



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Un Estudio del Sistema Dinámico Generado por la Ecuación de Van der Pol

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela por la
Br. Odalis M. Mejia G. para optar al título
de Licenciada en Matemática.
Tutor: Dr. José Luis Sánchez

Caracas, Venezuela

Abril, 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Un Estudio del Sistema Dinámico Generado por la Ecuación de Van der Pol**”, presentado por la **Br. Odalis M. Mejia G.**, titular de la Cédula de Identidad **17.426.865**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. José Luis Sanchez
Tutor

Dr. Nelson Merentes
Jurado

Dr. Antonio Acosta
Jurado

*A mis padres, hermano
y familiares más cercanos.
Ustedes hicieron posible que
llegara hasta donde he llegado.*

Agradecimiento

Ante todo, gracias a Dios por darme la salud y sabiduría que necesité para alcanzar esta meta.

A mis padres por todo lo que tengo y lo que he logrado; gracias por el sacrificio y el apoyo incondicional que he tenido de ustedes toda la vida.

Gracias a mi hermano y mis tios Iris, José Gregorio y José Ramón, “Que importante es su ayuda y apoyo cuando se necesita”.

A José Luis Sanchez, mi tutor, por guiarme en la primera etapa de mi carrera, el tiempo que invirtió en mi y el invaluable aporte que le dió a mis conocimientos; gracias por brindarme la oportunidad.

Muchisimas gracias al Dr Hugo Leiva, quien contribuyó a lo largo de este trabajo con sus conocimientos; “Que significativo es cuando una persona sirve a los demás sin siquiera conocerlo o tener alguna obligación, más aún, sin esperar nada a cambio”.

A los Dr. Nelson Merentes Mariela Castillo y Antonio Acosta; grandes profesores intachables que de una u otra forma han ayudado y siguen ayudando en mi formación; gracias por brindarme la oportunidad.

Mi más sincero agradecimiento a mi gran amiga Zorely, tu apoyo incondicional es de gran valor para mí, el hecho de soportarme y estar en las buenas y en las malas todos estos años es muy importante. Gracias Jhon por tu aporte incondicional en este trabajo.

A mis amigos Siham, Marianto, Ronaldys, Tomás, Alonzo, Fory , José, Karely, Roberto; que grupo tan fino hemos sido a lo largo del tiempo.

Me disculpo de aquel que no se encuentre acá, sé que son muchos los que de una u otra manera me han apoyado a lo largo de estos 5 años, por eso muchísimas gracias de todo corazón.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	7
1 PRELIMINARES	12
1.1 Existencia, Unicidad y Prolongabilidad de Soluciones	12
1.2 Dependencia Continua con respecto a los Datos Iniciales	14
1.3 Sistema Dinámico	15
1.3.1 Estabilidad de Órbitas Periódicas	24
2 ECUACIÓN DE VAN DER POL	31
2.1 Reseña histórica	31
2.2 Ecuación de Van der Pol	34
2.2.1 Relajación de Oscilaciones	39
2.2.2 Prolongabilidad de la solución	44
2.2.3 Punto Crítico	46
2.2.4 Existencia de la solución periódica	48
2.2.5 Estabilidad de la órbita periódica	60
2.2.6 Unicidad del Ciclo Límite	63
3 MÉTODO DE MÚLTIPLE ESCALA	65

3.1	Introducción	65
3.2	El Método de Múltiple Escala (MME)	67
3.2.1	Método para la ecuación Duffing	69
3.2.2	Método para la ecuación de Van der Pol	76
4	MATLAB	85
	Conclusiones y Recomendaciones	92
	Bibliografía	94

INTRODUCCIÓN

Los problemas de contorno de la física matemática constituyeron el objeto de investigación de grandes matemáticos, entre los cuales podemos mencionar a C. Neumann (1832-1925), H. A. Schwarz (1843-1921), H. Poincaré (1854-1912); así como también los rusos A. M. Lyapunov (1857-1918) y sobre todo su discípulo W. A. Steklov (1864-1926) continuaron con éxito este tipo de investigaciones. Poincaré se ocupó, al mismo tiempo que Lyapunov del problema general de estabilidad; las investigaciones de Lyapunov también estuvieron motivadas por problemas concretos de astronomía, especialmente por el problema propuesto por Chebichev sobre la posibilidad de la existencia de figuras de equilibrio de un flujo en rotación diferentes de la elipsoidal. Los trabajos de Lyapunov tuvieron gran importancia en el desarrollo posterior de la teoría de ecuaciones diferenciales y en sus aplicaciones al estudio de oscilaciones de diferentes sistemas físicos y mecánicos.

Una teoría cualitativa abstracta de los llamados sistemas dinámicos fue desarrollada por varios autores, entre ellos G. D. Birkhoff (1884-1944). Los problemas más importantes de dicha teoría son el estudio de las soluciones en el entorno de los puntos singulares.

En las ecuaciones diferenciales ordinarias, los trabajos de Poincaré y Lyapunov, que durante bastante tiempo pasaron casi inadvertidos, han atraído la atención de numerosos investigadores por sus relaciones profundas con muy diversos aspectos de la matemática aplicada. Ellos iniciaron el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales; pues dado que en la mayoría de los casos es “imposible” obtener fórmulas explícitas para las soluciones de las ecuaciones que definen un sistema dinámico, proponen ver otra perspectiva del problema y considerar no sólo algunas soluciones sino la totalidad de las mismas, para estudiar su evolución con el tiempo. Los estudios de Birkhoff sobre estabilidad de sistemas físicos y la investigación de estados de equilibrio de los puntos críticos han sido realizados siguiendo los pasos de Poincaré y Lyapunov en la escuela rusa. La necesidad de extender la teoría se ha hecho notar por la debilidad que presentaba la técnica de linealización, ya que en muchos casos resultaba incorrecta, como en el estudio de oscilaciones no lineales. La teoría de control óptimo, desarrollada especialmente por los matemáticos de la escuela rusa, ha hecho también uso de los métodos desarrollados por Poincaré y Lyapunov.

Los problemas más importantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se ha centrado en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, de los ciclos límites, en el comportamiento global y asintótico (estabilidad y teoría asintótica) de las trayectorias en un entorno de los puntos críticos y ciclos límites, en la teoría de la bifurcación y, últimamente, en los temas relacionados con el concepto de estabilidad estructural. Sin embargo, fue hace 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, y no es más que el estudio del comportamiento de un proceso físico modelado matemáticamente; estos procesos son sistemas complejos que constantemente presentan cambios o evolucionan en su estado en un cierto tiempo. Para más sobre la historia del desarrollo de las ecuaciones diferenciales remitimos a [4].

En este trabajo, estamos interesados en realizar un estudio detallado del comportamiento del sistema dinámico definido por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \epsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt} + u = 0,$$

creada por Balthazar Van der Pol en el año 1928 y posteriormente se dará a conocer a través de su nombre; esta ecuación describe un circuito eléctrico que surge con la aparición de los aparatos de radio.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. Un primer capítulo de resultados preliminares donde se estudian los aspectos básicos cualitativos de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Así como también, se dan las definiciones básicas relacionados con los sistemas dinámicos, tales como, puntos críticos, órbitas periódicas, etc. Además, se presentan algunos ejemplos para ilustrar estos conceptos, los cuales ayudaran a entender con más claridad el problema planteado.

El capítulo 2 es el capítulo principal, en él se realiza un estudio cualitativo de la ecuación de Van der Pol, tales como garantizar la prolongabilidad de la solución a toda la recta real, luego calcular y clasificar sus puntos críticos; después probar la existencia y unicidad de la solución periódica para luego terminar el estudio implementando la teoría de estabilidad orbital en dicha solución.

En el capítulo 3 se implementa el método de múltiple escala para encontrar una solución aproximada, en primer lugar de la ecuación de Duffing, y luego para la ecuación

de Van der Pol.

Y por último, en capítulo 4, se utiliza MATLAB para mostrar el plano de fase de la ecuación de Van der Pol, a través del tiempo con el valor del escalar $0 < \epsilon \ll 1$ y compararla con el estudio hecho en el capítulo previo.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo nos referiremos fundamentalmente al estudio teórico de la existencia, unicidad y prolongabilidad de la solución de las ecuaciones diferenciales autónomas; así como también una breve introducción a los sistemas dinámicos y algunos ejemplos ilustrativos de sus propiedades más importantes; para luego culminar con una breve introducción de la estabilidad de órbitas Periódicas.

1.1 Existencia, Unicidad y Prolongabilidad de Soluciones

Consideremos el siguiente sistema autónomo:

$$x' = f(x), \tag{1.1}$$

donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 , definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Una solución de la ecuación diferencial (1.1) es una función diferenciable $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde I es un intervalo abierto, tal que $\Phi(t) \in U$ para cada $t \in I$ y

$$\Phi'(t) = f(\Phi(t)); \text{ para todo } t \in I.$$

Además Φ es una función continuamente diferenciable.

Frecuentemente estaremos interesados en soluciones específicas de la ecuación (1.1), las cuales en algún tiempo inicial $t_0 \in I$ alcanzan el valor x_0 . De manera que, se estudiará el problema de valor inicial (abreviado P.V.I.)

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Como consecuencia del carácter autónomo de la ecuación (1.1) siempre se puede asumir, sin pérdida de generalidad en el (P.V.I.)(1.2), que $t_0 = 0$; en efecto:

Sea x una solución de (1.2) y considere $y(t) := x(t + t_0)$. Entonces, se tiene que

$$y'(t) = x'(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(y(t)) \text{ y } y(0) = x_0.$$

En vista de la discusión anterior en lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario, asumiremos que $t_0 = 0$. Además, para enfatizar la dependencia de una solución $x(t)$ de (1.2) de x_0 cuando $t_0 = 0$, usaremos frecuentemente la notación $\Phi(t, x_0)$ para esta solución, es decir, $\Phi(t, x_0)$ es solución de (1.1) y $\Phi(0, x_0) = x_0$.

A continuación presentaremos tres teoremas relacionados con la existencia y unicidad y prolongabilidad de la solución de una ecuación diferencial del tipo (1.2), los cuales solo enunciaremos; todos los detalles de esta teoría podemos encontrarlo en [8]. Cabe destacar que en el capítulo 2 presentaremos las demostraciones de dichos teoremas para un caso particular.

Teorema 1 (Teorema de existencia y unicidad local). *Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 , entonces para cualquier punto $x_0 \in U$ existe $\delta > 0$ tal que el P.V.I (1.2) tiene una única solución $\Phi(t)$ definida en el intervalo $I = (-\delta, \delta)$.*

Teorema 2. *Sea $C^1(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es una función continua y diferenciable}\}$. Si $f \in C^1(U)$, entonces para cada punto $x_0 \in U$ existe un intervalo maximal abierto $J \equiv J_{x_0}(\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ en el cual el P.V.I (1.2) tiene una única solución, $\Phi(t)$; es decir, si el P.V.I (1.2) tiene otra solución $v(t)$ en el intervalo I , entonces $I \subset J$ y $v(t) = \Phi(t)$ para todo $t \in I$.*

Teorema 3 (Prolongabilidad de las soluciones). *Sea $f \in C^1(U)$ y (α, β) el intervalo maximal de existencia de la solución $\Phi(t)$ del P.V.I (1.2). Si existe un conjunto compacto $K \subset U$, tal que $\Phi(t) \in K$ para todo $t \in J$, entonces $\alpha_{x_0} = -\infty$ y $\beta_{x_0} = \infty$.*

1.2 Dependencia Continua con respecto a los Datos Iniciales

En esta sección presentaremos, sin demostración, el teorema de la dependencia continua de la solución del P.V.I (1.2) respecto a la condición inicial x_0 .

Teorema 4 (Dependencia Continua de los Datos Iniciales). *Supongamos que $f \in C^1(U)$ y $x_0 \in U$, entonces existen $a > 0$, $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x_0)$ (Bola abierta de centro x_0 y radio δ) el problema*

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = y, \end{cases}$$

admite una única solución $\Phi(t, y)$ con $\Phi \in C^1(G)$ y $G = [-a, a] \times B_\delta(X_0)$.

Es decir, la aplicación $(t, x) \rightarrow \Phi(t, y)$ con $(t, y) \in [-a, a] \times B_\delta(X_0)$ es continuamente diferenciable.

1.3 Sistema Dinámico

Los Sistemas Dinámicos son sistemas complejos que presentan un cambio o evolución de su estado en el tiempo. En un sentido amplio, el objetivo de los sistemas dinámicos es estudiar “ todo lo que se mueve ”, es decir, todos los fenómenos en los que hay alguna magnitud que evoluciona con el tiempo. Esta teoría sirve para entender como evolucionan los procesos de la naturaleza, y modernamente han dado lugar a importantes descubrimientos, como la existencia del caos. Para nuestro propósito, en esta sección, se presenta la definición de sistemas dinámicos así como también algunos ejemplos, junto con sus propiedades más importantes.

Definición 1. *Un sistema dinámico en un espacio métrico X es una tripleta (X, \mathbb{R}, π) donde π es una aplicación continua del espacio producto $X \times \mathbb{R}$ en el espacio X , que satisface las siguientes propiedades:*

$$(i) \quad \pi(x, 0) = x \text{ para todo } x \in X.$$

$$(ii) \quad \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2) \text{ para todo } x \in X \text{ y } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado un sistema dinámico en X , el espacio X y la aplicación π son llamadas respectivamente el espacio fase y la aplicación fase (Del sistema dinámico). Para un estudio más amplio de sistemas dinámicos al lector interesado lo remitimos al libro [1].

Un caso particular de sistemas dinámicos se puede obtener a partir de una ecuación diferencial del tipo (1.1); veamos como el siguiente ejemplo ilustra la definición anterior; es decir, probando que cumplen con las hipótesis antes mencionadas.

Ejemplo 1:

Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que todas las soluciones de la ecuación $x' = f(x)$ están definidas en \mathbb{R} . La aplicación $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Pi(x_0, t) := \Phi(t, x_0)$, donde Φ es la solución del (P.V.I.) (1.2) tal que $\Phi(0, x_0) = x_0$, define un sistema dinámico; en efecto:

La continuidad de Φ se sigue del teorema de dependencia continua de los datos iniciales, así

- (i) Se obtiene directamente de la definición.
- (ii) Ahora $\pi(\pi(x_0, t_1), t_2) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, x_0))$ y $\pi(x_0, t_1 + t_2) = \Phi(t_1 + t_2, x_0)$, en particular si $t_2 = 0$, entonces:

$$\pi(\pi(x_0, t_1), 0) = \pi(x_0, t_1)$$

esto implica, por el teorema de existencia y unicidad, que:

$$\pi(\pi(x_0, t_1), t_2) = \pi(x_0, t_1 + t_2)$$

para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto se ha comprobado que efectivamente una ecuación diferencial del tipo (1.1) define un sistema dinámico.

El siguiente ejemplo es el sistema dinámico “Bebutov”. Este sistema dinámico posee propiedades interesantes; además prueba que la teoría de sistemas dinámicos es aplicable a situaciones donde el sistema dinámico no proviene o surge de una ecuación diferencial ordinaria.

Ejemplo 2:

Sea X el conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para todo entero m , con $I_m = [-m, m]$, y para $f, g \in X$, definimos la aplicación $\varrho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ como sigue

$$\sigma_m(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in I_m\},$$

$$\varrho_m(f, g) = \frac{\sigma_m(f, g)}{1 + \sigma_m(f, g)},$$

y finalmente

$$\varrho(f, g) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \varrho_m(f, g).$$

Ahora podemos verificar que ϱ define una métrica en X (es decir, X es un espacio métrico con métrica ϱ) y que con esta métrica el espacio X es completo. De hecho podemos verificar que, si $\{f_n\}$ es una sucesión en X , entonces $\varrho(f_n, f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ si y sólo si f_n converge a f uniformemente sobre cada subconjunto compacto de \mathbb{R} , (Ver [1]).

En el espacio métrico X se define el sistema dinámico de la siguiente manera:

$$\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$$

dado por

$$\pi(f, t) = g$$

donde g viene dado por $g(s) = f(t + s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Para verificar que π es un sistema dinámico, note que (i) en la definición (1) se satisface trivialmente, pues

$$\pi(f, 0) = g(0) = f(t + 0) = f(t).$$

Para verificar (ii) sea $\pi(\pi(f, t), s) = h$ y $\pi(f, t) = g$, de manera que, si $\pi(g, s) = h$, entonces por definición:

$$\begin{aligned} h(\tau) &= g(s + \tau) \\ &= f(t + s + \tau) \\ &= \pi(f, t + s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h = \pi(f, t + s)$, y así se cumple (ii).

Finalmente, para comprobar que π es continuo, se considera f_n una sucesión en X y $\{t_n\}$ una sucesión en \mathbb{R} , tal que $f_n \rightarrow f$ y $t_n \rightarrow t$. Entonces queremos demostrar que

$$\pi(f_n, t_n) \rightarrow \pi(f, t).$$

Sea $K \subset \mathbb{R}$ un compacto. Sea $\pi(f_n, t_n) = g_n$ y $\pi(f, t) = g$. Debemos probar que dado $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\|g_n(\tau) - g(\tau)\| < \epsilon \text{ para } n \geq N \text{ y } \tau \in K.$$

Por definición se tiene que

$$\begin{aligned} g_n(\tau) - g(\tau) &= f_n(t_n + \tau) - f(t + \tau) \\ &= f_n(t_n + \tau) - f_n(t + \tau) + f_n(t + \tau) - f(t + \tau). \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \|g_n(\tau) - g(\tau)\| \leq \|f_n(t_n + \tau) - f_n(t + \tau)\| + \|f_n(t + \tau) - f(t + \tau)\|.$$

Notese que $f_n(t) \rightarrow f(t)$ uniformemente sobre todo subconjunto compacto de \mathbb{R} , por construcción, de manera que la sucesión $\{f_n(t)\}$ es equi-continua. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad podemos tomar

$$\|f_n(t_n + \tau) - f_n(t + \tau)\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \|f_n(t + \tau) - f(t + \tau)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia

$$\|g_n(\tau) - g(\tau)\| < \epsilon.$$

Así hemos comprobado que π es un sistema dinámico.

Ahora bien, para estudiar algunas propiedades importantes de un sistema dinámico definiremos los siguientes conceptos:

Definición 2. Sean $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ abierto, f de clase C^1 . Un punto $\bar{x} \in W$ es llamado punto de equilibrio o punto crítico de $x' = f(x)$ si $f(\bar{x}) = 0$.

Definición 3. La órbita positiva $\gamma^+(x)$, la órbita negativa $\gamma^-(x)$ y la órbita $\gamma(x)$ de un punto x están definidas por:

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{t \in [0, \beta_x)} \pi(t, x).$$

$$\gamma^-(x) = \bigcup_{t \in (\alpha_x, 0]} \pi(t, x).$$

$$\gamma(x) = \bigcup_{t \in (\alpha_x, \beta_x)} \pi(t, x).$$

donde $\pi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ es una aplicación continua, con X espacio métrico.

Definición 4. Si $\gamma^-(x_0)$ es acotada, entonces el conjunto

$$\alpha(x_0) = \lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} \pi(t, x_0)$$

es llamado el conjunto α -límite de x_0 .

Definición 5. Si $\gamma^+(x_0)$ es acotada, entonces el conjunto

$$\omega(x_0) = \lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^+} \pi(t, x_0)$$

es llamado el conjunto ω -límite de x_0 .

Definición 6. Una órbita periódica Γ es llamado un ciclo límite si existen dos puntos en el plano, uno en el interior de Γ y el otro en el exterior de Γ tal que α -límite y ω -límite de las órbitas a través de estos puntos es la órbita periódica Γ .

Teorema 5. Si Γ está contenida en un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , entonces los conjuntos α -límite y ω -límite de Γ son cerrados, más aún, son no vacíos, conexos y compactos.

Los siguientes 2 ejemplos se usarán para ilustrar las definiciones 2, 3, 4, 5 y 6 que fueron enunciadas anteriormente:

Ejemplo 1:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2); \end{cases}$$

tomando el cambio $x_1 = r\cos(\theta)$ y $x_2 = r\sen(\theta)$, obtenemos el sistema de ecuaciones en coordenadas polares de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

El flujo de esta ecuación diferencial se muestra en el plano fase de la figura (1.1). De la ecuación (1.3) se obtiene la siguiente información:

1-) El único punto crítico es el origen ya que $\dot{\theta}$ no es cero.

2-) Tiene un ciclo límite que se determina haciendo en la ecuación $\dot{r} = 0$; este es

un círculo de radio uno centrado en el origen.

3-) Una trayectoria que inicie en $(1,0)$ va al punto $(-1,0)$ cuando $t = \pi$ en sentido horario, como lo muestra el plano fase en la figura (1.1).

4-)El α -límite y el ω -límite vienen dados de la siguiente manera:

Para la región $0 < r < 1$ se tiene que $\frac{dr}{dt} > 0$ entonces r crece, por lo tanto

$$\alpha\text{-límite}(r, \theta) = \{r = 0 : \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

Para la región $0 < r < 1$ se tiene que $\frac{dr}{dt} > 0$ entonces r crece, de manera que

$$\omega\text{-límite}(r, \theta) = \{r = 1 : \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

Para la región $r > 1$ se tiene que $\frac{dr}{dt} < 0$ entonces r decrece, así

$$\omega\text{-límite}(r, \theta) = \{r = 1 : \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

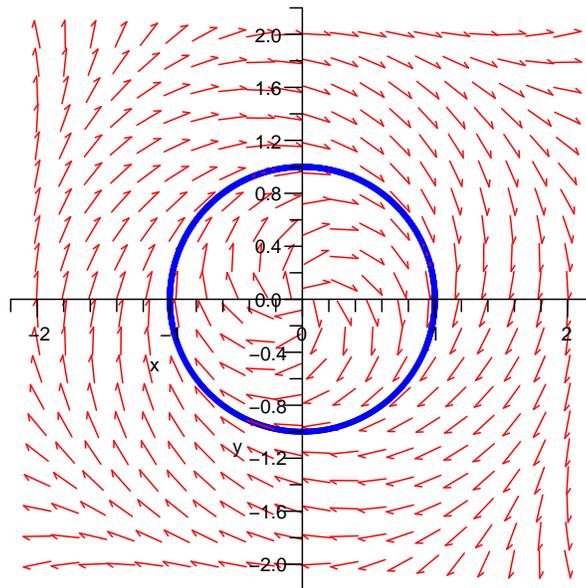


Figura 1.1: Plano fase de la ecuación (1.3)

Ejemplo 2:

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}); \end{cases}$$

haciendo el cambio $x_1 = r\cos(\theta)$ y $x_2 = r\sen(\theta)$, el sistema anterior quedaría de la siguiente forma en coordenadas polares:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1-r)(2-r), \\ \frac{d\theta}{dt} = -1. \end{cases} \quad (1.4)$$

El flujo de esta ecuación diferencial se muestra en el plano fase de la figura (1.2). De la ecuación (1.4) se obtiene la siguiente información:

- 1-) El único punto crítico es el origen ya que $\dot{\theta}$ no es cero.

- 2-) Hay 2 ciclos límites que pueden ser determinados haciendo en la ecuación $\dot{r} = 0$. Ellos son círculos de radio uno y dos, todos centrados en el origen. Γ_i denota el ciclo límite de radio $r = i$.

- 3-) Para el punto crítico en el origen; si la trayectoria inicia en este punto, este permanecerá allí, puesto que se cumple la parte (i) de la definición (1). Una trayectoria que inicia en $(1,0)$ va al punto $(-1,0)$ donde $t_1 = \pi$ en sentido horario. Continuando en esta parte, para otro intervalo de tiempo $t_2 = \pi$, la órbita retorna a $(1,0)$. Así usando la parte (ii) de la definición (1), podemos ver que $\pi(\pi((1,0), t_1), t_2) = \pi((1,0), 2\pi)$; entonces el ciclo límite es de período 2π . Similarmente en el ciclo límite Γ_2 cualquier trayectoria en este ciclo límite recorre la órbita en sentido horario, como lo muestra el

plano fase de la figura (1.2).

4-) El α -límite y el ω -límite vienen dados de la siguiente manera:

En la región $0 < r < 1$ se tiene que $\frac{dr}{dt} > 0$ entonces r crece, así

$$\alpha\text{-límite}(r, \theta) = \{r = 0 : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

En la región $2 < r$ se tiene que $\frac{dr}{dt} > 0$ entonces r crece, de manera que

$$\alpha\text{-límite}(r, \theta) = \{(r = 2 : \theta \in [0, 2\pi])\}.$$

En la región $0 < r < 1$ se tiene que $\frac{dr}{dt} > 0$ entonces r crece acercandose al círculo límite $r = 1$, por lo tanto

$$\omega\text{-límite}(r, \theta) = \{r = 1 : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

En la región $1 < r < 2$ se tiene que $\frac{dr}{dt} < 0$ entonces r decrece acercandose al círculo límite $r = 1$, obteniendose

$$\omega\text{-límite}(r, \theta) = \{(r = 1 : \theta \in [0, 2\pi])\}.$$

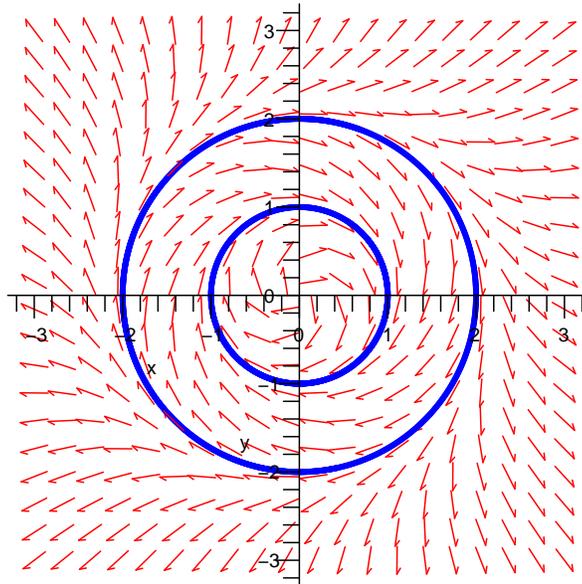


Figura 1.2: Plano fase de la ecuación (1.4)

Definición 7. *Un oscilador es un sistema capaz de crear perturbaciones o cambios periódicos o cuasiperiódicos (repite una y otra vez condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema) en un medio.*

Tipos de oscilaciones:

i) Oscilación libre: Es el caso en el que el sistema reciba una única fuerza y oscile libremente hasta detenerse por causa de la amortiguación.

ii) Oscilación amortiguada: Es el caso en que la amplitud de la misma varia en el tiempo, haciendose cada vez más pequeña hasta llegar a cero. Es decir, el sistema se detiene finalmente en su posición de reposo.

iii) Oscilación autosostenida: Si se logra introducir energía al sistema, reponiendo la que se pierde debido a la amortiguación.

iv) Oscilación forzada: Resultan de aplicar una fuerza periódica y de magnitud constante sobre un sistema oscilador.

1.3.1 Estabilidad de Órbitas Periódicas

El problema sobre la estabilidad de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria surge como continuación de la dependencia de las soluciones respecto a los valores iniciales y parámetros. El desarrollo de un proceso es gobernado por una ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x(t))$. Bajo condiciones x_0 en el instante t_0 , su funcionamiento viene dado por $x(t)$, pero por errores de medición o por una perturbación imprevista es posible que el valor real en el instante t_0 sea \tilde{x}_0 en lugar de ser x_0 y, por lo tanto, su

funcionamiento real será dado por $\tilde{x}(t)$.

Cuando se considera un intervalo finito de tiempo los estudios proporcionan información suficiente. Pero en muchas ocasiones interesa especialmente lo que va a ocurrir cuando t tiende a ∞ . El estudio de este tipo de problemas tiene su origen en Lagrange, Dirichlet, y sobre todo, más recientemente, en los trabajos de A. M. Lyapunov y Poincaré, formando lo que se denomina la teoría global o geométrica de ecuaciones diferenciales ordinarias que constituye una rama muy amplia de la teoría de ecuaciones diferenciales. En esta sección se exponen las nociones más importantes de estabilidad y algunos teoremas típicos de la teoría que se obtienen al estudiar las soluciones de la ecuación bajo estudio.

Noción de estabilidad

Consideremos la ecuación (1.1), donde f está definida en $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ en general, y satisface condiciones que permiten garantizar que existe solución única, al menos local, del problema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

Esta solución será denominada por $\Phi(t; t_0, x_0)$. Supongamos que $\Phi(t; t_0, x_0)$ está definida en $[t_0, +\infty)$.

Definición 8. Diremos que $\Phi(t; t_0, x_0)$ es estable (a la derecha, en el sentido de Lyapunov) si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x_1 con $|x_1 - x_0| \leq \delta$ se tiene que $\Phi(t; t_0, x_1)$ existe y está definida en $[t_0, +\infty)$ y se verifica

$$|\Phi(t; t_0, x_1) - \Phi(t; t_0, x_0)| \leq \epsilon \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

Y diremos que $\Phi(t; t_0, x_0)$ es inestable si no es estable.

Definición 9. Se dice que $\Phi(t; t_0, x_0)$ es asintóticamente estable (a la derecha, en el sentido de Lyapunov) si es estable y además existe $\eta > 0$ tal que si $|x_1 - x_0| \leq \eta$, entonces

$$|\Phi(t; t_0, x_1) - \Phi(t; t_0, x_0)| \longrightarrow 0 \quad \text{para } t \longrightarrow +\infty.$$

Definiciones análogas se pueden dar de la estabilidad (asintótica) a la izquierda, pero, en general, cuando nos referimos a la estabilidad de una solución, sobrentenderemos que se trata de estabilidad a la derecha.

Es evidente de las dos definiciones anteriores que la estabilidad de un punto de equilibrio \bar{x} de la ecuación (1.1) es una propiedad local del fluido cerca del equilibrio. Por lo tanto, es razonable esperar que bajo ciertas condiciones, la propiedad de estabilidad de \bar{x} puede ser determinada por la aproximación lineal, que es, $f'(x)$ de la función f cercana a \bar{x} . Un tratamiento extenso en lo referente a la aproximación lineal podemos encontrarlo en [5].

Para ilustrar los tipos de estabilidad de un punto crítico \bar{x} definamos las vecindades U y $U \subset U_1$ de \bar{x} tal que toda solución $\Phi(t, x_0)$ con $x_0 \in U_1$ está definido, al igual que para U , para todo $t > 0$. De manera que en la figura (1.3) \bar{x} , es estable, asintóticamente estable e inestable en (a), (b) y (c) respectivamente:

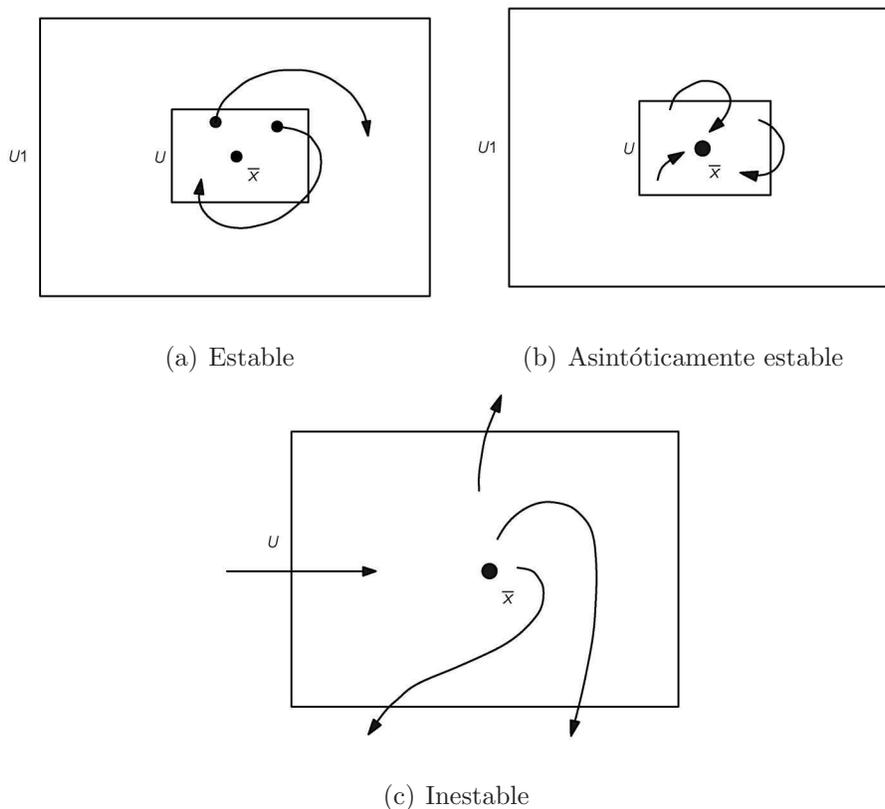


Figura 1.3: Estabilidad de \bar{x}

Un sumidero es asintóticamente estable y por lo tanto es estable. Un ejemplo de un punto crítico estable pero no asintóticamente estable es el origen en \mathbb{R}^3 para una ecuación lineal $x' = Ax$ donde A tiene un autovalor imaginario puro y los otros dos con parte real negativa. Las órbitas son todas elipses, como se muestra en la siguiente figura.

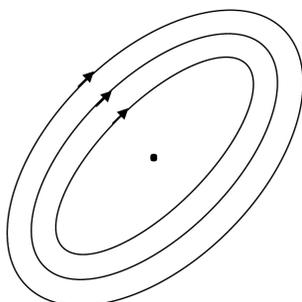


Figura 1.4: Estable, pero no asintóticamente estable

La importancia de este ejemplo en aplicaciones es limitado, porque una perturbación no lineal pequeña destruye esta característica. Incluso, una perturbación lineal pequeña puede convertirlo en un sumidero o en una fuente, pues la hiperbolicidad es una propiedad genérica para el flujo lineal. Una fuente es un ejemplo de un punto crítico inestable.

Un tratamiento más extensivo de la estabilidad de un punto crítico puede encontrarse en [6].

Estabilidad Orbital

Sea $\dot{x}(t) = f(x(t))$ un sistema autónomo, y supongamos que se tiene una solución $\Phi(t)$ no constante que es periódica de período T . Entonces $\Phi(t + h)$ es también solución de período T para cualquier $h \in \mathbb{R}$. Como $|\Phi(t_0 + h) - \Phi(t_0)|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo a h pequeño, y, sin embargo, $|\Phi(t + h) - \Phi(t)|$ con h fijo no tiende a cero, para $t \rightarrow \infty$, resulta que $\Phi(t)$ no es asintóticamente estable.

Pero es muy distinto el comportamiento de $\Phi(t)$ según que una solución $z(t)$ de la ecuación que pasa por un punto $(t_1, z(t_1))$ tal que $z(t_1)$ esté cercano a la curva γ (órbita) en \mathbb{R}^n definida por $t \rightarrow \Phi(t)$ se mantenga cerca a esta órbita para $t \geq t_1$, o que se aleje mucho de la curva. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 10. *Sea γ la órbita en \mathbb{R}^n definida por $t \rightarrow \Phi(t)$, donde $\Phi(t)$ es como se indica arriba. La solución $\Phi(t)$ se denomina orbitalmente estable si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x(t; t_0, x_0)$ es solución que satisface $d(x(t; t_0, x_0), \gamma) \leq \delta$, entonces $x(t; t_0, x_0)$ existe para $t \geq t_0$ y $d(\Phi(x(t; t_0, x_0)), \gamma) \leq \epsilon$ para todo $t \geq t_0$. (Aquí, $d(x, \gamma)$ significa la distancia euclídea del punto x al conjunto γ). La órbita γ es orbitalmente inestable si no es orbitalmente estable.*

Definición 11. *La solución $\Phi(t)$ se denomina orbitalmente asintóticamente estable (y la órbita γ se llama entonces ciclo límite) cuando $\Phi(t)$ es orbitalmente estable y además existe $\eta > 0$ tal que si $d(x(t; t_0, x_0), \gamma) \leq \eta$, entonces $d(\Phi(x(t; t_0, x_0)), \gamma) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow +\infty$.*

Criterio de Estabilidad Asintótica

La estabilidad de una órbita periódica para un campo vectorial autónomo puede ser determinada considerando la aplicación de Poincaré, así para dicho fin definiremos a continuación dicha aplicación y las propiedades de este, que luego utilizaremos en nuestro estudio.

Sea $\Phi(t, p)$ una solución periódica con período minimal T de la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y denotemos la correspondiente órbita periódica por Γ . Ahora elegiremos un campo vectorial $v \in \mathbb{R}^2$ tal que v y el vector tangente $f(p)$ de Γ en p es linealmente independiente. Sea L_ϵ un segmento de línea definido por:

$$L_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = p + av, 0 \leq |a| \leq \epsilon\}.$$

El segmento de línea L_ϵ es llamada una sección transversal de la órbita periódica Γ en el punto p .

Definición 12. *La aplicación de Poincaré o el Mapa de primer retorno “ Π ” que aproxima a una órbita periódica Γ está definida por la aplicación*

$$\Pi : L_\delta \longrightarrow L_\epsilon, \quad x_0 \longrightarrow \Phi(T(x_0), x_0).$$

El punto de la sección transversal L_ϵ tiene un orden natural:

Dos puntos $x_0 = p + a_0v$ y $x_1 = p + a_1v$ satisfacen que $x_0 \geq x_1$ si y sólo si $a_0 \geq a_1$. Usando este orden, la aplicación de Poincaré Π es monótona si $x_0 \geq x_1$ en L_ϵ implica que $\Pi(x_0) \geq \Pi(x_1)$.

Alguna de las propiedades básicas de la aplicación Poincaré están listadas en el siguiente teorema.

Teorema 6. *La aplicación de Poincaré posee la siguientes propiedades:*

- i) La aplicación de Poincaré Π que aproxima una órbita periódica Γ es una aplicación monótona de clase C^1 .*
- ii) La órbita $\gamma(x_0)$ de un punto $x_0 \in L_\delta$ es una órbita periódica si y sólo si x_0 es un punto fijo de la aplicación de Poincaré, que es $\Pi(x_0) = x_0$.*
- iii) La órbita periódica Γ , con $p \in \Gamma$ es orbitalmente asintóticamente estable si $\Pi'(p) < 1$, e inestable si $\Pi'(p) > 1$.*

Para ver detalles de la demostración del teorema enunciado anteriormente ir a [5].

Definición 13. *La órbita periódica Γ a través del punto p es hiperbólico si p es un punto fijo hiperbólico de la aplicación de Poincaré Π , que es $\Pi'(p) \neq 1$.*

Ahora presentaremos una fórmula semejante a la computacional, si la solución periódica correspondiente es conocida explícitamente.

Teorema 7. *Sea $\Phi(t, p)$ una solución T -periódica a través de p de la ecuación diferencial planar $\dot{x} = f(x)$ con $f = (f_1, f_2)$. Entonces:*

$$\Pi'(p) = \exp\left\{ \int_0^T \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) (\Phi(t, p)) dt \right\}. \quad (1.5)$$

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE VAN DER POL

El objetivo de este capítulo es realizar un estudio cualitativo de la ecuación de Van der Pol haciendo uso de la teoría introducida en el capítulo anterior. En primer lugar, demostraremos que la solución de la ecuación de Van der Pol existe, es única y está definida en la recta real. En segundo lugar calcularemos y estudiaremos sus puntos críticos para luego culminar el estudio con el desarrollo de la solución en términos de la aplicación de Poincaré.

2.1 Reseña histórica

Balthazar Van der Pol(1889-1959) nacido el 27 de enero 1889 en Utrecht (Países Bajos). Su padre, también llamado Balthazar Van der Pol, era un rico comerciante de té con amplios intereses culturales que proporcionó a su hijo las condiciones para desarrollar sus múltiples talentos junto a Gerhardina Clasina Steffens quien era su madre. Balthasar asistió a la HBS (Hogere Burgerschool) en Utrecht y se graduó en 1911. Luego entró en la Universidad de Utrecht, donde estudió física y matemáticas hasta 1916 cuando se graduó con una licenciatura en física por la que se le concedió la más alta distinción.

Luego de graduarse Van der Pol fue a estudiar con John Ambrose Fleming, un ingeniero eléctrico y físico Inglés que era profesor en el University College de Londres.

Después de un año de trabajo con Fleming, Van der Pol permaneció en Inglaterra, pero fue a Cambridge para trabajar con John Joseph Thomson en el Laboratorio de Cavendish. Thomson anunció el descubrimiento del electrón en 1897; fue Presidente de la Real Sociedad durante los años en que Van der Pol trabajó con él. Durante su tiempo en el Laboratorio de Cavendish entre 1917 y 1919, él y Van der Pol se reunieron y se convirtieron en amigos de Edward Appleton que, treinta años más tarde, en 1947, fue galardonado con el Premio Nobel de Física por sus contribuciones a la comprensión de la ionosfera. Aunque la mayor parte de la tesis doctoral de Van der Pol se llevó a cabo en Cambridge, su tesis fue aceptada por Willem Henri Julius, director del Laboratorio de Física de la Universidad de Utrecht, y además descrita por Einstein como “ Uno de los más originales exponentes de la física solar” .

En 1919 en el Teilers Museum Van Der Pol aprovecha las investigaciones que se llevan a cabo en óptica, electromagnetismo, ondas de radio y la física atómica para completar su tesis doctoral titulada “El efecto de un gas ionizado en el electro - propagación de la onda magnética y su aplicación a la radio” y lo presentó a la Universidad de Utrecht.

Fue galardonado con el grado de doctor en ciencias (con honores) por la Universidad de Utrecht el 27 de abril de 1920. Inició la dinámica moderna experimental en Gran Bretaña durante los años 1920 y 1930. Investigó los circuitos eléctricos que emplean los tubos de vacío y encontró que tienen oscilaciones estables, que ahora se llama de ciclos límite.

En 1922 Van der Pol dejó a un lado el Teylers Museum para tener una cita con el Jefe del Laboratorio de Física de Philips en Eindhoven. Posteriormente en el mismo año realizó diversos trabajos de investigación en los laboratorios Philips, donde desarrolló su teoría de la oscilación de relajación; y además participó en diversos proyectos de la radiación de rayos X para la recepción de radio. Más tarde se convierte en Director de la

Radio de Investigación Científica.

En 1927 fue nombrado Caballero de la Orden de Oranje Nassau para el establecimiento de la primera radio-comunicación telefónica entre los Países Bajos y las Indias Orientales Holandesas. Él continuó trabajando en Philips hasta 1949, pero durante una parte de este tiempo, desde 1938 a 1949, ocupó la presidencia de la electricidad teórica en la Universidad Técnica de Delft. El trabajo conjunto de Van der Pol y Bremmer permitió la publicación de dos artículos con el título de operativos modernos de cálculo basado en los dos lados de la integral de Laplace en 1948. En 1950 ambos trabajaron en un libro basado en el cálculo operacional.

Por supuesto, a la mayoría de los matemáticos el nombre de Van der Pol está asociado con la ecuación diferencial que ahora lleva su nombre. Esta ecuación apareció por primera vez en su artículo sobre la relajación de oscilación publicado en el *Philosophical Magazine* en 1926. Junto con esta ecuación elaboró modelos de circuitos electrónicos del corazón humano; pues estaba interesado en estudiar el rango de estabilidad de la dinámica así como también encontrar la forma de estabilizar una situación irregular; en consecuencia demostró que sus estudios junto con una señal externa de conducción son semejantes a la situación en la que el corazón está estimulado por un marcapasos.

Después de su jubilación en 1949 fue nombrado Director del Comité Consultivo Internacional de Radio-comunicaciones en Ginebra. Continuó en esta posición hasta 1956, tras lo cual se instaló a Wassenaar. Sin embargo, mantuvo una cátedra de carácter temporal en la Universidad de California, Berkeley, para el año 1957 y luego fue el profesor Víctor Emanuel de Cornell en Ithaca, Nueva York, en 1958. Finalmente muere el 6 de octubre de 1959 en Wassenaar, Países Bajos.

2.2 Ecuación de Van der Pol

En 1926 Van der Pol describe el oscilador que se dará a conocer a través de su nombre y trata de una famosa ecuación que surgió con la aparición de los aparatos de radio. El ciclo límite de esta ecuación tiene lugar en un modelo matemático de una válvula eléctrica (lo que se conoce como tubo de vacío en los Estados Unidos de América). Estas se usaban en las radios hasta que en 1947 Willian Shockiey, John Berdeen y Walter Brattain de los laboratorios Bell Telephone inventaron el transistor. Un análisis matemático similar también se aplica a los transistores. El ciclo límite de Van der Pol corresponde a una válvula oscilante: que da lugar a una forma ondulada la cual va hacia arriba y hacia abajo repetidamente (ver [10]).

El contexto original fue el estudio de ciertos circuitos eléctricos RLC que contenían un tubo de vacío, estos tubos actúan como una resistencia normal cuando la corriente es elevada, y como una resistencia negativa cuando la corriente es baja. Por tanto un circuito de este tipo favorece las oscilaciones pequeñas y amortigua las oscilaciones grandes; este tipo de comportamiento se conoce como oscilaciones de relajación.

El estudio de circuitos eléctricos proporciona otra fuente de importante ecuaciones diferenciables. Daremos un ejemplo de un circuito eléctrico que proviene de una ecuación diferencial que muestra como el estado del circuito varía en el tiempo. El circuito de nuestro estudio es el simple pero fundamental circuito en serie RLC representado en la siguiente figura.

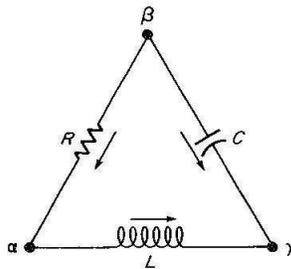


Figura 2.1: Diagrama del Circuito del Oscilador de Van der Pol

En el circuito eléctrico a través de cada rama se tiene el fluido de una corriente el cual es medida por un número real. Más precisamente, la corriente en el circuito está dado por los tres números i_R, i_C, i_L , el cual son el valor de la corriente a través de la resistencia R , el condensador C , y la inductancia L con la dirección del fluido de la corriente mostrado por las flechas en la figura (2.1).

El estado de la corriente en un tiempo dado en el circuito está representado por un punto $i = (i_R, i_C, i_L) \in \mathbb{R}^3$. El voltaje y la corriente, variables de un circuito RLC son interdependientes y debe obedecer a cierta regla de “conservación” tal como se afirmó por Kirchhoff. Para nuestro circuito RLC, la ley de la corriente de Kirchhoff afirma que la corriente total que fluye en un nodo es igual al total de la corriente que fluye fuera de ese nodo. Para nuestro circuito esto equivale a:

$$i_R = i_L = -i_C.$$

Esto define un sub-espacio unidimensional K_1 de \mathbb{R}^3 del estado físico de la corriente; y además la elección de la orientación de la rama del capacitador es tomada de forma arbitraria.

El estado del circuito es caracterizado por la corriente i junto con el voltaje de cada rama. Este voltaje es denotado por v_R, v_C, v_L , el cual es el valor de las diferencias del voltaje a través de los tres componentes eléctricos. Para medir el voltaje se coloca un voltímetro en cada uno de los nodos α, β, γ el cual lee $V(\alpha)$ en α , y así sucesivamente. Entonces v_R es la diferencia en la lectura de α y β

$$V(\beta) - V(\alpha) = v_R.$$

Un estado del voltaje restringido del circuito es el punto $v = (v_R, v_C, v_L)$ en \mathbb{R}^3 . De nuevo la ley del voltaje de Kirchhoff vuelve a poner una restricción física en v de la siguiente manera:

$$v_R + v_L - v_C = 0.$$

Esto define un sub-espacio lineal bidimensional K_2 de \mathbb{R}^3 . Los estados (i, v) satisfacen las leyes de Kirchhoff de un sub-espacio tridimensional $K = K_1 \times K_2$ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

El desarrollo de estos tres componentes eléctricos pueden ser caracterizados matemáticamente. La ley de Ohm generalizada dice que el voltaje a través de una resistencia es una función de la corriente que pasa a través de él:

$$v_R = f(i_R).$$

La función f en el plano (i_R, v_R) es llamada “La característica” de la resistencia y su forma exacta depende del tipo de material del cual la resistencia está hecha. Un ejemplo de la característica está dado por la siguiente figura .

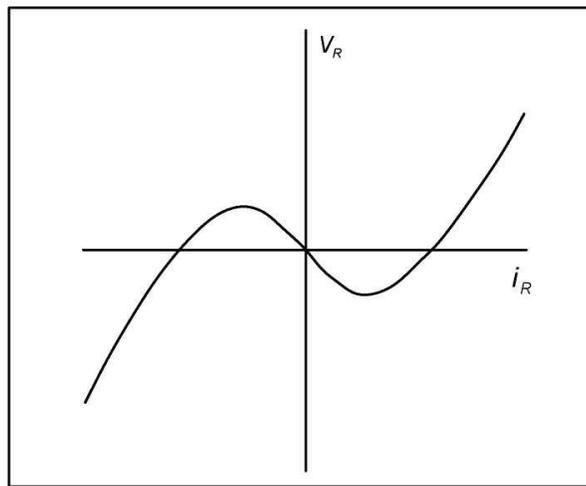


Figura 2.2: La característica

Una característica como la que se muestra en esta Fig. es un tipo especial de resistencia conocido como túnel de diodo que presenta una función característica cúbica de la forma $\frac{x_1^3}{3} - x_1$.

Luego el voltaje y la corriente a través de una inductancia satisface la ley de Faraday

$$L \frac{di_L}{dt} = v_L$$

y un condensador es gobernado por la relación

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C$$

donde L y C son constantes positivas que reflejan las características físicas de la inductancia y el condensador, respectivamente.

La ecuación diferencial puede ser reescrita en términos de las coordenadas (i_L, v_L) obteniéndose que:

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = v_C - f(i_L); \\ C \frac{dv_C}{dt} = -i_L. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si la escala de tiempo varía cuando $t \rightarrow (CL)^{\frac{1}{2}}t$ y tomamos $i_L = x_1$, $v_C = \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}}x_2$, entonces resultaría el sistema equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}} f(x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases} \quad (2.2)$$

que se conoce como Ecuación de Lienard.

Sí tomamos $f(x_1) = \frac{x_1^3}{3} - x_1$, el sistema anterior se convierte en:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x_1^3}{3} - x_1\right); \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

El cual es llamado la forma Lienard de la famosa ecuación de Van der Pol. La representación gráfica de dicho circuito viene dado de la siguiente forma:

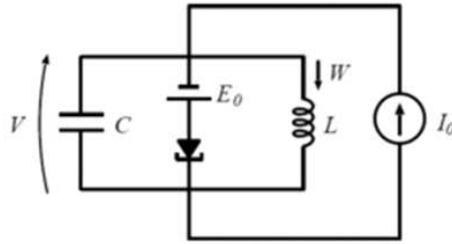


Figura 2.3: Circuito Eléctrico de la Ecuación de Van der Pol

Este sistema de ecuaciones es equivalente a la original ecuación diferencial de segundo orden de Van der Pol:

$$\ddot{x} - \left(\frac{L}{C}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

que representa un papel muy importante en el desarrollo de osciladores no lineales y el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales.

Ahora bien, reescribiendo la ecuación diferencial de segundo orden que describe este sistema se tiene:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \epsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt} + u = 0$$

donde ϵ es un parámetro escalar que mide la fuerza del amortiguador no lineal (También se puede interpretar en términos de un sistema masa-resorte como una resistencia no lineal).

◇ Cuando $\epsilon = 0$ se tiene que no hay ninguna función de amortiguación, la cual se convierte en

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0.$$

Esta es una forma del oscilador lineal armónico (Péndulo simple).

◇ Cuando $\epsilon > 0$ el sistema entrará en un ciclo límite. Cerca del origen este sistema es inestable, y lejos de este el sistema es amortiguado.

En ambos casos, siempre existe conservación de la energía.

Iniciaremos un estudio del plano fase de una ecuación diferencial derivada de un circuito; donde

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x); \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (2.4)$$

Donde $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ en (2.4); entonces el sistema será reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \frac{x^3}{3} + x; \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2.1 Relajación de Oscilaciones

Introducción

El nombre de relajación de oscilación fue usado por Balthazar Van der Pol quien investigó la Ecuación diferencial ahora conocida como ecuación de Van der Pol como una aplicación del modelo de válvula de tríodo y los latidos cardíacos. La relajación de oscilaciones es un fenómeno periódico con una característica muy especial durante un período; está caracterizada por un movimiento brusco en una órbita periódica que exhibe dos distintas y características fases: una durante la cual la energía es almacenada lentamente y la otra en la que la energía es disparada casi instantáneamente cuando un cierto potencial umbral crítico es alcanzado (Ver [9]).

Este comportamiento puede ser ilustrado por el siguiente sistema mecánico:

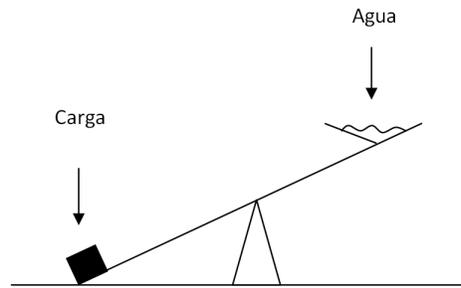


Figura 2.4: El oscilador sube y baja

Considere un sube y baja con un pivote en el medio, un contenedor que puede llenarse de agua en un extremo y del otro extremo un cierto peso (Ver Figura 2.4). Si el contenedor está vacío el otro lado toca el plano horizontal. De un grifo está goteando agua dentro del contenedor y en una cierta altura del nivel del agua el peso excede el peso del otro extremo, este sube y entonces el contenedor toca el plano horizontal; en este momento el contenedor se vacía y rápidamente el sube y baja regresa a su posición inicial para que el proceso comience de nuevo. Este es un simple ejemplo de relajación de oscilación.

Así, un oscilador es caracterizado por intervalos de tiempo en el cual muy poco ocurre, seguido por cortos intervalos de tiempo con notables cambios. Aparte del campo de la mecánica clásica, la relajación de oscilaciones surge en muchas partes de la física, las ciencias de ingeniería y economía. Por ejemplo, ciertos movimientos pulsativos de las estrellas pueden ser asociados con relajación de oscilación; esto también se aplica en los fenómenos geofísicos con períodos de explosiones de vapor en geysers y el repentino desplazamiento de placas tectónicas causando terremotos. En la matemática biológica se estudia aplicaciones de fenómenos periódicos como el latido del corazón, los movimientos respiratorios de los pulmones y otros fenómenos cíclicos.

Teoría

Considere el sistema perturbado singularmente autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \epsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

de $m + n$ ecuaciones diferenciales. Podemos esperar que el movimiento lento sea determinado por el sistema reducido

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ 0 = g(x, y) \end{cases}$$

considerando que el movimiento rápido seguirá al sistema de orden n -ésimo extendido

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y)$$

(equivalentemente $\epsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y)$) con x un parámetro y $\tau = \frac{(t - t_0)}{\epsilon}$ para algún t_0 apropiado. En consecuencia, el movimiento lento estará en la variedad m -dimensional

$$\Gamma : g(x, y) = 0$$

considerando que el movimiento lento ocurre fuera de Γ . Si el punto inicial $(x(0), y(0))$ no está en Γ , podemos esperar que y se mueva casi instantáneamente hacia Γ (satisface aproximadamente el sistema rápido), considerando que x apenas varía, siempre que el punto en reposo $(x_1, y_1) \sim (x(0), y_1)$ para el sistema rápido sea estable (suponemos que $g_y(x(0), y_1)$ tiene un autovalor estable). Entonces podemos esperar que x y y permanezcan cerca de Γ , cerca de satisfacer el sistema reducido, satisfaciendo aproximadamente el sistema reducido, hasta que g_y pierda estabilidad (como cuando un autovalor de $g_y(x_2, y_2)$ para a través de la parte real de cero). Entonces debemos esperar que la órbita se mueva rápidamente lejos de este punto de bifurcación (o unión) y lejos de Γ .

Entonces y satisface el sistema rápido considerando que x permanece casi constante hasta que un punto de caída estable $(x_3, y_3) \sim (x_2, y_3)$ en Γ es alcanzado, donde el moviéndose lento a lo largo de Γ comienza de nuevo. Cuando tales alteraciones sucesivas entre el movimiento lento y el movimiento rápido produce una trayectoria cerrada (asintóticamente), la solución periódica correspondiente de nuestro sistema es llamada relajación de oscilaciones (Ver [11]). Este es caracterizado por ser tembloroso, casi instantáneo y con saltos periódicos en y . El período es asintóticamente determinado por el tiempo transcurrido en la variedad lenta de Γ donde o $dt = \frac{dx}{f(x, y)}$ podría ser integrado o $dt = \left(\frac{F'(y)}{y} \right) dy$ es integrado, es decir, $x = F(y)$.

El desplazamiento de tales oscilaciones satisfacen una ecuación de segundo orden de la forma

$$\ddot{y} + \epsilon F'(y)\dot{y} + y = 0.$$

Sí $F(y) = \frac{1}{3}y^3 - y$, obtenemos el oscilador de Van der Pol (entre las muchas aplicaciones) oscilaciones autosostenidas de un circuito de tríodo. El pequeño ϵ corresponde con una auto-inductancia. En el plano fase $x - y$, la curva fundamental es $\Gamma : \frac{1}{3}y^3 - y$. Para entender lo que pasa, vamos a reescribir la ecuación de Van der Pol

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \epsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

notese que

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \epsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = \frac{dy}{dt} \left(\frac{dy}{dt} + \epsilon \left(\frac{1}{3}y^3 - y \right) \right) + y$$

integrando y reescribiendo

$$\begin{cases} \dot{y} &= w - \epsilon F(y); \\ \dot{w} &= -y, \end{cases}$$

haciendo el cambio de variable $x = \frac{w}{\epsilon}$

$$\begin{cases} \dot{y} = \epsilon(\dot{x} - F(y)); \\ \dot{x} = -\frac{y}{\epsilon}, \end{cases}$$

dividiendo la segunda ecuación con respecto a la primera obtenemos que el sistema es equivalente a

$$(x - F(y))\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\epsilon^2}.$$

Para $\epsilon \gg 1$, la parte derecha de la expresión es casi cero. En este límite, si $x = F(y)$ o $\frac{dx}{dy} = 0$ es decir, $x = \text{constante}$. Dibujando la curva fundamental $\Gamma : \frac{1}{3}y^3 - y$, el comportamiento es como se indica esquemáticamente en la siguiente figura

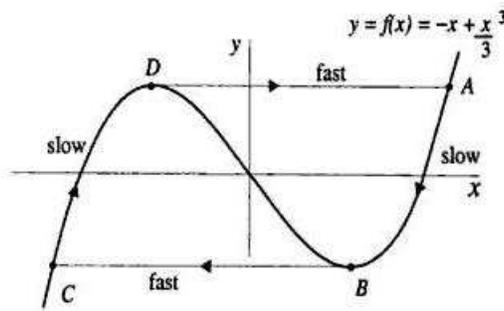


Figura 2.5: Origen de las escalas de tiempo rapido y lento para relajación de oscilaciones

El sistema lento atraviesa la curva $F(y)$ en el sentido de las flechas de A a B, salta horizontalmente y rapidamente de B a C, de nuevo el movimiento lento a lo largo de la curva $F(y)$ a D, entonces salta rapidamente regresando a A. Para más detalles de lo relacionado a la relajación de oscilaciones ver [3].

Cuando $\epsilon \rightarrow 0$ tenemos que el período viene dado por $T = 2 \int dt$ (Por la simetría se ambas ramas). Como $x = F(y)$ entonces su derivada viene dada por

$$\frac{dx}{dt} = F'(y) \frac{dy}{dt}$$

es decir

$$\frac{dx}{dt} = (y^2 - 1) \frac{dy}{dt}$$

como $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\epsilon}$ entonces sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que

$$-\frac{y}{\epsilon} = (y^2 - 1) \frac{dy}{dt}$$

despejando dt

$$dt = -\frac{\epsilon(y^2 - 1)}{y} dy.$$

Así el período resulta

$$\begin{aligned} T &= 2\epsilon \int_2^1 -\frac{\epsilon(y^2 - 1)}{y} dy = 2\epsilon \left[\int_2^1 \frac{1}{y} dy - \int_2^1 y dy \right] \\ &= 2\epsilon \left[\ln(y) - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_2^1 \\ &= \epsilon [3 - 2\ln(2)]. \end{aligned}$$

2.2.2 Prolongabilidad de la solución

Para garantizar la prolongabilidad de las soluciones de la ecuación de Van der Pol sobre todo \mathbb{R} utilizaremos el argumento del teorema (3); así, veamos que existe un conjunto compacto, que llamaremos K , contenido en el dominio del sistema (\mathbb{R}^2) tal que la solución $\Phi(t) \in K$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$.

Sea $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ una solución de la ecuación (2.5). Sin pérdida de generalidad, sea $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Entonces derivando la función $V(x, y)$ con respecto al tiempo a lo largo de esta solución obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, y)}{dt} &= \frac{2xx'}{2} + \frac{2yy'}{2} \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

Sustituyendo x' y y' de (2.5) en la ecuación anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(x, y)}{dt} &= x\left(y - \frac{x^3}{3} + x\right) + y(-x) \\
 &= xy - \frac{x^4}{3} + x^2 - xy \\
 &= -\frac{x^4}{3} + x^2 \\
 &\leq x^2 \\
 &\leq 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) \\
 &= 2V(x, y)
 \end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos que:

$$\frac{dV(x, y)}{dt} \leq 2V(x, y)$$

de manera que resolviendo la inecuación diferencial, se tiene la siguiente desigualdad:

$$V(x, y) \leq V(0)e^{2t}$$

sustituyendo V se tiene que

$$\left(\frac{x(t)^2}{2} + \frac{y(t)^2}{2}\right) \leq \left(\frac{x(0)^2}{2} + \frac{y(0)^2}{2}\right) e^{2t}. \quad (2.6)$$

Ahora bien, por otro lado

$$\|\Phi(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

y así, usando la desigualdad (2.6) se tiene que para $t \in [0, \beta)$, con $\beta > 0$:

$$\|\Phi(t)\| \leq \left(\sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}\right) e^\beta$$

o simplemente

$$\|\Phi(t)\| \leq \sqrt{C_0 e^{2\beta}} = r, \quad t \in [0, \beta].$$

De manera que, hemos encontrado una cota que llamaremos r , para la solución de la ecuación de Van der pol; ahora bien el compacto K viene dado de la forma $\overline{B(0, r)}$. En tal sentido, en virtud del teorema (3), $\beta = \infty$, y de manera similar $\alpha = -\infty$. Por lo tanto la solución de la ecuación de Van der Pol (2.5) puede ser prolongada a toda la recta real.

2.2.3 Punto Crítico

A continuación realizaremos el análisis de los puntos críticos de la ecuación de Van der Pol (2.5), para dicho propósito tomemos la siguiente notación:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = y - \frac{x^3}{3} + x, \\ f_2(x, y) = -x. \end{cases}$$

Por definición (2) se tiene que si

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0; \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} y - \frac{x^3}{3} + x = 0, \\ -x = 0; \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, hemos obtenido que (2.5) tiene un único punto de equilibrio ubicado en (0,0) (origen); ilustrado de manera más clara en la siguiente figura.

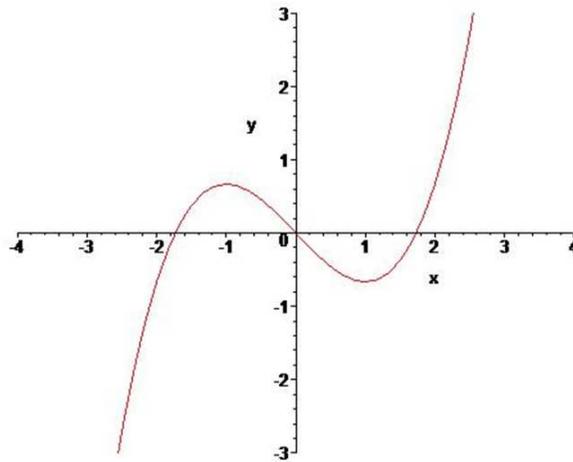


Figura 2.6: Punto Crítico de la Ecuación de Van der Pol

Ahora para el estudio del único punto crítico de la Ecuación de Van der Pol derivemos $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en función de x y y , así tendríamos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = -\frac{3x^2}{3} + 1 = -x^2 + 1, \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 1, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = -1, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = 0, \end{array} \right.$$

y evaluando cada derivada en el punto crítico se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial f_1(0, 0)}{\partial y} = 1, \\ \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial x} = -1, \\ \frac{\partial f_2(0, 0)}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

Así obtendríamos que la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

tomaría la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular los autovalores de A se considera el polinomio característico que viene dado por

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

por lo tanto los autovalores de A vienen dados por:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2},$$

y como $\text{Re}[\lambda_1] = \text{Re}[\lambda_2] = \frac{1}{2} > 0$, entonces el punto crítico $(0,0)$ es inestable.

2.2.4 Existencia de la solución periódica

En esta sección enunciaremos y demostraremos algunos teoremas y lemas que nos ayudarán a probar que la ecuación de Van der Pol posee una solución periódica.

Definición 14. Una solución $\pi(t, x)$ de $\dot{x}(t) = f(x(t))$ se dice que es una solución periódica, de período T , si $\pi(t + T, x) = \pi(t, x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 1. (*Propiedad de traslación*)

Supongamos que se tiene una solución $\Phi(t)$ de la ecuación $\dot{x} = f(x)$ en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\Phi(t - t_0)$, con t_0 una constante, es también una solución.

Para detalles de la demostración del Lema mencionado remitimos al lector interesado a [13].

Lema 2. *Una solución periódica de una ecuación autónoma $\dot{x} = f(x)$ corresponde con una órbita cerrada (ciclo) en el plano de fase y una órbita cerrada corresponde con una solución periódica.*

Demostración:

(\Rightarrow) Esta implicación es inmediata ya que una solución periódica produce una órbita cerrada en el plano fase.

(\Leftarrow) Para esta implicación consideremos una órbita cerrada C en el plano fase y un punto $x_0 \in C$. La solución de la ecuación $\dot{x} = f(x)$, la cual llamaremos $\Phi(t)$, inicia en $t = 0$ en x_0 y describe la órbita C . Por la unicidad de la solución, C no puede contener un punto crítico, así

$$\|\dot{x}\| = \|f(x)\| \geq a > 0 \quad \text{para } x \in C.$$

Por lo tanto para un tiempo $t = T$ el punto de la órbita retorna a x_0 .

A continuación demostraremos que:

$$\Phi(t + T) = \Phi(t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Observese que podemos escribir $t = nT + t_1$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $0 < t_1 < T$. En virtud del lema anterior tenemos de manera inmediata que si $\Phi(t)$ es solución con $\Phi(t_1) = x_1$ entonces $\Phi(t - nT)$ también es solución con $\Phi(t_1 + nT) = x_1$, así:

$$\Phi(t_1) = \Phi(t_1 + nT).$$

Y como t_1 puede tomar cualquier valor en $(0, T)$ se tiene que $\Phi(t)$ es periódica, culminándose así la demostración.

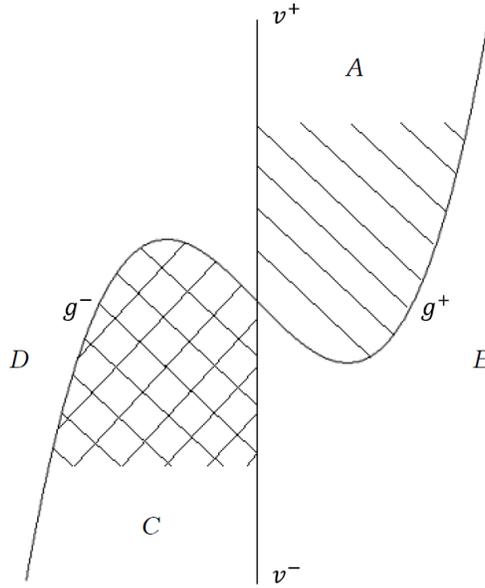


Figura 2.7:

Teorema 8. *Existe una solución periódica no trivial de (2.5) y cada solución no equilibrada tiende a esta solución periódica.*

Anteriormente se demostró que la ecuación de Van der Pol tiene un único punto de equilibrio en $(0,0)$. El próximo paso es demostrar que toda solución no equilibrada rota en sentido horario, alrededor del punto de equilibrio. Para este fin dividiremos el plano (x, y) en cuatro regiones disjuntas (Conjuntos abiertos) A, B, C, D como lo muestra la Fig. (2.7). Estas regiones constituyen el complemento de las curvas:

$$\begin{cases} y - f(x) = 0, \\ -x = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Donde $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Así (2.7) describe las cuatro regiones. Definamos las cuatro

curvas:

$$\begin{aligned} v^+ &= \{(x, y) | y > 0, x = 0\}, \\ g^+ &= \{(x, y) | x > 0, y = \frac{x^3}{3} - x\}, \\ v^- &= \{(x, y) | y < 0, x = 0\}, \\ g^- &= \{(x, y) | x < 0, y = \frac{x^3}{3} - x\}. \end{aligned}$$

Estas curvas son disjuntas; junto con el origen forman los límites de las cuatro regiones. Es claro que solo en $(0,0)$ y en $v^+ \cup v^-$, $y' = 0$; así como también $x' = 0$ exactamente en $g^+ \cup g^- \cup (0,0)$.

Aún más, el vector (x', y') es horizontal en $v^+ \cup v^-$, el punto derecho en v^+ e izquierdo en v^- (ver Fig. (2.8)). Y el punto (x', y') es vertical en $g^+ \cup g^-$, apuntando hacia abajo en g^+ y hacia arriba en g^- . En cada región A, B, C, D el signo de x' y y' son constantes. Así que en A , por ejemplo, tenemos $x' > 0$, $y' < 0$, así que el campo vectorial siempre se apunta al cuarto cuadrante.

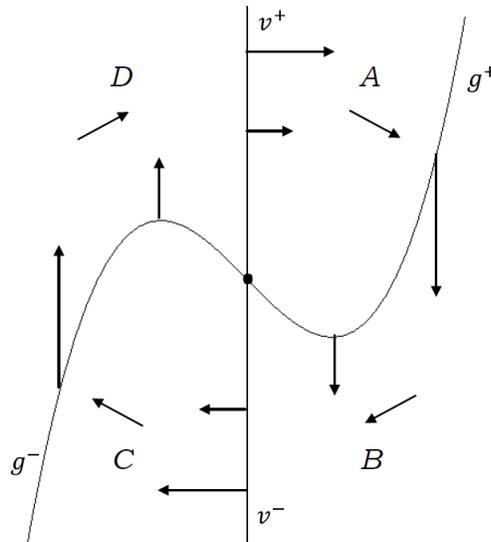


Figura 2.8:

La próxima parte de nuestro análisis concierne a la naturaleza del fluido en el interior

de las regiones. La Fig. (2.8) sugiere que la trayectoria es espiral alrededor del origen en el sentido de las agujas del reloj. La proposición siguientes hace esto más preciso.

Proposición 1. *Toda trayectoria es definida para todo $t \geq 0$. Excepto para $(0,0)$, cada trayectoria corta respectivamente las curvas v^+, g^+, v^-, g^- , pasando por las regiones A, B, C, D en el sentido de las agujas del reloj.*

Demostración: (Ver Figura (2.8)).

Sea $(x(t), y(t))$ una curva solución de (2.5).

Caso 1:

Si $(x(0), y(0)) \in v^+$ entonces $x(0) = 0$ y $y(0) > 0$ por lo tanto sustituyendo en (2.5) se tiene que:

$$\begin{cases} x'(0) = y(0) - (x(0))^3 + (x(0)), \\ y'(0) = -(x(0)). \end{cases}$$

Así

$$\begin{cases} x'(0) = y(0), \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Pero como $y(0) > 0$ entonces $x'(0) > 0$ es decir $x(t)$ es creciente para t pequeño, así que $x(t) > 0$ el cual implica que $y(t)$ es decreciente para t pequeño. por lo tanto la curva entra en A .

Caso 2: (Por reducción al absurdo)

Demostremos que si $(x(0), y(0)) \in A$ entonces existe $t > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in g^+$. Para ello supongamos lo contrario. Sea $P_1 \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto acotado por $(0,0)$, v^+, g^+ y la línea $y = y(0)$ como en la Fig. (2.9). La curva solución $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < \beta$ está en P_1 , por (Teorema 3) como la solución está en un conjunto compacto entonces la solución puede prolongarse a todo \mathbb{R} ; así la curva solución $(x(t), y(t))$ está en P_1 para

$t \geq 0$. Ya que $x' > 0$ en A y estamos en un conjunto compacto entonces existe un a tal que $x(t) \geq a$ para $t > 0$. Sustituyendo en (1.4), $y'(t) \leq -a$ para $t > 0$.

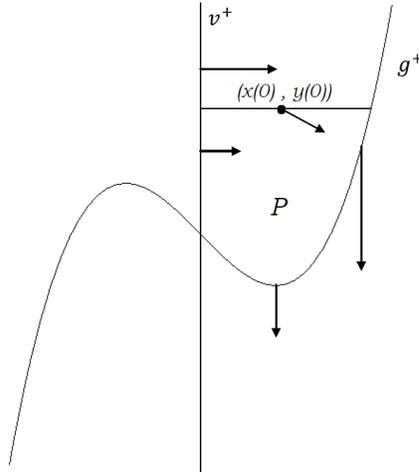


Figura 2.9:

Por el teorema fundamental del calculo para $t > 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 y(t) - y(0) &= \int_0^t y'(s) ds \\
 &\leq \int_0^t -a ds \\
 &= -as \Big|_0^t \\
 &= -at.
 \end{aligned}$$

Entonces $y(t) = -at + y(0)$. Es decir $y(t) \leq 0$ a partir de un cierto t lo suficientemente grande; pero este cambio de signo es una contradicción al menos que nuestra trayectoria satisfaga g^+ .

Caso 3:

Si $(x(0), y(0)) \in g^+$ entonces

$$\begin{cases} x(0) > 0, \\ y(0) = \frac{x(0)^3}{3} - x(0). \end{cases}$$

Sustituyendo en (2.5) se tiene

$$\begin{cases} x'(0) = \frac{x(0)^3}{3} - x(0) - \frac{x(0)^3}{3} + x(0), \\ y'(0) = -x(0). \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} x'(0) = 0, \\ y'(0) < 0. \end{cases}$$

Lo que implica que $y(t)$ es decreciente para $t \geq 0$. Además $x'(0) = 0$ lo que implica que $x(t)$ es constante para $t \geq 0$. Por lo tanto la curva entra en B .

Caso 4:(Por reducción al absurdo)

Demostremos que si $(x(0), y(0)) \in B$ entonces existe $t > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in v^-$. Para este fin supongamos lo contrario. Como $(x(0), y(0)) \in B$ entonces para $t > 0$

$$\begin{cases} x(0) > 0, \\ y(t) < x(t)^3 - x(t). \end{cases}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \int_0^t x'(s) ds \\ &= \int_0^t y(s) - x(s)^3 + x(s) ds \\ &< \int_0^t x(s)^3 - x(s) - x(s)^3 + x(s) ds \\ &= \int_0^t 0 ds \\ &= C_0, \quad C_0 \text{ constante.} \end{aligned}$$

Entonces $x(t) = C_0 + x(0)$. Si en particular tomando $C_0 = -x_0$ se tiene que $x(t) < 0$ y este cambio de signo es una contradicción al menos que la trayectoria satisfaga v^- .

Caso 5:

Si $(x(0), y(0)) \in v^-$ Entonces $x(0) = 0$ y $y(0) < 0$, sustituyendo en (2.5) se tiene

$$\begin{cases} x'(0) = y(0), \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Es decir $y(t)$ es constante para $t \geq 0$. Además como $y(0) < 0$ entonces $x'(0) < 0$ lo que implica que $x(t)$ es decreciente para $t \geq 0$. Por lo tanto la curva entra en C .

Caso 6:(Por reducción al absurdo)

Para este caso demostremos que si $(x(0), y(0)) \in C$ entonces existe $t > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in g^-$. Para dicho proposito supongamos lo contrario. Sea $P_2 \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto compacto acotado por $(0,0)$, v^- , g^- y la línea $y = -y(0)$ como en la Fig. (2.10). La curva solución $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < \beta$ está en P_2 ; nuevamente por (Teorema 3) como la solución está contenida en un conjunto compacto entonces la solución puede prolongarse a todo \mathbb{R} , entonces la curva solución $(x(t), y(t))$ está en P_2 para $t \geq 0$.

Ya que $x' < 0$ en C , $x(t) \leq b$ para $t > 0$. Sustituyendo en (2.5) se obtiene que

$$y'(t) \geq -b \quad \text{para } t > 0.$$

Por el teorema fundamental del calculo para $t > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} y(t) - y(0) &= \int_0^t y'(s) ds \\ &\geq \int_0^t -b ds \\ &= -bs \Big|_0^t \\ &= -bt. \end{aligned}$$

Entonces $y(t) = -bt + y(0)$, es decir $y(t) \geq 0$ y este cambio de signo es una contradicción al menos que nuestra trayectoria satisfaga g^- .

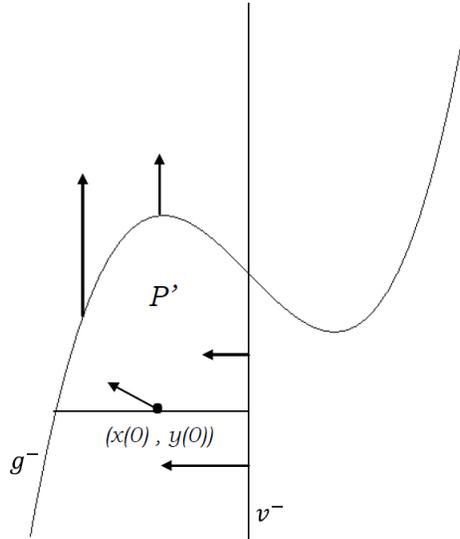


Figura 2.10:

Caso 7:

Si $(x(0), y(0)) \in g^-$ Entonces

$$\begin{cases} x(0) < 0, \\ y(0) = \frac{x(0)^3}{3} - x(0). \end{cases}$$

sustituyendo en (2.5) se tiene

$$\begin{cases} x'(0) = 0, \\ y'(0) > 0. \end{cases}$$

Es decir $y(t)$ es creciente para $t \geq 0$ y además $x(t)$ es constante para $t \geq 0$ por lo tanto la curva entra en D .

Caso 8:(Por reducción al absurdo)

Demostremos que si $(x(0), y(0)) \in D$ entonces existe $t > 0$ tal que $(x(t), y(t)) \in v^+$. Para dicho proposito supongamos lo contrario. Por hipótesis tenemos que $x(0) < 0$ y que

$$y(t) = \frac{x(t)^3}{3} - x(t) \text{ para todo } t > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t x'(s) ds \\ &= \int_0^t y(s) - \frac{x(s)^3}{3} + x(s) ds \\ &> \int_0^t \frac{x(s)^3}{3} - x(s) - \frac{x(s)^3}{3} + x(s) ds \\ &= \int_0^t 0 ds \\ &= C_1, \quad C_1 \text{ constante.} \end{aligned}$$

En particular tomando $C_1 = 0$ se tiene que $x(t) > 0$ y este cambio de signo es una contradicción al menos que la trayectoria satisfaga v^+ .

Así queda probado la proposición 1. Ver Fig. (2.11).

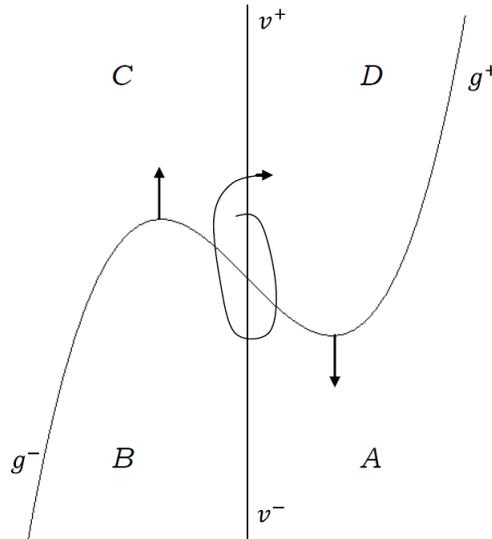


Figura 2.11:

Para analizar adicionalmente el fluido del oscilador de Van der Pol definamos la

aplicación σ de la siguiente manera

$$\sigma : v^+ \longrightarrow v^+.$$

Supongamos $p \in v^+$; la curva solución $t \longrightarrow \phi_t(p)$ aunque p es definido para todo $t \geq 0$. Este sería el más pequeño $t_1(p) = t_1 > 0$ tal que $\phi_{t_1}(p) \in v^+$. Así $\sigma(p)$ es el primer punto despues de p sobre la trayectoria de p (para $t > 0$) el cual está de nuevo sobre v^+ (Fig. 2.12). La función $p \longrightarrow t(p)$ es continua; además σ es también continua e inyectiva por la unicidad de las soluciones.

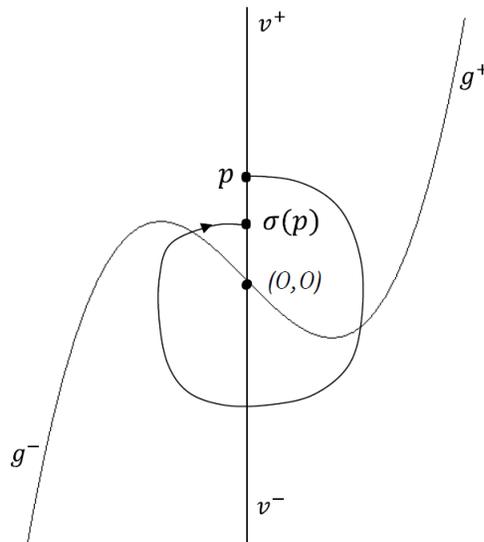


Figura 2.12:

Proposición 2. *Suponga $p \in v^+$. Entonces p es un punto fijo de σ (que es, $\sigma(p) = p$) si y sólo si p está sobre una solución periódica de (2.5) (que es, $\phi_t(p) = p$ para algún $t \neq 0$). Además toda curva de solución periódica satisface v^+ .*

Demostración:

Caso 1: Si $\sigma(p) = p$.

Entonces se tiene que $\phi_{t_1}(p) = p$ donde $t_1 = t_1(p)$ por como está definido σ .

Caso 2: Si $\sigma(p) \neq p$.

Supongamos $v^* = v^+ \cup (0, 0)$. Observemos primero que σ extiende a la aplicación $v^* \rightarrow v^*$ la cual es de nuevo continua e inyectiva, enviando al $(0, 0)$ en el mismo. Luego identifiquemos a v^* con $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ asignando a cada punto en estas y -coordenadas. Por lo tanto esto es un orden natural en $v^* : (0, y) < (0, z)$ si $y < z$. Esto sigue del teorema de valor medio que $\sigma : v^* \rightarrow v^*$ preserva orden.

Si $\sigma(p) = p$, entonces

$$\sigma^2(p) > \sigma(p) > p$$

así por inducción

$$\sigma^n(p) > p \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

esto significa que la trayectoria de p nunca cruza v^+ de nuevo en p . Así $\phi_t(p) \neq p$ para todo $t \neq 0$. De manera similar se aplica para $\sigma(p) < p$. Por lo tanto si $\sigma(p) \neq p$ entonces p no está en una trayectoria periódica.

Ahora bien, la última parte de la proposición 2 sigue de la proposición 1 la cual implica que toda trayectoria (excepto $(0, 0)$) satisface v^+ , en particular la trayectoria de la curva de la solución periódica también lo satisface; quedando demostrada la proposición 2.

De manera que, con la proposición (2) hemos probado que la ecuación (2.5) tiene una órbita cerrada, así con el lema (1.2) se tiene que la ecuación de Van der Pol posee una solución periódica.

2.2.5 Estabilidad de la órbita periódica

En esta sección demostraremos cómo el desarrollo de la solución aproximada a una órbita periódica puede ser estudiada en términos de la dinámica de una aplicación monótona escalar llamada “La aplicación de Poincaré”, también encontramos una fórmula para la derivada de la aplicación de Poincaré y usaremos esto para completar el análisis del oscilador de Van der Pol.

Teorema 9. *Una órbita periódica no trivial del oscilador de Van der Pol*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

con $\epsilon > 0$ es hiperbólica y orbitalmente asintóticamente estable.

Demostración:

Sea Γ una órbita periódica no trivial con período T y sea $x(t)$ la solución correspondiente. Con el teorema (6) y la fórmula (1.5), nosotros necesitamos demostrar que la derivada del Mapa de Poincaré satisface que:

$$\Pi'(x(0)) < 1.$$

Para dicho fin calculemos las derivadas parciales de la ecuación (2.8).

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \quad y \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \epsilon(1 - x_1^2)$$

así, sustituyendo en (1.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} \Pi'(x(0)) &= \exp\left\{ \int_0^T (0 + \epsilon(1 - x_1^2)) dt \right\} \\ &= \exp\left\{ \int_0^T \epsilon(1 - x_1^2) dt \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, estamos interesados en probar que $\exp\left\{\int_0^T \epsilon(1 - x_1^2)dt\right\} < 1$. Para lo cual basta probar que el valor de la integral es negativa.

En efecto, consideremos la función

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

y calculemos \dot{V} a lo largo de la solución de la ecuación (2.8)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2) \\ &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1x_2 + x_2(-x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2) \\ &= x_1x_2 - x_2x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2^2 \\ &= \epsilon(1 - x_1^2)x_2^2 \\ &= \epsilon(1 - x_1^2)[2V(x_1, x_2) - x_1^2] \\ &= -2\epsilon(1 - x_1^2) \left[\frac{1}{2}x_1^2 - V(x_1, x_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La función V toma el mínimo valor en la órbita periódica Γ en algún punto, es decir, en $x(\bar{t})$. Así se tiene que, si $\dot{V}(x(\bar{t})) = 0$, entonces $x_2(\bar{t}) = \dot{x}_1(\bar{t}) = 0$ o $x_1(\bar{t}) = \pm 1$.

Ahora demostremos que el primer caso es imposible:

Si $x_2(\bar{t}) = 0$, entonces sustituyendo en (2.8) se tiene que $\dot{x}_2(\bar{t}) \neq 0$ o de lo contrario tendríamos que $x_1(\bar{t}) = 0$; pero la unicidad de la solución podría implicar que $x(t) = 0$ para todo t , el cual es imposible pues estamos suponiendo una solución no trivial.

Sin embargo, si $\dot{x}_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) = 0$, entonces $\ddot{x}_1(\bar{t}) = \dot{x}_2(\bar{t}) \neq 0$ y así $x_1(t)$ tiene un máximo o un mínimo en $t = \bar{t}$. Consecuentemente la función $1 - [x_1(t)]^2$ tiene un signo constante para t cercano a \bar{t} ; por lo tanto $V(x(t))$ es estrictamente monótona para t cercano a \bar{t} , lo cual contradice que tiene un mínimo en $t = \bar{t}$.

Del argumento anterior, el hecho de que $\dot{V}(x(\bar{t})) = 0$ implica que $x_2(\bar{t}) \neq 0$ y que

$x_1(\bar{t}) = \pm 1$. Entonces

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ &= \frac{1}{2}(1 + x_2^2). \end{aligned}$$

Es decir $V(x(t)) > \frac{1}{2}$ para todo t . Ahora, una simple reorganización de la ecuación (2.9) se tiene que

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2\epsilon(1 - x_1^2) \left[\frac{1}{2}x_1^2 - V(x_1, x_2) \right]$$

dividiendo por $-[V(x(t)) - \frac{1}{2}]$ se tiene que

$$-\frac{\dot{V}(x_1, x_2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2) = \frac{2\epsilon(1 - x_1^2)[\frac{1}{2}x_1^2 - V(x_1, x_2)]}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2)$$

así

$$-\frac{\dot{V}(x_1, x_2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2) = \frac{2\epsilon(1 - x_1^2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}x_1^2 - V(x(t)) + V(x(t)) - \frac{1}{2} \right]$$

y simplificando obtenemos que

$$-\frac{\dot{V}(x_1, x_2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2) = \frac{2\epsilon(1 - x_1^2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2} \right].$$

Es decir

$$-\frac{\dot{V}(x_1, x_2)}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2) = -\frac{\epsilon(1 - x_1^2)^2}{V(x(t)) - \frac{1}{2}}$$

integrando ambos lados de la ecuación sobre la órbita periódica Γ resulta en:

$$\int_0^T -\frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} + 2\epsilon(1 - [x_1(t)]^2) dt = \int_0^T -\frac{\epsilon(1 - x_1^2)^2}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt$$

por propiedad de la integral

$$\int_0^T -\frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt + 2 \int_0^T \epsilon(1 - [x_1(t)]^2) dt = -\epsilon \int_0^T \frac{(1 - x_1^2)^2}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt$$

como $V(x(t))$ es periódica de período T , entonces

$$\int_0^T -\frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt = -\ln[V(x(t)) - \frac{1}{2}] \Big|_{t=0}^{t=T} = 0$$

entonces

$$2 \int_0^T \epsilon(1 - [x_1(t)]^2) dt = -\epsilon \int_0^T \frac{(1 - x_1^2)^2}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt$$

si además $V(x(t)) > \frac{1}{2}$, entonces $V(x(t)) - \frac{1}{2} > 0$, con $\epsilon > 0$ se tiene que

$$2 \int_0^T \epsilon(1 - [x_1(t)]^2) dt = -\epsilon \int_0^T \frac{(1 - x_1^2)^2}{V(x(t)) - \frac{1}{2}} dt < 0.$$

Por lo tanto

$$\exp\left\{\int_0^T \epsilon(1 - x_1^2(t)) dt\right\} < 1.$$

Es decir, la ecuación de Van der Pol es orbitalmente asintóticamente estable. Este resultado aparentemente local tiene una fácil pero importante consecuencia para la dinámica global del oscilador de Van der Pol.

2.2.6 Unicidad del Ciclo Límite

Continuando con el resultado de la sección anterior demostraremos que el ciclo límite de la ecuación de Van der Pol es único, para lo cual haremos uso del siguiente teorema

Teorema 10. *Sea Γ una órbita periódica que encierra a un conjunto abierto U , en el cual el campo vectorial está definido. Entonces, U tiene un punto de equilibrio.*

Ahora bien, veamos la validez del siguiente teorema

Teorema 11. *Para $\epsilon > 0$ el oscilador de Van der Pol (2.8) tiene un ciclo límite estable hacia el cual cada solución no equilibrada tiende en tiempo creciente.*

Demostración

Hemos demostrado en la sección anterior que toda órbita periódica del oscilador de Van der pol es orbitalmente asintóticamente estable. Supongamos ahora que hay dos órbitas periódicas, que llamaremos Γ_1 y Γ_2 .

Por el teorema (10), cada órbita periódica contiene un punto de equilibrio en el interior, pero previamente en la sección (2.2.2) demostramos que el único punto de equilibrio del oscilador de Van der Pol es el origen, entonces una de las órbitas periódicas debe estar en el interior de la otra.

Ahora, sea x_0 un punto entre Γ_1 y Γ_2 tal que el conjunto $\omega - \text{Limite } \omega(x_0) = \Gamma_1$ y el conjunto $\alpha - \text{Limite } \alpha(x_0)$ de x_0 no puede ser Γ_2 . Por lo tanto, esta puede ser una órbita periódica inestable entre Γ_1 y Γ_2 , el cual contradice el hecho de que toda órbita periódica es orbitalmente asintóticamente estable.

Por lo tanto el oscilador de Van der Pol posee un único ciclo límite estable.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE MÚLTIPLE ESCALA

En este capítulo presentaremos el método de múltiple escala, utilizado para representar la solución de un oscilador debilmente no lineal en la forma de una expansión asintótica. Primero calcularemos la aproximación de la solución para la ecuación de Duffing y luego implementaremos dicho método para la ecuación de Van der Pol.

3.1 Introducción

En el año 1882 Jules Henri Poincaré(1854-1912) y Anders Lindstedt(1854-1939) introducen el método de Poincaré-Lindstedt en la teoría de perturbación, basado en la aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando la perturbación regular no se aproxima; más tarde Lighthill en 1949 introduce una versión más general y no es hasta 1996 cuando Alexei Nikolaevich Krylov(1863-1945) y Nikolai Nikolaevich Bogoliubov(1909-1992), Kevorkian y Cole introducen la expansión en dos escalas convirtiendose en el método más estandar usado actualmente.

Algunos procesos tienen más de una característica de duración o escalas de tiempo

asociadas a estos, por ejemplo:

1. **Vibración mecánica** con amplitud variando lentamente.
2. La corta precesión de las **órbitas planetarias**.
3. **Turbulencia** estas son escalas de varias duraciones de los remolinos turbulentos junto con la duración de escala de objetos sobre el flujo de fluidos.
4. **El ruido de las señales eléctricas** esta es una alta frecuencia (cortas escalas de tiempo) de efectos superpuestos sobre la señal de información.

El análisis de múltiple escala es una técnica para la aproximación uniforme de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando una perturbación regular no se aproxima. Este método es necesario en problemas en el cual las soluciones dependen simultáneamente de escalas de tiempo diferentes. El método general de perturbación se rompe a causa de las resonancias que llevan a lo que se llama términos seculares; el método elimina estos términos (término en aumento sin límite) originada en la sencilla aplicación de teoría de perturbación para problemas debilmente no lineales de osciladores con soluciones finitas, donde la no linealidad es una pequeña perturbación. En tal sentido, se pretende que la ecuación diferencial ordinaria sea una ecuación en derivadas parciales para cada tiempo, donde depende de un “ tiempo rápido ” como también de un “ tiempo lento ”.

Varios métodos de perturbación semejantes al método de múltiple escala han sido aplicados en el análisis de los osciladores no lineales clásicos; pero estos métodos de perturbación estan limitados para resolver osciladores debilmente no lineales que tienen como ecuación:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + w_0^2u = \epsilon F(u, \frac{d^2u}{dt^2})$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$ es una constante dada y F una función suave no lineal.

Tradicionalmente, el método de perturbación puede obtener soluciones analíticas aproximadas; sin embargo las restricciones de este método es que el parámetro ϵ debe ser muy pequeño (es decir $0 < \epsilon \ll 1$), porque el método de múltiple escala o el método de perturbación clásica no es usado cuando $\epsilon \geq 1$. Para un estudio más amplio del método de múltiple escala remitiremos a los libros [2] y [7]

3.2 El Método de Múltiple Escala (MME)

Para ilustrar el método de múltiple escala, consideraremos la aplicación para osciladores debilmente no lineal con la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + w_0^2 u = \epsilon F\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (3.1)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0; \epsilon) = a, \\ \frac{du}{dt}(0; \epsilon) = b. \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$ es una constante dada y F una función suave no lineal.

Cuando la ecuación diferencial ordinaria depende de un parámetro pequeño $u = u(t; \epsilon)$ y la ecuación con $\epsilon = 0$ es fácil de resolver, se presenta un enfoque común para encontrar una solución aproximada para u que tiene forma de serie de potencia de ϵ .

Antes de comenzar la idea principal del método es conveniente hacer referencia a las siguientes definiciones:

Definición 15. *Sea f y g dos funciones dadas. Decimos que*

$$f(x) = O(g(x)) \text{ cuando } x \rightarrow 0$$

si existe constantes $\alpha > 0$ y $A > 0$ tal que $|f(x)| \leq A|g(x)|$ para que $|x| < \alpha$.

Definición 16. *La expansión*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + R_n \quad (3.3)$$

es una expansión asintótica cuando $x \rightarrow \infty$ sí, para algún n

$$R_n = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \text{ cuando } x \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

La siguiente expresión es usada cuando (3.3) y (3.4) ocurre

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} \text{ cuando } x \rightarrow \infty.$$

Ahora bien, la idea principal para este método es introducir las escalas de tiempo T_0, T_1, \dots, T_M con $T_M = \epsilon^m t$ donde $m = 0, \dots, M$ y M un entero positivo.

Ya que tenemos que introducir la escala de tiempo $M+1$, asumimos que

$$u(t; \epsilon) = u(T_0, T_1, \dots, T_M; \epsilon).$$

Así estaremos dirigidos a una solución de la siguiente forma:

$$u(t; \epsilon) = \sum_{m=0}^M \epsilon^m \cdot u_m(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\epsilon^{M+1})$$

donde $O(\epsilon^{M+1})$ es el error para la serie finita de $u(t; \epsilon)$. Así obtenemos una serie infinita de problemas sencillos para tratar de igualar los términos con series de potencias de ϵ .

Usando la escala de tiempo y la regla de la cadena, la derivada con respecto al tiempo es sustituido por la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots + \epsilon^M \frac{\partial}{\partial T_M}.$$

Así la ecuación anterior puede ser transformada en $M+1$ ecuaciones de acuerdo con el orden en ϵ . La ecuación $T_M = \epsilon^m t$ y la ecuación anterior formulan la idea general del método de múltiple escala. En general lo que se demuestra es que una serie de potencia de ϵ converge o es asintótica. Al lector interezado en estudiar el método de múltiple escala, le recomendamos consultar ([7]).

3.2.1 Método para la ecuación Duffing

En la siguiente sección aplicaremos en método de múltiple escala para encontrar la solución de la ecuación de Van der Pol. Antes de encontrar esta solución, que es nuestro propósito, ilustraremos el método para la ecuación Duffing, que a resumidas cuentas está estrechamente ligada a la ecuación de Van der Pol.

En particular nos enfocaremos en dos escalas de tiempo ($M = 1$) y usando la ecuación de Duffing en (2.1) con $W_0 = 1$ y $F = -y^3$, entonces consideremos ahora el sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \epsilon y^3 = 0 \quad \epsilon \ll 1, \quad (3.5)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Usando las escalas $T_0 = t$ y $T_1 = \epsilon t$ y derivando en función de t se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial y}{\partial T_1} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

agrupando en (3.6) se obtiene

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} \quad (3.7)$$

así sustituyendo en (3.5) tenemos que:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial T_1^2} + y + \epsilon y^3 = 0, \quad (3.8)$$

donde ahora y depende de T_0 y T_1 (Variables independientes).

Ahora usando la expansión asintótica de la forma:

$$y(t; \epsilon) \approx y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 y_2(T_0, T_1) + \dots$$

y sustituyéndose en (3.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + y_0 + \epsilon y_0^3 + \\ & \epsilon \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_1^3 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así se tiene que:

◇ $O(\epsilon^0)$: Primer término

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + y_0 = 0. \quad (3.10)$$

◇ $O(\epsilon^1)$: Segundo término

$$2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 + y_0^3 = 0. \quad (3.11)$$

Despejando (3.11)

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} - y_0^3. \quad (3.12)$$

Resolviendo $O(\epsilon^0)$ se tiene que si:

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + y_0 = 0$$

entonces implica que $r^2 + 1 = 0$ así $r = \pm i$. por lo tanto se tiene que la solución de y_0 viene dada por

$$y_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.13)$$

donde B es conjugada compleja de A .

Ahora bien derivando y_0 en función de T_0 se obtiene

$$\frac{\partial y_0}{\partial T_0} = iA(T_1)e^{iT_0} - iB(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.14)$$

y derivando ahora (3.14) en función de T_1 obtenemos

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} = iA'(T_1)e^{iT_0} - iB'(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.15)$$

sustituyendo (3.13) y (3.15) en (3.11) se tiene que:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = -(A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0})^3 - 2(iA'(T_1)e^{iT_0} - iB'(T_1)e^{-iT_0})$$

desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = & -(A^3(T_1)e^{3iT_0} + B^3(T_1)e^{-3iT_0} + 3A^2(T_1)B(T_1)e^{2iT_0}e^{-iT_0} + \\ & 3A(T_1)B^2(T_1)e^{iT_0}e^{-2iT_0}) - 2(iA'(T_1)e^{iT_0} - iB'(T_1)e^{-iT_0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = & -A^3(T_1)e^{3iT_0} - B^3(T_1)e^{-3iT_0} - 3A^2(T_1)B(T_1)e^{2iT_0}e^{-iT_0} - \\ & 3A(T_1)B^2(T_1)e^{iT_0}e^{-2iT_0} - 2iA'(T_1)e^{iT_0} + 2iB'(T_1)e^{-iT_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = & -(2iA'(T_1) + 3A^2(T_1)B(T_1))e^{iT_0} + A^3(T_1)e^{3iT_0} + \\ & (2iB'(T_1) - 3A(T_1)B^2(T_1))e^{-iT_0} - B^3(T_1)e^{-3iT_0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

como queremos que no aparezcan los términos seculares en y_1 , los términos resonantes de la parte derecha de la ecuación (3.16) son forzados a ser cero, es decir:

$$\begin{cases} 2iA'(T_1) + 3A^2(T_1)B(T_1) = 0 \\ 2iB'(T_1) - 3A(T_1)B^2(T_1) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

por propiedad de los números complejos

$$|A(T_1)| = A(T_1)\overline{A(T_1)}$$

teniendo en cuenta que $A(T_1) = \overline{B(T_1)}$

así sustituyendo en (3.17) obtenemos

$$\begin{cases} 2iA'(T_1) + 3|A(T_1)|^2 A(T_1) = 0 \\ 2iB'(T_1) - 3|A(T_1)|^2 B(T_1) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Si observamos (3.18) notaremos que una es conjugada compleja de la otra. Entonces tomemos el cambio polar

$$A(T_1) = Re^{i\theta} \quad y \quad B(T_1) = Re^{-i\theta} \quad (3.19)$$

derivando $A(T_1)$ en (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned} A'(T_1) &= \frac{dR}{dT_1} e^{i\theta} + iR \frac{d\theta}{dT_1} e^{i\theta} \\ &= \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Debido al cambio en (3.19) si sustituimos en cualquiera de las ecuaciones de (3.18) obtendremos el mismo resultado, así sustituyendo en cualquiera de ellas se tiene que

$$2i \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) e^{i\theta} + 3(Re^{i\theta})(Re^{-i\theta})(Re^{i\theta}) = 0$$

entonces

$$2i \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) + 3R^3 = 0$$

separando la parte real de la imaginaria

$$\begin{aligned} 2 \frac{dR}{dT_1} &= 0 \\ -2R \frac{d\theta}{dT_1} + 3R^3 &= 0 \end{aligned}$$

así

$$\frac{dR}{dT_1} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \frac{3}{2}R^2 = 0. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.21) implica que

$$R(T_1) = C(R) \quad \text{donde } C(R) \text{ es una constante.} \quad (3.23)$$

tomando (3.23) y sustituyendolo en (3.22)

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \frac{3}{2}C(R)^2 = 0$$

tomemos $C(R)^2 = C_1$ entonces

$$\frac{d\theta}{dT_1} = \frac{3}{2}C_1$$

usando el método de separables para resolver esta ecuación diferencial ordinaria obtenemos

$$d\theta = \frac{3}{2}C_1 dT_1$$

integrando en ambos lados de la igualdad

$$\int d\theta = \int \frac{3}{2}C_1 dT_1$$

teniendo que

$$\theta = \frac{3}{2}C_1 T_1 + C_2(T_1).$$

Por lo tanto el cambio polar queda de la siguiente manera

$$A(T_1) = C(R)e^{i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1)} \quad B(T_1) = C(R)e^{-i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1)}$$

con este resultado obtenemos la siguiente solución

$$y_0(T_0, T_1) = C(R)e^{i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1)} e^{iT_0} + C(R)e^{-i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1)} e^{-iT_0}$$

o lo que es lo mismo

$$y_0(T_0, T_1) = C(R)e^{i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + iT_0} + C(R)e^{-i\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + iT_0}$$

de manera que

$$y_0(T_0, T_1) = C(R) \left[\cos\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right) + \cos\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right) \right]$$

así

$$y_0(T_0, T_1) = 2C(R) \cos\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right)$$

evaluando las condiciones iniciales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 2C(R) \cos\left(\frac{3}{2}C_1(R)0 + C_2(0) + 0\right) \\ &= 2C(R) \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

entonces

$$C(R) = \frac{1}{2}$$

y por otro lado

$$\frac{\partial y_0(T_0, T_1)}{\partial T_0} = -2C(R) \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}C_1(R)T_1 + C_2(T_1) + T_0\right)$$

evaluando la condición inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_0(0)}{\partial T_0} &= -2C(R) \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}C_1(R)0 + C_2(0) + 0\right) \\ &= -1 \operatorname{sen}(C_2(0)) = 0 \end{aligned}$$

es decir

$$\operatorname{sen}(C_2(0)) = 0$$

si y sólo si

$$C_2(0) = n\pi; \quad n \in Z$$

en particular para $n = 0$

$$C_2(0) = 0$$

como habíamos tomado $C(R)^2 = C_1$ entonces $C_1(R) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto

$$y_0(T_0, T_1) = \cos\left(\frac{3}{8}T_1 + T_0\right)$$

devolviendo el cambio $T_0 = t$ y $T_1 = \epsilon t$

$$y_0(t; \epsilon) = \cos\left(\frac{3}{8}\epsilon t + t\right)$$

y como

$$y(t; \epsilon) = y_0(t; \epsilon) + O(\epsilon)$$

entonces finalmente obtenemos la solución de la ecuación Duffing (3.5) y viene dada por

$$y(t; \epsilon) = \cos\left(\frac{3}{8}\epsilon t + t\right) + O(\epsilon). \quad (3.24)$$

3.2.2 Método para la ecuación de Van der Pol

Ahora bien, mediante el método de múltiple escala queremos encontrar la solución aproximada de la ecuación de Van der Pol. Entonces si nuevamente nos enfocamos en dos escalas de tiempo ($M = 1$) y usando la ecuación de Van der Pol donde $F = (1 - u^2)\left(\frac{du}{dt}\right)$ y $w_0 = 1$, entonces ahora consideraremos el oscilador de Van Der Pol

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} - \epsilon(1 - u^2)\frac{du}{dt} + u &= 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \\ u(0) &= a_0, \quad u'(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sea $T_0 = t$ la escala rápida y $T_1 = \epsilon t$ la escala lenta. La idea es tratar ambas variables como independientes. Además las funciones de la escala lenta podrán ser consideradas constantes a tiempos del orden de la escala rápida. Pretendemos que la ecuación diferencial ordinaria sea una ecuación en derivadas parciales para un tiempo, donde ahora x depende un tiempo rápido como también de un tiempo lento.

Usando las escalas $T_0 = t$ y $T_1 = \epsilon t$ y derivando en función de t se tiene que:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial T_1} \quad (3.26)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_1 \partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} \quad (3.27)$$

Agrupando en (3.27) se obtiene

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.28) en (3.25) obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} - \epsilon(1 - u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial T_1} \right) + u = 0 \quad (3.29)$$

Donde ahora u depende de T_0 y T_1 (Variables independientes).

Ahora usando la expansión asintótica de la forma:

$$y(t; \epsilon) \approx y_0(T_0, T_1) + \epsilon y_1(T_0, T_1) + \epsilon^2 y_2(T_0, T_1) + \dots$$

y sustituyéndose en (3.29) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - \epsilon(1 - u_0^2) \left(\frac{\partial u_0}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial u_0}{\partial T_1} \right) + u_0 + \epsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \\ 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} - \epsilon^2(1 - u^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial u_1}{\partial T_1} \right) + \epsilon u_1 + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

así se tiene que:

◇ $O(\epsilon^0)$: Primer término

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0. \quad (3.31)$$

◇ $O(\epsilon^1)$: Segundo término

$$2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - (1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = 0. \quad (3.32)$$

Despejando (3.32)

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + (1 - u_0^2) \frac{\partial u_0}{\partial T_0}. \quad (3.33)$$

Resolviendo $O(\epsilon^0)$ de (3.31) se tiene que si:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0$$

entonces implica que $r^2 + 1 = 0$ así $r = \pm i$, por lo tanto se tiene que la solución de u_0 viene dada por

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.34)$$

donde B es conjugada compleja de A .

Ahora bien derivando u_0 en función de T_0 se obtiene

$$\frac{\partial u_0}{\partial T_0} = iA(T_1)e^{iT_0} - iB(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.35)$$

y derivando ahora (3.35) en función de T_1 obtenemos

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} = iA'(T_1)e^{iT_0} - iB'(T_1)e^{-iT_0} \quad (3.36)$$

sustituyendo (3.34), (3.35) y (3.36) en (3.32) se tiene que:

$$\begin{aligned} & -(1 - (A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0})^2)(iA(T_1)e^{iT_0} - iB(T_1)e^{-iT_0}) \\ & \quad + 2iA'(T_1)e^{iT_0} - 2iB'(T_1)e^{-iT_0} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

despejando u_1 se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2i [A'(T_1)e^{iT_0} - B'(T_1)e^{-iT_0}] \\ & -(1 - (A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0})^2)(iA(T_1)e^{iT_0} - iB(T_1)e^{-iT_0}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

desarrollando por otro lado $(1 - (A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0})^2)(iA(T_1)e^{iT_0} - iB(T_1)e^{-iT_0})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} & i [- (A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0})^2 (A(T_1)e^{iT_0} - B(T_1)e^{-iT_0}) \\ & \quad + A(T_1)e^{iT_0} - B(T_1)e^{-iT_0}] \end{aligned}$$

resolviendo

$$\begin{aligned} & i [-A^3(T_1)e^{3iT_0} - B^2(T_1)A(T_1)e^{-iT_0} - 2A^2(T_1)B(T_1)e^{iT_0} + A^2(T_1)B(T_1)e^{iT_0} \\ & \quad + B^3(T_1)e^{-3iT_0} + 2A(T_1)B^2(T_1)e^{-iT_0} + A(T_1)e^{iT_0} - B(T_1)e^{-iT_0}] \end{aligned}$$

sacando factor común de e^{iT_0} y de e^{-iT_0} obtenemos

$$\begin{aligned} & i [e^{iT_0} (A(T_1) - A^2(T_1)B(T_1)) + e^{-iT_0} (A(T_1)B^2(T_1) - B(T_1)) \\ & \quad + B^3(T_1)e^{-3iT_0} - A^3(T_1)e^{3iT_0}] \end{aligned}$$

así sustituyendo en (3.38)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = & i [e^{iT_0} (-2A'(T_1) - A(T_1) - A^2(T_1)B(T_1)) + e^{-iT_0} (2B'(T_1) + B(T_1) \\ & - A(T_1)B^2(T_1)) + B^3(T_1)e^{-3iT_0} - A^3(T_1)e^{3iT_0}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

como queremos que no aparezcan los términos seculares en u_1 , los términos resonantes de la parte derecha de la ecuación (3.39) son forzados a ser cero, es decir:

$$\begin{cases} -2iA'(T_1) + iA(T_1) - iA^2(T_1)B(T_1) = 0, \\ 2iB'(T_1) - iB(T_1) + iA(T_1)B^2(T_1) = 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Si observamos (3.40) notaremos que una es conjugada compleja de la otra. Entonces tomemos el cambio polar

$$A(T_1) = Re^{i\theta} \quad y \quad B(T_1) = Re^{-i\theta} \quad (3.41)$$

derivando $A(T_1)$ en (3.41) obtenemos

$$\begin{aligned} A'(T_1) &= \frac{dR}{dT_1} e^{i\theta} + iR \frac{d\theta}{dT_1} e^{i\theta} \\ &= \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) e^{i\theta} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Debido al cambio en (3.41) si sustituimos en cualquiera de las ecuaciones de (3.40) obtendremos el mismo resultado, así sustituyendo en cualquiera de ellas se tiene que

$$-2i \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) e^{i\theta} + iRe^{i\theta} - i(R^2 e^{2i\theta}) (Re^{-i\theta}) = 0$$

desarrollando:

$$-2i \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) e^{i\theta} + iRe^{i\theta} - iR^3 e^{i\theta} = 0$$

sacando factor común de $e^{i\theta}$ y despejando

$$-2i \left(\frac{dR}{dT_1} + iR \frac{d\theta}{dT_1} \right) + iR - iR^3 = 0$$

sacando factor común de i y despejando

$$-2 \left(\frac{dR}{dT_1} + R \frac{d\theta}{dT_1} \right) + R - R^3 = 0$$

separando la parte real de la imaginaria se tiene que:

$$-2 \frac{dR}{dT_1} + R - R^3 = 0. \quad (3.43)$$

$$-2R \frac{d\theta}{dT_1} = 0. \quad (3.44)$$

De manera que de (3.44) si tenemos que

$$-2R \frac{d\theta}{dT_1} = 0$$

entonces se tiene que

$$R \frac{d\theta}{dT_1} = 0$$

para $R \neq 0$ obtenemos

$$\theta = \theta_0, \quad \theta_0 \text{ constante} \quad (3.45)$$

y por otro lado de (3.43) sí

$$-2 \frac{dR}{dT_1} + R - R^3 = 0$$

despejando $\frac{dR}{dT_1}$ se tiene que

$$\frac{dR}{dT_1} = \frac{1}{2} R(1 - R^2)$$

resolviendo esta ecuación diferencial por el método de separable se obtiene que:

$$\frac{dR}{R(1 - R^2)} = \frac{1}{2} dT_1$$

integrando ambos lados

$$\int \frac{dR}{R(1 - R^2)} = \frac{1}{2} \int dT_1$$

resolviendo la integral de la parte izquierda por fracciones simples

$$\int \frac{1}{R} + \frac{R}{(1 - R^2)} dR = \frac{1}{2} \int dT_1$$

de manera similar

$$\int \frac{1}{R} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(R + 1)} dR - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(R - 1)} dR = \frac{1}{2} \int dT_1$$

resolviendo cada una de las integrales y multiplicando toda la desigualdad por -1

$$-\ln(R) + \frac{1}{2} \ln(R + 1) + \frac{1}{2} \ln(R - 1) = -\frac{1}{2} T_1 + C$$

con C constante. Agrupando se tiene

$$-\ln(R) + \ln(R^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} T_1 + C$$

por propiedades de logaritmo neperiano

$$\ln \left(\frac{(R^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{R} \right) = -\frac{1}{2} T_1 + C$$

despejando

$$\frac{(R^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{R} = e^{-\frac{1}{2} T_1 + C}$$

es decir

$$\left(\frac{R^2 - 1}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2} T_1} C_1$$

tomemos $C_1 = e^C$ así

$$\frac{R^2 - 1}{R^2} = e^{-T_1} C_2$$

tomando $C_2 = C_1^2$ y reescribiendo

$$1 - \frac{1}{R^2} = e^{-T_1} C_2$$

despejando

$$\frac{1}{R^2} = 1 - e^{-T_1} C_2$$

de manera similar

$$R^2 = \frac{1}{1 - e^{-T_1} C_2}$$

entonces R viene dado por

$$R = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1} C_2}}$$

devolviendo el cambio polar

$$A(T_1) = R e^{i\theta} \quad y \quad B(T_1) = R e^{-i\theta}$$

se tiene

$$A(T_1) = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1} C_2}} e^{i\theta_0} \quad y \quad B(T_1) = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1} C_2}} e^{-i\theta_0}$$

así como

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + B(T_1)e^{-iT_0}$$

entonces

$$\begin{aligned} u_0(T_0, T_1) &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} e^{i\theta_0} e^{iT_0} + \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} e^{-i\theta_0} e^{-iT_0} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} (e^{i\theta_0} e^{iT_0} + e^{-i\theta_0} e^{-iT_0}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} (e^{i(\theta_0+T_0)} + e^{-i(\theta_0+T_0)}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} (\cos(\theta_0 + T_0) + i\text{sen}(\theta_0 + T_0) + \cos(\theta_0 + T_0) - i\text{sen}(\theta_0 + T_0)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} (\cos(\theta_0 + T_0) + i\text{sen}(\theta_0 + T_0) + \cos(\theta_0 + T_0) - i\text{sen}(\theta_0 + T_0)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} 2\cos(\theta_0 + T_0) \end{aligned}$$

es decir

$$u_0(T_0, T_1) = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-T_1}C_2}} 2\cos(\theta_0 + T_0)$$

devolviendo el cambio $T_0 = t$ y $T_1 = \epsilon t$ se tiene que

$$u_0(t; \epsilon) = \sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\epsilon t}C_2}} 2\cos(\theta_0 + t)$$

derivando u_0 en función de t

$$\frac{du_0(t; \epsilon)}{dt} = -\sqrt{\frac{1}{1 - e^{-\epsilon t}C_2}} 2\text{sen}(\theta_0 + t)$$

evaluando las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(0) = a_0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

se tiene que:

$$u_0(0) = \sqrt{\frac{1}{1 - C_2}} 2\cos(\theta_0) = a_0 \quad (3.46)$$

y además

$$u'_0(0) = -\sqrt{\frac{1}{1-C_2}} 2\text{sen}(\theta_0) = 0 \quad (3.47)$$

Como en (3.47) $\sqrt{\frac{1}{1-C_2}} \neq 0$ entonces $\text{sen}(\theta_0) = 0$ y esto ocurre si y sólo si $\theta_0 = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$; en particular para $n = 0$ se tiene que $\theta_0 = 0$. Ahora bien de (3.46) como $\theta_0 = 0$ entonces

$$\sqrt{\frac{1}{1-C_2}} 2\text{cos}(0) = a_0$$

es decir

$$2\sqrt{\frac{1}{1-C_2}} = a_0$$

despejando

$$\sqrt{\frac{1}{1-C_2}} = \frac{a_0}{2}$$

$$\frac{1}{1-C_2} = \frac{a_0^2}{4}$$

$$1 - C_2 = \frac{4}{a_0^2}$$

$$-C_2 = \frac{4}{a_0^2} - 1$$

$$C_2 = 1 - \frac{4}{a_0^2}$$

así finalmente se tiene que

$$u_0(t, \epsilon) = \sqrt{\frac{1}{1 - (1 - \frac{4}{a_0^2})e^{-\epsilon t}}} 2\cos(t)$$

de manera similar

$$u_0(t, \epsilon) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{4}{a_0^2} - 1)e^{-\epsilon t}}} 2\cos(t).$$

Como $u(t; \epsilon) = u_0(t; \epsilon) + O(\epsilon)$ entonces

$$u(t, \epsilon) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{4}{a_0^2} - 1)e^{-\epsilon t}}} 2\cos(t) + O(\epsilon). \quad (3.48)$$

Además la ecuación (3.48) tiende al ciclo límite:

$$u(t, \epsilon) = 2\cos(t) + O(\epsilon)$$

para todo valor inicial si $t \rightarrow \infty$. En particular encontramos que la solución (3.48) es periódica si y sólo si $a_0 = 2$.

CAPÍTULO 4

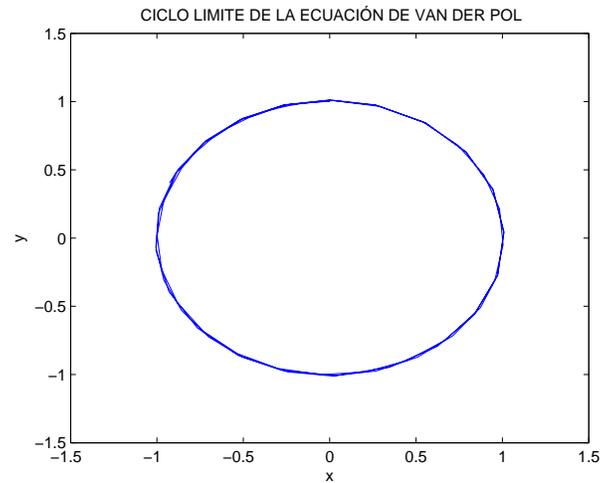
MATLAB

En este capítulo, utilizando MATLAB, observaremos el comportamiento de la solución de la ecuación de Van der Pol cuando variamos el parametro ϵ a lo largo del tiempo; para luego analizarlos y compararlos con el estudio hecho en los capítulos previos a este.

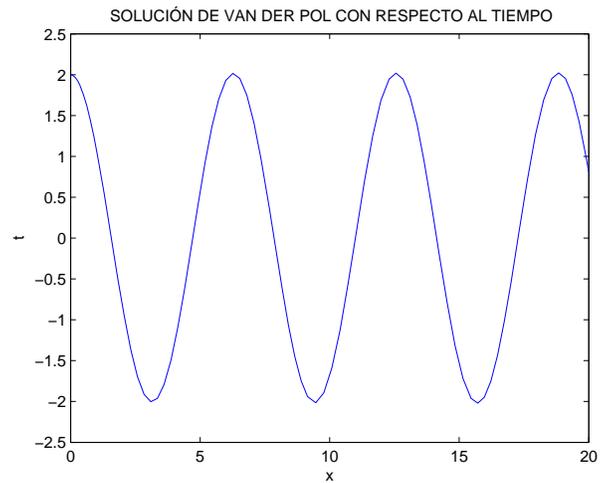
Para las siguientes figuras que se mostrarán a continuación se observará:

En la parte (a) el plano fase de la ecuación de Van der Pol y en (b) el desplazamiento de la solución a lo largo del tiempo; Para los valores del parámetro:

1. $\epsilon = 0$
2. $\epsilon = 0,0000000001$
3. $\epsilon = 0,1$
4. $\epsilon = 1$
5. $\epsilon = 10000$
6. $\epsilon = 1000000000$



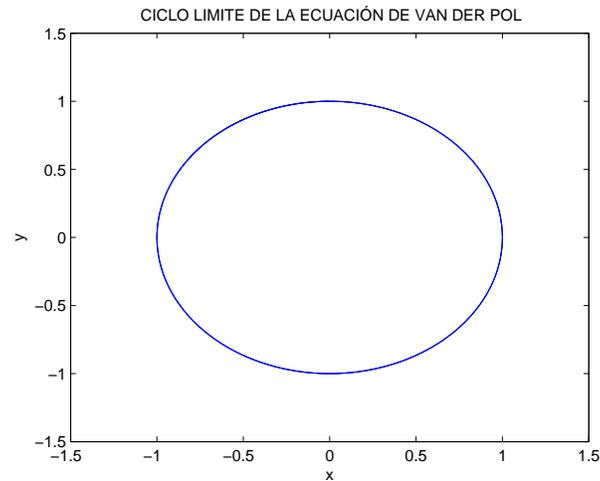
(a) Plano fase



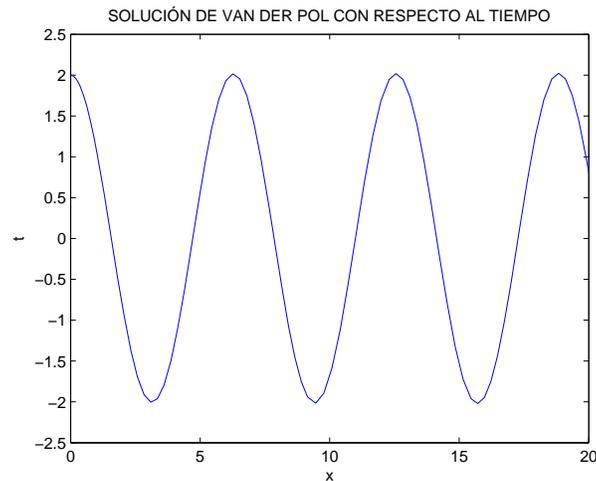
(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.1: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 0$

Este caso particular, muestra la ecuación del péndulo, el cual en (a) se observa que el ciclo límite tiene un comportamiento circular en una misma órbita, este hecho parte de la estabilidad de la solución estudiada en el capítulo 2, y en (b) el desplazamiento de la solución, que para el caso particular es $u(t, \epsilon) = 2\cos(t)$.



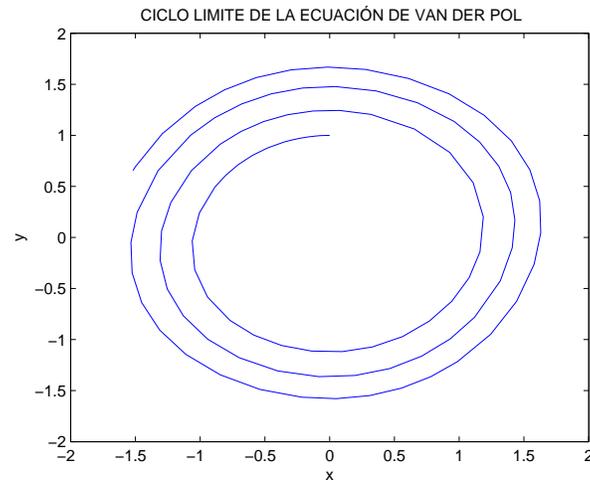
(a) Plano fase



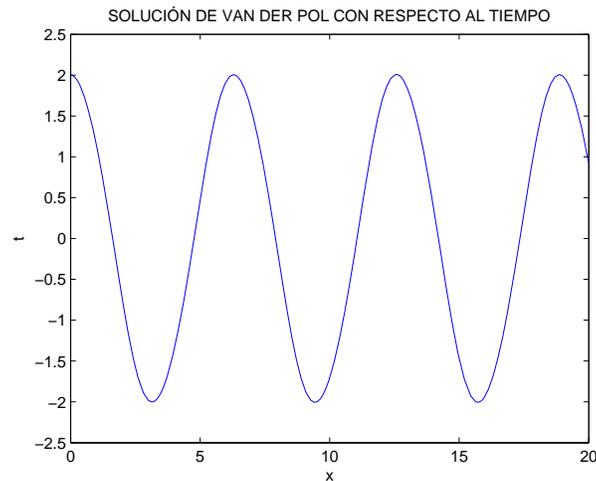
(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.2: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 0,0000000001$

Para esta figura, se muestra la ecuación de Van der Pol con una pequeña perturbación; en (a) está representado el ciclo límite el cual tiene un comportamiento circular sin muestra de un cambio significativo con respecto a la figura (4.1). En (b) se representa el desplazamiento de la solución, que para este caso en particular es $u(t, \epsilon) = 2\cos(t) + O(\epsilon)$ con $\epsilon = 0,0000000001$



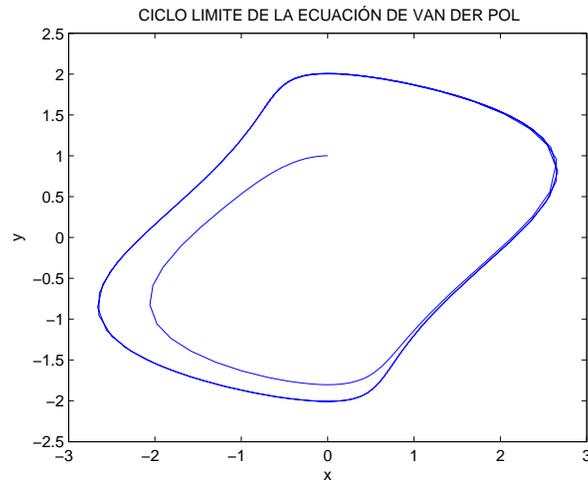
(a) Plano fase



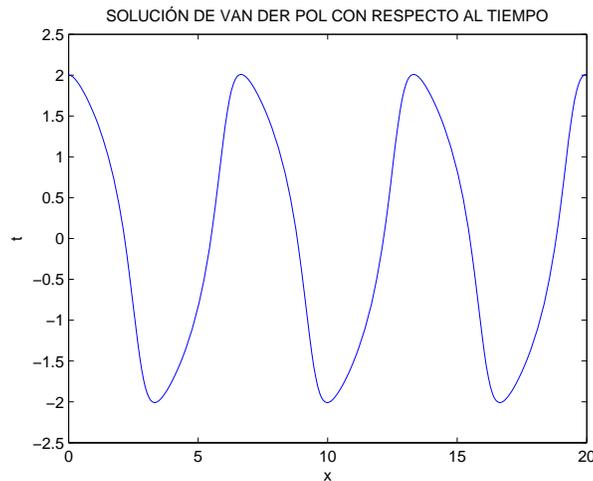
(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.3: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 0,1$

La figura anterior muestra el comportamiento de la ecuación de Van der Pol con una perturbación de $\epsilon = 0,1$, se observa que en la parte (a) aparece el desplazamiento circular de la órbita, alejándose a medida que transcurre el tiempo. En la parte (b) se obtiene el desplazamiento de la solución $u(t, \epsilon) = 2\cos(t) + O(\epsilon)$ con $\epsilon = 0,1$, sin cambio significativo con respecto a la figura (4.1).



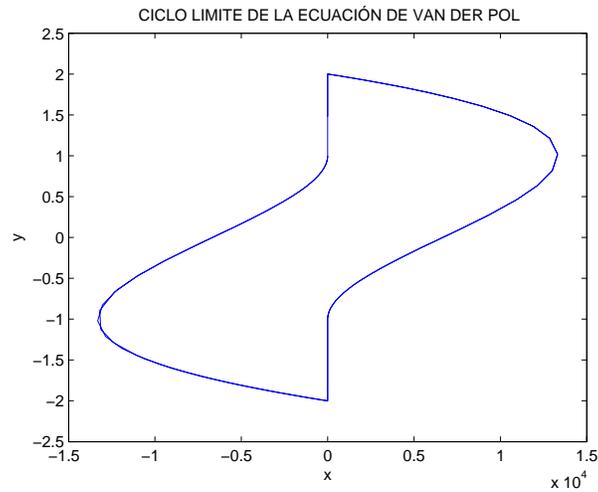
(a) Plano fase



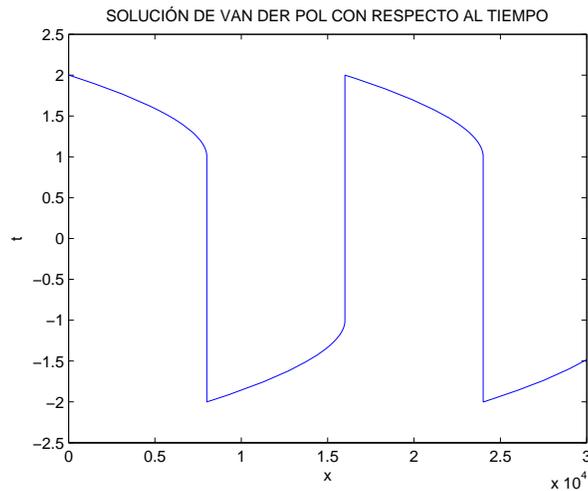
(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.4: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 1$

El plano fase de la figura anterior muestra como el ciclo límite se aproxima a la ecuación $y = \frac{x^3}{3} - x$. La explicación de este comportamiento se debe a que la órbita es asintóticamente estable (capítulo 2). El desplazamiento de la solución que se desarrolla en la parte (b) se observa como la perturbación repercute en la ecuación, obteniéndose un cambio notorio en comparación con la figura (4.1).



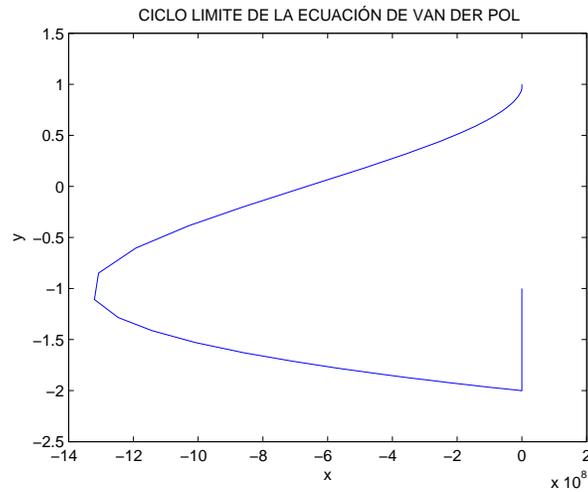
(a) Plano fase



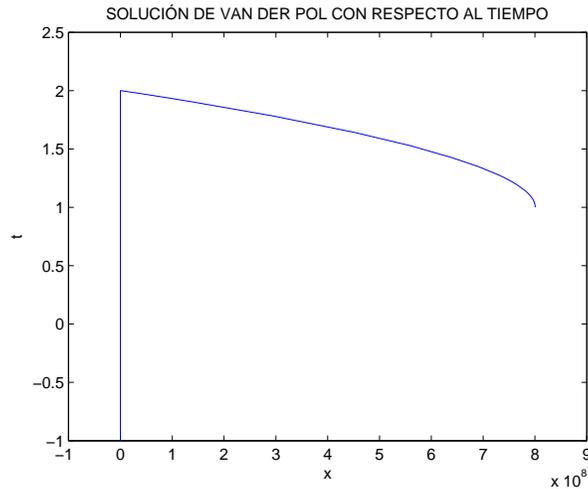
(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.5: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 10000$

El comportamiento de la solución que se muestra en la figura anterior muestra el plano fase aproximándose a la ecuación $y = \frac{x^3}{3} - x$ con una perturbación de $\epsilon = 10000$, además esta perturbación también se ve reflejada en el desplazamiento de la solución con respecto al tiempo, mostrando singularidades en la misma.



(a) Plano fase



(b) Solución con respecto al tiempo

Figura 4.6: Van der Pol con parámetro $\epsilon = 1000000000$

Por último observemos que la perturbación que recae sobre la ecuación hace que tanto en el círculo límite como en el desplazamiento con respecto al tiempo tengan un cambio drástico en un período de tiempo corto, es decir; los resultados muestran que los términos seculares de la ecuación aumentan sin límite, para los últimos tres casos el método de múltiple escala no puede ser aplicado por esta razón.

Conclusiones y Recomendaciones

1. El círculo límite en el oscilador de Van der Pol tiene importantes consecuencias para la tecnología; específicamente en la radio comunicación telefónica, así como también en la medicina con un modelo de circuito electrónico del corazón humano (Marcapasos). Muchas investigaciones han sido dedicadas a los osciladores de relajación ya sea para describir ciertas propiedades de estos o para aplicarlos en fenómenos biológicos que describen ritmos cardiacos, respiración, comportamiento neuronales, en sistemas químicos, en circuitos electrónicos; para el análisis de ritmos y compases musicales; y principalmente para estudiar la sincronización de diferentes contextos.
2. Si una función de Lyapunov existe para un sistema de la forma $\dot{x} = f(x)$, mediante el Criterio de Dulac o una de las versiones del Teorema de Bendixon-Poincaré podemos probar que existe un subconjunto cerrado R que no tiene ningún punto fijo y además contiene una trayectoria que empieza y permanece en ella, entonces R contiene una trayectoria cerrada. En nuestro estudio, la función de Lyapunov que se utilizaría para demostrar la existencia de la solución vendría dada por $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, así tendríamos otra manera de garantizar la existencia de la solución periódica de la ecuación de Van der Pol (Resultado que se demuestra en el Capítulo 2).

3. En 1928 el ingeniero francés A. Liénard encontró soluciones periódicas en un tipo muy general de osciladores no lineales, en el que se engloba el oscilador de Van der Pol. Además bajo ciertas suposiciones adicionales el teorema de Liénard garantiza la existencia de un círculo límite orbitalmente asintóticamente estable para la ecuación de Van der Pol (prueba equivalente a la hecha en el capítulo 2).
4. La técnica de Múltiple Escala puede probar un método de representación de expansiones uniformes como las usadas en este trabajo. Esto es particularmente efectivo para osciladores debilmente no lineales, donde la no linealidad es una pequeña perturbación. Cuando el parámetro $\epsilon \geq 1$ el método de múltiple escala no puede ser usado puesto que los términos seculares no pueden ser eliminados; recomendamos al lector usar métodos computarizados como Runge-Kutta.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bhatia N. and Szegö G. (1970). *Stability theory of Dynamical systems*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- [2] Bush, A. (1990). *Perturbation Methods for Engineers and scientists*. Middlesbrough, U.K: CRC Press.
- [3] Enns, R. and Mcguire, G. (2000). *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers*. [Libro en línea]. Consultado el 09 de abril de 2010 en: <http://books.google.es>
- [4] Guzman, M. (1975). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Teoría de Estabilidad y Control*. España: Alhambra.
- [5] Hale, J. and Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Atlanta: Springer.
- [6] Hirsch, M. and Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, And Linear Algebra*. California: Academic Press New York and London.
- [7] Kevorkian, J. and Cole, J. (1991). *Multiple scale and singular perturbation methods*. Pasadena: Springer.

-
- [8] Moros, A. and Ruiz, L. (2007). *Existencia de soluciones periódicas para la ecuación reducida de Van der Pol*. Tesis de grado, Universidad de los Andes, Mérida.
- [9] Mortell, M. (2005). *Singular Perturbations and hysteresis*. [Libro en línea]. Consultado el 09 de abril de 2010 en: <http://books.google.es>
- [10] Nápoles, J. (2004). Un siglo de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. *Lecturas Matemáticas*, 25, 59-111.
- [11] O'Malley R. (1990). *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*. Seattle: Springer-Verlag.
- [12] Stephen, L. (2001). *Dynamical systems with applications using Maple*. Boston: Birkhäuser.
- [13] Verhulst, F. (1989). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Utrecht: Springer.