UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Cohomología Invariante por acciones libres de $\mathbf{S}^1$

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Expedito J. Cedeño E.** para optar al Título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. Fermín Dalmagro.

Caracas, Venezuela
Julio 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Cohomología invariante**", presentado por el **Br. Expedito Jesus Cedeño Espinoza**, titular de la Cédula de Identidad **18099367**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr.Fermín Dalmagro
Tutor

MSc. Tomás Guardia
Jurado

Dr. Mauricio Angel
Jurado

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

La cohomología de De Rham es un funtor de la categoría de las variedades diferenciables en los espacios vectoriales y detecta estructuras geométricas en variedades, cuando la variedad esta afectada por la acción de un grupo de Lie compacto podemos determinar la cohomología de invariante de De Rham, dada por las formas invariantes por la acción. En [2]se demuestra que ambas cohomologías coinciden para cualquier acción. En este trabajo probaremos este mismo resultado para acciones libres de $\mathbf{S}^1$ para ello haremos uso del truco de Bredon.

En el capitulo uno se hará un breve estudio de las variedades diferenciales,lo que permitirá sentar las bases para así avanzar y profundizar de manera eficiente hacia el problema central del trabajo, en el capitulo dos se estudiará las nociones de acciones de grupos y fibrados, herramientas necesarias para hacer la construcción del fibrado tangente a una variedad, esto permitirá introducir la noción de campos vectoriales. Nuestro norte en el capitulo tres será definir las k-formas diferenciales, relacionaremos los conceptos de forma multilineal y alternada con las nociones de variedades diferenciables estudiadas en los primeros dos capítulos, construiremos el fibrado de formas, para luego definir las k-formas diferenciables.

En el capitulo cuatro se aplican las conocimientos desarrollados en el capitulo tres para introducir el concepto de cohomología de De Rham, calcularemos la cohomología de

De Rham de la esfera $\mathbf{S}^n$ y de $\mathbb{R}^n$. por ultimo en el capitulo cinco definiremos el concepto de cohomología invariante y probaremos que para acciones libres de $\mathbf{S^1}$, la inclusion del complejo invariante en el complejo de De Rham induce isomorfismos en cohomología.

CAPÍTULO 1

VARIEDADES DIFERENCIALES

1.1 Variedades Diferenciales

Definición 1.1.1. Dado M un espacio Hausdorff, 2 Numerable y Localmente Compacto, un **n-Sistema Diferenciable** en M, es una familia de pares $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ tales que:

1. $\{U_\alpha\}$ es un cubrimiento de M por abiertos conexos.

2. $\forall \alpha \in \Lambda,\ \varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre su imagen abierta.

3. $\forall\ \alpha, \beta \in \Lambda\ \forall\ x \in U_\alpha \cap U_\beta$ existe un un entorno abierto y conexo W de x tal que: $\Gamma = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(W) \longrightarrow \varphi_\beta(W)$ es un difeomorfismo.

Notemos que si M posee un n-sistema diferenciable éste es único, por lo cual de ahora en adelante nos referimos únicamente a sistemas diferenciables omitiendo el entero n.

Los pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son llamados **cartas** de Γ y usualmente se dice que Γ es un sistema diferenciable de cartas de M.

Ejemplo 1.1.1. En $\mathbb{R}^n$ la familia de difeomorfismos locales es un sistema diferenciable.

Ejemplo 1.1.2. En $\mathbf{S}^n$ la familia $U_v = \{z \in \mathbf{S}^n : \ \|z - v\| < \sqrt{2}\ \}$ y $P_v : U_v \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es la composición de la proyección canónica de U_v en el plano $\pi_v = \{z \in \mathbb{R}^{\ltimes} \ :< z, v >= 0\ \}$ con la rotación $\rho_{(v,N)}$, donde N es el polo norte de $\mathbf{S}^n$.

Ejemplo 1.1.3. En $\mathbf{S}^n$ la familia $\{(V_z, \varphi_z)_z \in \mathbf{S}^n\}$ siendo $V_z = \mathbf{S}^n - \{z\}$ es la composición de la proyección estereográfica con la rotación $\rho_{(v,N)}$.

Ejemplo 1.1.4. En $\mathbb{R}^n_p = \mathbf{S}^{n+1}/\sim$ donde $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$ la familia $\{(U_v = U_V/\sim, P_v)_{v\in\mathbf{S}^n}\}$ definida en (b) es un sistema diferenciable.

Definición 1.1.2. Dos sistemas diferenciables se dicen compatibles si su unión es a su vez un sistema diferenciable.

Ejemplo 1.1.5. En $\mathbf{S}^n$ los sistemas definidos (b) y (c) en son compatibles.

Ejemplo 1.1.6. En $\mathbb{R}^n$ el sistema dado en (a) y el sistema $\{(\mathbb{R}^n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\}$ son compatibles.

Notemos que la condición de compatibilidad es una relación de equivalencia, en cada clase de equivalencia la inclusion determina un orden parcial y por el Lema de Zorn, existen elementos maximales.

Definición 1.1.3. Una **variedad diferenciable** es un espacio M Hausdorff, 2 Numerable y localmente Compacto que posee al menos un sistema diferenciable. El numero n asociado es llamado la dimension de M y diremos que M es una n-Variedad Diferenciable.

Observemos que si M es una variedad diferenciable con sistema diferenciable $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ y A es un abierto conexo de M, entonces la familia $\Gamma_A = \{(A \cap U_\alpha, \varphi_\alpha/A \cap U_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un sistema diferenciable en A, es decir A es una variedad diferenciable.

Los siguientes resultados son inmediatos de la definición de n-Variedad Diferenciable.

***Proposición* 1.1.1.** *1. La unión disjunta de n-variedades diferenciables es una n-variedad diferenciable.*

2. Si M es una n-variedad diferenciable y N es una k-variedad diferenciable entonces $M \times N$ es una n+k-variedad diferenciable.

Consideremos el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{(n,n)} : detA \neq 0\}$, $GL_n\mathbb{R}$ es un abierto en $\mathbb{R}^{2n}$ pues es la preimagen de $\mathbb{R} - \{0\}$ a través de la función continua determinante, de modo que $GL_n\mathbb{R}$ es una 2n-variedad diferenciable este hecho lo enunciamos en el siguiente lema:

***Lema* 1.1.1.** *El grupo General Lineal $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{(n,n)} : detA \neq 0\}$ es una variedad diferenciable.*

1.2 Funciones Diferenciables

Definición 1.2.1. Dadas M y N dos n-variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación continua, diremos que f es **diferenciable**, si para todo par de sistemas diferenciables $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ en M y $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in\Lambda'}$ en N respectivamente, $\forall\ (\alpha, \beta) \in\ \Lambda \times \Lambda'$ si $U_\alpha \cap f^{-1} \neq \emptyset$ entonces la aplicación: $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \longrightarrow \psi_\beta(V_\beta)$ es una aplicación diferenciable, en el sentido de la diferenciabilidad de funciones en $\mathbb{R}^n$.

Dado que todo abierto conexo W de M es una variedad diferenciable, diremos que f es diferenciable en W si lo es al considerar en W la estructura de variedad diferenciable que éste adquiere de M.

1.3 Particiones de la unidad

Las particiones de la unidad desempeñarán un papel importante en el desarrollo y culminación del presente trabajo, por tal razón haremos un estudio breve de las mismas.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definimos el **soporte** de f, como el conjunto:

$$Spt(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

A continuación enunciamos la definición de partición de la unidad para un espacio topológico.

Definición 1.3.2. Dado X un espacio topológico de Hausdorff, la familia $\{p_\alpha : X \longrightarrow [0,1] :\}_{\alpha\in\Lambda}$ de funciones continuas es una **partición de la unidad** si satisface:

1.$\{Spt(p_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento localmente finito de X.

2.$\sum_{\alpha\in\Lambda} p_\alpha(x) = 1$, para cada **x** en X.

Definición 1.3.3. Diremos que una partición de la unidad $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ esta subordinada a un cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\beta\in\Lambda}$, si para cada α existe β, tal que $p_\alpha(U_\alpha) \subset\ U_\beta$.

En un espacio topológico la condición de paracompacidad, garantiza la existencia de particiones de la unidad, teniéndose así el siguiente resultado que es muy conocido de topología.

***Proposición* 1.3.1.** *Dado X un espacio topológico de Hausdorff y paracompacto, para cada cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ existe una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$.*

Nótese que todo espacio topológico de Hausdorff, 2 Numerable y localmente compacto resulta ser paracompacto, por tanto el resultado anterior lo podemos extender a Variedades diferenciables como sigue:

***Teorema* 1.** *Dada M una n-variedad diferenciable con sistema diferenciable $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta\in\Lambda}$ existe una partición de la unidad diferenciable $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$ subordinada a $\{U_\beta\}$.*

Demostración *:Ver [7, teorema 1.4.1, pag 7].*

CAPÍTULO 2

FIBRADOS DIFERENCIALES

2.1 Fibrados Diferenciales

Definición 2.1.1. Sea G un grupo, diremos que G es un **grupo topológico**, si G posee una topología que hace que las operaciones de grupo sean continuas.

Definición 2.1.2. un grupo topológico es un **grupo de Lie** si es una variedad diferenciable con las operaciones diferenciables.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio topológico, G un grupo topológico, una **acción** de G en X es una aplicación $\theta : G \times X \longrightarrow X$ que satisface las siguientes operaciones:

a. $\theta(e, x) = x, \ \forall x \ \in X$.

b. $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x), \ \forall x \ \in X, \ \forall \ g, h \ \in G$.

En este caso decimos que G actúa sobre X a través de θ o simplemente G actúa sobre X.

Ejemplo 2.1.1.

$\theta : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$

$\theta(z,(z_0,z_1,...,z_n)) = (zz_0, zz_1, ...zz_n)$

Ejemplo 2.1.2.

$\theta : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$

$\theta(z,(z_0,z_1,...,z_n)) = (zz_0, z_1, ...z_n)$

Ejemplo 2.1.3.

$\theta : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\theta(A, X) = AX$

Definición 2.1.4. Dados g grupo y X espacio topológico, si G actúa sobre X entonces:

i. La **orbita** de x es el conjunto: $O_x = \{y \in X : gx = y\}$.

ii. La **isotropía** de x es el subgrupo: $G_x = \{g \in G : gx = x\}$.

Podemos establecer en X la siguiente relación de equivalencia: $x \sim y$ si y solo si $O_x = O_y$, el espacio cociente $X/\sim$ es el **espacio de orbitas** y se denota X/G.

Definición 2.1.5. Sea $\theta : G \times X \longrightarrow X$ una acción entonces:

1. θ es **efectiva** si para todo $g \in G$ existe $x \in X$ tal que $gx = x$
2. θ es **libre** si $G_x = \{e\}$ para todo x en X.

Definición 2.1.6. sean E, B y F espacios topológicos y sea $p : E \longrightarrow B$, diremos que p es un **fibrado trivial** si existe un homeomorfismo $\psi : E \longrightarrow B \times F$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & B \times F \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Diremos que F es la fibra, B la base y E el techo del fibrado.

Definición 2.1.7. sean E, B y F espacios topológicos y sea $p : E \longrightarrow B$ diremos que p es Un **fibrado localmente trivial**, si existe una familia $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, tal que:

1. $\{V_\alpha\}$ es un cubrimiento por abierto conexos de B

2. $\psi_\alpha : p^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$ es un fibrado trivial con fibra F

A la familia $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ se le llama mapa del fibrado localmente trivial p y el par (V_α, ψ_α) trivialización local de p.

Definición 2.1.8. Sea $p : E \longrightarrow B$ un fibrado localmente trivial con fibra F y mapa $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, sea G un grupo topológico, diremos que G es un **grupo estructural de p** si $\forall(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ tal que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ existe una aplicación continua $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow G$ tal que $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(b, z) = (b, g_{\alpha\beta}(b)z)$, satisfaciendo:

a. $g_{\alpha\beta}(b) = e$ para algún $b \in\ V_\alpha \cap V_\beta$

b. $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$

c. $g_{\alpha\beta} \circ g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

Las funciones $g_{\alpha\beta}$ son llamadas funciones de transición o cociclos de Cesch

Definición 2.1.9. Un **fibrado vectorial**, es un fibrado localmente trivial $p : E \longrightarrow B$ con fibra $\mathbb{R}^n$ y grupo estructural, el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$.

Definición 2.1.10. Diremos que un fibrado vectorial, $p : E \longrightarrow B$ es un **fibrado diferenciable** si la base B es una variedad diferenciable y los cociclos $g_{\alpha\beta}$ son funciones diferenciables.

Observación 2. Dado que B es una variedad diferenciable posee un sistema diferenciable $\Gamma = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda'}$, el cubrimiento $\{V_\alpha\}$ considerado en el mapa de p no necesariamente es el mismo que el cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de Γ, sin embargo, si se considera en B un sistema diferenciable maximal se corrige este detalle.

En un fibrado diferenciable $p : E \longrightarrow B$ la base induce una estructura de variedad diferenciable en el techo, esto se expresa en el siguiente resultado:

***Proposición* 2.1.1.** *Sea $p : E \longrightarrow B$ un fibrado diferenciable, entonces E es una variedad diferenciable,*

Demostración

Solo basta dotar a E de un sistema diferenciable,Dados $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ sistema diferenciable maximal de B y $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ mapa de p, consideremos la siguiente familia de pares:

$\Gamma = \{(p^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ \Psi_\alpha) : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}\}$

Se tiene que:

i. Como p es una función continua la imagen inversa de un abierto conexo resulta ser un abierto conexo así: $E = p^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} p^{-1}(U_\alpha)$

item[] ii.

$$\begin{aligned}\big((\phi_\alpha \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ \Psi_\alpha\big) \circ \big((\phi_\beta \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ \Psi_\beta\big)^{-1} &= \big((\phi_\alpha \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ \Psi_\alpha\big) \circ \big(\Psi_\beta^{-1} \circ (\phi_\beta^{-1} \times I_{\mathbb{R}^n})\big)\\ &= (\phi_\alpha \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ (\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}) \circ (\phi_\alpha^{-1} \times I_{\mathbb{R}^n})\\ &= (\phi_\alpha \times I_{\mathbb{R}^n}) \circ (I_B \times g_{\alpha\beta}) \circ (\phi_\alpha^{-1} \times I_{\mathbb{R}^n})\\ &= (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}) \times g_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

Y puesto que los cociclos son funciones Diferenciables, E es una variedad diferenciable.

□

Dado un punto p de una variedad diferenciable M se desea construir un espacio tangente a la variedad en dicho punto. Dada M una variedad diferenciable y p un punto de M denotamos como $C^\infty(M, p)$ al conjunto al conjunto de todas las funciones diferenciables a valores reales definidas en algún entorno de p, claramente $C^\infty(M, p)$ es un algebra.

Definición 2.1.11. Dada M una variedad diferenciable y p un punto de M, un **vector tangente** a M en el punto p es una aplicación lineal $v : C^{\infty}(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la identidad de Jacobi, esto es:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$$

Denotaremos por T_pM al conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto p, observe que T_pM es un espacio vectorial, por tanto se puede hablar de la dimension y base para el espacio vectorial T_pM.

Dado que el concepto de espacio tangente en un punto p de M es un concepto local, $T_pM = T_pU_\alpha$ para cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ carta de M, ademas como φ_α transforma difeomorficamente a U_α en $\mathbb{R}^n$ y dado que el espacio tangente a un punto en $\mathbb{R}^n$ es precisamente $\mathbb{R}^n$, cabe esperar que $T_pM \cong \mathbb{R}^n$, de allí que se tenga que $Dim(T_pM) = Dim(T_p\mathbb{R}^n) = Dim(\mathbb{R}^n)$

Definición 2.1.12. Dadas M y N dos variedades diferenciales, $\phi : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, para cada p en M se define el **diferencial** de ϕ como la aplicación lineal:

$$d\phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\phi(p)}N$$

$$(d\phi_p(v))(f) = v(f \circ \phi) \qquad \forall\ v \ \in\ T_pM \text{ y } \forall\ f \ \in\ C^{\infty}(N, \phi(p))$$

***Proposición* 2.1.2.** *Sean M, N Y P variedades diferenciables y sean $\phi_1 : M \longrightarrow N$, $\phi_2 : N \longrightarrow P$, entonces para todo p en M se tiene:*

i. Si $\phi : M \longrightarrow M$ la identidad entonces $d\phi = I_{T_pM}$

ii. $d(\phi_2 \circ \phi_1)_p = d\phi_{2_{\phi_1(p)}} \circ d\phi_{1_p}$

Demostración

i. Es inmediata de la definición.

ii. Tomemos v en T_pM y f en $C^\infty\big(P, (\phi_2 \circ \phi_1)(p)\big)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\big(d(\phi_2 \circ \phi_1)_p(v)\big)(f) &= v\big(f \circ (\phi_2 \circ \phi_1)\big)\\ &= v\big((f \circ \phi_2) \circ \phi_1\big)\\ &= \big(d\phi_{1_p}(v)\big)(f \circ \phi_2)\\ &= \big(d\phi_2(d\phi_{1_p}(v))\big)(f)\\ &= \big(d\phi_{2_{\phi_1}} \circ d\phi_{1_p}(v)\big)(f)\end{aligned}$$

□

Observación 3. De i. y ii. se deduce que si ϕ es un difeomorfismo entonces $d\phi_p$ es un isomorfismo.

Dada M una variedad diferenciable y $\Gamma = (U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n))\}_{\alpha\in\Lambda}$, para cada carta $U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos por $x_j : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ a la composición $r_j \circ \varphi_\alpha$, donde r_j es la j-ésima proyección de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. En lo que sigue x_j es la j-ésima coordenada de ϕ_α y denotamos $\phi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$.

Para cada p en U_α denotaremos por $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ al vector tangente definido por

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \tfrac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial r_i}|_{\varphi(p)} \qquad \forall f \ \in \ C^\infty(M,p)$$

***Proposición* 2.1.3.** *Dada M una variedad diferenciable con sistema diferenciable, $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n))\}_{\alpha\in\Lambda}$ y sea p un punto de M entonces el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ es una base para T_pM.*

Demostración

Solo basta probar que el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ es linealmente independiente, para ello, tomemos $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ si $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p = 0$; entonces

$$0 = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p (x_j) = a_j$$

Por tanto los vectores $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ son linealmente independiente, así que son base para T_pM.

$\square$

2.2 Fibrado Tangente

Definición 2.2.1. Dada M una variedad diferenciable, definimos:

i. $T_M = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$

ii. $\pi : T_M \longrightarrow M; \quad \mu(v) = p \quad si\ v\ \in\ T_pM$

Veamos que π sea un fibrado, para ello debemos dotar a T_M con una estructura de espacio topológico que convierta a π en una aplicación continua.

consideremos $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ sistema diferenciable maximal de M y tomemos p en U_α para algún α. si v pertenece a $\pi^{-1}(U_\alpha)$, $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$, De modo que se define $\phi_\alpha : \mu^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ por la formula:

$$\phi_\alpha(v) = \phi_\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p\right) = (p, a_1, ..., a_n)$$

Claramente ϕ_α es una biyección, además damos a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ la topología inducida por ϕ_α, esto es, dado V subconjunto de $\pi^{-1}(U_\alpha)$, V Será abierto si es la imagen inversa de un abierto a través de ϕ_α, De manera análoga T_M adquiere la topología inducida por la inclusion , es decir dado A subconjunto de T_M, A es abierto si $A \cap \pi^{-1}(U_\alpha)$ resulta ser abierto en $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata construcción hecha previamente:

***Proposición* 2.2.1.** *dada M una variedad diferenciable, entonces $(T_M, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ es un fibrado diferenciable.*

Demostración

Consideremos $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ sistema diferenciable maximal de M y $\Upsilon = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ mapa de π, entonces:

i. La aplicación $\pi : T_M \longrightarrow M$ es una aplicación sobreyectiva.

ii. La aplicación $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo que satisface $\pi \circ \phi_\alpha = \pi_1$, donde $\pi_1 : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_\alpha$ es la proyección canónica sobre el primer factor.

iii. Tomemos (U_α, ϕ_α) , (U_β, ϕ_β) dos trivializaciones locales de π tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, a_1, ..., a_n) = \phi_\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\right) = (p.b_1, ..., b_n)$$

Por lo tanto $b_j = \sum_{i=1}^n a_i J_{ij}\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right) \mid_{\varphi_\beta(p)}$, de este modo los cociclos son las matrices jacobianas asociadas a $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$

Así π es un fibrado diferencial.

□

2.3 Campos vectoriales

Dada M una variedad diferenciable,para cada punto p de M, el fibrado tangente, permite establecer aplicaciones suaves de vectores, estas aplicaciones son conocidas como campos vectoriales, su aplicación en el calculo vectorial es muy amplia

Definición 2.3.1. Dada M una variedad diferenciable, un **campo vectorial** es una sección diferenciable del fibrado tangente esto es: Una aplicación diferenciable $\chi : M \longrightarrow T_M$ tal que

$$p \circ \chi = i_M$$

Denotamos por $\chi(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales de M.

CAPÍTULO 3

FORMAS DIFERENCIALES

3.1 Formas Diferenciales

En lo que sigue, E representara un espacio vectorial de dimension n, sobe el cuerpo de los numeros reales

Definición 3.1.1. Para $k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$ se define una **k-forma alternada** como una aplicación $\alpha : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

1. α es lineal en cada variable

2. Dado $(v_1, ..., v_k) \in E^k$ $\alpha(v_1, ..., v_k) = \varepsilon(\sigma)\alpha v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}$ $\forall \sigma \in S_k$

Siendo $\mathbf{S}_k$, el conjunto de las permutaciones de orden k

***Proposición* 3.1.1.** *si α es una k-forma alternada entonces: $\alpha(v_1, ...v_i, ..., v_j..., v_k) = 0$ siempre que $v_i = v_j$ si $i \neq j$*

Demostración

Fijemos i, j tales que $v_i = v_j$ si $i \neq j$, y tomemos la transposición

$$\sigma = \begin{cases} \sigma(i)=j, \ \sigma(j)=i \\ \sigma(k)=k \quad si \quad k\neq i,j \end{cases}$$

entonces resulta

$$\alpha(v_1, ..., v_k) = \varepsilon(\sigma)\alpha\big(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}\big) = -\alpha(v_1, ..., v_k)$$

por lo que $\alpha(v_1, ..., v_k) = 0$

$\square$

Denotaremos por $\bigwedge^k(E)$ al espacio de todas las k formas alternadas sobre E, notemos que $\bigwedge^k(E)$ es un espacio vectorial, mas aun, es un sub espacio del espacio vectorial de todas las aplicaciones multilineales y continuas sobre E.

Es claro que $\bigwedge^1(E) = E^*$ el espacio dual de E y convenimos que $\bigwedge^0(E) = \mathbb{R}$

Definición 3.1.2. Sea $\alpha \in \bigwedge^k(E)$ y sea $\beta \in \bigwedge^p(E)$ el **producto exterior** de α y β es la $(k + p)$-forma dada por:

$\alpha\wedge\beta(v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+p}) = \frac{1}{(p+k)!}\sum_{\sigma\in S_{k+p}} \varepsilon(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+p)})$

Las propiedades de este producto exterior se enuncian en la siguiente proposición.

***Proposición* 3.1.2.** *Dadas $\alpha \in \bigwedge^k(E)$ y $\beta \in \bigwedge^p(E)$ el producto exterior $\alpha\wedge\beta$ satisface:*

1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kp}\beta \wedge \alpha$

2. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

3. $\alpha \wedge \alpha = 0$

Demostración

Consultar [3, paginas 17-18]

Notemos que si E es un espacio de dimension n y $k < n$ entonces $dim(\bigwedge^k(E)) = \binom{n}{k}$ cuando $k > n$ $\bigwedge^k(E) = 0$ pues si k > n no existe ninguna sucesión estrictamente creciente de k numeros naturales que sean todos menores que n.

Sea $\{e_1, ..., e_n\}$ base de E y consideremos la base dual de E^* $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ asociada, se tiene el siguiente resultado:

***Proposición* 3.1.3.** *$\{e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n\}$ es una base para el espacio $\bigwedge^k(E)$*

Demostración

Veamos que ellos generan a $\bigwedge^k(E)$, si $v \in E$ entonces $v = e^*_1(v) + \cdots + e^*_n(v)$ así que para $\alpha \in \bigwedge^k(E)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha(v_1, ..., v_k) &= \alpha\big(\sum_{i_1=1}^{n} e^*_{i_1}(v_1)e^*_{i_1}, v_2, \ldots, v_k\big)\\ &= \sum_{i_1=1}^{n} e^*_{i_1}(v_1)\alpha(e^*_{i_1}, v_2, ...v_k)\end{aligned}$$

por tanto si se reemplaza a cada v_i por su expresión en la base canónica se obtiene:

$$\alpha(v_1, ..., v_k) = \textstyle\sum_{i_1,i_2,...,i_k=1}^{n} e^*_{i_1}(v_1)...e^*_{i_k}(v_k)\alpha(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_k})$$

ahora bien, como

$$\begin{aligned}e^*_{i_1}(v_1) \wedge ... \wedge e^*_{i_k}(v_k) &= \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)e^*_{i_1}(v_{\sigma(1)})...e^*_{i_k}(v_{\sigma(k)})\\ &= k!e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k}\end{aligned}$$

por tanto finalmente resulta:

$$\alpha(v_1, ..., v_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n}^{n} k!e^*_{i_1}(v_1) \wedge ... \wedge e^*_{i_k}(v_k)\alpha(e^*_{i_1}, ..., e^*_{i_k})$$

Esto demuestra que la familia $\{e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n\}$ genera a $\bigwedge^k(E)$

para ver que son linealmente independientes tomemos

$$\alpha = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<...<i_k\leqslant n}^{n} c_{i_1...i_k} e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_k}$$

Supongamos que $\alpha = 0$, Dado que

$$e^*_{i_1}(v_1) \wedge ... \wedge e^*_{i_k}(v_k)(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \begin{cases} 0 & si \quad i_r \neq j_r \quad para \quad algun \quad r=1,...,k \\ 1 & si \quad i_r = j_r \quad para \quad algun \quad r=1,...,k \end{cases}$$

Se obtiene la independencia lineal deseada

□

Si $h : E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación lineal, h induce una aplicación lineal $h^* : \bigwedge^k(V) \longrightarrow \bigwedge^k(E)$ dada por

$$h^*(\alpha)(v_1, ..., v_k) = \alpha(h(v_1), ..., h(v_k))$$

Que satisface:

1. Si h es lineal entonces h^* es lineal.

2. h es isomorfismo si y solo si h^* es isomorfismo

3.2 Fibrado de Formas

Dada M una variedad diferenciable y p un punto de M, Consideremos el espacio vectorial de todas las k-formas en T_pM $\bigwedge^k(T_pM)$. Estas k- formas T_pM son de vital importancia, porque permiten la construcción de un fibrado diferenciable asociado a la variedad M.

Definición 3.2.1. Sea M una variedad diferenciable con sistema diferenciable maximal $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. Definimos:

1. $\bigwedge^k(M) = \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k(T_pM)$

2. $\pi : \bigwedge^k(M) \longrightarrow M, \qquad \pi(\theta) = p \quad si\ \theta \in \bigwedge^k(T_pM).$

Es claro que $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{p\in U_\alpha} \bigwedge^k(T_pM)$

Estamos interesados en hacer de π un fibrado, para ello debemos dotar a $\bigwedge^k(M)$ de una estructura topológica.

Dados $p \in M$ y $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Gamma$ tal que $p \in U_\alpha$. Definimos

$$\phi_\alpha : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\phi_\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p\right) = (a_1, ..., a_n)$$

Claramente ϕ_α es un isomorfismo, de modo q induce un isomorfismo

$$\phi_\alpha^* : \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \bigwedge^k(T_pM)$$

Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}(U_\alpha) &= \bigsqcup_{p\in U_\alpha} \bigwedge^k(T_pM) \\
&= U_\alpha \times \bigwedge^k(T_pM) \\
&\cong U_\alpha \times \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \\
&= \bigsqcup_{p\in U_\alpha} \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

Definamos ahora

$$\Psi_\alpha : \mu^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \bigwedge^k(T_pM) \longrightarrow U_\alpha \times \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$$
$$\Psi_\alpha = I_{U_\alpha} \times \phi_\alpha^*$$

De este modo $\mu^{-1}(U_\alpha)$ adquiere la topología inducida por Ψ_α y $\bigwedge^k(M)$ adquiere la topología inducida por la inclusion.

El siguiente resultado es una consecuencia de la construcción realizada:

***Proposición* 3.2.1.** *Dada M una variedad diferenciable con sistema diferenciable maximal $\Gamma = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ entonces $\left(\bigwedge^k(M), \pi, M, \bigwedge^k(T_pM)\right)$ es un fibrado diferenciable.*

Demostración

Solo basta ver que los cociclos son diferenciables, Consideremos $\Upsilon = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ mapa de π y tomemos (U_α, Ψ_α), (U_β, Ψ_β) dos trivializaciones locales tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ se tiene

$$\begin{aligned}\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}(p,\theta) &= \Psi_\beta(p, \phi_\alpha^{-1^*}(\theta))\\ &= (p, \phi_\beta^* \circ (\phi_\alpha^{-1})^*(\theta))\\ &= (p, (\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta)^*(\theta))\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta)^*(\theta)(v_1, ..., v_k) &= \theta((\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta)(v_1), ..., (\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta)(v_k))\\ &= \theta(J_{\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta}(v_1), ..., J_{\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta}(v_k))\\ &= J^*_{\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta}(\theta)(v_1, ..., v_k)\end{aligned}$$

así que finalmente resulta:

$$\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}(p,\theta) = (p, J^*_{\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta}(\theta))$$

□

3.3 k-formas Diferenciales

Definición 3.3.1. Dada M una variedad diferenciable y $\pi : \bigwedge^k(M) \longrightarrow M$ el fibrado de formas de M. Una **k-forma diferencial** ω es una sección diferenciable del fibrado π esto es:

Si $\chi_1, ...\chi_k \in \chi(M)$ entonces para todo $p \in M$ se tiene:

$$\omega(\chi_1, ...\chi_k)_{(p)} = \omega(p)(\chi_1(p), ..., \chi(p))$$

Denotamos por $\Omega^k(M)$, al espacio vectorial de todas las k-formas diferenciales en M, es evidente que $\Omega^0(M)$ es el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables M en $\mathbb{R}$.

Dadas M, N dos variedades diferenciables, si $\varphi : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable entonces, φ induce una aplicación diferenciable $\varphi^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$, definida como:

$$\varphi^*(\omega)(\chi_1, ..., \chi_k)(p) = \omega(\varphi(p))\big(d\varphi(\chi_1)_p, ..., d\varphi(\chi_k)_p\big)$$

Esta aplicación satisface las siguientes propiedades:

1. $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

2. $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$

A continuación enunciamos el teorema de la derivada exterior este teorema es muy importante en el desarrollo de la cohomología de De Rham

Teorema 4. *La derivada exterior $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ satisface:*

1. $(w_1 \wedge w_2) = d(w_1) \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge d(w_2) \quad \forall\ w_1 \in \Omega^k(M)$ *y* $\forall\ w_2 \in \Omega^k(M)$

2. $d^2(w) = 0$

Demostración

Consultar [3, Teoremas 2.4.2 y 2.5.1]

CAPÍTULO 4

COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

4.1 Cohomología de De Rham

Definición 4.1.1. Un **complejo Diferencial** $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ es una sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$\dots \xrightarrow{d_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C^{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} \dots$$

Tales que :

$$d_n \circ d_{n-1} = 0$$

Notemos que la condición $d_n \circ d_{n-1} = 0$ implica que $Img(d_{n-1}) \subset Ker(d_n)$

Definición 4.1.2. Dado un complejo diferencial $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ el **n-ésimo grupo de cohomología** de C es el espacio vectorial

$$H^n(C) = \frac{Ker(d_n)}{Img(d_{n-1})}$$

Ejemplo 4.1.1. Sea M una variedad diferenciable y d la derivada exterior, el complejo de De Rham es el complejo diferencial

$$\Omega^*(M) = 0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \longrightarrow 0$$

Al n-ésimo grupo de cohomología de este complejo lo llamaremos cohomología de De Rham y lo denotaremos por $H^n_{DR}(M)$.

La cohomología de De Rham permite establecer una relación funtorial entre la categoría de las variedades diferenciales y la categoría de los espacios vectoriales.

Sean M y N dos variedades diferenciables y sean $\phi : M \longrightarrow N$, $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_M & \xrightarrow{\phi_*} & T_N \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

ϕ_* esta definida como $\phi_*(v) = v(f\circ\phi)$ y además si $v \in T_pM$ entonces $\phi_*(v) \in T_{\phi(p)}N$. En términos locales si (U, ψ) es una carta de M entonces

$$\phi_*\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}|_p\big) = \tfrac{\partial}{\partial x_i}|_p(f \circ \phi) = \tfrac{\partial}{\partial x_i}|_p(f \circ \phi \circ \psi^{-1})$$

De este modo ϕ_* induce una aplicación ϕ^* Definida como:

$$\phi^*\Bigg(\omega(p)\big(\tfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \tfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\big)\Bigg) = \omega(\phi(p))\Bigg(\phi_*\big(\tfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\big) \wedge \dots \wedge \phi_*\big(\tfrac{\partial}{\partial x_{i_k}}\big)\Bigg)$$

Obtenemos así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{\phi^*} & \Omega^k(M) \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\big\downarrow \\ N & \xleftarrow{\phi} & M \end{array}$$

Notemos que $\phi^*\big(\omega(p)\big) \in \bigwedge^k(T_pM)$, por tanto los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^0(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(N) & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^k(N) & \xrightarrow{d} & \ldots\Omega^n(N) & \xrightarrow{d} & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^0(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(N) & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^k(N) & \xrightarrow{d} & \ldots\Omega^n(N) & \xrightarrow{d} & 0
\end{array}$$

Podemos establecer por tanto un funtor F tal que

$$H^k_{DR}(F) : H^k_{DR}(N) \longrightarrow H^k_{DR}(M)$$

Definición 4.1.3. Dado C, un complejo diferencial diremos C es **exacto en** C^n si y solo si $H^n(C) = 0$, en cuyo caso $Img(d_{n-1}) = Ker(d_n)$

Definición 4.1.4. Dados $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ y $C = \{(D^n, b_n)_n\}$, un **morfismo de cadenas** entre C y D es una colección $F = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$ de transformaciones lineales que satisface:

$$f_{n+1} \circ d_n = b_n \circ f_n$$

Es decir, si cada uno de los siguientes diagramas es conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d_{n-1}} & C^n & \xrightarrow{d_n} & C^{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C^{n+2} & \xrightarrow{d_{n+2}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+2}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{b_{n-1}} & D^n & \xrightarrow{b_n} & D^{n+1} & \xrightarrow{b_{n+1}} & D^{n+2} & \xrightarrow{b_{n+2}} & \cdots
\end{array}$$

Notemos que si $F = C^n \longrightarrow D^n$ es un morfismo de cadenas entonces para todo k, F induce las aplicaciones $f_n([a]) = [f_n(a)]$

Definición 4.1.5. Dados $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ y $C = \{(D^n, b_n)_n\}$ y sean $F = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$, $G = \{g_n : D^n \longrightarrow D^n\}$ dos morfismos de cadenas, una **homotopía de cadenas** es una sucesión de transformaciones lineales $K = \{k_n : C^{n+1} \longrightarrow D^n\}$ que satisfacen

$$f_n - g_n = \pm(k_n \circ d_n - b_{n-1} \circ k_{n-1})$$

en este caso decimos que F y G son homotópicas.

***Proposición* 4.1.1.** *Dados $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ y $C = \{(D^n, b_n)\}_n$ Dos morfismos de cadenas homotópicos, entonces $f_n^* = g_n^*$ para todo n.*

Demostración

$$\begin{aligned}(f_n - g_n)(z) &= \pm(k_n \circ d_n - b_{n-1} \circ k_{n-1})\\ &= \pm(k_n(d_n(z)) - b_{n-1}(k_{n-1}(z)))\\ &= \pm(k_n(0) - b_{n-1}(k_{n-1}(z)))\\ &= \pm(b_{n-1}(k_{n-1}(z))) \ \in \ Im(b_{n-1})\end{aligned}$$

De donde tenemos $f_n^*([z]) = [f_n * (z)] = [g_n * (z)] = g_n^*([z])$

□

A continuación enunciamos dos teoremas importantes en la categoría de los complejos diferenciales:

Teorema* 5.** *(de los cinco***): Dadas $C = \{(C^n, d_n)\}_n$ y $C = \{(D^n, b_n)\}_n$, si $F = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$ es un morfismo de cadenas tal que $f_{n-2}, f_{n-1}, f_{n+1}f_{n+2}$ son isomorfismos entonces f_n es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n-3}"] & C^{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "f_{n-2}"] & C^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C^{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "b_{n-3}"] & D^{n-2} \arrow[r, "b_{n-2}"] & D^{n-1} \arrow[r, "b_{n-1}"] & D^n \arrow[r, "b_n"] & D^{n+1} \arrow[r, "b", "n+1"'] & D_{n+2} \arrow[r, "b_{n+2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Demostración

Consultar [8, lema 3.2.1]

Definición 4.1.6. $C = \{(C^n, d_n)\}_n$, $C = \{(D^n, b_n)\}_n$ y $E = \{(E^n, h_n)\}_n$ tres complejos diferenciales y sean $F = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$ y $G = \{g_n : D^n \longrightarrow E^n\}$ morfismos de cadenas se dice que la composición

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E \longrightarrow 0$$

Es una **sucesión exacta de morfismos de cadenas**, si en el siguiente diagrama cada columna es un complejo exacto.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r, "d_{n-2}"] & C^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & C^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C^{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C^{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "b_{n-2}"] & D^{n-1} \arrow[r, "b_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"] & D^n \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "g_n"] & D^{n+1} \arrow[r, "b", "n+1"'] \arrow[d, "g_{n+1}"] & D_{n+2} \arrow[r, "b_{n+2}"] \arrow[d, "g_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h_{n-2}"] & E^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d] & E^n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r, "h", "n+1"'] \arrow[d] & E_{n+2} \arrow[r, "h_{n+2}"] \arrow[d, "g_{n+2}"] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Teorema* 6.** *(de la Serpiente***): Sea*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{F} D \xrightarrow{G} E \longrightarrow 0$$

Una sucesión exacta de morfismos de cadenas, entonces existe un Homomorfismo de conexión $\Delta_n : H^n(E) \longrightarrow H^n(C)$ tal que la sucesión

$$\longrightarrow H^{n-1}(C) \xrightarrow{f^*_{n-1}} H^{n-1}(D) \xrightarrow{g^*_{n-1}} H^{n-1}(E) \xrightarrow{\Delta_n} H^n(C) \xrightarrow{f^*_n} H^n(D) \xrightarrow{g^*_n} H^n(E) \longrightarrow$$

Es una sucesión exacta.

Demostración

Ver [8, lema 3.2.2]

El resultado que se enuncia a continuación, es de importancia relevante en el desarrollo de la cohomología de De Rham

Teorema* 7.** *(truco de Bredon***): Dado M una variedad diferenciable y Γ una base de abiertos cerradas por intersecciones finitas. para cada abierto A de M, sea $p(A)$ un predicado sobre A, si se satisface que:*

1. *$p(U)$ es cierta para cada abierto U de Γ*

2. *Para cada U , V de M si $p(U)$, $p(V)$ y $p(U \cap V)$ son ciertas entonces $p(U \cup V)$ es cierta*

3. *Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de abiertos, de M disjunto entre si y $p(U)$ es cierta para cada α entonces $p(\bigcup_\alpha U_\alpha)$ es cierta.*

Entonces $p(M)$ es cierta.

Demostración

[8, teorema 1.3.3]

4.2 Sucesión Mayer-Vietoris

Definición 4.2.1. Sean M y N dos variedades diferenciables y sean $f, g : M \longrightarrow N$ diremos que f **es homotópica a** g si existe una función $h : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ tal que

$$h(x, 0) = f(x) \ \text{ y } \ h(x, 1) = g(x)$$

Definición 4.2.2. Sea M una variedad diferenciable, diremos que M es **contráctil** si la identidad $i_M : M \longrightarrow M$ es homotópica a alguna aplicación constante.

Ejemplo 4.2.1. $\mathbb{R}^n$ es una variedad contráctil

***Lema* 4.2.1.** *Todo espacio conexo es contráctil*

***Teorema* 8.** *Sean M y N dos variedades diferenciables, si N es contráctil entonces:*

$$H^k_{DR}(M \times N) = H^k_{DR}(M \times N)$$

Nota: En lo que sigue para simplificar notación escribiremos $H^k(M)$ en lugar de $H^k_{DR}(M)$

A continuación daremos la construcción de la sucesión de Mayer-Vietoris para una variedad diferenciable M

Sea $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de M y sean las siguientes transformaciones de cadenas

$$\alpha : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V) \ ; \quad \alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$$

$$\beta : \Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V) \longrightarrow \omega^*(U \cap V) \ ; \quad \beta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_1|_{U\cap V}$$

***Lema* 4.2.2.** *Para cada k la siguiente sucesión es exacta.*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\beta} \omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Demostración

La prueba la dividiremos en tres partes a saber:

1. Exactitud en $\Omega^k(M)$
2. Exactitud en $\Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V)$
3. Exactitud en $\omega^*(U \cap V)$

1. Supongamos que $\alpha(\omega) = 0$ entonces $\omega|_U = 0$ y $\omega|_V = 0$ además como $\{U, V\}$ es cubrimiento de M, tenemos que $\omega = 0$ por tanto α es un isomorfismo

2. Observemos que $\beta(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U\cap V} - \omega|_{U\cap V} = 0$, es decir $\beta \circ \alpha = 0$ de modo que $Im(\alpha) \subset Ker(\beta)$

Por otro lado si $\beta(\omega_1, \omega_2) = 0$ entonces $\omega_1|_{U\cap V} = \omega_1|_{U\cap V}$ es decir, α y β coinciden en la intersección de U y V así que podemos definir ω en $\Omega^k(M)$ que satisfaga, $\omega|_U = \omega_1$ y $\omega|_U = \omega_2$ esto es:

$$\omega = \begin{cases} \omega_1(p) & \text{si} \quad p \in U \\ \\ \omega_2(p) & \text{si} \quad p \in V \end{cases}$$

De este modo tenemos que $\alpha(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ así $Ker(\beta) \subset Im(\alpha)$ luego la sucesión es exacta en $\Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V)$

3. En virtud que $\{U, V\}$ es un cubrimiento de M existe una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento. Para $\theta \in \omega^k(U \cap V)$ definimos:

$$P_U\theta(p) = \begin{cases} \theta(p) & \text{si} \quad p \in U \\ \\ 0 \quad \text{si no} \end{cases}$$

$$P_V\theta(p) = \begin{cases} \theta(p) & \text{si} \quad p \in V \\ \\ 0\text{si no} \end{cases}$$

Elijamos ahora $\omega_1 = P_U\theta$ y $\omega_2 = -P_V\theta$, claramente $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ y $\omega_2 \in \Omega^k(V)$ por ende

$$\beta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_1|_{U\cap V} = P_U\theta + P_V\theta = \theta$$

de este modo resulta que β es sobreyectiva así obtenemos la exactitud en $\omega^*(U \cap V)$

□

Hemos probado que la sucesión de morfismos de cadenas:

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\beta} \omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Es una sucesión exacta, por tanto en virtud del lema de la serpiente tenemos el siguiente resultado.

***Teorema* 9.** *existe un homomorfismo de conexión Δ_n tal que la sucesión:*

$$\cdots \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{\alpha^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\beta^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_n} H^{k+1}(M) \xrightarrow{\alpha^*}$$

$$\xrightarrow{\alpha^*} H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \xrightarrow{\beta^*} H^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta.

***Teorema* 10.**

$$H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}) \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad k = 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad \omega \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Demostración

Para ver la demostración consultar [6, pagimas 27-30]

***Teorema* 11.** *(**Lema de Poincaré**) Sea M variedad diferenciable entonces*

$$H^*(M) = H^*(M \times \mathbb{R}^n)$$

Demostración Consultar [6, proposición 4.15]

4.3 Cohomología de De Rham para $\mathbf{S}^n$

***Proposición* 4.3.1.** *Dada M una variedad diferenciable, si M es conexa entonces $H^0(M) = \mathbb{R}$*

Demostración

Dado que $H^0(m) = Ker(d)$, $H^0(m)$ consta de todas las aplicaciones f tales que $df = 0$ y como M es una variedad conexa se tiene que si $f \in H^0(m)$ entonces f es una constante, por consiguiente $H^0(m) = \mathbb{R}$

□

***Teorema* 12.** *Dados V, V_1 y V_2 espacios vectoriales, entonces la sucesión.*

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V_2 \longrightarrow 0$$

Es una sucesión exacta si y solo si

$V \cong V_1 \oplus V_2$

Demostración

Consideremos B una base de V_2 y sea β' una función de elección tal que si $v \in B$ entonces $\beta'(v) \in \beta^{-1}(v)$.

Notemos que si $\theta \in V$ entonces $\beta\big(w - \beta'(\beta(\theta))\big) = 0$, es decir existe un único ω en V_1 tal que $\alpha(\omega) = \theta$. Definamos el homomorfismo entre espacios vectoriales $\alpha' : V \longrightarrow V_1$ dada por $\alpha'(\theta) = \omega$.

Con α' y β' definida de esta manera, la siguiente sucesión

$$0 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{\beta'} V \xrightarrow{\alpha'} V_1 \longrightarrow 0$$

Es una sucesión exacta, para completar la demostración solo basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "I"] & V \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\theta"] & V_2 \arrow[r] \arrow[d, "I"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "i"] & V_1 \oplus V_2 \arrow[r, "P_2"] & V_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donde: $\theta(\omega) = (\alpha'(\omega), \beta(\omega))$

□

***Proposición* 4.3.2.**

$$H^k\mathbf{S}^1 = \begin{cases} \mathbb{R} \quad \text{si} \quad k = 0,\ 1 \\ \\ 0\text{en} \ \ \text{otro} \ \ \text{caso} \end{cases}$$

Demostración

Consideremos $\mathbb{R}^1$ y sean $U = \mathbb{R}^1 - \{N\}$ y $V = \mathbb{R}^1 - \{S\}$, N y S son los respectivos polos norte y polo sur de $\mathbb{R}^1$. Es claro que $\{U, V\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{R}^1$.En virtud de Mayer-Vietoris existe un homomorfismo de conexión Δ tal que la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_n} H^1(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*}$$
$$\xrightarrow{\alpha^*} H^1(U) \oplus H^1(V) \xrightarrow{\beta^*} H^1(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Notemos que U y V son homeomorfos a un segmento de recta por tanto son contráctiles, de allí que solo poseen cohomología en cero por tanto la sucesión anterior se reduce a

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_n} H^1(\mathbf{S}^1) \longrightarrow 0$$

En virtud de que $\mathbb{S}^1$ es conexa $H^0(\mathbf{S}^1) = \mathbb{R}$ además $U \cap V$ es homeomorfo a dos segmentos de recta pues $U \cap V = \mathbf{S}^1 - \{N, S\}$ por consiguiente

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha^*} (R) \oplus (R) \xrightarrow{\beta^*} (R) \oplus (R) \xrightarrow{\Delta_n} H^1(\mathbf{S}^1) \longrightarrow 0$$

Dado que esta sucesión es exacta se sigue que

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\Delta_n} H^1(\mathbf{S}^1) \longrightarrow 0$$

en consecuencia

$$H^1(\mathbf{S}^1) = \mathbb{R}$$

$\square$

***Proposición* 4.3.3.**

$$H^k\mathbf{S}^n = \begin{cases} \mathbb{R} \quad \text{si} \quad k = 0,\ n \\ \\ 0 \ \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Aplicaremos inducción sobre n, por la proposición anterior el resultado vale para $n = 1$, supongamos ahora que el resultado vale para $n - 1$.

Consideremos $\{U = \mathbb{R}^1 - \{N\}, V = \mathbb{R}^1 - \{S\}\}$, cubrimiento abierto de $\mathbf{S}^n$, en virtud de Mayer-Vietoris, existe un homomorfismo de conexión Δ_k tal que la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{\beta^*} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_k} H^{k+1}(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*}$$
$$\xrightarrow{\alpha^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\beta^*} H^k(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Es claro que $U \cap V \cong \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ por ende en virtud del lema de poincaré tenemos:$H^{k-1}(U \cap V) = H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbb{R}) = H^{k-1}(U \cap V) = H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1})$ en consecuencia

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{\beta^*} H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_k} H^{k}(\mathbf{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*}$$
$$\xrightarrow{\alpha^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{\beta^*} H^k(U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

Dado que esta sucesión es exacta Δ_k obtenemos el diagrama

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_k} H^k(\mathbf{S}^n) \longrightarrow 0$$

Por lo que:

$$H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1}) = H^k(\mathbf{S}^n)$$

Así haciendo uso de la hipótesis inductiva se obtiene:

$$\mathbb{R} = H^{k-1}(\mathbf{S}^{n-1}) = H^k(\mathbf{S}^n)$$

$\square$

CAPÍTULO 5

COHOMOLOGÍA INVARIANTE

5.1 Métrica Riemanniana

Definición 5.1.1. Un **producto interno** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface :

1. $<,>$ es bilineal
2. $< x, y > = < y, x >$
3. $<,>$ es no degenerada, esto es $< x, x >= 0$ si y solo si $x = 0$
4. $< x, x > > 0$

Ejemplo 5.1.1.

$$<,>: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

Definición 5.1.2. Dada Muna variedad diferenciable, una **métrica Riemanniana** en M es una aplicación

$$\mu : M \longrightarrow \bigcup_{p\in M}\{productos \;\; internos \;\; en \;\; T_pM\}$$

Que a cada punto p de M le asocia un producto interno en $T_pM \cong \mathbb{R}^n$ diferenciable, esto es: Para cada par X, Y de campos vectoriales la aplicación:

$$\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mu(p) = < X(p), Y(p) >$$

Es una aplicación diferenciable.

el siguiente resultado garantiza la existencia de métricas riemannianas en una variedad diferenciable.

***Teorema* 13.** *En toda variedad diferenciable, existe un métrica Riemanniana.*

Demostración

Consultar [5, teorema 13 pag 151]

Consideremos $\theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción, de un grupo de lie compacto en una variedad diferenciable M, si denotamos $\theta(g, x) = gx$ podemos establecer la aplicación:

$$g : M \longrightarrow M$$
$$g(x) = gx$$

De modo que obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T_pM \times T_pM & \xrightarrow{\mu(p)} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle dg}\downarrow & & \\ T_{gp}M \times T_{gp}M & \xrightarrow{\mu(gp)} & \mathbb{R} \end{array}$$

Esto nos permite definir métricas riemannianas invariantes en una variedad diferenciable.

Definición 5.1.3. Sea M una $G-variedad$ y μ una métrica Riemanniana en M, diremos μ es **invariante** si $\mu(gp)(dgv, dgw) = \mu(p)$, para todo par de vectores v, w en T_pM.

Dada μ una métrica Riemanniana en un $G-espacio$ M si μ no es invariante, podemos construir una métrica invariante a partir de μ haciendo uso de la integral de Haar [] esto es, si μ no es invariante, entonces

$$\overline{\mu} = \int_G \mu(gp)dg$$

Es una métrica Riemanniana invariante en M.

Definición 5.1.4. Sea M un $G-espacio$, diremos que $A \subseteq M$ es **invariante** si para cada $g \in G$ y para cada $x \in A$ se tiene que $gx \in A$ esto es si $G(A) = A$.

Definición 5.1.5. Sean M y N dos $G-variedades$ y sea $f : M \longrightarrow N$ diremos que f es **equivariante** si $f(gx) = g(fx)$

5.2 Curvas integrales

Definición 5.2.1. Sea M una variedad diferenciable y sea v un vector de T_pM, una **curva integral** es una aplicación diferenciable $\rho : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ que satisface:

1. $\rho(0) = p$
2. $d\rho(0) = v$

Ejemplo 5.2.1. Si $M = \mathbb{R}^n$ y $v \in T_pM = \mathbb{R}^n$ entonces la curva integral de v en el punto p es la función $\rho(t) = p + tv$

dado que el concepto de curva integral es local, entonces:

1. Si M es una variedad diferenciable, p es u punto de M y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ es una carta de M en p entonces para cada $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en $\mathbb{R}^n$, $\varphi^{-1}(\varphi(p) + ta)$ con $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ es una curva integral del vector $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p$.

2. Si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo y $\rho : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es una curva integral de un vector $v \in T_pM$ entonces la composición $f \circ \rho$ es una curva integral de $dg(v)$ en $T_{f(p)}N$

5.3 Función exponencial

Definición 5.3.1. Sea M una variedad diferenciable, la **función exponencial** de M es la aplicación

$$exp : TM \longrightarrow M \times M$$

definida con la siguiente formula

$$exp(v) = (p, \rho(1)) \ \forall \ p \ \in \ M, \forall \ v \ \in \ T_pM$$

Propiedades

1. La función exponencial es equivariante.

2. Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M y sea $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ la carta local de T_M inducida por (U, φ) entonces la composición:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\overline{\varphi}^{-1}} T_U \xrightarrow{exp} U \times U \xrightarrow{\varphi \times \varphi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

   Es la aplicación que transforma al par (b, a) en el par $(b, b + a)$.

Si restringimos la función exp a la fibra T_pM obtenemos la aplicación

$$exp_p : T_pM \longrightarrow M$$
$$exp_p(v) = \rho(1)$$

Esta función es diferenciable y su diferencial es la identidad, por tanto es un difeomorfismo local.

Dada M una $G - variedad$ diferenciable, para cada p de M , la orbita de p, O_p es una sub variedad de M de modo que:

$$T_pO_p \subseteq T_pM \quad \text{y} \quad T_pM = T_pO_p \oplus (T_pO_p)^{\perp}$$

Sean $E_p = (T_pO_p)^{\perp}$ y H el subgrupo de isotropía de p, claramente E_p es H-invariante pues si $g \in H$ y $v \in E_p$ para todo w en T_pO_p se tiene:

$$< w, gv >=< gw, gv >=< w, v >= 0$$

Definición 5.3.2. Dada M una $G - variedad$ diferenciable, para cada p en M, S_p es el conjunto:

$$S_p = exp_p(E_p) \subseteq M$$

Propiedades de S_p

1. $p \in S_p$ pues $0 \in E_p$

2. S_p es un H-espacio, esto es para todo q en S_p y para todo h en H, hq esta en S_p; en efecto:

   Si $q = exp_p(v)$ entonces $hq = h(exp_p(v)) = exp_p(hv)$, pues la exponencial es una función equivariante.

3. $gS_p \cap S_p \neq \emptyset$ entonces $g \in H$. En efecto:

   Sea $v \in S_p$ tal que $gv = w \in S_p$ tenemos que $w = d\rho(1)$ y $\rho(0) = p$ en consecuencia $gp = p$ pues de lo contrario $w \neq S_p$

Definición 5.3.3. Sea M una G-variedad y sea H el subgrupo de isotropía de G, supongamos que $G \times M$ es un H-espacio, entonces el **producto torcido** de G y M es el cociente $\frac{G \times S_p}{H}$ y lo denotaremos por $G \times_H S_p$.

Definición 5.3.4. Sean M, N dos variedades diferenciables y sea $f : M \longrightarrow N$, diremos que f es un **embebimiento** si:

1. f es un homeomorfismo sobre su imagen abierta.

2. df es una aplicación inyectiva.

***Proposición* 5.3.1.** *La aplicación $\alpha : G \times_H S_p \longrightarrow GS_p$ es un embebimiento sobre el abierto GS_p*

Definición 5.3.5. al abierto GS_P lo denominamos el **tubo** de la orbita O_p

5.4 Cohomología invariante

Sea M una G-variedad diferenciable, y sea $\theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción efectiva y diferenciable, para cada g en G denotamos $\theta(g, x) = gx$ y definimos $g : M \longrightarrow M$ dada por $g(x) = gx$

Dado que g es una aplicación de M en M, g induce una aplicación $g^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$, esta aplicación nos permite introducir el concepto de cohomología invariante.

Definición 5.4.1. Sea M una G-variedad diferenciable y sea $g : M \longrightarrow M$ diremos que $\omega \in \Omega^k(M)$ es **invariante** si $g^*(\omega) = \omega$

Denotaremos por $I\Omega^k(M)$ al conjunto de todas las k-formas diferenciales, esto es:

$$I\Omega^k(M) = \{\omega \ \in \Omega^k(M) \ / \ g^*(\omega) = \omega \ ; \forall \ g \ \in G\}$$

***Proposición* 5.4.1.** *Sea M una G-variedad diferenciable entonces:*

1. *$(I\Omega^*(M), d)$ es un complejo diferencial.*

2. *$i : I\Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$ morfismo de cadenas.*

Demostración

1. Si ω es una k-forma invariante, $g^*(\omega) = \omega$ para todo g, por lo que $g^*(d\omega) = dg^*(\omega) = d\omega$

2. Esta aserción es inmediata pues cada uno de los siguientes diagramas es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I\Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & I\Omega^{k+1}(M) \\ \big\downarrow i & & \big\downarrow i \\ \Omega^k(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{k+1}(M) \end{array}$$

□

Dado que $(I\Omega^*(M), d)$ es un complejo diferencial posee una cohomología al n-ésimo grupo de cohomología de este lo llamamos cohomología invariante y lo denotaremos como $IH^*(M)$

Ejemplo 5.4.1. Consideremos la acción de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{S}^1$ por rotaciones entonces

$$IH^k(\mathbf{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} k = 0, 1 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Consideremos el complejo diferencial:

$$I\Omega^*(\mathbf{S}^1) = \ 0 \longrightarrow I\Omega^0(\mathbf{S}^1) \xrightarrow{d} I\Omega^1(\mathbf{S}^1) \longrightarrow 0$$

Para todo z_0 en $\mathbf{S}^1$, $z_0 : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$ es la aplicación

$$z_0(z) = z_0 z$$

Para cada $p = (x, y) \in \mathbf{S}^1$, el espacio tangente $T_p\mathbf{S}^1$ es la recta por el origen, cuyo vector director es ortogonal a p, esto es:

$$T_p\mathbf{S}^1 = \{\lambda e^{i\frac{\pi}{2}} p\ ,\ \lambda \in \ \mathbb{R}\ \forall g \ \in \ \mathbf{S}^1\}$$

$I\Omega^0(\mathbf{S}^1) = \{f : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R} : \quad f \ \ es \ \ diferenciable \ \ y \ \ f(gx) = f(x)\}$

Tomemos $f \in I\Omega^0(\mathbf{S}^1)$, claramente $f(g) = f(1)$, para todo $g \in \mathbf{S}^1$ por tanto $I\Omega^0(\mathbf{S}^1)$ es el espacio de todas las funciones constantes es decir:

$$I\Omega^0(\mathbf{S}^1) = \mathbb{R}$$

Probaremos que $I\Omega^1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbb{R}$

Sea $\omega \in I\Omega^1(\mathbf{S}^1)$, $\forall p \in \mathbf{S}^1$ $\omega(p)$ es un funcional lineal en $T_p\mathbf{S}^1 = \{\lambda e^{i\frac{\pi}{2}}p \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ luego para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ $\omega_(p)(\lambda p*) = \lambda\omega_p(p^\perp)$

definamos ahora la aplicación

$$L : I\Omega(\mathbf{S}^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como

$$L(\omega) = \omega_p(p^\perp)$$

Esta aplicacion esta bien definida(no depende de p) ya que ω es invariante, ademas es claro que L es un isomorfismo, luego $I\Omega^1(\mathbf{S}^1) \cong \mathbb{R}$ por tanto obtenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

La cohomologia de este complejo es $\mathbb{R}$ en $0, \ 1$ y 0 en todos los demas indices, es decir

$$IH^1(\mathbf{S}^1) = IH^1(\mathbf{S}^1) = \mathbb{R}$$

A continuación probaremos la validez de la sucesión de Mayer Vietoris y del lema de Poincaré en la cohomología invariante

***Teorema* 14.** *(**Lema de Poincaré**) Sea M una G-variedad diferenciable entonces*

$$IH^*(M) = IH^*(M \times \mathbb{R}^n)$$

Demostración

Sean:

1. $\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ la proyección Canónica

2. $s : M \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ la sección cero

3. $\overline{\theta} : G \times (M \times \mathbb{R}) \longrightarrow G \times M$ la aplicación definida como $g(x,t) = (gx,t)$

Debemos probar que π y s son equivariantes. Claramente la aplicación π es equivariante pues

$$\pi(g(x,t)) = \pi(gx,t) = gx = g\pi(x,t)$$

De igual modo la sección cero también es invariante pues:

$$gs(x) = g(x,0) = (gx,0) = s(gx)$$

Por otro lado tenemos que toda k-forma en $I\Omega^k(M \times \mathbb{R})$ puede ser de dos tipos a saber:

$$\omega = \begin{cases} \pi^*(\phi)f(x,t) & \text{tipo 1} \\ \\ \pi^*(\phi)f(x,t)dt & \text{tipo 2} \end{cases}$$

Donde$f(x,t)$ es una función de $M \times \mathbb{R}$ y ϕ es una k-forma en M.

Consideremos el operador K definido de la siguiente manera:

$$K(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \omega \quad \text{es del tipo 1} \\ \\ \pi^*(\phi)\int_0^t f(x,s)ds \quad \text{si} \quad \omega \quad \text{es del tipo 2} \end{cases}$$

El operador K es invariante pues:

$$\begin{aligned} g^*(K(\omega)) &= g^*(\pi^*(\phi)\int_0^t f(x,s)ds) \\ &= \int_0^t f(x,s)dsg^*\pi^*(\phi) \\ &= \int_0^t f(x,s)ds\pi^*(\phi) \\ &= K(\omega) \end{aligned}$$

$\square$

***Teorema* 15.** *Sea M una G-variedad diferenciable, sean U y V abiertos invariantes de M tales que $M = U \cup V$, entonces Para cada k la sucesión*

$$0 \longrightarrow I\Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{\alpha} I\Omega^k(U) \oplus I\Omega^k(V) \xrightarrow{\beta} I\Omega^n(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Es una sucesión exacta corta.

Demostración

Solo basta probar que Las aplicaciones α y β son invariantes. En efecto, dado que α y β están definidas de la manera siguiente:

$$\alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \quad ; \quad \beta(\omega, \theta) = \omega|_{U\cap V} - \theta|_{U\cap V}$$

Tenemos que

1. $g^*\alpha(\omega) = (g^*(\omega|_U), g^*(w|_V)) = (\omega|_U, \omega|_V)$
2. $g^*\beta(\omega, \theta) = g^*(\omega|_{U\cap V} - \theta|_{U\cap V}) = g^*((\omega - \theta)|_{U\cap V}) = (\omega - \theta)|_{U\cap V} = \omega|_{U\cap V} - \theta|_{U\cap V}$

□

***Teorema* 16.** *Sea M una $\mathbb{S}^1$ libre. Para cada k la inclusion $i : I\Omega^k(\omega) \longrightarrow \Omega^k(M)$ induce isomorfismos en cohomología.*

Demostración

Consideremos π la proyección de M sobre el espacio de orbita $M/\mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{c} M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M/\mathbb{S}^1 \end{array}$$

Para la demostración del teorema usaremos el truco de Bredon con la siguiente proposición: Para cada abierto $U \subseteq M/\mathbb{S}^1$ la aplicación $i : I\Omega^k(\pi^{-1}(U)) \longrightarrow \Omega^k(\pi^{-1}(U))$ induce isomorfismos en cohomología.

Dado que la acción es libre $M/\mathbf{S}^1$ es una variedad diferenciable.[7, paginas 25-27] Elijamos Γ una familia de abiertos convexos geodésicos en $M/\mathbb{S}^1$, cerrada por intersecciones finitas, que vienen de tubos en M.

Tomemos U un abierto de Γ, Dado que la accion es libre $M/\mathbb{S}^1$ $\pi^{-1}(U) = \mathbb{S}^1 \times U$. Además en virtud del lema de Poincaré las aplicaciones:

$$i : \Omega^k(\mathbb{S}^1 \times U) \longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^1)$$
$$i : I\Omega^k(\mathbb{S}^1 \times U) \longrightarrow I\Omega^k(\mathbb{S}^1)$$

inducen isomorfismos en cohomología, de manera que es suficiente demostrar que la aplicación $i : I\Omega^k(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^1)$, induce isomorfismo en cohomologia; mas este hecho es inmediato gracias al ejemplo (5.4.1),De modo que el resultado es válido para cada U de Γ

Dados U , V dos abiertos en Γ, supongamos que la proposición es valida para U , V y $U \cap V$, el siguiente diagrama es consecuencia de Mayer-Vietoris

$$\begin{tikzcd}
IH^{k-1}(\pi^{-1}(U)) \oplus IH^{k-1}(\pi^{-1}(V)) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & IH^{k-1}(\pi^{-1}(U \cap V)) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & IH^k(\pi^{-1}(U \cup V)) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & {} \\
H^{k-1}(\pi^{-1}(U)) \oplus H^{k-1}(\pi^{-1}(V)) \arrow[r] & H^{k-1}(\pi^{-1}(U \cap V)) \arrow[r] & H^k(\pi^{-1}(U \cup V)) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & IH^k(\pi^{-1}(U)) \oplus IH^k(\pi^{-1}(V)) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & IH^k(\pi^{-1}(U \cap V)) \arrow[d, "i^*"] \\
{} \arrow[r] & H^k(\pi^{-1}(U)) \oplus H^k(\pi^{-1}(V)) \arrow[r] & H^k(\pi^{-1}(U \cap V))
\end{tikzcd}$$

En virtud del lema de los cinco tenemos que

$$i^* : IH^k(\pi^{-1}(U \cup V)) \longrightarrow H^k(\pi^{-1}(U \cup V))$$

Es un isomorfismo, por tanto la proposición es valida para $U \cup V$.

Tomemos en Γ $\{U_\beta\}$ una familia disjunta arbitraria, tal que la proposición vale para cada U_β, entonces

$IH^k(\pi^{-1}(\bigcup_\beta((U_\beta)))) = IH^k(\bigcup_\beta(\pi^{-1}(U_\beta))) = \oplus IH^k(\pi^{-1}(U_\beta)) \cong \oplus H^k(\pi^{-1}(U_\beta)) = H^k(\pi^{-1}(\bigcup_\beta(U_\beta)))$

Así que la proposición es válida para la union $\pi^{-1}(\bigcup_\beta(U_\beta))$, por tanto en virtud del truco de bredon se obtiene el resultado. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] Dugundji, James. *Topology*, Alli and Bacon, Inc. 1966.

[2] Werner-Halperin, Stephen-Vanstone Ray. *Connections, Culvature, and Cohomology.* Vol. 1. Academy Press. 1972.

[3] Cartan, Henrry. *Formas Diferenciables.* Ediciones Omega. S.A 1972

[4] Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry.* Vol. 1. Publish or Perish. Inc. 1979.

[5] I.M Singer-Thorpe J. *Lectures and Notes on Elementary Topology and Geometry.* Scott, Foresman and Company 1969.

[6] Ollarves, Alejandro. *Sobre la Cohomologia de De Rham del n-toro.* Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 2006.

[7] Guardia, Tomas. *Acciones de Grupo de lie en Variedades.* Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 2002.

[8] Mauricio, Angel. *Una Aplicación del Truco de Bredon a la Cohomologia de De Rham.* Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 2002.