



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Análisis y algoritmos para el tratamiento de datos de olas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela por la **Br. López
Marcano Coraiza Katiusca**, para optar al título de
Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. José Rafael León.

Cotutora: Dra. Mairene Colina.

Caracas - Venezuela

28 de abril de 2009

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Análisis y algoritmos para el tratamiento de datos de olas**”, presentado por la **Br. López Marcano Coraiza Katusca**, titular de la Cédula de Identidad **V-17059619**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. José Rafael León
Tutor

Dra. Mairene Colina
Cotutora

MSc. José Benito Hernández
Jurado

Dedicatoria

A mi madre, Yudith, por darme la vida, por sus sabios consejos, por apoyarme durante todo el camino recorrido, por creer en mí y por siempre acompañarme en todos y cada uno de los momentos más importantes de mi vida.

A mi padre, Gilberto, por enseñarme a ser fuerte, por sus consejos a lo largo de mi vida, los cuales me han servido de mucho y me ayudaron a recorrer este largo camino.

A Libia, por apoyarme siempre, aconsejarme y estar hay justo cuando se le necesita.

A Fran, por quererme como su hija, aconsejarme, apoyarme y confiar en mí.

A mis hermanos, espero servirles de ejemplo para que cada día sean mejores y alcancen todas las metas que se propongan.

A Jhoswell, que ha sido un hombro fuerte donde pude sostenerme muchos años durante mi carrera, ha estado hay en las buenas y en las malas, para hacerme reír, llorar y enseñarme muchas cosas importantes de la vida.

A mi familia, que siempre ha confiado en mí y siempre me alento para llegar a este día.

Agradecimiento

Agradezco primeramente a Dios, por permitirme llegar a este día tan importante para mí.

A mis padres, Yudith y Gilberto, por haberme traído a la vida, apoyarme en todo momento y no desampararme en este largo camino.

A Libia y a Fran por criarme como si fuera su hija, apoyarme siempre y por ser mis amigos ante todo.

A Jhoswell por amarme, ayudarme, apoyarme como lo ha hecho hasta ahora y hacerme sentir tan bien a su lado.

A mis suegros, Flor y Benjamín, por apoyarme, aconsejarme y ayudarme en todo momento y en todo lo que podían.

A mi tutor, el profesor José Rafael León por toda la paciencia que me tuvo y toda la ayuda que me prestó para la feliz culminación de mi trabajo especial de grado.

A Mairene, por ayudarme y estar siempre ahí cuando la necesité.

A Jackelin, gracias por brindarme tu amistad incondicional y estar siempre presente.

A mis compañeros y amigos, Gari Roa, Iván Zea, Mariana García, Alejandro Quintero, Daniella Fuentes, Jesús Materano, Leonardo Prato, Maria Eugenia Cifuentes, Delimar Lozada, Alexandra Niño y Yelitza Rivero, por todos los momentos de risas y llantos compartidos y todas las vivencias de la Universidad.

A los integrantes y exintegrantes del Centro de Estudiantes de Matemáticas, gracias por ayudarme.

A los profesores, Kendy Armas, Elio Méndez, Cristina Balderrama, Jennifer Combariza, Laura Galindo, Tomás Guardia, Ileana Iribarren, Eddy Pariguan, Jesús Gasch, Mary Ana Allen, Manuel Maia, José Luis Sánchez, José Gregorio Mijares, Ricardo Ríos, Francisco Tovar, Juan Guevara, Ramón Bruzual, Marisela Domínguez, les doy las gracias por guiarme, apoyarme, enseñarme y corregir mis errores, les estaré eternamente agradecida, ya que, de todos aprendí un poco.

Por último agradezco a todos aquellos que de una u otra manera me ayudaron y pasaron por mi vida durante mi carrera universitaria.

Gracias a todos.

Indice

Introducción	1
Preliminares	3
1. Las olas y sus fundamentos matemáticos	10
1.1. Anatomía de las olas.	10
1.2. Olas como ondas armónicas progresivas.	11
1.3. Análisis estocástico para la predicción de las características de las olas.	14
1.3.1. Principio del método de predicción.	14
1.3.2. Esquema del enfoque del análisis espectral.	17
1.4. Registro de olas I.	22
1.4.1. Interpretación de los datos obtenidos de las olas en Jeffreys Ledge, NH.	23
1.5. Análisis de los datos obtenidos de las olas en Jeffreys Ledge, NH., utilizando WAFO.	24
1.5.1. Simulación de espectros.	24
1.5.2. Distribución de probabilidad de las características de las olas.	26
1.5.3. Espectro direccional.	27
1.5.4. Funciones aleatorias y modelado de olas.	30
2. Espectro direccional	37
2.1. Espectro direccional de las olas del mar.	37
2.1.1. Relación entre el espectro direccional y la función de covarianza.	38
2.1.2. Estimación de los espectros direccionales de las olas con una boya direccional y con un medidor de dos ejes de la corriente.	40
2.2. Representación del modelo de Longuet-Higgins mediante integrales estocásticas y su relación con el espectro direccional.	43

2.3. Algunos espectros direccionales.	45
2.3.1. El espectro direccional de JONSWAP-Cos2s.	45
2.3.2. El espectro direccional de von Mises-McCornick.	45
2.4. Registro de olas II.	46
2.5. Estimación de espectros direccionales utilizando MATLAB y el principio de medición dado por Longuet-Higgins.	46
Conclusión	53
Apéndice	55
Bibliografía	61

Introducción

El 71 % de la superficie terrestre está cubierta de agua en forma de mares y océanos. La Tierra es el único planeta del sistema solar donde el agua puede existir permanentemente en estado líquido en la superficie. Esta agua ha sido esencial para la vida y ha formado un sistema de circulación y erosión único en el Sistema Solar. Uno de los rasgos que caracterizan a estas aguas es su oleaje constante.

En las olas se transmiten grandes cantidades de energía, que en muchos casos definen la estructura de las playas, ya que, éstas transportan la arena y otros sedimentos en las regiones cercanas; en otros casos, pueden plantear una amenaza significativa para la navegación comercial, la navegación recreativa y las playas públicas.

Es por ello, que el estudio de las olas resulta de gran importancia pues permite, la planificación de zonas costeras, predecir las zonas de impacto en caso de mareas altas, así como predecir las posibles ocurrencias de ciertos fenómenos, además la construcción de plataformas petroleras, muelles, etc.

Como en la mayoría de las infraestructuras costeras, se requieren datos fiables a largo plazo, en las mediciones de las olas para su uso en la planificación, diseño, funcionamiento y proyectos costeros.

El objetivo de este trabajo es analizar datos de olas mediante la implementación de algoritmos los cuales nos permitirán analizar numéricamente el comportamiento de las mismas.

Para lograr el objetivo antes mencionado primeramente se estudiará la anatomía de las olas. Las olas pueden ser vistas como ondas armónicas progresivas, es decir, si suponemos que no podemos comprimir ni rotar el agua, entonces existe una velocidad potencial ϕ que cumple la ecuación de Laplace en la región $-h \leq z \leq \eta$, $-\infty < x < \infty$:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

donde h es la profundidad, z es la línea de agua, η es la elevación de la superficie del agua medida por encima del nivel del agua y x indica que la ola se mueve en la dirección del eje x .

Debido a que las magnitudes individuales y los tiempos de aparición de las olas pueden ser imprevisibles, además que tanto la altura como el período varían aleatoriamente de un ciclo a otro, estos pueden estimarse con técnicas probabilísticas; en este caso se explicará la estimación a través del análisis estocástico. Aquí se obtendrá mediante el teorema de Wiener-Khinchine el *espectro de las olas*.

Posteriormente se realizará un análisis espectral de las olas, utilizando el *Teorema de Bochner* y la *Fórmula de Mehler*, lo cual nos proporcionará la energía emanada por las olas.

Los datos que se utilizarán son de CDIP (*The Coastal Data Information Program*) que es un Programa Costero de Datos e Información de los Estados Unidos. Este programa costero, mide, analiza los archivos, y difunde datos sobre el medio ambiente costero para el uso de ingenieros, planificadores y gestores de la costa, así como científicos y marinos. El CDIP utiliza boyas direccionales de tipo Datawell que miden la temperatura superficial del mar, la dirección y la energía de las olas. Estas boyas hacen la recogida de los datos por segundo, mediante un sensor y en tiempo real.

Los algoritmos para el análisis de éstos datos se realizarán en WAFO (*Wave Analysis for Fatigue and Oceanography*), la cual es una caja de herramientas de MATLAB, construida por la Universidad de Lund en Suecia, que se utiliza para el análisis estadístico, la simulación de olas y cargas aleatorias al azar.

Para los preliminares tendremos las definiciones de procesos estocásticos y procesos gaussianos, la Fórmula de Mehler que nos va a servir para estimar covarianzas, el Teorema de Wiener-Khinchine que es una de las bases para la construcción de los análisis de los datos, el Teorema de Bochner, entre otros.

En el capítulo 1 utilizando WAFO se simularan espectros de frecuencia, se calculará la distribución de probabilidad de las características de las olas, se calculará y graficará el espectro direccional dados la altura significativa y el periodo de los picos, entre otros.

Finalmente en el capítulo 2 se dará un enfoque mucho más profundo sobre el espectro direccional, se calculará teóricamente y se implementará en MATLAB un espectro direccional utilizando el método de Longuet-Higgins.

Preliminares

El objetivo de esta sección es presentar algunas definiciones, fórmulas y teoremas que servirán como herramientas para la comprensión de los siguientes capítulos.

Definición 0.1 Un *proceso estocástico* X a tiempo continuo es una familia

$$(X_t, t \in I) = (X_t(\omega), \omega \in \Omega, I \subseteq \mathbb{R}),$$

de variables aleatorias definidas sobre un espacio Ω , donde I es un intervalo, un conjunto finito o infinito numerable.

Un proceso estocástico es una función de dos variables:

- (1) Para un instante de tiempo t fijo, $X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, es una variable aleatoria.
- (2) Para un ω fijo, $X_t(\omega)$, $t \in I$, es una función del tiempo. Esta función es llamada trayectoria del proceso X .

Definición 0.2 Un proceso estocástico $\{X_t, t \in I\}$ es llamado *gaussiano* si sus distribuciones finito-dimensionales son gaussianas, es decir, si para cada selección de $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ el vector aleatorio $Z = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ tiene distribución normal multivariada. Esto es, existe un vector $\mu_k \in \mathbb{R}^k$ y una matriz definida positiva $\Sigma_k = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ tales que,

$$P[X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_k} \in A_k] = \frac{1}{(2\pi|\Sigma_k|)^{\frac{k}{2}}} \int_{A_1} \dots \int_{A_k} e^{-(x-\mu_k)\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)^t} dx,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\mu_k = (E[X_{t_1}], \dots, E[X_{t_k}])$, $\sigma_{ij} = \Sigma(t_i, t_j) = cov(X_{t_i}, X_{t_j})$, $i, j = 1, \dots, k$.

Entonces, podemos definir un *proceso gaussiano* X como un proceso estocástico que genera muestras en el tiempo, de manera tal, que para cada conjunto finito de índices t_1, \dots, t_k de un conjunto τ , tenemos que, $\vec{X}_{t_1, \dots, t_k} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ es un vector gaussiano, con un vector de medias $(\mu(t_1), \dots, \mu(t_k))$ y matriz de covarianza $\Sigma = (E(X_{t_i} - \mu(t_i))(X_{t_j} - \mu(t_j)))$.

Nótese que un proceso gaussiano está completamente determinado por su vector de medias μ y su covarianza Σ .

Luego, es importante y de gran utilidad encontrar fórmulas que nos permitan estimar de manera sencilla la función de covarianza de este tipo de procesos.

La fórmula clave en este caso es conocida como la **Fórmula de Mehler**,

$$E[H_n(X)H_m(Y)] = \delta_{n,m}n!\rho^n,$$

donde X e Y son variables aleatorias gaussianas y los H_n son los llamados polinomios de Hermite definidos por:

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \right).$$

Los cuales forman una base ortogonal del espacio $L^2(\mathbb{R}, \phi)$, donde ϕ es la medida gaussiana

$$\phi(dx) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Vamos entonces a deducir la ya nombrada **Fórmula de Mehler** para el caso en el cual se tiene un vector $(X, Y) \sim N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, es decir, un vector gaussiano centrado tal que $EX^2 = 1 = EY^2$, $E(XY) = \rho$.

Para simplificar denotemos por $\Sigma(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizando la Transformada de Laplace para $(X, Y) \sim N(0, \Sigma(\rho))$, nos queda:

$$\begin{aligned} E[e^{S_1X+S_2Y}] &= e^{\frac{1}{2}(S_1S_2)\Sigma \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}} = e^{\frac{1}{2}(S_1S_2) \begin{pmatrix} S_1 + \rho S_2 \\ \rho S_1 + S_2 \end{pmatrix}} \\ &= e^{\frac{1}{2}S_1^2 + \rho S_1S_2 + \frac{1}{2}S_2^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$. Luego, multiplicando por $e^{-\frac{S_1^2}{2}} e^{-\frac{S_2^2}{2}}$ a la ecuación (1) y usando la representación en serie de Taylor de la función exponencial, tenemos:

$$\begin{aligned} E\left[e^{S_1X+S_2Y} e^{-\frac{S_1^2}{2}} e^{-\frac{S_2^2}{2}}\right] &= E\left[e^{S_1X - \frac{S_1^2}{2}} e^{S_2Y - \frac{S_2^2}{2}}\right] = e^{\rho S_1S_2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho S_1S_2)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Sabiendo que la función generatriz de los polinomios de Hermite es:

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{H_j(x)}{j!} t^j.$$

Tenemos que (2) queda de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho S_1 S_2)^k}{k!} &= E \left[\sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{H_{j_1}(X)}{j_1!} S_1^{j_1} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{H_{j_2}(Y)}{j_2!} S_2^{j_2} \right] \\ &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} E[H_{j_1}(X)H_{j_2}(Y)] \frac{S_1^{j_1} S_2^{j_2}}{j_1! j_2!}. \end{aligned}$$

Ahora bien $E[H_{j_1}(X)H_{j_2}(Y)] = 0$ si $j_1 \neq j_2$. En el caso en el cual $j_1 = j_2$ se tiene que la igualdad anterior se sigue si para cada j_1 ,

$$E[H_{j_1}(X)H_{j_1}(Y)] \frac{(S_1 S_2)^{j_1}}{j_1! j_1!} = \frac{(\rho S_1 S_2)^{j_1}}{j_1!}.$$

Entonces,

$$E[H_{j_1}(X)H_{j_1}(Y)] = j_1! \rho^{j_1}.$$

Otro resultado importante es el siguiente teorema.

Teorema 0.1 Teorema de Wiener-Khintchine afirma que el poder de la densidad espectral de un proceso aleatorio de amplio sentido estacionario es la transformada de Fourier de la correspondiente función de autocorrelación.

Demostración : Sea $C(t)$ la función de autocorrelación de una función $E(t)$,

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\tau) E(t + \tau) d\tau,$$

y sea $E(\tau)$ la transformada de Fourier de $E(t)$,

$$E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E_v e^{-2\pi i v \tau} dv,$$

tomando la conjugada de $E(\tau)$,

$$\bar{E}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_v e^{2\pi i v \tau} dv,$$

y sustituyendo $\bar{E}(\tau)$ y $E(t + \tau)$ en la función de autocorrelación, tenemos

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\tau) E(t + \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_v e^{2\pi i v \tau} dv \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} E_{v'} e^{-2\pi i v' (t + \tau)} dv' \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_v E_{v'} e^{-2\pi i \tau (v' - v)} e^{-2\pi i v' t} d\tau dv dv' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_v E_{v'} \delta(v' - v) e^{-2\pi i v' t} dv dv' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}_v E_v e^{-2\pi i v t} dv = \int_{-\infty}^{\infty} |E_v|^2 e^{-2\pi i v t} dv = F_v[|E_v|^2](t). \end{aligned}$$

Así, obtenemos que la función de autocorrelación es simplemente la transformada de Fourier F_v de la raíz de E_v y obtenemos el teorema de Wiener-Khintchine. \square

A continuación se dará un ejemplo que será de gran utilidad para calcular la esperanza de variables aleatorias gaussianas con una matriz de covarianza Σ , cuyo resultado será utilizado más adelante para el cálculo de la esperanza de variables aleatorias gaussianas cruzadas en la estimación de la covarianza de un proceso.

Ejemplo 1 Sea $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ una variable aleatoria gaussianas con matriz de covarianza:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & 1 & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & 1 & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos calcular $E(X_1 X_2 X_3 X_4)$.

Sea

$$\hat{\varphi}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + t_4 x_4)} \rho(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

la transformada de Fourier de la densidad gaussiana, siendo $\rho(x_1, x_2, x_3, x_4)$ la densidad gaussiana del vector \vec{X} .

Si calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \hat{\varphi}}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + t_4 x_4)} (ix_1)(ix_2)(ix_3)(ix_4) \rho(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + t_4 x_4)} x_1 x_2 x_3 x_4 \rho(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned}$$

y evaluamos en $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \hat{\varphi}}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4}(0, 0, 0, 0) &= \int_{\mathbb{R}^4} x_1 x_2 x_3 x_4 \rho(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= E(X_1 X_2 X_3 X_4). \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces, podemos calcular la transformada de Fourier de una gaussiana, con vectores de media cero y matriz de covarianza Σ , como:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= e^{-\frac{1}{2}(t_1 t_2 t_3 t_4) \Sigma \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t_1^2 - r_{12}t_1 t_2 - r_{13}t_1 t_3 - r_{14}t_1 t_4 - \frac{1}{2}t_2^2 - r_{23}t_2 t_3 - r_{24}t_2 t_4 - \frac{1}{2}t_3^2 - r_{34}t_3 t_4 - \frac{1}{2}t_4^2}. \end{aligned}$$

Para calcular $E(X_1X_2X_3X_4)$, usamos (3) y tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \hat{\varphi}}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4}(0, 0, 0, 0) &= r_{13}r_{24} + r_{14}r_{23} + r_{12}r_{34} \\ &= E(X_1X_2X_3X_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Definición 0.3 Una función $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice positiva definida si y sólo si para escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r(t_i - t_j) \lambda_i \lambda_j \geq 0.$$

Proposición 0.1 Toda función de covarianza es positiva definida.

Demostración : Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ escalares, entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m r(t_i - t_j) \lambda_i \lambda_j &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m E(x_{t_i} x_{t_j}) \lambda_i \lambda_j \\ &= E \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_{t_i} \sum_{j=1}^m \lambda_j x_{t_j} \right) \\ &= E \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 0.2 Teorema de Bochner: Si r es una función definida positiva en la recta, entonces existe una medida μ positiva, sobre \mathbb{R} , tal que:

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} d\mu(\lambda).$$

Del *Teorema de Bochner* tenemos que:

Observación 0.3.1 (1) La medida μ es positiva, es decir, $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ boreliano.

(2)

$$\mu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\lambda) = r(0) < +\infty.$$

(3) En el caso de procesos μ se llama **medida espectral**.

(4) Si μ tiene densidad f con respecto a la medida de Lebesgue

$$\frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} = f(\lambda),$$

entonces f se llama **densidad espectral o espectro de frecuencias**.

(5)

$$E(x_t^2) = \sigma^2 = r(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda.$$

Los conceptos que siguen serán de utilidad en el capítulo 2, para hallar el espectro direccional de una serie de datos de las olas del mar.

Definición 0.4 Sea Ψ' la **función de covarianza** de un proceso estacionario, si consideramos los espacios X e Y fijos, entonces

$$\Psi'(\tau|X, Y) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \eta(t|x, y)\eta(t + \tau|x + X, y + Y)dt, \quad (5)$$

donde η es la elevación de la superficie del agua.

Esta función puede ser obtenida a partir de los de registros simultáneos de las olas en dos perfiles de las estaciones, cuyas ubicaciones son denotadas por (x, y) y $(x + X, y + Y)$ y donde el tiempo es denotado por t y $(t+\tau)$.

Considerando que la función $\Phi_0(f|X, Y)$ es la transformada de Fourier de Ψ' , tenemos que

$$\Phi_0(f|X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(\tau|X, Y)e^{i2\pi/\tau} d\tau,$$

$$\Psi'(\tau|X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(f|X, Y)e^{i2\pi/\tau} df,$$

donde f es la frecuencia de la ola y Φ_0 está definida para $-\infty < f < \infty$.

Definición 0.5 La función $\Phi_0(f|X, Y)$ es llamada el **espectro cruzado** y es a menudo expresado en términos de sus partes real e imaginaria como:

$$\Phi_0(f|X, Y) = C_0(f|X, Y) - iQ_0(f|X, Y) : -\infty < f < \infty, \quad (6)$$

donde

$$C_0(f|X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(\tau|X, Y)\cos 2\pi f\tau d\tau, \quad (7)$$

$$Q_0(f|X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi'(\tau|X, Y)\sin 2\pi f\tau d\tau, \quad (8)$$

la parte real es generalmente llamada el coespectro y la parte imaginaria es llamada cuadratura del espectro.

Definición 0.6 El *momento espectral* de orden ijk se define como:

$$m_{ijk} = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi u^i v^j \omega^k S(\omega, \Theta) d\Theta d\omega, \quad (9)$$

donde $u = \frac{\omega^2}{g} \cos(\Theta - \Theta_0)$, $v = \frac{\omega^2}{g} \sin(\Theta - \Theta_0)$ y g es la constante gravitacional. Si en la ecuación (9) hacemos $i = j = 0$, entonces

$$m_{00k} = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \omega^k S(\omega, \Theta) d\Theta d\omega,$$

y esto puede ser reescrito como

$$m_{00k} = \int_0^\infty \omega^k S(\omega) d\omega.$$

La ecuación anterior corresponde al momento de orden k de la frecuencia ω , siendo

$$m_k = \int_0^\infty \omega^k S(\omega) d\omega.$$

Por otro lado m_{ij1} y m_{ij2} son denotados por:

$$m'_{ij} = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \omega u^i v^j S(\omega, \Theta) d\Theta d\omega,$$

y

$$m''_{ij} = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \omega^2 u^i v^j S(\omega, \Theta) d\Theta d\omega,$$

respectivamente, las cuales representan las varianzas de las señales de las olas, además de su primera y segunda derivada.

Capítulo 1

Las olas y sus fundamentos matemáticos

1.1. Anatomía de las olas.

Las olas son ondas que se desplazan por la superficie de los mares y océanos, las cuales se ponen en movimiento mediante la acción del viento, éstas son el principal agente de modelado de las costas y están constituidas por:

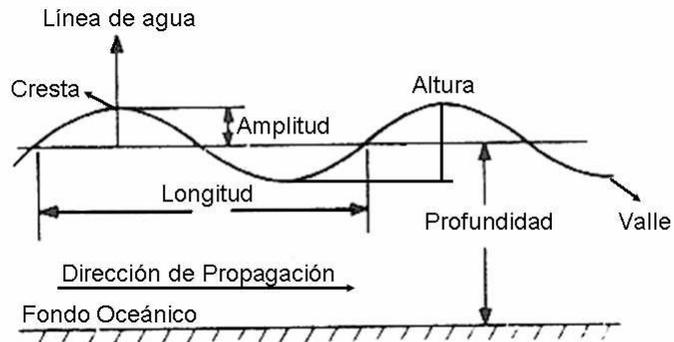


Figura 1.1: Anatomía de las olas.

- (1) *Línea de agua*: es el nivel de la superficie del mar (si está en calma y si es perfectamente plano).
- (2) *Cresta*: es el punto más alto de la ola, por encima de la línea de agua.

- (3) *Valle*: es el punto más bajo de la ola, por debajo de la línea de agua.
- (4) *Altura*: es la distancia vertical entre la cresta y el valle.
- (5) *Longitud*: es la distancia horizontal entre las crestas sucesivas o depresiones.
- (6) *Período*: es el tiempo que tarda una ola completa para pasar un punto en particular.
- (7) *Frecuencia*: es el número de olas que pasan un punto en un período de tiempo particular.
- (8) *Amplitud*: es la mitad de la altura de las olas o la distancia desde la cresta hasta la línea de agua.
- (9) *Profundidad*: es la distancia desde el fondo del océano hasta la línea de agua.
- (10) *Dirección de propagación*: es la dirección en la que una ola viaja.

1.2. Olas como ondas armónicas progresivas.

Como un primer acercamiento de la descripción de las olas se define el sistema de coordenadas como se indica en la Figura 1.2, y se considera una simple onda progresiva armónica la cual se está moviendo en la dirección del eje x y posee una profundidad uniforme h .

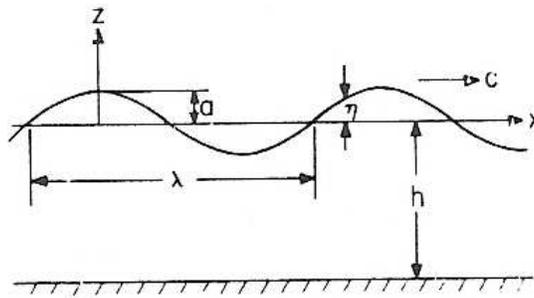


Figura 1.2: Definición progresiva del movimiento de las olas en la dirección del eje x .

Si suponemos que no podemos comprimir ni rotar el agua, entonces existe una velocidad potencial ϕ que cumple la ecuación de Laplace en la región $-h \leq z \leq \eta$, $-\infty < x < \infty$:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.1)$$

donde η es la elevación de la superficie del agua, medida por encima del nivel del agua.

La velocidad potencial ϕ tiene que satisfacer la ecuación (1.1), así como la siguiente condición de frontera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ cuando } z = -h, \quad (1.2)$$

y dos de las siguientes tres condiciones de frontera en la superficie libre:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}, z = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0. \quad (1.5)$$

Suponiendo que ϕ se puede escribir de la forma:

$$\phi = f(z) \text{ sen}(kx - \omega t),$$

la velocidad potencial que satisface las condiciones de frontera (1.2), (1.3), (1.4) y (1.5) es:

$$\phi = \frac{a\omega \cos[hk(z+h)]}{k \text{ sen } kh} \text{ sen}(kx - \omega t),$$

donde a es la amplitud de la ola, k es el número de olas y ω es la frecuencia angular en radianes por segundo.

También denotaremos a λ como la longitud de la ola, que en la Figura 1.2 es igual a 2π .

Si el agua es lo suficientemente profunda, es decir, $h \rightarrow \infty$, calculando el límite en la fórmula anterior, obtenemos el movimiento en la dirección del eje x que viene dado por:

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) = a \cos\left(\frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right). \quad (1.6)$$

Se puede escribir la ecuación (1.6) en una forma más general mediante un sistema de coordenadas fijo (x, y, z) el cual se muestra en la Figura 1.3, donde θ es el ángulo entre los ejes x y x_0 , medido en el sentido contrario a las agujas del reloj, ϵ será la fase de la ola cuando $x = y = t = 0$.

Entonces, el movimiento de la ola con ángulo θ por el eje de las x puede ser escrito en general:

$$\eta(x, y, t) = a \cos\left[\frac{\omega^2}{g}(x \cos \theta + y \text{ sen } \theta) - \omega.t + \epsilon\right]. \quad (1.7)$$

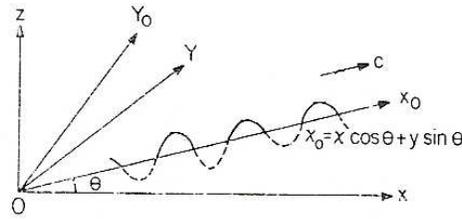


Figura 1.3: Definición progresiva del movimiento de las olas en una dirección arbitraria.

Vamos a considerar las olas generadas por el viento en un punto (x, y) como una superposición lineal de ondas armónicas simples procedentes de diversas direcciones.

Utilizando (1.7), el movimiento puede ser escrito como

$$\eta(x, y, t) = \sum_i a_i \cos \left[\frac{\omega_i^2}{g} (x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) - \omega_i t + \epsilon_i \right],$$

esto es *la onda incidental en el tiempo t* donde se da un número infinito de ondas sinusoidales integradas por componentes de diferentes amplitudes, a_i , procedentes de diferentes direcciones θ_i , con distintas frecuencias ω_i , en este caso, a_i , θ_i y ω_i son variables aleatorias que abarcan los rangos $0 < a_i < \infty$, $0 < \theta_i < 2\pi$ y $0 < \omega_i < \infty$, respectivamente. La fase ϵ_i también es una variable aleatoria distribuida uniformemente a lo largo del rango $-\pi < \epsilon_i < \pi$, y su magnitud depende de la frecuencia ω_i y el ángulo θ_i (Pierson, 1958).

Para cualquier frecuencia e intervalo de dirección, $\Delta\omega\Delta\theta$, el promedio de energía de las olas se convierte en $\frac{1}{2}pg a_i^2$. Ignorando el factor pg , la suma de $\frac{1}{2}a_i^2$, define la función **densidad espectral direccional** $S(\omega, \theta)$.

Esto es,

$$\sum_{\Delta\omega} \sum_{\Delta\theta} \frac{1}{2} a_i^2 = S(\omega, \theta) d\omega d\theta, \quad (1.8)$$

donde la función de densidad espectral $S(\omega, \theta)$ es definida sobre el rango $0 \leq \omega < \infty$.

Al utilizar la definición dada en (1.8), de forma aleatoria la superficie del mar puede ser expresada por la siguiente representación de la integral estocástica (Pierson, 1955), ver más adelante para un desarrollo más formal,

$$\eta(x, y, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t + \epsilon(\omega, \theta) \right] \sqrt{2S(\omega, \theta)} d\omega d\theta. \quad (1.9)$$

Hay que tener en cuenta que la integración mostrada en (1.9) no es una integral en el sentido

de Riemann, sino que debe interpretarse como:

$$\eta(x, y, t) = \sum_{j=-s}^s \sum_{i=0}^r \cos \left[\frac{\omega_{2i+1}^2}{g} (x \cos \theta_{2j+1} + y \sen \theta_{2j+1}) - \omega_{2i+1} t + \epsilon(\omega_{2i+1}, \theta_{2j+1}) \right] \\ \times \sqrt{2S(\omega_{2i+1}, \theta_{2j+1})(\omega_{2i+2} - \omega_{2i})(\theta_{2j+2} - \theta_{2j})}.$$

con los límites $\omega_{2r} \rightarrow \infty$, $\omega_{2i+2} - \omega_{2i} = 0$, $\theta_{2s+1} \rightarrow \pi$, $\theta_{-2s+1} \rightarrow -\pi$, y $\theta_{2j+2} - \theta_{2j} = 0$ (Pierson, 1955; St. Denis y Pierson, 1953)[1].

El término $2S(\omega, \theta)$ que participa en (1.9) es a menudo escrito simplemente como $S(\omega, \theta)$. Esto es admisible si la función de densidad espectral se define en el rango $-\infty < \omega < \infty$. Dado que la función de densidad espectral es una función par, puede ser definida en el rango $0 \leq \omega < \infty$.

A menudo es conveniente expresar el comportamiento de la ola dado en (1.9) en forma de vector, escribiendo $\frac{\omega^2}{g} = k$ y mediante el uso de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \hat{k} &= k \cos \theta \hat{i} + k \sen \theta \hat{j} \\ &= k_x \hat{i} + k_y \hat{j}, \\ r &= x \hat{i} + y \hat{j}. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (1.9) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \eta(r, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\hat{k} \cdot r - \omega t + \epsilon) dA(\omega, \theta) \\ &= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\hat{k} \cdot r - \omega t + \epsilon)} dA(\omega, \theta), \end{aligned}$$

donde Re representa la parte real y

$$dA(\omega, \theta) = A(\omega + d\omega, \theta + d\theta) - A(\omega + d\omega, \theta) - A(\omega, \theta + d\theta) + A(\omega, \theta).$$

1.3. Análisis estocástico para la predicción de las características de las olas.

1.3.1. Principio del método de predicción.

El movimiento de la ola cambia con el tiempo en forma aleatoria. En realidad, tanto la altura de las olas y el período de las olas varían aleatoriamente de un ciclo a otro. Debido a que las magnitudes individuales y los tiempos de su aparición suelen ser imprevisibles, esto puede estimarse con técnicas probabilísticas.

Con el fin de llevar a cabo la predicción probabilística al azar de un fenómeno, es necesario determinar la función de probabilidad que rige el fenómeno. Por ejemplo, propiedades estadísticas de la altura extrema de las olas puede ser evaluada mediante el uso de la función de probabilidad que se aplica a la altura de las olas y luego para la aplicación de estadísticos de orden.

Todos estos procedimientos están en el dominio de la probabilidad, para los que la función de probabilidad está definida.

La predicción de las propiedades estadísticas de un proceso aleatorio se puede lograr a partir de observaciones en el dominio del tiempo (esto se llama observación al azar) si la ley de probabilidad que regula el fenómeno se supone conocida. Por ejemplo, si observamos la altura de 100 olas, sucesivamente, pero no al azar, entonces es posible predecir la altura extrema de las olas que se espera que se produzca en las próximas 100 olas y con un coeficiente de confianza, suponiendo que la altura de las olas obedece a la ley de probabilidad de Rayleigh.

Este método basado en observaciones al azar parece ser simple, sin embargo, el resultado no es muy preciso a menos que el número de observaciones sea muy grande.

Un método de predicción que es estadísticamente mucho más riguroso que el azar sobre la base de la observación se logra a través de análisis estocástico (análisis armónico) llevado a cabo en el dominio de la frecuencia. La predicción disponible en la actualidad es el método que se basa en principios desarrollados por Rice (1944,1945)[1].

El principio y el procedimiento del enfoque del análisis estocástico, aplicado a la predicción probabilística, de olas características de los mares al azar se muestran en la Figura 1.4.

Como se indica en la Figura 1.4 el enfoque abarca tres ámbitos: el tiempo, la frecuencia y los dominios de probabilidad. En el dominio del tiempo, la función de correlación es evaluada para el promedio de las olas registradas. Más específicamente, la medición aleatoria de los mares puede ser dividido en dos fases.

Uno de ellos es el punto de medición, a partir del cual las características de las olas se obtienen sin referencia a la dirección de la ola; la otra es la dirección de medición, a partir de la cual la propagación de estado de energía de las olas se evalúa, dando las características de las olas en una dirección dada.

En el primer caso, la función de autocorrelación se evalúa desde el registro, mientras que las funciones de correlación cruzada se obtienen de la última medición. Se supone para ambos casos que las olas están en estado de equilibrio de procesos aleatorios débilmente ergódicos.

Una vez que la función de autocorrelación se evalúa, es transferida, siguiendo el teorema de

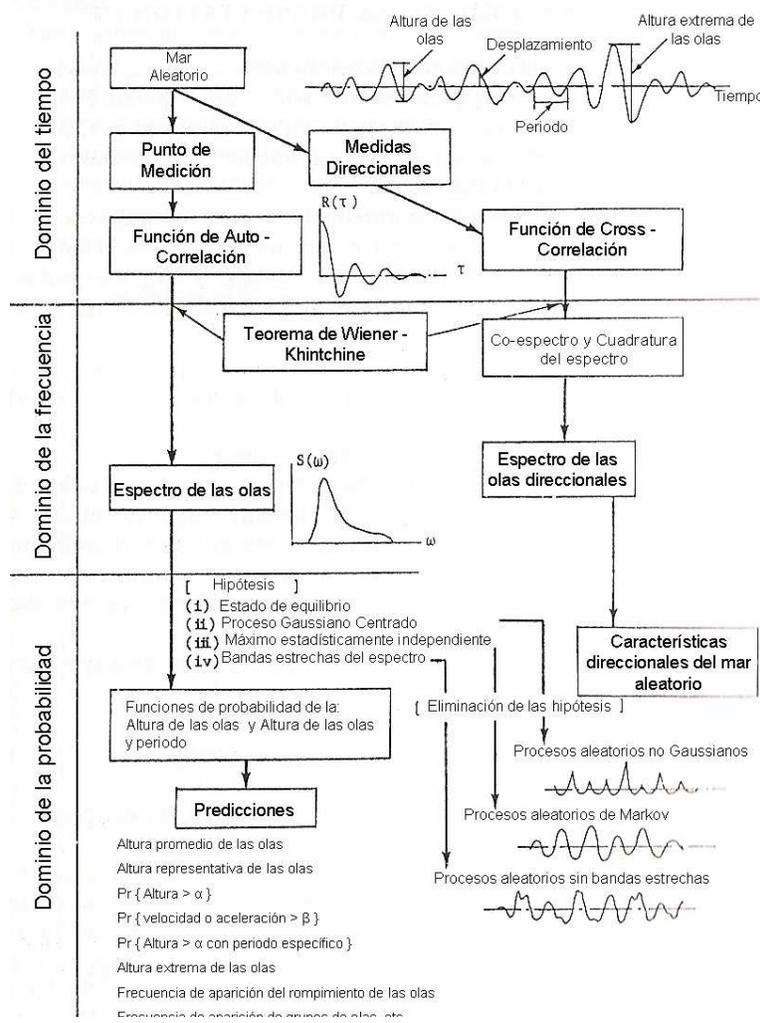


Figura 1.4: Principio y procedimiento para la predicción de propiedades estocásticas.

Wiener-Khintchine, al dominio de la frecuencia con la transformada de Fourier. El resultado es la *función de densidad espectral* de la ola, que es a menudo llamada simplemente el **espectro de las olas**.

De la misma manera que la función de autocorrelación se transforma a la función de densidad espectral, la función de correlación cruzada se transforma en la función de densidad espectral cruzada mediante la aplicación del teorema de Wiener-Khintchine.

Como la función de densidad espectral cruzada es una función compleja, es separada en su parte real e imaginaria, llamadas *coespectro* y *cuadratura del espectro*, respectivamente.

A partir de estos espectros es posible derivar una serie de espectros de olas, llamados *espectros de*

olas direccionales, que son funciones no sólo de la frecuencia, sino también del ángulo de dirección.

La función de densidad espectral se vincula entonces con la función de probabilidad para la predicción de las características de las olas. En esta etapa suponemos lo siguiente:

- (1) Las olas se consideran en estado de equilibrio débilmente ergódico, de modo que ellas son procesos aleatorios con distribución normal (Gausiana) de media cero.
- (2) La función de densidad espectral en la ola es de banda estrecha, es decir, el espectro es fuertemente concentrado en una frecuencia particular.
- (3) Los picos de las olas (máximos) y los valles son estadísticamente independientes.

Bajo estas condiciones, la función de probabilidad individual puede derivarse de la altura de las olas y el período de las olas, así como la función de probabilidad conjunta para la altura de las olas y el período.

La predicción probabilística puede hacerse incluso omitiendo alguna de las suposiciones anteriores. Sin embargo, la función de probabilidad elegida depende de la hipótesis seleccionada.

1.3.2. Esquema del enfoque del análisis espectral.

Para llevar a cabo el análisis espectral de los registros de las olas se supone en primer lugar, que $\{x_t\}$ es un proceso gaussiano, centrado con $E(x_t^2) = \sigma^2$ y es estacionario, es decir, $(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_m+h})$ tiene la misma distribución que $(x_{t_1}, \dots, x_{t_m})$ para todo $h \in \mathbb{R}$, y esto ocurre para todo vector finito dimensional de $\{x_t\}$.

Dado que el proceso $\{x_t\}$ es centrado y estacionario la **covarianza del proceso** la podemos definir como

$$r(\tau) = E(x_{t+\tau}x_t) = E(x_\tau x_0).$$

Si resulta que $r(\tau)$ es la covarianza de un proceso gaussiano estacionario, el teorema (0.2) de Bochner aplicado a la función f recibe el nombre de **Teorema de Wiener-Khintchine**.

Luego, para estimar la media y la varianza del proceso a partir de un número grande de observaciones usamos las propiedades ergódicas, las observaciones del teorema de Bochner y el comportamiento al infinito de los siguientes promedios:

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_s ds,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds.$$

Verifiquemos bajo que condiciones se tiene que:

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_s ds \longrightarrow E(x_t) = 0. \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds \longrightarrow E(x_t^2) = \sigma^2. \quad (1.11)$$

Llamemos

$$Y_t = \frac{1}{t} \int_0^t x_s ds,$$

$$Z_t = \frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds.$$

Entonces verifiquemos 1.10:

(a)

$$EY_t = E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_s ds \right] = \frac{1}{t} \int_0^t E x_s ds \equiv 0. \text{ Por Fubini.}$$

(b)

$$\begin{aligned} EY_t^2 &= E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_s ds \right]^2 = \frac{1}{t^2} E \int_0^t \int_0^t x_s x_u ds du = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t E(x_s x_u) ds du \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^s E(x_s x_u) ds du + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_s^t E(x_s x_u) ds du \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^s r(s-u) ds du + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_s^t r(u-s) ds du. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Resolviendo primero:

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^s r(s-u) ds du,$$

hacemos el cambio de variable, $s - u = v$, y así

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^s r(s-u) ds du &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_s^0 r(v)(-dv) ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^s r(v) dv ds \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_v^t ds r(v) dv = \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-v)r(v) dv. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos:

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_s^t r(u-s) ds du,$$

hacemos el cambio de variable, $u - s = v$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_s^t r(u-s) du ds &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{t-s} r(v) dv ds = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{t-v} ds r(v) dv \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-v)r(v) dv. \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (1.12) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} EY_t^2 &= \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-v)r(v) dv + \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-v)r(v) dv \\ &= \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-v)r(v) dv = \frac{2}{t} \int_0^t \left(1 - \frac{v}{t}\right) r(v) dv. \end{aligned}$$

Luego por ser r continua y tender a cero en infinito, es decir, $|r(v)| \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow \infty$, entonces $\|r\|_\infty < +\infty$.

Ahora,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} EY_t^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty \mathbb{1}_{[0,t)}(v) \frac{1}{t} \left(1 - \frac{v}{t}\right) r(v) dv.$$

Utilizando la convergencia dominada y la hipótesis

$$\int_0^\infty |r(v)| dv < +\infty,$$

se tiene que el término anterior tiende a cero cuando t tiende a infinito.

Luego,

$$Y_t \xrightarrow{L^2} 0.$$

Ahora verifiquemos (1.11):

$$EZ_t = E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds \right] = \frac{1}{t} \int_0^t E x_s^2 ds = \frac{\sigma^2}{t} \int_0^t ds = \sigma^2.$$

Debemos demostrar que,

$$Z_t \xrightarrow{L^2} \sigma^2.$$

Es decir,

$$E[Z_t - \sigma^2]^2 \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow \infty$ lo que equivale a,

$$\text{Var}(Z_t) = EZ_t^2 - (EZ_t)^2 = EZ_t^2 - \sigma^2. \quad (1.13)$$

Luego,

$$EZ_t^2 = E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds \right]^2 = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t E(x_s^2 x_u^2) ds du = \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-u) E(x_u^2 x_0^2) du,$$

donde,

$$\int_0^t (t-u) du = t^2 - \int_0^t u du = t^2 - \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2},$$

teniendo que,

$$\frac{2}{t^2} \int_0^t (t-u) du = \frac{2}{t^2} \frac{t^2}{2} = 1.$$

Reescribiendo la ecuación (1.13) obtenemos,

$$\begin{aligned} EZ_t^2 - \sigma^2 &= \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-u) [E(x_u^2 x_0^2) - \sigma^2] du = \frac{2}{t^2} \int_0^t (t-u) \sigma^2 E \left[\left(\frac{x_u}{\sigma} \right)^2 \left(\frac{x_0}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] du \\ &= 2 \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^t (t-u) E \left[\left[\left(\frac{x_u}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{x_0}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \right] du, \end{aligned} \quad (1.14)$$

utilizando el polinomio de Hermite de segundo orden $H_2(x) = x^2 - 1$, la ecuación (1.14) se convierte en:

$$\begin{aligned} EZ_t^2 - \sigma^2 &= 2 \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^t (t-u) E \left[\left[\left(\frac{x_u}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{x_0}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \right] du \\ &= 2 \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^t (t-u) E \left[H_2 \left(\frac{x_u}{\sigma} \right) H_2 \left(\frac{x_0}{\sigma} \right) \right] du. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Sabiendo que (X, Y) es un vector gaussiano con matriz de covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos por la **Fórmula de Mehler** que,

$$E[H_m(X)H_n(Y)] = \delta_{n,m} n! \rho^n.$$

Entonces la ecuación (1.15) se convierte en,

$$EZ_t^2 - \sigma^2 = 2 \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^t (t-u) E \left[H_2 \left(\frac{x_u}{\sigma} \right) H_2 \left(\frac{x_0}{\sigma} \right) \right] du = 2 \frac{\sigma^2}{t^2} \int_0^t (t-u) 2r(u)^2 du \longrightarrow 0,$$

cuando $t \longrightarrow \infty$.

Si

$$\int_0^\infty r^2(u) du < +\infty,$$

entonces

$$Z_t = \frac{1}{t} \int_0^t x_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2.$$

Ahora veamos como estimar la covarianza del proceso $r(\tau)$. Tomemos

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \longrightarrow r(\tau),$$

cuando $t \longrightarrow \infty$.

Sea

$$E[\hat{r}(\tau)] = E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \right] = \frac{1}{t} \int_0^t E x_{(s+\tau)} x_s ds = r(\tau).$$

Llamando

$$W_t = \frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds - r(\tau),$$

vemos que $EW_t = 0$ para $t > 0$.

Tomando

$$EW_t^2 = E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \right]^2 - r^2(\tau),$$

si demostramos que $EW_t^2 \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \longrightarrow r(\tau),$$

cuando $t \longrightarrow \infty$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} EW_t^2 &= E \left[\frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \right]^2 - r^2(\tau) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t E(x_{(s_1+\tau)} x_{s_1} x_{(s_2+\tau)} x_{s_2}) ds_1 ds_2 - r^2(\tau) \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{s_1} E(x_{(s_1-s_2+\tau)} x_{(s_1-s_2)} x_\tau x_0) ds_2 ds_1 + \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{s_1}^t E(x_\tau x_0 x_{(s_2-s_1+\tau)} x_{(s_2-s_1)}) ds_1 ds_2 - r^2(\tau). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Resolvemos primero

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{s_1} E(x_{(s_1-s_2+\tau)} x_{(s_1-s_2)} x_\tau x_0) ds_2 ds_1. \quad (1.17)$$

Haciendo el cambio de variable $s_1 - s_2 = u$ y resolviendo tenemos que:

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{s_1} E(x_{(s_1-s_2+\tau)} x_{(s_1-s_2)} x_\tau x_0) ds_2 ds_1 = \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) E(x_{(u+\tau)} x_u x_\tau x_0) du. \quad (1.18)$$

Ahora utilizando (4) en (1.18) nos queda:

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) E(x_{(u+\tau)} x_u x_\tau x_0) du = \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) [r^2(u) + r(u+\tau)r(u-\tau) + r^2(\tau)] du.$$

Sabiendo que

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) r^2(\tau) du = \frac{1}{t^2} r^2(\tau) \left[t^2 - \frac{t^2}{2} \right] = \frac{1}{t^2} \frac{t^2}{2} r^2(\tau) = \frac{r^2(\tau)}{2}.$$

Tenemos que (1.17) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^{s_1} E(x_{(s_1-s_2+\tau)} x_{(s_1-s_2)} x_\tau x_0) ds_2 ds_1 \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)[r^2(u) + r(u+\tau)r(u-\tau)] du + \frac{r^2(\tau)}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Resolviendo ahora

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{s_1}^t E(x_\tau x_0 x_{(s_2-s_1+\tau)} x_{(s_2-s_1)}) ds_1 ds_2. \quad (1.20)$$

Haciendo el cambio de variable $s_2 - s_1 = u$, tenemos que

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{s_1}^t E(x_\tau x_0 x_{(s_2-s_1+\tau)} x_{(s_2-s_1)}) ds_1 ds_2 = \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) E(x_\tau x_0 x_{(u+\tau)} x_u) du. \quad (1.21)$$

Ahora utilizando (4) en (1.21) nos queda:

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u) E(x_\tau x_0 x_{(u+\tau)} x_u) du = \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)[r^2(-u) + r(\tau-u)r(-\tau-u) + r^2(\tau)] du.$$

Sabiendo que

$$\frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)r^2(\tau) du = \frac{1}{t^2} r^2(\tau) \left[t^2 - \frac{t^2}{2} \right] = \frac{1}{t^2} \frac{t^2}{2} r^2(\tau) = \frac{r^2(\tau)}{2}.$$

Tenemos que (1.20) queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_{s_1}^t E(x_\tau x_0 x_{(s_2-s_1+\tau)} x_{(s_2-s_1)}) ds_1 ds_2 \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)[r^2(-u) + r(\tau-u)r(-\tau-u)] du + \frac{r^2(\tau)}{2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Si reescribimos (1.16) usando (1.19) y (1.22)

$$\begin{aligned} EW_t^2 &= \frac{1}{t^2} \int_0^t \int_0^t E(x_{(s_1+\tau)} x_{s_1} x_{(s_2+\tau)} x_{s_2}) ds_1 ds_2 - r^2(\tau) \\ &= \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)[r^2(u) + r(u+\tau)r(u-\tau)] du + \frac{1}{t^2} \int_0^t (t-u)[r^2(-u) + r(\tau-u)r(-\tau-u)] du. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{t} \int_0^t x_{(s+\tau)} x_s ds \longrightarrow r(\tau)$$

1.4. Registro de olas I.

Los datos fueron tomados de CDIP (*The Coastal Data Information Program*) que es un Programa Costero de Datos e Información de los Estados Unidos. Este programa costero, mide,

analiza los archivos, y difunde datos sobre el medio ambiente costero para el uso de ingenieros, planificadores y gestores de la costa, así como científicos y marinos. CDIP utiliza boyas direccionales de tipo Datawell que miden la temperatura superficial del mar, la dirección y la energía de las olas. Estas boyas hacen la recogida de los datos por segundo, mediante un sensor y en tiempo real.

Los datos (ver tabla I del apéndice) son de Jeffreys Ledge en New Hampshire (NH.), estación N° 16001, cuyo despliegue de latitud es $42^{\circ} 48.050'$ Norte y el despliegue de longitud es $70^{\circ} 10.070'$ Oeste. La profundidad del agua es de 76,50 metros y la variación magnética local es de 16 W grados. Utiliza indicadores de tipo Datawell Marca 3, boya direccional cuya frecuencia de muestreo es de 1.280 Hertz.

1.4.1. Interpretación de los datos obtenidos de las olas en Jeffreys Ledge, NH.

La altura significativa de las olas es denotada por (H_s) y esta representa uno de los 30 minutos de duración promedio de $\frac{1}{3}$ de las olas más altas en un sensor. Estadísticamente, la mayor ola durante el período de medición puede ser aproximadamente el doble de la altura de las olas, es decir, $(1,8 \times H_s)$.

La dirección es el ángulo de la brújula (0-360 grados en sentido horario desde el norte real) desde donde vienen las olas. En el océano, sin embargo, no hay dos olas que sean perfectamente idénticas, son procedentes constantemente de diferentes direcciones o diferentes frecuencias.

Dado que nunca hay una única dirección, ni un único período de las olas del océano, sólo podemos medir el período del pico (TP) y la dirección del pico (DP). El período máximo es el período más común entre las olas consecutivas, mientras que el pico máximo es el más común en la dirección. Para llegar a los valores, de la energía de las olas de una estación durante un período determinado de tiempo (unos 30 minutos), en la mayoría de los casos, se agrupan en bandas diferentes.

Para determinar las condiciones de las olas, no se puede simplemente observar en el océano durante unos segundos. En lugar de ello, es necesario observar los datos durante un largo período. Para la mayoría de los cálculos de las olas, se utiliza una muestra de datos donde se consideran aproximadamente 30 minutos de duración.

En las boyas Datawell, el sensor calcula un espectro de ondas y transmite la información cada 30 minutos de período de muestreo.

El Tiempo Universal Coordinado (UTC), es el tiempo en 0 grados de longitud, también conocido como GMT (hora media de Greenwich).

1.5. Análisis de los datos obtenidos de las olas en Jeffreys Ledge, NH., utilizando WAFO.

En esta sección se analizarán los datos obtenidos de las olas en Jeffreys Ledge, NH., utilizando algunos algoritmos de WAFO (*Wave Analysis for Fatigue and Oceanography*), la cual es una caja de herramientas de MATLAB, construida por la Universidad de Lund en Suecia, que se utiliza para el análisis estadístico, la simulación de olas y cargas aleatorias al azar. Se comenzará definiendo el espectro $S(\omega)$, que será utilizado durante todo el análisis de los datos, se trabajará con el espectro Torsethaugen de parámetros H_s y T_p , donde la energía es dividida entre dos picos, correspondiendo a las contribuciones por parte del viento y del oleaje. WAFO permite que el espectro sea definido de manera simple por sus parámetros H_s y T_p .

1.5.1. Simulación de espectros.

Para este análisis inicial se usarán los promedios de H_s y T_p y para la simulación del espectro se utilizarán los comandos `torsethaugen`, `spec2sdat` y `waveplot`, donde `torsethaugen` calcula el espectro de doble pico (oleaje + viento), `spec2sdat` simula un proceso gaussiano y sus derivados de espectro y `waveplot` dibuja la elevación de la superficie de series de tiempo.

El algoritmo utilizado en MATLAB genera 200 segundos de los datos con 10 Hz y fue el siguiente:

SIMULACION DE UN ESPECTRO

Hs=

```
[0.52; 0.53; 0.61; 0.63; 0.60; 0.68; 0.65; 0.74; 0.76; 0.73; 0.75; 0.76;
0.72; 0.72; 0.69; 0.70; 0.72; 0.73; 0.71; 0.73; 0.72; 0.75; 0.70; 0.68;
0.70; 0.74; 0.70; 0.65; 0.56; 0.43; 0.33; 0.36; 0.38; 0.39; 0.38; 0.41;
0.41; 0.37; 0.38; 0.40; 0.41; 0.40; 0.36; 0.33; 0.33; 0.32; 0.32];
```

Tp=

```
[3.57; 3.85; 4.00; 4.00; 4.00; 3.85; 3.85; 4.00; 4.00; 4.17; 4.00; 3.85;
3.70; 3.70; 3.85; 3.70; 3.85; 4.00; 3.85; 4.00; 4.00; 3.85; 3.70; 3.70;
3.70; 3.70; 3.45; 3.03; 2.70; 7.69; 7.14; 7.69; 7.14; 7.69; 6.67; 7.14;
7.14; 7.14; 6.67; 7.14; 9.88; 2.56; 7.69; 11.11; 9.88; 7.69; 7.69];
```

```
me1=mean(Hs); me2=mean(Tp); sa1=std(Hs); sa2=std(Tp);
```

```
S1=torsethaugen([], [me1 me2], 1); xs=spec2sdat(S1, [2000 1], 0.1);
```

```
waveplot(xs, '-');
```

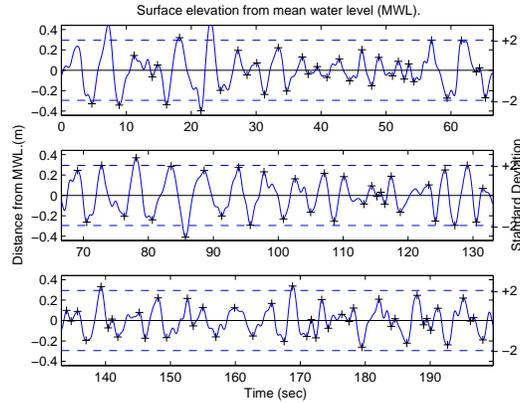


Figura 1.5: Simulación del espectro de Jeffreys Ledge, NH.

En la figura 1.5 se ha simulado un espectro con los datos obtenidos de Jeffreys Ledge, NH. En el se encuentran marcados con + los puntos máximos y mínimos relativos alcanzados por las olas. Para obtener este gráfico se tomaron 2000 puntos para la simulación, así como, la media de H_s y T_p , respectivamente y $\Delta t = 0,1$. Aquí podemos observar que la máxima altura de la cresta de la simulación es de 0,4 m, mientras que la máxima altura de el valle de la simulación es de -0,4 m, si observamos los datos intermedios de la simulación del espectro podemos verificar que no hay dos olas que sean perfectamente idénticas ni hay dos olas que posean el mismo período del pico T_p .

En ciertas ocasiones los datos son dados en forma de series de tiempo, por lo cual se calcula el espectro estimado. Ahora se procederá a simular 20 minutos de señal con 4 Hz, para encontrar el espectro estimado $S_{est}(\omega)$ y comparar el resultado con el espectro Torsethaugen $S(\omega)$ original.

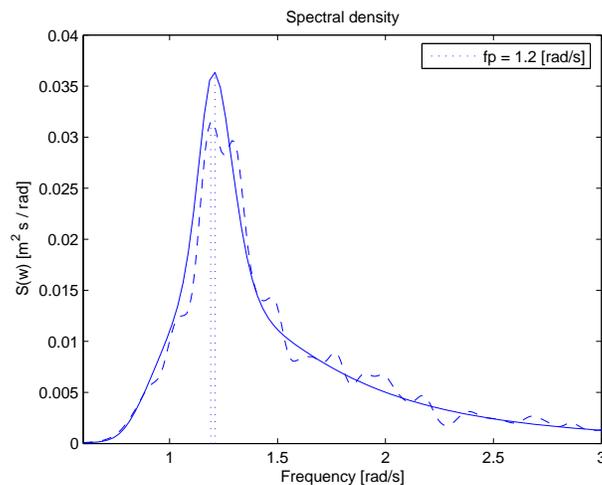


Figura 1.6: Espectro estimado (línea punteada) y espectro Torsethaugen (línea sólida).

El siguiente código en MATLAB fue usado para generar la figura 1.6, donde los dos espectros son graficados. El tamaño máximo de la ventana de Parzen usado aquí será de 400 y este puede ser seleccionado por el usuario o automáticamente por WAFO.

```
ESPECTRO ESTIMADO Y ESPECTRO ORIGINAL
xs=spec2sdat(S1,[20*60*4 1],0.25);
Sest=dat2spec2(xs,400);
wspecplot(Sest,1,'--'), hold on
wspecplot(S1,1), hold off
axis([0.6 3 0 0.04])
```

Donde `dat2spec2` da la estimación de una parte de la densidad espectral usando una función en la ventana de Parzen o la estimación de la función de autocovarianza y `wspecplot` dibuja la densidad espectral.

Podemos observar que en la figura 1.6 el espectro estimado no se ajusta perfectamente al espectro Torsethaugen, aunque ellos proviene de los mismos datos. Se realiza esta comparación para hacer notar que dependiendo de como se trabaje con los datos (en promedio o en serie de tiempo) se obtendrá una densidad espectral más ajustada a la realidad. Cuando se trabaja con los promedios dejamos de lado ciertos datos atípicos, mientras que si trabajamos con la serie de tiempo tendremos los datos reales.

1.5.2. Distribución de probabilidad de las características de las olas.

WAFO da la posibilidad de calcular las distribuciones de probabilidad para un número de olas características, dada una densidad espectral.

Una característica de las olas es el periodo, que puede ser definido de varias maneras. WAFO permite al usuario elegir el periodo a utilizar.

Los periodos de las olas pueden ser extraídos para la realización de la figura 1.5 y son mostrados en un histograma en la figura 1.7.

Las siguientes son las líneas de código que producen la figura 1.7. Lo primero que se hace es extraer el valor medio del periodo de los datos usando `dat2wa` y lo almacenamos en la variable `T`, posteriormente se usa `spec2tpdf` para calcular la distribución teórica.

Aquí `whisto` dibuja el histograma y `pdfplot` dibuja los contenidos de estructuras en pdf.

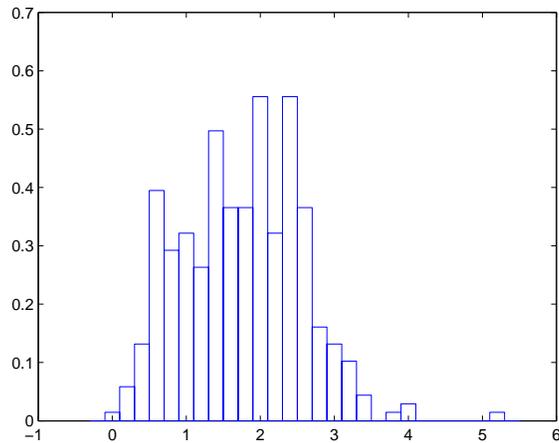


Figura 1.7: El histograma muestra los periodos de las olas extraidos para la simulación de los datos.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DE LAS CARACTERISTICAS DE LAS OLAS

```
[T, index] = dat2wa(xs,0,'d2u')
whisto(T,25,1,1), hold on
dtyex = spec2tpdf(S1, [], [], [0 10 51], 0, 2, 5, 0, []);
dtyest = spec2tpdf(Sest, [], [], [0 10 51], 0, 2, 5, 0, []);
pdfplot(dtyex)
pdfplot(dtyest, '-. ')
axis([0 10 0 0.35]), hold off
```

En la figura 1.7 podemos observar que los periodos de las olas no tienen una distribución uniforme, esto es debido a que no hay una única dirección, ni un único periodo de las olas del océano.

1.5.3. Espectro direccional.

En WAFO se encuentran los medios para la evaluación y la visualización del espectro direccional, que es,

$$S(\omega, \theta) = S(\omega)D(\theta, \omega),$$

donde $S(\omega)$ es el espectro de frecuencia y $D(\theta, \omega)$ es la función de propagación. Un número de funciones de propagación comunes pueden ser elegidas por el usuario. En las figuras 1.8 y 1.9, se muestra el resultado de los espectros direccionales (líneas sólidas, con diferentes longitudes de ω)

para el espectro Torsethaugen usado anteriormente.

La función de propagación es del tipo $\cos 2s$, con $s=15$ y está dada por:

$$D(\theta) = \frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(s+\frac{1}{2})} \cos^{2s} \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Cada caso depende de la frecuencia. Las líneas punteadas en el espectro direccional corresponden a la función de propagación que depende de la frecuencia.

Las líneas de código que producen la gráfica del espectro direccional I con $\omega = \frac{\pi}{2}$, son:

ESPECTRO DIRECCIONAL I

```
D1 = spreading(101, 'cos', pi/2, [15], [], 0);
```

```
SD1= mkdspec(S1,D1);
```

```
wspecplot(SD1,1);
```

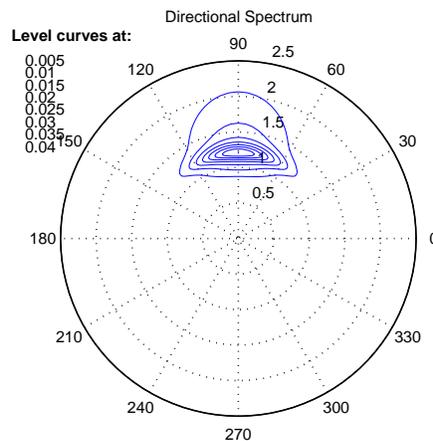


Figura 1.8: Espectro Direccional I.

Y las líneas de código que producen la gráfica del espectro direccional II con $\omega = 0$, son:

ESPECTRO DIRECCIONAL II

```
D12 = spreading(101, 'cos', 0, [15], S1.w, 1);
```

```
SD12 = mkdspec(S1,D12);
```

```
wspecplot(SD12,1);
```

Donde `spreading` es el direccional de la función de propagación y `mkdspec` dibuja el espectro direccional y la frecuencia del espectro dada la función de propagación. Estos espectros direccionales representan la energía que llevan las olas y ellos dependen de la frecuencia.

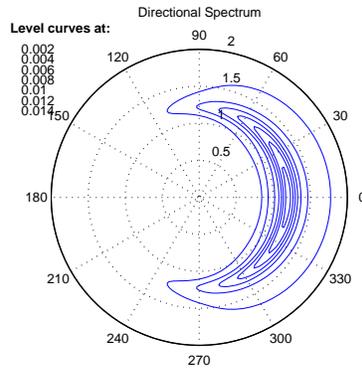


Figura 1.9: Espectro Direccional II.

Para finalizar esta parte se simulará la superficie del mar en dos cuadrados de 32 m por 32 m con direcciones espectrales SD1 Y SD12. En el mar se puede observar que las olas vienen de diferentes direcciones, sin embargo, la frecuencia depende de la función de propagación que lleva a superficies mucho más irregulares, por lo que la orientación de las olas es menos transparente.

En las figuras 1.10 y 1.11, no es fácil deducir que la superficie del mar tiene el mismo periodo de distribución, pero esto es más obvio que deducir que las longitudes de las olas son diferentes. El comando `seasim` simula una superficie del mar con dirección espectral cualquiera y los algoritmos para las simulaciones fueron los siguientes:

SIMULACIÓN DE UNA SUPERFICIE DEL MAR CON DIRECCIÓN ESPECTRAL SD1

```
Y=seasim(SD1,2^5,2^5,100,1,1,1,2,1);
```

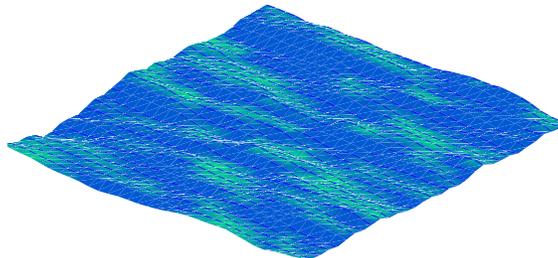


Figura 1.10: Superficie del mar con dirección espectral SD1.

SIMULACIÓN DE UNA SUPERFICIE DEL MAR CON DIRECCIÓN ESPECTRAL SD12

```
Y=seasim(SD12,2^5,2^5,100,1,1,1,2,1);
```

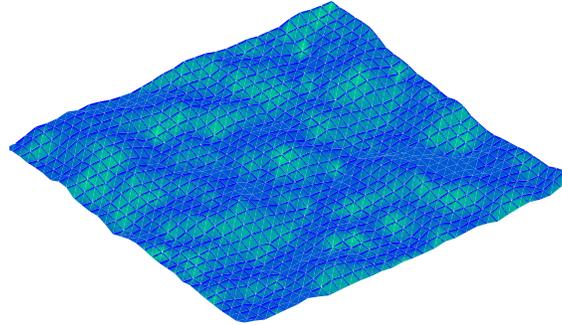


Figura 1.11: Superficie del mar con dirección espectral SD12.

1.5.4. Funciones aleatorias y modelado de olas.

Ahora se darán algunas herramientas para el análisis de funciones aleatorias con respecto a su correlación espectral y propiedades de la distribución.

Las funciones que van a ser analizadas pueden ser medidas o estudiadas según la tendencia, donde las olas en la superficie del mar es uno de los ejemplos más importantes. Suponemos que los datos medidos son dados de una de las siguientes formas:

- (1) En el dominio del tiempo, las mediciones de una función son denotadas por $x(t)$, $0 \leq t \leq T$, donde t es el tiempo y T es la duración de las mediciones. La función $x(t)$ es por lo general la muestra de una frecuencia fija y de una resolución dada, es decir, los valores de $x(t)$ también se discretizan. Los efectos de la toma de muestras no siempre pueden ser descuidados en las estimaciones de parámetros o distribuciones. Suponemos que las mediciones de las funciones se guardan como un archivo de dos columnas.
- (2) En el dominio de la frecuencia, se determina la potencia espectral, que es un modo importante en el análisis de sistemas. Esto significa que la señal es representada por una serie de Fourier,

$$x(t) \approx m + \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t),$$

donde $\omega_i = i \cdot 2\pi/T$ son las frecuencias angulares, m es el promedio de la señal y a_i , b_i son los coeficientes de Fourier.

Algunas propiedades generales de funciones de medida se pueden resumir con unas simples características. Estas son la media m , definida como el promedio de todos los valores, la desviación estándar σ , y la varianza σ^2 , que mide la variabilidad alrededor de la media en la escala lineal y cuadrática.

Estas cantidades son estimadas por:

$$m = 1/T \int_0^T x(t) dt,$$

$$\sigma^2 = 1/T \int_0^T (x(t) - m)^2 dt.$$

Otra propiedad importante es el cruce del espectro o intensidad de cruce $\mu(u)$ definida como la intensidad de upcrossings (número medio de upcrossings por unidad de tiempo), de un nivel u por $x(t)$ como una función de u . La frecuencia media f_o es generalmente definida como el número de veces que $x(t)$ cruza el nivel medio normalizado m por la longitud del intervalo de observación T , es decir, $f_o = \mu(m)$.

Para los siguientes análisis se usarán los datos de Jeffreys Ledge, NH., donde se tomará en el algoritmo como primera columna el tiempo y los valores de la función en la segunda columna.

Para extraer los niveles del espectro se implementó el siguiente algoritmo:

NIVELES DEL ESPECTRO

```
me=mean(xs(:,2)); sa=std(xs(:,2));
```

```
xs(:,2)= xs(:,2)-me
```

```
lc=dat2lc(xs); plot (lc)
```

```
axis([-15 1100 -15 360])
```

Donde me y sa son la media y la desviación estándar de la señal, respectivamente. La variable lc es una matriz de dos columnas con los niveles en la primera columna y el número de cruces de los niveles en la segunda columna.

En la figura 1.12 el número de cruces de xs es dibujado y comparado con una estimación basada en la suposición que xs es una realización de un proceso Gaussiano del mar.

El número de cruces es automáticamente dibujado por `dat2lc`. Se puede observar que no existe ningún cruce entre xs y su estimación.

Ahora calcularemos la frecuencia media como el número promedio de cruces por unidad de tiempo donde el nivel medio es igual a cero (0); esto puede requerir interpolación en la intensidad del cruce de la curva, como sigue:

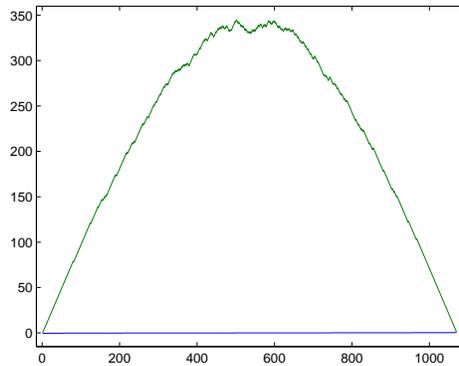


Figura 1.12: Número de cruces.

FRECUENCIA MEDIA

```
T=max(xs(:,1))-min(xs(:,1))
f0=interp1(lc(:,1),lc(:,2),0)/T
```

El proceso de acumulación de daños por fatiga depende sólo de los valores y el orden de los extremos locales en la carga. La secuencia de los extremos locales es llamada la *secuencia de puntos de inflexión*. Esto es una matriz de dos columnas con el tiempo de los extremos en la primera columna y los valores de xx en la segunda.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

```
tp=dat2tp(xs);
alfa=f0/(length(tp)/(2*T))
```

Aquí `dat2tp` extrae los puntos de inflexión a partir de los datos y α es el factor irregular. Luego $length(tp)$ es igual al número de máximos y mínimos locales y por lo tanto tenemos un factor 2 en la expresión para α .

Siguiendo con el análisis dibujaremos los datos y haremos un acercamiento en una región específica de una parte del mar, los datos se presentan en el gráfico 1.13, el cual fue obtenido con los siguientes comandos:

```
clf
waveplot(xs,tp,'k-','*',1,1)
axis([0 20 -inf inf])
```

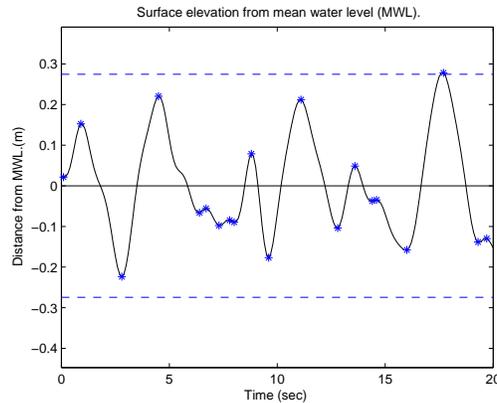


Figura 1.13: Una parte de los datos del mar con puntos de inflexión.

Si la señal es constante en algunos intervalos, y se le agrega a esto las altas frecuencias se puede calcular la densidad espectral; como pueden producirse datos constante si el dispositivo de medición se bloquea durante un periodo de tiempo, se pueden hacer comparaciones de estos datos calculando los puntos de inflexión en pequeños intervalos de los datos del mar.

Para encontrar posibles puntos innecesarios de los datos se usó el siguiente comando:

```
PUNTOS INNECESARIOS
dt=diff(xs(1:2,1));
dcrit=5*dt;
ddcrit=9.81/2*dt*dt;
zcrit=0;
[inds indg]=findoutliers(xs,zcrit,dcrit,ddcrit);
```

Los valores para $zcrit$, $dcrit$ y $ddcrit$ pueden ser escogidos más cuidadosamente.

Sin embargo, pequeños cambios en las constantes son usualmente no decisivos.

Como se ha visto de la transcripción del programa un total de 13 puntos se han encontrado que son innecesarios esto es aproximadamente 28% de los datos.

Basados en esto podemos clasificar los datos como buenos, razonables, pobres o inservibles.

Obviamente un uso no crítico de los datos puede conllevar a resultados no satisfactorios.

Volveremos al problema cuando discutamos métodos para reconstruir los datos.

```

Found 0 missing points
Found 0 spurious positive jumps of Dx
Found 0 spurious negative jumps of Dx
Found 0 spurious positive jumps of D^2x
Found 0 spurious negative jumps of D^2x
Found 4 consecutive equal values
Found the total of 13 spurious points

```

Damos ahora el espectro $\hat{s}(\omega)$ para la señal x_s .

```

S=dat2spec2(xs,47);
wspecplot(S)

```

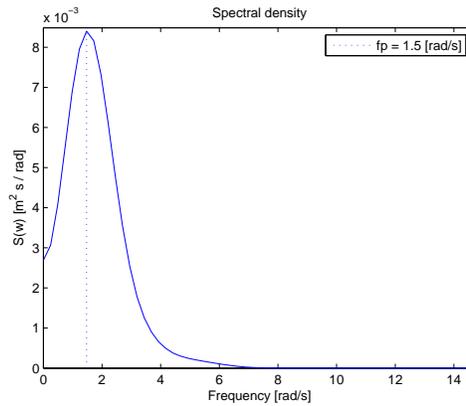


Figura 1.14: Densidad espectral.

Podemos apreciar que el espectro tiene un comportamiento regular.

En el siguiente paso el momento espectral será calculado. El vector `mom` ahora contiene los momentos espectrales m_0 , m_2 , m_4 , los cuales son las varianzas de las señales de la primera y segunda derivada. Podemos especular que la varianza de las derivadas es demasiado alta parcialmente a causa de los puntos innecesarios.

MOMENTO ESPECTRAL

```

[mom text]=spec2mom(S,4)
[sa sqrt(mom(1))]

```

En fin para estimar el espectro de un proceso Gaussiano uno necesita varias realizaciones de los procesos. Entonces la estimación de un espectro puede ser hecha para cada realización y luego se

promedia. Sin embargo, en muchos casos sólo una realización del proceso está disponible. En tal caso una es suficiente asumiendo que el espectro es una función suave de ω y se puede usar esta información para mejorar la estimación. Prácticamente esto significa que uno tiene que usar algunas técnicas de suavizado. Para los datos del mar tendremos que estimar el espectro por medio de la función de WAFO llamada `dat2spec` con un segundo parámetro definiendo el grado de suavidad.

ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO

```
S1=dat2spec2(xs,47);
S2=dat2spec2(xs,47);
wspecplot(S1, [], '-. ');
hold on; wspecplot(S2); hold off
```

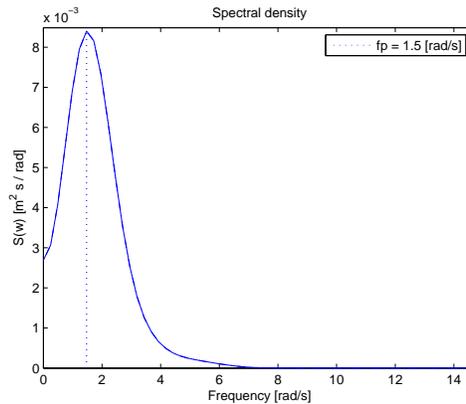


Figura 1.15: Densidad espectral.

Se puede observar que no hubo ningún cambio con respecto al espectro original.

Obviamente conociendo el espectro uno puede calcular la función de covarianza. El siguiente código en MATLAB puede calcular la covarianza para la densidad del espectro `S1` y lo compara con la covarianza estimada en la señal `xs`.

COVARIANZA

```
R2=spec2cov(S1,1);
Rest=dat2cov(xs,47, [], '- - ');
covplot(R2,47, [], '-. ');
hold on; covplot(Rest); hold off
```

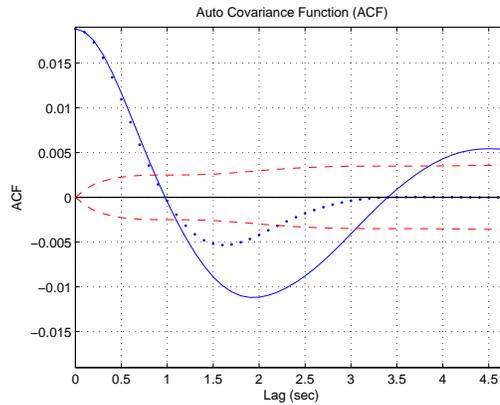


Figura 1.16: La función de covarianza estimada en el conjunto de los datos x_s , es la línea sólida, comparada con la función de covarianza teórica calculada para la densidad espectral S_1 .

Podemos ver en la figura 1.16 que la función de covarianza correspondiente a la densidad espectral S_1 difiere significativamente de la estimada directamente de los datos.

Observa que la función de WAFO `spec2cov` puede ser usada para calcular una estructura de covarianza la cual puede contener ambas covarianzas en el tiempo y en el espacio, así como las de las derivadas. La entrada puede ser cualquier estructura de espectro, `dat2cov` realiza la estimación de la función de covarianza automáticamente de los datos y `covplot` dibuja la función de covarianza.

Capítulo 2

Espectro direccional

2.1. Espectro direccional de las olas del mar.

Las transformaciones de las olas como la difracción, refracción y reflexión están muy influenciadas por las características de los espectros direccionales de las olas. Por lo tanto, tenemos que enriquecer nuestros conocimientos sobre los espectros direccionales de olas a través de la acumulación de una gran cantidad de datos. Sin embargo, la medición de espectros direccionales de las olas requieren un esfuerzo varias veces mayor que el de los espectros de frecuencia. Mientras que el segundo puede ser obtenido a partir de una ola de registro en un solo punto, el primero requiere del registro simultáneo de varios componentes de la ola. Con referencia a la clasificación realizada por Panicker, las técnicas de medición de los espectros direccionales de las olas que se han probado hasta ahora se enumeran a continuación:

- (1) Métodos de medición directa:
 - (a) Arreglo de olas manométricas,
 - (b) Boya direccional y
 - (c) Dos ejes de la corriente.
- (2) Métodos de la teledetección:
 - (a) Técnica óptica:
 - (i) Stereophotogrametry y
 - (ii) Holografía.

(b) Técnica de microondas.

Haciendo referencia a lo anterior, los métodos de medición directa y el stereophotogrametry se basan en el mismo principio de análisis, que es el análisis digital de los espectros cruzados entre varios pares de registros de olas. La holografía es un método de análisis de tipo analógico, una fotografía aérea se produce a través de los patrones de difracción por la exposición de un negativo de película a un rayo láser. Las técnicas de microondas son más recientes, y son varios los enfoques que se están realizando. Un radar de abertura sintética, montado sobre un satélite o un avión, es un método prometedor. King y Shemdin informaron de una medición de la distribución de las olas en un huracán, por medio de aire, a cargo de radar de apertura sintética. En la tierra un radar HF de alta frecuencia también ha sido empleado para la medición de los espectros direccionales de las olas, según lo informado por Vesecky. Se espera un rápido progreso en el campo de las técnicas de microondas para las mediciones de espectros direccionales de las olas.

2.1.1. Relación entre el espectro direccional y la función de covarianza.

La cantidad básica utilizada para estimar el espectro direccional es la función de covarianza de los perfiles de las olas en el dominio espacial y temporal.

Siendo la función de covarianza:

$$\Psi(X, Y, \tau) = \lim_{x_0, y_0, \tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0 y_0 t_0} \int_{-\frac{x_0}{2}}^{\frac{x_0}{2}} \int_{-\frac{y_0}{2}}^{\frac{y_0}{2}} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} \eta(x, y, t) \times \eta(x + X, y + Y, t + \tau) dx dy dt. \quad (2.1)$$

Sustituyendo ahora $\alpha = (kx \cos \theta + ky \sin \theta - \omega t + \varepsilon)$ con $\omega = 2\pi f$ en (2.1), tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi(X, Y, \tau) = & \lim_{x_0, y_0, \tau_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0 y_0 t_0} \int \int \int \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \cos \alpha_n \\ & \times \cos(\alpha_m + k_m X \cos \theta_m + k_m Y \sin \theta_m - \omega_m \tau) dx dy dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Debido a que el valor esperado de $\cos \alpha_n \cos \alpha_m$ es 0 para $n \neq m$, la ecuación (2.2) se puede escribir:

$$\Psi(X, Y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \cos(k_n X \cos \theta_n + k_n Y \sin \theta_n - \omega_n \tau). \quad (2.3)$$

Combinando la ecuación (2.3), con la definición de la función del espectro direccional, se tiene la siguiente relación entre la función de covarianza y el espectro direccional:

$$\Psi(X, Y, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} S_k(k, \theta) \cos(kX \cos \theta + kY \sin \theta - \omega \tau) d\theta dk. \quad (2.4)$$

La inversa de la transformada de lo anterior se puede obtener utilizando el teorema de la transformada de Fourier y su transformada inversa. Para ello, las coordenadas polares (K, θ) son transformadas en coordenadas cartesianas (u, v) , y ω es tratada como una variable independiente, es decir, la relación de dispersión, no se utiliza en esta etapa. Después de algunas manipulaciones, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\Psi_0(X, Y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{k_0}(u, v, \omega) e^{i(uX+vY-\omega\tau)} dudvd\omega, \quad (2.5)$$

$$S_{k_0}(u, v, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(X, Y, \tau) e^{i(uX+vY-\omega\tau)} dXdYd\tau, \quad (2.6)$$

donde $u = k\cos\theta$ y $v = k\sin\theta$.

En las ecuaciones (2.5) y (2.6), la frecuencia angular ω es tratada como una variable independiente del número de olas $k = |u^2 + v^2|^{1/2}$, y por lo tanto, la densidad espectral direccional se define en las tres dimensiones (u, v, ω) del espacio. El subíndice 0 en Ψ_0 y S_{k_0} , se añade para indicar que las funciones asignadas se definen en los rangos $-\infty < \tau < \infty$ y $-\infty < \omega < \infty$; estas funciones tienen valores iguales a la mitad de las funciones definidas en el rango $[0, \infty)$.

Si la función de covarianza en dos dimensiones de las olas de perfil con respecto a X , Y y τ es conocida con suficiente densidad en todo el dominio, el espectro direccional de la ola se puede estimar con la ecuación (2.6). La información sobre $\Psi_0(X, Y, \tau)$ con la densidad suficiente que requieren los datos del perfil de la ola se obtienen de manera uniforme en toda el área, $x = -x_0/2 \sim x_0/2$, $y = -y_0/2 \sim y_0/2$ y en todo el período de tiempo $t = -t_0/2 \sim t_0/2$. Específicamente hablando, se requieren de cientos de fotografías aéreas consecutivas de la superficie del mar tomadas en la misma área. Esto no es imposible, pero es inviable en la práctica debido al excesivo costo de la operación y el análisis. Cuando la marina de los EE.UU., llevó a cabo el Proyecto de Observación Estéreo de las olas (SWOP) en 1954, se consiguió la estacionariedad de la ola y se asumió la dirección del espectro $S_{k_0}(u, v)$, que se estimó a partir de la información de $\Psi_0(X, Y, 0)$, que se calcula a través de un mapa de elevación de la superficie. Un inconveniente de esta técnica es la incapacidad de distinguir los valores de $S_{k_0}(u, v)$ y $S_{k_0}(-u, -v)$, es decir, dos componentes de la propagación de las olas en direcciones diferentes de 180° . Por lo tanto, a los efectos del análisis de los datos SWOP, se supone que la dirección del espectro de la ola existe sólo en el azimuth, dentro de los $\pm 90^\circ$ a partir de la media de la dirección de la ola. La situación es la misma para el método del holograma. Cuando se usa en el arreglo de las olas manométricas (con excepción de la matriz lineal) y las boyas de olas, este problema no existe y la dirección del espectro de las olas se puede estimar en todo el rango de dirección ($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

2.1.2. Estimación de los espectros direccionales de las olas con una boya direccional y con un medidor de dos ejes de la corriente.

Muchas mediciones direccionales de las olas se han hecho por medio de boyas direccionales y mediante dos ejes de la corriente. El número de tales mediciones direccionales en los documentos técnicos de las olas supera las mediciones de los arreglos de olas manométricas. Una de las primeras mediciones desarrolladas en las boyas direccionales es el cabeceo y balanceo de boyas, informado por Longuet-Higgins, que mide los ángulos de cabeceo y balanceo y la aceleración de las boyas. Mitsuyasu empleó un trébol de boyas, que tiene la capacidad de medición de la curvatura de la superficie del agua, además del cabeceo, balanceo y la aceleración. Sobre la base de sus mediciones detalladas de espectros direccionales de las olas, y otros datos publicados, Mitsuyasu propuso un formulario estándar para la función de propagación direccional. En cuanto a las actuales mediciones, Nagata mide la velocidad de las partículas del agua en dos componentes de las coordenadas cartesianas mediante dos ejes de una corriente electromagnética, y se estima el espectro direccional de las olas de estas mediciones. Recientemente las mediciones de las olas direccionales con dos ejes de la corriente van acompañadas de la medición simultánea de la elevación de la superficie o de la presión de la fluctuación, con el fin de poder distinguir de qué lado del plano medio están llegando las olas.

El principio de medición de las direcciones de las olas por medio de una boya se dio por Longuet-Higgins (1961), es uno de los más simples, pero bien diseñado dispositivo desarrollado por la boya. La boya es un disco circular de 1,71 metros de diámetro en el interior se encuentran un acelerómetro y un giroscopio para la medición de la aceleración vertical y para mediciones de las olas incidentales en dos direcciones rectangulares. La base teórica para la obtención de la ola direccional a través de este dispositivo es la siguiente:

Vamos a considerar en primer lugar que tiene tres componentes; el desplazamiento vertical de la ola η que se convierte de la aceleración, y direcciones $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ y $\frac{\partial \eta}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - \omega_n t + \varepsilon_n), \\
 \xi_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n \cos \theta_n \sin(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - \omega_n t + \varepsilon_n), \\
 \xi_3 &= \frac{\partial \eta}{\partial y} = - \sum_{n=1}^{\infty} k_n a_n \sin \theta_n \sin(k_n x \cos \theta_n + k_n y \sin \theta_n - \omega_n t + \varepsilon_n).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

El mayor desplazamiento se obtiene mediante la doble integración de la aceleración con respecto

al tiempo. La función de covarianza entre estas tres cantidades se calculará como:

$$\begin{aligned}\Psi_{12}(\tau) &= \overline{\xi_1(t)\xi_2(t+\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} k_n a_n^2 \cos\theta_n \operatorname{sen}\omega_n \tau, \\ \Psi_{13}(\tau) &= \overline{\xi_1(t)\xi_3(t+\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} k_n a_n^2 \operatorname{sen}\theta_n \operatorname{sen}\omega_n \tau, \\ \Psi_{23}(\tau) &= \overline{\xi_2(t)\xi_3(t+\tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} k_n^2 a_n^2 \cos\theta_n \operatorname{sen}\theta_n \cos\omega_n \tau.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Los espectros cruzados son calculados para las funciones de covarianza (2.8) usando (7) y (8), y pueden estar relacionados con el espectro direccional de las olas como sigue:

$$\begin{aligned}C_{23}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{23}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) k^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta, \\ Q_{12}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{12}(\tau) \operatorname{sen} 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) k \cos\theta d\theta, \\ Q_{13}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{13}(\tau) \operatorname{sen} 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) k \operatorname{sen}\theta d\theta,\end{aligned}\quad (2.9)$$

donde

$$C_{12}(f) = C_{13}(f) = Q_{23}(f) = 0.$$

Además la función de autocorrelación da los siguientes coespectros, que están relacionados con el espectro direccional,

$$\begin{aligned}C_{11}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{11}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta, \\ C_{22}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{22}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) k^2 \cos^2\theta d\theta, \\ C_{33}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{33}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} S(f, \theta) k^2 \operatorname{sen}^2\theta d\theta,\end{aligned}\quad (2.10)$$

donde

$$Q_{11}(f) = Q_{22}(f) = Q_{33}(f) = 0.$$

Por lo tanto, podemos obtener seis cantidades entre los tres espectros cruzados y las tres funciones de autocorrelación, que están relacionadas con las integrales del espectro direccional con respecto a la dirección indicada por (2.9) y (2.10). Para obtener una estimación del espectro direccional, nosotros asumimos que $S(f, \theta)$ puede ser ampliado en una serie de Fourier de la siguiente manera:

$$S(f, \theta) = \frac{1}{2} A_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(f) \cos n\theta + B_n(f) \operatorname{sen} n\theta].\quad (2.11)$$

Mediante la sustitución de (2.11) en (2.9) y (2.10), y llevando a cabo las integraciones, los coeficientes de Fourier para $n = 0, 1, 2$ pueden ser determinados como sigue:

$$\begin{aligned} A_0(f) = \frac{2}{\pi}C_{11}(f), A_1(f) &= \frac{2}{\pi k}Q_{12}(f), A_2(f) = \frac{2}{\pi k^2}[C_{22}(f) - C_{33}(f)], \\ B_1(f) &= \frac{2}{\pi k}Q_{13}(f), B_2(f) = \frac{4}{\pi k^2}C_{23}(f), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $k = \frac{\omega^2}{g}$ = número de olas, siendo $w = 2\pi f$.

$C_{ii}(\omega) = S_i(\omega)$ = espectro de frecuencia de la componente i.

$C_{ij}(\omega)$ = co-espectro de las componentes i y j.

$Q_{ij}(\omega)$ = cuadratura del espectro de las componentes i y j.

La estimación resultante del espectro direccional representa la serie de Fourier infinita de la ecuación (2.11) sólo hasta el segundo término, y por lo tanto, es una estimación sesgada de la realidad del espectro. La estimación de los coeficientes de la ecuación (2.12), denotados como $\hat{S}_1(f, \theta)$, tiene la siguiente relación con el verdadero espectro:

$$\hat{S}_1(f, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int S(f, \theta) W_1(\phi - \theta) d\phi,$$

donde

$$W_1(\phi) = \frac{\sin \frac{5}{2}\phi}{\sin \frac{1}{2}\phi} = 1 + 2\cos\phi + 2\cos 2\phi.$$

Con el fin de reducir el alcance de las dificultades causadas por el uso de la función de ventana $W_1(\phi)$, Longuet-Higgins propuso el uso de la siguiente fórmula para la estimación del espectro direccional:

$$\hat{S}_2(f, \theta) = \frac{1}{2}A_0 + \frac{2}{3}(A_1\cos\theta + B_1\sin\theta) + \frac{1}{6}(A_2\cos 2\theta + B_2\sin 2\theta).$$

Esto es equivalente a la aplicación de la función de ventana:

$$W_2(\phi) = \frac{8}{3}\cos^4 \frac{1}{2}\phi = 1 + \frac{4}{3}\cos\phi + \frac{1}{3}\cos 2\phi.$$

El método anterior de hacer la estimación espectral se caracteriza por la hipótesis inicial de la forma espectral y la posterior determinación de los coeficientes de los datos de observación. En este sentido, se puede llamar un método paramétrico. Un método similar es aplicable a las mediciones de olas direccionales con arreglo de olas manométricas. Borgman y Panicker han propuesto un método paramétrico para el arreglo de olas manométricas.

El espectro cruzado se supone que se ha tomado del conjunto de los valores medios. En la práctica, cualquier valor calculado del espectro cruzado está sujeto a registros de la variabilidad del muestreo. Se ha llevado a cabo un estudio de simulación numérica en el muestreo de la variabilidad de las estimaciones de la dirección, y se ha encontrado la siguiente relación empírica para el coespectro entre la velocidad vertical y las componentes x e y de la pendiente de la superficie del agua:

$$\frac{\sigma[C_{ij}(f)]}{[C_{ii}(f)C_{jj}(f)]^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{r}},$$

donde σ denota la desviación estandar, C_{ij} es el coespectro entre la i-ésima y la j-ésima componente de la ola, y r es el número de grados de libertad. Debido a la variabilidad en la estimación del espectro cruzado, la densidad estimada para el espectro direccional de la ola está acompañada por los registros estadísticos de la variabilidad. De hecho, Kuik y van Vledder demostraron por medio de las simulaciones de Monte Carlo que la estimación de la media de la dirección de una ola es por medio de los datos del cabeceo y balanceo de boyas que va acompañada de las variaciones de muestreo y que la magnitud del error cuadrático medio va de acuerdo con la predicción teórica de Borgman.

2.2. Representación del modelo de Longuet-Higgins mediante integrales estocásticas y su relación con el espectro direccional.

En 1944, S.O. Rice propuso el siguiente modelo:

$$\zeta(t) = \sum_n C_n \cos(\sigma_n t + \varepsilon_n),$$

para describir el ruido en la corriente eléctrica. En esta relación, $\sigma_n/(2\pi)$ denota las distintas frecuencias, C_n son variables aleatorias gaussianas independientes e idénticamente distribuidas y ε_n son variables aleatorias uniformemente distribuidas en $[0, 2\pi]$.

Luego en 1957, Longuet-Higgins define la siguiente generalización multidimensional del modelo de Rice:

$$\zeta(t, x, y) = \sum_n C_n \cos(u_n x + v_n y + \sigma_n t + \varepsilon_n).$$

Desde entonces, este modelo ha sido utilizado para describir el movimiento del mar.

Otra forma de ver el modelo de Longuet-Higgins es la siguiente:

$$\zeta(t, x, y) = \int_{\Lambda} e^{i(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \omega t)} dM(\lambda_1, \lambda_2, \omega), \quad (2.13)$$

donde Λ es el colector de aire ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\omega^4}{g^2}$), g es la constante gravitacional y M es una medida aleatoria gaussiana ortogonal definida en Λ . Definiendo $\vec{k} = (\lambda_1, \lambda_2)$ y el siguiente cambio de variable $|\vec{k}| = \frac{\omega^2}{g}$, $\lambda_1 = \frac{\omega^2}{g} \cos\Theta$ y $\lambda_2 = \frac{\omega^2}{g} \sen\Theta$ en (2.13) se obtiene:

$$\zeta(t, x, y) = 2 \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{i(|\vec{k}| \cos\Theta x + |\vec{k}| \sen\Theta y + \omega t)} dC(\omega, \Theta), \quad (2.14)$$

donde $dC(\omega, \Theta)$ es una medida aleatoria. Entonces (2.14) se puede escribir como:

$$\zeta(t, x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} dC(\omega, \Theta).$$

Si la función de covarianza, $K(\tau, X, Y)$ se define como:

$$K(\tau, X, Y) = E[\zeta(t, x, y) \bar{\zeta}(t + \tau, x + X, y + Y)],$$

utilizando el hecho de que la varianza es finita, y que,

$$E[dC(\omega, \Theta) \bar{dC}(\omega', \Theta')] = \hat{S}(\omega, \Theta) \delta(\omega - \omega') \delta(\Theta - \Theta') d\omega d\omega' d\Theta d\Theta',$$

donde $\hat{S}(\omega, \Theta)$ es el espectro de dos dimensiones de la superficie de la ola y δ representa la función delta de Dirac. Entonces

$$K(\tau, X, Y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} \hat{S}(\omega, \Theta) d\omega d\Theta. \quad (2.15)$$

Si en la ecuación (2.15) tomamos $X = 0$ y $Y = 0$, obtenemos:

$$K(\tau) := K(\tau, 0, 0) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi \hat{S}(\omega, \Theta) e^{i\omega\tau} d\omega d\Theta,$$

o equivalentemente

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^\infty \hat{S}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

donde

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\pi}^\pi \hat{S}(\omega, \Theta) d\Theta. \quad (2.16)$$

La función $\hat{S}(\omega)$ representa el espectro de frecuencias de la superficie del mar. Este espectro contiene la distribución de la energía de las olas en el dominio de la frecuencia. A veces $\hat{S}(\omega)$ es llamado espectro simétrico dado que $\hat{S}(\omega) = \hat{S}(-\omega)$.

La función de autocorrelación $K(\tau)$ para la elevación de superficie $\zeta(t)$, en un lugar fijo, es una función real, es decir, que $K(\tau) = K(-\tau)$, por lo tanto, $\hat{S}(\omega)$ también está relacionado con $K(\tau)$, de manera que

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \hat{S}(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega,$$

donde, si $K \in L^1$, se tiene

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

La falta de simetría del espectro de frecuencias se definen como: $S(\omega) = 2\hat{S}(\omega)$. Hay que tener en cuenta que en este caso, la ecuación (2.16) se convierte en

$$S(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega, \Theta) d\Theta.$$

2.3. Algunos espectros direccionales.

2.3.1. El espectro direccional de JONSWAP-Cos2s.

La expresión matemática del espectro direccional de JONSWAP-Cos2s es:

$$S(\omega, \Theta) = \alpha \frac{g^2}{\omega^5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right] \gamma^\delta \frac{2^{2s-1} \Gamma^2(s+1)}{\pi \Gamma(2s+1)} \cos^{2s} \left(\frac{\Theta - \Theta_0}{2} \right),$$

donde $-\pi < \Theta < \pi$, $s > 0$, $\delta = \exp \left[-\left(\frac{\omega - \omega_p}{\sqrt{2}\sigma_0\omega_p} \right)^2 \right]$, ω es la frecuencia angular, g es la constante gravitacional, $\cos^{2s} \left(\frac{\Theta - \Theta_0}{2} \right)$ es la función de propagación, $\alpha = 0,076 \left(\frac{gX}{Or} \right)^2$ es un factor de normalización, $\gamma \simeq 3,3$ y

$$\sigma_0 = \begin{cases} 0,07 & \text{si } \omega \leq \omega_p \\ 0,09 & \text{si } \omega > \omega_p. \end{cases}$$

2.3.2. El espectro direccional de von Mises-McCornick.

La expresión matemática que define el espectro direccional de von Mises-McCornick es:

$$S(\omega, \Theta) = I(k) \exp(k \cos(\Theta - \Theta_0)) \frac{(M+1) \left(\frac{H_{m0}}{4} \right)^2}{\omega_p \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^{M+1}} \exp \left[-\frac{M+1}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^M \right],$$

donde

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(k \cos \Theta) d\Theta,$$

$k > 0$, H_{m0} es la altura media de la ola, ω_p es una característica particular de la frecuencia, ω es la frecuencia angular y M satisface

$$\frac{T_p}{T_z} = \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{\frac{1}{M}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{M}\right).$$

La constante T_p es el periodo de la ola (por defecto 11 segundos) y T_z es $0,8143T_p$.

2.4. Registro de olas II.

Estos datos (ver tabla II del apéndice) también fueron tomados de CDIP, los datos son de Cape Canaveral Nearshore en Florida (FL.), estación N° 14301, cuyo despliegue de latitud es 28° 24.001' Norte y el despliegue de longitud es 80° 32.001' Oeste. La profundidad del agua es de 9.87 metros, la variación magnética local es de 06 W grados, el tipo de dato es vectores Datawell, utiliza indicadores de tipo Datawell Marca 3, boya direccional cuya frecuencia de muestreo es de 1.280 Hertz, el tipo de estación es solar, el método para el análisis es Datawell GPS y el 100% de los vectores son libres de errores.

Cada línea de datos en el archivo consta de cuatro columnas. En la primera columna se indica la hora UTC de la muestra más cercana a la segunda, el formato de este número es Año/Mes/Día-Hora/Minuto/Segundo. La segunda columna es el desplazamiento en centímetros de x (Norte - Sur, Norte positivo), la tercera columna es el desplazamiento en cm en y (Oeste-Este, Oeste positivo), y la cuarta y última columna es el desplazamiento en cm en z (vertical).

Dado que el período de muestreo es menos de un segundo (0.78125 segundos), muchas de las líneas están marcadas con el mismo tiempo, por ejemplo, hay dos en 2009/03/01-00/02/19 en los datos. Por supuesto, estas dos muestras se tomaron 0.78125 segundos después, no al mismo tiempo.

2.5. Estimación de espectros direccionales utilizando MATLAB y el principio de medición dado por Longuet-Higgins.

Utilizando el registro mostrado en la tabla II del apéndice y el principio de medición creado por Longuet-Higgins, se creó un espectro direccional mediante los siguientes pasos, primero se calcularon los espectros cruzados utilizando el siguiente algoritmo en MATLAB:

```

x=[ 18; 27; -5; -40; -29; -16; -10; -38; -16; -17; -27; -5; -21; -43; -29; -17; -14;
   -35; -36; 37; 50; 28; 30; 39; 46; 52; 38; 22; 15; 6; -4; -7; -4; -15; -12; -12;
   -11; -14; -24; -40; -23; -25; -28; -10; -29; -32; -4; 7; 4; 25; 18; 35; 32; 20;
   38; 14; 13; 14; 14; -6; -32; -19; 3; 24; 9; -7; -1; 8; -10; -45; -33; -3; 4;
   -18; -15; 12; -13; -30; 4; 37; 21; -6; 9; 26; 9; 8; 14; 2; -12; 3; 10; -16; -6;
   6; 1; -8; -9; -20; -11; 9];
y=[ 4; -27; -10; 22; 8; 24; 38; 33; 28; 13; -5; -6; -18; -27; -39; -14; -4; -19; -8;
   16; 36; 31; 3; -13; -8; -5; -8; -25; -6; 23; 14; -8; 18; 26; 0; -14; -17; -4;
   -4; -14; -8; -4; -3; 18; -3; -30; 5; 25; 5; 0; -5; 12; 31; 20; 18; 4; -4; -5;
   -12; -29; -38; -28; -14; -9; -3; 15; 16; 38; 31; -4; -1; -4; 3; -8; -28; -21;
   -8; 7; 44; 63; 36; 7; -19; -28; -34; -41; -35; -36; -24; 22; 44; 16; 9; 25; 13;
   -15; -17; -14; -8; -1];
z=[ -3; -18; 5; -6; 9; 46; -2; -5; 11; -30; 0; -5; -25; -10; 18; 18; -8; -23; 37;
   53; -18; -27; -19; -5; -2; -3; -12; 1; 19; 18; -10; 8; 10; -14; -9; 0; 2; 3; -8;
   1; 14; -8; 23; -14; -37; 3; 33; -13; -14; 2; 10; 35; -13; 8; -3; -29; 0; 8; -3;
   -22; -8; 21; 19; 11; -6; 12; 20; 4; -34; -32; 4; 5; -14; -28; 14; 11; 16; 33;
   48; 3; -53; -34; -8; -12; -19; 6; 11; 7; 33; 57; -16; -28; 10; 3; -19; -26; -4;
   -6; 14; 13];

```

CUADRATURA DEL ESPECTRO DE XY

```
[Q12,Wxy]=cpsd(x,y,[],[],[],[]); Q12xy=imag(Q12);
```

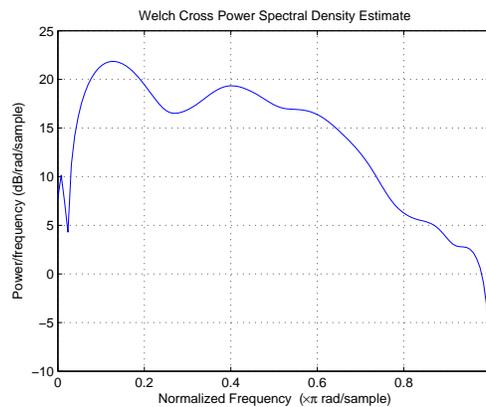


Figura 2.1: Cuadratura del espectro xy.

CUADRATURA DEL ESPECTRO DE XZ

```
[Q13,Wxz]=cpsd(x,z,[],[],[],[]); Q13xz=imag(Q13);
```

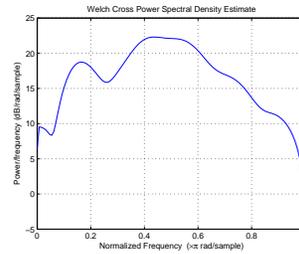


Figura 2.2: Cuadratura del espectro xz.

CO-ESPECTRO DE YZ

```
[C23,Wyz]=cpsd(y,z,[],[],[],[]); C23yz=real(C23);
```

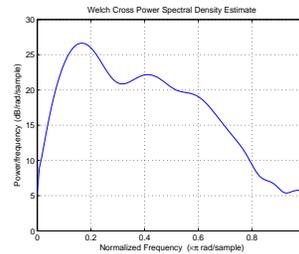


Figura 2.3: Co-espectro yz.

Luego se calcularon los coespectros, que están relacionados con el espectro direccional:

ESPECTRO DE FRECUENCIA XX

```
[C11,Wxx]=cpsd(x,x,[],[],[],[]);
```

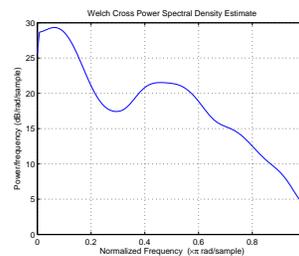


Figura 2.4: Espectro de frecuencia xx.

ESPECTRO DE FRECUENCIA YY

```
[C22,Wyy]=cpsd(y,y,[],[],[],[]);
```

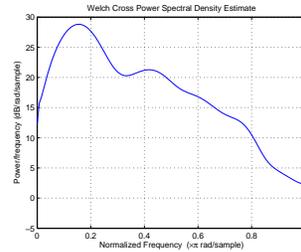


Figura 2.5: Espectro de frecuencia yy.

ESPECTRO DE FRECUENCIA ZZ

```
[C33,Wzz]=cpsd(z,z,[],[],[],[]);
```

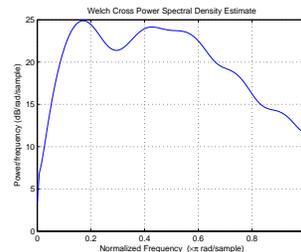


Figura 2.6: Espectro de frecuencia zz.

En estos gráficos podemos observar las densidades espectrales con respecto a los desplazamientos y las alturas de las olas.

Tenemos que CPSD es la potencia de la densidad espectral.

Por ejemplo, el comando `[C23,Wyz]=cpsd(Y,Z,[],[],[],[])` devuelve la estimación de la densidad espectral C23 para las coordenadas YZ y la frecuencia Wyz de las coordenadas YZ, y así respectivamente con cada una de las densidades espectrales y las frecuencias. Luego, el comando `imag` devuelve los datos imaginarios de la densidad espectral y el comando `real` devuelve los datos reales de la densidad espectral.

Para obtener una estimación del espectro direccional, asumimos que $S(f, \theta)$ puede ser ampliado en la serie de Fourier dada en la ecuación (2.11) y calculamos los coeficientes de Fourier mediante las ecuaciones (2.12), en MATLAB queda de la siguiente manera:

```

g=9.8; M=sum(C11); C11=C11/M;
J=sum(C22); C22=C22/J; V=sum(C33); C33=C33/V;

for i=2:129
    A0(i)=(2/pi);
    A1(i)=((2*g/(pi*(Wxy(i)^2)))*(Q12xy(i)/(sqrt(M)*sqrt(J))))/C11(i);
    A2(i)=((2*g^2/(pi*(Wxx(i)^4)))*(C22(i)-C33(i)))/C11(i);
    B1(i)=((2*g/(pi*(Wxz(i)^2)))*(Q13xz(i)/(sqrt(M)*sqrt(V))))/C11(i);
    B2(i)=((4*g^2/(pi*(Wyz(i)^4)))*(C23yz(i)/(sqrt(J)*sqrt(V))))/C11(i);
end

```

Utilizando los coeficientes de Fourier calculados anteriormente y la ecuación (2.13) propuesta por Longuet-Higgins la estimación del espectro direccional se calcula en MATLAB de la siguiente manera:

Primero calculamos la función de propagación, para diversos ángulos, la cual denotamos

```

i=-3.1416;
for j=1:129
    D(j)=(1/2)*A0(j)+(2/3)*(A1(j)*cos(i)+B1(j)*sin(i));
end

```

aquí $i = \theta$ y se varía 51 veces de $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Luego, construimos una matriz con todas las funciones de propagación

```

D=[ D1; D2; D3; D4; D5; D6; D7; D8; D9; D10; D11; D12; D13; D14;
    D15; D16; D17; D18; D19; D20; D21; D22; D23; D24; D25; D26; D27;
    D28; D29; D30; D31; D32; D33; D34; D35; D36; D37; D38; D39; D40;
    D41; D42; D43; D44; D45; D46; D47; D48; D49; D50; D51];

```

Posteriormente, calculamos y graficamos el espectro direccional $S(\omega)$ con los siguientes comandos:

```

S=jonswap
D=spreading(linspace(-pi,pi,51),'cos2s')
Snew=mkdspec(S,D,1)

```

donde S está estructurado así,

```

S: [129x1 double]
w: [129x1 double]
tr: []
h: Inf
type: 'freq'
phi: 0
norm: 0
note: 'JONSWAP, Hm0 = 7, Tp = 11, gamma = 2.3853'
date: '19-Apr-2009 15:57:22'

```

y D está estructurado así

```

S: [51x129 double]
w: [129x1 double]
theta: [51x1 double]
type: 'dir'
phi: 0
note: 'Spreading: cos2s'
th0: 0
data: [15 15 0.5200 5 -2.5000 0 1 Inf]

```

Como resultado obtenemos el siguiente espectro direccional, el cual nos indica que la mayor

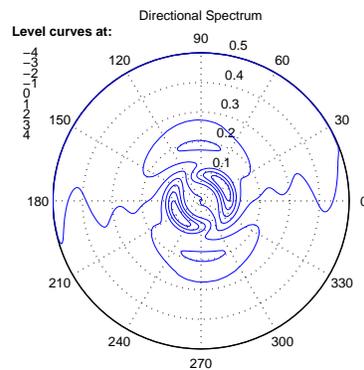


Figura 2.7: Espectro direccional.

cantidad de energía de las olas se encuentra concentrada en $\omega = \frac{\pi}{6}$ y $\omega = \frac{7\pi}{6}$.

También se puede graficar una porción del espectro anterior sólo con las frecuencias y las funciones de propagación para diversos ángulos y queda de la siguiente manera.

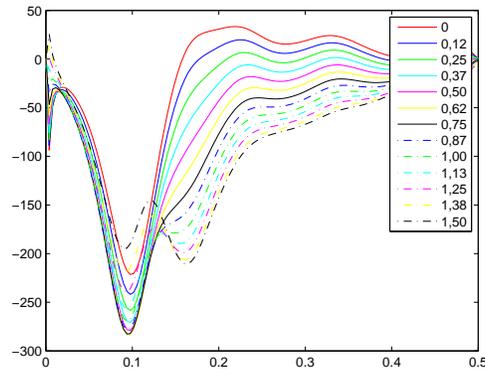


Figura 2.8: Porción del espectro direccional donde cada color representa un ángulo distinto.

Esto nos permite estudiar con más cuidado segmentos del espectro direccional, y además donde se concentra la mayor cantidad de energía de las olas y el algoritmo utilizado para ello fue:

```
plot(Wxx,S25,'r') hold on plot(Wxx,S26,'b') plot(Wxx,S27,'g')
plot(Wxx,S28,'c') plot(Wxx,S29,'m') plot(Wxx,S30,'y')
plot(Wxx,S31,'k') plot(Wxx,S32,'b-.') plot(Wxx,S33,'g-.')
plot(Wxx,S34,'c-.') plot(Wxx,S35,'m-.') plot(Wxx,S36,'y-.')
plot(Wxx,S37,'k-.') hold off
```

Conclusión

Con la implementación de los algoritmos donde se analizaron numéricamente el comportamiento de las olas se puede llegar a las siguientes afirmaciones:

- (1) El movimiento de las olas cambia con el tiempo en forma aleatoria, es decir, tanto la altura de las olas como el período varían aleatoriamente de un ciclo a otro.
- (2) Cuando se trabaja con los promedios de los datos dejamos de lado ciertos datos atípicos y los resultados de los análisis pueden variar, mientras que si trabajamos con las series de tiempo tendremos resultados más confiables.
- (3) En el mar se puede observar que las olas vienen de diferentes direcciones, sin embargo, la frecuencia depende de la función de propagación que lleva a superficies mucho más irregulares, por lo que la orientación de las olas es menos transparente.
- (4) Para estimar el espectro de un proceso Gaussiano uno necesita varias realizaciones de los procesos. Entonces la estimación de un espectro puede ser hecha para cada realización y luego se promedia. Sin embargo, en muchos casos sólo una realización del proceso está disponible. En tal caso una es suficiente asumiendo que el espectro es una función suave de ω y se puede usar esta información para mejorar la estimación.
- (5) Las transformaciones de las olas como la difracción, refracción y reflexión están muy influenciadas por las características de los espectros direccionales de las olas.
- (6) La medición de espectros direccionales de las olas requieren un esfuerzo varias veces mayor que el de los espectros de frecuencia, ya que, los espectros direccionales requieren el registro simultáneo de varios componentes de la ola.
- (7) La cantidad básica utilizada para estimar el espectro direccional es la función de covarianza y las covarianzas cruzadas de los registros (x, y, z) obtenidos por las boyas con acelerómetros.

-
- (8) En realidad para poder tener espectros direccionales más confiables se necesitaría observar la superficie del mar en grandes áreas, pero éstos procedimientos son muy costosos, es por ello, que se recurren a mediciones con boyas y se utilizan los datos que éstas arrojan, tratando de evitar la utilización de datos erróneos, para poder obtener así resultados fiables que se puedan ajustar a la realidad.

Apéndice

Tabla I.

ESTACIÓN 160 JEFFREYS LEDGE, NH.

Fecha / Tiempo (UTC)	Hs (m)	Tp (s)	Dp (deg)	Ta (s)	SST (C)
10-06-2008 / 20:56	0.52	3.57	16	3.11	13.2
10-06-2008 / 20:26	0.53	3.85	16	3.24	13.3
10-06-2008 / 19:56	0.61	4.00	14	3.40	13.2
10-06-2008 / 19:26	0.63	4.00	19	3.40	13.2
10-06-2008 / 18:56	0.60	4.00	19	3.31	13.2
10-06-2008 / 18:26	0.68	3.85	15	3.42	13.2
10-06-2008 / 17:56	0.65	3.85	22	3.43	13.2
10-06-2008 / 17:26	0.74	4.00	16	3.44	13.2
10-06-2008 / 16:56	0.76	4.00	19	3.40	13.2
10-06-2008 / 16:26	0.73	4.17	25	3.42	13.2
10-06-2008 / 15:56	0.75	4.00	19	3.40	13.1
10-06-2008 / 15:26	0.76	3.85	21	3.44	13.1
10-06-2008 / 14:56	0.72	3.70	15	3.32	13.1
10-06-2008 / 14:26	0.72	3.70	18	3.28	13.0
10-06-2008 / 13:56	0.69	3.85	22	3.33	13.0
10-06-2008 / 13:26	0.70	3.70	19	3.20	13.0
10-06-2008 / 12:56	0.72	3.85	16	3.30	13.0
10-06-2008 / 12:26	0.73	4.00	21	3.41	13.0
10-06-2008 / 11:56	0.71	3.85	23	3.30	13.0
10-06-2008 / 11:26	0.73	4.00	14	3.36	13.0

ESTACIÓN 160 JEFFREYS LEDGE, NH.

Fecha / Tiempo (UTC)	Hs (m)	Tp (s)	Dp (deg)	Ta (s)	SST (C)
10-06-2008 / 10:56	0.72	4.00	18	3.36	13.0
10-06-2008 / 10:26	0.75	3.85	8	3.34	13.0
10-06-2008 / 09:56	0.70	3.70	11	3.28	13.0
10-06-2008 / 09:26	0.68	3.70	4	3.33	13.0
10-06-2008 / 08:56	0.70	3.70	2	3.19	13.0
10-06-2008 / 08:26	0.74	3.70	1	3.29	13.0
10-06-2008 / 07:56	0.70	3.45	357	3.16	13.0
10-06-2008 / 07:26	0.65	3.03	8	2.94	13.0
10-06-2008 / 06:56	0.56	2.70	358	2.86	13.0
10-06-2008 / 06:26	0.43	7.69	136	2.85	13.1
10-06-2008 / 05:56	0.33	7.14	126	3.73	13.0
10-06-2008 / 05:26	0.36	7.69	136	3.68	13.0
10-06-2008 / 04:56	0.38	7.14	136	3.62	13.0
10-06-2008 / 04:26	0.39	7.69	127	3.61	13.0
10-06-2008 / 03:56	0.38	6.67	130	3.52	13.0
10-06-2008 / 03:26	0.41	7.14	137	3.60	13.1
10-06-2008 / 02:56	0.41	7.14	134	3.41	13.1
10-06-2008 / 02:26	0.37	7.14	137	3.57	13.0
10-06-2008 / 01:56	0.38	6.67	137	3.62	13.1
10-06-2008 / 01:26	0.40	7.14	134	3.62	13.0
10-06-2008 / 00:56	0.41	9.88	126	3.68	13.0
10-06-2008 / 00:26	0.40	2.56	229	3.45	13.0
10-05-2008 / 23:56	0.36	7.69	132	3.93	13.1
10-05-2008 / 23:26	0.33	11.11	119	4.10	13.1
10-05-2008 / 22:56	0.33	9.88	133	4.66	13.2
10-05-2008 / 22:26	0.32	7.69	136	4.64	13.4
10-05-2008 / 21:56	0.32	7.69	146	5.09	13.5

Tabla II.

ESTACIÓN 14301 CAPE CANAVERAL NEARSHORE, FL.

Año/Mes/Día-Hora/Min/Seg	Desplazamiento x	Desplazamiento y	Desplazamiento z
2009/03/01-00/02/17	18	4	-3
2009/03/01-00/02/18	27	-27	-18
2009/03/01-00/02/19	-5	-10	5
2009/03/01-00/02/19	-40	22	-6
2009/03/01-00/02/20	-29	8	9
2009/03/01-00/02/21	-16	24	46
2009/03/01-00/02/22	-10	38	-2
2009/03/01-00/02/22	-38	33	-5
2009/03/01-00/02/23	-16	28	11
2009/03/01-00/02/24	-17	13	-30
2009/03/01-00/02/25	-27	-5	0
2009/03/01-00/02/26	-5	-6	-5
2009/03/01-00/02/26	-21	-18	-25
2009/03/01-00/02/27	-43	-27	-10
2009/03/01-00/02/28	-29	-39	18
2009/03/01-00/02/29	-17	-14	18
2009/03/01-00/02/30	-14	-4	-8
2009/03/01-00/02/30	-35	-19	-23
2009/03/01-00/02/31	-36	-8	37
2009/03/01-00/02/32	37	16	53
2009/03/01-00/02/33	50	36	-18
2009/03/01-00/02/33	28	31	-27
2009/03/01-00/02/34	30	3	-19
2009/03/01-00/02/35	39	-13	-5
2009/03/01-00/02/36	46	-8	-2
2009/03/01-00/02/37	52	-5	-3
2009/03/01-00/02/37	38	-8	-12
2009/03/01-00/02/38	22	-25	1

ESTACIÓN 14301 CAPE CANAVERAL NEARSHORE, FL.

Año/Mes/Día-Hora/Min/Seg	Desplazamiento x	Desplazamiento y	Desplazamiento z
2009/03/01-00/02/39	15	-6	19
2009/03/01-00/02/40	6	23	18
2009/03/01-00/02/40	-4	14	-10
2009/03/01-00/02/41	-7	-8	8
2009/03/01-00/02/42	-4	18	10
2009/03/01-00/02/43	-15	26	-14
2009/03/01-00/02/44	-12	0	-9
2009/03/01-00/02/44	-12	-14	0
2009/03/01-00/02/45	-11	-17	2
2009/03/01-00/02/46	-14	-4	3
2009/03/01-00/02/47	-24	-4	-8
2009/03/01-00/02/47	-40	-14	1
2009/03/01-00/02/48	-23	-8	14
2009/03/01-00/02/49	-25	-4	-8
2009/03/01-00/02/50	-28	-3	23
2009/03/01-00/02/51	-10	18	-14
2009/03/01-00/02/51	-29	-3	-37
2009/03/01-00/02/52	-32	-30	3
2009/03/01-00/02/53	-4	5	33
2009/03/01-00/02/54	7	25	-13
2009/03/01-00/02/55	4	5	-14
2009/03/01-00/02/55	25	0	2
2009/03/01-00/02/56	18	-5	10
2009/03/01-00/02/57	35	12	35
2009/03/01-00/02/58	32	31	-13
2009/03/01-00/02/58	20	20	8
2009/03/01-00/02/59	38	18	-3
2009/03/01-00/03/00	14	4	-29
2009/03/01-00/03/01	13	-4	0

ESTACIÓN 14301 CAPE CANAVERAL NEARSHORE, FL.

Año/Mes/Día-Hora/Min/Seg	Desplazamiento x	Desplazamiento y	Desplazamiento z
2009/03/01-00/03/02	14	-5	8
2009/03/01-00/03/02	14	-12	-3
2009/03/01-00/03/03	-6	-29	-22
2009/03/01-00/03/04	-32	-38	-8
2009/03/01-00/03/05	-19	-28	21
2009/03/01-00/03/05	3	-14	19
2009/03/01-00/03/06	24	-9	11
2009/03/01-00/03/07	9	-3	-6
2009/03/01-00/03/08	-7	15	12
2009/03/01-00/03/09	-1	16	20
2009/03/01-00/03/09	8	38	4
2009/03/01-00/03/10	-10	31	-34
2009/03/01-00/03/11	-45	-4	-32
2009/03/01-00/03/12	-33	-1	4
2009/03/01-00/03/12	-3	-4	5
2009/03/01-00/03/13	4	3	-14
2009/03/01-00/03/14	-18	-8	-28
2009/03/01-00/03/15	-15	-28	14
2009/03/01-00/03/16	12	-21	11
2009/03/01-00/03/16	-13	-8	16
2009/03/01-00/03/17	-30	7	33
2009/03/01-00/03/18	4	44	48
2009/03/01-00/03/19	37	63	3
2009/03/01-00/03/20	21	36	-53
2009/03/01-00/03/20	-6	7	-34
2009/03/01-00/03/21	9	-19	-8
2009/03/01-00/03/22	26	-28	-12
2009/03/01-00/03/23	9	-34	-19
2009/03/01-00/03/23	8	-41	6

ESTACIÓN 14301 CAPE CANAVERAL NEARSHORE, FL.

Año/Mes/Día-Hora/Min/Seg	Desplazamiento x	Desplazamiento y	Desplazamiento z
2009/03/01-00/03/24	14	-35	11
2009/03/01-00/03/25	2	-36	7
2009/03/01-00/03/26	-12	-24	33
2009/03/01-00/03/27	3	22	57
2009/03/01-00/03/27	10	44	-16
2009/03/01-00/03/28	-16	16	-28
2009/03/01-00/03/29	-6	9	10
2009/03/01-00/03/30	6	25	3
2009/03/01-00/03/30	1	13	-19
2009/03/01-00/03/31	-8	-15	-26
2009/03/01-00/03/32	-9	-17	-4
2009/03/01-00/03/33	-20	-14	-6
2009/03/01-00/03/34	-11	-8	14
2009/03/01-00/03/34	9	-1	13

Bibliografía

- [1] CHOW, VEN TE (1982). Advances in HYDROSCIENCE. Volumen 13 - 1982. Academic Press, Inc. Citado en página(s): 221-227.
- [2] FLORES, ESTEBAN & LEÓN R, JOSÉ R. (2000). Random seas, level sets and applications: specular points, contours, wave crests. Citado en página(s): 1-5.
- [3] L.H, KOOPMANS (1974). The Spectral Analysis of Time Series. Academic Press, Inc. Citado en página(s): 49-65.
- [4] MIKOSCH, THOMAS (1998). Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View. World Scientific Publising Co. Pte. Ltd. Volumen 6. Citado en página(s): 23.
- [5] OCHI, MICHEL K. (1998). OCEAN WAVES, The Stochastic Approach. Cambridge ocean technology series; 6. Citado en página(s): 1-9.
- [6] THE WAFO GROUP (2000). WAFO, A MATLAB Toolbox for analysis of a random waves and loads. Lund Institute of Technology, Center for Mathematical Sciences, Mathematical Statistics. Citado en página(s): 6-10, 13-20.
- [7] Y, GODA (2000). Random seas and design of maritime structures. World Scientific Publising Co. Pte. Ltd. Volumen 15. Citado en página(s): 336-356.