



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Interpolación Vectorial Conservativa Basada en Funciones de Base Radial

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Bárbara C. Morales González** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Jhonnathan Arteaga Arispe.

Caracas, Venezuela

Mayo, 2013

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Interpolación Vectorial Conservativa Basada en Funciones de Base Radial**”, presentado por el **Br. Bárbara C. Morales González**, titular de la Cédula de Identidad **19504956**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Jhonnathan Arteaga Arispe

Tutor

Dr. Juan Manuel Guevara-Jordán

Tutor Administrativo

Dr. Mariela Castillo

Jurado

Dr. José Rafael León

Jurado

Dedicatoria

Para Antinesca.

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que hicieron posible la culminación de este Trabajo Especial de Grado, y especialmente a:

Mi mamá, por haber confiado siempre en mí, por hacerme sopita de pollo cuando estuve enferma y por siempre recordarme todo lo bueno que tengo para ofrecer.

Mi papá, cuya íntegra y admirable personalidad me inspira todos los días a ser una persona mejor.

Mi bella hermana Anaís, por haberme comprendido y escuchado siempre.

Mi hermosa hermana Cony, por haberme distraído en los momentos de locura.

Mi perro Figo, por haberme acompañado todos los días de enfrentamientos con Matlab.

A Isabela, por su amistad incondicional que no conoce de fronteras.

Mis mejores amigos biólogos de la Facultad: Andrea, Ricardo, María Gabriela, Alfredo... Y a los que olvido mencionar. A todos los llevo en mí corazón e hicieron de mí trayectoria por la universidad una experiencia inolvidable, que sin conocerlos no hubiera sido completa. Siempre atesoraré nuestros momentos juntos.

A Rita y Alejandro, por el apoyo y las eternas noches de desvelo topológico, estadístico, diferencial, entre otros.

A mí tutor, Jhonnathan Arteaga, por su paciencia e invaluable ayuda.

Y finalmente, a mí Universidad Central de Venezuela, el testigo más insobornable de la historia venezolana, cuya lucha eterna e infinita sabiduría, me impulsan a hacerla sentir orgullosa de haberme educado, de darme un título que es más que papel, es vida, es alegría, es experiencia. De hacerme partícipe de la construcción de una mejor Venezuela, de la posible y en la que creo, y de dejar su nombre en alto a lo largo y ancho del mundo... A la casa que vence las sombras, que me enseñó mucho más que matemáticas.

Índice general

Índice de Figuras	9
Índice de Tablas	10
1. Leyes de Conservación	15
1.2. Introducción	15
1.3. Conservación de la Masa	15
2. Interpolación de Datos Dispersos y Funciones de Base Radial	19
2.1. Introducción	19
2.2. Interpolación de Datos Dispersos	19
2.3. Funciones Definidas Positivas	23
2.4. Funciones de Base Radial Definidas Positivas	27
2.5. Desarrollo de la Función de Base Radial Multicuádrica	28
2.6. Interpolación de Datos Dispersos con Precisión Polinomial	33
2.7. Interpolación de Hermite Generalizada	37
3. Interpolación Conservativa Basada en Funciones de Base Radial 2D	42
3.1. Introducción	42
3.2. Interpolación de Hermite Conservativa	42
4. Resultados Numéricos	47
4.1. Introducción	47
4.2. Ejemplos sobre Cuadrado con Datos Iniciales Uniformemente Distribuidos	47
4.3. Ejemplos sobre Cuadrado con Datos Iniciales Aleatorios	59
4.4. Ejemplos sobre Círculo con Datos Iniciales Aleatorios	64
4.5. Ejemplo sobre una Región Irregular con Datos Iniciales Aleatorios	72

Índice de figuras

1.1. Conservación de la Masa	16
4.1. Campo Vectorial Analítico	48
4.2. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	48
4.3. Campo Vectorial Calculado con FBR	49
4.4. Campo Vectorial Analítico	50
4.5. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	50
4.6. Campo Vectorial Calculado con FBR	51
4.7. Campo Vectorial Analítico	52
4.8. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	52
4.9. Campo Vectorial Calculado con FBR	53
4.10. Campo Vectorial Analítico	54
4.11. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	54
4.12. Campo Vectorial Calculado con FBR	55
4.13. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 8)	57
4.14. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 9)	57
4.15. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 10)	58
4.16. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 11)	58
4.17. Puntos de Halton	60
4.18. Campo Vectorial Analítico	61
4.19. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	61
4.20. Campo Vectorial Analítico	62
4.21. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	62
4.22. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 12)	63
4.23. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 13)	64

4.24. Puntos en Región Circular	65
4.25. Campo Vectorial Analítico	66
4.26. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	66
4.27. Campo Vectorial Analítico	67
4.28. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	67
4.29. Campo Vectorial Analítico	68
4.30. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	68
4.31. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 14)	70
4.32. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 15)	71
4.33. Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 16)	71
4.34. Puntos Región Irregular	72
4.35. Campo Vectorial Analítico	73
4.36. Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación	73

Índice de cuadros

4.1. Errores Cuadrado con Datos Uniformes	56
4.2. Errores Cuadrado con Datos Aleatorios	63
4.3. Errores Círculo con Datos Aleatorios	69

Resumen

En la actualidad la representación computacional de funciones matemáticas de forma eficiente es un tópico de gran importancia debido al papel preponderante que tienen los computadores en las ciencias, ingeniería, entre otros. Debido a que formalmente las expresiones de estas funciones no admiten desarrollos finitos; demandan un alto costo computacional para su evaluación o son parcialmente desconocidas, es necesario emplear diversas aproximaciones en lugar de su expresión matemática original [1]. El trabajo realizado se centra en una clase particular de estas aproximaciones denominadas funciones de base radial [2], las cuales permiten la caracterización de funciones multivariadas definidas por un extenso conjunto de datos [3]. En éste se pretende resolver el problema de interpolación de un campo vectorial disperso, empleando funciones de base radial, imponiendo la condición de conservación de la masa a sus componentes. Se discuten ejemplos básicos de las funciones de base radial, sus propiedades y convergencia, las ventajas del uso de un método libre de mallado y finalmente, se presentan resultados numéricos para el problema central de interpolación conservativa en distintos dominios de interés: cuadrados, círculos, entre otros. Se comparan los resultados con diversas funciones de prueba, obteniendo así los errores aproximados.

Introducción

Actualmente la representación computacional de funciones matemáticas es una rama de gran interés debido al importante papel que tienen los computadores en las ciencias, ingeniería y diversas disciplinas que afectan directa o indirectamente la vida cotidiana. Dado a que las expresiones de estas funciones no admiten desarrollos finitos; requieren muchos cálculos para ser evaluadas o son parcialmente desconocidas, es necesario emplear aproximaciones de diversa índole, en vez de su expresión matemática exacta [1]. El presente trabajo se centra en una clase particular de estas aproximaciones que permite la caracterización de funciones multivariadas definidas por un extenso conjunto de datos, y que éstos a su vez puedan ser dispersos. Esta técnica es denominada *método de aproximación con funciones de base radial* [2], [3] y es el pilar fundamental del desarrollo de esta tesis.

Básicamente el problema de interpolación de data dispersa es, dado conjunto de datos (\vec{x}_j, y_j) para $j = 1, \dots, n$ y $\vec{x}_j \in \mathbb{R}^s$, $y_j \in \mathbb{R}$, encontrar una función $P_f(\vec{x}_j)$ continua tal que

$$P_f(\vec{x}_j) = y_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Una manera conveniente y común de resolver este problema, es suponer que la función $P_f(\vec{x}_j)$ es una combinación lineal de funciones más simples, sin embargo, en escogerlas recae un peso importante, pues son éstas las que condicionan la obtención de una respuesta adecuada a las condiciones del problema. El método de aproximación con funciones de base radial emplea precisamente este tipo de funciones para la reconstrucción de la función $P_f(\vec{x})$. Para explicar un poco en qué consisten, una Función de Base Radial (FBR) no es más que una función de $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo argumento viene dado en términos de la norma euclídea. Existen innumerables ejemplos de funciones de base radial [6], [7], más aún, se han establecido algunos criterios matemáticamente sólidos para su generación [3], sin embargo, la escogencia de la FBR óptima depende del problema a ser resuelto.

Recientemente se ha extendido la aplicación del mencionado método de aproximación con funciones de base radial a la resolución de problemas de valor en la frontera [8]. En esencia, éste transforma las ecuaciones en derivadas parciales y las condiciones prescritas en el borde en un problema de interpolación de data dispersa. De esta manera, el método de funciones de base radial se ha convertido en uno de los métodos libres de mallas más atractivos ya que suprime la dependencia de la malla, es relativamente independiente de la geometría del dominio de estudio y su programación es sencilla al no presentar variaciones notables cuando se cambia la dimensión espacial [2], [3].

El problema básico de interpolación puede ser extendido suponiendo que a cada punto del conjunto de datos se le asigna un vector, se obtendría entonces un problema de interpolación de un campo vectorial. Estos pueden ser considerados una generalización de los problemas de interpolación de datos dispersos para funciones escalares y aparecen en modelos meteorológicos, modelos de fluidos, entre otros [9]. Sin embargo, se deben tomar en cuenta determinadas consideraciones físicas al tratar este tipo de fenómenos; una de éstas, es asumir que el campo vectorial satisface una condición global como puede ser divergencia cero, suponiendo que el fenómeno a representar está determinado por un flujo potencial. Este tipo de problemas puede ser resuelto de diversas maneras, una de ellas es combinando métodos variacionales con el método de aproximación con funciones de base radial [9]; mediante la reducción del problema de interpolación a la resolución analítica de una ecuación en derivadas parciales [10] o planteando el problema de interpolación condicionado a una ecuación en derivadas parciales, en este caso la divergencia igual a cero, ambos integrados analíticamente y resueltos mediante el método de funciones de base radial [7]. Esta última será la adoptada en esta tesis de grado.

La divergencia en un campo vectorial, como caso particular de la ecuación de continuidad, establece la relación entre el flujo entrante y el saliente sobre un área o volumen de control. Por lo tanto, si el campo no posee “fuentes” ni “sumideros” la divergencia del mismo será igual a cero. Si los componentes del campo se interpolan por separado esta condición podría no cumplirse trayendo como consecuencia inconsistencias físicas [9]. En este hecho radica la importancia de interpolar el campo vectorial restringido a la condición global de conservación de masa.

Algunas aplicaciones directas de los conceptos introducidos en esta sección y de la concreción del objetivo planteado pueden ser la estimación del campo de velocidad de vientos para

la construcción apropiada de estructuras altas [11]; la reconstrucción de campos de viento medidos puntualmente por estaciones meteorológicas dispersas [9]; aproximación de velocidades provenientes del cálculo de la presión en un medio poroso y relacionada mediante la Ley de Darcy; dispersión de contaminantes, entre muchas otras aplicaciones.

El contenido de este trabajo se ha dividido en 4 capítulos; en el primer capítulo se explican los conceptos físicos requeridos tales como la *Ley de la Conservación de la Masa* y los fluidos incompresibles, en el segundo capítulo se plantean los problemas básicos de interpolación de datos dispersos, la introducción al método de Funciones de Base Radial y los resultados sobre la invertibilidad del sistema que se solucionará. En el tercero, se desarrolla el sistema de ecuaciones a ser resuelto numéricamente; finalmente, en el cuarto capítulo se presentan ejemplos del método sobre distintas regiones geométricas y se realiza un estudio de los errores aproximados obtenidos.

Capítulo 1

Leyes de Conservación

1.2. Introducción

En el presente capítulo se introducen los resultados físicos importantes para la elaboración del sistema a ser resuelto, se obtiene la forma diferencial de la *Ley de la Conservación de la Masa* y se ajusta al caso de interés, es decir, sobre volúmenes de fluidos incompresibles, que no presenten fuentes o sumideros.

1.3. Conservación de la Masa

Hasta principios del presente siglo el estudio de los fluidos fue desarrollado esencialmente por dos grupos: los ingenieros hidráulicos y los matemáticos. Los ingenieros hidráulicos trabajando desde un punto de vista empírico, mientras que los matemáticos se centraron en enfoques analíticos. La gran cantidad de estudios del primer grupo trajo como consecuencia mucha información con un valor incalculable para los ingenieros practicantes de entonces; sin embargo debido a la carencia de los beneficios de la generalización propios de una teoría practicable, estos resultados eran restringidos y bastante limitados a situaciones nuevas. Por otro lado, los matemáticos, dado al hecho de no aprovechar la información experimental, se vieron forzados a la simplificación de hipótesis y a menudo obtuvieron resultados inconsistentes físicamente [4].

Fue evidente para los investigadores que el estudio de los fluidos debe ser una mezcla de teoría y experimentación, con lo que nace la ciencia de mecánica de fluidos, tal como se conoce actualmente. Los modernos centros de investigación emplean matemáticos, físicos,

ingenieros y técnicos calificados quienes, trabajando en equipo, mezclan estos dos puntos de vista con grados diferentes según su trabajo.

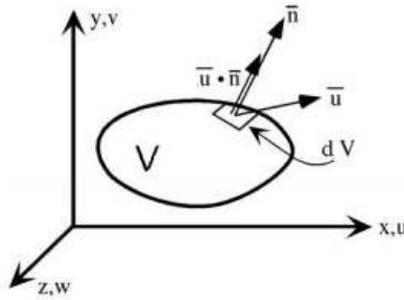


Figura 1.1: Conservación de la Masa

Ahora bien, para un volumen fijo V , de superficie ∂A , el teorema de Gauss se expresa como sigue:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV = \oint_{\partial A} \vec{u} \cdot \vec{n} dA. \quad (1.1)$$

Donde \vec{u} es el campo de velocidades del flujo dentro del volumen de control V .

Para un fluido con densidad ρ , sobre este volumen fijo V , el cambio de masa M respecto al tiempo, puede expresarse como sigue: $\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$, la *Conservación de la Masa* establece que la materia no puede ser creada ni destruida, entonces cualquier crecimiento o decrecimiento de la masa viene dada por flujo de materia a través de la frontera del volumen V . La densidad de flujo se define de la siguiente manera:

$$\oint_{\partial A} \vec{u} \rho \cdot \vec{n} dA.$$

Utilizando la notación estándar, donde \vec{n} apunta hacia afuera de la superficie cerrada, como se muestra en la figura (1.1), se puede notar que representa la salida de masa a través de la superficie, entonces de la conservación de la masa se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_{\partial A} \vec{u} \rho \cdot \vec{n} dA. \quad (1.2)$$

Utilizando el teorema de Gauss (1.1), en la expresión anterior puede sustituir el último miembro de la ecuación como un volumen integral, es decir $-\oint_{dA} \vec{u}\rho \cdot \vec{n}dA = -\int_V \nabla \cdot (\vec{u}\rho)dV$ y la expresión (1.2), se escribe:

$$\frac{dM}{dt} + \int_V \nabla \cdot (\vec{u}\rho)dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) \right) dV = 0. \quad (1.3)$$

Como esto es válido para cualquier volumen V , despejando se obtiene la forma diferencial de la *Conservación de la Masa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) = 0. \quad (1.4)$$

Una rama importante del estudio de fluidos es observar la alteración que presentan cuando se varía la presión aplicada sobre los mismos. En la medida en que estos cambios sean drásticos se opta por considerar que el fluido es *compresible*, mientras que si la variación es muy baja se considera que el fluido es *incompresible*; algunos presentan cambios muy pequeños en su densidad a pesar de estar sometidos a grandes presiones, invariablemente, cuando los fluidos presentan dicho comportamiento, se encuentran en estado líquido [4].

El interés de este trabajo recae solamente sobre fluidos incompresibles; por ende se considera que la densidad de los líquidos permanece constante, $\rho = \rho_0$, es decir son fluidos incompresibles. Simplificando la ecuación (1.4) se reduce a la conservación del flujo, y se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.5)$$

Note que la corriente de cualquier fluido estará determinada por los componentes de \vec{u} .

Suponga ahora que se encuentra estudiando la propagación de cierto contaminante en un fluido bajo un sistema conservativo, por ejemplo un lago de gran extensión donde el volumen de agua permanezca relativamente constante. Si el lago no presenta islotes, la circulación de dicho polulante va a depender exclusivamente de \vec{u} , el campo de velocidades del fluido. Como el lago es extenso, es necesario el desarrollo de un método que permita estudiar su comportamiento a través del tiempo, sin embargo, en el caso en el que sólo posea pocas

entradas de \vec{u} como datos iniciales, ¿cómo saber dónde se encuentra el contaminante en algún instante de interés?, sería necesaria la obtención de nuevas entradas que surjan como una extensión de \vec{u} , ayudando así a resolver el problema.

Aunque el caso de interés para este trabajo es sobre fluidos incompresibles, observe ahora el siguiente ejemplo para un fluido compresible con el afán de extender el campo de aplicaciones; es común observar detectores de humo en oficinas y otros espacios cerrados, ahora suponga que el dispositivo se activa bajo cualquier señal de humo por más tenue que ésta sea; un fumador encendiendo un cigarrillo o una vela prendida, serían suficientes para la activación innecesaria del mismo, sin embargo, si el detector pudiese discernir entre la cantidad de humo que hay y la necesidad de activar la alarma a partir de un conjunto inicial \vec{u} , se optimizaría dicho sistema, nuevamente es necesario un método que trabaje a partir de este conjunto inicial.

Este método existe y posee el nombre de “interpolación”, sin embargo este no es un caso común, puesto a que las entradas que se tienen como datos son vectores dispersos. En el capítulo siguiente se da inicio al estudio de este tipo de interpolación, el planteamiento formal de este problema, bajo qué funciones su solución es óptima, sus propiedades, entre otros.

Capítulo 2

Interpolación de Datos Dispersos y Funciones de Base Radial

2.1. Introducción

En el presente capítulo se introduce el problema básico de interpolación de datos dispersos y se utiliza el método de Funciones de Base Radial (FBR) para plantear una posible solución; por ende se procede a determinar bajo qué condiciones se obtiene que el sistema a ser resuelto sea no-singular. Se introducen los conceptos de funciones definidas (condicionalmente) positivas, que dan origen a matrices definidas (condicionalmente) positivas no-singulares o sujetas a interpolación con precisión polinomial. Se finaliza esbozando la interpolación de Hermite enlazada al problema que se desea resolver.

2.2. Interpolación de Datos Dispersos

En el análisis numérico, la interpolación sobre datos de gran dimensión se ha convertido en un problema de relevancia en áreas de ciencia e ingeniería, muchos métodos tradicionales no son capaces de tratar este tipo de problemas o están limitados a situaciones específicas, es por ello que surgen los métodos libres de mallado. La invención de éstos remonta veinticinco años atrás, sin embargo, su investigación se ha acelerado en los últimos diez. Los métodos libres de mallado ofrecen diversas ventajas, entre las cuales se encuentran la buena adaptación a cambios en la geometría del dominio de interés, se puede aumentar o disminuir la dimensión sin necesidad de cambiar el programa a fondo, entre otros.

Al ser métodos aplicables en numerosas disciplinas, el campo de motivación para su estudio es bastante amplio, siendo uno de éstos el *modelaje de datos dispersos*. Por ejemplo, en áreas como meteorología, geofísica, geodésica, entre otros; es usual la búsqueda de una función que recorra distintos puntos de interés en un dominio en particular, es decir, se busca la interpolación de datos dispersos.

El problema en general es partir de un conjunto de datos con la finalidad de obtener esta función que permita deducir información acerca del proceso en estudio, además de poder observar otros datos de interés que no estén incluidos en el conjunto inicial, entonces se procede a la búsqueda de una función P_f que se ajuste a los datos dados, es decir, se espera que esta función interpole con exactitud los puntos iniciales.

Problema 2.1: (Interpolación de datos dispersos)

Sea (\vec{x}_j, y_j) un conjunto de datos, $j = 1, \dots, N$, $\vec{x}_j \in \mathbb{R}^s$, $y_j \in \mathbb{R}$, encontrar una función P_f continua tal que $P_f(\vec{x}_j) = y_j$, $j = 1, \dots, N$.

Observe que \vec{x}_j recae sobre un espacio arbitrario s -dimensional \mathbb{R}^s , y por ende el problema 2.1 cubre distintos tipos de aplicaciones. Para el caso $s = 1$ puede tener, por ejemplo, que los datos sean medidas que corresponden a cierto período de tiempo. Si $s = 2$, podría pensar que los datos son obtenidos de una región planar y por ello \vec{x}_j correspondería a dos coordenadas en el plano. Para $s = 3$, una situación similar en el espacio, como la distribución de temperatura en un cuerpo sólido. Es posible que los ejemplos sobre dimensiones mayores a 3 no sean tan intuitivos, sin embargo, algunos de ellos aplicarían en aquellas áreas en las que se manejan gran cantidad de variables, como: finanzas, optimización, economía, estadística, entre otros.

La manera convencional de resolver la interpolación en un problema de datos dispersos es suponer que la función P_f es una combinación lineal de ciertas *funciones de base* B_k , es decir:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k B_k(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s. \quad (2.1)$$

Lo cual lleva a la resolución de un sistema lineal de ecuaciones de la forma:

$$Ac = y,$$

donde las entradas de la matriz de interpolación A están dadas por $A_{jk} = B_k(\bar{x}_j)$, $j, k = 1, \dots, N$, $c = [c_1, \dots, c_N]^T$, e $y = [y_1, \dots, y_N]^T$.

El problema 2.1 tendrá solución única si y sólo si la matriz A es no-singular, es por ello que en la elección de la función B_k recae un peso importante, son éstas las que determinan la invertibilidad de la matriz.

Ejemplo 1. Interpolación con matrices de distancia.

Sea $x = (x_1, \dots, x_s) \in [0, 1]^s$, y $f_s(x)$ una función de prueba; como se explicó anteriormente, se quiere construir P_f tal que interpole las muestras obtenidas de f_s a un conjunto de puntos fijos, es decir:

$$P_f(x_j) = f_s(x_j), \text{ donde } x_j \text{ es un vector fijado previamente.}$$

Si $s = 1$ es común que este problema se resuelva utilizando polinomios de una variable o splines. Para pocos datos, los polinomios pueden funcionar satisfactoriamente, sin embargo, si el número de datos aumenta, el grado del polinomio también, entonces se hace uso splines o polinomios contruidos a trozos para evitar las oscilaciones. La solución más simple es utilizar un spline lineal a trozos, es decir, se asume que P_f es de la forma:

$$P_f(x) = \sum_{k=1}^N c_k |x - x_k|, \quad x \in [0, 1],$$

donde los coeficientes c_k se determinan mediante la condición de interpolación:

$$P_f(x_j) = f_1(x_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

Los puntos x_k son usualmente conocidos como *centros*, generalmente se escogen de manera tal que coincidan con los datos de entrada. Como las funciones B_k , para este caso $B_k = |x - x_k|$, son radialmente simétricas con respecto al centro x_k , este constituye el primer ejemplo de *funciones de base radial*.

Para obtener los coeficientes c_k , se debe resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} |x_1 - x_1| & |x_1 - x_2| & \dots & |x_1 - x_N| \\ |x_2 - x_1| & |x_2 - x_2| & \dots & |x_2 - x_N| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |x_N - x_1| & |x_N - x_2| & \dots & |x_N - x_N| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ \vdots \\ f_1(x_N) \end{bmatrix}$$

La matriz anterior es un ejemplo de una *matriz de distancia*, éstas han sido objeto de estudio por un largo tiempo, [12], y se sabe que este tipo de matrices basadas en la distancia euclídea, con un conjunto de puntos distintos en \mathbb{R}^s , son siempre no-singular. Por lo tanto puede resolverse el problema de interpolación de datos dispersos (2.1), asumiendo:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \|\vec{x} - \vec{x}_k\|_2, \quad \vec{x} \in [0, 1]^s,$$

y se determinan los coeficientes c_k resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \|\vec{x}_1 - \vec{x}_1\|_2 & \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_2 & \dots & \|\vec{x}_1 - \vec{x}_N\|_2 \\ \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|_2 & \|\vec{x}_2 - \vec{x}_2\|_2 & \dots & \|\vec{x}_2 - \vec{x}_N\|_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\vec{x}_N - \vec{x}_1\|_2 & \|\vec{x}_N - \vec{x}_2\|_2 & \dots & \|\vec{x}_N - \vec{x}_N\|_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_s(\vec{x}_1) \\ f_s(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ f_s(\vec{x}_N) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Sin embargo, observe que la diagonal de la matriz (2.2) está constituida por ceros y si los puntos distintos son cercanos entre ellos, el resto de los valores será también cercano a cero, por ende esta matriz podría estar mal condicionada. Es por ello que se busca sustituir la función de base B_k por una más eficiente.

Definición 1. (*función de base radial-FBR*) una función $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada de *base radial* si existe $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Phi(\vec{x}) = \varphi(r), \quad \text{donde } r = \|\vec{x}\|,$$

y $\|\cdot\|$ es alguna norma en \mathbb{R}^s , usualmente la norma euclideana.

La definición 1 indica que el ejemplo 1, (matrices de distancia), es un caso especial de

funciones de base radial, con $\varphi(r) = r$. Los interpolantes que utilizan FBR tienen la ventajosa propiedad de ser invariantes bajo todas las transformaciones euclidianas: traslaciones, rotaciones y reflexiones; lo cual facilita la programación pues es indiferente la aplicación que se programe primero, el interpolante usando FBR o la transformación euclidiana.

Retomando el problema de interpolación de datos dispersos, (2.1), suponga ahora que se sustituye la función de base B_k por una función de base radial; y se considera nuevamente P_f a trozos, como sigue:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \varphi(\|\vec{x} - \vec{x}_k\|_2), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s, \quad (2.3)$$

donde los coeficientes c_k se hallan resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_1\|_2) & \varphi(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_2) & \dots & \varphi(\|\vec{x}_1 - \vec{x}_N\|_2) \\ \varphi(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|_2) & \varphi(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_2\|_2) & \dots & \varphi(\|\vec{x}_2 - \vec{x}_N\|_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\vec{x}_N - \vec{x}_1\|_2) & \varphi(\|\vec{x}_N - \vec{x}_2\|_2) & \dots & \varphi(\|\vec{x}_N - \vec{x}_N\|_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{x}_1) \\ f(\vec{x}_2) \\ \vdots \\ f(\vec{x}_N) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Como la solución al problema de datos dispersos depende de la solución del sistema (2.4), se dedicaran los siguientes resultados a encontrar bajo cuál tipo de FBR la matriz del sistema es no-singular.

2.3. Funciones Definidas Positivas

Aunque no se ha clasificado qué clase de FBR φ , genera un sistema (2.4) no-singular, para cualquier conjunto de datos $\Omega = \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, se han estudiado funciones que generen *matrices definidas positivas*. Bajo esta consideración es más sencillo determinar la invertibilidad de la matriz teóricamente.

Definición 2. : Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, A es definida *semi-positiva* si:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k A_{jk} \geq 0, \quad (2.5)$$

para $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$.

Si (2.5) es cero sólo para $c \equiv 0$, entonces A es definida *positiva*.

Una propiedad importante de las matrices definidas positivas es que sus autovalores son positivos, y por lo tanto estas matrices son no-singulares. Entonces, si en la expresión (2.1) se considera una función de base B_k que genere una matriz definida positiva, el problema de interpolación siempre tendría respuesta. Con este propósito se introduce el concepto de *función definida positiva* del análisis clásico.

Definición 3. Sea $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{C}$, es definida *positiva* en \mathbb{R}^s si:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \overline{c_k} \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \geq 0, \quad (2.6)$$

para $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^s$, y $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{C}^N$.

La función Φ es definida *estrictamente positiva* en \mathbb{R}^s si (2.6) es cero sólo para $c \equiv 0$.

Aunque el interés en este trabajo radica sólo entre problemas con datos reales y coeficientes reales, esta extensión a coeficientes complejos c y funciones complejas Φ será útil para futuras demostraciones en el capítulo.

Ejemplo 2. Se denotará el producto interno usual entre $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^s$ como $\vec{x} \cdot \vec{y}$. Sea $\Phi(\vec{x}) = e^{i\vec{x} \cdot \vec{y}}$, con $\vec{y} \in \mathbb{R}^s$ fijo. Φ es una función definida positiva en \mathbb{R}^s pues siguiendo la definición 3, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \overline{c_k} \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \overline{c_k} e^{i(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \cdot \vec{y}} \\ &= \sum_{j=1}^N c_j e^{i\vec{x}_j \cdot \vec{y}} \sum_{k=1}^N \overline{c_k} e^{-i\vec{x}_k \cdot \vec{y}} \\ &= \left| \sum_{j=1}^N c_j e^{i\vec{x}_j \cdot \vec{y}} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Toda esta discusión sugiere que deben utilizarse funciones definidas estrictamente positivas como funciones de base, es decir, $B_k(\vec{x}) = \Phi(\vec{x} - \vec{x}_k)$, donde la nueva función a trozos para la resolución del problema (2.1) sería:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \Phi(\vec{x} - \vec{x}_k), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s. \quad (2.7)$$

A continuación se discutirán las propiedades más importantes de las funciones definidas positivas y estrictamente positivas.

Teorema 2.1. *Algunas de las propiedades básicas de funciones definidas positivas son:*

1. *Combinaciones lineales no negativas, finitas de funciones definidas positivas son definidas positivas. Si Φ_1, \dots, Φ_n son definidas positivas en \mathbb{R}^s y $c_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, entonces:*

$$\Phi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s,$$

es también definida positiva. Más aún, si al menos Φ_j es definida estrictamente positiva y el correspondiente $c_j > 0$, entonces Φ es estrictamente positiva.

2. $\Phi(0) \geq 0$.

3. $\Phi(-\vec{x}) = \overline{\Phi(\vec{x})}$.

4. *Cualquier función definida positiva está acotada, más aún:*

$$|\Phi(\vec{x})| \leq \Phi(0).$$

5. *Si Φ es definida positiva con $\Phi(0) = 0$ entonces $\Phi \equiv 0$.*

6. *El producto de funciones definidas (estrictamente) positivas es definido (estrictamente) positivo.*

Prueba.

Las propiedades (1) y (2) se cumplen inmediatamente de la definición 3. Para probar (3), suponga $n = 2, x_1 = 0, x_2 = x$, y $c_1 = 1, c_2 = c$. De la definición 3, se sigue:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_j \bar{c}_k \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) = (1 + |c|^2) \Phi(0) + c \Phi(x) + \bar{c} \Phi(-x) \geq 0,$$

para todo $c \in \mathbb{C}$. Tomando $c = 1$ y $c = i$, donde $i = \sqrt{-1}$, puede verse que tanto $\Phi(x) + \Phi(-x)$ como $i(\Phi(x) - \Phi(-x))$ deben ser reales, lo cual es sólo posible si $\Phi(-x) = \overline{\Phi(x)}$.

Para la prueba de (4), suponga $N = 2, x_1 = 0, x_2 = x$, y $c_1 = |\Phi(x)|, c_2 = -\overline{\Phi(x)}$. Nuevamente, de la definición 3, se sigue:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 c_j \bar{c}_k \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) = 2\Phi(0)|\Phi(x)|^2 - \Phi(-x)\Phi(x)|\Phi(x)| - \Phi^2(x)|\Phi(x)| \geq 0.$$

Por la propiedad (3), $\Phi(-x) = \overline{\Phi(x)}$, por lo tanto:

$$2\Phi(0)|\Phi(x)|^2 - 2|\Phi(x)|^3 \geq 0.$$

Si $|\Phi(x)| > 0$, al dividir por $|\Phi(x)|^2$ se obtiene lo requerido, el caso en que $|\Phi(x)| \equiv 0$ sería el caso trivial. La propiedad (5) se obtiene directamente de la propiedad (4), mientras que la número (6) es consecuencia de un teorema de álgebra lineal probado por Schur, el cual establece que el producto de matrices definidas (semi) positivas es definido (semi) positivo. Para más detalles consulte [13] y [14].

Para finalizar esta sección, se presentará un teorema sobre la caracterización integral de las funciones definidas positivas, es un resultado dado en términos de la transformada de Fourier, establecido por Bochner en 1933. Conjuntamente se presentará un lema que relaciona estas últimas deducciones con Funciones de Base Radial.

Teorema 2.2. (Bochner) *Una función $\Phi \in C(\mathbb{R}^s)$ es definida positiva en \mathbb{R}^s si y sólo si es la transformada de Fourier de una medida de Borel, finita y no negativa, μ en \mathbb{R}^s , es decir:*

$$\Phi(\vec{x}) = \hat{\mu}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-i\vec{x}\cdot\vec{y}} d\mu(y), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s.$$

Prueba.

Existen diversas pruebas de este teorema, la prueba original de su autor puede encontrarse en [15], sin embargo, para los propósitos de este trabajo sólo se probará una dirección, pues es la dirección del teorema que es importante para la interpolación de datos dispersos. Se asume que Φ es la transformada de Fourier de una medida de Borel, finita y no negativa, y se prueba que Φ es definida positiva:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \overline{c_k} \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left[c_j \overline{c_k} \int_{\mathbb{R}^s} e^{-i(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \cdot \vec{y}} d\mu(y) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int_{\mathbb{R}^s} \left[\sum_{j=1}^N c_j e^{-i\vec{x}_j \cdot \vec{y}} \sum_{k=1}^N \overline{c_k} e^{i\vec{x}_k \cdot \vec{y}} \right] d\mu(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int_{\mathbb{R}^s} \left| \sum_{j=1}^N c_j e^{-i\vec{x}_j \cdot \vec{y}} \right|^2 d\mu(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se prueba por la condición impuesta a la medida μ .

Lema 1. Si $\Phi = \varphi(\|\cdot\|)$ es definida (estrictamente) positiva y es radial en \mathbb{R}^s entonces Φ es también definida (estrictamente) positiva y radial en \mathbb{R}^σ para $\sigma \leq s$.

Puede verse entonces que, por este lema, todos los resultados obtenidos a lo largo de este capítulo sobre funciones definidas positivas o estrictamente positivas se extienden a las Funciones de Base Radial.

2.4. Funciones de Base Radial Definidas Positivas

Existen infinitos ejemplos de FBR; algunas de estas funciones contienen un llamado *parámetro de forma* ε , este parámetro se fija al hacer la interpolación y está íntimamente ligado a la rapidez de convergencia de la FBR que se utilice, es decir, el uso del mismo aplicado directamente a \vec{x} tiene la ventaja de proveer una respuesta más exacta. A continuación unos ejemplos comunes de FBR.

Ejemplo 3. Gaussiana

$$\Phi(r) = e^{-\varepsilon^2 \|r\|^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Por el teorema 2.2 (Bochner), puede verse que esta función es estrictamente definida positiva y radial en \mathbb{R}^s para cualquier s , puesto que la transformada de Fourier de una Gaussiana es esencialmente Gaussiana. Otra de las ventajas que posee esta FBR es que es infinitamente diferenciable, haciendo posible el uso de la llamada interpolación de *Hermite*.

Ejemplo 4. Multicuádrica (MC)

$$\Phi(r) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|r\|^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Ejemplo 5. Inversa Multicuádrica

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|r\|^2}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Ejemplo 6. Spline de placa delgada

$$\Phi(r) = \|r\|^2 \ln(\|r\|).$$

En los últimos años, la FBR que ha tenido mayor éxito experimentalmente es la función Multicuádrica (MC); a esto se debe la riqueza en la teoría que la respalda y en sus aplicaciones. Es por ello que en los códigos de Matlab de este trabajo se ha utilizado dicha FBR, y por lo tanto los resultados sobre la invertibilidad de la matriz (2.4), se dirigirán sólo hacia la Función de Base Radial Multicuádrica.

2.5. Desarrollo de la Función de Base Radial Multicuádrica

La FBR multicuádrica fue desarrollada en 1968 por el geodésico estadounidense, Roland Hardy, motivado a un problema cartográfico que describe como el siguiente, *...dado un conjunto discreto de datos sobre una superficie topográfica, reducirlo a un conjunto satisfactorio de funciones continuas que representen dicha superfie...* [2]; Hardy intentó resolver este problema utilizando métodos de interpolación algebraicos y trigonométricos, sin embargo ambos métodos fallaron. Luego de numerosas investigaciones, Hardy abordó el problema de una ma-

nera distinta, se propuso construir una combinación lineal de funciones de base radialmente simétrica respecto a su centro, $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, e introdujo una primera versión de la llamada MC:

$$\Phi(r) = \sqrt{c^2 + r^2},$$

donde c es el parámetro de forma mencionado anteriormente y en este caso afecta la forma de la superficie. Pese a que los resultados experimentales fueron de gran satisfacción, al no poder comprobar teóricamente la invertibilidad del sistema de interpolación, su método no tuvo gran notoriedad.

En 1986, el matemático Charles Micchelli, probó que el sistema formado por Función de Base Radial Multicuádrada es no-singular [12], y posteriormente fue aplicado para la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a partir de este momento el método comenzó a alcanzar popularidad y conjuntamente con ello un largo número de aplicaciones.

Se ha hecho común redefinir MC suponiendo $c = 1/\varepsilon$, de la siguiente manera:

$$\Phi(r) = \varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^2 r^2},$$

luego, ignorando el factor ε , MC se redefine como sigue:

$$\Phi(r) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r^2},$$

donde ε es el nuevo parámetro de forma actuando sobre r ; si ε se aproxima a cero, MC se aplana.

Ahora bien, dado un conjunto de centros $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^s$, si en la expresión (2.3) se interpola utilizando funciones de base radial, se obtiene lo siguiente:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \Phi(\|\vec{x} - \vec{x}_k\|), \quad (2.8)$$

y nuevamente, los coeficientes c_k se encuentran mediante la condición de interpolación:

$$P_f(\vec{x}_k) = f(\vec{x}_k).$$

Generándose el mismo sistema anterior:

$$Ac = y, \tag{2.9}$$

donde $A_{jk} = \Phi(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|)$ con $j, k = 1, \dots, N$ y Φ es la FBR multicuádrica. Es claro que el sistema tendrá solución única si y sólo si la matriz de interpolación A es no-singular. Para demostrar la invertibilidad de esta matriz, es necesario la definición de una serie de conceptos a continuación.

Definición 4. Una función Ψ es completamente monótona en $[0, \infty)$ si:

1. $\Psi \in C[0, \infty)$
2. $\Psi \in C^\infty(0, \infty)$
3. $(-1)^{l+1}\Psi^{(l)}(r) \geq 0$ donde $r > 0$ y $l = 1, 2, \dots$

Definición 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ simétrica, A se dice condicionalmente semi positiva de orden uno si:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k A_{jk} \geq 0, \tag{2.10}$$

para todo $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^N$ que satisfaga:

$$\sum_{j=1}^N c_j = 0.$$

Si el caso $c \neq 0$ implica la desigualdad estricta en la expresión (2.10), entonces A se dice condicionalmente positiva de orden uno.

Representación de Bernstein-Widder: una función g es completamente monótona si y sólo si es la transformada de Laplace:

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-t\sigma} d\mu(\sigma), \quad t > 0$$

de una medida no creciente μ acotada inferiormente, en particular $d\mu \geq 0$.

La representación de Bernstein-Widder ayudará a probar el teorema propuesto a continuación, sin embargo su utilidad se extiende más allá de esta prueba, pues es posible hallar una Función de Base Radial mediante la aplicación del mismo. Para explicar superficialmente en qué consiste, debe tomar en cuenta que no toda función cuyo argumento depende del radio es considerada una Función de Base Radial, existen diversos métodos para encontrarlas y uno de éstos surge como una consecuencia de esta representación, se procede a buscar una función cuya transformada de Laplace en el infinito esté acotada, de modo tal que se verifique que además es completamente monótona. Si se considera solamente el teorema para determinar una FBR entonces sería suficiente con tomar una función cuya transformada de Laplace exista y esto no implicaría necesariamente que sea una FBR.

Teorema 2.3. *Sea $\Phi \in C[0, \infty)$ y $(-1)^{k+1}\Phi^{(k)}$ completamente monótona en $(0, \infty)$ entonces Φ es definida positiva.*

Prueba.

Como $(-1)^{k+1}\Phi^{(k)}$ es completamente monótona en $(0, \infty)$, se tiene por la representación de Bernstein-Widder, lo siguiente:

$$(-1)^{k+1}\Phi^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-t\sigma} d\mu(\sigma), \quad t > 0,$$

donde $d\mu(\sigma)$ es una medida de Borel en $(0, \infty)$. Para $\varepsilon > 0$, se define $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(t + \varepsilon)$, luego:

$$\Phi_\varepsilon(t) - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Phi_\varepsilon^{(l)}(0)}{l!} t^l = \int_0^\infty \frac{e^{-\varepsilon\sigma}}{\sigma^k} \left[e^{-t\sigma} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-t\sigma)^l}{l!} \right] d\mu(\sigma).$$

Tomando $t = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|$ y multiplicando ambos lados por $c_i c_j$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \Phi(\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| + \varepsilon) = \int_0^\infty e^{-\sigma\varepsilon} \sigma^{-k} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j e^{-\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|\sigma} d\mu(\sigma). \quad (2.11)$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$, se concluye que la expresión anterior es cero sólo si $c \equiv 0$, entonces Φ es definida estrictamente positiva.

Una versión simplicada del teorema de Micchelli [4], lleva a la invertibilidad de la matriz de interpolación.

Teorema 2.4. (*Micchelli*) Sea $\Psi(r) = \Phi(\sqrt{r}) \in C[0, \infty)$ y $\Psi(r) > 0$ para $r > 0$. Sea $\Psi'(r)$ no constante y completamente monótona en $(0, \infty)$. Para cualquier conjunto de centros $\{x_k\}_{k=1}^N$, la matriz $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ con entradas $A_{jk} = \Phi(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|)$ es invertible.

Prueba.

Por el teorema 2.3, Ψ es definida estrictamente positiva, por lo tanto la forma cuadrática $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j A_{ij} = 0$ si y sólo si $c \equiv 0$; además $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} > 0$, luego la matriz es definida positiva y por ende no-singular.

Para la FBR multicuádrada se tiene:

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= \Phi(\sqrt{r}) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r} \\ \Psi'(r) &= \frac{\varepsilon^2}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2 r}} \\ \Psi''(r) &= \frac{-\varepsilon^4}{4(1 + \varepsilon^2 r)^{3/2}} \\ \Psi^{(3)}(r) &= \frac{3\varepsilon^6}{8(1 + \varepsilon^2 r)^{5/2}} \\ \Psi^{(4)}(r) &= \frac{-15\varepsilon^8}{16(1 + \varepsilon^2 r)^{7/2}} \\ \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

De donde:

$$(-1)^{l+1}\Psi^{(l)}(r) \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Y por lo tanto $\Psi'(r)$ es completamente monótona. Por el teorema 2.4 la invertibilidad de la matriz A del sistema (2.9), utilizando funciones de base radial multicuádricas, queda establecida.

2.6. Interpolación de Datos Dispersos con Precisión Polinomial

Utilizar polinomios para la interpolación de datos dispersos no es una tarea sencilla, sólo si los datos estuviesen ubicados en lugares muy específicos se pudiese garantizar una buena aproximación de la interpolación polinomial, sin embargo el error de aproximación utilizando el método de funciones de base radial, puede disminuir si se introduce un polinomio a la interpolación inicial.

Entonces se modifica la expresión (2.8) agregándole un polinomio, y se asume P_f como sigue:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \Phi(\|\vec{x} - \vec{x}_k\|) + \sum_{t=1}^M d_t p_t(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s.$$

Donde p_1, \dots, p_M forman una base de polinomios; como sobre éstos debe imponerse la condición de interpolación, $P_f(\vec{x}_j) = f(\vec{x}_j)$, $j = 1, \dots, N$, se obtiene un sistema de $N + M$ incógnitas, c_k y d_t . Usualmente se agrega la siguiente condición adicional:

$$\sum_{k=1}^N c_k p_t(\vec{x}_k) = 0, \quad t = 1, \dots, M.$$

Matricialmente, este problema puede verse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde $A_{jk} = \Phi(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|)$, $j, k = 1, \dots, N$, $P_{jt} = p_t(\vec{x}_j)$, $t = 1, \dots, N$, $c = [c_1, \dots, c_N]^T$, $d = [d_1, \dots, d_M]^T$, $y = [y_1, \dots, y_N]^T$, 0 un vector de longitud M , y O una matriz de ceros de orden $M \times M$.

Ahora debe probarse que la matriz en el sistema aumentado (2.12), es también invertible; suponga primero el caso $m = 1$, para cualquier dimensión s .

Teorema 2.5. *Sea $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ simétrica y condicionalmente positiva de orden uno, y sea $P = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{N \times 1}$. Luego, el sistema lineal de ecuaciones:*

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene solución única.

Prueba.

Asumiendo $[c, d]^T$ una solución del sistema lineal homogéneo (para $y = 0$), se mostrará que $[c, d]^T = 0^T$ es la única solución posible. Multiplicando el bloque de arriba del sistema homogéneo por c^T , se obtiene:

$$c^T A c + d c^T P = 0.$$

Del bloque de abajo se obtiene $P^T c = c^T P = 0$, y por lo tanto:

$$c^T A c = 0.$$

Como la matriz A es condicionalmente positiva de orden uno, se determina que $c = 0$. Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Ac + dP = 0,$$

entonces, el hecho que $c = 0$ y P un vector compuesto por unos implica $d = 0$.

Como la FBR multicuádrica genera matrices definidas positivas y estas matrices son positivas de orden uno, el teorema 2.4 establece la invertibilidad de la matriz aumentada (2.12), sólo para m constante. Para cubrir polinomios de mayor orden, deben ser introducidos otros conceptos.

Definición 6. Sea $\chi = x_1, \dots, x_N \subset \mathbb{R}^s$, χ es m -*unisolvente* si el único polinomio de grado total al interpolar m datos cero en χ es el polinomio cero.

Para futuras referencias note que si un polinomio es $(m - 1)$ -*unisolvente* para el conjunto χ , es equivalente a que la matriz P : $P_{jl} = p_l(\vec{x}_j)$, $j = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, M$; tenga el rango de columnas completo. Para $N = M$ sería la matriz de interpolación.

Definición 7. Sea Φ una función compleja, Φ es definida *condicionalmente positiva* de orden m en \mathbb{R}^s si:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \bar{c}_k \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \geq 0, \quad (2.13)$$

para cualquier conjunto $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^s$, y $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{C}^N$ que satisfaga:

$$\sum_{j=1}^N c_j p(\vec{x}_j) = 0,$$

para cualquier polinomio p evaluado en \mathbb{C} de grado, por lo menos, $m - 1$. La función Φ se define *estrictamente condicional positiva de orden m en \mathbb{R}^s* si la expresión (2.12) es cero sólo para $c \equiv 0$.

Una observación inmediata, es:

Lema 2. Una función definida (*estrictamente*) *condicional positiva de orden m en \mathbb{R}^s* es también definida (*estrictamente*) *condicional positiva de cualquier orden mayor*. En par-

particular, una función definida (estrictamente) positiva es siempre definida (estrictamente) condicional positiva de cualquier orden.

Prueba.

La primera afirmación se obtiene directamente de la definición 7. La segunda, es verdadera, pues el caso $m = 0$ genera la clase de funciones definidas (estrictamente) positivas, es decir, las funciones definidas (estrictamente) condicionales positivas de orden cero son definidas (estrictamente) positivas.

Como sólo se tiene interés sobre funciones reales, la definición 7 se restringe a funciones y coeficientes reales. Una discusión más detallada sobre esto puede encontrarse en [6].

Teorema 2.6. *Sea Φ una función real, continua y par. Φ se llama condicionalmente positiva de orden m en \mathbb{R}^s si:*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(\vec{x}_j - \vec{x}_k) \geq 0, \quad (2.14)$$

para $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N \in \mathbb{R}^s$, y $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^s$ que satisfaga:

$$\sum_{j=1}^N c_j p(\vec{x}_j) = 0,$$

para cualquier polinomio real de grado al menos $m - 1$. La función Φ es estrictamente condicional positiva de orden m si la forma cuadrática (2.14) es cero sólo para $c \equiv 0$.

Teorema 2.7. *Si Φ , una función real, continua y par, es estricta y condicionalmente positiva de orden m en \mathbb{R}^s , y los puntos $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$ forman un conjunto $(m - 1)$ -unisolvente; entonces el sistema (2.12) posee solución única.*

Prueba.

Esta prueba es similar a la del teorema 2.5, nuevamente se supone $[c, d]^T$ solución del sistema lineal homogéneo, se probará que $[c, d]^T = 0$ es la única solución posible.

Multiplicando la primera fila de bloques por c^T , se obtiene:

$$c^T A c + c^T P d = 0.$$

Del bloque de abajo, se tiene $P^T c = 0$. Esto implica que $c^T P = 0^T$, y por lo tanto

$$c^T A c = 0. \quad (2.15)$$

Como Φ es estricta y condicionalmente positiva de orden m , se sabe que la forma cuadrática de A , donde los coeficientes cumplen $P^T c = 0$, es cero sólo para $c = 0$. Por lo tanto (2.15) implica que $c = 0$. Como los datos son un conjunto unisolvente, la independencia lineal de las columnas de P y el hecho que $c = 0$ garantizan lo siguiente:

$$A c + P d = 0.$$

2.7. Interpolación de Hermite Generalizada

Ahora se considerará $\{\vec{x}_k, \lambda_k f\}$, con $k = 1, \dots, N$, y $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^s$, donde $\Lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_N$ es un conjunto de funcionales lineales linealmente independientes, y f es una función suave. Por ejemplo, λ_k pudiera denotar la evaluación en el punto \vec{x}_k y por lo tanto generar las condiciones de interpolación de Lagrange, o pudiera denotar la evaluación de la derivada en el punto \vec{x}_k , llevando a la interpolación de Hermite. De cualquier forma, esta definición generalizada admite distintos tipos de funcionales: derivadas, integrales, entre otros.

Se quiere encontrar un interpolante de la forma:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(\|\vec{x}\|), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s, \quad (2.16)$$

donde ψ_k es una función de base radial tal que cumpla las condiciones generalizadas de interpolación:

$$\lambda_k P_f = \lambda_k f, \quad k = 1, \dots, N.$$

Para que la discusión que sigue se entienda lo mejor posible se hará un cambio de notación; el conjunto $\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N$ serán ahora los centros de las funciones de base radial. Normalmente, en

la programación, se toman dichos centros coincidentes con los datos iniciales $\chi = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}$. Sin embargo, los siguientes resultados se observan claramente haciendo la distinción entre los centros $\vec{\xi}_k$ y los datos de entrada \vec{x}_k .

En la expresión (2.16) se sustituye $\psi_k(\|\vec{x}\|) = \lambda_k^\xi \varphi(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|)$ donde λ_k es el mismo funcional lineal anterior, sin embargo λ^ξ denota que dicho funcional actúa sobre el segundo argumento, ξ . Y φ es una FBR conocida. Luego, se asume la interpolación generalizada de Hermite como sigue:

$$P_f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^\xi \varphi(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^s, \quad (2.17)$$

y debe satisfacer:

$$\lambda_k P_f = \lambda_k f, \quad k = 1, \dots, N.$$

Lo cual genera el sistema $Ac = f_\lambda$, donde $A_{kj} = \lambda_k \lambda_j^\xi \varphi$, con $k, j = 1, \dots, N$ y $f_\lambda = [\lambda_1 f, \dots, \lambda_N f]^T$.

En [17] puede encontrarse un detallado análisis sobre esta nueva matriz A , como estas demostraciones son extensas, y se escapan de los objetivos de este trabajo, sólo se esbozará una idea general de la misma; a partir de $A_{kj} = \lambda_k \lambda_j^\xi \varphi$, con $k = 1, \dots, N$, acotan todos los autovalores de A y así demuestran que cada uno de ellos es positivo, obteniendo como consecuencia que esta matriz es definida positiva y así extendiendo todos los resultados anteriores a este tipo de interpolación. En [18] puede encontrarse las cotas para otras funciones de base radial que no se hallen en la primera referencia.

Ahora se procederá a ilustrar por qué la formulación (2.17) es una forma de presentar el problema de interpolación de Hermite, lo cual garantizará que la matriz de interpolación A sea invertible para la FBR multicuádrica ([17], [18]). Esta observación se analizará sólo para ejemplos de una dimensión, sin embargo, una prueba más generalizada con un espacio de mayor dimensión, se puede extender a partir de ésta utilizando el teorema de Taylor para varias variables. Para observar que un sub-bloque general de la matriz de interpolación de Hermite está asociado a la matriz de Lagrange, será suficiente analizar un sub-bloque de la matriz de interpolación de Lagrange correspondiente a dos pares de puntos. Sean dichos puntos $x_k, x_k + \Delta x$ y $\xi_j, \xi_j + \Delta \xi$, para algún índice k, j y distancias cortas $\Delta x, \Delta \xi$. Defina

la función de base radial como $\varphi = \varphi(|x - \xi|)$, $x, \xi \in \mathbb{R}$, la cual se asume diferenciable en el origen. Del teorema de Taylor en una dimensión, se sigue:

$$\varphi(|(x + \Delta x) - \xi|) = \varphi(|x - \xi|) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x - \xi|) + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \quad (2.18)$$

$$\varphi(|x - (\xi + \Delta \xi)|) = \varphi(|x - \xi|) - \Delta \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(|x - \xi|) + \mathcal{O}((\Delta \xi)^2), \quad (2.19)$$

Para mantener la notación lo más simple posible, se escribirá: $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x_k - \xi_j|)$ para denotar $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x - \xi_j|)|_{x=x_k}$, $\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|)$ para denotar $\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(|x_k - \xi|)|_{\xi=\xi_j}$, y $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|)$ para denotar $\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi(|x - \xi|)|_{x=x_k, \xi=\xi_j}$.

Lema 3. *Se tiene:*

$$\frac{\det M_L}{\Delta x \Delta \xi} = \det M_H + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta \xi),$$

donde M_L es el bloque de la matriz de Lagrange correspondiente a las FBR con centros ξ_j y $\xi_j + \Delta \xi$, y datos de interpolación x_k y $x_k + \Delta x$, es decir:

$$M_L = \begin{bmatrix} \varphi(|x_k - \xi_j|) & \varphi(|x_k - (\xi_j + \Delta \xi)|) \\ \varphi(|(x_k + \Delta x) - \xi_j|) & \varphi(|(x_k + \Delta x) - (\xi_j + \Delta \xi)|) \end{bmatrix}$$

y M_H el bloque asociado a Hermite:

$$M_H = \begin{bmatrix} \varphi(|x_k - \xi_j|) & -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|) \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x_k - \xi_j|) & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|) \end{bmatrix}$$

Prueba.

Utilizando (2.18) para modificar la segunda fila de M_L , y luego restando la primera fila de la segunda, se obtiene:

$$\det M_L = \Delta x \begin{vmatrix} \varphi(|x_k - \xi_j|) & \varphi(|x_k - (\xi_j + \Delta\xi)|) \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x_k - \xi_j|) + \mathcal{O}(\Delta x) & \frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x_k - (\xi_j + \Delta\xi)|) + \mathcal{O}(\Delta x) \end{vmatrix}$$

Esta técnica es comúnmente utilizada cuando se analizan las propiedades de la matriz de interpolación de Hermite, vea [9]. Repitiendo este proceso con (2.19) y la segunda columna de M_L , se sigue:

$$\det M_L = \Delta x \Delta \xi \times \begin{vmatrix} \varphi(|x_k - \xi_j|) & -\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|) + \mathcal{O}(\Delta \xi) \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(|x_k - \xi_j|) + \mathcal{O}(\Delta x) & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi(|x_k - \xi_j|) + \mathcal{O}(\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta \xi) \end{vmatrix}$$

Obteniéndose el resultado esperado.

Ejemplo 7. Interpolación de Hermite:

Sea $\{\vec{x}_k, f(\vec{x}_k)\}_{k=1}^n$ y $\{\vec{x}_k, \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_k)\}_{k=1}^N$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, además:

$$\lambda_k = \begin{cases} \delta_{\vec{x}_k}, & k = 1, \dots, n, \\ \delta_{\vec{x}_k} \circ \frac{\partial}{\partial x}, & k = n+1, \dots, N. \end{cases}$$

Luego, el problema de interpolación de Hermite en varias variables utilizando funciones de base radial con precisión polinomial se formula como sigue:

$$\begin{aligned} P_f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^N c_k \lambda_k^\xi \varphi(\|\vec{x} - \vec{\xi}\|) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k \varphi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \sum_{k=n+1}^N c_k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \sum_{j=1}^M d_j p_j(\vec{x}). \end{aligned}$$

donde φ es cualquiera de las FBR mencionadas anteriormente y p_1, \dots, p_M una base de polinomios que cumple con las condiciones de interpolación.

Adicionalmente, para darle consistencia al sistema, se agrega la condición $\sum_{i=1}^N c_i p_j(\vec{x}_i) + \sum_{i=n+1}^N c_i \frac{\partial}{\partial x} p_j = 0$, con $k = 1, \dots, M$. Y se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} R & R' & P \\ (R')^T & R'' & P' \\ P^T & (P')^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ df \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

con:

$$\begin{aligned} R_{kj} &= \varphi(\|\vec{x}_k - \vec{\xi}_j\|), & k, j &= 1, \dots, n. \\ R'_{kj} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\|\vec{x}_k - \vec{\xi}_j\|) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\|\vec{x}_k - \vec{\xi}_j\|), & k &= 1, \dots, n, j = n+1, \dots, N. \\ P_{kj} &= p_j(\vec{x}_k), & k &= 1, \dots, N, j = 1, \dots, q. \\ R''_{kj} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\|\vec{x}_k - \vec{\xi}_j\|), & k, j &= n+1, \dots, N. \\ P_{kj} &= \frac{\partial p_j}{\partial x}(\vec{x}_k), & k &= 1, \dots, N, j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

y las condiciones de interpolación:

$$\begin{aligned} f &= P_f(\vec{x}_k) = f(x_k), & k &= 1, \dots, N. \\ df &= \frac{\partial P_f}{\partial x}(\vec{x}_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_k), & k &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Interpolación Conservativa Basada en Funciones de Base Radial 2D

3.1. Introducción

El ejemplo 7 de la interpolación de Hermite junto a la condición (1.5), serán la base para la realización del presente capítulo y concluir con la formulación del problema a resolver numéricamente; tomando dos coordenadas se hace la distinción sobre la región, entre nodos interiores y nodos de frontera, para así obligar la condición de conservación sobre éstos últimos. Finalmente es presentada una versión matricial del sistema de ecuaciones obtenido, estudiando por separado cada submatriz.

3.2. Interpolación de Hermite Conservativa

Se propone un problema de interpolación que busca aproximar las derivadas de la velocidad en términos de un campo de velocidades, u_1 y u_2 . Se utilizan N nodos en total, los primeros n nodos se toman en el interior de la región, y sobre ellos se impone la condición de conservación (1.5), y el resto, $N - (n + 1)$ nodos, se toman en la frontera, éstos tendrán un valor específico del campo de velocidades. Sean:

$$u_1(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^1 \phi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) - \sum_{k=n+1}^N \beta_k \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + P_2^1(\vec{x}), \quad (3.1)$$

$$u_2(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \phi(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) - \sum_{k=n+1}^N \beta_k \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + P_2^2(\vec{x}), \quad (3.2)$$

las interpolaciones de Hermite para $\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde ϕ es la FBR multicuádrica y $\{\vec{x}_k, f(\vec{x}_k)\}_{k=1}^n$ los nodos internos sobre la región, $\{\vec{x}_k, \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_k)\}_{k=n+1}^N$ los nodos en la frontera sobre esta misma región. Con $\vec{\xi}_k$ nuevamente los centros, $k = 1, \dots, N$. $P_2^j = \alpha_{n+1}^j + \alpha_{n+2}^j x + \alpha_{n+3}^j y + \alpha_{n+4}^j x^2 + \alpha_{n+5}^j xy + \alpha_{n+6}^j y^2$, $j = 1, 2$ los polinomios dados.

Sustituyendo (3.1) y (3.2) en la condición de conservación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial u_2}{\partial y}(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) - \sum_{k=n+1}^N \beta_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \xi}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \frac{\partial}{\partial x} P_2^1(\vec{x}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) - \sum_{k=n+1}^N \beta_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial \xi_2}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \frac{\partial}{\partial y} P_2^2(\vec{x}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agrupando y considerando la derivada interna, $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial \xi_2}$, se sigue:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \sum_{k=n+1}^N \beta_k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(\|\vec{x} - \vec{\xi}_k\|) \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} P_2^1(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial y} P_2^2(\vec{x}) = 0 \end{aligned}$$

Adicionalmente, se agregan las siguientes condiciones para $P_2^1(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l x^k + \sum_{k=n+1}^N \beta_k &= 0, \\
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l y^k &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l (x^k)^2 + \sum_{k=n+1}^N 2\beta_k x^k &= 0, \\
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l (y^k)^2 &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l x^k y^k + \sum_{k=n+1}^N \beta_k y^k &= 0.
\end{aligned}$$

Igualmente, se agregan condiciones para $P_2^2(\vec{x})$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l y^k + \sum_{k=n+1}^N \beta_k &= 0, \\
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l x^k &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l x^k y^k + \sum_{k=n+1}^N \beta_k x^k &= 0, \\
\sum_{k=1}^n \alpha_k^l (x^k)^2 &= 0, & \sum_{k=1}^n \alpha_k^l (y^k)^2 + \sum_{k=n+1}^N 2\beta_k y^k &= 0.
\end{aligned}$$

con $l = 1, 2$.

Estas condiciones para ambos polinomios son análogas a las condiciones agregadas a los polinomios de los sistemas presentados anteriormente, además de proveer consistencia al sistema, se incluyen condiciones para las derivadas polinomiales que acompañan a los coeficientes β_k , pues asegura que el problema de interpolación a resolverse sea conservativo. Además, los términos que incluyan los coeficientes β_k , con una apropiada selección de los nodos internos, garantizan la independencia lineal de dichas condiciones.

Matricialmente, estas ecuaciones pueden ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} R & Q & P \\ Q^T & S & L \\ P^T & L^T & O \end{bmatrix} [\alpha] = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para observar con claridad la matriz del sistema (3.3) se expresará cada sub-bloque con detalle a continuación;

El sub-bloque de la matriz de evaluación de datos y centros en la función de base radial:

$$R = \begin{bmatrix} \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_1\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_1\|) & 0 & \cdots & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_1\|) & 0 \\ 0 & \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_1\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_1\|) & \cdots & 0 & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_1\|) \\ \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_2\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_2\|) & 0 & \cdots & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_2\|) & 0 \\ 0 & \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_2\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_2\|) & \cdots & 0 & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_2\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_n\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_n\|) & 0 & \cdots & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_n\|) & 0 \\ 0 & \phi(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_n\|) & 0 & \phi(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_n\|) & \cdots & 0 & \phi(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_n\|) \end{bmatrix}$$

El sub-bloque de evaluación en derivadas parciales:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_1\|) & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_1\|) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_1\|) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_1\|) & \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_1\|) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_1\|) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_n\|) & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_n\|) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x}(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_n\|) \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_1 - \vec{\xi}_n\|) & \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_2 - \vec{\xi}_n\|) & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial y}(\|\vec{x}_n - \vec{\xi}_n\|) \end{bmatrix}$$

El sub-bloque de polinomios:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 & 0 & (x^1)^2 & 0 & x^1 y^1 & 0 & (y^1)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^1 & 0 & y^1 & 0 & (x^1)^2 & 0 & x^1 y^1 & 0 & (y^1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x^n & 0 & y^n & 0 & (x^n)^2 & 0 & x^n y^n & 0 & (y^n)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^n & 0 & y^n & 0 & (x^n)^2 & 0 & x^n y^n & 0 & (y^n)^2 \end{bmatrix}$$

El sub-bloque de las derivadas de los polinomios:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2x^{n+1} & 0 & y^{n+1} & x^{n+1} & 0 & 2y^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2x^N & 0 & y^N & x^N & 0 & 2y^N \end{bmatrix}$$

El sub-bloque de evaluación en segundas derivadas parciales:

$$S = \begin{bmatrix} (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2})(\| \vec{x}_1 - \vec{\xi}_{n+1} \|) & \cdots & (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2})(\| \vec{x}_n - \vec{\xi}_{n+1} \|) \\ \dots & \ddots & \dots \\ (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2})(\| \vec{x}_1 - \vec{\xi}_N \|) & \cdots & (\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2})(\| \vec{x}_n - \vec{\xi}_N \|) \end{bmatrix}$$

Y el bloque de variables $[\alpha]$ dispuesto de la siguiente manera:

$$\alpha = [\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \beta_{n+1}, \dots, \beta_N, \alpha_{n+1}^1, \alpha_{n+1}^2, \dots, \alpha_{n+6}^1, \alpha_{n+6}^2]^T.$$

La demostración de que la matriz (3.3) es no-singular es extensa y se escapa de los límites de comprensión de este trabajo, nuevamente en [17] puede encontrar un amplio estudio del sistema aumentado (3.3); en dicha referencia se unen los resultados de las secciones anteriores 2.4 y 2.5 y para llegar a lo deseado, realizan un estudio de los autovalores asociados al sistema aumentado (3.3). Una vez más, proceden a acotar cada uno de estos autovalores por un valor positivo y extienden este resultado para en general, obtener que la matriz es definida positiva y por lo tanto no-singular.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1. Introducción

En el presente capítulo se muestran los resultados numéricos de la resolución del sistema de ecuaciones (3.3) planteado en el capítulo anterior. Se generan datos iniciales equidistantes o aleatorios que son introducidos en funciones de prueba $\vec{h}(x, y)$, cuyas coordenadas cumplan con la condición (1.5), estos vectores iniciales en dos dimensiones se interpolan utilizando el parámetro de forma $\varepsilon = 6$. Se realizan ejemplos sobre cuadrados, círculos y una región irregular; estudiando los errores aproximados sobre dichas regiones.

4.2. Ejemplos sobre Cuadrado con Datos Iniciales Uniformemente Distribuidos

Para estos primeros cuatro ejemplos se toman datos iniciales dentro de un cuadrado uniformemente distribuidos, se consideran 121 datos, 81 puntos en el interior del cuadrado y 40 en su frontera. Las figuras en rojo representan el campo vectorial que se obtiene al evaluar dichos puntos iniciales en la función de prueba, mientras que las figuras en azul representan la solución utilizando la Función de Base Radial Multicuádrada.

Ejemplo 8. En este ejemplo se considera la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$. Puede observarse en la figura 4.1 los datos iniciales evaluados en la función de prueba en rojo, una vez resuelto el problema de interpolación, se generaron más puntos para ser evaluados en la solución, es por ello que en la figura

4.2 pueden verse más vectores en la solución utilizando de FBR en azul, a dichos puntos se les llamó “puntos de evaluación”.

Para constatar que la magnitud del vector también se mantiene luego de interpolar observe la figura 4.3, los puntos evaluados en la solución son los mismos datos iniciales, de manera tal que pueda comprobar que no existe diferencia alguna entre las figuras 4.1 y 4.3.

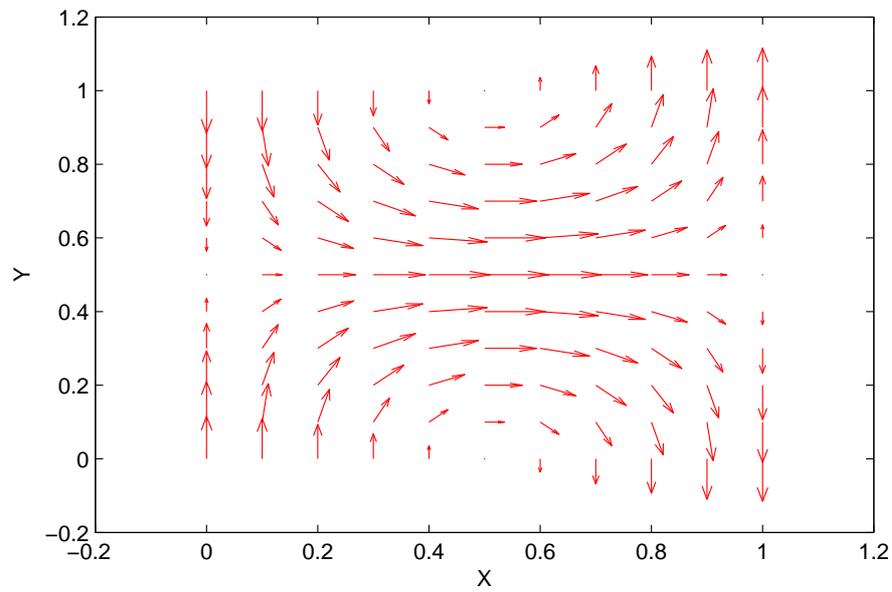


Figura 4.1: Campo Vectorial Analítico

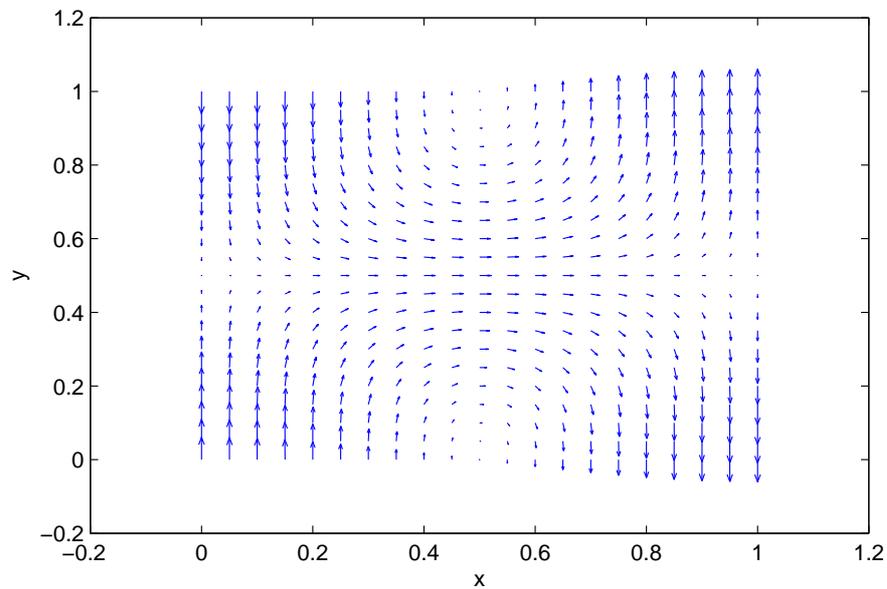


Figura 4.2: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

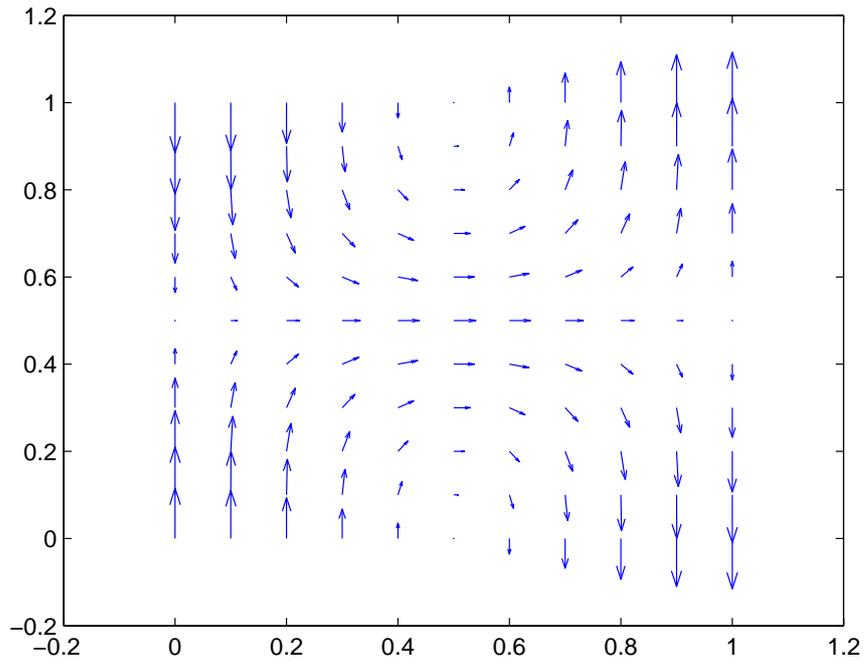


Figura 4.3: Campo Vectorial Calculado con FBR

Ejemplo 9. Se considera la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (x^2, -2xy)$, puede observarse en la figura 4.4 el campo vectorial a interpolar en rojo, y en la figura 4.5 los puntos de evaluación evaluados en la solución en azul. Nuevamente se evalúan los puntos iniciales en la solución para cerciorarse que la magnitud del vector se preserve ya que, por la escala, la figura 4.5 puede resultar engañosa; observe que las figuras 4.4 y 4.6 no difieren.

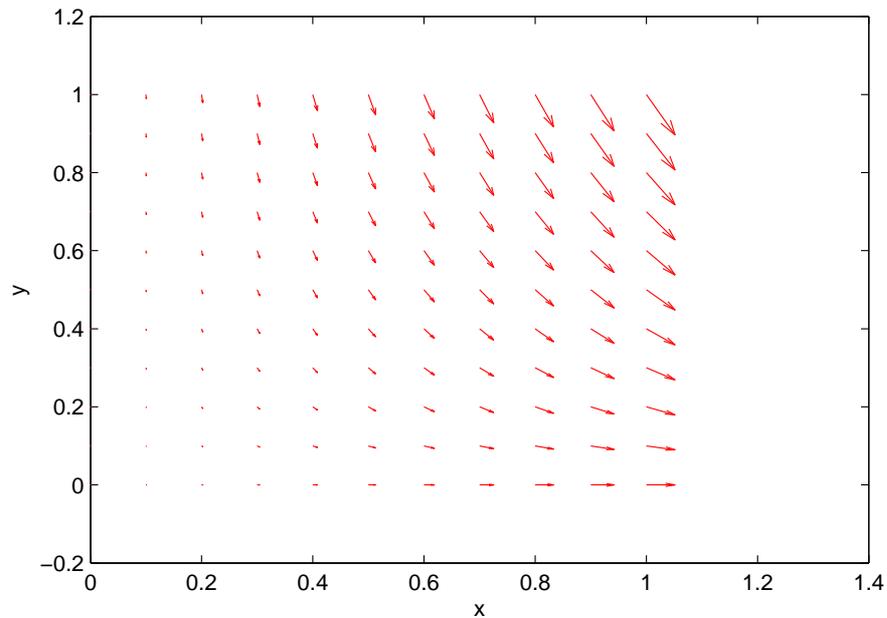


Figura 4.4: Campo Vectorial Analítico

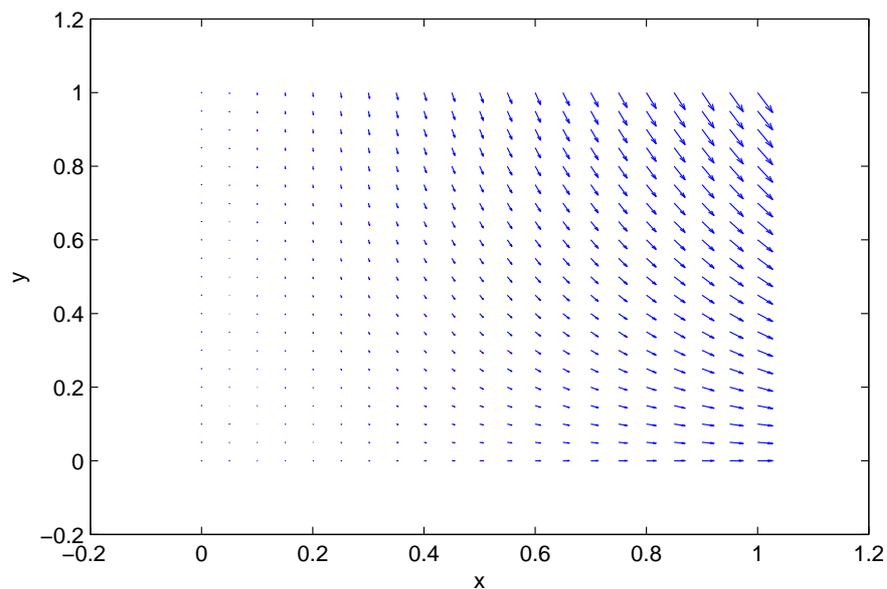


Figura 4.5: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

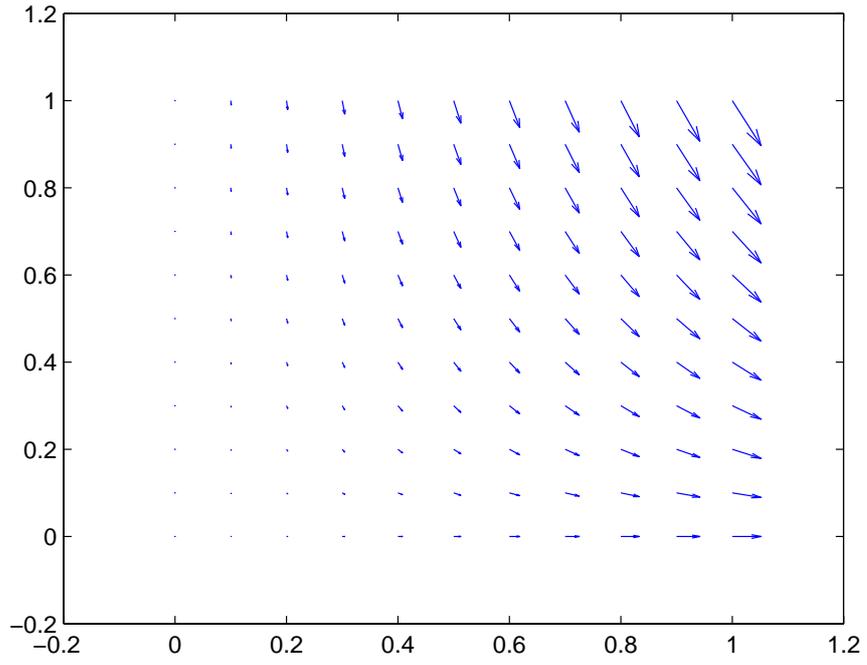


Figura 4.6: Campo Vectorial Calculado con FBR

Ejemplo 10. Para este ejemplo se utilizó la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (x \cos(\pi y), -\frac{\sin(\pi y)}{\pi})$, nuevamente observe en las figura 4.7 y 4.8 los resultados en el mismo orden; y en la figura 4.9, los puntos iniciales evaluados en la solución.

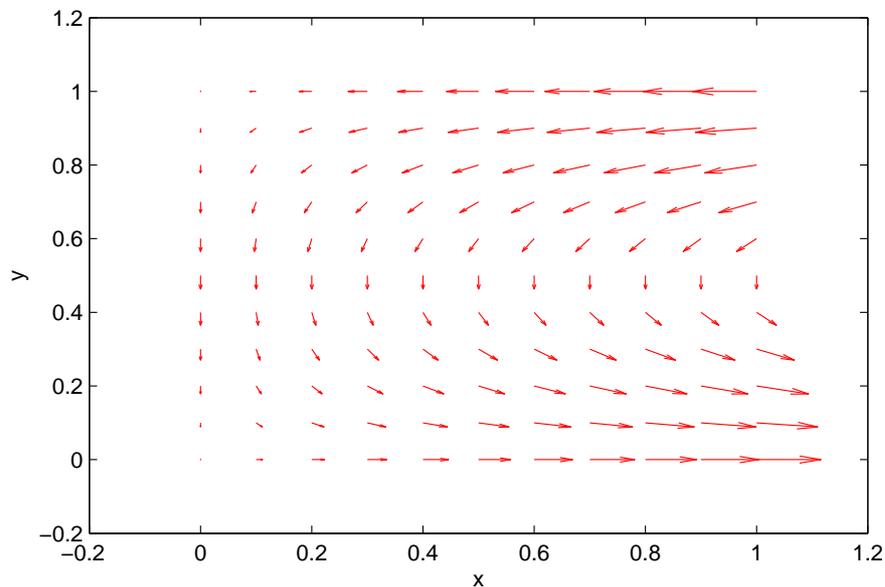


Figura 4.7: Campo Vectorial Analítico

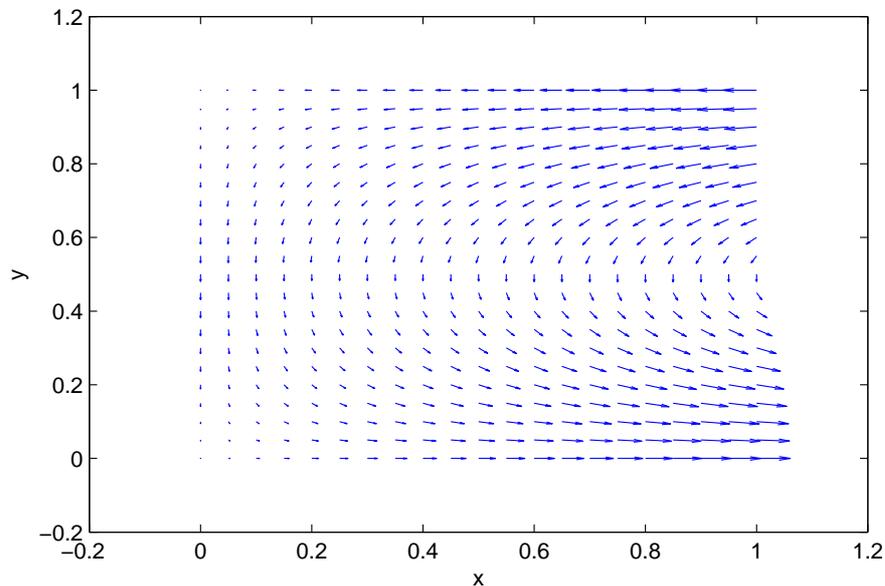


Figura 4.8: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

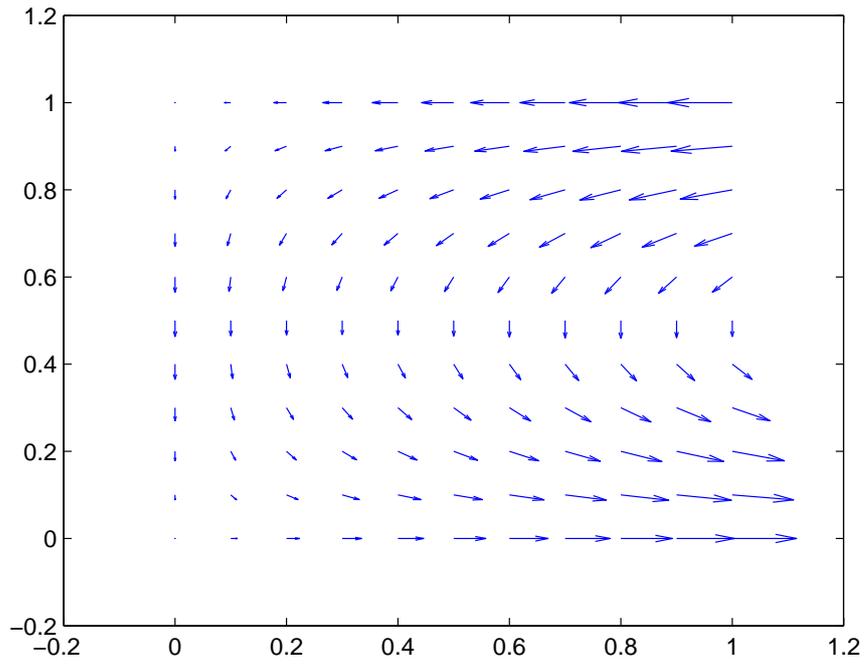


Figura 4.9: Campo Vectorial Calculado con FBR

Ejemplo 11. En este ejemplo se utilizó la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (\sin(2\pi x) \cos(2\pi y), -\sin(2\pi y) \cos(2\pi x))$. En la figura 4.10 puede observar los puntos iniciales evaluados en esta función de prueba en rojo y nuevamente en la figura 4.11 los puntos de evaluación evaluados en la solución en azul. Una vez más, para constatar que la magnitud de los vectores es la misma, observe la figura 4.12.

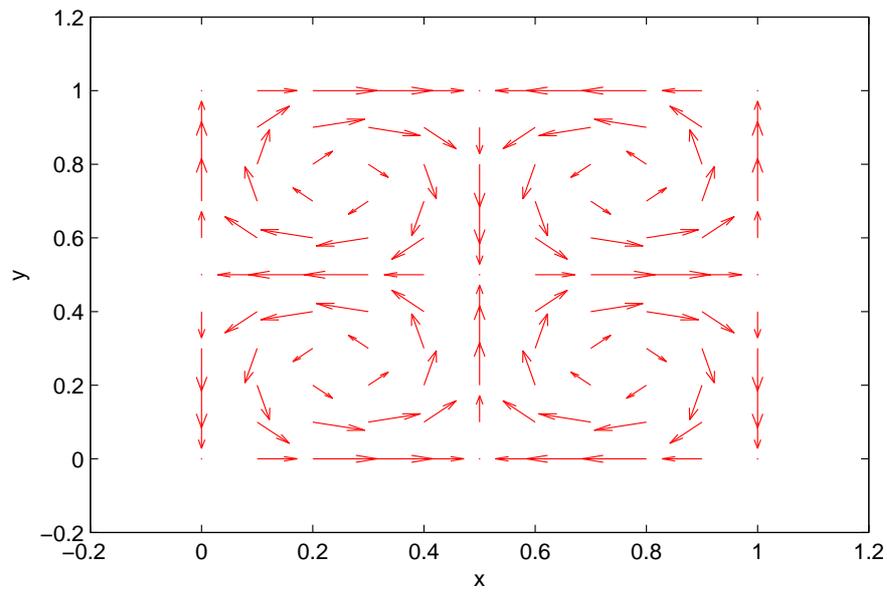


Figura 4.10: Campo Vectorial Analítico

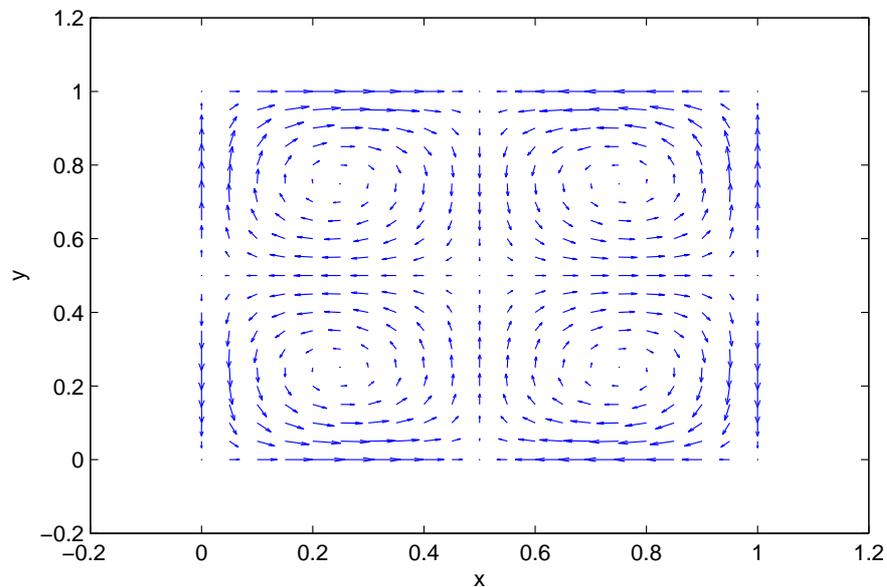


Figura 4.11: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

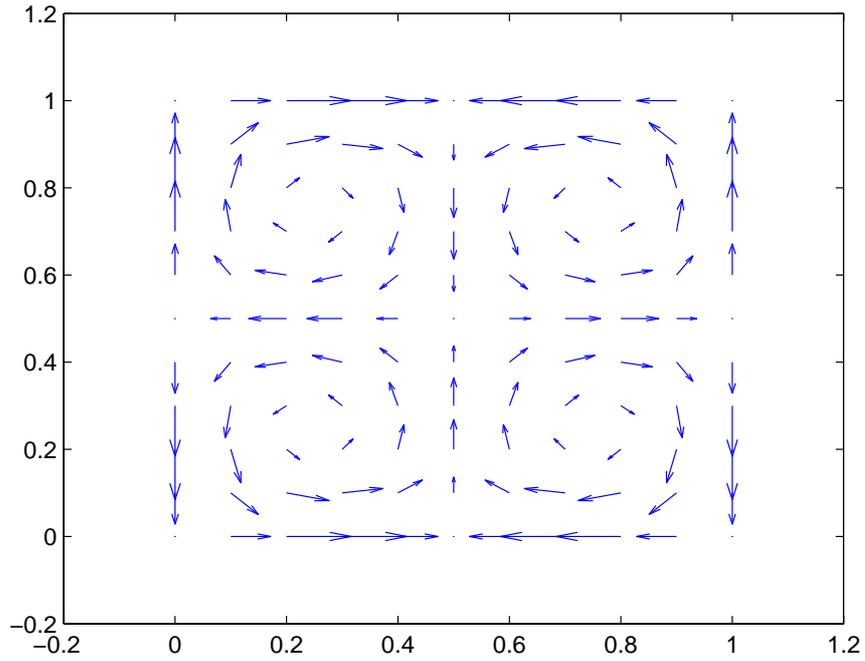


Figura 4.12: Campo Vectorial Calculado con FBR

Para los ejemplos 8-11 se toma esta modesta cantidad de puntos iniciales de manera tal que el lector pueda observar gráficamente, con claridad, el comportamiento de la función de prueba contra la solución encontrada, es posible introducir más datos y se estudiará en breve.

En el cuadro 4.1 se recopilan los errores máximos obtenidos por coordenada de estos cuatro ejemplos; la primera línea de cada ejemplo corresponde a los errores determinados en la coordenada x , mientras que la segunda, corresponde a los errores determinados en la coordenada y . Se calcularon los errores en los puntos iniciales y en los puntos de evaluación.

	Función de prueba	Error Ptos. Iniciales	Error Ptos. Eva.
Ejemplo 8	$\sin(\pi x) \sin(\pi y)$	5.401951 e-003	1.557283 e-002
	$\cos(\pi x) \cos(\pi y)$	8.175221 e-004	3.264939 e-002
Ejemplo 9	x^2	9.677176 e-018	2.822662 e-017
	$-2xy$	6.422778 e-018	5.231649 e-002
Ejemplo 10	$x \cos(\pi y)$	2.685035 e-004	6.525922 e-004
	$-\frac{\sin(\pi y)}{\pi}$	3.148868 e-004	2.264972 e-002
Ejemplo 11	$\sin(2\pi x) \cos(2\pi y)$	3.539499 e-003	7.504563 e-003
	$-\sin(2\pi y) \cos(2\pi x)$	3.539499 e-003	2.988683 e-002

Cuadro 4.1: Errores Cuadrado con Datos Uniformes

Para mantener la relación entre este capítulo de resultados y el primer capítulo, debe tener en cuenta que los datos generados con una función de prueba serían los nodos reales introducidos al programa inicialmente, es decir, si por ejemplo se desea interpolar el flujo sobre un lago que no posea fuentes ni sumideros, debe obtener mediante medidores de corriente distintos vectores que correspondan al flujo dentro y en la frontera del mismo, estos vectores serían introducidos como los nodos iniciales del programa. Haga de cuenta que la función de prueba actúa como la simulación del comportamiento del fluido incompresible del que se habló en el principio del trabajo.

Ahora bien, es natural preguntarse qué sucede con el error a medida que la cantidad de datos iniciales introducidos crezca. En las siguientes cuatro figuras, sujetas a los cuatro ejemplos anteriores, puede examinar el comportamiento del error promediado entre las dos coordenadas con respecto al crecimiento de los datos introducidos.

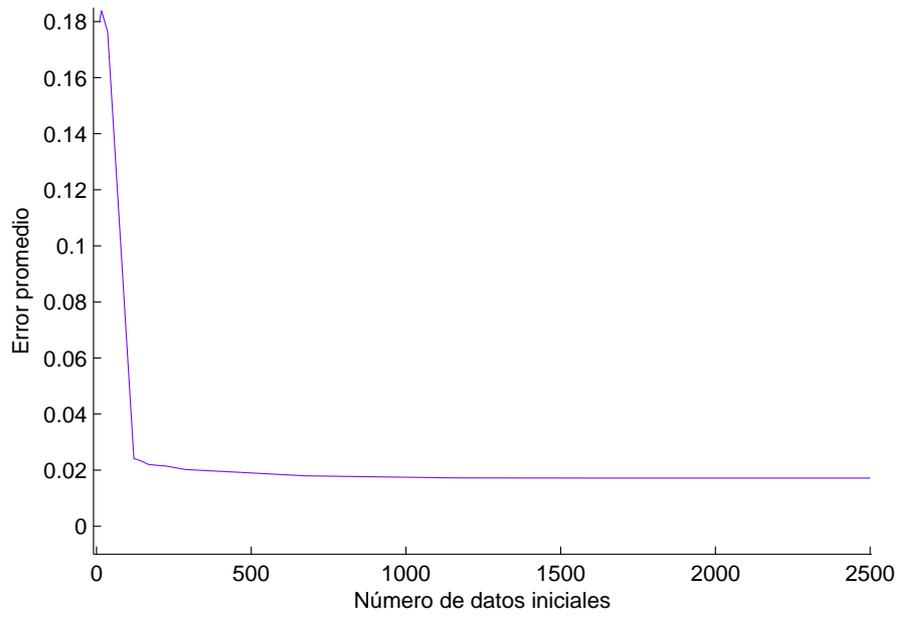


Figura 4.13: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 8)

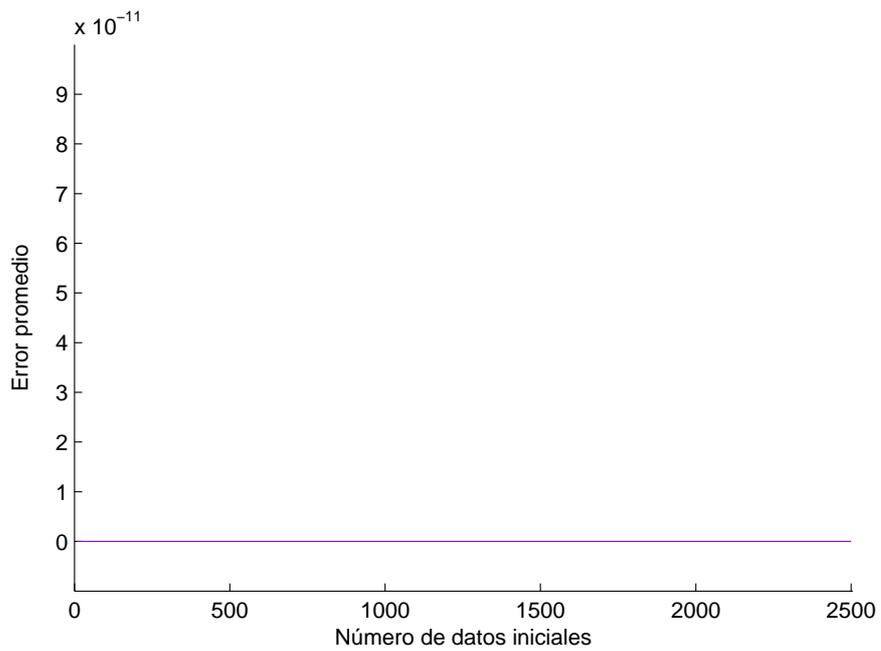


Figura 4.14: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 9)

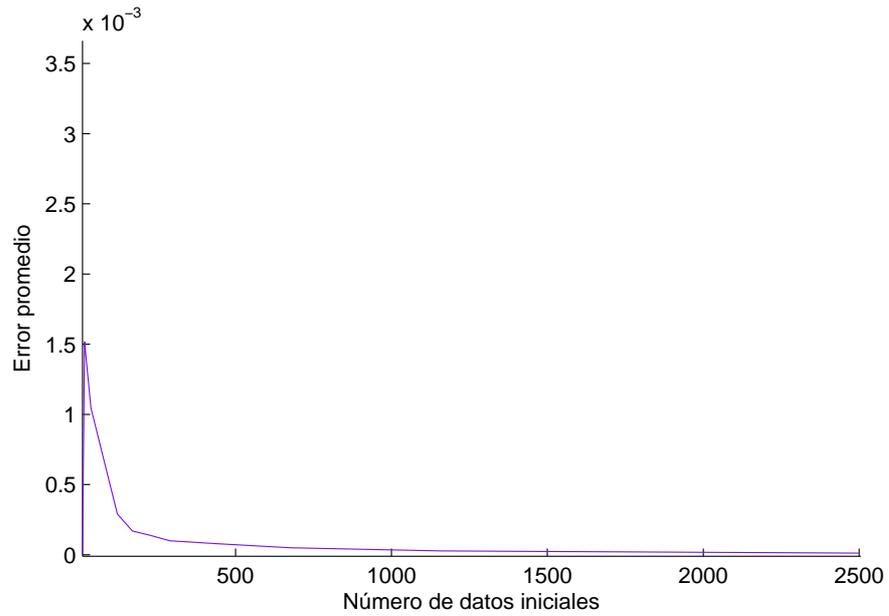


Figura 4.15: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 10)

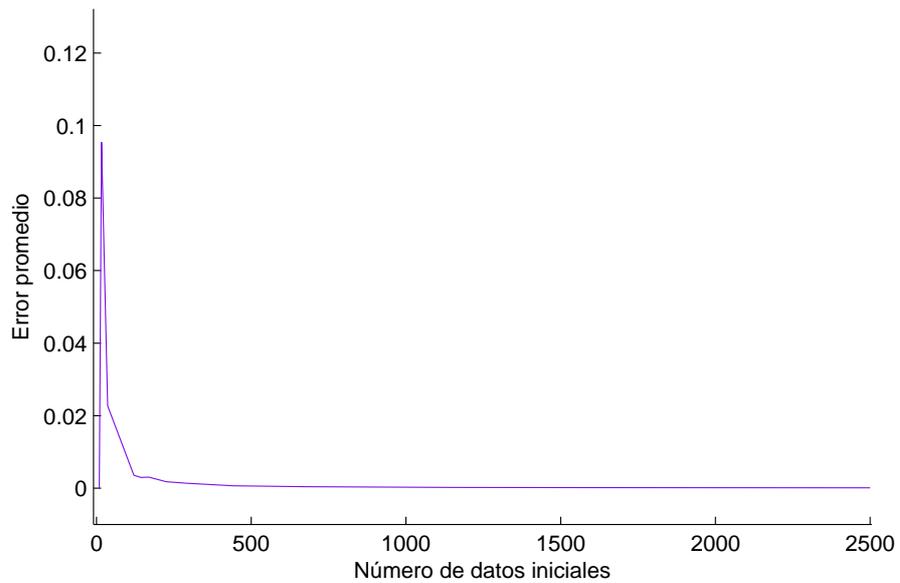


Figura 4.16: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 11)

Puede notar en las figuras 4.13, 4.15 y 4.16 que cuando la cantidad de datos iniciales es baja el error aumenta, mientras que a medida que la cantidad de datos iniciales crece, el error disminuye y se aproxima a cero. En la figura 4.14, el error se mantiene constante y aproximado a cero para cualquier cantidad de datos introducidos, esto puede deberse a que la función de prueba utilizada es un polinomio y por ende los resultados son bastante exactos.

Para pruebas con una cantidad de datos iniciales mayor a 2500 sería necesario el uso de un computador con un mejor procesador, sin embargo, observe que a partir de cierto N el error no presenta gran variación, trayendo como ventaja la posibilidad de reconstruir el campo vectorial con poca o gran cantidad de datos y que arroje resultados con errores relativamente bajos y similares.

4.3. Ejemplos sobre Cuadrado con Datos Iniciales Aleatorios

En los siguientes dos ejemplos se utilizaron las funciones de prueba de los ejemplos 9 y 10, sin embargo de datos iniciales y de evaluación se introdujeron puntos de Halton, los cuales son puntos aleatorios uniformemente distribuidos en el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$. Se generan de la siguiente manera; se toma un número primo, por ejemplo el número 2, y se divide el intervalo $(0, 1)$ en la mitad, luego en cuartos, octavos y así sucesivamente para obtener la sucesión:

$$1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 5/8, 3/8, 7/8, \dots$$

Si se toma el número primo 3, se divide el intervalo $(0, 1)$ en tercios, novenos, veintisieteavos y así sucesivamente, hasta obtener la sucesión:

$$1/3, 2/3, 1/9, 4/9, 7/9, 2/9, 5/9, \dots$$

Luego, se reescriben como pares de puntos y se obtiene el siguiente conjunto en un cuadrado unitario:

$$(1/2, 1/3), (1/4, 2/3), (3/4, 1/9), (1/8, 4/9), (5/8, 7/9), (3/8, 2/9), (7/8, 5/9) \dots$$

En la figura 4.17 puede ver un ejemplo de estos puntos.

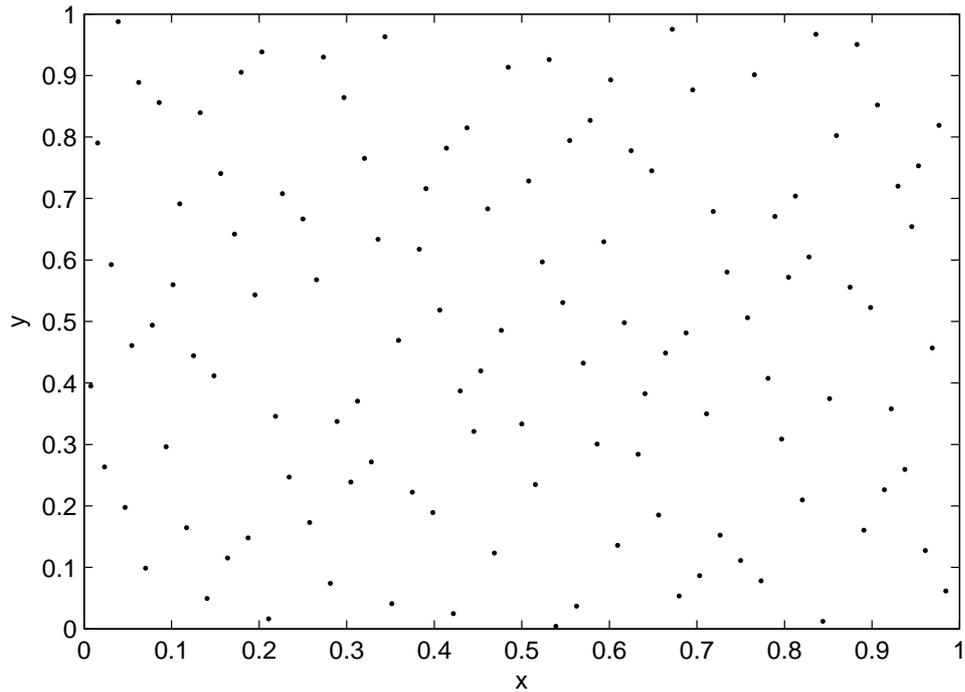


Figura 4.17: Puntos de Halton

Ejemplo 12. Función de prueba $\vec{h} : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (x^2, -2xy)$, para 121 puntos de Halton en el intervalo $(0, 1) \times (0, 1)$, nuevamente puede observarse en la figura 4.18 la función de prueba en rojo y los resultados utilizando la FBR multicuádrada en azul en la figura 4.19. Una vez más, se generan más puntos para evaluar la solución, éstos también son puntos de Halton.

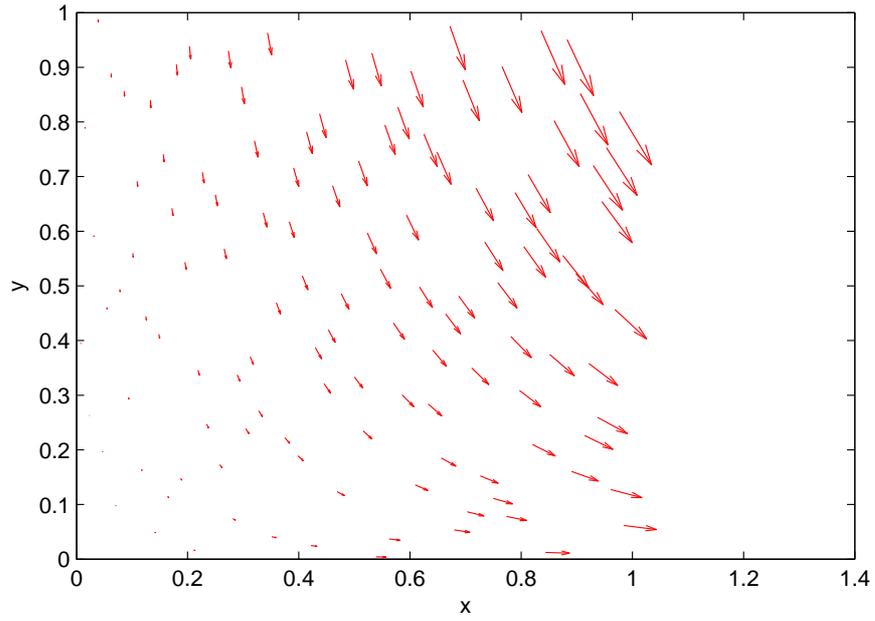


Figura 4.18: Campo Vectorial Analítico

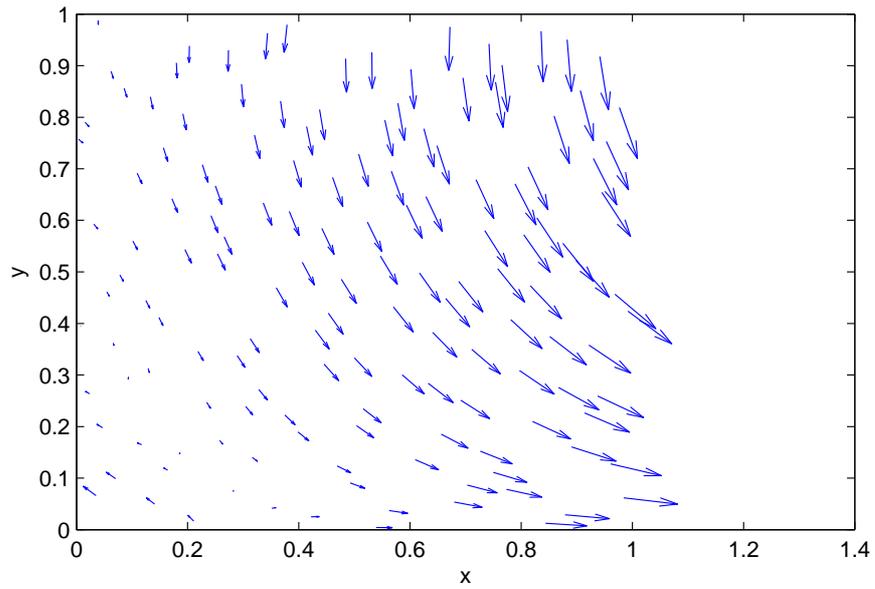


Figura 4.19: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

Ejemplo 13. Función de prueba $\vec{h} : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{h}(x, y) = (\cos(\pi y), -\frac{\sin(\pi y)}{\pi})$, se observan los resultados en la figura 4.20 y 4.21 en el mismo orden que ha sido mostrado hasta ahora.

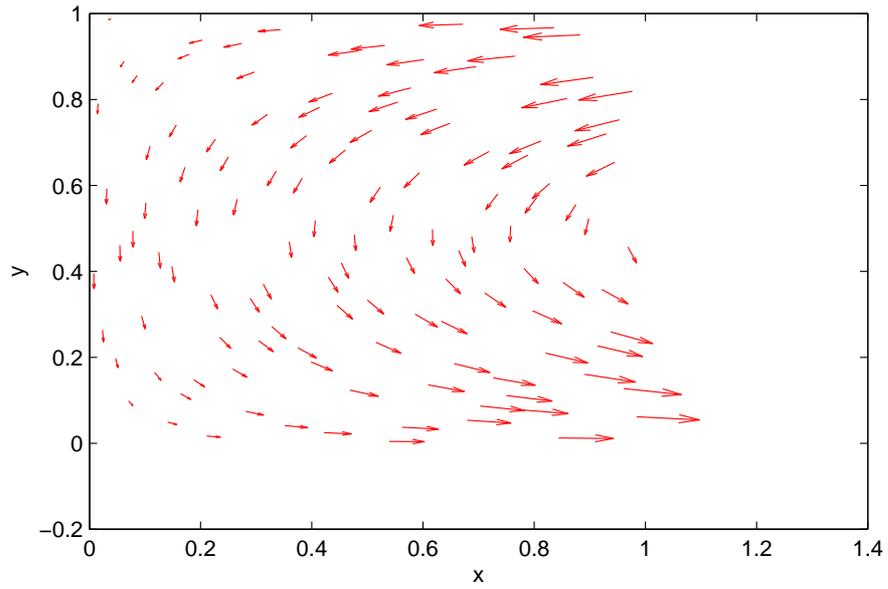


Figura 4.20: Campo Vectorial Analítico

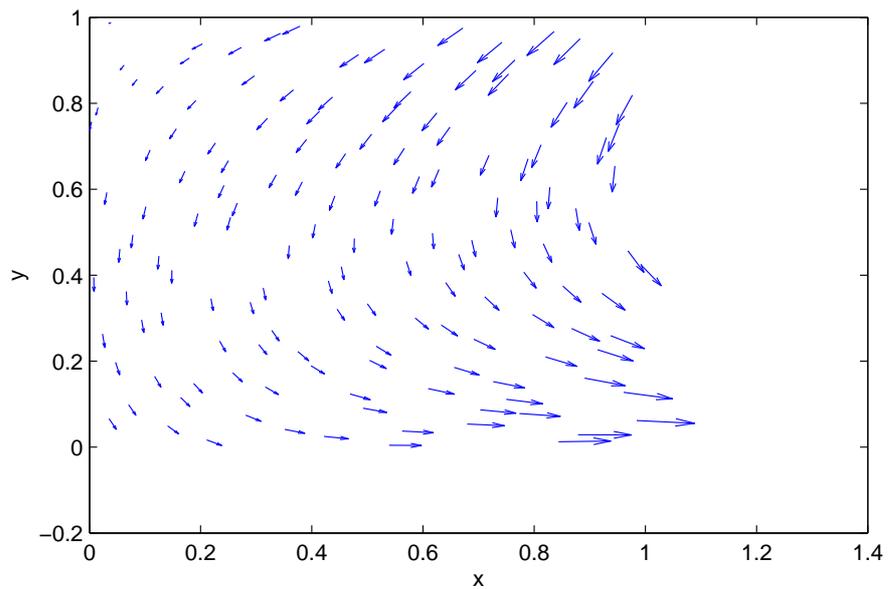


Figura 4.21: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

En estos dos ejemplos no se compara la solución evaluada en los puntos iniciales con el campo vectorial obtenido de la función de prueba para observar la magnitud, puesto que cada vez que se generan puntos de Halton pueden diferir entre ellos, no siempre se obtiene el mismo conjunto, sin embargo, los ejemplos 12 y 13 se presentan con la finalidad de demostrar que la distribución de los datos no tiene que ser ideal para implementar esta interpolación, puede observar que las figuras azules, a pesar de poseer mayor cantidad de vectores, conservan la

	Función de prueba	Error Ptos. Iniciales	Error Ptos. Eva.
Ejemplo 12	x^2	5.804771 e-003	1.613968 e-002
	$-2xy$	5.533776 e-003	7.449340 e-002
Ejemplo 13	$x \cos(\pi y)$	4.578594 e-003	1.345253 e-002
	$-\frac{\sin(\pi y)}{\pi}$	4.220989 e-003	3.573081 e-002

Cuadro 4.2: Errores Cuadrado con Datos Aleatorios

trayectoria de las figuras rojas.

En el cuadro 4.2 puede analizar los errores, por coordenada, de los ejemplos 12 y 13 utilizando puntos de Halton.

Nuevamente se estudia qué sucede cuando el número de datos introducidos crece. Puede observarse en las figuras 4.22 y 4.23 los errores promediados a medida que la cantidad de puntos de Halton introducidos crece. La figura 4.22 corresponde al ejemplo 12, mientras que 4.23 corresponde al ejemplo 13.

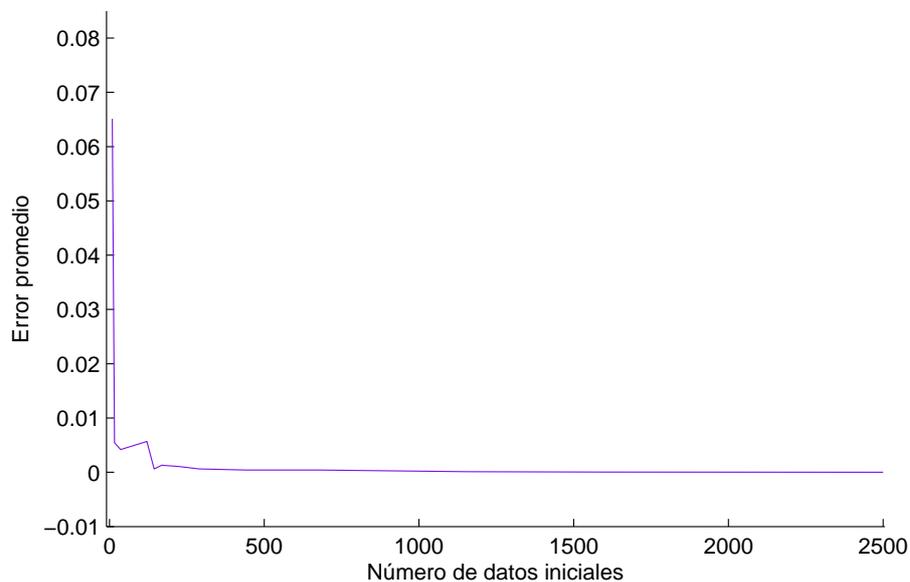


Figura 4.22: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 12)

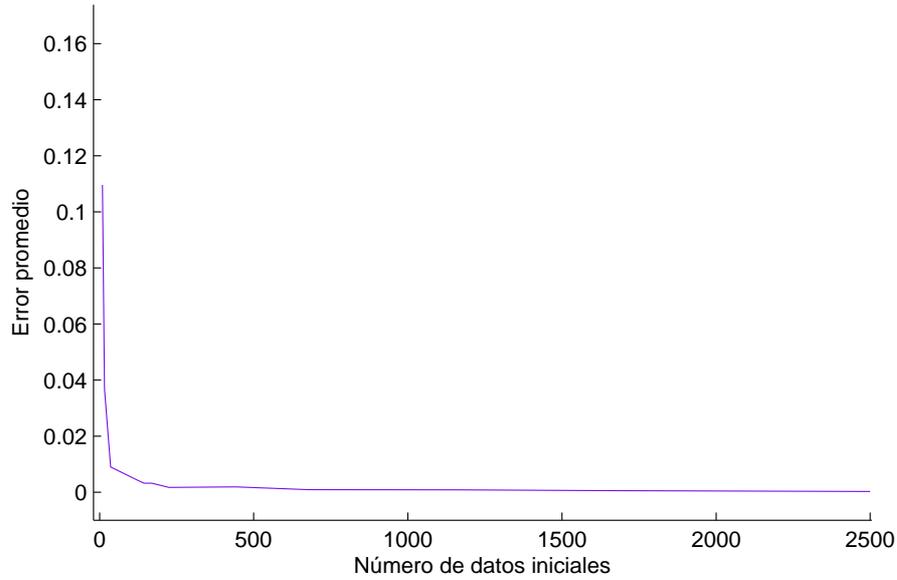


Figura 4.23: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 13)

Observe que otra vez, para estos dos ejemplos, cuando la cantidad de datos introducidos es baja, el error aumenta, mientras que si la cantidad de datos iniciales es más alto, el error disminuye.

4.4. Ejemplos sobre Círculo con Datos Iniciales Aleatorios

Para los siguientes tres ejemplos se generan puntos aleatorios en un círculo unitario de centro $C(0,0)$, en la figura 4.24 puede notar la distribución de los mismos. Nuevamente, se generan datos iniciales y datos para la evaluación de los resultados, tanto en la frontera como en el interior del círculo.

Para los datos iniciales se generaron 44 puntos en la frontera y 100 puntos en el interior, para los datos de evaluación, 100 en la frontera y 125 en el interior del círculo.

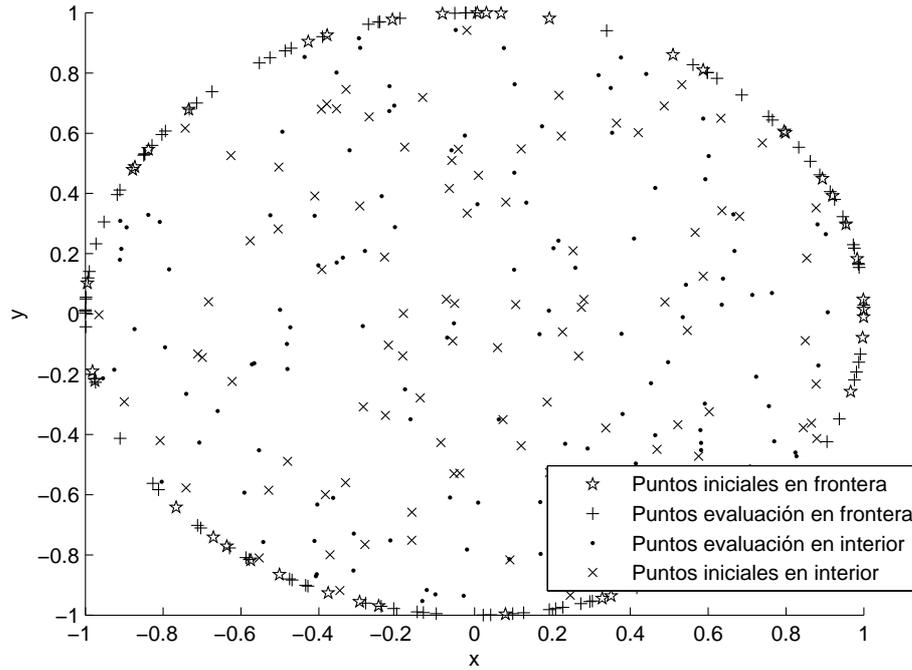


Figura 4.24: Puntos en Región Circular

Ejemplo 14. Se utiliza la función de prueba: $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$,
 $\vec{h}(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$, (misma del ejemplo 8). En la figura 4.25 se observan los datos iniciales evaluados en la función de prueba, para este ejemplo también se genera una mayor cantidad de puntos de evaluación, observe en la figura 4.26 que estos puntos introducidos en la solución cumplen con el patrón que surge de los datos iniciales en la función de prueba.

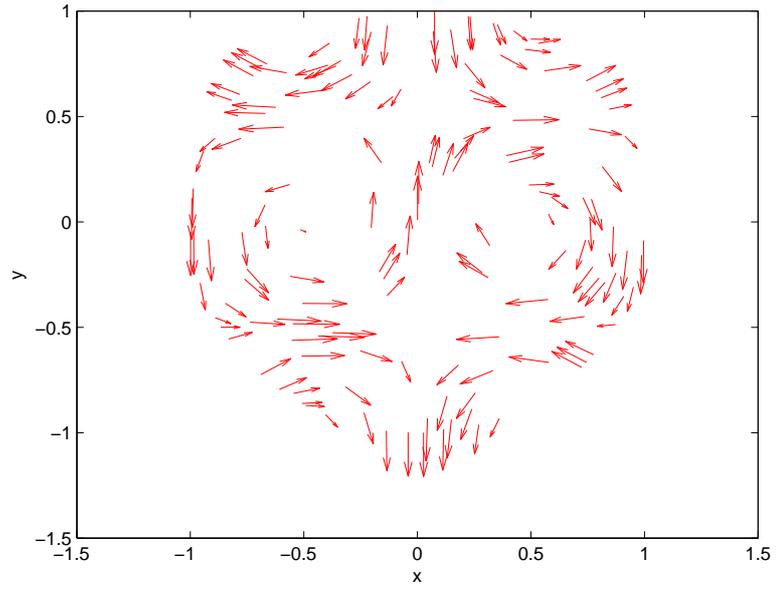


Figura 4.25: Campo Vectorial Analítico

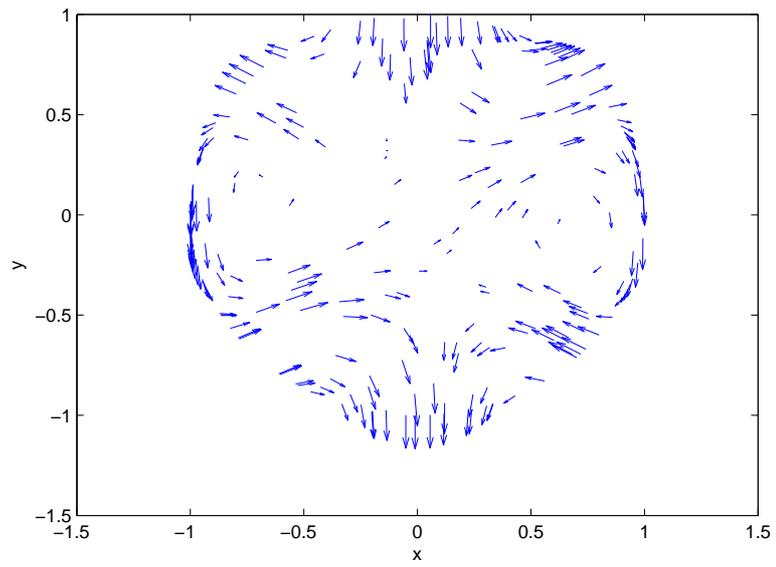


Figura 4.26: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

Ejemplo 15. Se considera la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$, $\vec{h}(x, y) = (x^2, -2xy)$, (misma del ejemplo 9). Nuevamente se puede observar los resultados gráficos en el mismo orden en las figuras 4.27 y 4.28.

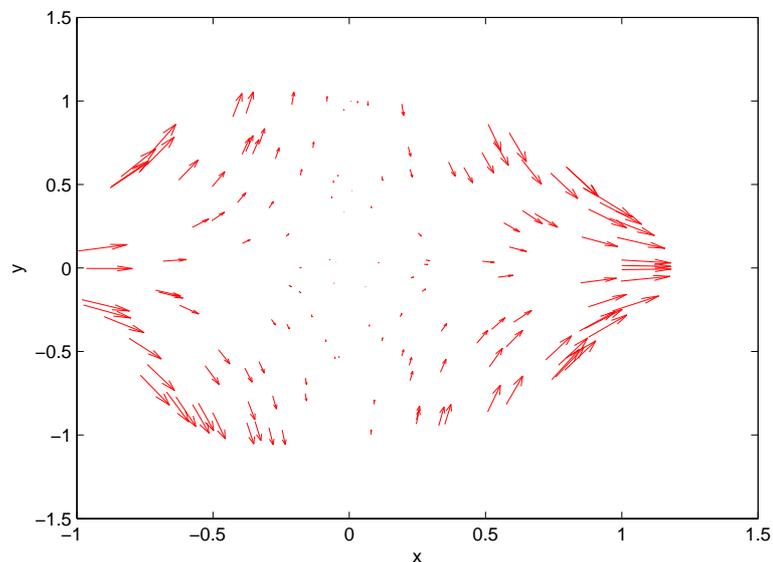


Figura 4.27: Campo Vectorial Analítico

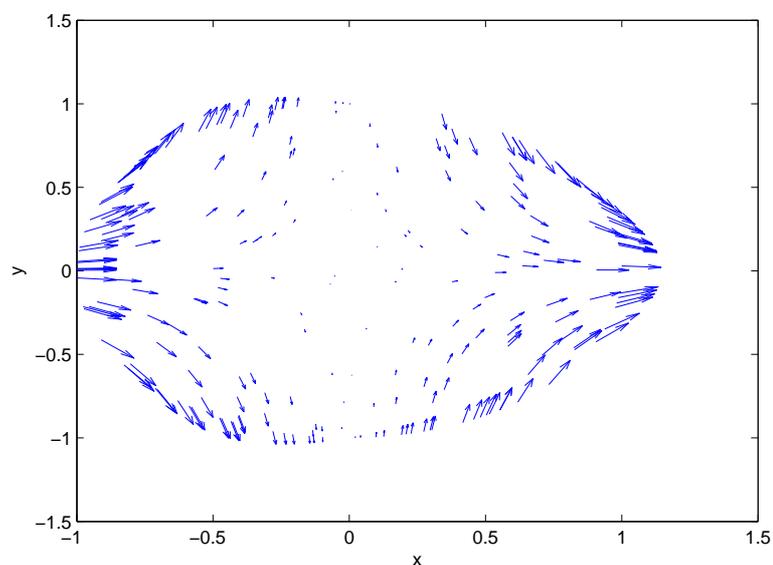


Figura 4.28: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

Ejemplo 16. Para el último ejemplo en un círculo unitario, se utilizó la función de prueba $\vec{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}^1$, $\vec{h}(x, y) = (x \cos(\pi y), -\frac{\sin(\pi y)}{\pi})$, (misma del ejemplo 10). Pueden observarse los resultados en la figura 4.29 y 4.30.

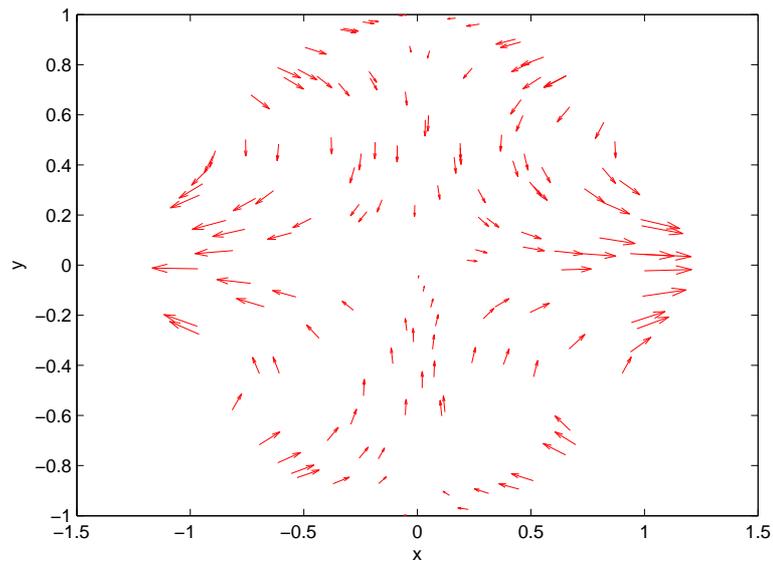


Figura 4.29: Campo Vectorial Analítico

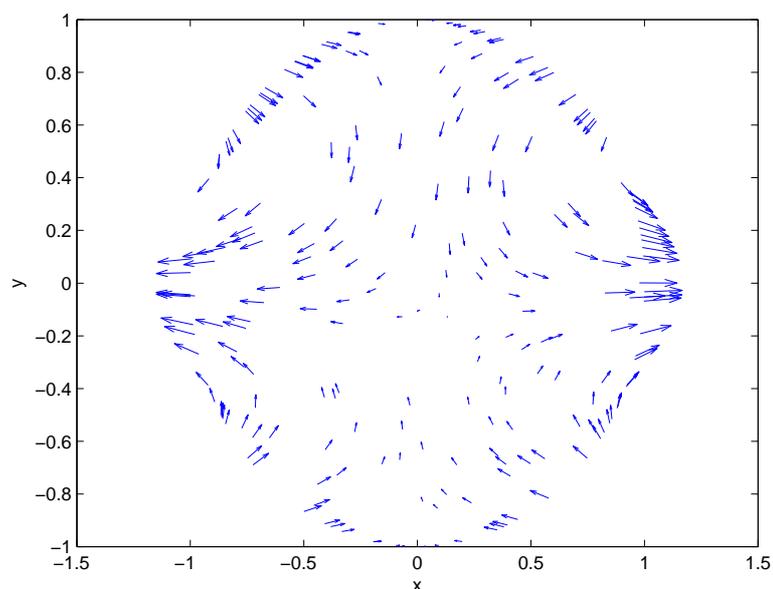


Figura 4.30: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

Para estos tres ejemplos en un círculo unitario no se verifica la magnitud del vector, ya que por la forma aleatoria en la que se generan los puntos ocurre algo parecido a los ejemplos 12 y 13; es difícil que los datos iniciales y los de evaluación coincidan así se especifique reproducir la misma cantidad, es decir, observe que en las figuras 4.25, 4.27 y 4.29 (Campo Vectorial Analítico) los vectores no coinciden en posición con los resultados de las figuras 4.26, 4.28 y 4.30 respectivamente, sólo coincide la forma o trayectoria que sugiere la función

	Función de prueba	Error Ptos. Iniciales	Error Ptos. Eva.
Ejemplo 14	$\sin(\pi x) \sin(\pi y)$	5.341532 e-001	1.220573 e-002
	$\cos(\pi x) \cos(\pi y)$	8.226911 e-001	4.591305 e-002
Ejemplo 15	x^2	1.432014 e-014	3.934932 e-016
	$-2xy$	8.548717 e-015	4.847577 e-002
Ejemplo 16	$x \cos(\pi y)$	1.083603 e-001	2.378256 e-003
	$-\frac{\sin(\pi y)}{\pi}$	6.159616 e-002	3.025020 e-002

Cuadro 4.3: Errores Círculo con Datos Aleatorios

de prueba; esto se debe a que si observa la figura 4.24, los puntos iniciales y los puntos de evaluación raramente coinciden, aún cuando se reproduzca igual cantidad de datos iniciales y de evaluación, mientras que en los ejemplos 8-11 pueden generarse los puntos de manera tal que coincidan los iniciales con los de evaluación.

Es importante discutir que para estos tres ejemplos la colocación de los puntos es primordial para la obtención de una respuesta exacta, después de una gran cantidad de pruebas numéricas se determinó que si los puntos iniciales se aglomeran en una región particular del círculo, dejando pocos puntos fuera de esta región, la solución encontrada no se asemeja al campo vectorial que surge de la función de prueba; mientras que si dichos datos se colocan con una distribución parecida dentro de la región circular, los resultados obtenidos son bastante precisos y con errores aproximados a cero; lo cual es de alta relevancia, pues proporciona información sobre cómo colocar los puntos iniciales. Basándose en esta consideración, se vuelve a estudiar qué sucede con el error a medida que la cantidad de datos introducidos crece más adelante.

El cuadro 4.3 reúne los resultados numéricos de los tres ejemplos anteriores con datos aleatorios en un círculo, como las pasadas dos tablas, la primera línea de cada ejemplo corresponde a la coordenada en x , mientras que la segunda corresponde a la coordenada en y .

El comportamiento del error de los ejemplos 14, 15 y 16 en un círculo puede observarse en las figuras 4.31, 4.32 y 4.33 respectivamente. Vea que para baja cantidad de números iniciales, entre 0 y 20, el error sube, mientras que a medida que aumenta la cantidad de datos introducidos, el error disminuye notablemente. Una vez más cabe decir que para conjuntos iniciales de cardinalidad mayor a 2500 es necesario un computador de mejor procesador.

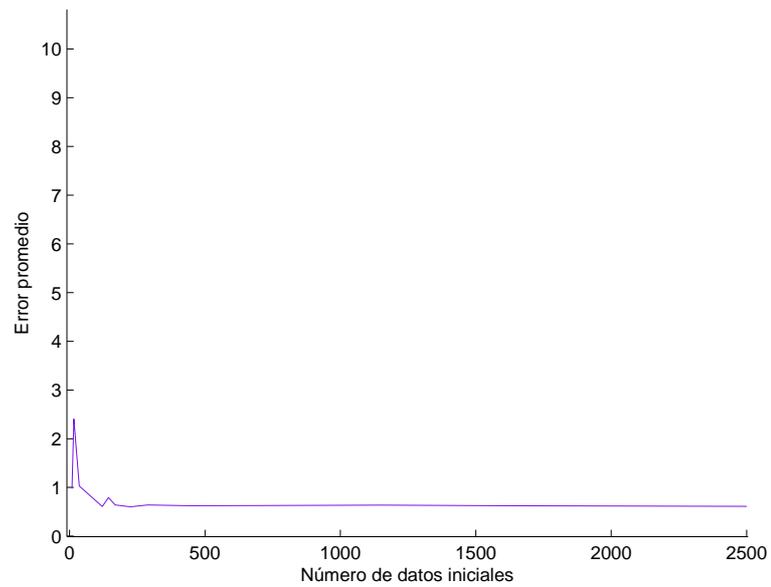


Figura 4.31: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 14)

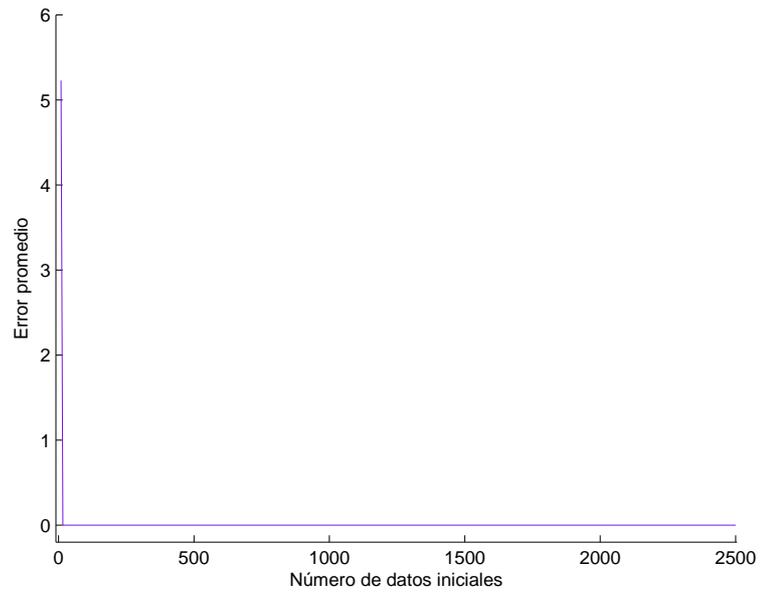


Figura 4.32: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 15)

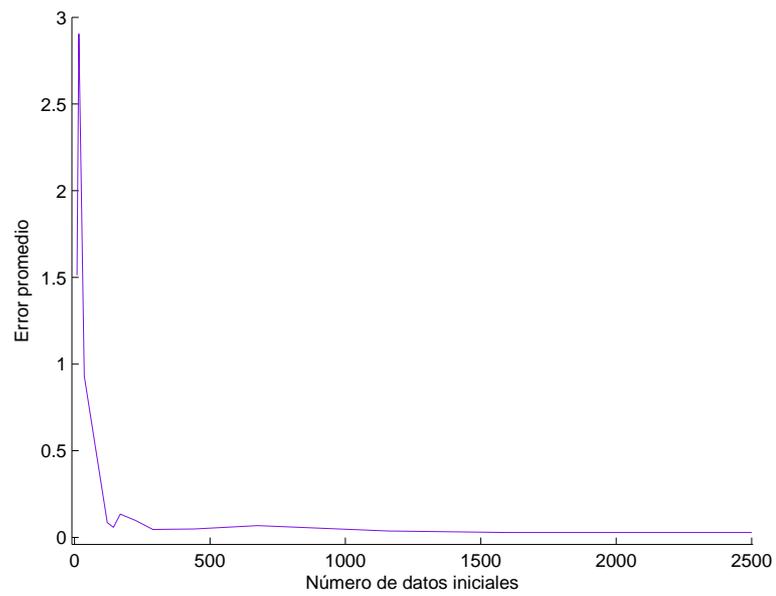


Figura 4.33: Error vs Datos Iniciales (Ejemplo 16)

4.5. Ejemplo sobre una Región Irregular con Datos Iniciales Aleatorios

Ejemplo 17. Se estudiará un último ejemplo sobre una región irregular, cuya parametrización en coordenadas polares se define como sigue:

$$r(\theta) = 1 + \frac{1}{5} \cos \theta + \frac{3}{20} \sin 4\theta.$$

Para los datos iniciales, se generan 735 puntos distribuidos aleatoriamente sobre la región, 69 sobre su frontera y 666 en su interior. Puede notar en la figura 4.34 la colocación de dichos puntos. Esta vez se consideran los puntos de evaluación iguales a los puntos iniciales.

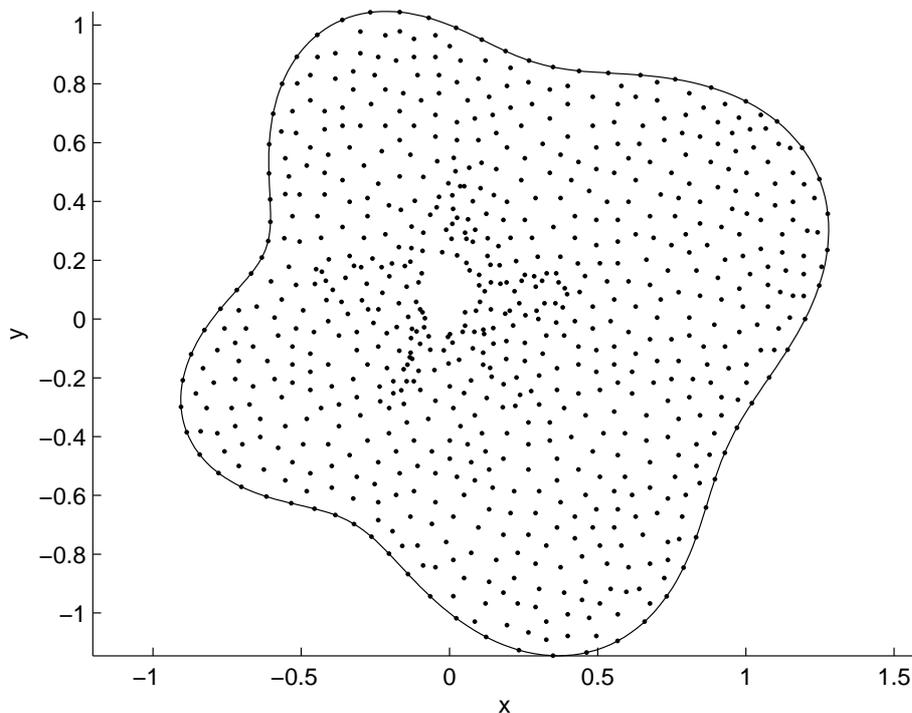


Figura 4.34: Puntos Región Irregular

Una vez interpolados estos datos se obtienen resultados que pueden ser observados en la figura 4.35, la cual representa puntos iniciales evaluados en la función de prueba $\vec{h}(x, y) = (x \cos(\pi y), -\frac{\sin(\pi y)}{\pi})$, y en la figura 4.36 puede observarse la solución utilizando la Función de Base Radial multicuádrica.

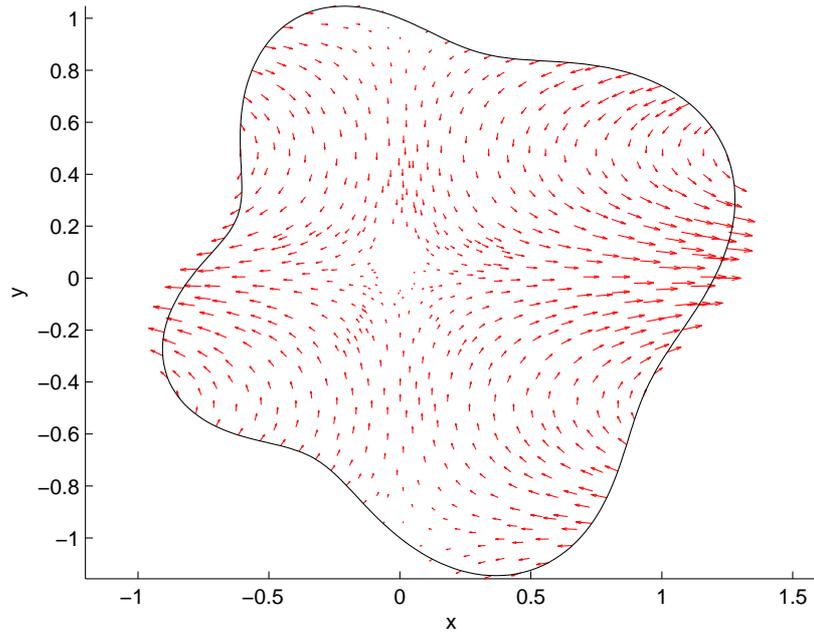


Figura 4.35: Campo Vectorial Analítico

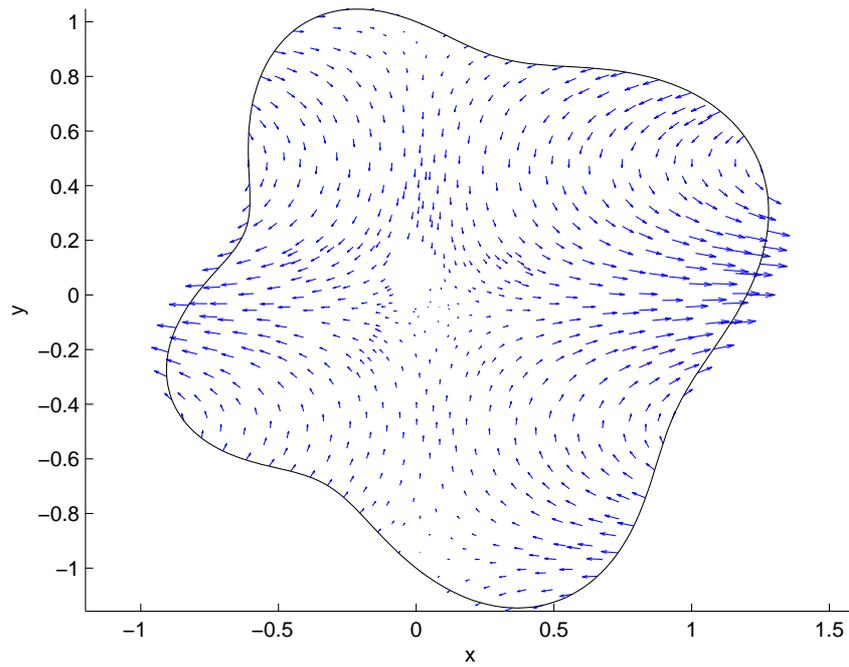


Figura 4.36: Campo Vectorial Calculado con FBR - Puntos Evaluación

Note que en este caso, al considerar los puntos de evaluación los mismos puntos iniciales, la magnitud de los vectores se preserva, además de la solución seguir el patrón de la función de prueba. El error máximo aproximado en la componente x para este ejemplo fue de $7.757284e-$

002, y para la componente y fue 6.835036e-002.

Este ejemplo es de gran importancia para que pueda notar que la interpolación utilizada no está sujeta a la región, es decir, este método no depende de la geometría del problema.

Capítulo 5

Conclusiones

Un método alternativo de interpolación de Hermite que satisface el principio de la conservación de la masa fue utilizado en dos dimensiones, generando un extenso sistema de ecuaciones que, si bien la condición de la matriz del sistema no es baja, se obtiene que la solución posee errores aproximados considerablemente bajos, aún en computadores de mediano rendimiento. De resultados experimentales se concluye que a pesar de que no es necesario una distribución equidistante y uniforme entre los puntos iniciales introducidos, es necesario poseer información sobre toda la región de estudio y no solamente en cierto sector de la misma, ya que pudiera afectar notablemente la exactitud de la respuesta. A los beneficios de utilizar este método se suman que la forma geométrica de la región donde se trabajará no es relevante, basta con parametrizar el dominio de interés; y que los cambios que requiere el programa si necesita aumentar la dimensión son relativamente sencillos de hacer. Además, el estudio del error aproximado contra la cantidad de datos iniciales introducidos, muestra que no presenta considerable variación a partir de cierto N , es decir, es posible reconstruir el campo vectorial con pocos datos con un error bajo. Puede notar que las aplicaciones que surgen de este trabajo en particular son amplias, pues es posible considerar distintos sistemas conservativos de donde tomar el campo inicial, lo que lo hace sumamente útil en caso de estudiar una zona contaminada; podría obtener datos de vectores correspondientes a las velocidades del viento sobre un lago y así determinar la posición de cierto contaminante en un instante de interés. Por otro lado, esta tesis de grado representa un inicio a la gran cantidad de investigaciones que pueden derivar del estudio del método de Funciones de Base Radial, distintas aplicaciones pueden surgir, tales como la reproducción de imágenes en computación gráfica, áreas como economía y afines en donde se desea optimizar diversas funciones, entre

otros. Sin embargo, también nutre a la investigación matemática, pues estudios sobre la matriz de interpolación y sus propiedades aún quedan por realizarse.

Bibliografía

- [1] BUHMANN, M. D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, (2003).
- [2] HARDY, R., *Multiquadric Equations of Topography and Other Regular Surfaces*. Journal of Geophysical Research, (1968).
- [3] FASSHAUER, G. E. *Meshfree Approximation Methods with Matlab*. Vol. 6, (2007).
- [4] SHAMES, I. H. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, (1995).
- [5] ARTEAGA, A. J. *Análisis de Nuevos Esquemas Conservativos para la Ecuación no Estática de Difusión*. Tesis Doctoral, (2012).
- [6] SARRA, S. A. AND KANSA, E. J., *Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Junio (2009).
- [7] FLÓREZ, W. F. AND POWER, H. *DRM Multidomain Mass Conservative Interpolation Approach for the BEM Solution of the Two-Dimensional Navier-Stokes Equations*. Computers & Mathematics with Applications 43/3-5:457-472, (2002).
- [8] KANSA, E. J. *Motivation for Using Radial Basis Functions to Solve PDEs*. Technical Report, (1999).
- [9] HICKERNELL, F. AND HON, Y. C. *Radial Basis Functions Approximation of the Surface Wind Field from Scattered Data*. International Journal of Applied Science and Computers, Vol. 4, No. 3, pp. 221-247, (1998).
- [10] GÁSPÁR, C. *Meshfree Vectorial Interpolation Based on the Generalized Stokes Problem*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering 79, 65-80 (2011).

- [11] FERNÁNDEZ MÉNDEZ, S. *Mesh-Free Methods and Finite Elements: Friend or Foe?*. Ph. D. thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, (2001).
- [12] MICHELLI, C., *Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions*. *Constructive Approximation*, 2:11-22, (1986).
- [13] CHENEY, E.W. AND LIGHT, W.A. *A Course in Approximation Theory*. (1999).
- [14] WENDLAND, H. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, (2005a).
- [15] BOCHNER, S. *Monotone Funktionen, Stieltjes Integrale und Harmonische Analyse*. *Math. Ann.* 108, pp. 378-410, (1933).
- [16] SCHUMAKER, L. L. *Spline Functions: Basic Theory*. John Wiley & Sons (New York), (1981).
- [17] NARCOWICH, F. AND WARD, J. *Generalized Hermite Interpolation Via Matrix-valued Conditionally Positive Definite Functions*. *Mathematics of Computation*, volume 63, number 208 october (1994), pages 661-687.
- [18] NARCOWICH, F. AND WARD, J. *Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-Function Interpolation Matrices*. (1992), 84-109.