechos, son de capital importancia para nosotros puesto que permiten poner en evidencia cómo la noción primitiva de nivel supone un ordenamiento, y este ordenamiento será formalizado con el concepto de ordinal.

¿El ordenamiento es posible siempre? Boolos nos dice que siempre inmediato a un nivel encontramos otro nivel (Axioma V), que existe un primer nivel (Axioma IV) y que existen niveles que no poseen un nivel inmediato anterior(Axioma VI). Con esto, parecería más que suficiente para que se puedan construir todos los niveles *ad infinitum*. Pero, como hicimos ver al final del capítulo precedente no es así: justificamos la necesidad de introducir un axioma (reemplazo) que permite construir efectivamente todos los ordinales. Un hecho importante en nuestro contexto es que Boolos no parece asomar en ningún momento una herramienta explícita que permita de alguna manera la aparición de los niveles. Esto lo subsanaremos con lo que se conoce como *recursión transfinita*. Es verdad, que el axioma V fuerza la aparición de niveles a medida que se vaya "subiendo "pero, ya al llegar al nivel omega -el primer ordinal límite- nos encontramos con una propiedad particular, a saber: todos los niveles anteriores a él (excepto el primer nivel) tienen inmediato anterior pero él no posee inmediato anterior. ¿Cómo garantizamos la existencia de este nivel con tan particular propiedad? ¿Sólo por los axiomas V y VI?. Nótese que hacemos referencia a *todos* los niveles anteriores para referirnos al nivel omega, esto es, al *segmento inicial* para cada x en omega. En pocas palabras, tomamos en cuenta a todos los niveles anteriores para construir al nivel siguiente. ¿Es posible de alguna manera "enumerar "a cada nivel para así asegurar su ordenamiento? la respuesta es afirmativa y se vale de lo siguiente.

Llamaremos una *enumeración* de M a una función f que asigna a cada $x \in M$ el conjunto $f(x) = \{f(y) : y \in A(x, M)\}$. Esta enumeración asigna a cada $x \in M$ el conjunto formado por todos los valores de f correspondientes a los elementos que preceden a x en $\langle M, < \rangle$. Esta enumeración es única, por lo que, de manera efectiva "enumera"a cada nivel. Si a cada nivel le corresponde una única enumeración, entonces -y he aquí la superación a la axiomática boolosiana- tomemos su enumeración que hace el mismo papel que hacía el de nivel, y que usa solo conceptos de conjuntos. Esta enumeración es la que provisionalmente llamaremos "el ordinal de $\langle M, < \rangle$ determinado por la enumeración f".

Lo que nos permite garantizar que $f(x)$ sea un conjunto es el axioma de reemplazo, ya que $A(x, M)$ es un conjunto por el axioma de separación. También $\{f(x) : x \in M\}$ es un conjunto debido al axioma de reemplazo.

Apreciemos que la enumeración es única para $\langle M, < \rangle$. Si x_0 es su primer elemento,$f(x_0) = \emptyset$. Luego, para $x_1, x_2\, y\, x_3$ segundo, tercero y cuarto elemento de $\langle M, < \rangle$ tenemos que

$$f(x_1) = \{\emptyset\}$$
$$f(x_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$f(x_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Von Neumann en 1922 estableció una importante caracterización de los ordinales, como es:

P es un ordinal si y sólo si

(1) P es un conjunto de conjuntos, ordenable por inclusión.
(2) Su orden por inclusión es un buen orden.
(3) Si $\xi \in P$ entonces $\xi = A(\xi, P)$.

Para los fines del presente trabajo y, en concordancia con la axiomática que hemos venido trabajando, tomaremos la siguiente definición de ordinal mencionada por Enderton [**2**]:

Sea $<$ un buen orden en A y definamos E como sigue

$$E(t) = \text{ran}(E|segt) = \{E(x) : x < t\}$$

Es claro que E representa la enumeración antes referida. Ahora bien, ¿E está bien definida?, más aún, ¿puedo garantizar su existencia?, y, de ser así, ¿es única?. Las respuestas a estas interrrogantes son afirmativas, y su justificación se basa en la argumentación que a continuación desarrollaremos.

Comenzemos por decir que, un concepto C concebido de manera extensional ($C = E$ en nuestro caso) estaría bien definido si para cierta función $\Psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, C se pueda obtener como unión de "estratos", esto es, $C = \bigcup_{k \in \Omega} C_k$ (Ω es la clase de todos los ordinales) donde el primer estrato es $C_0 = \Psi(0, 0)$ y $C_{n+1} = f(n + 1) = \Psi(f(n))$. Esto no es más que definir un concepto por recursión (o recursivamente). Para el caso $\Omega = \omega$, sabemos que existe f (por inducción finita) con lo que el concepto C estaría bien definido, pero surge el problema de cómo definirlo si recorremos todos los ordinales. En el caso de los ordinales finitos, todo ordinal tiene inmediato anterior, por lo que no hay problema en el paso de n a $n+1$ (con n en los naturales). Pero en el caso de que tengamos un ordinal límite no es posible establecer ese paso, por lo que se hace necesario utilizar la siguiente versión del paso inductivo, que permitirá definir el concepto C para todo ordinal:

C_k está definido para todo ordinal k si:

(1) C_0 está definido.

(2) Para cualquier ordinal α, C_α queda definido mediante la definición de C_ξ para todo $\xi < \alpha$.

3. Teorema de la Definición por Inducción Transfinita de Von Neumann

Von Neumann fue el primero en considerar necesario justificar el concepto antes mencionado. Recordemos que $\mathcal{B}$ es un dominio de la teoría de conjuntos, Ω la clase constituida por los ordinales. Si f es una función de Ω o de un segmento de Ω en $\mathcal{B}$ y α es un ordinal, llamaremos -siguiendo a Von Neumann- $F(f, \alpha)$ al grafo de la restricción de f a α, es decir,$F(f, \alpha) = \{\langle \xi, f(\xi) \rangle : \xi \in \alpha\}$. Enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema, denominado "Teorema de la Definición por Inducción transfinita"-abreviado como TDIT- que nos permitiría definir, de manera correcta, el concepto C. El teorema dice:

Si Ψ es una función definida en $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ (i.e. $\Psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$) entonces existe una única aplicación $f : \Omega \to \mathcal{B}$ tal que para cada ordinal ξ, $f(\xi) = \Psi(F(f, \xi), \xi)$.[**4**]

Demostración.

(1) Queremos ver que existe $f : \Omega \to \mathcal{B}$ tal que $f(\xi) = \Psi(F(f, \xi), \xi)$ para cada ordinal ξ.

(2) Diremos que ξ es *normal* si, dada una aplicación $\Psi : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ existe una función $f_\xi : \xi \to \mathcal{B}$ tal que para cada $\zeta \in \xi$, $f_\xi(\zeta) = \Psi(F(f_\xi, \zeta), \zeta)$.

(3) Llamaremos -siguiendo a Von Neumann- a la función f_ξ descrita "elemento funcional hasta ξ."

(4) Para garantizar la existencia de la f requerida basta probar:
  (a) El elemento funcional hasta ξ es único.
  (b) Todo ordinal es normal.

(5) Probemos (a):
  - Sea ξ normal y supongamos f_ξ y g_ξ dos elementos funcionales distintos hasta ξ. Entonces, existen uno o más ordinales mayores a cero y menores que ξ tales que $f_\xi(\zeta) \neq g_\xi(\zeta)$.
  - Sea ζ_0 el menor de dichos ordinales. Entonces $f_\xi(\eta) = g_\xi(\eta)$ para todo ordinal $\eta \in \zeta_0$.
  - Luego $f_\xi(\zeta_0) = \Psi(F(f_\xi, \zeta_0), \zeta_0) = \Psi(\{\langle \eta, f_\xi(\eta)\rangle : \eta \in \zeta_0, \}, \zeta_0) = \Psi(\{\langle \eta, g_\xi(\eta)\rangle : \eta \in \zeta_0\}, \zeta_0) = \Psi(F(g_\xi, \zeta_0), \zeta_0) = g_\xi(\zeta_0)$.
  - Lo anterior contradice la hipótesis. Por lo que $f_\xi = g_\xi$, lo que determina que el elemento funcional hasta ξ es único.

(6) Probemos (b):

  Probemos previamente las dos proposiciones siguientes:
  - Si ξ es un ordinal normal y $\zeta \in \xi$ entonces ζ es normal y $\Psi(F(f_\zeta, \zeta), \zeta) = \Psi(F(f_\xi, \zeta), \zeta)$.
  - Si todo ordinal $\zeta \in \xi$ es normal entonces ξ es normal.
  - Para probar lo primero, supóngase que ξ es normal y designemos con $f_\xi|\zeta$ la restricción de f_ξ a $\zeta \in \xi$. Si η es cualquier ordinal menor que ζ entonces tenemos

que $f_\xi|\zeta(\eta) = f_\xi(\eta) = \Psi(F(f_\xi, \eta), \eta) = \Psi(F(f_\xi|\zeta, \eta), \eta)$. Por lo que ζ es normal y $f_\zeta = f_\xi|\zeta$. Así, tenemos que $\Psi(F(f_\zeta, \zeta), \zeta) = \Psi(F(f_\xi|\zeta, \zeta), \zeta) = \Psi(F(f_\xi, \zeta), \zeta)$.

- Lo segundo se prueba tomando un ordinal ξ tal que si $\zeta \in \xi$, ζ es normal. Por los resultados obtenidos anteriormente, existe para cada $\zeta \in \xi$ un único $f_\xi(\zeta)$ tal que $f_\xi(\zeta) = \Psi(F(f_\zeta, \zeta), \zeta)$. Luego, si $\eta \in \zeta \in \xi$ entonces $f(\eta) = \Psi(F(f_\eta, \eta), \eta) = \Psi(F(f_\zeta, \eta), \eta)$. Y esto significa que para todo $\zeta \in \eta$ se cumple que $F(f, \zeta) = F(f_\zeta, \zeta)$, lo que a su vez implica que $f_\xi(\zeta) = \Psi(F(f_\zeta, \zeta), \zeta) = \Psi(F(f_\xi, \zeta), \zeta)$ lo que significa que ξ es normal, como queríamos ver.
- Ahora sí probemos (b) suponiendo que es falsa. Entonces existiría un ordinal α que no es normal. Entonces, por el segundo item (demostrado hace poco), no son normales todos los ordinales ξ tales que $\xi \in \alpha$. Se puede probar que los elementos no normales de α constituyen un conjunto $A \neq \emptyset$, por lo que posee un primer elemento ξ_0. Si $\zeta \in \xi_0$ entonces $\zeta \in \alpha \backslash A$ con lo que ζ es normal. Pero, esto implicaría (por el segundo item), que ξ_0 es normal. Esto contradice la hipótesis. Por lo que es verdadero que todo ordinal es normal.

(7) Probado que todo ordinal es normal y que cada elemento funcional de un ξ dado es único tenemos que, dada la función Ψ existe una única función $f : \Omega \to \mathcal{B}$ tal que para cada ordinal ξ, $f(\xi) = \Psi(F(f, \xi), \xi)$, como queríamos ver. Q.E.D.

Pero, ¿qué sucede si no tenemos los ordinales definidos aún?. Debemos hacer notar que la clase de los ordinales no es un conjunto. En nuestro contexto, debemos prescindir de clases y referirnos sólo a conjuntos. Recurriremos entonces, a una definición más amplia (pues no supone la definición de ordinal, aunque si la noción de conjunto bien ordenado):

Teorema 3.2 (Teorema de Recursión Transfinita). *Sea $<$ un buen orden en A y sea $G :^{<A} B \to B$ una función dada. Entonces existe una única función $f : A \to B$ tal que para cualquier $t \in A$,*

$$f(t) = G(f|segt)$$

donde $^{<A}B = \{f :$ para algún $t \in A$, $f : segt \to B\}$.[**2**]

Comparando esta versión dada por Enderton con la dada por Von Neumann observamos que la G dada acá corresponde al Ψ de Von Neumann, y, la f cuya existencia garantiza el TDIT dada por Von Neumann corresponde a la misma f del teorema de recursión con la observación particular de que en esta f el dominio es un conjunto bien ordenado y no la clase de los ordinales.

Para ilustrar que los dos teoremas son análogos, considérese el caso de ω, el cual es un conjunto bien ordenado por la relación de pertenencia. Para cada n en ω se cumple que $segn = \{x : x \in n\} = n$. Luego, el teorema de recursión transfinita asegura la existencia de un único $f : \omega \to B$ tal que

$$f(n) = G(f|n)$$

En particular, tendríamos

$$\begin{gathered} f(0) = G(f|0) = G(\emptyset), \\ f(1) = G(f|1) = G(\{\langle 0, f(0)\rangle\}), \\ f(2) = G(f|2) = G(\{\langle 0, f(0)\rangle, \langle 1, f(1)\rangle\}). \end{gathered}$$

lo que corresponde a la enumeración

$$\begin{gathered} f(x_1) = \{\emptyset\} \\ f(x_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ f(x_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{gathered}$$

dada por Von Neumann, en el caso particular en que $G(x) =$ran(x).

La versión anterior del teorema presenta una dificultad. Si $G(a) = \text{ran}(a)$ para a conjunto, aún en el caso de que la clase de partida de esta G sea un conjunto, no sabemos si su rango también lo sea ("B"del teorema 3.2.). Esto lo hemos hecho ver ampliamente en páginas anteriores. Es por ello que tendremos que valernos del axioma de reemplazo para elaborar una nueva versión del Teorema de Recursión Transfinita. La versión del axioma de reemplazo más adecuada para nuestros fines es la siguiente:

Para cada fórmula $\psi(x, y)$ con x e y variables libres, lo siguiente es un esquema de axioma de reemplazo:

$$(A)[((x) \in A)(y_1)(y_2)(\psi(x, y_1) \wedge \psi(x, y_2) \to y_1 = y_2) \to (\exists B)(y)(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\psi(x, y))].$$

Luego, si tomamos $\gamma(x, y)$ una fórmula bien formada de nuestro lenguaje, el teorema de recursión transfinita quedaría así

TEOREMA 3.3. *Sea $<$ un buen orden en un conjunto A. Supóngase que para cualquier g existe un único y tal que $\gamma(g, y)$. Entonces, existe una única función f con dominio en A tal que*

$$\gamma(f|seg\, t, f(t))$$

para todo t en A.

4. Demostración del Teorema de Recursión Transfinita

La prueba es similar, en líneas generales, a la demostración del Teorema de la Definición por Recursión Transfinita, haremos las analogías correspondientes para hacerlo ver. La demostración es como sigue.

Demostración.

(1) Construiremos la f deseada como la unión de funciones aproximadas. Definamos para $t \in A$ una función v como *γ-construida hacia t* si y sólo si el dominio de v es $\operatorname{dom} v = \{x : x \leq t\}$ y para cualquier $x \in \operatorname{dom} v$ se cumple que $\gamma(v|seg\, x, v(x))$.

(2) Afirmamos que si $t_1 \leq t_2$, v_1 es γ-construida hacia t_1 y v_2 es γ-construida hacia t_2 entonces $v_1(x) = v_2(x)$ para todo $x \leq t_1$. Supongamos que existe un x mínimo tal que $x \leq t_1$ donde $v_1(x) \neq v_2(x)$. Pero como x es mínimo, tenemos que $v_1|seg\, x = v_2|seg\, x$. Además $\gamma(v_1|seg\, x, v_1(x)) = \gamma(v_2|seg\, x, v_2(x))$. Lo que indica que $v_1(x) = v_2(x)$. Si tomamos $t_1 = t_2$ entonces tenemos que para cualquier $t \in A$ existe al menos una función v que es γ-construida hacia t. Formemos el conjunto $\mathcal{K}$ de todas las funciones v que son γ-construidas hacia t para $t \in A$:

$$\mathcal{K} = \{v|(\exists t \in A) \text{ tal que } v \text{ es una función } \gamma\text{-construida hacia } t\}$$

$\mathcal{K}$ es un conjunto gracias al axioma de reemplazo. Basta tomar $\psi(t, v)$ como la expresión "v es una función que es γ-construida hacia t". Hemos visto que

$$(t \in A \wedge \psi(t, v_1) \wedge \psi(t, v_2)) \rightarrow v_1 = v_2$$

Así por reemplazo, existe un conjunto $\mathcal{K}$ tal que para cualquier v,

$$v \in \mathcal{K} \leftrightarrow (\exists t \in A)\psi(t, v)$$
$$\leftrightarrow (\exists t \in A)\ v \text{ es } \gamma\text{-construida hacia } t$$

Tomemos f como $\bigcup \mathcal{K}$, es decir, la unión de todos los v's. Luego:

$$\langle x, y\rangle \in f \leftrightarrow v(x) = y \text{ para algún } v \text{ en } \mathcal{K} \qquad \text{(I)}$$

f es una función. Tomemos $\langle x, y_1\rangle$ y $\langle x, y_2\rangle$ pertenecientes a f. Por (I), existe v_1, t_1, v_2 y t_2 tal que $v_i = y_i$ y v_i es γ-construida hacia t_i, con $i = 1, 2$. $x \leq t_1 \leq t_2$ ó $x \leq t_2 \leq t_1$. Luego, $y_1 = v_1(x) = v_2(x) = y_2$.

(3) Ahora afirmamos que para cualquier $x \in$ dom f se cumple que $\gamma(f|seg\, x, f(x))$. Pues si $x \in$ dom f, entonces existe v en $\mathcal{K}$ con $x \in$ dom v. Tenemos entonces

$$\gamma(v|seg\, x, v(x)), \text{ pues } v \in \mathcal{K}$$
$$v|seg\, x = f|seg\, x \text{ por (I) y la parte 2}$$
$$v(x) = f(x) \text{ por (I)}$$

lo que permite concluir que se cumple $\gamma(f|seg\, x, f(x))$.

(4) Veamos ahora que el dom $f = A$. Supongamos que no se cumple la afirmación. Entonces existe un t mínimo tal que $t \in A-$dom f. Luego, $seg\, t \subseteq$ dom f. De hecho, $seg\, t =$dom f. Sea y tal que $\gamma(f, y)$ y sea $v = f \cup \{\langle t, y\rangle\}$. v es una función con dom $v = \{x : x \leq t\}$. Para cualquier $x < t$ se cumple que $v|seg\, x = f|seg\, x$ y $v(x) = f(x)$ por lo que se satisface el numeral 3, es decir, $\gamma(v|seg\, x, v(x))$. Tomando $x = t$ se tiene que $v|seg\, t = f$ y $v(t) = y$ lo que implica que $\gamma(v|seg\, t, v(t))$. Pero esto implica que $t \in$dom f. Así que la afirmación dada se cumple efectivamente.

(5) Veamos, por último que f es única:
- Sean f_1 y f_2 tales que ambos satisfacen el teorema. Entonces, aplicando inducción transfinita, sea B el conjunto en el cual coinciden, esto es,
$$B = \{t \in A : f_1(t) = f_2(t)\}$$
- Veamos que para cualquier $t \in A$ se cumple que si $seg\, t \subseteq B \to t \in B$.
- Como $seg\, t \in B$ entonces $f_1|seg\, t = f_2|seg\, t$ Cumpliéndose a su vez que $\gamma(f_1|seg\, t, f_1(t))$ y $\gamma(f_2|seg\, t, f_2(t))$
- De donde, por las carateristicas de γ se cumple que $f_1(t) = f_2(t)$. Lo que implica que $t \in B$ como era lo deseado.

Q.E.D.

La demostración anterior justifica la existencia y unicidad de la función E que necesitabamos. En efecto, demostrado el teorema de recursión transfinita, para $<$ buen orden en A existe un único E con dominio A tal que para cada $t \in A$, $E(t) =$ran$(E|seg\, t) = \{E(x)|x < t\}$. Tomando para $\gamma(x, y)$ la fórmula: $y =$ran(x) se obtiene lo pedido. Tendremos entonces ahora, de manera formal a $\alpha =$ran(E) como el ordinal de la estructura bien ordenada $\langle A, <\rangle$.

5. Construcción de la Jerarquía Acumulativa de Conjuntos

Teniendo a mano la herramienta para la construcción de la jerarquía (la recursión transfinita) procederemos a construirla del siguiente modo:

Comenzaremos diciendo que lo que deseamos es definir para cada ordinal α el conjunto V_α donde $V_0 = \emptyset$ y, en general, cada V_α contiene aquellos conjuntos, cuyos elementos están todos en algún V_β con $\beta < \alpha$. En símbolos:

$$a \in V_\alpha \to a \subseteq V_\beta \text{ para algún } \beta \in \alpha.$$

Esto equivale a decir que,

$$a \in V_\alpha \to a \in P(V_\beta) \text{ para algún } \beta \in \alpha.$$

o de manera equivalente,

$$V_\alpha = \bigcup\{P(V_\beta) : \beta \in \alpha\}$$

Nuestro trabajo consistirá en verificar que, en efecto, la definición antes mencionada es adecuada, y, para ello haremos uso de la recursión transfinita. En la demostración del Teorema de Von Neumann -Definición por Inducción Transfinita- la clase de los ordinales está bien ordenada, y, en aquel caso, poseemos una f tal que

$$f(\alpha) = \bigcup\{P(f(\beta)) : \beta \in \alpha\}$$

para cada ordinal α. Pero, en nuestro contexto, no podemos tomar aquel f pues no es un conjunto. En vez de ello, construiremos nuestra f conjunto valiéndonos de las proposiciones siguientes.

Proposición 3.4. *Para cada ordinal ρ existe una función f_ρ con dominio ρ tal que*

$$f_\rho = \bigcup\{P(f_\rho(\beta)) : \beta \in \alpha\}$$

para cada $\alpha \in \rho$.

Demostración.

- Apliquemos recursión transfinita. En ρ tenemos un buen orden, el cual es $\in_\rho$. Tomemos por $\gamma(x, y)$ como la fórmula,

$$y = \bigcup\{\mathcal{P}z : z \in \text{ran } x\}$$

  $\{\mathcal{P}(z)$: $z \in \text{ran } x\}$ efectivamente es un conjunto por reemplazo: Tomemos $\psi(z, w)$ como la fórmula $w = \mathcal{P}(z)$. Entonces como ran x es un conjunto,$\{\mathcal{P}(z)$: $z \in \text{ran } x\}$ es también un conjunto.

- Luego, para cualquier f existe un único y tal que $\gamma(f, y)$, llamado $y = \bigcup\{\mathcal{P}z : z \in \operatorname{ran} x\}$. Entonces, la recursión transfinita nos da una función f_ρ tal que

$$f_\rho(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}z : z \in \operatorname{ran}(f_\rho|seg\,\alpha)\}$$

  para cada $\alpha \in \rho$.
- Tenemos entonces,

$$seg\,\alpha = \{t : t \in_\rho \alpha\} = \{t : t \in \alpha\} = \alpha.$$

- Por lo tanto,

$$z \in \operatorname{ran}(f_\rho|seg\,\alpha) \leftrightarrow z \in \operatorname{ran}(f_\rho|\alpha \leftrightarrow z = f_\rho(\beta) \text{ para algún } \beta \in \alpha.$$

- Finalmente

$$f_\rho(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{P}(z) : z = f_\rho(\beta) \text{ para algún } \beta \in \alpha\}= \bigcup\{\mathcal{P}(f_\rho)(\beta) : \beta \in \alpha\}$$

  que era lo que queríamos.

Para demostrar la unicidad de f nos valdremos de la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea ρ y ε dos ordinales tales que f_ρ y f_ε satisfacen la proposición 3.4. Entonces*

$$f_\rho(\alpha) = f_\varepsilon(\alpha)$$

para todo $\alpha \in \rho \cap \varepsilon$.

Demostración.

- Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho \in \varepsilon \vee \rho = \varepsilon$. Así, $\rho \subseteq \varepsilon$ y $\rho \cap \varepsilon = \rho$.
- Queremos establecer $f_\rho(\alpha) = f_\varepsilon(\alpha)$ y para ello utilizaremos recursión transfinita en $\langle \rho, \in_\rho \rangle$. Definamos

$$B = \{\alpha \in \rho : f_\rho(\alpha) = f_\varepsilon(\alpha)\}.$$

- Veamos que $B = \rho$ y para ello es suficiente verificar que $seg\,B \subseteq B \to \alpha \in B$.
- Veámoslo:

$$seg\,\alpha \subseteq B \to f_\rho(\beta) = f_\varepsilon(\beta) \text{ para } \beta \in \alpha$$

- Esto es,

$$seg\,\alpha \subseteq B \to \bigcup\{\mathcal{P}(f_\rho(\beta)) : \beta \in \alpha\} = \bigcup\{\mathcal{P}(f_\varepsilon(\beta)) : \beta \in \alpha\}$$

- Lo que implica que

$$seg\,\alpha \subseteq B \to f_\rho(\alpha) = f_\varepsilon$$

- Y así $seg\, \alpha \subseteq B \to \alpha \in B$ para cada $\alpha \in \rho$. Que era lo que queríamos. Q.E.D.

Si tomamos $\rho = \varepsilon$ se aprecia que la función f_ρ de la proposición 3.3 es única. Ahora sí, probado los dos hechos anteriores, podemos definir V_α.

DEFINICIÓN 3.6. Sea α un ordinal. V_α se define como el conjunto $f_\rho(\alpha)$ donde ρ es cualquier ordinal mayor que α (e.g., $\rho = \alpha^+$).

TEOREMA 3.7. *Para cualquier ordinal α,*

$$V_\alpha = \bigcup \{\mathcal{P}(V_\beta) : \beta \in \alpha\}.$$

Demostración.

- Sea $\rho = \alpha^+$. Entonces $V_\alpha = f_\rho(\alpha)$ y $V_\beta = f_\rho(\beta)$ para cada $\beta \in \alpha$.
- Así, la conclusión deseada se obtiene por la proposición 3.3.

Q.E.D.

Diremos que para cualquier ordinal α, V_α es un conjunto *transitivo* si y sólo si cada elemento de un elemento de V_α es un elemento de V_α. En efecto, esto se satisface para cada ordinal. Existen tres tipos de ordinales. El primero, es el 0, llamado *cero*. El segundo, son los ordinales de la forma α^+ para un ordinal menor α. El tercero, son los llamados ordinales límite. Si λ es un ordinal límite y $\beta \in \lambda$ entonces $\beta^+ \in \lambda$. Este última clase de ordinal, precisamente es el que refleja nuestra discusión previa de la recursión transfinita.

El siguiente teorema nos permite construir finalmente la jerarquía acumulativa de conjuntos, describiendo V_α para cada uno de las tres tipos de ordinales.

TEOREMA 3.8. *Se satisface lo siguiente:*

(1) *Para ordinales $\beta \in \alpha$, $V_\beta \subseteq V_\alpha$.*
(2) $V_0 = \emptyset$.
(3) $V_{\alpha^+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ *para cualquier ordinal α.*
(4) $V_\lambda = \bigcup_{\beta\in\alpha} V_\beta$ *para cualquier ordinal límite λ.*

Demostración.

- (1) se satisface observando que $V_\beta \in \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq V_\alpha$. Por lo que $V_\beta \in V_\alpha$. Como V_α es un conjunto transitivo también tenemos que $V_\beta \subseteq V_\alpha$ com queríamos probar.
- (2) se cumple obviamente.

- (3) se satisface observando que por la parte (1)

$$\beta \in \alpha \to V_\beta \subseteq V_\alpha \to \mathcal{P}(V_\beta) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha).$$

- $V_{\alpha^+} = \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta) : \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha\}$. Y esta unión es igual a $\mathcal{P}(V_\alpha)$.
- Para la parte (4) probemos ambas inclusiones:
  - Si $x \in V_\lambda$ entonces $x \in \mathcal{P}(V_\beta)$ para algún $\beta \in \lambda$.
  - Luego, $x \in V_{\beta^+}$ por parte (3).
  - Luego, $x \in \bigcup_{\beta\in\lambda} V_\beta$ pues $\beta^+ \in \lambda$. Así queda probada la primera inclusión.
  - De manera similar, si $x \in \bigcup_{\beta\in\lambda} V_\beta$ entonces $x \in V_\beta \subseteq V_{\beta^+} = \mathcal{P}(V_\beta)$ para algún $\beta \in \alpha$. Lo que implica que $x \in V_\lambda$ como queríamos ver.

Q.E.D.

Finalmente, recordemos que cada conjunto está bien fundado como ya vimos por el axioma de regularidad. Luego, el teorema recién demostrado nos permite construir toda la jerarquía acumulativa de conjuntos, el cual está determinado por dos aspectos esenciales:

- La extensión de la clase de todos los ordinales.
- La operación del conjunto potencia que nos permite obtener las distintas variedades de subconjuntos en nuestra jerarquía.

A manera de pequeño epílogo queremos dejar expresado el hecho siguiente (pues ha sido la parte central de la intención de nuestro trabajo): esta construcción final presentada a partir de ZFC se nos muestra como un buen ejemplo de cómo las intuiciones involucradas en la concepción iterativa de conjuntos, hechas explícitas por Boolos, permiten dar pie, desde un nivel meta-lingüístico informal, a una teoría formal de conjuntos.

Bibliografía

[1] I. JANÉ, ¿ De qué trata la teoría de conjuntos? Departamento de Lógica. Universidad de Barcelona. España.

[2] H. ENDERTON, Elements of set theory. (1977).

[3] E. MENDELSON, Introduction to mathematical logic, *D. Van Nostrand Company* (1964).

[4] R. TORRETI, El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática. *Editorial Universitaria* (1998).

[5] BOOLOS, G. (1971) "The iterative conception of set". En BENACERRAF, P. Y PUTNAM, H. Philosophy of mathematics. Select readings.*Second Edition. Cambridge University Press.*

[6] ZERMELO (1908A). "Investigations in the foundation of set therory I"en FROM FREGE TO GODEL. A SOURCE BOOK IN MATHEMATICAL LOGIC, 1879-1931 Jean Van Heijenoort. *Harvard University Press. Cambridge, Massachusetts, 1967.*

[7] J. MOSTERÍN. Teoría Axiomática de Conjuntos. *Ariel Ediciones 1971.*

[8] C. DI PRISCO. Teoría de Conjuntos. Universidad Central de Venezuela. *Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico. Caracas. 2009.*

[9] P. MADDY. Naturalismo en Matemáticas.*Oxford University Press. 1997.*