Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Modelos de Medición de Riesgo de Crédito en Portafolios.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la Ilustre Universidad Central de Venezuela por el Br. Armando José Núñez Castillo, para optar al Título de Licenciado en Matemática.

TUTOR: Dra. Mercedes Arriojas.

Caracas - Venezuela

Enero de 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Modelos de Medición de Riesgo de Crédito en Portafolios**", presentado por el **Br. Armando Núñez,** titular de la Cédula de Identidad **13.943.298**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mercedes Arriojas
Tutor

Dr. Henryk Gzyl
Jurado

Dra. Glaysar Castro
Jurado

Dedicatoria

A mi "TATA" ***Angelina.***

Agradecimientos

Quiero agradecer a todo el cuerpo docente de la Escuela de Matemática de la Universidad Central de Venezuela, que contribuyeron con mi formación académica, en especial a la Dra. Mercedes Arriojas por su constante e incondicional apoyo.
Además, quisiera expresar un profundo agradecimiento a mis amigos, Lida Niño, Julio Daza, Francisco Tovar, Bernardo Gonzalez, José Antonio Rojas (El Flako), Leobardo Valera (su oportuna orientación en la implementación computacional de los modelos) y a todos los profesores de la Escuela de Matemática de la Universidad Metropolitana.
También, doy gracias a mis maestras de la Escuela Ballet-Arte, por su paciencia y comprensión.

Contenido

1 Preliminares. **10**

1.1 Espacio de Probabilidad. 10

1.2 Probabilidad Condicional e Independencia. 12

1.3 Variables Aleatorias. 13

1.4 Función de Distribución de Algunas Variables Aleatorias Discretas. 14

1.5 Función de Distribución de Algunas Variables Aleatorias Continuas. 18

1.6 Esperanza y Varianza de Variables Aleatorias. 19

1.7 Distribución Condicional. 20

1.8 Momentos y Funciones Generadoras de Momentos. 22

1.9 Convolución y Sumas Aleatorias de Variables Aleatorias. 27

1.10 Teoremas Límite. 29

2 Medición del Riesgo de Crédito. **31**

2.1 Introducción. 31

2.2 Modelo Individual. 33

2.3 Modelo Individual (Créditos). 37

2.3.1 Riesgo de Crédito de un Portafolio de Individuos. 38

2.3.2 Valor en Riesgo, Concentración y el Límite Individual. 40

2.4 Modelo Colectivo. 54

2.4.1 Fórmula de Panjer. 58

2.4.2 Modelo Poisson Compuesto. 64

2.4.3 Modelo Poisson Compuesto Mixto. 66

2.4.4 Modelo Binomial Negativo Compuesto o Proceso Pólya Compuesto. 70
2.5 Modelo Colectivo (Créditos). 72
2.5.1 Modelo Poisson Compuesto. 72
2.5.2 Volatilidad de las Probabilidades de Incumplimiento. 73
2.5.3 Volatilidad de la Tasa de Incumplimiento. 75
2.5.4 El Tema de la Diversificación. 81
2.5.5 CreditRisk$^+$. 82

3 Aplicación Empírica de los Modelos. 89
3.1 Introducción. 89
3.2 Modelo Poisson Compuesto. 92
3.3 Modelo Pólya Compuesto. 94
3.4 Modelo CreditRisk$^+$. 96

4 Conclusión. 104

A Resultados Básicos. 106

B Programas. 112
B.1 Introducción. 112
B.2 Programa Correspondiente al Modelo Poisson Compuesto. 113
B.3 Programa Correspondiente al Modelo Pólya Compuesto. 115
B.4 Programa Correspondiente al Modelo CreditRisk$^+$ con $h = 0,5$ y $h = 1$. 117

Bibliografía 124

Introducción

Actualmente podemos señalar que existen dos tipos de ***riesgo de crédito***: ***el riesgo de incumplimiento***, que se refiere a la pérdida potencial derivada de que la contraparte no pueda cumplir con sus obligaciones financieras en las condiciones definidas contractualmente; y ***el riesgo de mercado***, que se define como la pérdida potencial que podría sufrir un tenedor de un portafolio de préstamos, instrumentos financieros o derivados, como consecuencia de que el valor de mercado de éstos disminuya.

El objetivo de este trabajo es analizar algunas de las metodologías utilizadas para identificar y medir el riesgo de crédito derivado del incumplimiento, el cual puede definirse como la incertidumbre asociada a la pérdida potencial, causada por la incapacidad de la contraparte de cumplir con sus obligaciones. En este sentido, el análisis que llevan a cabo las instituciones debe contemplar el riesgo de crédito inherente tanto a las transacciones o créditos individuales como al análisis de riesgo a nivel de portafolio.

A finales de los años 60, el trabajo de pioneros, como *Edward Altman* [1] y *Robert Merton* [15], permitió el desarrollo de modelos para la estimación de lo que actualmente se denomina pérdidas esperadas de las contrapartes crediticias. A través de estos modelos, se logra por primera vez cuantificar la relación entre la exposición al riesgo de crédito y las características generales específicas de la contraparte.

Cuando se lleva a cabo el análisis de riesgo de crédito de una institución financiera, se espera obtener como resultado el nivel de pérdidas de capital que dicha institución puede llegar a tener como resultado del incumplimiento de sus acreditados. El incumplimiento a su vez está asociado al deterioro gradual que puede observarse en la calidad de los activos de la institución, lo cual se traduce en lo que se conoce como la pérdida esperada. En este sentido es necesario aclarar que en modelos de riesgo de crédito, un préstamo se considera en incumplimiento, una vez que su situación se trasforma a un "estado crítico predefinido". Sin embargo, la definición de "estado crítico" no es precisa, y puede presentar variaciones entre diferentes instituciones financieras, afectando así las medidas relativas de incumplimiento y la estimación de las pérdidas y de su distribución de probabilidad.

El objetivo de la medición del riesgo de crédito es la estimación de esta distribución, ya que, se pueden determinar las pérdidas esperadas y las pérdidas no esperadas en el portafolio crediticio de una institución financiera.

La pérdida esperada (PE) de un portafolio de activos crediticios representa el monto de capital que podría perder en promedio una institución como resultado de la exposición al riesgo de crédito, para un horizonte de tiempo dado. La pérdida esperada representa, en realidad, el costo de participación en el negocio del crédito y para su cálculo resultan indispensables los siguientes elementos:

Monto expuesto (ME). Es la cantidad que el acreditado adeudará al momento de caer en incumplimiento. Sus siglas en inglés son EAD ("exposure at default").

Severidad de la pérdida (T). Es la cantidad porcentual T del monto expuesto, que la institución financiera perdería en caso de que la contraparte cayera en incumplimiento; sus siglas en inglés son LGD ("loss given default"). A su complemento respecto a la unidad $(1 - T)$ se le conoce como "tasa de recuperación del crédito".

Probabilidad de incumplimiento (ρ). Representa la probabilidad de que el deudor no cumpla con sus obligaciones contractuales.

Supongamos que X es una variable aleatoria que representa la pérdida de una inversión en un cierto periodo de tiempo, por ejemplo un mes, entonces

$$X = \begin{cases} (ME)T, & \text{si el deudor incumple} \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

La pérdida esperada de la inversión puede calcularse como:

$$PE = E[X] = (ME)(T)\rho \tag{1}$$

La calidad de un portafolio de créditos presenta variaciones en el tiempo, por lo que las pérdidas esperadas también varían. La pérdida resultante de cambios en la calidad del portafolio de créditos se denomina comúnmente ***pérdida no esperada*** (PNE).

La pérdida no esperada se mide tomando en cuenta la variabilidad de la distribución de pérdidas, y puede calcularse como la diferencia entre la pérdida esperada y algún cuantil de la distribución de pérdidas, el cual se elige de acuerdo al nivel de confiabilidad deseado (ver [7], páginas 49-50). Comúnmente, el cuantil que define el nivel de pérdidas no esperadas es el ***Valor en Riesgo*** denotado por ***VaR***. Las pérdidas no esperadas pueden considerarse como una medida de la volatilidad de las pérdidas.

En el primer capítulo se exponen los elementos matemáticos necesarios para el análisis de los modelos de riesgo de crédito tratados en este trabajo; en el segundo capítulo se dan a conocer los principales modelos de incumplimiento a través del enfoque actuarial; en el tercer capítulo se presenta una aplicación práctica de los modelos expuestos en el segundo capítulo, y por último se presenta un apéndice que contiene algunos resultados básicos de la teoría de probabilidades, y los programas que permiten obtener la distribución de probabilidad del riesgo de un portafolio de créditos, en algunos modelos colectivos aplicados en el tercer capítulo.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1 Espacio de Probabilidad.

1.1.1 Definición. *Un* ***experimento aleatorio*** *es aquel cuyo resultado no puede predecirse de antemano con certeza, aunque se repita bajo las mismas condiciones.*

1.1.2 Definición. *Dado un experimento aleatorio, definimos* **espacio muestral** Ω *como el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados a que puede dar lugar el experimento aleatorio.*

Sea $A \subseteq \Omega$. *Decimos que* A **ocurre** *al realizar el experimento aleatorio, si el resultado* ω *obtenido es tal que* $\omega \in A$.

1.1.3 Definición. *Un* **evento** *es todo subconjunto del espacio muestral* Ω *del cual se tenga interés en conocer, luego de efectuar el experimento aleatorio, su ocurrencia. En particular, cuando* Ω *es finito, todo subconjunto de* Ω *es un evento.*

1.1.4 Definición. *Sea* X *un conjunto no vacío. Una clase* φ *no vacía de subconjuntos de* X *es una* $\sigma-$***álgebra de*** X, *si verifica las condiciones siguientes:*

1. $X \in \varphi$.
2. *Si* $A \in \varphi$, *entonces* $A^c \in \varphi$.
3. *Si* $A_n \in \varphi$, *para* $n = 1, 2, \ldots,$ *entonces* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \varphi$.

Observación.

Dado un experimento aleatorio, sea Ω su espacio muestral y Ψ la clase formada por los eventos de Ω. Veremos que los elementos de Ψ cumplen naturalmente las propiedades de los eventos aleatorios:

1. $\Omega \in \Psi$, pues, la realización del experimento aleatorio produce siempre un resultado. A Ω lo llamaremos evento *seguro*, ya que este evento siempre ocurre.

2. Sea $A \in \Psi$, entonces $A^c \in \Psi$, pues, luego de efectuar el experimento aleatorio tenemos dos posibilidades: el evento A ocurre o A^c ocurre.

3. $A_n \in \Psi$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Psi$. Al realizar el experimento aleatorio, la unión de eventos ocurre si el resultado pertenece a alguno de los eventos que integran la unión.

1.1.1 Proposición. *Sea Ψ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos Ω, entonces se verifican:*

1. $\emptyset \in \Psi$.

2. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \Psi$, *entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Psi$.

3. *Si* $A_n \in \Psi$ *para* $n = 1, 2, \ldots$, *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Psi$.

1.1.5 Definición. *Sean Ω un espacio muestral y Ψ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Una* ***medida de probabilidad o probabilidad sobre*** *Ω, es una función P definida sobre Ψ que verifica los siguientes axiomas:*

1. $P(A) \geq 0$, *para todo* $A \in \Psi$.

2. *Si* $A_n \in \Psi$, *para* $n = 1, 2, \ldots$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$, *entonces*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

3. $P(\Omega) = 1$.

1.1.6 Definición. *La terna (Ω, Ψ, P), donde Ω representa el espacio muestral asociado al experimento aleatorio, Ψ una $\sigma-$álgebra asociada a Ω y P una medida de probabilidad sobre Ω, se denomina* ***espacio de probabilidad****.*

1.2 Probabilidad Condicional e Independencia.

1.2.1 Definición. *Sean (Ω, Ψ, P) un espacio de probabilidad y $B \in \Psi$ tal que $P(B) > 0$. Definimos la* ***probabilidad condicional dado*** *B, denotada $P(\cdot \mid B)$, mediante*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

para todo $A \in \Psi$.

1.2.1 Proposición. *Sean (Ω, Ψ, P) un espacio de probabilidad y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Psi$ una partición del espacio Ω, es decir, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces para todo $B \in \Psi$ se cumple:*

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B|A_n).$$

Demostración:

Tenemos que

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B),$$

donde los elementos de $\{A_n \cap B\}_{n=1}^{\infty}$ son mutuamente excluyentes,

luego,

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B \mid A_n).$$

■

1.2.2 Proposición. *Sean (Ω, Ψ, P) un espacio de probabilidad y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Psi$ una partición del espacio Ω y $B \in \Psi$, donde $P(B) > 0$, entonces para cada n se cumple:*

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(A_n)P(B \mid A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B \mid A_n)}.$$

DEMOSTRACIÓN:

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P(B \mid A_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B \mid A_n)}.$$

■

1.2.2 Definición. *Los eventos A, B son* ***independientes*** *si $P(A \mid B) = P(A)$, es decir,*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Nótese que lo anterior es equivalente a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

1.2.3 Definición. *Una familia arbitraria de eventos $C = \{A_i : i \in I\}$ se dice independiente, si para cualquier colección finita de eventos $\{A_{ij}\}_{j=1}^{n} \subseteq C$, se cumple:*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{ij}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{ij}).$$

1.3 Variables Aleatorias.

1.3.1 Definición. *Sea (Ω, Ψ, P) un espacio de probabilidad. Una* ***variable aleatoria*** *X es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto $X^{-1}(I) \in \Psi$. Es decir, la función X es una variable aleatoria si la preimagen de cualquier intervalo es un evento.*

1.3.1 Proposición. *Si X e Y son variables aleatorias, entonces $X + Y$, kX, $X - Y$, XY y X/Y, cuando $Y \neq 0$ y $k \in \mathbb{R}$, son variables aleatorias.*

1.3.2 Definición. *Dos variables aleatorias X e Y son* ***independientes*** *si y sólo si para conjuntos de Borel cualesquiera $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ se cumple que:*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

1.3.3 Definición. *Una variable aleatoria es* ***discreta*** *si su rango es un conjunto discreto.*

1.3.4 Definición. *Sean* (Ω, Ψ, P) *un espacio de probabilidad,* X *una variable aleatoria discreta y* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *su rango. La función* $\rho : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow [0,1]$*, tal que* $\rho_{x_n} = P(X = x_n)$*, se denomina* ***función de probabilidad*** *o* ***función de masa de probabilidad*** *de la variable aleatoria* X*.*

1.3.5 Definición. *La* ***función de distribución*** *de una variable aleatoria* X*, se define como la función* $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ *tal que para cada* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x).$$

1.4 Función de Distribución de Algunas Variables Aleatorias Discretas.

1. ***Variable aleatoria de Bernoulli.***

Consideremos un experimento aleatorio en el cual sólo hay dos resultados que podemos llamar, muy generalmente, *"éxito"* y *"fracaso"*. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda en donde podemos llamar éxito a la aparición de una cara y fracaso a la aparición de un sello. Un experimento aleatorio con estas características se denomina ***ensayo de Bernoulli***.

Ahora, podemos definir sobre $\Omega = \{$ éxito, fracaso $\}$ una variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega = \text{éxito} \\ 0, & \text{si } \omega = \text{fracaso,} \end{cases}$$

esta variable se denomina ***variable aleatoria de Bernoulli***.

Si la probabilidad asignada a un éxito es ρ, entonces la función de probabilidad de la variable aleatoria X es

$$f_X(x) = \begin{cases} \rho, & \text{si } x = 1 \\ 1 - \rho, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es decir, $P(X=1)=\rho$, $P(X=0)=1-\rho$. En este caso decimos que X tiene ***distribución binaria o de Bernoulli con parámetro*** ρ.

2. ***Variable aleatoria binomial.***

   Consideremos n ensayos de *Bernoulli* independientes (por ejemplo, lanzar una moneda n veces), siendo ρ la probabilidad de éxito en cada ensayo.

   Sea $X = \#$ total de éxitos en los n ensayos. Esta variable se denomina ***variable aleatoria binomial con parámetros*** n, ρ. Ahora vamos a calcular $P(X=i)$ para $i=0,1,\ldots,n$.

   Tenemos que el espacio muestral de este experimento aleatorio consta de 2^n puntos, pues en cada prueba hay dos posibilidades.

   En virtud de que las pruebas son independientes, la probabilidad asociada con un punto que incluye i éxitos y $n-i$ fracasos será:

$$\overbrace{\rho\rho\cdots\rho}^{i-veces}\overbrace{(1-\rho)(1-\rho)\cdots(1-\rho)}^{(n-i)-veces}=\rho^i(1-\rho)^{n-i}.$$

   Ahora, entre los 2^n puntos habrá tantos con i éxitos como maneras posibles de disponer i éxitos entre las n pruebas, es decir,

$$P(X=i)=\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)\rho^i(1-\rho)^{n-i},$$

   para $i=1,2,\ldots,n$ y se denomina ***distribución binomial con parámetros*** n, ρ. Para indicar que X tiene distribución binomial con parámetros n, ρ se escribe $X \sim bin(n,\rho)$.

3. ***Variable aleatoria geométrica.***

   Suponga que se realizan ensayos de *Bernoulli* independientes y con probabilidad $\rho \in (0,1)$ de éxito, hasta que se obtiene un éxito. La variable aleatoria $X = \#$ de fracasos antes del primer éxito, se denomina ***variable aleatoria geométrica***. El conjunto de valores de X es $\{0,1,2,\ldots\}$ y

$$P(X=i)=(1-\rho)^i\rho,$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$ se denomina ***distribución geométrica con parámetro*** $1 - \rho$.

4. ***Variable aleatoria binomial negativa.***

Consideremos una sucesión infinita de ensayos de *Bernoulli* independientes, además, supongamos que la probabilidad de éxito en cualquier ensayo es ρ y la probabilidad de fracaso es $q = 1 - \rho$.

Sea $X = \#$ total de fracasos antes de obtener el $k-$ésimo éxito. Esta variable se denomina ***variable aleatoria binomial negativa*** y su conjunto de valores es $\{0, 1, \ldots\}$.

Para $n = k, k+1, \ldots$, definimos A_n como el evento de que el número total de ensayos requeridos para obtener k éxitos es n. Luego, A_n ocurre si ocurren exactamente $k-1$ éxitos entre los $n-1$ ensayos y el $k-$ésimo éxito se obtiene en el $n-$ésimo ensayo.

Puesto que todos los ensayos son independientes, entonces,

$$P(A_n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \rho^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \rho = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \rho^k q^{n-k}.$$

Sea $i \in \{0, 1, \ldots\}$. El evento de obtener exactamente i fracasos antes de obtener el $k-$ésimo éxito es equivalente al evento de que el número total de pruebas requeridas para obtener k éxitos es $(k + i)$. Así,

$$P(X = i) = P(A_{k+i}) = \begin{pmatrix} k+i-1 \\ i \end{pmatrix} \rho^k q^i,$$

para $i = 0, 1, \ldots$ y se denomina ***distribución binomial negativa con parámetros*** k***,*** ρ. Para indicar que X tiene distribución binomial negativa con parámetros k, ρ se usa $X \sim$ *binneg*(k, ρ).

5. ***Variable aleatoria de Poisson.***

Sea X una variable aleatoria cuyo conjunto de valores es $\{0, 1, \ldots\}$. Se dice que X es una ***variable aleatoria de Poisson con parámetro*** λ, $\lambda \in (0, \infty)$, si la función de probabilidad de X está dada por

$$P(X = i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!},$$

para $i = 0, 1, \ldots$. Para indicar que X tiene distribución de Poisson con parámetro λ se escribe $X \sim \textit{Poisson}(\lambda)$.

La distribución de *Poisson* se utiliza, entre otras cosas para modelar situaciones donde hay eventos que ocurren cierto número de veces en intervalos dados (usualmente de tiempo).

1.4.1 Ejemplo. *Suponga que un banco tiene un portafolio de un número "grande" de créditos válidos por un periodo de tiempo $[0, T]$, donde cada crédito tiene probabilidad de incumplimiento ρ "muy pequeña" . Esto se justifica, pues los bancos suelen otorgar créditos a personas o instituciones solventes.*

Sea $N = \#$ de incumplimientos ocurridos en $[0, T]$. Si el portafolio tiene n créditos, entonces $N \sim bin(n, \rho)$, pues, hay n ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito ρ. Ahora, si n es un valor "grande" y $\lambda = \rho n$, entonces,

$$\begin{aligned}
P(N = i) &= \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\
&= \frac{(n-i+1)(n-i+2)\ldots(n-1)n}{i!}\left(\frac{\lambda^i}{n^i}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i} \\
&= \frac{(n-i+1)(n-i+2)\ldots(n-1)n}{n^i}\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i} \\
&= \frac{(n-i+1)}{n}\frac{(n-i+2)}{n}\ldots\frac{(n-1)}{n}\frac{n}{n}\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^i},
\end{aligned}$$

tomando el límite cuando n tiende a infinito, resulta,

$$P(N = i) = 1 \ldots 1\left(\frac{\lambda^i}{i!}\right)\frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!},$$

es decir, para n "suficientemente grande" la distribución binomial con parámetros n, ρ puede ser aproximada por una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = \rho n$.

1.4.1 Definición. *Una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una* ***función de densidad sobre*** $\mathbb{R}$ *, si satisface las condiciones siguientes:*

1. $f(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

1.4.2 Definición. *Una variable aleatoria* X *es* ***continua o absolutamente continua,*** *si existe una función de densidad* f*, tal que*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Decimos que* F *es la* ***función de distribución de*** X.

1.5 Función de Distribución de Algunas Variables Aleatorias Continuas.

1. ***Variable aleatoria normal.***

   Una variable aleatoria X se dice que está ***normalmente distribuida con parámetros*** μ, σ^2, denotado $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, si tiene función de densidad de probabilidad

   $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso la función de distribución es

   $$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, se dice que X tiene ***distribución normal estándar o unitaria*** y se utiliza la notación

   $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t)^2}{2}} dt,$$

donde ϕ, Φ representan la función de densidad y la función de distribución de X respectivamente.

1.5.1 Proposición. *Si X es una variable aleatoria normalmente distribuida con parámetros μ, σ^2. Entonces $Y = aX + b$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con parámetros $(a\mu + b)$ y $a^2\sigma^2$.*

En particular, si $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, entonces $Z = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$.

1.5.2 Proposición. *Para la distribución normal estándar se cumple que*

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

es decir, $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.

2. ***Variable aleatoria Gamma.***

   Una variable aleatoria X se dice que tiene ***distribución Gamma con parámetros*** k, β, donde $k, \beta > 0$, si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^k x^{k-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(k)}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

   donde, $\Gamma(k) = \int_{0}^{\infty} e^{-y} y^{k-1} dy$.

1.6 Esperanza y Varianza de Variables Aleatorias.

1.6.1 Definición. *Sea X una variable aleatoria discreta tal que su conjunto de valores es $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y su función de probabilidad $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $\rho_n = P(X = x_n)$.* ***La esperanza matemática o valor esperado de*** *X, es el número denotado por $E[X]$ y definido como:*

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P(X = x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \rho_n,$$

siempre y cuando la serie anterior sea convergente.

Por otro lado, la ***varianza de*** X*, es el número denotado por* $\sigma^2 = VAR[X]$ *y definido como:*

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

1.6.1 Proposición. *Sea* X *una variable aleatoria y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces se cumple:*

1. $VAR[X+\alpha] = VAR[X]$,
2. $VAR[\alpha X] = \alpha^2 VAR[X]$.

1.6.2 Proposición. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias discretas e independientes, con función de probabilidad* f, g *respectivamente y* h *la función de probabilidad conjunta de* X *e* Y*, entonces se cumplen:*

1. $E[XY] = E[X]E[Y]$,
2. $VAR[X+Y] = VAR[X] + VAR[Y]$,
3. $COV(X,Y) = 0$.

1.7 Distribución Condicional.

1.7.1 Definición. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias discretas con función de probabilidad* ρ_X, ρ_Y *respectivamente. Se define la* ***función de probabilidad condicional de*** X ***dado que*** $Y = y$ *como:*

$$\rho_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)},$$

siempre que $P(Y = y) > 0$.

1.7.2 Definición. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias discretas con función de probabilidad* ρ_X *y* ρ_Y *respectivamente. Se define la* ***función de distribución de probabilidad condicional de*** X ***dado que*** $Y = y$ *como:*

$$\begin{aligned}F_{X|Y}(x \mid y) &= P(X \leq x \mid Y = y) = \sum_{s \leq x} \rho_{X|Y}(s \mid y) \\ &= \sum_{s \leq x} \frac{P(X = s, Y = y)}{P(Y = y)},\end{aligned}$$

siempre que $P(Y = y) > 0$.

Definimos la ***esperanza condicional de*** X ***dado que*** $Y = y$ como la esperanza de X con respecto a $\rho_{X|Y}(x \mid y)$, es decir,

$$E[X \mid Y = y] = \sum_{x} x\rho_{X|Y}(x \mid y).$$

Esta definición tiene sentido solamente si la serie converge absolutamente.

1.7.1 Proposición. *Sean* X *e* Y *variables aleatorias discretas, con función de probabilidad* $\rho_X(x_n) = P(X = x_n)$, $\rho_Y(y_n) = P(Y = y_n)$ *respectivamente, entonces,*

$$E[X] = E\left[E[X \mid Y]\right],$$

siempre que la serie $E[X \mid Y] = \sum_{x} x\rho_{X|Y}(x \mid y)$ *converja absolutamente.*

Demostración:

Sabemos que $E[X \mid Y] = \sum_{x} x\rho_{X|Y}(x \mid y)$ es una función de los valores de Y, luego,

$$\begin{aligned}E[E[X \mid Y = y_n]] &= \sum_{n \geq 1} E[X \mid Y = y_n]\rho_Y(y_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 1} x_m \rho_{X|Y}(x_m \mid y_n) \right) \rho_Y(y_n) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m \geq 1} x_m \frac{P(x_m, y_n)}{\rho_Y(y_n)} \right) \rho_Y(y_n) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} x_m P(x_m, y_n) \\ &= \sum_{m \geq 1} x_m \left(\sum_{n \geq 1} P(x_m, y_n) \right) = \sum_{m \geq 1} x_m \rho_X(x_m) = E[X].\end{aligned}$$

Nótese que se pudo intercambiar las series pues $E[X \mid Y = y_n] = \sum_{m \geq 1} x_m \rho_{X|Y}(x_m \mid y_n)$ converge absolutamente por hipótesis.

■

1.8 Momentos y Funciones Generadoras de Momentos.

Sabemos que los parámetros μ y σ son medidas numéricas descriptivas importantes que localizan el centro y describen la dispersión relacionada con los valores de una variable aleatoria X. Sin embargo, no proporcionan una caracterización única de la distribución de probabilidad de X. Varias distribuciones distintas poseen las mismas medias y desviaciones estándar. A continuación analizaremos un conjunto de medidas numéricas descriptivas que determinan de forma única la distribución de probabilidad de X.

1.8.1 Definición. *Dada una variable aleatoria X y un entero $k > 0$, la esperanza $E\left[X^k\right]$ se denomina **momento de orden k de** X y se denota mediante μ_k. Asimismo la esperanza $E\left[(X - E[X])^k\right]$ se denomina **momento centrado de orden k de** X.*

1.8.2 Definición. *Sea X una variable aleatoria con valores reales; se define la **función generadora de momentos de** X como*

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\{x:P(X=x)>0\}} e^{tx} P(X = x), & \textit{si } X \textit{ es discreta} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx, & \textit{si } X \textit{ es continua con función de densidad } f. \end{cases}$$

Decimos que existe $M_X(t)$ para X, si hay $b > 0$ tal que $M_X(t) < \infty$ para $|t| \leq b$.

Nótese que $M_X(t)$ se denomina función generadora de momentos de X, ya que al efectuar el desarrollo en serie de potencias de e^{tx} obtenemos la serie convergente (*Teorema de Bernstein para series de Taylor* [21]):

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots ,$$

luego, si suponemos que $\mu_k = E\left[X^k\right]$ es finita para $k = 1, 2, \ldots$ y X discreta, obtenemos:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} e^{tx} P(X=x) \\
&= \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tx)^j}{j!}\right] P(X=x) \\
&= \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} \left[1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \cdots\right] P(X=x) \\
&= \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} P(X=x) + t \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} xP(X=x) + \frac{t^2}{2!} \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} x^2 P(X=x) + \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\{x:P(X=x)>0\}} \left[\frac{(tx)^j}{j!}\right] P(X=x) = 1 + t\mu_1 + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \cdots .
\end{aligned}$$

Nótese que $\left\{\frac{(tx)^j}{j!}\right\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, luego, por el *teorema de la convergencia monótona* se pudo intercambiar las series.

De igual manera se obtiene el mismo resultado si X es una variable aleatoria continua.

En resumen si existe $M_X(t)$, se puede determinar cualquiera de los momentos de X.

1.8.1 Proposición. *Si existe* $M_X(t)$, *entonces, para cualquier entero positivo* k

$$\left[\frac{d^k}{dt^k}(M_X(t))\right]_{t=0} = M_X^{(k)}(0) = \mu_k.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = 1 + t\mu_1 + \frac{t^2}{2!}\mu_2 + \frac{t^3}{3!}\mu_3 + \cdots ,$$

luego,

$$M_X^{(1)}(t) = \mu_1 + \frac{2t}{2!}\mu_2 + \frac{3t^2}{3!}\mu_3 + \cdots ,$$

$$M_X^{(2)}(t) = \mu_2 + \frac{2t}{2!}\mu_3 + \frac{3t^2}{3!}\mu_4 + \cdots,$$
$$\vdots$$
$$M_X^{(k)}(t) = \mu_k + \frac{2t}{2!}\mu_{k+1} + \frac{3t^2}{3!}\mu_{k+2} + \cdots,$$

tomando $t = 0$ en cada una de las derivadas anteriores, obtenemos:

$$M_X^{(1)}(0) = \mu_1,$$

$$M_X^{(2)}(0) = \mu_2,$$
$$\vdots$$
$$M_X^{(k)}(0) = \mu_k.$$

■

1.8.1 Ejemplo. *Sea X una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Entonces la función generadora de momentos de X es igual a*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\right) = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{\lambda(e^t-1)}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$M_X^{(1)}(0) = \mu_1 = \lambda,$$

$$M_X^{(2)}(0) = \mu_2 = \lambda^2 + \lambda,$$

luego, $E[X] = \lambda$ *y* $VAR[X] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \lambda$.

1.8.2 Ejemplo. *Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro $1-\rho$, entonces la función generadora de momentos de X es igual a*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ti}\rho(1-\rho)^i \\ &= \rho\sum_{i=0}^{\infty}\left[e^t(1-\rho)\right]^i = \frac{\rho}{1-(1-\rho)e^t}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$M_X^{(1)}(0) = \mu_1 = \frac{(1-\rho)}{\rho},$$

$$M_X^{(2)}(0) = \mu_2 = \frac{2(1-\rho)^2}{\rho^2} + \frac{(1-\rho)}{\rho},$$

luego, $E[X] = \dfrac{(1-\rho)}{\rho}$, *y* $VAR[X] = \dfrac{(1-\rho)}{\rho^2}$.

A continuación se mencionan dos proposiciones que a efectos de este trabajo sólo toman en cuenta variables aleatorias con valores enteros no negativos.

1.8.2 Proposición. *La función de probabilidad de una variable aleatoria con valores enteros no negativos está unívocamente determinada por su función generadora de momentos.*

Demostración:

Sea $a_j = P(X = j)$, para $j \geq 0$ la función de probabilidad de X. Entonces, la función generadora de momentos de X está dada por

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{tj},$$

además, la función de probabilidad de X se puede escribir como $a_j = P(X = j) = \dfrac{M_X^{(j)}(0)}{j!}$, para $j \geq 0$. Supongamos ahora que Y es una variable aleatoria con valores enteros no negativos y con función de probabilidad dada por $b_j = P(Y = j)$, para $j \geq 0$. Si Y tiene la misma función generadora de momentos que X entonces,

$$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{tj} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j e^{tj} = M_Y(t) \Longrightarrow M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (b_j - a_j) e^{tj} = 0.$$

Por lo tanto, $M^{(j)}(t) = 0$, en particular $M^{(j)}(0) = j!(b_j - a_j) = 0$; es decir, $a_j = b_j$, para todo $j \geq 0$, por lo que X e Y están idénticamente distribuidas.

■

1.8.3 Proposición. *Sean* $X_1, \ldots, X_n$ *variables aleatorias independientes con valores enteros no negativos y sean* $M_{X_1}, \ldots, M_{X_n}$ *sus funciones generadoras de momentos. Entonces la función generadora de momentos de la suma* $S = X_1 + \cdots + X_n$ *es el producto de las funciones generadoras de momentos* $M_S = M_{X_1} \ldots M_{X_n}$.

DEMOSTRACIÓN:

$M_S(t) = E\left[e^{tS}\right] = E\left[e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\right] = E\left[e^{tX_1} \ldots e^{tX_n}\right] = E\left[e^{tX_1}\right] \ldots E\left[e^{tX_n}\right] = M_{X_1}(t) \ldots M_{X_n}(t)$, donde M_{X_j} es la función generadora de momentos de X_j.

■

1.8.3 Ejemplo. *Sea* N *una variable aleatoria binomial negativa con parámetros* k, ρ, *es decir,* $N = \#$ *total de fracasos antes de obtener el* $k-$*ésimo éxito, siendo* ρ *la probabilidad de éxito en cada ensayo. Entonces,* $N = N_1 + \cdots + N_k$ *donde* $N_j = \#$ *de fracasos después del éxito* $j-1$, *y antes de obtener el* $j-$*ésimo éxito. Las variables* N_j *son independientes y tienen distribución geométrica con parámetro* $1-\rho$ *y función generadora de momentos* $M_{N_j}(t) = \dfrac{\rho}{1-(1-\rho)e^t}$; *por lo que la función generadora de momentos de* N *es igual a*

$$M_N(t) = \left[M_{N_j}(t)\right]^k = \left[\frac{\rho}{1-(1-\rho)e^t}\right]^k.$$

Por otro lado,

$$M_N^{(1)}(0) = \mu_1 = \frac{k(1-\rho)}{\rho},$$

$$M_N^{(2)}(0) = \mu_2 = \frac{k^2 - 2k^2\rho + k^2\rho^2 + k - k\rho}{\rho^2},$$

luego, $E[N] = \dfrac{k(1-\rho)}{\rho}$, *y* $VAR[N] = \dfrac{k(1-\rho)}{\rho^2}$.

1.9 Convolución y Sumas Aleatorias de Variables Aleatorias.

Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con valores enteros no negativos. Sean $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_j\}_{j=0}^{\infty}$, donde para cada $i \geq 0$, $a_i = P(X_1 = i)$ y para cada $j \geq 0$, $b_j = P(X_2 = j)$. Si $S = X_1 + X_2$, entonces

$$\begin{aligned} P(S = k) &= P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i, X_2 = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) P(X_2 = k - i) = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = c_k. \end{aligned}$$

La sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ se denomina ***convolución*** (discreta) de $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{b_j\}_{j=0}^{\infty}$, y se denota por $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} * \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Además, si M_{X_1}, M_{X_2} son las funciones generadoras de momentos de X_1, X_2 respectivamente, entonces la función generadora de momentos de la suma $S = X_1 + X_2$ es

$$M_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(S = k) e^{tk} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{tk},$$

y

$$M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{ti} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j e^{tj} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_i e^{ti} b_j e^{tj} \right),$$

donde los elementos $a_i e^{ti} b_j e^{tj}$ pueden ir dispuestos en cualquier orden. En particular se puede elegir el orden

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e^t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_2) e^{2t} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{tk},$$

siendo $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, es decir, $M_S = M_{X_1} M_{X_2}$, donde los coeficientes c_k para $k \geq 0$ son los términos de la sucesión $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} = \{a_i\}_{i=0}^{\infty} * \{b_j\}_{j=0}^{\infty}$.

El resultado anterior se puede generalizar en caso de que se tengan $X_1, \ldots, X_n$, n variables aleatorias independientes con valores enteros no negativos; se procede por inducción sobre n.

A continuación se introduce la idea de sumas de un número aleatorio de variables aleatorias, cuya noción como se verá en el segundo capítulo, es de suma importancia en la construcción del modelo colectivo de riesgo.

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con valores enteros no negativos y sea $g(x) = P(X_i = x)$, para $x \geq 0$ la función de probabilidad de X_i para todo $i = 1, 2 \ldots$. Entonces, la función generadora de momentos de X_i es $M_{X_i}(t) = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)e^{tx}$, para todo $i = 1, 2, \ldots$.

Sea N una variable aleatoria con valores enteros no negativos, independiente de las X_i y sea $\rho_n = P(N = n)$, para $n \geq 0$ su función de probabilidad. La variable aleatoria $S = X_1 + \cdots + X_N$, se denomina ***suma de un número aleatorio de variables aleatorias***.

Ahora, vamos a obtener la función de probabilidad f de S.

Sea $A_n = \{N = n\}$ para cada $n = 0, 1, \ldots$, sabemos que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$, donde $A_j \cap A_k = \emptyset$, siempre que $j \neq k$. Ahora,

$$\begin{aligned} \{S = x\} &= \Omega \cap \{S = x\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \cap \{S = x\} \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\{N = n\} \cap \{S = x\} \right), \end{aligned}$$

donde $(A_j \cap \{S = x\}) \cap (A_k \cap \{S = x\}) = \emptyset$, siempre que $j \neq k$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= P(S = x) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\{N = n\} \cap \{S = x\}) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, S = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = x \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g^{*n}(x)P(N = n), \end{aligned}$$

donde $g^{*n}(x)$, son los términos de la $n-$ésima convolución de g, pues para n fija, la función de probabilidad de $X_1 + \cdots + X_n$ está dada por la $n-$ésima convolución de g; además, la función generadora de momentos de S es

$$M_S(t) = \sum_{t=0}^{\infty} f(x)e^{tx}.$$

Asimismo, podemos escribir la función generadora de momentos de S como:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \sum_{t=0}^{\infty} f(x)e^{tx} = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} g^{*n}(x)P(N=n)\right)e^{tx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{t=0}^{\infty} g^{*n}(x)e^{tx}\right)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}(M_{X_i}(t))^n P(N=n), \end{aligned}$$

Nótese que se pudo intercambiar las series, pues $\sum_{n=0}^{\infty} g^{*n}(x)P(N=n)e^{tx}$, converge absolutamente.

1.9.1 Ejemplo. *Supongamos que* N *es una variable aleatoria de Poisson de parámetro* λ*, entonces*

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \sum_{t=0}^{\infty} f(x)e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty}(M_{X_i}(t))^n P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(M_{X_i}(t))^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M_{X_i}(t)\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda\left(M_{X_i}(t)-1\right)}. \end{aligned}$$

La función de probabilidad correspondiente a esta función generadora de momentos se denomina ***distribución de Poisson compuesta*** .

1.10 Teoremas Límite.

1.10.1 Teorema. *(Teorema central del límite.)* *Sea* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media* μ *y varianza* σ^2*. Entonces, la sucesión de variables aleatorias* $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ *converge en distribución a una variable aleatoria normal unitaria cuando* $n \longrightarrow \infty$*. Es decir,*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(Y_n \le y) = \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Por último, enunciamos una versión más general del teorema central del límite.

1.10.2 Teorema. *Sea* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *una sucesión de variables aleatorias independientes con medias* $\mu_j = E[X_j]$ *y varianzas* $\sigma_j^2 = VAR[X_j]$, $j \geq 1$. *Si*

(a) *Las variables* X_j, $j \geq 1$ *están uniformemente acotadas, es decir, si existe* $K > 0$ *tal que* $P(|X_j| \leq K) = 1$, *para todo* $j \geq 1$.

(b) *Se cumple que* $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 = \infty$, *entonces,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \mu_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}} \leq x \right) = \Phi(x).$$

La demostración del teorema anterior puede consultarse en [8], páginas $261 - 262$.

Capítulo 2

Medición del Riesgo de Crédito.

2.1 Introducción.

El tema de la medición del riesgo de crédito juega un papel importante en las instituciones financieras, pues, un conocimiento cabal del riesgo de crédito propicia la creación, entre otras cosas, de sistemas financieros sanos y capaces de mantenerse a la altura de los requerimientos exigidos por una realidad cada vez más compleja.

En las compañías de seguros es de suma importancia el análisis de ciertos factores cuyo comportamiento es impredecible, pues éstas tienen que realizar erogaciones por concepto de accidentes u otros eventos asegurados. En el caso de instituciones bancarias, éstas tienen que crear reservas preventivas para hacer frente a pérdidas originadas tanto por la calidad crediticia de sus acreditados, como por los cambios en los factores de mercado que afectan sus portafolios.

El análisis de las variaciones de factores cuyo comportamiento es impredecible puede ser realizado por medio de diversas herramientas estadísticas, que en el caso particular de las compañías de seguros, ha dado lugar a la ***teoría del riesgo en seguros*** [17]. El desarrollo de la teoría de riesgo ha permitido a las compañías de seguros conocer mejor la exposición de sus portafolios y establecer las pérdidas a las cuales se exponen. Sólo recientemente es que se ha explotado esta herramienta en el ámbito bancario debido a la analogía existente con el riesgo de crédito.

Al estimar las pérdidas por riesgo de crédito de un portafolio, podemos decir que presenta ciertas similitudes con las estimaciones hechas en portafolios de asegurados. El incumplimiento de un crédito es un evento incierto al igual que el siniestro de un asegurado, y en ningún caso se puede determinar el tiempo exacto de ocurrencia; existe un monto asegurado así como un monto total de crédito otorgado. En seguros se prevé un porcentaje de siniestralidad esperado para el cual pueden construirse reservas, de la misma forma que deben construirse reservas preventivas para el riesgo crediticio.

En conclusión, ambas situaciones pueden ser modeladas por una distribución de pérdidas que lleve a cuantificar el fenómeno, para lo cual, la teoría de riesgo ha resultado una herramienta de gran utilidad en el ámbito de los seguros.

Una ***distribución de pérdidas*** proveniente del análisis de un portafolio describe el comportamiento de las posibles pérdidas en un periodo determinado y permite tomar en cuenta diversas características colectivas del grupo de individuos que conforman el portafolio, tales como efectos de concentración (ocurre, por ejemplo, cuando una gran cantidad del monto total del portafolio está agrupado en pocos créditos) y diversificación (ocurre, por ejemplo, cuando el monto total del portafolio está distribuido adecuadamente entre un gran número de acreditados).

Recientemente, la teoría del riesgo en seguros ha sido aplicada en el ámbito bancario para determinar la distribución de pérdidas de portafolios crediticios.

En la actualidad son aceptados principalmente dos tipos de enfoques para la medición del riesgo de crédito. Uno es el *Modelo de Impago, MI (Default Model)* y el otro es el *Modelo de Marcar a Mercado, MMM (Mark to Market)*. Ambos, requieren una estimación de las probabilidades de incumplimiento o quiebra y de la pérdida en caso de impago para determinar la distribución probabilística de las pérdidas. Éstos datos son suministrados por los *sistemas de calificación* (son aquellos que permiten cuantificar la probabilidad de incumplimiento de los acreditados y la severidad de las pérdidas en caso de incumplimiento). La metodología representativa del enfoque *MI* es el ***CreditRisk***$^+$ [4] y la del *MMM* es el ***CreditMetrics***$^{\text{TM}}$ [11].

El *CreditRisk*$^+$ es una metodología desarrollada por la *Credit Suisse Financial Products(CSFP)*, publicada en 1997, que desde entonces ha despertado curiosidad entre académicos, analistas de riesgos de crédito y la comunidad regulatoria. Para este modelo es fundamental el conjunto de probabilidades individuales de incumplimiento de los créditos en el portafolio, y el supuesto de que las probabilidades de incumplimiento son pequeñas, en este sentido se observará que el número de incumplimientos en el portafolio está representado por una variable aleatoria binomial que posteriormente se podrá aproximar por una distribución de probabilidad *Poisson*. En su versión más general, donde las probabilidades de incumplimiento pueden cambiar en el tiempo, se supone además que estas probabilidades están dadas por una suma ponderada de $K-$factores de riesgo independientes cada uno de ellos distribuido de acuerdo a una distribución *Gamma*; así, el portafolio queda dividido en K sectores independientes, donde cada sector cuenta con un número de incumplimientos y una función generadora de momentos de la pérdida. Una vez obtenida la distribución del número de incumplimientos en el portafolio, y siguiendo el patrón de los modelos en la teoría de riesgo en seguros, se obtiene la función generadora de momentos de las pérdidas en el portafolio como el producto de la función generadora de momentos de la pérdida de cada sector. Finalmente, se recurre a un procedimiento numérico de recursión para obtener la distribución de probabilidad de las pérdidas.

2.2 Modelo Individual.

Supongamos que se tiene un portafolio con n pólizas individuales de seguros válidas por un periodo de tiempo $[0, T]$.

Se considera que cada póliza de seguro en el portafolio tiene dos estados posibles:

1. Presentó exactamente una reclamación.

2. No presentó ninguna reclamación.

Sea $D_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aleatoria que representa el estado de reclamación de la $j-$ésima póliza en el portafolio:

$$D_j = \begin{cases} 1, & \text{si hay reclamación en la póliza } j \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $\rho_j = P(D_j = 1)$ la probabilidad de que la $j-$ésima póliza presente reclamación en $[0, T]$, para cada $j = 1, \ldots, n$.

Definimos la variable aleatoria $m_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que representará el monto en reclamación de la $j-$ésima póliza en el portafolio durante $[0, T]$ y G_j la función de distribución de m_j para cada

$j = 1, \dots, n$ ***(frecuentemente se utiliza la distribución empírica).*** Asumimos que m_j es independiente de D_j para cada $j = 1, \dots, n$. El monto por reclamación de la j—ésima póliza en el portafolio está dado por el producto:

$$D_j m_j = \begin{cases} m_j, & \text{si } D_j = 1 \\ 0\,, & \text{si } D_j = 0, \end{cases}$$

para cada $j = 1, \dots, n$. En este sentido tenemos que los datos del modelo individual son los vectores aleatorios $(D_1, m_1), \dots, (D_n, m_n)$, los cuales podemos considerar independientes entre si. Ahora, calculemos la función de distribución F_j de $D_j m_j$, para cada $j = 1, \dots, n$.

Para cualquier número entero no negativo x, $\{D_j m_j \le x\} = (\{D_j m_j \le x, D_j = 0\} \cup \{D_j m_j \le x, D_j = 1\})$, entonces,

$$\begin{aligned} F_j(x) &= P(D_j m_j \le x) \\ &= P(D_j m_j \le x \mid D_j = 0)P(D_j = 0) + P(D_j m_j \le x \mid D_j = 1)P(D_j = 1) \\ &= P(D_j m_j \le x \mid D_j = 0)(1 - \rho_j) + P(D_j m_j \le x \mid D_j = 1)\rho_j. \end{aligned}$$

Nótese que $P(D_j m_j \le x \mid D_j = 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \ge 0 \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$

es decir, $P(D_j m_j \le x \mid D_j = 0) = 1_{[0,\infty)}(x)$. Así,

$$\begin{aligned} F_j(x) &= P(D_j m_j \le x \mid D_j = 0)(1 - \rho_j) + P(D_j m_j \le x \mid D_j = 1)\rho_j \\ &= 1_{[0,\infty)}(x)(1 - \rho_j) + P(m_j \le x)\rho_j \\ &= 1_{[0,\infty)}(x)(1 - \rho_j) + G_j(x)\rho_j. \end{aligned}$$

Sea S la variable aleatoria que representa el monto acumulado por las reclamaciones ocurridas en $[0, T]$, es decir,

$$S = \sum_{j=1}^{n} D_j m_j. \tag{2.1}$$

Esta variable S se denomina ***riesgo*** y es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo de vigencia $[0, T]$ de las pólizas en el portafolio. La ecuación (2.1) representa el ***modelo individual de riesgo*** para un portafolio con n pólizas individuales.

La función de distribución F_S del riesgo S en el modelo individual de riesgo es

$$F_S(x) = P(S \leq x) = P(m_1 D_1 + \cdots + X_n D_n \leq x) = (F_1 * \cdots * F_n)(x),$$

donde $(F_1 * \cdots * F_n)(x)$ para $x \geq 0$, son los términos de la convolución.

2.2.1 Proposición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{n} D_j m_j$, *el modelo individual de riesgo para un portafolio con* n *pólizas individuales vigentes en un periodo* $[0, T]$, *entonces se cumple:*

1. $M_{D_j m_j}(t) = 1 + \rho_j(M_{m_j}(t) - 1)$.

2. $M_S(t) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 + \rho_j(M_{m_j}(t) - 1)\right]$.

3. $E[S] = \sum_{j=1}^{n} \rho_j E[m_j]$.

4. $VAR[S] = \sum_{j=1}^{n} \left(\rho_j VAR[m_j] + \rho_j(1-\rho_j)E^2[m_j]\right)$.

Demostración:

Para cada $j = 1, \ldots, n$,

1.

$$\begin{aligned}
M_{D_j m_j}(t) &= E\left[e^{tD_j m_j}\right] = E\left[E\left[e^{tD_j m_j} \mid D_j\right]\right] \\
&= E\left[e^{tD_j m_j} \mid D_j = 0\right] P(D_j = 0) + E\left[e^{tD_j m_j} \mid D_j = 1\right] P(D_j = 1) \\
&= (1 - \rho_j) + E\left[e^{tm_j}\right] \rho_j = 1 + \rho_j(M_{m_j}(t) - 1).
\end{aligned}$$

2. Sabemos que $(D_1, m_1), \ldots, (D_n, m_n)$ son independientes entre si.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] = E\left[e^{t(D_1 m_1 + \ldots + D_n m_n)}\right] \\ &= E\left[e^{tD_1 m_1} \cdots e^{tD_n m_n}\right] = \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{tD_j m_j}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n} M_{D_j m_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 + \rho_j (M_{m_j}(t) - 1)\right]. \end{aligned}$$

3. $E[S] = E\left[\sum_{j=1}^{n} D_j m_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[D_j]E[m_j]$, por independencia.

   $E[D_j] = 0P(D_j = 0) + 1P(D_j = 1) = P(D_j = 1) = \rho_j$, así,

   $E[S] = \sum_{j=1}^{n} E[D_j]E[m_j] = \sum_{j=1}^{n} \rho_j E[m_j]$.

4. $VAR[S] = VAR\left[\sum_{j=1}^{n} D_j m_j\right] = \sum_{j=1}^{n} VAR[D_j m_j]$, por independencia.

$$\begin{aligned} VAR[D_j m_j] &= E\left[D_j^2 m_j^2\right] - E^2[D_j m_j] = E\left[E\left[D_j^2 m_j^2 \mid D_j\right]\right] - E^2[D_j m_j] \\ &= E\left[D_j^2 m_j^2 \mid D_j = 0\right] P(D_j = 0) + E\left[D_j^2 m_j^2 \mid D_j = 1\right] P(D_j = 1) - (E[D_j]E[m_j])^2 \\ &= E\left[m_j^2\right] \rho_j - \rho_j^2 E^2[m_j] = \left(E\left[m_j^2\right] \rho_j - E^2[m_j]\rho_j\right) + E^2[m_j]\rho_j - \rho_j^2 E^2[m_j] \\ &= VAR[m_j]\rho_j + \rho_j(1 - \rho_j)E^2[m_j]. \end{aligned}$$

   Entonces,

$$VAR[S] = \sum_{j=1}^{n} VAR[D_j m_j] = \sum_{j=1}^{n} \left(\rho_j VAR[m_j] + \rho_j(1-\rho_j)E^2[m_j] \right).$$

■

2.3 Modelo Individual (Créditos).

En términos generales, el estado de un crédito otorgado puede manifestarse de dos formas:

1. La contraparte se declara insolvente y no paga la totalidad del préstamo otorgado.
2. La contraparte cancela el monto pactado originalmente.

Supongamos conocida la probabilidad de incumplimiento ρ de un crédito. Sea D la variable aleatoria que modela el estado de incumplimiento de un crédito:

$$D = \begin{cases} 1, & \text{si el acreditado incumple} \\ 0, & \text{si no,} \end{cases}$$

y m la variable aleatoria que representa el monto de la pérdida en el crédito. La pérdida que un banco o cualquier institución crediticia puede sufrir por el otorgamiento de un crédito viene dado por el producto

$$Dm = \begin{cases} m, & \text{si } D = 1 \\ 0, & \text{si } D = 0. \end{cases}$$

Además, el valor esperado y la varianza de la pérdida asociada a un crédito se pueden calcular directamente:

$$\begin{aligned} E[Dm] &= E\left[E[Dm \mid D]\right] \\ &= E[Dm \mid D = 1]P(D = 1) + E[Dm \mid D = 0]P(D = 0) \\ &= E[m]\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VAR[Dm] &= E\left[D^2m^2\right] - E^2[Dm] = E\left[E\left[D^2m^2 \mid D\right]\right] - E^2[Dm] \\
&= E\left[D^2m^2 \mid D=1\right]P(D=1) + E\left[D^2m^2 \mid D=0\right]P(D=0) - E^2[Dm] \\
&= E\left[m^2\right]\rho - E^2[m]\rho^2 = \left(E\left[m^2\right]\rho - E^2[m]\rho\right) + E^2[m]\rho - E^2[m]\rho^2 \\
&= \rho VAR[m] + (1-\rho)\rho E^2[m].
\end{aligned}$$

2.3.1 Riesgo de Crédito de un Portafolio de Individuos.

A continuación se analizará el comportamiento de un portafolio de créditos, con la finalidad de estudiar el riesgo al que se expone una institución prestadora de créditos.

Sea $S = \sum_{j=1}^{n} D_j m_j$ la variable aleatoria que representa la pérdida por riesgo de crédito de un portafolio, donde n es una constante que indica el número de créditos que conforman el portafolio. m_j es una constante que indica el monto de la pérdida del $j-$ésimo crédito en el portafolio (m_j es constante, pues se considera un sólo periodo de tiempo) y D_j, $D_j m_j$ son variables aleatorias que representan el estado y la pérdida por incumplimiento del $j-$ésimo crédito en el portafolio, respectivamente.

Suponemos que las pérdidas individuales por incumplimiento de cada crédito son mutuamente independientes, es decir, si un acreditado incumple, esto no necesariamente implica que otro hará lo mismo. Asimismo, en este modelo se considera imposible la alteración del número de créditos en el portafolio durante el periodo analizado. Esto impide la integración de más créditos al portafolio así como la salida de los mismos.

Ahora, abordaremos el problema de encontrar la distribución de pérdida de un portafolio de créditos.

En el modelo individual de riesgo para un portafolio con n pólizas de seguros, se presentaron dos alternativas para la obtención de la función de distribución del riesgo: la primera consistía en calcular la convolución de la función de distribución de los montos por reclamaciones y la segunda en obtener la función generadora de momentos del riesgo. Sin embargo, en la mayoría de los casos, ambas alternativas requieren de mucho esfuerzo computacional. Por esta razón y bajo ciertas condiciones, la distribución de la pérdida de un portafolio de créditos suele aproximarse por una distribución normal.

Para aproximar la distribución de la pérdida de un portafolio de créditos por una distribución normal, se requiere que los créditos que componen el portafolio tengan probabilidad de incumplimiento común y el número de créditos en el portafolio sea "suficientemente grande". Así, las variables de cada crédito quedan definidas de la siguiente manera:

$$D_j m_j = \begin{cases} m_j, & \text{con probabilidad } P(D_j = 1) = \rho \\ 0, & \text{con probabilidad } P(D_j = 0) = 1 - \rho. \end{cases}$$

Bajo el supuesto de que las pérdidas por incumplimiento individuales de cada crédito son mutuamente independientes se tiene que el valor esperado y la varianza de la pérdida en el portafolio son:

$$E[S] = E\left[\sum_{j=1}^{n} D_j m_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[D_j m_j] = \rho \sum_{j=1}^{n} m_j, \tag{2.2}$$

donde, $\sum_{j=1}^{n} m_j$ es el monto total de la pérdida en el portafolio.

$$\begin{aligned} VAR[S] &= VAR\left[\sum_{j=1}^{n} D_j m_j\right] = \sum_{j=1}^{n} VAR[D_j m_j] \\ &= \rho(1-\rho) \sum_{j=1}^{n} m_j^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Finalmente para n "suficientemente grande", tenemos $D_1 m_1, \ldots, D_n m_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes no idénticamente distribuidas, donde $E[D_j m_j] = \rho m_j$ y $VAR[D_j m_j] = \rho(1-\rho) m_j^2$, para cada $j = 1, \ldots$. Además, si $K = \max\{m_j : j = 1, \ldots\}$ resulta:

$$\begin{aligned} F_j(K) &= P(D_j m_j \leq K) = 1_{[0,\infty]}(K)(1-\rho) + G_j(K)\rho \\ &= 1_{[0,\infty]}(K)(1-\rho) + P(m_j \leq K)\rho = 1(1-\rho) + 1\rho = 1, \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots$, es decir, con probabilidad 1, las variables $D_j m_j$ están uniformemente acotadas para todo $j = 1, \ldots$. También se cumple que $\sum_{j=1}^{\infty} VAR[D_j m_j] = \infty$, por ser m_j constante. Luego, por el teorema (1.10.2)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(S \leq z) = F_Z(z),$$

donde

$$S \sim N\left(\rho \sum_{j=1}^{n} m_j, \rho(1-\rho) \sum_{j=1}^{n} m_j^2\right) \tag{2.4}$$

Al contar con una distribución de pérdidas por riesgo de crédito, cualquier banco o institución financiera podrá conocer la cantidad monetaria que pone en riesgo por la posesión de un portafolio de crédito. Asimismo, como se verá a continuación, podrá conocer la cantidad monetaria necesaria para afrontar las pérdidas del portafolio con un nivel de confianza α, comunmente bajo (generalmente α suele ser $0,01\%$, $0,5\%$, 1% o 5%) y, por tanto, representando un escenario grave y poco probable.

2.3.2 Valor en Riesgo, Concentración y el Límite Individual.

2.3.1 Definición.

Supongamos que Y *es una variable aleatoria y sea* $\alpha \in [0, 1]$. *Decimos que el número* z *es un* $\alpha-$*percentil si se cumple:*

$$P(Y < z) \leq \alpha \leq P(Y \leq z).$$

El mayor $\alpha-$*percentil es:*

$$z_\alpha(Y) = \inf\{y : P(Y \leq y) > \alpha\}.$$

2.3.2 Definición.

Supongamos que Y *es una variable aleatoria y sea* $\alpha \in [0, 1]$. *Definimos el valor en riesgo de* Y *a un nivel de confianza* α *por:*

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) \equiv -z_{\alpha}(Y).$$

En el caso en que Y representa el rendimiento de un portafolio, el $\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y)$ es el cuantil de la distribución de Y que indica la pérdida máxima del portafolio, en un periodo dado a un nivel de confianza α fijado por el analista. Por ejemplo, si un banco tiene un portafolio de créditos con monto total de \$5.000.000 y el valor en riesgo mensual del portafolio a un nivel de confianza $\alpha = 5\%$ es de \$200.000, entonces, la probabilidad de que el banco presente en el mes una pérdida mayor o igual a \$200.000 es de $0,05$.

A continuación se presentan algunas propiedades de VaR.

2.3.1 Proposición. *Sea Y una variable aleatoria y $t \in \mathbb{R}$, luego VaR cumple con los siguientes enunciados:*

1. $Y \geq 0$ *entonces* $\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) \leq 0$.

2. $\mathrm{VaR}_{\alpha}(tY) = t\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y)$, *para todo* $t \geq 0$.

3. $\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y + t) = \mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) - t$.

Nótese que si Y representa el rendimiento de un portafolio, podemos interpretar las propiedades anteriores de la siguiente manera:

1. Si $Y \geq 0$, entonces, el margen de riesgo del rendimiento en el portafolio $\mathrm{VaR}_{\alpha}(Y) \leq 0$, es decir, el inversionista no tiene que crear reservas de capital para afrontar el riesgo por pérdidas en el portafolio.

2. Si $t \geq 0$, para la variable tY, $\mathrm{VaR}_{\alpha}(tY)$ resultará directamente proporcional a Y.

3. Si al rendimiento Y de un portafolio se le suma una cantidad t en efectivo, el riesgo resultante disminuye en esa cantidad, puesto que al ser t libre de riesgo, se considera como parte del margen de riesgo. Un efecto análogo, aunque opuesto, ocurre cuando $t < 0$.

Ahora, pasaremos a calcular el VaR de una variable aleatoria Y, a través de un método análítico de uso frecuente en mercados en equilibrio (sin turbulencia económica) y durante lapsos cortos de tiempo. A grandes rasgos este método depende de la existencia de tablas de percentiles para la distribución normal.

Supongamos que $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ y $Z = \dfrac{Y-\mu}{\sigma}$, luego

$$P(Y \leq -VaR_\alpha(Y)) = P\left(Z \leq -\frac{(VaR_\alpha(Y)+\mu)}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Utilizando las definiciones (2.3.1), (2.3.2) y la proposición (2.3.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} -z_\alpha(Z) &= VaR_\alpha(Z) = \frac{1}{\sigma}VaR_\alpha(Y-\mu) = \frac{1}{\sigma}VaR_\alpha(Y+(-\mu)) \\ &= \frac{1}{\sigma}\left[VaR_\alpha(Y)-(-\mu)\right] = \frac{1}{\sigma}\left[VaR_\alpha(Y)+\mu\right], \end{aligned}$$

es decir,

$$-VaR_\alpha(Y) = \left(z_\alpha(Z)\,\sigma + \mu\right), \tag{2.5}$$

donde z_α es el mayor $\alpha-$percentil de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$.

Nota.

En el capítulo 3, pasaremos a calcular el VaR de una variable aleatoria cuya función de distribución no es necesariamente normal y los lapsos de tiempo son más extensos.

A continuación daremos un ejemplo que nos permitirá ilustrar cómo funciona el modelo individual. Para esto es necesario expresar el concepto de pérdida no esperada en términos de la pérdida esperada y el valor en riesgo de la variable aleatoria que representa la pérdida en el portafolio para un determinado periodo de tiempo.

2.3.3 Definición.

Sea Y *una variable aleatoria que representa la pérdida de un portafolio en un cierto periodo de tiempo. Si* $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$*, definimos la pérdida no esperada* (PNE) *en el portafolio para un determinado periodo de tiempo como:*

$$PNE = -VaR_\alpha(Y) - PE.$$

Veremos a continuación que podemos escribir la pérdida no esperada como un múltiplo de la desviación estándar de la distribución de la pérdida:
por la definición (2.3.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} PNE &= -VaR_\alpha(Y) - PE \\ &= z_\alpha(Z)\sigma + \mu - \mu \\ &= \left(z_\alpha(Z)\right)\sigma, \end{aligned}$$

donde, $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ representa la pérdida en el portafolio para un determinado periodo de tiempo y $Z = \left(\dfrac{Y-\mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1)$.

2.3.1 Ejemplo. *La información de los portafolios que se utiliza está dividida en dos partes: la correspondiente a las probabilidades de incumplimiento y, por otro lado, la de los montos.*

Para la primera parte se utiliza información mensual de enero de dos mil a marzo de dos mil uno de portafolios de crédito del ámbito hipotecario mexicano. En este ejemplo, para todos los portafolios se tiene la misma probabilidad de incumplimiento ρ *a un año. Para cada mes la probabilidad de incumplimiento a un año está dada en la siguiente tabla:*

Tabla 1.

Probabilidades de incumplimiento	
Fecha	*Serie 1*
Ene-00	*18,87%*
Feb-00	*10,73%*
Mar-00	*8,50%*
Abr-00	*8,33%*
May-00	*7,71%*
Jun-00	*7,18%*
Jul-00	*7,35%*
Ago-00	*6,79%*
Sep-00	*7,26%*
Oct-00	*7,47%*
Nov-00	*6,99%*
Dic-00	*6,78%*
Ene-01	*5,53%*
Feb-01	*5,83%*
Mar-01	*5,37%*
Promedio	*8,046%*

Nota.

De la tabla anterior tenemos que entre el mes de enero de dos mil y enero de dos mil uno, $18,87\%$ *representa el porcentaje del total de acreditados que estarán en estado de incumplimiento, en cualquier portafolio del ámbito hipotecario mexicano.*

Por otro lado, la información acerca de los montos es totalmente hipotética y construida con el objeto de ilustrar como se diferencia el comportamiento de dos portafolios en los cuales el monto total se reparte de maneras diferentes. Para esto se construyeron dos portafolios, los cuales tienen el mismo número de créditos así como el mismo monto total, pero repartido de manera distinta.

Tabla 2.

Portafolio 1		*Portafolio 2*	
Montos	*# Acreditados*	*Montos*	*# Acreditados*
\$ 400	*15*	*\$ 3.200*	*499*
\$ 1.200	*10*	*\$ 540.400*	*1*
\$ 1.600	*15*		
\$ 2.000	*24*		
\$ 2.400	*30*		
\$ 2.800	*38*		
\$ 3.200	*30*		
\$ 4.800	*90*		
\$ 5.200	*120*		
\$ 5.600	*128*		
\$ 2.137.200	***500***	***\$ 2.137.200***	***500***

Sea S_i la variable aleatoria que representa la pérdida por riesgo de crédito del $i-$ésimo portafolio, donde $i = 1, 2$.

Sabemos de la sección (2.3.1) que para aproximar la distribución de S_i por una distribución normal, se requiere que los créditos que componen cada portafolio tengan probabilidad de incumplimiento común y el número de créditos en el portafolio sea "suficientemente grande".

La probabilidad de incumplimiento ρ para todos los créditos, se calculó como el promedio de la serie 1, es decir, $\rho = 8,046\%$. Además, cada portafolio cuenta con 500 acreditados y un monto total de \$2.137.200. Nótese que la probabilidad de incumplimiento ρ, no considera las diferentes maneras en que se reparte el monto total de cada portafolio.

Para Portafolio 1 obtenemos de la ecuación (2.2) sección (2.3.1), que la pérdida esperada es:

$$E[S_1] = (0,08046)(2.137.200) = 171.959$$

y para el Portafolio 2

$$E[S_2] = (0,08046)(2.137.200) = 171.959.$$

Asimismo, para Portafolio 1 obtenemos de la ecuación (2.3) sección (2.3.1), que la desviación estándar de la pérdida es:

$$\sigma_1 = \sqrt{VAR[S_1]} = \sqrt{759.216.671} = 27.554$$

y para el Portafolio 2

$$\sigma_2 = \sqrt{VAR[S_2]} = \sqrt{21.984.398.075} = 148.271.$$

Por la ecuación (2.5) sección (2.3.2) tenemos que:

para Portafolio 1

$$-VaR(0,995) = [(2,58)(27.554) + 171.959] = 242.933$$

y para el Portafolio 2

$$-VaR(0,995) = [(2,58)(148.271) + 171.959] = 553.879,$$

donde $2,58$ es el valor del percentil al $99,5\%$ de la variable aleatoria $Z = \dfrac{S_i - 171.959}{\sigma_i} \sim N(0,1)$.

Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 3. Modelo Individual.

Portafolio i	Probabilidad de incumplimiento=Promedio	Pérdida esperada=E[S_i]	-VaR(0,995)	-VaR(0,995)%
Portafolio 1	0,08046	$ 171.959	$ 242.933	11,36%
Portafolio 2	0,08046	$ 171.959	$ 553.879	25,91%

Ahora, podemos calcular las pérdidas no esperadas, es decir, la pérdida por encima de la esperada, en que puede incurir el acreedor, por incumplimiento de sus deudores. Estas pérdidas indican al acreedor cuánto capital económico debe tener en reserva por la tenencia de un portafolio. Luego, por definición (2.3.3) la pérdida no esperada en Portafolio 1, es:

$$\mathrm{PNE} = 242.933 - 171.959 = 70.974$$

y para el Portafolio 2

$$\mathrm{PNE} = 553.879 - 171.959 = 381.920.$$

Concentración.

Como se verá a continuación, es pertinente hablar del tema de la concentración, pues a grandes rasgos, la concentración es una característica del portafolio, que se determina considerando el monto total del portafolio y el total de créditos, además, es una fuente importante de riesgo. Nótese del ejemplo anterior que el Portafolio 2 presenta una porción importante del monto total en un sólo crédito, esto generó en cierta medida un aumento considerable del valor en riesgo, por tanto, para el análisis y medición del riesgo resulta razonable contar con una medida de concentración.

El nivel de concentración de un portafolio está dado por la forma en que se reparte el monto total que se invierte: entre los acreditados, entre diferentes sectores de la economía o incluso entre diferentes regiones geográficas.

Un portafolio de créditos presenta un nivel alto de concentración si una porción importante del monto total se asigna a un grupo pequeño de acreditados o a un mismo sector de la economía. Por ejemplo, la concentración puede ocurrir en el sector textil, automotriz, servicios, etc; o como en el ejemplo (2.3.1), cuando se otorga una porción considerable del monto total a un solo acreditado.

Tradicionalmente, las instituciones financieras atienden el riesgo de concentración fijando un límite a la cantidad máxima que puede prestarse a un sólo deudor (límite individual), a lo largo de las diferentes dimensiones donde puede ocurrir concentración; esto es, por industria, región geográfica, productos, países, etc. En lo que sigue, se supone que la concentración ocurre en una sola dimensión, la probabilidad de incumplimiento ρ de cualquier crédito es la misma para todos los créditos y cada uno es independiente de los demás. Frecuentemente, el límite individual se expresa como una porción δ del capital económico K (capital que una institución financiera estima necesario para hacer frente a los riesgos del negocio bancario). Sin embargo, cuando se menciona el tema de la concentración del crédito, en general se refiere a la porción del crédito total que está concentrada en un sólo individuo o pequeño grupo de deudores. Así, cualesquiera que sean las virtudes de establecer límites como porcentaje del capital económico, ello no da mucha información sobre la concentración del crédito de un portafolio.

En particular, observamos que la concentración no siempre es evidente, si se establece como límite de crédito una porción del capital total de la institución financiera. Por ejemplo, si un banco estima un capital económico $K = \$10$ millones, por la tenencia de un portafolio de créditos de monto total $V = \$20$ millones, y los créditos están limitados a no exceder el 12% de K, entonces, un crédito por un monto de \$1.200.000 sería suficiente para que el portafolio presentará un nivel alto de concentración. Por esta razón, es necesario pensar en la concentración en términos de proporciones del valor total del portafolio de crédito, y cambiar el concepto de los límites. Así para propósitos de concentración crediticia, se fijará el límite individual como una porción θ del monto total V del portafolio.

Veamos que δ y θ están relacionadas linealmente a través de la razón de capitalización de la institución financiera (porción del monto total del portafolio que representa el capital económico), definida como $\psi = \dfrac{K}{V}$.

Sea $D_j m_j$ el monto de la pérdida por incumplimiento del $j-$ésimo crédito en el portafolio, donde $j = 1, \ldots, r$. Ahora,

$$D_j m_j \leq \delta K = \delta \frac{K}{V} V = \delta \psi V = \theta V.$$

Así, el límite sobre el tamaño de los créditos se puede representar mediante la restricción

$$D_j m_j \leq \theta V,$$

con $j = 1, \ldots, r$. Por ejemplo, supongamos un banco con un portafolio de créditos de monto total $V = \$100$ millones, capital $K = \$25$ millones y $\delta = 50\%$, luego, $\psi = 0,25$ y $\theta = \delta\psi = 12,5\%$. Nótese que $\delta = 50\%$ de K, representa un $\theta = 12,5\%$ de V.

Si la concentración ocurre por adjudicar una porción importante de los créditos a un número pequeño de deudores, entonces la máxima concentración que se tiene, respetando el límite, se da cuando se concentra todo el capital en un mínimo número de créditos n, donde n es el máximo valor tal que se cumple $D_j m_j \leq \theta V$, para $j = 1, \ldots, n$. Es decir,

$$D_j m_j = \begin{cases} \theta V, & \text{para } j = 1, \dots, n \\ 0, & \text{para } j = n+1, n+2, \dots, r \end{cases}$$

y $\sum_{j=1}^{n} D_j m_j = V$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} D_j m_j = n(\theta V),$$

es decir, $V = n\theta V$. Así, $n\theta = 1$.

La situación anterior podemos describirla considerando n ensayos de *Bernoulli* independientes con probabilidad de éxito (incumplimiento) $\rho = P(D_j = 1)$ para $j = 1, \dots, n$. Si definimos la variable aleatoria $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $N = \#$ de incumplimientos en los n ensayos, entonces $N \sim bin(n, \rho)$ y la probabilidad de que m de los n acreditados incumplan está dada por

$$P(N = m) = \binom{n}{m} \rho^m (1 - \rho)^{n-m}.$$

Sabemos que, para n grande, la distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal, donde: $\mu = n\rho$ y $\sigma = \sqrt{n\rho(1-\rho)}$.

Si definimos $Z = \dfrac{N - \mu}{\sigma}$, a un nivel de confianza α y usando la definición de VaR, resulta que el número de créditos incumplidos es:

$$-VaR_\alpha(N) = n\rho + n_\alpha(Z)\sqrt{n\rho(1-\rho)},$$

donde $n_\alpha(Z)$ es el cuantil de $Z \sim N(0,1)$, que corresponde al nivel de confianza α. Ahora, si $D_j m_j = \theta V$ para $j = 1, \dots, n$, entonces el valor en riesgo de la pérdida por riesgo de crédito S, de un portafolio que posee este patrón de concentración con nivel de confianza α es:

$$-VaR_\alpha(S) = -VaR_\alpha(N)\theta V.$$

Si se quiere que la pérdida con nivel de confianza α, no exceda el capital K, es decir, si queremos que se cumpla la condición de suficiencia de capital económico, entonces:

$$\left[n\rho + n_\alpha\sqrt{n\rho(1-\rho)}\right]\theta V \leq K,$$

como $n\theta = 1$, entonces,

$$\begin{aligned}
(n\theta)\rho + n_\alpha(Z)\sqrt{n\rho(1-\rho)}\theta &\leq \frac{K}{V} \\
\sqrt{n\rho(1-\rho)}\theta &\leq \left(\frac{K}{V}-\rho\right)\frac{1}{n_\alpha(Z)} \\
\rho(1-\rho)\theta &\leq (\psi-\rho)^2\frac{1}{n_\alpha^2(Z)},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\theta \leq \frac{(\psi-\rho)^2}{n_\alpha^2(Z)\rho(1-\rho)}. \tag{2.6}$$

donde $\psi = \dfrac{K}{V}$ es la razón de capitalización de la institución financiera.

Nótese que la desigualdad (2.6) relaciona un indicador de concentración θ, con la razón de capitalización ψ de una institución, el riesgo de incumplimiento de los créditos individuales a través de la probabilidad de imcumplimiento ρ, y el monto en riesgo a través de $n_\alpha(Z)$. El límite individual de los créditos θV se asocia con el mínimo número de deudores donde se concentra todo el crédito $n = \dfrac{1}{\theta}$, que es también un indicador de concentración, por lo que la cota obtenida también se puede tomar como un límite para la concentración del portafolio.

En los términos anteriores, la suficiencia de capital existe si se satisface la desigualdad siguiente:

$$\psi = \frac{K}{V} \geq \frac{-VaR_\alpha(S)}{V} = \rho + n_\alpha(Z)\sqrt{\rho(1-\rho)\theta}. \tag{2.7}$$

La desigualdad (2.7) representa la relación de suficiencia de capital en términos del riesgo de crédito del portafolio, que explícitamente incluye una medida θ de la concentración del portafolio.

El patrón de concentración descrito, en donde el portafolio de crédito contiene exactamente n créditos en el tope permitido, no es muy realista. Ahora, vamos a obtener un indicador de concentración, que tenga sentido en términos del monto en riesgo, y que al mismo tiempo sea más flexible en la conformación de un portafolio de crédito de una institución financiera.

De la expresión (2.4) resulta que para n grande el riesgo

$$S \sim N\left(\rho \sum_{j=1}^{n} m_j, \rho(1-\rho) \sum_{j=1}^{n} m_j^2\right).$$

Ahora, bajo un nivel de confianza α tenemos:

$$-VaR_\alpha(S) = \rho \sum_{j=1}^{n} m_j + n_\alpha(Z)\sqrt{\rho(1-\rho) \sum_{j=1}^{n} m_j^2}.$$

Como se quiere que $\dfrac{-VaR_\alpha(S)}{V} \leq \dfrac{K}{V} = \Psi$, obtenemos

$$\rho + n_\alpha(Z)\sqrt{\rho(1-\rho)\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)^2}} \leq \frac{K}{V} = \Psi$$

$$n_\alpha(Z)\sqrt{\rho(1-\rho)\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)^2}} \leq \Psi - \rho$$

$$n_\alpha^2(Z)\rho(1-\rho)\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)^2} \leq (\Psi - \rho)^2$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} m_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)^2} \leq \frac{(\Psi-\rho)^2}{n_\alpha^2(Z)\rho(1-\rho)}.$$

Nótese que esta cota superior es la misma que se obtuvo en el caso anterior, cuando se supuso que el portafolio consistía de n créditos del mismo monto θV. La diferencia es, que en lugar de usar el límite de crédito otorgable a un deudor como medida de concentración, ahora la concentración del crédito está medida por:

$$H(S) = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)^2}. \tag{2.8}$$

La medida dada por la ecuación (2.8) se conoce como el índice ***Herfindahl-Hirschman***. Este índice toma valores entre el recíproco del número de créditos (n) de un portafolio, y uno. Así, para un portafolio totalmente diversificado en donde todos los créditos tienen el mismo monto, $H(S) = \dfrac{1}{n}$, mientras que si $H(S) = 1$, necesariamente se tiene monto total del portafolio se encuentra totalmente concentrado en un sólo crédito.

Para el ejemplo (2.3.1) obtenemos:

Tabla 4.

Portafolio	H(S)
1	0,00224659
2	0,06505394

El portafolio 2 presenta mayor concentración que el portafolio 1, pues, $H(S_1) < H(S_2)$. Es decir, el portafolio 2 presenta mayor riesgo de perder el monto total, ya que sólo es necesario el incumplimiento del crédito de mayor monto.

Ante la posibilidad de concentración en el portafolio, es posible estimar las correlaciones entre los acreditados. Con éstas y por medio de una distribución normal se puede obtener una relación explícita, similar a la anterior, entre el valor en riesgo y la concentración del portafolio. Sin embargo, la estimación por esta vía presenta dos problemas:

Primero, el uso de la distribución normal supone que la distribución de pérdidas es simétrica, cuando empíricamente ha mostrado que existen créditos con montos superiores al promedio, que provocan eventuales pérdidas superiores a la esperada.

Segundo, la estimación de correlaciones entre acreditados requiere de mucha información detallada de los acreditados (*la información de los acreditados, normalmente no está disponible o no es confiable*).

De esta manera, la teoría de riesgo individual es una herramienta útil para modelar el riesgo de crédito, pero, esto se consigue a costa de varios supuestos; mientras que existen otras herramientas de la teoría de riesgo que permiten atacar el problema de forma alternativa. En particular quedan por responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo obtener una distribución de pérdidas con créditos no independientes?

2. ¿Cómo estimar una distribución de pérdidas consistente con la observación en la realidad?

En la siguiente sección se expondrá un modelo que permite considerar, más eficazmente, las correlaciones entre los créditos de un portafolio.

2.4 Modelo Colectivo.

Una nueva fase en el desarrollo de la teoría de riesgo en seguros se dio con los estudios de *Filip Lundberg* (1909,1919) que dieron origen a lo que se conoce como teoría de riesgo colectivo. Contrario a la teoría de riesgo individual, donde se consideran los montos de todas las pólizas de seguros del portafolio para un periodo dado, la teoria de riesgo colectivo considera sólo aquellos montos de las pólizas de seguros en estado de reclamación, es decir, el número de reclamaciones en el modelo colectivo es una variable aleatoria. A esta teoría se le llama colectiva, porque su principal objetivo es estudiar la colectividad total y no a los individuos que componen esta colectividad, en otras palabras, lo que interesa es el monto total de las reclamaciones que produce la colectividad y no el monto de reclamación de cada individuo.

La teoría de riesgo colectivo, a grandes rasgos consta de una serie de modelos que involucran dos procesos aleatorios: el *proceso del número de reclamaciones* y el *proceso del monto acumulado por reclamaciones.* Este tipo de modelos se llaman ***procesos compuestos***.

A continuación se da la estructura de un modelo colectivo de riesgo en seguros, para propiciar una mejor comprensión del tópico y luego se expone una serie de modelos colectivos, empezando por el Proceso Poisson Compuesto. Posteriormente, introducimos una generalización del mismo, el Proceso Poisson Mixto, llegando al Proceso Pólya Compuesto y finalmente se procederá a la aplicación de los modelos mencionados anteriormente a portafolios de créditos.

Supongamos que se tiene un portafolio con un número $n = 0, 1, \dots,$ de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo $[0, T]$. Sea $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones ocurridas en $[0, T]$, y sean $Y_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, con $j = 1, \dots, N$ las variables aleatorias que representan los montos por reclamación de las pólizas.

Se considera que $Y_1, \dots, Y_N$ son independientes entre sí y comparten la misma distribución de probabilidad. Asimismo, el número de reclamaciones N y los montos de éstas, $Y_1, \dots, Y_N$ son variables aleatorias mutuamente independientes.

Sea $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la variable aleatoria que representa el monto acumulado por reclamación durante el periodo de vigencia $[0, T]$ de las pólizas, es decir,

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j. \tag{2.9}$$

La variable S se denomina riesgo, y la ecuación (2.9) representa el *modelo colectivo* para un portafolio con un número $n = 0, 1, \ldots,$ de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo $[0, T]$. A continuación se presentarán algunas características probabilísticas fundamentales de S.

2.4.1 Proposición. *La función de distribución del riesgo S en el modelo colectivo es*

$$F_S(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n),$$

donde G, representa la función de distribución común de los montos por reclamación de las pólizas.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $A_n = \{N = n\}$ para cada $n = 0, 1, \ldots,$ sabemos que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$, donde $A_j \cap A_k = \emptyset$, siempre que $j \neq k$.

$$\{S \leq x\} = \Omega \cap \{S \leq x\} = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \cap \{S \leq x\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\{N = n\} \cap \{S \leq x\} \right),$$

donde $(A_j \cap \{S \leq x\}) \cap (A_k \cap \{S \leq x\}) = \emptyset$, siempre que $j \neq k$.

$$\begin{aligned}
F_S(x) &= P(S \leq x) = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\{N = n\} \cap \{S \leq x\}) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n, S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x) P(N = n).
\end{aligned}$$

Pues para n fija, la función de probabilidad de $Y_1 + \cdots + Y_n$ está dada por la $n-$ésima convolución de G.

■

2.4.2 Proposición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ *el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número* $n = 0, 1, \ldots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0, T]$*, entonces se cumple:*

1. $E[S] = E[N]E[Y]$.
2. $E\left[S^2\right] = E[N]E\left[Y^2\right] + E[N(N-1)]E^2[Y]$.
3. $VAR[S] = VAR[N]E^2[Y] + VAR[Y]E[N]$.
4. $M_S(t) = M_N\left(\ln(M_Y(t))\right)$.

DEMOSTRACIÓN:

1. Como los montos por reclamación son variables aleatorias independientes y están idénticamente distribuidas, para un k fijo tenemos:

$$E\left[\sum_{j=1}^{k} Y_j\right] = kE[Y].$$

Además, como el número de reclamaciones N y los montos de éstas son variables aleatorias mutuamente independientes, tenemos:

$$\begin{aligned} E[S] &= E[E[S \mid N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S \mid N = n]P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{N} Y_j \mid N = n\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j\right] P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nE[Y]P(N = n) = E[Y]\sum_{n=0}^{\infty} nP(N = n) = E[Y]E[N]. \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
E\left[S^2\right] &= E\left[E\left[S^2 \mid N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[S^2 \mid N = n\right] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{N} Y_j\right)^2 \mid N = n\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)^2\right] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j^2 + \sum_{r,t=1,r\neq t}^{n} Y_r Y_t\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(E\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j^2\right] + E\left[\sum_{r,t=1,r\neq t}^{n} Y_r Y_t\right]\right) P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(nE\left[Y^2\right] + n(n-1)E^2[Y]\right) P(N = n) = E\left[Y^2\right] E[N] + E^2[Y]E[N(N-1)].
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
VAR[S] &= E\left[S^2\right] - E^2[S] \\
&= \left(E[N]E\left[Y^2\right] + E[N(N-1)]E^2[Y]\right) - (E[N]E[Y])^2 \\
&= E[N]\left(E\left[Y^2\right] - E^2[Y]\right) + E^2[Y]\left(E\left[N^2\right] - E^2[N]\right) \\
&= E[N]VAR[Y] + E^2[Y]VAR[N].
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] = E\left[E\left[e^{tS} \mid N\right]\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{t(Y_1+\cdots+Y_N)} \mid N = n\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[e^{t(Y_1+\cdots+Y_n)}\right] P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E^n\left[e^{tY}\right] P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} (M_Y(t))^n P(N = n) = E\left[(M_Y(t))^N\right] \\
&= E\left[e^{\ln((M_Y(t))^N)}\right] = E\left[e^{N\ln(M_Y(t))}\right] = M_N\left(\ln(M_Y(t))\right).
\end{aligned}
$$

■

Nótese al igual que en el modelo individual de riesgo, la función de distribución del riesgo S en el modelo colectivo de riesgo involucra la convolución de la función de distribución de los montos por reclamaciones, la cual no siempre se puede obtener de manera sencilla. Sin embargo, existen fórmulas recursivas que facilitan su cálculo y son fáciles de implementar computacionalmente. A continuación, se expone la fórmula de *Panjer*.

2.4.1 Fórmula de Panjer.

Bajo las hipótesis del modelo colectivo de riesgo $Y_1, \dots, Y_N$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, además, el número de reclamaciones N y los montos de éstas $Y_1, \dots, Y_N$ son mutuamente independientes. La fórmula de *Panjer* proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la distribución de probabilidad del riesgo en el modelo colectivo, y es válida cuando la distribución del número de reclamaciones N y los montos cumplen con ciertas condiciones.

2.4.3 Proposición. *Sea N una variable aleatoria discreta a valores enteros no-negativos y $\rho_k = P(N = k)$, para todo $k = 0, 1, \dots$ su función de probabilidad, entonces*

$$\rho_k = (a + \frac{b}{k})\rho_{k-1}$$

se cumple cuando:

1. $N \sim bin(n, \rho)$ *con* $a = -\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ *y* $b = \frac{(n+1)\rho}{(1-\rho)}$.
2. $N \sim Poisson(\lambda)$ *con* $a = 0$ *y* $b = \lambda$.
3. $N \sim binneg(\alpha, \rho)$ *con* $a = 1 - \rho$ *y* $b = (\alpha - 1)(1 - \rho)$.

Demostración:

1. Tenemos que $N \sim bin(n, \rho)$, es decir,

$$\rho_k = P(N = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \rho^k (1-\rho)^{n-k}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n$. Sea, $a = -\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$ y $b = \frac{(n+1)\rho}{(1-\rho)}$.

Para $k = 0$, $\rho_0 = P(N = 0) = (1-\rho)^n$.

Para $k = 1$,$\rho_1 = \left[-\frac{\rho}{(1-\rho)} + \frac{(n+1)\rho}{(1-\rho)}\right](1-\rho)^n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \rho^1 (1-\rho)^{n-1}$.

Para $k > 1$,

$$\begin{aligned} \rho_k &= \left[-\frac{\rho}{(1-\rho)} + \frac{\frac{(n+1)\rho}{(1-\rho)}}{\frac{k}{1}}\right]\rho_{k-1} = \left[\frac{-k\rho + n\rho + \rho}{k(1-\rho)}\right]\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}\rho^{k-1}(1-\rho)^{n-k+1} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\rho^k (1-\rho)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Tenemos que $N \sim \mathit{Poisson}(\lambda)$, es decir, $\rho_k = P(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

   para $k = 0, 1, \ldots$. Sea, $a = 0$ y $b = \lambda$.

   Para $k = 0$, $\rho_0 = P(N = 0) = e^{-\lambda}$.
   Para $k = 1$, $\rho_1 = \left(0 + \frac{\lambda}{1}\right)e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$.

   Para $k > 1$, $\rho_k = \left(0 + \frac{\lambda}{k}\right)\rho_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{k}\right)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \rho_k$.

3. Tenemos que $N \sim \mathit{binneg}(\alpha, \rho)$, es decir,

$$\rho_k = P(N = k) = \begin{pmatrix} \alpha + k - 1 \\ k \end{pmatrix}\rho^\alpha (1-\rho)^k$$

   para $k = 0, 1, \ldots$. Sea, $a = 1 - \rho$ y $b = (\alpha - 1)(1 - \rho)$.

Para $k = 0$, $\rho_0 = P(N = 0) = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rho^\alpha (1-\rho)^0 = \rho^\alpha$.

Para $k = 1$ $\rho_1 = \left[(1-\rho) + \dfrac{(\alpha-1)(1-\rho)}{1}\right]\rho^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rho^\alpha (1-\rho)^1$.

Para $k > 1$

$$\begin{aligned} \rho_k &= \left[(1-\rho) + \frac{(\alpha-1)(1-\rho)}{k}\right]\rho_{k-1} = \frac{(1-\rho)^k\rho^\alpha}{k!}\left[\frac{(\alpha+k-2)!(\alpha+k-1)}{(\alpha-1)!}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + k - 1 \\ k \end{pmatrix} \rho^\alpha (1-\rho)^k. \end{aligned}$$

■

Nota.

Otras distribuciones conocidas también satisfacen la condición de recurrencia anterior, sin embargo, a efectos de este trabajo nos limitaremos a considerar solamente los tres casos anteriores.

Ahora, supongamos que el monto Y_j de las reclamaciones son tales que

$$P(Y_j \in \mathbb{N}) = 1.$$

En los cálculos que siguen usaremos la siguiente notación:

$f_r = P(Y = r)$, $g_r = P(S = r)$ y $f_r^{*k} = P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = r)$.

En particular $f_r^{*(k+1)} = \left(f^{*k} * f\right)_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{r-1} f_i^{*k} f_{r-i}$,

$g_r = P(S = r) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(S = r \mid N = k)P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_r^{*k}\rho_k$, para $r \geq 1$,

$g_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = \rho_0$.

2.4.1 Lema. *Sean* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ *variables aleatorias discretas a valores enteros no-negativos,* $f_r = P(Y = r)$*, su función de probabilidad común y* $f_r^{*k} = P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k = r)$ *la* $k-$*ésima convolución de* f_r*, para todo* $r = 0, 1, \ldots$. *Sea* N *una variable aleatoria discreta a valores enteros no-negativos cuya función de probabilidad* ρ_k *satisface la condición de recurrencia. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $E\left[Y_1 \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right] = \frac{r}{k}$, *para* $k \geq 1$.

2. $\rho_k f_r^{*k} = \rho_{k-1} \sum_{i=1}^{r-1} \left(a + \frac{bi}{r}\right) f_{r-i}^{*(k-1)} f_i$, *para* $k \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN:

1.

$$\begin{aligned}
E\left[Y_1 \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right] &= \sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{\infty} tkP\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) \\
&= \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{\infty} t\left[P\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) + \cdots + P\left(Y_k = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right)\right] \\
&= \frac{1}{k}\left[\sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) + \cdots + \sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_k = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right)\right] \\
&= \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{\infty} tP\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right).
\end{aligned}$$

Nótese que la serie $\sum_{t=1}^{\infty} t\left[\sum_{j=1}^{k} P\left(Y_j = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right)\right]$, se pudo separar en la suma de series

$$\sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) + \cdots + \sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_k = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right),$$

pues, las series $\sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_1 = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right), \ldots, \sum_{t=1}^{\infty} tP\left(Y_k = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right)$ son convergentes.

Por otro lado, si $r \neq t$, entonces, $P\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t, \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = 0$,

así, $P\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = 0$.

Si $r = t$, entonces, $P\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t, \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right)$,

así, $P\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = 1$.

Finalmente, $\frac{1}{k}\sum_{t=1}^{\infty} tP\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j = t \mid \sum_{i=1}^{k} Y_i = r\right) = \frac{1}{k}(r)1 = \frac{r}{k}$.

2. Para $k \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\rho_{k-1}\sum_{i=1}^{r-1}\left(a + \frac{bi}{r}\right) f_{r-i}^{*(k-1)} f_i &= \rho_{k-1}\sum_{i=1}^{r}\left(a + \frac{bi}{r}\right) P(Y_2 + \cdots + Y_k = r - i)P(Y_1 = i) \\
&= \rho_{k-1}\sum_{i=1}^{r}\left(a + \frac{bi}{r}\right) P(Y_1 = i, Y_2 + \cdots + Y_k = r - i).
\end{aligned}
$$

Sabemos que, $(Y_1 + \cdots + Y_k = r) = \bigcup_{i=1}^{r-1} [(Y_1 = i) \cap (Y_2 + \cdots + Y_k = r - i)]$,

además, $(Y_1 = 1) \cap (Y_2 + \cdots + Y_k = r - 1) = (Y_1 = 1) \cap (Y_1 + \cdots + Y_k = r)$, entonces

$P(Y_1 = i, Y_2 + \cdots + Y_k = r - i) = P(Y_1 = i, Y_1 + \cdots + Y_k = r) = P\left(Y_1 = i, \sum_{j=1}^{k} Y_j = r\right)$.

$$
\begin{aligned}
&\rho_{k-1}\sum_{i=1}^{r}\left(a+\frac{bi}{r}\right)P(Y_1=i,Y_2+\cdots+Y_k=r-i)=\\
=\;&\rho_{k-1}\sum_{i=1}^{r}\left(a+\frac{bi}{r}\right)P\left(Y_1=i\mid\sum_{j=1}^{k}Y_j=r\right)P\left(\sum_{j=1}^{k}Y_j=r\right)\\
=\;&\rho_{k-1}E\left[\left(a+\frac{bY_1}{r}\right)\mid\sum_{j=1}^{k}Y_j=r\right]f_r^{*k}\\
=\;&\rho_{k-1}\left(a+\frac{b}{r}E\left[Y_1\mid\sum_{j=1}^{k}Y_j=r\right]\right)f_r^{*k}=\rho_{k-1}\left(a+\frac{b}{k}\right)f_r^{*k}=\rho_k f_r^{*k}.
\end{aligned}
$$

■

A continuación se da a conocer una versión de la fórmula de recursión de *Panjer*, ampliamente utilizada en el ámbito de la teoría de riesgo en seguros.

2.4.1 Teorema. *(Fórmula de recursión de Panjer). Supongamos que se tiene un portafolio de seguros con un número* $n=0,1,\ldots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0,T]$. *Además, sea* N *la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones ocurridas en* $[0,T]$ *y tal que la función probabilidad* ρ *de* N, *satisface la condición de recurrencia. Sean* Y_j, *con* $j=1,\ldots,N$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, que representan los montos de estas reclamaciones.*

Sea S *la variable aleatoria que representa el monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas durante el periodo de vigencia* $[0,T]$ *de las pólizas, es decir,* $S=\sum_{j=1}^{N}Y_j$, *entonces, la probabilidad* $g_r=P(S=r)$ *está dada por*

$$
g_r=P(S=r)=\sum_{i=1}^{r}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i g_{r-i},\ \textit{para } r\geq 1 \textit{ y donde } f_i=P(Y=i),
$$

$$
g_0=P(S=0)=P(N=0)=\rho_0.
$$

Demostración:

Para $r \geq 1$

$$
\begin{aligned}
g_r &= P(S=r) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S=r \mid N=k)P(N=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_r^{*k}\rho_k = f_r\rho_1 + \sum_{k=2}^{\infty} f_r^{*k}\rho_k \\
&= (a+b)f_r\rho_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)\rho_{k-1}f_{r-i}^{*(k-1)}f_i \\
&= (a+b)f_r\rho_0 + \sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{k-1}f_{r-i}^{*(k-1)} \\
&= (a+b)f_r\rho_0 + \sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i g_{r-i} \\
&= \left(a+\frac{br}{r}\right)f_r g_0 + \sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i g_{r-i} = \sum_{i=1}^{r}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i g_{r-i}.
\end{aligned}
$$

Nótese que la serie $\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)\rho_{k-1}f_{r-i}^{*(k-1)}f_i$, se pudo separar en la suma de series

$$
\sum_{i=1}^{r-1}\left(a+\frac{bi}{r}\right)f_i\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{k-1}f_{r-i}^{*(k-1)},
$$

pues, las series $\left(a+\frac{b}{r}\right)f_1\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{k-1}f_{r-i}^{*(k-1)}, \ldots, \left(a+\frac{b(r-1)}{r}\right)f_{r-1}\sum_{k=2}^{\infty}\rho_{k-1}f_1^{*(k-1)}$ son convergentes.

■

2.4.2 Modelo Poisson Compuesto.

Bajo las hipótesis y condiciones de las secciones anteriores, si el número de reclamaciones N en el modelo colectivo de riesgo tiene una distribución *Poisson* de parámetro λ, se dice que el riesgo S tiene una distribución *Poisson* compuesta, y se tienen los siguientes resultados.

2.4.4 Proposición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ *el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número* $n = 0, 1, \ldots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0, T]$*. Si el riesgo* S *tiene una distribución Poisson compuesta, entonces*

1. $E[S] = \lambda E[Y]$.

2. $VAR[S] = \lambda E[Y^2]$.

3. $M_S(t) = e^{\lambda(M_Y(t)-1)}$.

DEMOSTRACIÓN:

Por simplicidad utilizaremos la notación dada en la definición (1.8.2) para los momentos de una variable aleatoria. Es decir, para un entero $k > 0$ denotaremos $E\left[Y^k\right] = \mu_k$, el $k-$ésimo momento de Y.

De la proposición (2.4.2) tenemos,

1. Como $E[N] = \lambda$ y $E[Y] = \mu$, entonces, $E[S] = E[N]E[Y] = \lambda\mu$.

2. Como $VAR[N] = \lambda$ y $VAR[Y] = E\left[Y^2\right] - E^2[Y] = \mu_2 - \mu^2$, entonces,

$$\begin{aligned} VAR[S] &= VAR[N]E^2[Y] + VAR[Y]E[N] \\ &= \lambda\mu^2 + \left(\mu_2 - \mu^2\right)\lambda = \lambda\mu_2. \end{aligned}$$

3. Del ejemplo (1.9.1),

$$M_S(t) = M_N(\ln(M_Y(t))) = e^{\lambda\left(e^{\ln(M_Y(t))}-1\right)} = e^{\lambda(M_Y(t)-1)}.$$

■

Por otro lado, aplicando el teorema (2.4.1) a la distribución *Poisson* compuesta con montos empíricos del portafolio de seguros, se tiene que la probabilidad de sufrir una pérdida de tamaño r es:

$$g_r = P(S = r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda i}{r} P(Y = i) g_{r-i}, \text{ para } r \geq 1,$$

$$g_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = e^{-\lambda}.$$

2.4.3 Modelo Poisson Compuesto Mixto.

Bajo las hipótesis y condiciones de las secciones anteriores, si el número de reclamaciones N en el modelo colectivo de riesgo tiene una distribución *Poisson* cuyo parámetro Λ es una variable aleatoria, se dice que el riesgo S tiene una distribución *Poisson* compuesta mixta. Se cumple para $n = 0, 1, \ldots,$

$$P(N = n \mid \Lambda = \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}.$$

2.4.1 Definición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ *el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número* $n = 0, 1, \ldots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0, T]$*. Si el riesgo* S *tiene una distribución Poisson compuesta mixta con parámetro* Λ *y* Λ *es continua con función de densidad* f_Λ*. Definimos:*

$$P(N = n) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} f_\Lambda(\lambda)d\lambda.$$

2.4.5 Proposición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ *el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número* $n = 0, 1, \ldots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0, T]$*. Si el riesgo* S *tiene una distribución Poisson compuesta mixta y* f_Λ *es la función de densidad de* Λ*, entonces*

1. $E[S] = E[\Lambda]E[Y]$.

2. $E\left[S^2\right] = E[\Lambda]E\left[Y^2\right] + E\left[\Lambda^2\right]E^2[Y]$.

3. $M_S(t) = M_\Lambda(M_Y(t) - 1)$.

4. $VAR[S] = VAR[\Lambda]E^2[Y] + E[\Lambda]E\left[Y^2\right]$.

Demostración:

Aplicaremos los resultados de la proposición (2.4.2).

1. Sabemos que $E[S] = E[N]E[Y]$.

   Ahora,

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[n\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}f_\Lambda(\lambda)d\lambda\right] \\ &= \int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty}\lambda f_\Lambda(\lambda)d\lambda = E[\Lambda]. \end{aligned}$$

   Luego, $E[S] = E[\Lambda]E[Y]$.

   Nótese que $\left\{n\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}f_\Lambda(\lambda)\right\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, luego, por el *teorema de la convergencia monótona* se pudo intercambiar la serie por la integral.

2. Sabemos que $E\left[S^2\right] = E[N]E\left[Y^2\right] + E\left[N^2\right]E^2[Y] - E[N]E^2[Y]$.

   Calculemos la función generadora de momentos de N,

$$\begin{aligned} M_N(t) &= E\left[e^{tN}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}P(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}e^{tn}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty}e^{-\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{tn}\lambda^n}{n!}\right)f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty}e^{-\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!}\right)f_\Lambda(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty}e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^{\infty}e^{\lambda(e^t-1)}f_\Lambda(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Nótese que $\left\{\frac{e^{tn}e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}f_\Lambda(\lambda)\right\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, luego, por el *teorema de la convergencia monótona* se pudo intercambiar la serie por la integral.

Ahora, como $M_N^{(1)}(t) = e^t \int_0^\infty \lambda e^{\lambda(e^t-1)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda$, resulta

$M_N^{(1)}(0) = E[N] = \int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda)d\lambda = E[\Lambda]$.

$M_N^{(2)}(t) = e^t \int_0^\infty \lambda e^{\lambda(e^t-1)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda + e^{2t}\int_0^\infty \lambda^2 e^{\lambda(e^t-1)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda$, así

$M_N^{(2)}(0) = E\left[N^2\right] = \int_0^\infty \lambda f_\Lambda(\lambda)d\lambda + \int_0^\infty \lambda^2 f_\Lambda(\lambda)d\lambda = E[\Lambda] + E\left[\Lambda^2\right]$, luego,

$$E\left[S^2\right] = E[\Lambda]E\left[Y^2\right] + \left(E[\Lambda] + E\left[\Lambda^2\right]\right)E^2[Y] - E[\Lambda]E^2[Y] = E[\Lambda]E\left[Y^2\right] + E\left[\Lambda^2\right]E^2[Y].$$

Nótese que para todo $t \in (0,\infty)$ $\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{\lambda(e^t-1)}f_\Lambda(\lambda)\right]$ y $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[e^{\lambda(e^t-1)}f_\Lambda(\lambda)\right]$ son integrables como funciones de λ, luego, por el *teorema de derivación bajo el signo integral* se pudo intercambiar la derivada por la integral.

3.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_N(\ln(M_Y(t))) = \int_0^\infty e^{\lambda(e^{\ln(M_Y(t))}-1)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{\lambda(M_Y(t)-1)} f_\Lambda(\lambda)d\lambda = E\left[e^{(M_Y(t)-1)\Lambda}\right] = M_\Lambda(M_Y(t)-1). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} VAR[S] &= VAR[N]E^2[Y] + VAR[Y]E[N] \\ &= (E[\Lambda] + VAR[\Lambda])E^2[Y] + E[\Lambda]E\left[Y^2\right] - E[\Lambda]E^2[Y] \\ &= VAR[\Lambda]E^2[Y] + E[\Lambda]E\left[Y^2\right]. \end{aligned}$$

■

2.4.1 Corolario. *Si el riesgo* S *tiene una distribución Poisson compuesta mixta de parámetro* Λ*, entonces* $VAR[\Lambda] = VAR[N] - E[N]$.

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos de la proposición (2.4.5) que:

$$E[N] = E[\Lambda] \text{ y } E[N^2] = E[\Lambda] + E[\Lambda^2], \text{ luego,}$$

$$\begin{aligned} VAR[\Lambda] &= E[\Lambda^2] - E^2[\Lambda] \\ &= (E[N^2] - E[N]) - E^2[N] = VAR[N] - E[N]. \end{aligned}$$

■

2.4.1 Ejemplo. *Supongamos que* Λ *tiene distribución Gamma de parámetros* $k, \beta > 0$. *Entonces*

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} f_\Lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)\left(\frac{\beta^k\lambda^{k-1}e^{-\beta\lambda}}{\Gamma(k)}\right) d\lambda \\ &= \frac{\beta^k}{\Gamma(k)n!}\int_0^\infty \left(e^{-\lambda}e^{-\beta\lambda}\right)\left(\lambda^n\lambda^{k-1}\right) d\lambda = \frac{\beta^k}{\Gamma(k)n!}\int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+1)}\lambda^{n+k-1} d\lambda. \end{aligned}$$

Veamos que $\int_0^\infty \lambda^b e^{-a\lambda} d\lambda = \frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}}$*, donde* $a > 0$.

Sea $t = a\lambda \Longleftrightarrow \frac{1}{a} dt = d\lambda$*, luego* $\lambda^b = \frac{t^b}{a^b}$,

además, si $\lambda = 0 \Longrightarrow t = 0$ *y si* $\lambda \longrightarrow \infty \Longrightarrow t \longrightarrow \infty$.

Ahora,

$$\int_0^\infty \lambda^b e^{-a\lambda} d\lambda = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{t^b}{a^b} e^{-t} dt = \frac{1}{a^{b+1}}\int_0^\infty t^b e^{-t} dt = \frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}}.$$

Tenemos $\int_0^\infty \lambda^{n+k-1} e^{-\lambda(\beta+1)} d\lambda$, *si* $b = n+k-1$ *y* $a = \beta+1$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\frac{\beta^k}{\Gamma(k)n!}\int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+1)}\lambda^{n+k-1} d\lambda &= \frac{\beta^k}{\Gamma(k)n!}\left(\frac{1}{(\beta+1)^{n+k-1+1}}\right)\Gamma(n+k-1+1) \\
&= \frac{\beta^k}{\Gamma(k)n!}\frac{\Gamma(k+n)}{(\beta+1)^{k+n}} = \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)n!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^k\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n \\
&= \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots k\Gamma(k)}{\Gamma(k)n!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^k\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n \\
&= \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^k\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n = \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n \end{pmatrix}\rho^k(1-\rho)^n,
\end{aligned}$$

es decir, N *tiene distribución binomial negativa de parámetros* k *y* $\rho = \frac{\beta}{\beta+1}$.

2.4.4 Modelo Binomial Negativo Compuesto o Proceso Pólya Compuesto.

Bajo las hipótesis y condiciones de las secciones anteriores, si el número de reclamaciones N en el modelo colectivo de riesgo tiene una distribución binomial negativa de parámetros k, ρ, se dice que el riesgo S tiene una distribución binomial negativa compuesta o *Pólya* compuesta.

2.4.6 Proposición. *Sea* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ *el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número* $n = 0, 1, \dots,$ *de pólizas de seguros válidas por un periodo de tiempo* $[0, T]$. *Si el riesgo* S *tiene una distribución Pólya compuesta, entonces*

1. $E[S] = k\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)E[Y]$.

2. $VAR[S] = k\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(\frac{1}{\rho}\right)E^2[Y] + k\left(\frac{1}{\rho} - 1\right)\left(E\left[Y^2\right] - E^2[Y]\right)$.

3. $M_S(t) = \left(\dfrac{\rho}{1-(1-\rho)M_Y(t)}\right)^k.$

DEMOSTRACIÓN:

Utilizaremos los resultados obtenidos en el ejemplo (1.8.3) y la proposición (2.4.2).

1. Sabemos que $E[N] = \dfrac{k(1-\rho)}{\rho}$

$$E[S] = E[N]E[Y] = \frac{k(1-\rho)}{\rho}E[Y] = k\left(\frac{1}{\rho}-1\right)E[Y].$$

2. Sabemos que $VAR[N] = \dfrac{k(1-\rho)}{\rho^2}$ y $E\left[N^2\right] = \dfrac{k-k\rho+k^2-2k^2\rho+k^2\rho^2}{\rho^2}$. Asimismo, de la proposición (2.4.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
VAR[S] &= VAR[N]E^2[Y] + VAR[Y]E[N] \\
&= \frac{k(1-\rho)}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)E^2[Y] + \left(E\left[Y^2\right]-E^2[Y]\right)\frac{k(1-\rho)}{\rho} \\
&= k\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left(\frac{1}{\rho}\right)E^2[Y] + k\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\left(E\left[Y^2\right]-E^2[Y]\right).
\end{aligned}$$

3. Sabemos que $M_N(t) = \left(\dfrac{\rho}{1-(1-\rho)e^t}\right)^k$

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= M_N\left(\ln\left(M_Y(t)\right)\right) = \left(\frac{\rho}{1-(1-\rho)e^{\ln(M_Y(t))}}\right)^k \\
&= \left(\frac{\rho}{1-(1-\rho)M_Y(t)}\right)^k.
\end{aligned}$$

■

Como en el modelo *Poisson* compuesto, luego de aplicar los resultados del teorema (2.4.1) a la distribución *Pólya* compuesta con montos empíricos del portafolio de seguros, tenemos que la probabilidad de sufrir una pérdida de tamaño r es

$$g_r = P(S = r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(1-\rho)}{r}[r + (k-1)i]P(Y = i)g_{r-i}, \text{ para } r \geq 1,$$

$$g_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = \rho^k.$$

2.5 Modelo Colectivo (Créditos).

2.5.1 Modelo Poisson Compuesto.

Para que un proceso *Poisson* compuesto esté aplicado correctamente ([5], [7]), es necesario que se verifiquen las siguientes condiciones:

1. La probabilidad de que un incumplimiento suceda en un momento específico es igual a cero.

2. La probabilidad de que dos o más incumplimientos ocurran al mismo tiempo es cero.

3. El número de incumplimientos en cualesquiera dos lapsos de tiempo disjuntos son independientes uno del otro.

Puesto que es imposible pronosticar el momento exacto de un incumplimiento, la primera condición se verifica en cualquier portafolio de créditos.

Sin embargo, en la mayoría de los portafolios de créditos la validez de la tercera condición no siempre es evidente. Por ejemplo, si un portafolio de créditos tiene un alto número de incumplimientos en un determinado trimestre, esto puede deberse a que el país esté pasando por una recesión económica, por lo tanto, es de esperarse que en el próximo trimestre se presente también un alto número de incumplimientos. La presencia de factores de riesgo, como el del ejemplo anterior, que inciden sobre los créditos provocan que éstos no sean independientes unos de otros.

A continuación, se analizará la manera de solucionar el problema que presenta la distribución *Poisson* al no verificarse la tercera condición para modelar el número de incumplimientos de un portafolio de créditos.

Estadísticas publicadas por *Standard & Poor's* [7], (1997) sobre los créditos muestran que hay una gran variabilidad en el número de incumplimientos que suceden año tras año. Sabemos que λ en el modelo *Poisson* compuesto representa el número esperado de incumplimientos en el portafolio de créditos durante el periodo de tiempo $[0, T]$, es decir, λ es una *tasa* de incumplimiento fija o proporción de créditos que dejan de pagar en un periodo de tiempo dado, respecto de los que estaban vigentes en el periodo anterior; además la desviación estándar del número de incumplimientos sucedidos año tras año debería ser $\sqrt{\lambda}$. Sin embargo, la desviación estándar observada suele ser mucho mayor. Esto se debe a que las probabilidades de incumplimiento no son constantes periodo a periodo, pues están sujetas a factores de riesgo como la situación económica, geográfica, política, etcétera. Así, resulta más realista suponer que las probabilidades de incumplimiento no son constantes y emplear probabilidades variables sujetas a diversos factores de riesgo.

Comenzamos analizando los cambios en el modelo *Poisson* compuesto cuando suponemos que las probabilidades de incumplimiento y, por tanto la tasa de incumplimiento, son variables aleatorias sujetas a un sólo factor de riesgo.

2.5.2 Volatilidad de las Probabilidades de Incumplimiento.

Existen factores que inciden sobre las probabilidades de incumplimiento, pero es muy difícil determinar una relación que indique cómo el incumplimiento de un crédito predispone el incumplimiento de otro. Por ejemplo, bajo una recesión económica es probable que las probabilidades de incumplimiento aumenten, sin embargo, el hecho de que un acreditado incumpla no implica que otro también lo hará. Por tal razón, en lugar de estimar las correlaciones entre todos los créditos, suponemos que las probabilidades de incumplimiento son variables aleatorias sujetas a distintos factores de riesgo. Así, cada crédito A del portafolio tiene una probabilidad de incumplimiento, representada por la variable aleatoria ρ_A (que toma valores distintos en cada periodo), un valor esperado $\lambda_A = E[\rho_A]$ y una desviación estándar $\sigma_A = \sqrt{VAR[\rho_A]}$ que mide el grado de volatilidad de la probabilidad de incumplimiento.

Ahora, bajo el supuesto de que sólo un factor de riesgo afecta las probabilidades de incumplimiento, las variaciones de éstas se describen mediante un factor multiplicativo Q de acuerdo con la siguiente expresión

$$\rho_A = \lambda_A Q. \tag{2.10}$$

Este factor Q describe los cambios de las probabilidades de incumplimiento provocados por el factor de riesgo al que están sujetas. Como desconocemos el estado futuro del factor de riesgo, Q es una variable aleatoria denominada *variable mixta*.

Definimos la relación entre las probabilidades de incumplimiento y la variable mixta de la siguiente manera:

$$\rho_A = \lambda_A,$$

si $Q = 1$, es decir, las probabilidades de incumplimiento son las esperadas.

$$\rho_A > \lambda_A,$$

si $Q > 1$, es decir, las probabilidades de incumplimiento son mayores que las esperadas.

$$\rho_A < \lambda_A,$$

si $0 < Q < 1$, es decir, las probabilidades de incumplimiento son menores que las esperadas. Entonces, con la finalidad de que el valor esperado de las probabilidades de incumplimiento sea ρ_A, resulta $E[Q] = 1$, pues

$$E[\rho_A] = E[\lambda_A Q] = \lambda_A E[Q] = \lambda_A \Longleftrightarrow E[Q] = 1.$$

Por otro lado,

$$E\left[\rho_A^2\right] = E\left[\lambda_A^2 Q^2\right] = \lambda_A^2 E\left[Q^2\right] \quad \text{y} \quad E^2[\rho_A] = \lambda_A^2.$$

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= VAR[\rho_A] = E\left[\rho_A^2\right] - E^2[\rho_A] \\ &= \lambda_A^2 E\left[Q^2\right] - \lambda_A^2 = \lambda_A^2\left(E\left[Q^2\right] - 1\right) \\ &= \lambda_A^2\left(E\left[Q^2\right] - E^2[Q]\right) = \lambda_A^2 VAR[Q].\end{aligned}$$

Ahora, nos resta determinar la varianza de la variable mixta Q y su efecto sobre el modelo *Poisson* compuesto.

2.5.3 Volatilidad de la Tasa de Incumplimiento.

Se asume que el número de incumplimientos N en el portafolio durante el periodo de tiempo $[0, T]$ tiene una distribución *Poisson* de parámetro λ, por lo que, este valor fijo representa el número esperado de incumplimientos en $[0, T]$. Nótese que lo anterior corresponde al supuesto de que las probabilidades de incumplimiento son constantes en el tiempo, por tanto se define la tasa de incumplimiento como:

$$\Lambda \equiv \sum_A \rho_A = \sum_A \lambda_A = \lambda$$

Ahora, bajo el supuesto de que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a un factor de riesgo, la tasa de incumplimiento es una variable aleatoria dada por:

$$\Lambda \equiv \sum_A \rho_A = \sum_A \lambda_A Q = Q \sum_A \lambda_A = Q\lambda. \tag{2.11}$$

Nótese que el número esperado de incumplimientos sigue siendo el mismo, pues

$$E[\Lambda] = E[Q\lambda] = \lambda E[Q] = \lambda. \tag{2.12}$$

Por otro lado, $E\left[\Lambda^2\right] = E\left[Q^2\lambda^2\right] = \lambda^2 E\left[Q^2\right]$ y $E^2[\Lambda] = \lambda^2$

$$\begin{aligned}
VAR[\Lambda] &= E\left[\Lambda^2\right] - E^2[\Lambda] \\
&= \lambda^2 E\left[Q^2\right] - \lambda^2 = \lambda^2\left(E\left[Q^2\right] - 1\right) \\
&= \lambda^2\left(E\left[Q^2\right] - E^2[Q]\right) = \lambda^2 VAR[Q],
\end{aligned}$$

como $VAR[Q] = \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2} = \dfrac{\sigma_A^2}{\lambda_A^2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma_\Lambda &= \sqrt{VAR[\Lambda]} = \sqrt{\lambda^2 VAR[Q]} \\
&= \lambda\sqrt{VAR[Q]} = \left(\sum_A \lambda_A\right)\sqrt{VAR[Q]} \\
&= \sum_A \left(\lambda_A \sqrt{VAR[Q]}\right) = \sum_A \left(\lambda_A \frac{\sigma_A}{\lambda_A}\right) = \sum_A \sigma_A.
\end{aligned}$$

Es decir, la desviación estándar de la tasa de incumplimiento es igual a la suma de las desviaciones estándar de las probabilidades de incumplimiento. Además, se tiene que la varianza de la variable mixta Q mantiene la relación:

$$VAR[Q] = \frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}.$$

Así, bajo este modelo los valores observados de Λ periodo tras periodo, se interpretan como muestras de la variable aleatoria Λ cuyo valor esperado $E[\Lambda]$ representa la tasa promedio de incumplimientos a lo largo de varios periodos de tiempo, y cuya desviación estándar σ_Λ mide la incertidumbre de que un número esperado de incumplimientos suceda en un determinado periodo de tiempo.

En otras palabras, el valor de la tasa de incumplimiento en un periodo está dado por el estado del factor de riesgo, el cual se refleja a través de un valor q de la variable mixta Q, de tal manera que la tasa de incumplimiento para un determinado periodo es $\Lambda(q) = \lambda q$.

Ahora, bajo las hipótesis del modelo *Poisson* compuesto, tenemos que la distribución condicional del número de incumplimientos dado un valor q de la variable mixta Q es:

$$\rho_n(\Lambda) = \rho_n(\lambda q) = P(N = n \mid Q = q) = e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^n}{n!}$$

es decir, resulta *Poisson* de parámetro λq.

Sabemos de la definición (2.4.1) que si $N \sim \textit{Poisson}(\Lambda)$ cuyo parámetro $\Lambda = \lambda Q$ es una variable aleatoria con función de distribución F, entonces

$$P(N = n) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^n}{n!} dF(\lambda q).$$

Para obtener una fórmula explícita de las probabilidades de incumplimiento es necesario escoger una distribución apropiada para la variable mixta. Tal distribución debe modelar los distintos estados de la tasa de incumplimiento de acuerdo a los posibles escenarios del factor de riesgo. Sin embargo, la escasa información estadística del comportamiento de los factores de riesgo no permite encontrar una distribución óptima.

A continuación se analiza el caso en que la variable mixta Q tiene distribución *Gamma*. A pesar de que no existan pruebas de que el factor de riesgo tenga una incidencia de este tipo sobre las probabilidades de incumplimiento, frecuentemente se utiliza en la práctica porque permite la aplicación del método de recurrencia (2.4.1).

Primero, vamos a determinar los dos parámetros de la distribución *Gamma*, de tal manera que la tasa de incumplimiento $\Lambda = \lambda Q$ tenga media λ y desviación estándar $\sigma_\Lambda = \lambda\sqrt{VAR[Q]}$.

Supongamos que $Q \sim \Gamma(k, \beta)$, donde $k, \beta > 0$.

Sabemos que $E[Q] = k\beta$ y $VAR[Q] = k\beta^2$, entonces

$$E[\Lambda] = \lambda E[Q] = \lambda k\beta = \lambda \Longleftrightarrow k\beta = 1,$$

$$\begin{aligned} VAR[\Lambda] &= \lambda^2 VAR[Q] = \lambda^2 k\beta^2 = \lambda^2 \frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2} \\ &\iff \beta = \frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Asimismo, $k = \dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}$.

Es decir, la distribución de la variable mixta Q que corresponde a los efectos del factor de riesgo sobre la tasa de incumplimiento Λ es $\Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}\right)$.

2.5.1 Proposición. *Si* $Q \sim \Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}\right)$, *entonces* $\Lambda \sim \Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)$

DEMOSTRACIÓN:

Para mayor simplicidad en los cálculos, se toma $k = \dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}$ y $\beta = \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}$.

$$P(\Lambda \leq z) = P(\lambda Q \leq z) = P\left(Q \leq \frac{z}{\lambda}\right).$$

Como, $P(Q \leq q) = \displaystyle\int_0^q \frac{y^{k-1}e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^k \Gamma(k)} dy$, entonces

$$P\left(Q \leq \frac{z}{\lambda}\right) = \int_0^{\frac{z}{\lambda}} \frac{y^{k-1}e^{-\frac{y}{\beta}}}{\beta^k \Gamma(k)} dy.$$

Supongamos que $u = y\lambda \Longrightarrow dy = \dfrac{1}{\lambda} du$,

$$P\left(Q \leq \frac{z}{\lambda}\right) = \int_0^z \frac{\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\frac{u}{\lambda\beta}}}{\beta^k \Gamma(k)} \left(\frac{1}{\lambda}\right) du = \int_0^z \left(\frac{u^{k-1} e^{-\frac{u}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)}}}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)^k \Gamma(k)} \right) du,$$

es decir $\Lambda \sim \Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)$.

■

2.5.2 Proposición. *Si* $Q \sim \Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}\right)$, *entonces* $N \sim \text{binneg}\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\lambda}{\lambda + \sigma_\Lambda^2}\right)$

DEMOSTRACIÓN:

Para mayor simplicidad en los cálculos, se toma $k = \dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}$.

Por proposición (2.5.1) $\Lambda \sim \Gamma\left(k, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)$, luego

$$\begin{aligned}
P(N=n) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^n}{n!} dF(\lambda q) \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-y}(y)^n}{n!} f_\Lambda(y)dy = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-y}y^n}{n!}\right)\left(\frac{y^{k-1}e^{-\frac{y}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)}}}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)^k \Gamma(k)}\right) dy \\
&= \frac{\Gamma(n+k)}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)^k \Gamma(k)n! \left(\frac{\lambda+\sigma_\Lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)^{k+n}} = \left(\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k)n!}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)^k \left(\frac{\lambda+\sigma_\Lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)^{k+n}}\right) \\
&= \begin{pmatrix} k+n-1 \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)^k \left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)^n,
\end{aligned}$$

es decir, $N \sim binneg\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)$.

■

Ésta se denomina distribución *Pólya* compuesta. En tanto que la distribución *Poisson* compuesta depende únicamente de la media de la tasa de incumplimiento, la distribución *Pólya* compuesta depende tanto de la media como de la volatilidad de la tasa de incumplimiento, es decir, incorpora la volatilidad del portafolio utilizando un mínimo de parámetros.

Sabemos del ejemplo (1.8.3) que si $N \sim binneg\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)$, entonces la función generadora de momentos de N es

$$M_N(t) = \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)}{1-\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)e^t}\right)^k,$$

para $t < \log\left(\dfrac{2\lambda+\sigma_\Lambda^2}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)$, además

$$E[N] = \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)}\right] = \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right) = \lambda.$$

$$VAR[N] = \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)^2}\right] = \left(\frac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}\right)\left[\frac{\sigma_\Lambda^2\left(\lambda+\sigma_\Lambda^2\right)}{\lambda^2}\right] = \lambda + \sigma_\Lambda^2.$$

Es decir, el número esperado de incumplimientos en un periodo continua siendo λ, mientras que la varianza es $\sigma_\Lambda^2 + \lambda$. Nótese que el parámetro $\dfrac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2} = \dfrac{E[N]}{VAR[N]}$.

Finalmente, luego de suponer que sólo un factor de riesgo afecta las probabilidades de incumplimiento, obtuvimos el proceso *Pólya* compuesto, donde $N \sim binneg\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\lambda}{\lambda+\sigma_\Lambda^2}\right)$. Además, como $\Lambda \sim \Gamma\left(\dfrac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}, \dfrac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda}\right)$, $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ y por las proposiciones 2.4.5 y 2.5.2 obtenemos:

1.

$$E[S] = E[\Lambda]E[Y] = \lambda E[Y]. \tag{2.13}$$

2.

$$\begin{aligned} E\left[S^2\right] &= E[\Lambda]E\left[Y^2\right] + E\left[\Lambda^2\right]E^2[Y] \\ &= \lambda E\left[Y^2\right] + \lambda^2 E\left[Q^2\right]E^2[Y] \\ &= \lambda E\left[Y^2\right] + \lambda^2\left(VAR[Q] + E^2[Q]\right)E^2[Y] \\ &= \lambda E\left[Y^2\right] + \lambda^2\left(\frac{\sigma_\Lambda^2}{\lambda^2}+1\right)E^2[Y] = \lambda E\left[Y^2\right] + \left(\lambda^2+\sigma_\Lambda^2\right)E^2[Y]. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} VAR[S] &= VAR[\Lambda]E^2[Y] + E[\Lambda]E\left[Y^2\right] \\ &= \lambda^2 VAR[Q]E^2[Y] + \lambda E\left[Y^2\right] = \sigma_\Lambda^2 E^2[Y] + \lambda E\left[Y^2\right]. \end{aligned}$$

4.

$$M_S(t) = M_\Lambda(M_Y(t) - 1) = \left(\frac{\frac{\lambda}{\sigma_\Lambda^2}}{\frac{\lambda}{\sigma_\Lambda^2} - (M_Y(t) - 1)} \right)^{\frac{\lambda^2}{\sigma_\Lambda^2}}.$$

2.5.4 El Tema de la Diversificación.

La diversificación a grandes rasgos consiste en compensar riesgos. Por ejemplo, considere las ganancias de dos vendedores de un parque de recreación, uno vende helados y otro paraguas. En los días soleados, el vendedor de helados tiene un gran negocio, mientras que el de paraguas apenas vende. Las cosas cambian en los días lluviosos, cuando el que hace el negocio es el vendedor de paraguas y no el de helados. Aunque las ganancias individuales de los dos vendedores pueden ser bastante volátiles, las ganancias combinadas lo son mucho menos, debido a la relación opuesta entre sus ganancias. El mismo principio se mantiene para un portafolio de créditos. Los factores que originan incumplimiento en los créditos de compañías industriales serán distintos de los factores que causan incumplimiento en los créditos de granjeros. En vez de mantener distintos tipos de crédito por separado, combinando ambos en un mismo portafolio, el banco podrá reducir la volatilidad de sus ingresos. Las ganancias de algunos de estos créditos compensarán las pérdidas de los créditos incumplidos, reduciendo la probabilidad de que el banco pierda dinero.

En 1952, *Harry Markowitz* centró su atención en la práctica habitual de la diversificación de portafolios y mostró cómo un inversor puede reducir el riesgo o desviación típica de un portafolio eligiendo activos cuyas oscilaciones no sean paralelas, es decir, activos que no se vean afectados sensiblemente por los mismos factores de riesgo.

La diversificación del riesgo en un portafolio de créditos se puede dar de manera natural al tener un gran número de acreditados. Sin embargo, esta diversificación puede resultar insuficiente debido a correlaciones entre los créditos u otros factores de riesgo.

Los factores de riesgo se clasifican en:

1. ***Sistémicos.*** Son aquellos factores que afectan a un grupo de créditos del portafolio.

2. ***Específicos o idiosincrásicos.*** Aquellos factores que sólo afectan a un crédito del portafolio.

Cuando un factor sistémico afecta a un gran número de créditos, entonces el portafolio tiene una alta concentración de riesgo, porque un cambio no deseado en el factor puede provocar el incumplimiento de varios créditos y conllevar a pérdidas extremas.

El modelo *Poisson* compuesto supone que las probabilidades de incumplimiento son constantes y por tanto no considera cambios en la calidad de los créditos. Por otro lado, el modelo *Pólya* compuesto supone que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a un solo factor de riesgo, de modo que todos los créditos cambian de calidad conjuntamente; esto excluye los beneficios de la diversificación que pudiera tener un portafolio si los créditos estuvieran sujetos a factores mutuamente independientes.

Podemos solucionar el problema de la diversificación segmentando el portafolio en sectores mutuamente independientes y asignar cada crédito a un sector, así obtenemos varios portafolios, cada uno con una tasa de incumplimiento distinta que depende de un solo factor de riesgo. Sin embargo, una solución más refinada, ya que la probabilidad de incumplimiento de cada crédito depende de más de un factor, consiste en asignar una proporción de cada crédito (según la influencia de cada factor sobre el crédito) a segmentos mutuamente independientes, cada uno sujeto a un factor de riesgo.

A continuación, se expone el modelo *CreditRisk*$^+$.

2.5.5 CreditRisk$^+$.

El *CreditRisk*$^+$ es un modelo de incumplimiento que considera la tasa de incumplimiento como una variable aleatoria continua, incorpora la volatilidad de la tasa de incumplimiento y permite calcular la distribución de pérdidas de un portafolio de créditos. Congruente al desarrollo de los modelos de incumplimiento expuestos anteriormente, el *CreditRisk*$^+$ generaliza el modelo *Pólya* compuesto, porque permite la incorporación de varios factores de riesgo que inciden sobre la tasa de incumplimiento del portafolio de créditos.

Consideremos K factores de riesgo de tipo sistémico (más adelante, específicamente en la aplicación empírica de los modelos se tomará en cuenta los de tipo idiosincrásico). Segmentamos el portafolio en K sectores mutuamente independientes, de manera tal que un sólo factor de riesgo actúe en cada uno de esos sectores.

Como varios créditos en el portafolio pueden estar sujetos a los mismos factores de riesgo, resulta necesario asignar una proporción de cada crédito (según la influencia de cada factor de riesgo sobre el crédito) a sectores mutuamente independientes, cada uno sujeto a un factor de riesgo, es decir, para cada crédito A en el portafolio definimos un ponderador $w_{A,k}$ que representará el grado de influencia del $k-$ésimo factor de riesgo, tal que

$$\sum_{k=1}^{K} w_{A,k} = 1. \tag{2.14}$$

2.5.1 Ejemplo. *Supongamos que un banco cuenta con un portafolio de tres créditos: el primero corresponde a una compañía productora de maíz, por un monto de* \$100.000*, el segundo corresponde a una hilandería, por un monto de* \$20.000 *y el tercero corresponde a una productora de leche, por un monto de* \$5.000*. El banco determinó que tanto el factor de riesgo climático como el de la incertidumbre macroeconómica, tienen una influencia sobre los créditos del portafolio del* 60% *y* 40% *respectivamente. Luego, el banco segmenta el portafolio en dos sectores: climático, incertidumbre macroeconómica; procede a calcular y repartir la porción del monto de cada crédito a ambos sectores, es decir, asigna* \$60.000*,* \$12.000 *y* \$3.000 *al sector donde actúa el factor de riesgo climático y* \$40.000*,* \$8.000 *y* \$2.000 *al sector donde actúa el factor de riesgo incertidumbre macroeconómica.*

Sea $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$ el modelo colectivo de riesgo para un portafolio con un número $n = 0, 1, \ldots,$ de créditos válidos por un periodo de tiempo $[0, T]$. Además, supongamos que S tiene una distribución *Poisson* compuesta mixta de parámetro Λ.

Para $k = 1, 2, \ldots, K$ definimos Λ_k como la variable aleatoria que representa el número esperado de incumplimientos del $k-$ésimo sector o tasa de incumplimiento sectorial. Además, denotaremos por μ_k y σ_k la media y desviación estándar de Λ_k respectivamente.

Supongamos que las probabilidades de incumplimiento ρ_A (y por tanto la tasa de incumplimiento Λ del portafolio) dependen de los K factores de riesgo de la siguiente manera:

$$\rho_A = \lambda_A \left(\sum_{k=1}^{K} w_{A,k} \frac{\Lambda_k}{\mu_k} \right), \tag{2.15}$$

donde $\lambda_A = E[\rho_A]$.

Nótese que, si en la ecuación (2.15) $K = 1$, entonces, por las ecuaciones (2.11), (2.12) de la sección (2.5.3) y la ecuación (2.14) de la sección (2.5.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \lambda_A \left(\sum_{k=1}^{1} w_{A,k} \frac{\Lambda_k}{\mu_k} \right) \\ &= \lambda_A w_{A,1} \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \lambda_A (1) \frac{(\lambda Q)}{\lambda} = \lambda_A Q, \end{aligned}$$

es decir, obtenemos la forma de las probabilidades de incumplimiento del modelo *Pólya* compuesto.

Además, supongamos que las tasas de incumplimiento sectoriales Λ_k tienen distribución *Gamma* con media $\mu_k = \sum_A w_{A,k}\lambda_A$ y desviación estándar $\sigma_k = \sum_A w_{A,k}\sigma_A$.

Sabemos de la sección (2.5.3), que la tasa de incumplimiento Λ del portafolio es la suma de las probabilidades de incumplimiento. Veamos que Λ es igual a la suma de las tasas de incumplimiento sectoriales

$$\begin{aligned} \Lambda \equiv \sum_A \rho_A &= \sum_A \lambda_A \left(\sum_{k=1}^{K} w_{A,k} \frac{\Lambda_k}{\mu_k} \right) = \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k \left(\frac{1}{\mu_k} \sum_A w_{A,k}\lambda_A \right) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k \left(\frac{1}{\sum_A w_{A,k}\lambda_A} \sum_A w_{A,k}\lambda_A \right) = \sum_{k=1}^{K} \Lambda_k. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para $k = 1, 2, \ldots, K$ supongamos que $\Lambda_k \sim \Gamma\left(\alpha_k, \frac{1}{\beta_k}\right)$, como

$$\mu_k = E[\Lambda_k] = \alpha_k \frac{1}{\beta_k},$$

$$\sigma_k^2 = VAR[\Lambda_k] = \alpha_k \frac{1}{\beta_k^2}$$

entonces, $\alpha_k = \dfrac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}$ y $\beta_k = \dfrac{\mu_k}{\sigma_k^2}$, es decir, $\Lambda_k \sim \Gamma\left(\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}\right)$.

Por la proposición (2.5.2) el número de incumplimientos del k—ésimo sector

$$N_k \sim binneg\left(\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2}\right),$$

es decir, el número de incumplimientos de cada sector sigue un proceso *Pólya* compuesto con su respectiva tasa sectorial Λ_k. También, la función generadora de momentos de N_k es, de acuerdo con el ejemplo (1.8.3)

$$M_{N_k}(t) = \left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - e^t)}\right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}}$$

donde $t < \log\left(\dfrac{2\mu_k + \sigma_k^2}{\mu_k + \sigma_k^2}\right)$. Además $E[N_k] = \mu_k$ y $VAR[N_k] = \mu_k + \sigma_k^2$.

Como los K sectores son mutuamente independientes, entonces, tanto las tasas de incumplimiento sectoriales $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_K$ como los números de incumplimientos sectoriales $N_1, N_2, \ldots, N_K$ son independientes, luego la función generadora de momentos del número de incumplimientos del portafolio $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_K$ es

$$M_N(t) = \prod_{k=1}^{K} \left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - e^t)}\right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}},$$

donde $t < \log\left(\dfrac{2\mu_k + \sigma_k^2}{\mu_k + \sigma_k^2}\right)$. Es decir, la función generadora de momentos del número de incumplimientos en el portafolio es equivalente a la suma de procesos *Pólya* compuestos independientes.

Ahora, vamos a calcular a partir de la función generadora de momentos de N, $E[N]$ y $VAR[N]$.

$$M_N^{(1)}(t) = \prod_{k=1}^{K}\left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1-e^t)}\right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}} \sum_{k=1}^{K} \frac{\mu_k^2 e^t}{\mu_k + \sigma_k^2(1-e^t)},$$

luego,

$$E[N] = M_N^{(1)}(0) = \sum_{k=1}^{K} \mu_k = \sum_{k=1}^{K} E[N_k] = \lambda.$$

$$M_N^{(2)}(t) = M_N^{(1)}(t)\left[\sum_{k=1}^{K}\frac{\mu_k^2 e^t}{\mu_k + \sigma_k^2(1-e^t)} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{\mu_k^2 e^t}{\mu_k + \sigma_k^2(1-e^t)}} \sum_{k=1}^{K} \frac{\left(\mu_k^3 + \mu_k^2\sigma_k^2\right)e^t}{\left[\mu_k + \sigma_k^2(1-e^t)\right]}\right]^2,$$

luego,

$$E\left[N^2\right] = M_N^{(2)}(0) = \lambda^2 + \lambda + \sum_{k=1}^{K}\sigma_k^2,$$

entonces,

$$VAR[N] = E\left[N^2\right] - E^2[N] = \lambda + \sum_{k=1}^{K}\sigma_k^2.$$

Nótese que se cumple la siguiente relación:

$$\overbrace{\lambda}^{\textit{Poisson Compuesto}} \leq \overbrace{\lambda + \sum_{k=1}^{K}\sigma_k^2}^{\textit{CreditRisk}^+} \leq \overbrace{\lambda + \sigma^2}^{\textit{Pólya Compuesto}}$$

pues, el modelo *Poisson* compuesto considera una tasa de incumplimiento fija, mientras que el modelo *Pólya* compuesto supone que todos los créditos están sujetos a un sólo factor de riesgo, por lo cual, cuando el *CreditRisk*$^+$ incorpora varios factores de riesgo se toma en cuenta la diversificación del portafolio y por ello la desviación estándar del número de incumplimientos es menor que la del *Pólya* compuesto. En otras palabras, si el número de factores de riesgo que afectan las probabilidades de incumplimiento es grande, entonces, se obtiene mayor diversificación en el portafolio.

Ahora, para considerar el hecho de que existen factores específicos propios de cada crédito que no dependen de los factores sistémicos, basta incluir un sector extra, el cual, al no depender de un factor en particular, se modela con un proceso *Poisson* compuesto o equivalentemente, un *Pólya* compuesto con tasa de incumplimiento sectorial constante.

Por último se procederá a obtener la función generadora de momentos del riesgo S del portafolio.

Sabemos que $N_k \sim binneg\left(\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}, \frac{\mu_k}{\mu_k+\sigma_k^2}\right)$, luego, por proposición (2.4.6)

$$M_{S_k}(t) = \left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - M_{Y_k}(t))}\right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}},$$

donde $M_{Y_k}(t)$ es la función generadora de momentos de los montos Y_k del $k-$ésimo sector y S_k es el riesgo del $k-$ésimo sector.

A partir de la función generadora de momentos de S_k, se obtiene $E[S_k]$ y $VAR[S_k]$,

$$M_{S_k}^{(1)}(t) = \mu_k M_{Y_k}^{(1)}(t)\left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - M_{Y_k}(t))}\right]^{\frac{\mu_k^2+\sigma_k^2}{\sigma_k^2}},$$

$$M_{S_k}^{(1)}(0) = E[S_k] = \mu_k E[Y_k]. \tag{2.17}$$

$$M_{S_k}^{(2)}(t) = \mu_k M_{Y_k}^{(2)}(t)\left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - M_{Y_k}(t))}\right]^{\frac{\mu_k^2+\sigma_k^2}{\sigma_k^2}} + \left(\mu_k^2+\sigma_k^2\right)\left(M_{Y_k}^{(1)}(t)\right)^2\left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - M_{Y_k}(t))}\right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}+2},$$

$$M_{S_k}^{(2)}(0) = E[S_k^2] = \mu_k E[Y_k^2] + \left(\mu_k^2+\sigma_k^2\right)E^2[Y_k].$$

Luego,

$$VAR[S_k] = E[S_k^2] - E^2[S_k] = \mu_k E[Y_k^2] + \sigma_k^2 E^2[Y_k].$$

Ahora, como los K sectores son independientes, entonces $S_1, S_2, \ldots, S_K$ son independientes y la función generadora de momentos del riesgo $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_K$ es

$$M_S(t) = \prod_{k=1}^{K} M_{S_k}(t) = \prod_{k=1}^{K} \left[\frac{\mu_k}{\mu_k + \sigma_k^2(1 - M_{Y_k}(t))} \right]^{\frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}},$$

asimismo, como $S_1, S_2, \ldots, S_K$ son independientes obtenemos:

$$E[S] = E[S_1 + S_2 + \cdots + S_K] = \sum_{k=1}^{K} E[S_k] = \sum_{k=1}^{K} \mu_k E[Y_k], \tag{2.18}$$

$$VAR[S] = VAR[S_1 + S_2 + \cdots + S_K] = \sum_{k=1}^{K} VAR[S_k] = \sum_{k=1}^{K} \left(\mu_k E[Y_k^2] + \sigma_k^2 E^2[Y_k] \right).$$

Capítulo 3

Aplicación Empírica de los Modelos.

3.1 Introducción.

Este capítulo tiene por objeto ilustrar los modelos expuestos a lo largo de todo este trabajo y señalar sus principales diferencias, lo cual permitirá mostrar bajo qué supuestos suele subestimarse o sobrestimarse el riesgo de un mismo portafolio de créditos. A lo largo de este capítulo utilizaremos dos portafolios identificados como Portafolio 1 y Portafolio 2.

Los datos que se presentan a continuación son los mismos que se usaron en el ejemplo (2.3.1), de la sección (2.3.2).

Tabla 1.

Probabilidades de incumplimiento	
Fecha	Serie 1
Ene-00	18,87%
Feb-00	10,73%
Mar-00	8,50%
Abr-00	8,33%
May-00	7,71%
Jun-00	7,18%
Jul-00	7,35%
Ago-00	6,79%
Sep-00	7,26%
Oct-00	7,47%
Nov-00	6,99%
Dic-00	6,78%
Ene-01	5,53%
Feb-01	5,83%
Mar-01	5,37%
Promedio	8,046%

Tabla 2.

Portafolio 1		**Portafolio 2**	
Montos	**# Acreditados**	**Montos**	**# Acreditados**
\$ 400	15	\$ 3.200	499
\$ 1.200	10	\$ 540.400	1
\$ 1.600	15		
\$ 2.000	24		
\$ 2.400	30		
\$ 2.800	38		
\$ 3.200	30		
\$ 4.800	90		
\$ 5.200	120		
\$ 5.600	128		
\$ 2.137.200	**500**	**\$ 2.137.200**	**500**

Para obtener la serie histórica del número de incumplimientos o segunda columna de la tabla siguiente, que identificaremos como Serie 2, multiplicamos la serie histórica de las probabilidades de incumplimiento por el total de créditos que conforman los portafolios. Por ejemplo, obtenemos que el número de incumplimientos entre enero de dos mil y enero de dos mil uno es de $(18,87\%)(500) = 94$ acreditados. Por último, calculamos la tasa de incumplimiento, tomando el promedio de la serie histórica del número de incumplimientos.

Tabla 3.

Número de incumplimientos	
Fecha	Serie 2
Ene-00	94
Feb-00	54
Mar-00	43
Abr-00	42
May-00	39
Jun-00	36
Jul-00	37
Ago-00	34
Sep-00	36
Oct-00	37
Nov-00	35
Dic-00	34
Ene-01	28
Feb-01	29
Mar-01	27
Promedio	40,23
Varianza	267,22

3.2 Modelo Poisson Compuesto.

En este modelo se supone que los créditos de un portafolio tienen la misma probabilidad de incumplimiento; además, se necesita como parámetro de entrada la tasa de incumplimiento.

Un resumen de las cantidades importantes asociadas a este modelo se presentan en la tabla 4.

Tabla 4. Modelo Poisson compuesto.

Portafolio	Tasa de incumplimiento=Promedio	Pérdida esperada=E[S]	-VaR(0,995) Nominal	-VaR(0,995)%
Portafolio 1	40,23	$ 171.959	$ 250.000	11,70%
Portafolio 2	40,23	$ 171.959	$ 709.600	33,20%

Nota.

A través de los programas *poissoncartera1.m* y *poissoncartera2.m* (ver apéndice **B**, sección B.2), se obtuvo la función de distribución del riesgo S de Portafolio 1 y Portafolio 2.

Sabemos de la proposición (2.4.4) que $E[S] = \lambda E[Y]$, es decir, la pérdida esperada es el producto de la tasa de incumplimiento λ y la media de los montos de los créditos del portafolio. Para Portafolio 1 y Portafolio 2 la media muestral de los montos de los créditos es $E[Y] = \$4.274, 40$. Luego, la pérdida esperada $E[S]$ de Portafolio 1 y Portafolio 2 es:

$$E[S] = (40, 23)(4.274, 40) = 171.959.$$

Por otro lado, el $-VaR(0, 995)$ nominal de Portafolio 1 y Portafolio 2, se obtuvo calculando el cuantil correspondiente al $99, 5\%$ de confianza, de la distribución de probabilidad del riesgo S.

Ahora, podemos calcular las pérdidas no esperadas, es decir, la pérdida por encima de la esperada, en que puede incurir el acreedor, por incumplimiento de sus deudores. Estas pérdidas indican al acreedor cuánto capital económico debe tener en reserva por la tenencia de un portafolio. Luego, por lo descrito en [7], páginas 49-50, la pérdida no esperada en Portafolio 1 es:

$$PNE = 250.000 - 171.959 = 78.041$$

y para Portafolio 2

$$PNE = 709.600 - 171.959 = 537.641.$$

Nótese que el Portafolio 2 por estar concentrado presenta mayor pérdida para el acreedor.

3.3 Modelo Pólya Compuesto.

El modelo *Pólya* compuesto incorpora no sólo el valor esperado de la tasa de incumplimiento, sino también su volatilidad. Sabemos del corolario (2.4.1) que la volatilidad de la tasa de incumplimiento en el modelo *Pólya* compuesto, es igual a la varianza del número de incumplimientos menos el promedio del número de incumplimientos.

Un resumen de las cantidades importantes asociadas a este modelo se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Modelo Pólya compuesto.

Portafolio	Tasa de incumplimiento=Promedio	Pérdida esperada=E[S]	-VaR(0,995) Nominal	-VaR(0,995)%
Portafolio 1	40,23	$ 171.959	$ 402.000	18,81%
Portafolio 2	40,23	$ 171.959	$ 815.200	38,14%

Nota.

A través de los programas *polyacartera1.m* y *polyacartera2.m* (ver apéndice **B**, sección B.3), se obtuvo la función de distribución del riesgo S de Portafolio 1 y Portafolio 2.

Sabemos de la ecuación (2.13), sección (2.5.3) que $E[S] = E[\Lambda]E[Y] = \lambda E[Y]$, es decir, la pérdida esperada es el producto de la tasa de incumplimiento por la media de los montos de los créditos del portafolio. Para Portafolio 1 y Portafolio 2 la media muestral de los montos de los créditos es $E[Y] = \$4.274,40$, luego, la pérdida esperada $E[S]$ de Portafolio 1 y Portafolio 2 es:

$$E[S] = (40,23)(4.274,40) = 171.959.$$

El $-VaR(0,995)$ nominal de Portafolio 1 y Portafolio 2, se obtuvo calculando el cuantil correspondiente al $99,5\%$ de confianza, de la distribución de probabilidad del riesgo S.

Nótese que el Valor en Riesgo tuvo un incremento considerable al tomarse en cuenta la volatilidad de la tasa de incumplimiento. Asimismo, por lo descrito en [7], páginas 49-50, la pérdida no esperada en Portafolio 1 es:

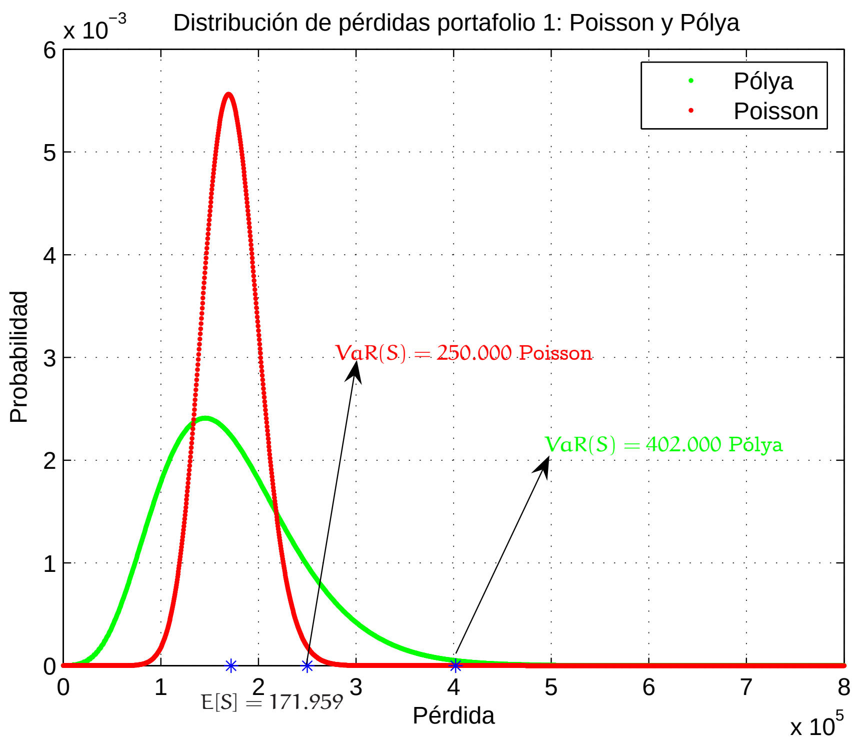
$$\mathrm{PNE} = 402.000 - 171.959 = 230.041$$

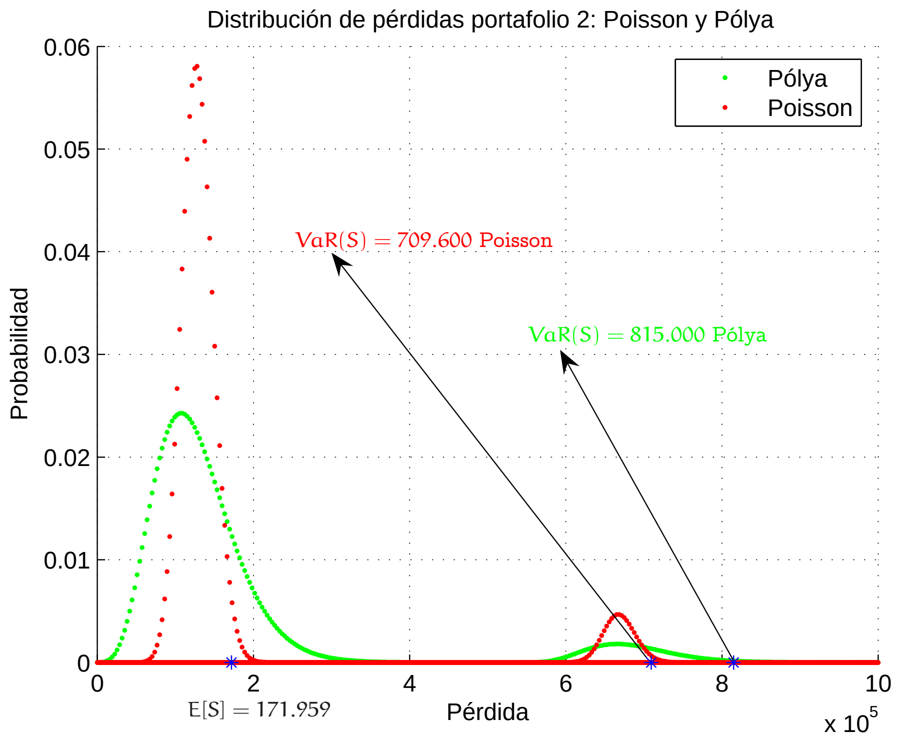
y para el Portafolio 2

$$\mathrm{PNE} = 815.200 - 171.959 = 643.241,$$

lo cual es atribuible a la concentración.

A continuación presentaremos para cada portafolio una gráfica que muestra la distribución del riesgo S obtenida a partir de los modelos *Poisson* compuesto y *Pólya* compuesto.





3.4 Modelo CreditRisk$^+$.

El modelo *CreditRisk*$^+$ permite la incorporación de varios factores de riesgo que inciden sobre la tasa de incumplimiento del portafolio de créditos. De acuerdo a la influencia de cada factor de riesgo sobre los créditos del portafolio, se asigna una porción de cada crédito a sectores mutuamente independientes, cada uno sujeto a un factor de riesgo. En esta sección se ejemplifica un modelo *CreditRisk*$^+$ compuesto por dos sectores: uno idiosincrásico caracterizado por un modelo *Poisson* compuesto, y uno sistémico caracterizado por un *Pólya* compuesto.

Según este modelo los créditos están sujetos a un factor sistémico, pero no al cien por cien, sino que una parte del riesgo corresponde al riesgo específico de cada crédito.

Para estimar los parámetros de este modelo se hace el supuesto de que todos los créditos del portafolio son afectados de igual forma por el factor sistémico. Así, mediante la ecuación (2.15) y la definición (2.16), obtenemos que la tasa de incumplimiento es:

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \overbrace{\lambda(1-\omega)}^{\text{Poisson Compuesto}} + \overbrace{\lambda Q\omega}^{\text{Pólya Compuesto}} = \lambda\left[(1-\omega) + \omega Q\right],$$

donde Λ_1 representa la tasa de incumplimiento del sector idiosincrásico caracterizado por un modelo *Poisson* compuesto, Λ_2 representa la tasa de incumplimiento del sector sistémico caracterizado por un modelo *Pólya* compuesto, Q representa la variable mixta correspondiente al factor sistémico y ω el grado de influencia de éste sobre las probabilidades de incumplimiento. Asimismo, se tiene que la varianza de la tasa de incumplimiento es:

$$\begin{aligned} VAR[\Lambda] &= VAR[\Lambda_1 + \Lambda_2] = VAR[\Lambda_1] + VAR[\Lambda_2] \\ &= VAR[\lambda(1-\omega)] + VAR[\lambda Q\omega] = \lambda^2\omega^2 h, \end{aligned}$$

donde h representa la varianza de la variable mixta Q del factor sistémico. Es decir, para un valor de h dado se puede determinar el valor de ω mediante la fórmula:

$$\omega = \sqrt{\frac{VAR[\Lambda]}{\lambda^2 h}} = \sqrt{\frac{E[\Lambda^2] - E^2[\Lambda]}{\lambda^2 h}}$$

$$= \sqrt{\frac{E[N^2] - E[N] - E^2[N]}{\lambda^2 h}} = \sqrt{\frac{VAR[N] - E[N]}{\lambda^2 h}} = \sqrt{\frac{VAR[N] - \lambda}{\lambda^2 h}}, \tag{3.1}$$

donde la tercera igualdad se obtiene de los cálculos realizados en la proposición (2.4.5).

En general se toma h cercano a 1 (ver [4], apéndice A7.3). En lo que sigue, se consideran los valores $h = 0,5$ y $h = 1$.

Un resumen de las cantidades importantes asociadas a este modelo se presentan en la tabla 6 y 7.

Tabla 6. Modelo *CreditRisk*$^+$, $(h = 0,5)$.

Portafolio	Tasa de incumplimiento=Promedio	Pérdida esperada=E[S]	-VaR(0,995) Nominal	-VaR(0,995)%
Portafolio 1	40,23	$ 171.959	$ 310.800	14,54%
Portafolio 2	40,23	$ 171.959	$ 748.000	39,99%

Tabla 7. Modelo *CreditRisk*$^+$, $(h = 1)$.

Portafolio	Tasa de incumplimiento=Promedio	Pérdida esperada=E[S]	-VaR(0,995) Nominal	-VaR(0,995)%
Portafolio 1	40,23	$ 171.959	$ 284.400	13,31%
Portafolio 2	40,23	$ 171.959	$ 732.000	34,25%

Nota.

A través de los programas *creditriskcartera1.m* y *creditriskcartera2.m* para $h = 0,5$ y $h = 1$ (ver apéndice **B**, sección B.4), se obtuvo la función de distribución del riesgo S de Portafolio 1 y Portafolio 2.

Sabemos de la ecuación (3.1), que el grado de influencia del factor sistémico sobre las probabilidades de incumplimiento está dado por la ecuación $\omega = \sqrt{\frac{VAR[N] - \lambda}{\lambda^2 h}}$. Además, de la Tabla 3, página 91, $E[N] = 40,23$ y $VAR[N] = 267,22$. Luego, para $h = 0,5$ obtenemos

$$\omega = \sqrt{\frac{267,22 - 40,23}{(40,23)^2(.5)}} = 0,5296,$$

y para $h = 1$

$$\omega = \sqrt{\frac{267,22 - 40,23}{(40,23)^2(1)}} = 0,3745.$$

Por otro lado, para $h = 0,5$ tenemos que

$$E[\Lambda_1] = E[\lambda(1-\omega)] = \lambda(1-\omega) = (40,23)(0,4704) = 18,9242,$$

$$E[\Lambda_2] = E[\lambda Q\omega] = \lambda\omega E[Q] = (40,23)(0,5296)(1) = 21,3058,$$

y para $h = 1$

$$E[\Lambda_1] = (40,23)(0,6255) = 25,1639,$$

$$E[\Lambda_2] = (40,23)(0,3745)(1) = 15,0661.$$

Ahora, por las ecuaciones (2.17) y (2.18), páginas 86-87, tenemos que la pérdida esperada $E[S]$ de Portafolio 1 y Portafolio 2 es:

$$E[S] = E[S_1] + E[S_2] = E[\Lambda_1]E[Y_1] + E[\Lambda_2]E[Y_2].$$

Como todos los créditos de Portafolio 1 y Portafolio 2, son afectados de igual forma por el factor sistémico, tenemos que $E[Y_1] = E[Y_2] = \$4.274,40$. Entonces, la pérdida esperada $E[S]$ de Portafolio 1 y Portafolio 2 para $h = 0,5$ es:

$$E[S] = (4.274,40)(18,9242 + 21,3058) = 171.959,$$

y para $h = 1$

$$E[S] = (4.274,40)(25,1639 + 15,0661) = 171.959.$$

El $-VaR(0,995)$ nominal de Portafolio 1 y Portafolio 2 para $h = 0,5$ y $h = 1$, se obtuvo calculando el cuantil correspondiente al $99,5\%$ de confianza, de la distribución de probabilidad del riesgo S.

Asimismo, por lo descrito en [7], páginas 49-50, la pérdida no esperada en Portafolio 1 y Portafolio 2 son: para $h = 0,5$

$$\mathrm{PNE} = 310.800 - 171.959 = 138.841$$

y para el Portafolio 2

$$\mathrm{PNE} = 748.000 - 171.959 = 576.041,$$

para $h = 1$

$$\mathrm{PNE} = 284.400 - 171.959 = 112.441$$

y para el Portafolio 2

$$\mathrm{PNE} = 732.000 - 171.959 = 560.041.$$

Nota.

Las cantidades obtenidas en este ejemplo a través de los modelos *Poisson* compuesto, *Pólya* compuesto y *CreditRisk*$^+$ reflejan sus principales diferencias en el manejo del riesgo de crédito. Por un lado, cuando el modelo *Poisson* compuesto supone que las probabilidades de incumplimiento son constates en el tiempo, es decir, no están sujetas a factores de riesgo, la pérdida no esperada PNE para Portafolio 1 y Portafolio 2 es menor que la obtenida en los modelos *Pólya* compuesto y *CreditRisk*$^+$; además, cuando se usa el modelo *Poisson* compuesto, esta diferencia nos indica que la reserva de capital de la institución crediticia, creada para afrontar la pérdida por riesgo de crédito, puede resultar insuficiente en el tiempo. Por ejemplo, en escenarios donde exista recesión económica, la variabilidad en el número de incumplimientos que suceden año tras año es grande ([7], página 104). Por el otro, cuando el modelo *Pólya* compuesto supone que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a un factor de riesgo, es decir, la tasa de incumplimiento deja de ser constante en el tiempo, la pérdida no esperada PNE para Portafolio 1 y Portafolio 2 es mayor que la obtenida en los modelos *Poisson* compuesto y *CreditRisk*$^+$; esto nos indica que todos los créditos cambian de calidad simultáneamente, excluyendo los beneficios de la diversificación; además, la institución crediticia se ve en la obligación de destinar gran parte de su capital a reserva, originando pérdidas de futuras inversiones. Sin embargo, el modelo *CreditRisk*$^+$ al suponer que las probabilidades de incumplimiento están sujetas a varios factores de riesgo mutuamente independientes, permite incorporar los efectos de la diversificación, así la pérdida no esperada PNE para Portafolio 1 y Portafolio 2 resultó menor que la obtenida en *Pólya* compuesto y mayor que la obtenida en *Poisson* compuesto; por ende, resultará más beneficioso para la institución crediticia el manejo de sus portafolios a través del modelo *CreditRisk*$^+$.

Por último, se presenta un resumen a través de tablas y gráficas por portafolio, de las cantidades hasta ahora obtenidas.

Tabla 8. Resumen.

Portafolio 1	Poisson compuesto	Pólya compuesto	CreditRisk$^+$, $(h = 0,5)$	CreditRisk$^+$, $(h = 1)$
Promedio	40,23	40,23	40,23	40,23
Pérdida esperada=E[S]	$ 171.959	$ 171.959	$ 171.959	$ 171.959
-VaR(0,995) Nominal	$ 250.000	$ 402.000	$ 310.800	$ 284.400
-VaR(0,995)%	11,70%	18,81%	$ 14,54%	$ 13,31%

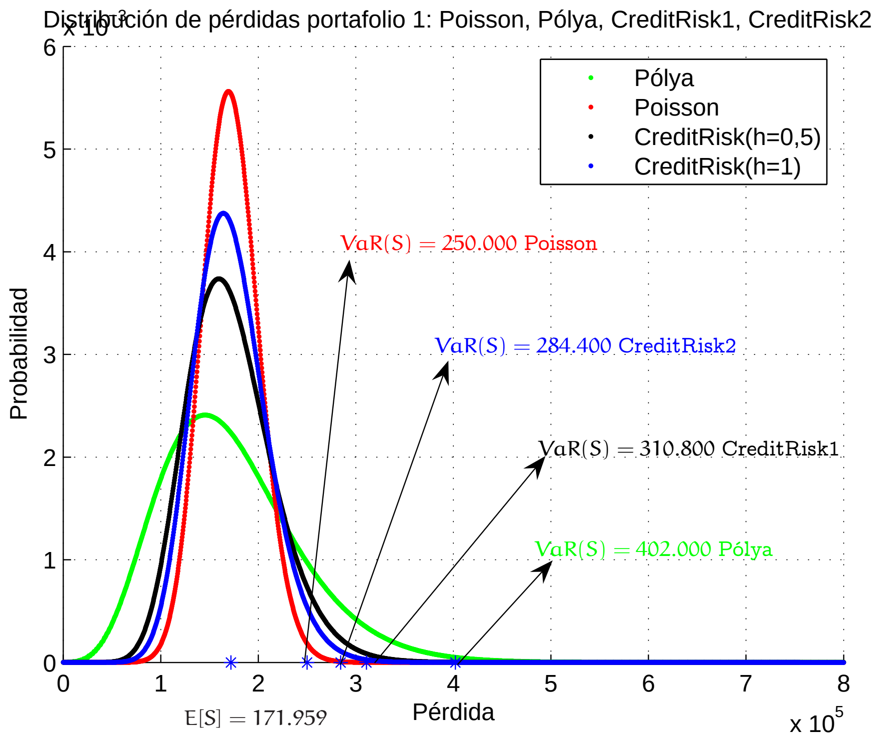
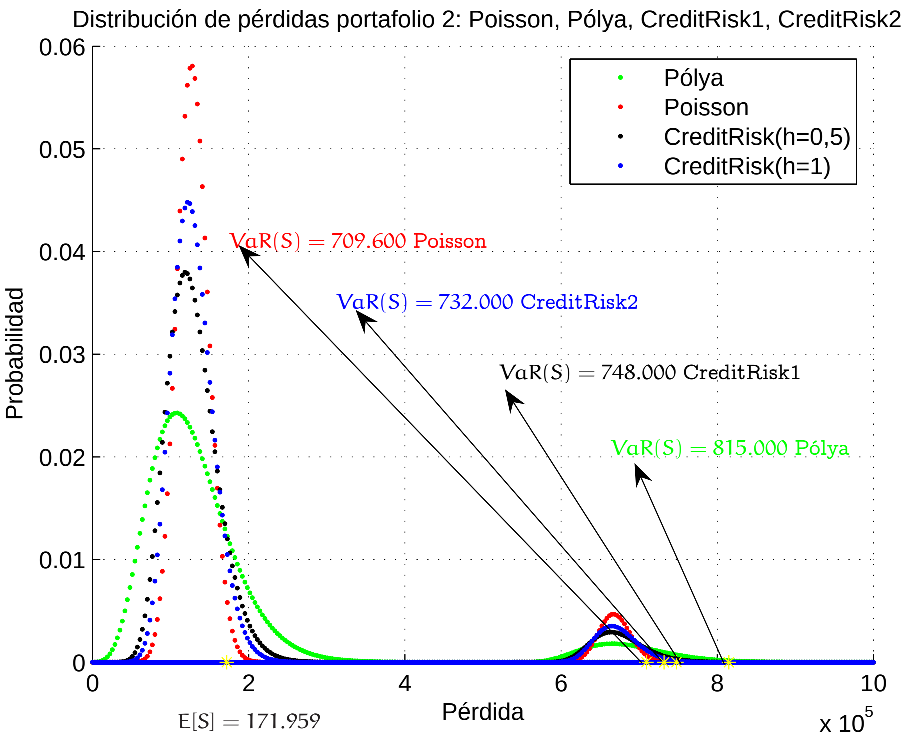


Tabla 9. Resumen.

Portafolio 2	Poisson compuesto	Pólya compuesto	CreditRisk$^+$, $(h = 0,5)$	CreditRisk$^+$, $(h = 1)$
Promedio	40,23	40,23	40,23	40,23
Pérdida esperada=E[S]	$ 171.959	$ 171.959	$ 171.959	$ 171.959
-VaR(0,995) Nominal	$ 709.600	$ 815.200	$ 748.000	$ 732.000
-VaR(0,995)%	33,20%	38,14%	39,99%	34,25%


Distribución de pérdidas portafolio 2: Poisson, Pólya, CreditRisk1, CreditRisk2
Probabilidad
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
2
4
6
8
10
Pérdida
x 10^5
Pólya
Poisson
CreditRisk(h=0,5)
CreditRisk(h=1)
VaR(S) = 709.600 Poisson
VaR(S) = 732.000 CreditRisk2
VaR(S) = 748.000 CreditRisk1
VaR(S) = 815.000 Pólya
E[S] = 171.959

Capítulo 4

Conclusión.

La teoría de riesgo en seguros es útil en el ámbito de los créditos, una vez que se muestra la similitud entre un seguro y un crédito. Las metodologías elaboradas con esta teoría parten de un enfoque de portafolio; estas permiten cuantificar elementos importantes como la volatilidad de las probabilidades de incumplimiento, y los efectos que tienen sobre el portafolio la concentración y la diversificación. Esto es posible porque se puede calcular la función generadora de momentos del riesgo.

Los modelos que se obtienen son de fácil y sencilla implementación, así como de cálculo rápido, además de que requieren de pocos datos, lo que facilita su aplicación en mercados emergentes donde la información es escasa. Los supuestos que utilizan los modelos más avanzados de la teoría de riesgo son mínimos. Por un lado no es necesario que los montos tengan una distribución específica, mientras que aquellas que se utilizan para el número de incumplimientos son aplicables a la mayoría de los portafolios crediticios.

En este trabajo se elaboró un esquema de análisis del riesgo de crédito basado en la teoría de riesgo en seguros. Dicho esquema comienza con la exposición de algunos de los modelos más simples de la teoría de riesgo en seguros, posteriormente se derivan otros modelos más generales, utilizados actualmente para obtener la distribución de pérdidas por riesgo de crédito. Paulatinamente, los supuestos de los primeros modelos son analizados señalando, en cada caso, su incompatibilidad con la realidad y añadiendo mejoras al mismo. Por ejemplo, cuando se habló del modelo Poisson compuesto, donde la tasa de incumplimientos es constante en el tiempo, mencionamos según estadísticas publicadas por

Standard & Poor's [7], (1997) sobre los créditos, exitía gran varibilidad en el número de incumplimientos que suceden año tras año, en este sentido resultó necesario suponer que las probabilidades de incumplimiento estaban sujetas a un factor de riesgo. Este proceso se sigue hasta alcanzar el modelo *CreditRisk*$^+$.

Los modelos expuestos en este trabajo hacen posible realizar proyecciones acerca del comportamiento de los créditos de un portafolio, lo cual proporciona a las instituciones financieras información para crear reservas de capital contra el riesgo y reducir así, sus posibilidades de sufrir pérdidas.

El *CreditRisk*$^+$ es un modelo que engloba a los otros modelos considerados en este trabajo. Representa una generalización del modelo *Pólya* compuesto, pues, permite que varios factores de riesgo afecten las probabilidades de incumplimiento; es de fácil implementación computacional. Además, las cantidades obtenidas a partir del *CreditRisk*$^+$ son más confiables, ya que a diferencia de los otros modelos, toma en cuenta la diversificación del portafolio. Finalmente, es importate señalar que de los modelos considerados en este trabajo, el modelo *Pólya* compuesto resultó el más conservador, es decir, aquel cuyo valor en riesgo resultó mayor que el de los otros modelos; mientras que el valor en riesgo del *CreditRisk*$^+$ siempre estuvo delimitado por el valor en riesgo del *Poisson* compuesto y el del *Pólya* compuesto.

Apéndice A

Resultados Básicos.

A.0.1 Proposición. *Dado un espacio de probabilidad* (Ω, Λ, P), *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $P(A) = 1 - P(A^c)$, *donde* $A \in \Lambda$.

2. $P(\emptyset) = 0$.

3. *Si* $A_1, \ldots, A_n \in \Lambda$ *y* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$, *entonces,* $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

4. *Si* $A, B \in \Lambda$ *y* $A \subseteq B$, *entonces* $P(A) \leq P(B)$.

5. *Si* $A \in \Lambda$, *entonces* $P(A) \leq 1$.

6. *Sean* $A, B \in \Lambda$, *entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

7. *Si* $A, B \in \Lambda$, *entonces* $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

8. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente de eventos, es decir,* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ *entonces,*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

9. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de eventos, es decir,* $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ *entonces,*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

10. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \Lambda$ *una familia de eventos, entonces,*

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<t=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_t) - \\ &- \sum_{i<j<t<r=4}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_t \cap A_r) + \cdots + (-1)^{k+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_k). \end{aligned}$$

Demostración:

3. Supongamos que $B_1 = A_1, \ldots, B_n = A_n \quad \text{y} \quad \emptyset = B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots$.

   Como $\{B_n\}_{n\geq 1}$ es una familia disjunta de eventos,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \emptyset\right) \\ &= P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\emptyset) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(B_k) + 0 = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \end{aligned}$$

8. Definimos la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde, $B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \ldots, B_n = A_n - A_{n-1}, \ldots$.

   Nótese que los elementos de $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos:

si $i > j$, $B_i \cap B_j = (A_i - A_{i-1}) \cap (A_j - A_{j-1}) = (A_i \cap A_{i-1}^c) \cap (A_j \cap A_{j-1}^c)$,

como $i > j$, se tiene que $A_j \cap A_{j-1}^c \subset A_j \subseteq A_{i-1}$, luego,

$$(A_i \cap A_{i-1}^c) \cap (A_j \cap A_{j-1}^c) = A_i \cap (A_{i-1}^c \cap A_j \cap A_{j-1}) = A_i \cap \emptyset = \emptyset.$$

Sabemos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente, luego, por (7) para todo $i \geq 2$

$$P(B_i) = P(A_i - A_{i-1}) = P(A_i) - P(A_{i-1}),$$

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(P(B_1) + \sum_{i=2}^{n} P(B_i)\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[P(A_1) + \sum_{i=2}^{n}[P(A_i) - P(A_{i-1})]\right] = \lim_{n\longrightarrow\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

10. Resulta sencillo demostrar esta parte de la proposición para $k = 1, 2, 3$.

Supongamos que es válida para $k = s > 3$, es decir,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{s} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{s+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_s)$$

veamos que es válida para $k = s + 1$.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{s+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cup A_{s+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) + P(A_{s+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cap A_{s+1}\right),$$

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cap A_{s+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{s}(A_i \cap A_{s+1})\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{s} B_i\right), \text{donde}, \ B_i = A_i \cap A_{s+1}.$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{s} B_i\right) &= \sum_{i=1}^{s} P(B_i) - \sum_{i<j=2}^{s} P(B_i \cap B_j) + \cdots + (-1)^{s+1} P(B_1 \cap \cdots \cap B_s) \\
&= \sum_{i=1}^{s} P(A_i \cap A_{s+1}) - \sum_{i<j=2}^{s} P(A_i \cap A_j \cap A_{s+1}) + \cdots + (-1)^{s+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_s \cap A_{s+1}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{s+1} A_i\right) &= P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cup A_{s+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) + P(A_{s+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) \cap A_{s+1}\right) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{s} A_i\right) + P(A_{s+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{s} (A_i \cap A_{s+1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{s} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{s+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_s) + P(A_{s+1}) - \\
&- \sum_{i=1}^{s} P(A_i \cap A_{s+1}) \sum_{i<j=2}^{s} P(A_i \cap A_j \cap A_{s+1}) + \cdots + (-1)^{s+2} P(A_1 \cap \cdots \cap A_s \cap A_{s+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{s+1} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{s+1} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{s+2} P(A_1 \cap \cdots \cap A_s \cap A_{s+1}),
\end{aligned}
$$

luego, la proposición es válida para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

A.0.2 Proposición. *Sean* (Ω, Λ, P) *un espacio de probabilidad y* $A, B \in \Lambda$*, tal que* $P(B) > 0$*, entonces:*

1. $P(\cdot \mid B)$ *es una medida de probabilidad.*
2. *Si* $A \cap B = \emptyset$*, entonces* $P(A \mid B) = 0$.
3. *Si* $B \subseteq A$*, entonces* $P(A \mid B) = 1$.

Demostración:

1. Tenemos que $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$ para cada $A \in \Lambda$, además,

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$ una sucesión de eventos mutuamente excluyentes, entonces,

$$P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right)\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B).$$

Así, $P(\cdot \mid B)$ es una medida de probabilidad.

2. $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0.$$

3. $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

■

A.0.3 Proposición. *Sean (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \Lambda$ una sucesión finita de eventos, tales que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, entonces,*

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

A.0.4 Proposición. *Sean (Ω, Λ, P) un espacio de probabilidad y $A, B \in \Lambda$ son eventos independientes, entonces, también lo son:*

1. A *y* B^c

2. A^c *y* B^c.

A.0.5 Proposición. *Sean X e Y variables aleatorias discretas y $Z = K(X, Y)$, donde K es una función de las variables aleatorias X, Y, entonces*

$$E[Z] = \sum_{i,j} K(x_i, y_j) h(x_i, y_j),$$

donde h es la distribución conjunta de X e Y.

A.0.1 Corolario. *Sean X e Y variables aleatorias discretas, entonces*

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y].$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que $X+Y$ es una variable aleatoria.

Supongamos que $Z = X+Y = K(X,Y)$, luego, por proposición (A.0.5),

$$\begin{aligned}
E[Z] &= E[X+Y] = \sum_{i,j}(x_i+y_j)h(x_i,y_j) \\
&= \sum_i \sum_j (x_i+y_j)h(x_i,y_j) = \sum_i \sum_j [(x_i h(x_i,y_j)) + (y_j h(x_i,y_j))] \\
&= \left(\sum_i \sum_j x_i h(x_i,y_j)\right) + \left(\sum_i \sum_j y_j h(x_i,y_j)\right) \\
&= \sum_i x_i \sum_j h(x_i,y_j) + \sum_j y_j \sum_i h(x_i,y_j) \\
&= \sum_i x_i f(x_i) + \sum_j y_j g(y_j) = E[X] + E[Y].
\end{aligned}$$

■

A.0.6 Proposición. *Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X, entonces para toda función a valores reales g, se cumple que:*

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

La demostración de la proposición anterior puede consultarse en [2], página 98.

Apéndice B

Programas.

B.1 Introducción.

En esta sección se exponen los programas realizados con el software matemático **MATLAB** versión 7.5, que permitieron obtener la distribución de probabilidad del riesgo de los modelos *Poisson* compuesto, *Pólya* compuesto y *CreditRisk*$^{+}$ en Portafolio 1 y Portafolio 2, mediante la fórmula de *Panjer*.

Para la realización de estos programas fueron necesarios los siguientes datos:

1. El promedio y la varianza del número de incumplimientos (ver tabla 3, capítulo 3).

2. La distribución empírica de los montos de Portafolio 1 y Portafolio 2.

3. La varianza de la variable mixta Q, representada por h.

Las cantidades obtenidas a partir de estos programas, como la pérdida esperada y el $VaR(0,995)$ nominal de Portafolio 1 y Portafolio 2, representan aproximaciones de los valores reales, pues en la práctica la manera habitual de calcular estas cantidades por medio de la fórmula de *Panjer*, es agrupar los créditos de un portafolio, en bandas, de acuerdo con su monto expuesto.

A continuación, en cada programa correspondiente a Portafolio 1 se utiliza el símbolo % para indicar los comentarios acerca de las líneas de código más relevantes.

B.2 Programa Correspondiente al Modelo Poisson Compuesto.

poissoncartera1.m

lambda= 40.23; % promedio del número de incumplimientos o tasa de incumplimiento de Portafolio 1.

v=[1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 12; 13; 14]; % vector cuyas componentes representan el número de unidades de banda, en que se agrupan los montos de los créditos de Portafolio 1. Por ejemplo, la segunda componente de este vector es 3, significa que esta banda cuenta con créditos cuyo monto pertenece al intervalo $(\$800, \$1.200]$

acre=[15;10;15;24;30;38;30;90;120;128]; % vector cuyas componentes representan el número de créditos de cada banda de Portafolio 1. Por ejemplo, la segunda componente de este vector es 10, significa que la segunda banda tiene 10 créditos.

for i=1:10 % procedimiento que calcula la tasa de incumplimiento de cada banda.
lamb(i)=(acre(i)/500)*lambda;
end

Fórmula de *Panjer*.

P=[exp(-lambda)]; % arreglo cuya componente representa la condición inicial o $P(S = 0)$ de la fórmula de *Panjer*.

for eta=1:2000 % cálculo de la probabilidad del riesgo.

suma=0;
for j=1:10
if v(j)<= eta

suma=suma+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);

end

end

P=[P;suma] ;

end

x=400*[0:2000]; % intervalo de la pérdida, es decir, se contempla en la gráfica una pérdida no mayor de ($400)2.000 = $800.000.

plot(x,P,'.r') % gráfica de la distribución del riesgo.

poissoncartera2.m

```
lambda=40.23;
acre=[499;1];
v=[8; 1351];

for i=1:2
lamb(i)=(acre(i)/500)*lambda;
end

P0=exp(-lambda);
P=[P0];

for eta=1:2500
suma=0;
for j=1:2
```

```
if v(j)<= eta
suma=suma+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);
end
end

P=[P;suma] ;
end
x=400*[0:2500];
```

B.3 Programa Correspondiente al Modelo Pólya Compuesto.

polyacartera1.m

```
lambda= 40.23;
acre=[15 10 15 24 30 38 30 90 120 128];

v=[1 3 4 5 6 7 8 12 13 14];
for i=1:10
lamb(i)=(acre(i)/500)*lambda;
end

ej=lamb.*v;
h=0.140115291; % varianza de la variable mixta Q.
Y0=(1/(1+lambda*h))^(1/h); % condición inicial Panjer
Y=[Y0];

for eta=1:2000
suma=0;
```

```
for j=1:10
if v(j)<= eta
suma=suma+((lamb(j))/(lambda+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+lambda*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end

Y=[Y;suma] ;
end

su=[]

for k=1:1000
suma=suma+A(k);
su=[su;suma];
end

x=400*[0:2000];
```

polyacartera2.m

```
lambda=40.23;
acre=[499 1 ];
v=[8 1351];

for i=1:2
lamb(i)=(acre(i)/500)*lambda;
end
```

```
ej=lamb.*v
h=0.140115291;
Y0=(1/(1+40.23*h)).^(1/h);
Y=[Y0];

for eta=1:2500
suma=0;

for j=1:2
if v(j)<= eta
suma=suma+((lamb(j))/(40.23+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+40.23*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end

Y=[Y;suma] ;
end

x=400*[0:2500];
```

B.4 Programa Correspondiente al Modelo CreditRisk$^+$ con $h = 0,5$ y $h = 1$.

Para $h = 0,5$, tenemos:

creditrisk1cartera1.m

```
acre=[15;10;15;24;30;38;30;90;120;128];
```

```
v=[1 3 4 5 6 7 8 12 13 14];

for i=1:10 % media de incumplimiento de cada banda correspondiente a cada sector donde opera un factor de riesgo.
lamb(i)=(acre(i)/500)*18.92314664;
lamby(i)=(acre(i)/500)*21.30685338;
end

P=[exp(-18.92314664)]; % condición inicial Panjer del sector Poisson

ej=lamby.*v; % condición inicial Panjer del sector Pólya
h=0.140251842;
Y=[(1/(1+21.30685338*h)).^(1/h)];

for eta=1:2000 % cálculo de los eta para Poisson y Pólya
sumaP=0;
sumaY=0;

for j=1:10
if v(j)<= eta
sumaP=sumaP+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);
sumaY=sumaY+((lamby(j))/(21.30685338+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+21.30685338*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end

P=[P;sumaP] ;
Y=[Y;sumaY] ;
end
```

```
C1=[];
for k=1:2001
suma=0;

for j=1:k
suma=suma+P(j)*Y(k-j+1);
end

C1=[C1;suma];
end

x=400*[0:2000];
```

creditrisk1cartera2.m

```
acre=[499 1];
v=[8 1351 ];

for i=1:2
lamb(i)=(acre(i)/500)*18.92314664;
lamby(i)=(acre(i)/500)*21.30685338;
end

P=[exp(-18.92314664)];

ej=lamby.*v;
h=0.140251842;
```

```
Y=[(1/(1+21.30685338*h)).^(1/h)];

for eta=1:2500
sumaP=0;
sumaY=0;

for j=1:2
if v(j)<= eta
sumaP=sumaP+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);
sumaY=sumaY+((lamby(j))/(21.30685338+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+21.30685338*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end

P=[P;sumaP] ;
Y=[Y;sumaY] ;
end
C1=[];

for k=1:2501
suma=0;
for j=1:k
suma=suma+P(j)*Y(k-j+1);
end
C1=[C1;suma];
end

x=400*[0:2500];
```

Para $h = 1$, tenemos:

creditrisk2cartera1.m

```
acre=[15;10;15;24;30;38;30;90;120;128];
v=[1 3 4 5 6 7 8 12 13 14];

for i=1:10
lamb(i)=(acre(i)/500)*25.16377951;
lamby(i)=(acre(i)/500)*15.06622049;
end

P=[exp(-25.16377951)];
ej=lamby.*v;
h=0.140251842;
Y=[(1/(1+15.06622049*h)).^(1/h)];

for eta=1:2000
sumaP=0;
sumaY=0;

for j=1:10
if v(j)<= eta
sumaP=sumaP+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);
sumaY=sumaY+((lamby(j))/(15.06622049+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+15.06622049*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end
P=[P;sumaP] ;
```

```
Y=[Y;sumaY] ;
end

C2=[];

for k=1:2001
suma=0;

for j=1:k
suma=suma+P(j)*Y(k-j+1);
end
C2=[C2;suma];
end

x=400*[0:2000];
```

creditrisk2cartera2.m

```
acre=[499 1];
v=[8 1351 ];

for i=1:2
lamb(i)=(acre(i)/500)*25.16377951;
lamby(i)=(acre(i)/500)*15.06622049;
end

P=[exp(-25.16377951)];
ej=lamby.*v;
```

```
h=0.140251842;
Y=[(1/(1+15.06622049*h)).^(1/h)];

for eta=1:2500
sumaP=0;
sumaY=0;

for j=1:2
if v(j)<= eta
sumaP=sumaP+(v(j)*lamb(j))/eta*P(eta-v(j)+1);
sumaY=sumaY+((lamby(j))/(15.06622049+h.^(-1))+((1-h).*ej(j))/((1+15.06622049*h)*eta))*Y(eta-v(j)+1);
end
end
P=[P;sumaP] ;
Y=[Y;sumaY] ;
end
C2=[];
for k=1:2501
suma=0;
for j=1:k
suma=suma+P(j)*Y(k-j+1);
end
C2=[C2;suma];

end
x=400*[0:2500];
```

Bibliografía

[1] ALTMAN E. *Financial Ratios, Discriminant Analysis and Prediction of Corporate Bankruptcy*, Journal of Finance, Vol.23 pp.589-609, 1968.

[2] ARRIOJAS M. *Probabilidades.* Centro de Probabilidades y Estadística, Escuela de Matemáticas U.C.V. Notas de curso. Disponible en http://euler.ciens.ucv.ve/pregrado/probabilidades/Cursol.pdf

[3] CHUNG K. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, 1974.

[4] CREDIT SUISSE. *CreditRisk$^+$.* Credit Suisse First Boston International, London E14 4QJ, 1997. Disponible en http://www.ma.hw.ac.uk/ mcneil/F79CR/CreditRisk.pdf

[5] DAYKIN C., PENTIKÄINEN T., PESONEN M. *Practical Risk Theory for Actuaries.* Chapman-Hall, 1994.

[6] DE GROOT M. *Probabilidad y Estadística.* Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1998.

[7] ELIZONDO ALAN. *Medición Integral del Riesgo de Crédito.* Limusa, México, 2004.

[8] FELLER W. *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Volumen I.* Limusa, México, 1973.

[9] GORDY M. *From CreditMetrics to CreditRisk+ and Back Again.* Board of Governors of the Federal Reserve System, 1998.

[10] JACOD J., PROTTER P. *Probability Essentials.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] J.P.MORGAN. *CreditMetrics™-TechnicalDocument.* J.P.Morgan, New York, 1997. Disponible en http://www.defaultrisk.com/

[12] LIPSCHUTZ S. *Probabilidad.* Mac Graw Hill, México, 1970.

[13] MÁRQUEZ J. *Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios.* Banco de México, México, 2002. Disponible en http://www.banxico.com.mx/sistemafinanciero/didactico/riesgos.pdf

[14] MENDENHALL W., SINCICH T. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Prentice-Hall, México, 1997.

[15] MERTON R. *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rate* Journal of Finance, Vol.29, pp.449-470, 1974.

[16] PANJER H.H., WILLMOT G.E. *Insurance Risk Models.* Society of Actuaries., 1992.

[17] RINCÓN L. *Teoría del Riesgo en Seguros.* Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, Circuito Exterior de CU, 04510 México DF, 2006. Disponible en http://www.lars@fciencias.unam.mx.pdf

[18] ROSS S. *A First Course in Probability.* MacMillan Publishing Company, 1998.

[19] ROYDEN H. *Real Analysis.* MacMillan Publishing Company, 1968.

[20] TOM M. APOSTOL. *Análisis Matemático.* Reverté, España, 1976.

[21] TOM M. APOSTOL. *CALCULUS. Volumen I.* Reverté, España, 1973.