



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

# Estudio de Algunas Propiedades del Mar usando Datos Satelitales

Trabajo Especial de Grado presentado ante  
la ilustre Universidad Central de Venezuela  
por la **Br. Leimar Torres Barreto** para  
optar al título de Licenciada en Matemática.

**Tutor: MSc. José B. Hernández Ch.**

Caracas, Venezuela

Mayo 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Estudio de Algunas Propiedades del Mar usando Datos Satelitales**”, presentado por la **Br. Leimar Torres Barreto**, titular de la Cédula de Identidad **18.528.540**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

---

**MSc. José B. Hernández Ch.**  
**Tutor**

---

**Dra. Mairene Colina**  
**Jurado**

---

**MSc. Luis Paredes**  
**Jurado**

## Dedicatoria

Existen muchas personas a las que me gustaría dedicarle mi trabajo especial de grado, pero lo voy a dedicar a una mujer que siempre tuvo confianza en mí de que iba a lograr todo lo que me proponía en la vida, mi **abuela Marina**. Aunque ya no estés físicamente conmigo, se que estés donde estés te sientes orgullosa de tu nieta.

## Agradecimiento

Agradezco primeramente a Dios, por darme sabiduría y permitirme cumplir una de mis mayores metas.

A mis padres, Leides y Ramón, por hacer de mí la mujer que soy hoy en día y por ser mi principal apoyo y mis mejores amigos.

A Gabriel por quererme, ayudarme y hacerme sentir en todo momento que soy importante en su vida.

A mi tutor, el profesor José Benito Hernández Chaudary, por toda su paciencia, tiempo y por la ayuda que me prestó para la feliz culminación de mi trabajo especial de grado.

A mis amigas de toda la vida Milagros y Ana, gracias por siempre ayudarme y brindarme su amistad incondicional.

A mi compañeros y amigos, Antonietta Imbriano, Francisco Fernández, Wittney Castillo, Yorley Acevedo, Víctor Díaz, Ambar González, por todos los momentos de alegría, de complicidad y todas las vivencias en la Universidad.

A todos los profesores de quienes he tenido el honor de recibir sus conocimientos.

A mis tíos Blanca, Elcida, Virgilio, Eloina, Ernesto, Jaime y en especial a mi tío Marino por siempre confiar en mí y por brindarme su apoyo cuando más lo necesitaba.

Gracias a todos.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
<b>1 Fundamentos Matemáticos del Mar</b>	<b>14</b>
1.1 Características del Mar . . . . .	14
1.1.1 Anatomía de las Olas . . . . .	14
1.1.2 Descripción del Mar en Tiempo y Espacio . . . . .	15
1.1.3 Altura Significativa de la Ola . . . . .	16
1.1.4 Características basadas en cruces del nivel medio . . . . .	17
1.1.5 Características basadas en extremos sucesivos . . . . .	18
1.1.6 Momento Espectral . . . . .	18
1.1.7 Algunas Propiedades del Mar . . . . .	18
1.2 Espectro de Olas y Modelos Estadísticos de las Olas . . . . .	20
1.2.1 Ola como un proceso Gaussiano . . . . .	20
1.2.2 Modelos lineales de las Olas . . . . .	22
1.2.3 Representación Espectral . . . . .	23
1.2.4 Espectro Jonswap . . . . .	26
<b>2 Satélites</b>	<b>28</b>
2.1 Los Primeros Desarrollos . . . . .	28
2.2 ¿Qué se puede medir desde los Satélites? . . . . .	30
2.3 Órbitas y Toma de Muestras . . . . .	32
2.4 Elevación de la Superficie . . . . .	34
2.4.1 El Geoide . . . . .	34
2.4.2 Las Corrientes Superficiales . . . . .	35
2.4.3 Las Mareas y Oleadas . . . . .	37

2.5	Rugosidad de la Superficie . . . . .	37
2.5.1	Dispersómetro . . . . .	40
2.5.2	Altímetros . . . . .	42
2.6	El Hielo . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Análisis de Datos y Resultados</b>	<b>44</b>
3.1	Análisis de datos . . . . .	44
3.2	Resultados . . . . .	45
3.3	Simulación del Registro de Olas . . . . .	52
3.3.1	Densidad Espectral . . . . .	54
3.3.2	Espectro S-Jons . . . . .	59
3.4	Conclusiones . . . . .	65
	<b>Apéndice</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Introducción

La relación entre el hombre y el océano ha sido desde siempre muy estrecha. El mar ha constituido una fuente de alimentos y un medio por el cual transportarse, favoreciendo la relación entre diferentes comunidades y sociedades humanas. Pese a su importancia en el desarrollo de la humanidad, el océano ha permanecido hasta hace poco relativamente en el ámbito del misterio y las creencias. Tanto es así, que hasta la década de los años 70, ya en pleno siglo veinte, se tenía mas conocimiento sobre la luna que sobre nuestro propio mar. Unas de las principales razones que causan dificultad en la exploración del medio marino, es que el océano a diferencia de la luna, está en cambio permanente, esto hace que las condiciones observadas ayer sean sustancialmente distintas a las que se pueden ver hoy. Esta variabilidad se da tanto en el espacio como en el tiempo. Esto es, el estado del mar (sus corrientes, temperaturas, alturas, etc) cambia de un punto a otro del planeta para un tiempo fijo y, además, varía de un momento a otro para un mismo punto.

A pesar de las distintas limitaciones que se han presentado en el estudio del comportamiento del mar, se han realizado grandes avances en las últimas décadas, dentro de esos avances está la utilización de los satélites como instrumento de estudio de las características del mar. La gran ventaja de los satélites es sin lugar a dudas su capacidad de cubrir amplias zonas del océano en poco tiempo. Esto proporciona una idea sobre la variabilidad espacial y temporal de las distintas zonas oceánicas. Su desventaja es que sólo una cantidad muy limitada de variables oceánicas pueden ser medidas desde las plataformas satelitales. Estas variables están relacionadas con aspectos superficiales del mar y, por tanto, sólo dan información limitada acerca del interior del océano.

El objetivo principal de este trabajo es analizar datos tomados de satélites de distantes partes, entre ellas de la Guaira (Venezuela), San Juan (Puerto Rico), Veracruz (México) y Key West (USA), en un periodo de tiempo comprendido de diez años (1985-1994). Nos concentraremos en estudiar una de las principales características superficiales, tal como lo

---

son las alturas significativas  $H_S$ , y a partir de estas analizar las frecuencias de energía predominantes, de las zonas antes mencionadas.

Para lograr el objetivo anterior supondremos que la superficie del Mar puede ser modelada como una “superficie aleatoria” que evoluciona en el tiempo, es decir, como un proceso aleatorio que depende de la posición en el espacio  $x$ , del tiempo  $t$  y, por supuesto, de un parámetro aleatorio  $\omega$  que pertenece a un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P): M(t, \mathbf{x}, \omega)$ . Además, utilizaremos el momento espectral para calcular las alturas significativas.

Debido a que los datos satelitales, son recolectados por horas se puede perder mucha información sobre el comportamiento del mar, es por esta razón que se realizará una simulación con el mes de enero de 1985, y a partir de esto se procederá a hacer comparaciones con la densidad espectral y el espectro S-Jons de los datos originales de la Guaira.

Todos los cálculos, tales como las alturas significativas  $H_s$ , densidad espectral y espectro S-Jons se realizarán con WAFO (*Wave Analysis for Fatigue and Oceanography*), la cual es una caja de herramientas de MATLAB, desarrollada por la Universidad de Lund en Suecia, que se utiliza para el análisis estadístico, la simulación de olas y las cargas aleatorias al azar.

En los preliminares daremos las definiciones de procesos estocásticos, procesos gaussianos, funciones positivas definidas, y de algunos teoremas tales como el teorema de Bochner, que es el que utilizamos para realizar la representación espectral de las olas, entre otros.

En el capítulo 1 asentaremos los fundamentos matemáticos del mar, entre las cuales están las anatomías de las olas, alturas significativas, momentos espectrales, modelos lineales de las olas, representación espectral, entre otros.

En el capítulo 2 presentaremos una descripción de los satélites, en donde se explicará que se puede medir desde los satélites, los primeros desarrollos, las órbitas y tomas de muestras, los distintos instrumentos de los satélites tales como el dispersómetro y el altímetro, entre otros.

En el capítulo 3 se mostrarán los resultados y análisis de datos. Así como las simulaciones, de los registros de las olas, y la comparación entre los resultados de los datos originales y los



simulados, y las conclusiones respectivas.

Finalmente se presentará un apéndice en donde se muestra la descripción del formato de los datos obtenidos en la pagina de la NOAA y la definición de la Ley de Bragg.

# Preliminares

El Objetivo de esta sección es presentar algunas definiciones, fórmulas y teoremas que servirán como herramientas para la comprensión de los siguientes capítulos.

**Definición 0.1** Sea  $T$  un conjunto de parámetros. Un **proceso estocástico**  $\{x(t)\}_{t \in T}$  indexado por el parámetro  $t \in T$  es una familia de variables aleatorias  $x(t)$  definido sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . En otras palabras, un proceso estocástico es una función

$$T \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto x(t, \omega) \in \mathbb{R},$$

tal que para un  $t = t_0$  fijo,  $x(t_0, \cdot)$  es una variable aleatoria, es decir, una función medible Borel,  $\Omega \ni \omega \mapsto x(t_0, \omega) \in \mathbb{R}$ , y para un  $\omega = \omega_0$  fijo,  $x(\cdot, \omega_0)$  es una función  $T \ni t \mapsto x(t, \omega_0) \in \mathbb{R}$ .

La familia  $\{F_t^n\}_{n=1}^\infty$  de distribuciones finito-dimensional es la familia de funciones de distribución.

$$F(a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = \text{Prob}(x_1 \leq a_1, \dots, x_n \leq a_n); n = 1, 2, \dots; t_j \in T.$$

**Definición 0.2** Un proceso estocástico  $x(t)$  es **estrictamente estacionario** si todas las distribuciones  $n$ -dimensionales de

$$x(t_1 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)$$

son independientes de  $\tau$ . Es llamado débilmente estacionario (también es usado el término estacionario de 2do orden) si la media es constante,  $E(x(t)) = m$ , y si la función de covarianza

$$r(t) = \text{cov}(x(s+t), x(s))$$

es una función solo del paso  $t$ . Cada función continua de covarianza tiene una representación como una serie de Fourier

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} dF(w)$$

donde la función  $F(w)$  es llamado función de distribución espectral.  $F(w)$  está caracterizada por las siguientes propiedades:

- *Simetria:*  $dF(-w) = dF(w)$ .
- *Monotonía:*  $w \leq w'$  implica  $F(w) \leq F(w')$ .
- *Acotada:*  $F(+\infty) - F(-\infty) = r(0) < \infty$ .

**Definición 0.3** Un vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$  de  $p$ -variables se dice que tiene **distribución gaussiana  $p$ -dimensional** si cada combinación lineal de estos componentes  $a' \cdot \xi = \sum_k a_k \xi_k$  tiene una distribución normal. Las variables  $\xi_1, \dots, \xi_p$  son entonces llamadas conjuntamente normales.

**Definición 0.4** Un proceso estocástico  $M(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , es un **proceso Gaussiano** si cada combinación lineal

$$S = \sum_k a_k M(t_k)$$

con  $a_k$  y  $t_k \in \mathbb{R}$  tiene distribución Gaussiana.

**Definición 0.5** Una función a valores complejos  $r(t)$  dada en  $(-\infty, \infty)$  se dice que es **Positiva Definida** si para cada entero  $n \geq 1$  y  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  y complejos  $Z_1, \dots, Z_n$  se tiene que

$$\sum_{j,k=1}^n r(t_j - t_k) Z_j \bar{Z}_k \geq 0. \quad (0.1)$$

En particular, se asume que la suma (0.1) es un número real.

**Lema 0.6**      Sea  $r(t)$  una función continua positiva definida, entonces:

1.  $r(t) \geq 0$ .
2.  $\overline{r(t)} = r(-t)$ ,  $|r(t)| \leq r(0)$  y en particular,  $r(t)$  es una función acotada.
3. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt < \infty \text{ entonces } \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt \geq 0.$$

4. Para cada  $x \in \mathbb{R}$ , la función  $e^{itx}r(t)$ , como función de  $t$ , es positiva definida.

Demostración.

1. Se sigue de la definición de función positiva definida para funciones a valores complejos con  $n = 1$ ,  $z = 1$ .
2. Sea  $n = 2$ ,  $t_1 = t$ ,  $t_2 = 0$ ,  $Z_1 = Z \in \mathbb{C}$ ,  $Z_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ , sustituyendo estos valores en la ecuación (0.1) y desarrollando el segundo sumando tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 Z_k \overline{Z_j} r(t_k - t_j) \geq 0 \\ & \sum_{k=1}^2 (Z_k \overline{Z_1} r(t_k - t_1) + Z_k \overline{Z_2} r(t_k - t_2)) \\ & = Z_1 \overline{Z_1} r(t_1 - t_1) + Z_1 \overline{Z_2} r(t_1 - t_2) + Z_2 \overline{Z_1} r(t_2 - t_1) + Z_2 \overline{Z_2} r(t_2 - t_2) \\ & = |Z_1|^2 r(0) + Z_2 \overline{Z_1} r(t_1 - t_2) + Z_2 \overline{Z_1} r(t_2 - t_1) + |Z_2|^2 r(0) \\ & = |Z|^2 r(0) + Z \lambda r(t) + \overline{Z} \lambda r(-t) + \lambda^2 r(0) \\ & = r(0)(|Z|^2 + \lambda^2) + \lambda(Zr(t) + \overline{Z}r(-t)) \geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $Zr(t)\overline{Z}r(-t) \in \mathbb{R}$ , así

$$Zr(t) + \overline{Z}r(-t) = \overline{Zr(t) + \overline{Z}r(-t)} = \overline{Zr(t)} + \overline{\overline{Z}r(-t)} = \overline{Zr(t)} + Zr(-t)$$

Siendo  $Z \in \mathbb{R}$

$$Z(r(t) - \overline{r(-t)}) = \overline{Z(\overline{r(t)} - r(-t))}.$$

Por lo tanto  $\overline{Z(\overline{r(t)} - r(-t))} \in \mathbb{R}$

por lo que  $2\text{Re}(Z(r(-t))) \in \mathbb{R}$  para cada  $Z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\overline{r(t)} - r(-t) &= 0 \\ \overline{r(t)} &= r(-t).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$r(0)(|Z|^2 + \lambda^2) + \lambda(Zr(t) + \overline{Z}r(-t)) \geq 0.$$

Sea  $Z = r(t)$

$$\begin{aligned}r(0)(|r(t)|^2 + \lambda^2) + \lambda(r(t)\overline{r(t)} + \overline{r(t)}r(-t)) &\geq 0 \\ r(0)(|r(t)|^2 + \lambda^2) + \lambda(|r(t)|^2 + r(t)r(-t)) &\geq 0 \quad \text{para cada } \lambda \\ r(0)(|r(t)|^2 + \lambda^2) + 2\lambda(|r(t)|^2) &\geq 0\end{aligned}$$

$r(0)\lambda^2 + 2\lambda(|r(t)|^2) + r(0)|r(t)|^2 \geq 0$ , podemos observar que este es un polinomio de grado 2, donde el discriminante viene dado por

$$\begin{aligned}4|r(t)|^4 - 4r(0)^2|r(t)|^2 &\leq 0 \\ |r(t)|^4 &\leq r(0)^2|r(t)|^2, \quad |r(t)|^2 \neq 0 \\ |r(t)|^2 &\leq r(0)^2 \\ |r(t)| &\leq r(0).\end{aligned}$$

3. Veamos que si  $\int_{-\infty}^{\infty} |r(t)| dt < \infty$  entonces  $\int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt > 0$

Ahora bien

$$\int_{-n}^n \int_{-n}^n r(t-s) dt ds = \sum_k \sum_j r(t_k - t_j) (\Delta t_k - \Delta t_j) \geq 0.$$

Por la definición de función positiva definida y tomando  $\Delta t_k - \Delta t_j \in \mathbb{C}$

$$0 \leq \frac{1}{n} \int_{-n}^n \int_{-n}^n r(t-s) dt ds = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \left(2 - \frac{|t|}{n}\right) I_{|t| \leq 2n} dt$$

donde la igualdad se sigue cambiando las variables  $t - s = t'$  y  $t + s = s'$ .

Por el teorema de convergencia Dominada de Lebesgue la última integral converge a

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} r(t) dt$$

4. Teniendo que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_k z_j e^{i(t_k - t_j)x} r(t_k - t_j) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_k e^{it_k x} z_j e^{-it_j x} r(t_k - t_j) \end{aligned}$$

tomando  $w_k = z_k e^{it_k x}$  y  $\bar{w}_j = z_j e^{-it_j x}$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n w_k \bar{w}_j r(t_k - t_j) \text{ y por definición tenemos que} \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n w_k \bar{w}_j r(t_k - t_j) \geq 0. \end{aligned}$$

□

### **Teorema 0.7 Teorema de Bochner**

Sea  $r(t)$  una función continua positiva definida, entonces existe una única medida no negativa  $F$  sobre  $\mathbb{R}$  tal que  $F(+\infty) - F(-\infty) = r(0)$  y

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F(dx), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

La unicidad se sigue inmediatamente de la teoría de funciones características.

La Existencia: Supongamos sin pérdida de generalidad  $r(0) = 1$ , incluso supongamos que  $r(0) = 1$ .

Veamos el resultado en el caso particular en el cual

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)| dt < \infty. \tag{0.2}$$

Entonces por la parte (2) del lema 0.6 tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |r(t)|^2 dt < \infty.$$

Ahora definamos  $f$  como la transformada de Fourier de  $r$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} r(t) dt.$$

Por la parte (3) del lema 0.6 y la ecuación (0.2), tenemos que  $f(x) \geq 0$ . De la teoría de transformada de Fourier obtenemos que  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  y

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx. \quad (0.3)$$

Para casi todo  $t$ , donde la última integral es entendida en el sentido de  $\mathcal{L}^2$  (como el límite en  $\mathcal{L}^2$  de  $\int_{|x| \geq N} e^{itx} f(x) dx$ ).

Para terminar la demostración en nuestro caso particular, demostraremos que  $f$  es integrable, de modo que la integral (0.3) existe en el sentido usual y es una función continua de  $t$ , lo cual junto con la continuidad de  $r$  implica que (0.3) vale para todo  $t$  en vez de para casi todo  $t$ .

Por la identidad de Parseval,  $s > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{sx^2}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2s}} r(t) dt.$$

Tomando en cuenta que la función  $\sqrt{\frac{s}{2\pi}} e^{-\frac{sx^2}{2}}$  es la transformada de Fourier de  $e^{-\frac{t^2}{2s}}$ , se tiene que la última integral se puede reescribir como  $E[r(\sqrt{s}\varepsilon)]$  donde  $\varepsilon \sim N(0, 1)$  y se ve que, debido a la acotación y continuidad de  $r$ , esta integral converge a  $r(0)$  cuando  $s$  tiende a 0. Ahora, el teorema de convergencia monótona ( $f \geq 0$ ) muestra que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = r(0) < \infty.$$

Esto demuestra el teorema bajo la condición 0.2.

En el caso general, para  $\varepsilon > 0$  definimos

$$r_\varepsilon(t) = r(t)e^{\frac{\varepsilon^2 t^2}{2}} = E[r(t)e^{it\varepsilon}].$$

Por la parte (4) del lema 0.6 se muestra que  $r_\varepsilon$  es positiva definida. Dado que

$$r_\varepsilon(0) = 1 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} |r_\varepsilon| dt < \infty$$

entonces existe una distribución para la cual  $r_\varepsilon$  es la función característica.

De la teoría de probabilidad se tiene que si una sucesión de funciones características converge a una función que es continua en cero, entonces esta función es también una función característica de la función de distribución. Dado que es obvio que  $r_\varepsilon \rightarrow r$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  este hecho nos da la demostración del teorema.

□

Un lema que será de utilidad para demostrar el teorema final de este capítulo, es el siguiente

**Lema 0.8 *Lema de Fatou*** Sea  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de funciones medibles  $f_n \geq 0$  para todo  $n$ . Entonces se tiene que

$$\int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

Demostración.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$$

Sea  $g_k = \inf_{k \geq n} f_n$ , entonces  $g_k \geq 0$  para todo  $n$  y  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  es una sucesión creciente. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k \tag{0.4}$$

como se tiene que para todo  $n$ ,  $f_n \geq g_n$ , entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\int f_n(x) dx \geq \int g_n(x) dx \tag{0.5}$$



Utilizando 0.4 y 0.5 y el teorema de convergencia dominada (aplicado a  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ ) se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) dx \\ &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n(x) dx \end{aligned}$$

□

**Teorema 0.9** *Sea  $X_t$  un proceso Gaussiano estacionario centrado con función de covarianza  $r$  ( $r(0) = 1$ ). Supongamos que existe una densidad espectral  $f$  tal que*

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

entonces  $X'$  existe en  $\mathfrak{L}^2$  si y solo si

$$m_2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx < \infty.$$

Demostración.

( $\rightarrow$ ) Si  $X'$  existe en  $\mathfrak{L}^2$  entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right]^2 = E[X'(t)^2].$$

Supongamos que  $X'$  existe en  $\mathfrak{L}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} \infty &> E[X'(t)^2] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right]^2 = \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t + X_t^2}{h^2} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} E[X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t + X_t^2] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [E(X_{t+h}^2) - 2E(X_{t+h}X_t) + E(X_t^2)] \end{aligned} \tag{0.6}$$

Teniendo que

$$Cov(X_{t+h}, X_{t+h}) = E(X_{t+h}^2) - E(X_{t+h})E(X_{t+h})$$

Por hipótesis  $X_t$  es un proceso centrado y  $r(0) = 1$ , por lo tanto

$$Cov(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h}^2) = Var(X_{t+h}) = r(0) = 1.$$

De igual forma  $E(X_t^2) = r(0) = 1$  y

$$Cov(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h}X_t) - E(X_{t+h})E(X_t) = r(t+h-t) = r(h).$$

Así sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (0.6) tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}[1 - 2r(h) + 1] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}[2 - 2r(h)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2}2[1 - r(h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{ihx}}{h^2} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(hx)}{h^2} f(x) dx \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \liminf 2 \frac{(1 - \cos(hx))}{h^2} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

La cuarta igualdad es debido a que la función es real (la parte imaginaria es igual a cero) y la desigualdad es por el lema de fatou, es importante señalar, para poder aplicar este lema, que

$$\frac{1 - \cos(hx)}{h^2} > 0$$

( $\leftarrow$ ) Por otra parte supongamos que  $m_2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx < \infty$  (Segundo momento espectral). Esto se puede definir via la representación espectral del proceso Gaussiano estacionario

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} ix \sqrt{f(x)} dW(x)$$

donde  $dW$  es el mismo ruido blanco que permite definir el proceso

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \sqrt{f(x)} dW(x)$$

El proceso  $Y$  es el candidato a ser la derivada de  $X$ . Ahora debemos demostrar que

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} - Y_t \right)^2 \right] &\rightarrow 0 \\ &= E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right)^2 - 2 \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t + Y_t^2 \right] \\ &= E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right)^2 \right] - 2E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t \right] + E [Y_t^2] \\ &= E \left[ \left( \frac{X_{t+h}^2 - 2X_{t+h}X_t + X_t^2}{h^2} \right) \right] - 2E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t \right] + E [Y_t^2] \end{aligned}$$

tomando límite cuando  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{h^2} (1 - r(h)) - 2E \left( \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t \right) + E(Y_t^2) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t \right] = 2 \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X_{t+h} Y_t}{h} - \frac{X_t Y_t}{h} \right]. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} E[X_{t+h} Y_t] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihx} (-i) x f(x) dx = -r'(h) \quad \text{y} \\ E[X_t Y_t] &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i) x f(x) dx = -r'(0) = 0. \end{aligned}$$

Así

$$2 \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{X_{t+h} Y_t}{h} - \frac{X_t Y_t}{h} \right] = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-r'(h) + r'(0)}{h} = 2(-r''(0)).$$

Por lo que todo se resume a demostrar que

$$2E \left[ \left( \frac{X_{t+h} - X_t}{h} \right) Y_t \right] \rightarrow 2(-r''(0)).$$

□

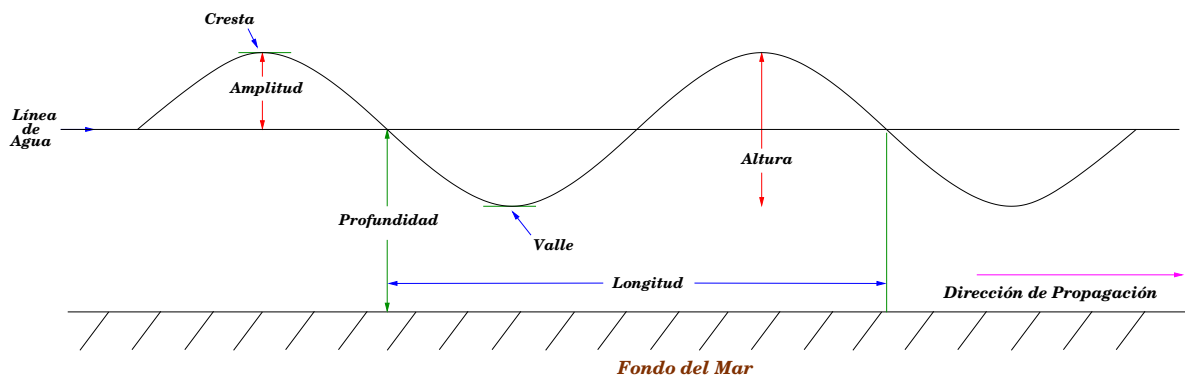
# Capítulo 1

## Fundamentos Matemáticos del Mar

### 1.1 Características del Mar

#### 1.1.1 Anatomía de las Olas

Las **Olas** son ondas que se desplazan por la superficie de los mares y océanos las cuales se ponen en movimiento mediante la acción del viento, estas son el principal agente de modelado de las costas y están constituidas por:



- Línea de Agua: es el nivel de la superficie del mar.
- Cresta: es el punto más alto de la ola, por encima de la línea de agua.
- Valle: es el punto más bajo de la ola, por debajo de la línea de agua.
- Altura: es la distancia vertical entre la cresta y el valle.

- Longitud: es la distancia horizontal entre las crestas sucesivas o valles sucesivos.
- Periodo: es el tiempo que tarda una ola completa en pasar por un punto particular.
- Frecuencia: es el número de olas que pasan un punto particular en un periodo de tiempo particular.
- Amplitud: es la mitad de la altura de las olas o la distancia desde la cresta hasta la línea de agua.
- Profundidad: es la distancia desde el fondo del océano, hasta la línea de agua.
- Dirección de Propagación: es la dirección en la que una ola viaja.

### 1.1.2 Descripción del Mar en Tiempo y Espacio

Supondremos que la superficie del Mar puede ser modelada como una “superficie aleatoria” que evoluciona en el tiempo, es decir, como un proceso aleatorio que depende de la posición en el espacio  $x$ , del tiempo  $t$  y, por supuesto, de un parámetro aleatorio  $\omega$  que pertenece a un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P): M(t, \mathbf{x}, \omega)$ . Por lo general omitiremos el parámetro  $\omega$ .

Los datos estadísticos del oleaje han sido obtenidos de boyas flotantes, de buques, o plataformas estacionarias. Esto significa que describen el oleaje como un proceso en el tiempo en un punto fijo. Usamos la notación  $M(t)$  para denotar la altura del nivel del mar en un punto fijo como función del tiempo  $t$ . En este caso decimos que depende del tiempo y lo que obtenemos es una serie temporal.

Las observaciones por satélites toman informaciones instantáneas sobre condiciones del mar sobre una gran área, es decir, los datos obtenidos de las medidas de satélites describen las condiciones del mar en un tiempo fijo sobre una gran región. Usamos la notación  $M(x)$  para denotar la altura del mar en un lugar  $x$  en un tiempo fijo  $t$ . Esto es llamado una descripción espacial del estado del mar. El parámetro  $x$  es bidimensional en el punto de colocación. Es necesario usar la notación  $M(t, x)$  cuando queremos describir simultáneamente variaciones con respecto al tiempo  $t$  y posición  $x$ .

Así

$$M(t) = M(t, x) \text{ con } x \text{ fijo mientras}$$

$$M(x) = M(t, x) \text{ con } t \text{ fijo.}$$

### 1.1.3 Altura Significativa de la Ola

La manera más simple para describir la severidad del estado del mar es por medio de alguna medida de variabilidad de la elevación de la ola  $M$  por arriba y debajo del nivel medio del mar. La medida más sencilla es la variación estándar de la elevación  $M$ , calculada como la desviación estándar observada en una larga secuencia de valores de las muestras  $z_1, \dots, z_N$ ,

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (z_k - \bar{z})^2}.$$

Para serie de datos suficientemente largos, se trata de una estimación precisa de la verdadera desviación estándar de la elevación del mar, es decir, de  $\sqrt{V(M(t))}$ .

Cabe señalar que ésta medida de la severidad del mar no depende ni del tiempo ni la ubicación en el espacio, es decir,  $V(M(t)) = V(M(x))$ .

La medida más importante de la severidad del mar es la altura significativa de la ola. Esta medida indica la altura de las olas más severas que uno puede encontrarse durante un plazo razonable de tiempo, esto significa que es lo suficientemente grande para ser de importancia o tener efecto en un barco o estructura marina.

#### Definición de Altura Significativa de la Ola

La altura Significativa de una Ola del estado del modelo del mar es definido como:

$$H_\sigma = 4\sigma,$$

donde

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{V(M(t))}$$

es la desviación estándar del proceso del nivel del mar.

La altura Significativa de una Ola de un estado del mar observado es

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (z_k - \bar{z})^2}$$

donde  $z_1, \dots, z_N$  es la secuencia de las mediciones independientes del nivel del mar y  $\bar{z}$  es el nivel medio del mar.

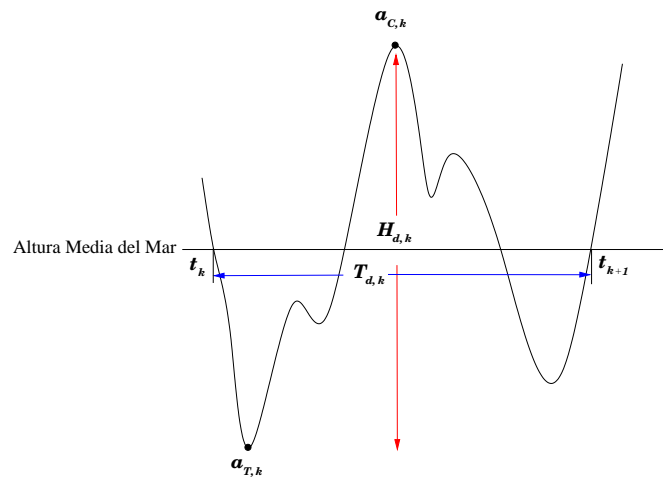
### 1.1.4 Características basadas en cruces del nivel medio

#### Cruces del nivel medio de las Olas

Sea  $M(t)$  el proceso que modela las olas en un punto del espacio;  $M(t)$  representa la altura sobre el nivel medio del mar. Supongamos que  $M(t)$  cruza este nivel medio hacia abajo en los instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . El tiempo entre dos cruces sucesivos del nivel medio hacia abajo definen el período de la ola. Usaremos la notación  $T_{d,k}$ :

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k.$$

La distancia vertical entre el máximo y el mínimo valor del proceso en este intervalo se define como la altura de la ola. Usaremos la notación  $H_{d,k}$ .

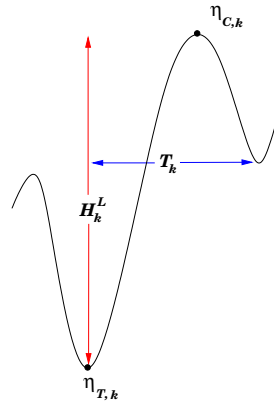


Una Cresta  $a_c$  es el máximo valor de  $M$  para  $t$  en un intervalo entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio:  $t_k < t < t_{k+1}$ . De manera similar un seno,  $a_s$  es el (valor absoluto del) valor mínimo en el mismo intervalo de tiempo. Para distinguir diferentes crestas y senos en los intervalos sucesivos ponemos un índice  $k$  en cada valor:  $(a_{C,k}, a_{S,k})$ .

### 1.1.5 Características basadas en extremos sucesivos

#### Mínimos y Máximos Locales

Supongamos que una ola tiene una sucesión de mínimos locales  $(M_{m,k})$  y máximos locales consecutivos  $(M_{M,k})$ . Una **ola min-max** es el par  $(M_{m,k}, M_{M,k})$  de valores mínimo y máximo consecutivos. La altura de la ola min-max es la diferencia entre estos valores mientras que el período min-max es la diferencia de tiempos correspondientes. De manera similar se define las **olas max-max** y **min-min**.



### 1.1.6 Momento Espectral

El momento espectral de orden  $n$  se define como:

$$m_n = \int_0^{\infty} \tau^n s(\tau) d\tau$$

La existencia de momentos de orden superior está asociada a una mayor regularidad de las trayectorias.

Los momentos espectrales no son los únicos parámetros asociados a la densidad espectral de interés en el estudio del mar. Ya vimos que la altura significativa es otro de ellos. En términos de los momentos espectrales la altura significativa es

$$H_{m_o} = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))} = 4\sqrt{m_o}$$

### 1.1.7 Algunas Propiedades del Mar

Para tener un modelo manejable que permita estudiar las propiedades del mar es necesario suponer 6 hipótesis



1. Permanencia en el tiempo de las condiciones del mar: Supondremos que el proceso que sirve de modelo es estacionario. Esto quiere decir que la distribución de  $M(t+h)$  es la misma para cualquier valor de  $h$ , y en particular es siempre igual a la de  $M(0)$ . Más aún, para cualquier valor de  $n$  y cualesquiera instantes de tiempo de  $t_1, t_2, \dots, t_n$  la distribución del vector  $(M(t_1+h), M(t_2+h), \dots, M(t_n+h))$  es independiente del valor de  $h$ .
2. Proceso Centrado: Supondremos que el nivel medio del mar es 0 y mediremos las variaciones respecto a él. Esto quiere decir que consideramos el proceso como  $E(M(t)) = 0$ .
3. Las trayectorias del Proceso  $M$  sean continuas:  $M$  es una función sobre el espacio producto  $[0, \infty) \times \Omega$  con la propiedad de que para cada  $t \in [0, \infty)$  fijo  $M(t, \bullet)$  es **medible**. Si fijamos  $\omega \in \Omega$  obtenemos una función

$$M(\bullet, \omega) : (0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$$

que se conoce como *trayectoria del proceso*. Pedimos que para casi todo  $\omega \in \Omega$  (es decir, con probabilidad 1) esta función sea continua.

4. El proceso sea ergódico: Sin entrar en detalles sobre el significado técnico de esta hipótesis, es ella la que permite sustituir los valores esperados (teóricos) por promedios temporales (empíricos).

$$E(M(t)) = \int_{\Omega} M(t, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t M(u) du$$

$$Cov(M(t), M(t+h)) = \int_{\Omega} M(t, \omega) M(t+h, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t M(u) M(u+h) du.$$

5. Gaussianidad: Esto quiere decir que la distribución de la altura de la ola en un punto dado y en un instante de tiempo  $t$  tiene la siguiente *función de distribución*.

$$P(M(t)) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza de la distribución.

La hipótesis de Gaussianidad quiere decir más que esto. Para cualquier valor de  $n$  y cualquiera instantes de tiempo  $t_1, t_2, \dots, t_n$  la distribución del vector  $(M(t_1 + h), M(t_2 + h), \dots, M(t_n + h))$  tiene *densidad gaussiana*

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}u' \sum^{-1} u\right\}$$

donde  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $\sum = (Cov(M(t_i), M(t_j)))$ .

6. La función de Covarianza debe satisfacer lo siguiente:

$$r(s, t) = Cov(M(s), M(t)) = E(M(s)M(t)) - E(M(s))E(M(t)).$$

Como estamos suponiendo que el proceso es estacionario y centrado, se tiene que

$$r(s, t) = Cov(M(s), M(t)) = E(M(s)M(t)) = r(|s - t|)$$

En particular si  $s = t$

$$r(s, s) = Var(M(s)) = E(M(s)^2) = r(0).$$

La función de covarianza  $r$  es par y por lo tanto, si es diferenciable en 0, la derivada debe ser nula. Más aún, si  $r$  tiene dos derivadas en el origen la segunda derivada debe ser negativa:  $r''(0) < 0$ .

## 1.2 Espectro de Olas y Modelos Estadísticos de las Olas

### 1.2.1 Ola como un proceso Gaussiano

Sea  $\eta$  un perfil de olas en un tiempo fijo  $t$ . Aquí  $\eta$  es una variable aleatoria en el espacio muestral  $(-\infty, \infty)$ .

Suponemos que  $\eta$  es la suma de un número grande de componentes  $X$ , esto es

$$\eta = x_1 + x_2 + \dots + x_n \tag{1.1}$$

donde los  $x_i$  son variables aleatorias estadísticamente independientes, con la misma distribución de probabilidad.

Sea el valor medio de  $x_i$  cero ( $E[x_i] = 0$ ) y su varianza  $Var[x_i] = \sigma^2$ .

Dado que las  $x_i$  son variables aleatorias linealmente independientes, por el Teorema Central del Límite la distribución de  $\eta$  tiene media cero y varianza  $\sigma^2$ .

Podemos por lo tanto estandarizar las variables  $\eta$  y escribimos la nueva variable estandarizada como  $Z$ , de modo que

$$Z = \frac{\eta}{\sqrt{n}\sigma} = \sum_{j=1}^n \frac{X_j}{\sqrt{n}\sigma}. \quad (1.2)$$

Sea  $\phi_x(t)$  la función característica de  $X$ , entonces usando las propiedades de la función característica, la función característica de  $\frac{\eta}{\sqrt{n}\sigma}$  la podemos escribir como  $\phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ . Por consiguiente la función característica de  $Z$  es

$$\phi_Z(t) = \left[ \phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right]^n. \quad (1.3)$$

Por otra parte, la función característica en general se puede expandir como

$$\phi_x(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2] + \dots \quad (1.4)$$

Dado que  $E[X] = 0$  y  $E[X^2] = 1$ , para una variable estandarizada, podemos escribir  $\phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$  como sigue

$$\phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \quad (1.5)$$

y por lo tanto, tenemos

$$\phi_Z(t) = \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n \quad (1.6)$$

haciendo  $n \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_Z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n,$$

de donde

$$\phi_Z(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (1.7)$$

esta es la función característica de una distribución  $N(0, 1)$ . Esto implica que la variable aleatoria  $Z$  tiene distribución  $N(0, 1)$ .

Así, el proceso  $\eta$  tiene distribución normal de media cero y varianza  $n\sigma^2$ , por consiguiente podemos decir que el proceso que describe las olas es un **proceso Gaussiano**.

### 1.2.2 Modelos lineales de las Olas

Usaremos  $M(t)$  como la descripción de una ola aleatoria en función del tiempo. La manera matemática más sencilla de sintetizar una ola aleatoria es como la suma de un número finito de elementos armónicos de olas con diferentes frecuencias angulares.

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(W_k t + \phi_k) \quad (1.8)$$

donde  $A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  son amplitudes elegidas aleatoriamente con algunas distribuciones estadísticas, y  $\phi_k$  son fases aleatorias, todas las distribuciones aleatorias entre 0 y  $2\pi$ . La frecuencia  $W_k$  son en esta representación frecuencias constantes, distribuidas sobre el rango entero de frecuencia de las olas. Los términos son asumidos por separados en  $M(t)$  para ser estadísticamente independientes de cada interacción.

Una manera alternativa de la representación (1.8) es la siguiente

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(W_k t) + Y_k \operatorname{sen}(W_k t), \quad (1.9)$$

donde  $X_k$  y  $Y_k$  son cantidades aleatorias, tal que  $A_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}$  y  $\cos(\phi_k) = \frac{X_k}{A_k}$ ,  
 $\operatorname{sen}(\phi_k) = -\frac{Y_k}{A_k}$ .

### 1.2.3 Representación Espectral

La función de covarianza de cualquier proceso estacionario es positiva definida: Para cualquier  $n$  y cualesquiera  $z_1, \dots, z_n$

$$\sum_{i,j=1}^n r(t_i - t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n E(M(t_i)M(t_j)) z_i z_j = E\left(\sum_{i=1}^n M(t_i) z_i\right)^2 \geq 0.$$

Por el Teorema de Bochner es la Transformada de Fourier de una función de distribución que llamaremos  $S$ , es decir,  $r$  tiene una representación espectral de la forma

$$r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} dS(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) dS(\tau)$$

donde  $S$  se conoce como la función de distribución espectral. Su derivada  $s$ , si existe, es la densidad espectral y se conoce también como el espectro.

Si la función de covarianza es integrable entonces la fórmula anterior es invertible, teniéndose

$$S(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh.$$

Usando la representación espectral tenemos

$$\begin{aligned} r'(h) &= - \int_{-\infty}^{\infty} -\tau \operatorname{sen}(\tau h) dS(\tau) \\ r''(h) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \cos(\tau h) dS(\tau) \end{aligned}$$

y en particular

$$r''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau).$$

La integral anterior se conoce como el segundo momento espectral:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = -r''(0).$$

Si  $r$  no es dos veces diferenciable en 0 entonces

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = \infty.$$

La existencia del segundo momento espectral está asociado a la regularidad de las trayectorias del proceso. Cuando  $m_2 < \infty$  la función de covarianza tiene el siguiente desarrollo cerca del origen:

$$r(h) = r(0) + r'(0)(h - 0) + \frac{r''(0)}{2!}(h - 0)^2 + R_2(h). \quad (1.10)$$

Teniendo que

$$\begin{aligned} r(0) &= \sigma^2 = \text{Var}(M(s)) \\ r'(0) &= 0 \\ r''(0) &= -m_2 \\ R_2(h) &= \frac{r'''(c)}{3!}(h - 0)^3 = o(h^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación (1.10) tenemos

$$r(h) = \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2!} + o(h^2).$$

Utilizando el teorema 0.9 podemos garantizar que  $m_2 < \infty$  si y solo si existe un proceso  $M'(t)$  tal que

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \rightarrow M'(t) \text{ en } \mathfrak{L}^2$$

y además

$$\begin{aligned} E(M'(t)) &= 0 \\ \text{Var}(M'(t)) &= -r''(0) = m_2. \end{aligned}$$

Pues, cuando  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} E(M'(t)) &= E\left[\frac{M(t+h) - M(t)}{h}\right] \\ &= E\left[\frac{M(t+h)}{h}\right] - E\left[\frac{M(t)}{h}\right] \\ &= \frac{1}{h}E[M(t+h)] - \frac{1}{h}E[M(t)] = 0 \end{aligned}$$

Este hecho se debe a que  $M(t)$  es un proceso centrado y

$$V[M'(t)] = E[(M'(t))^2] - (E[M'(t)])^2$$

Por lo anterior tenemos que  $E(M'(t)) = 0$ , así cuando  $h \rightarrow 0$  tenemos

$$\begin{aligned} V[M'(t)] &= E[(M'(t))^2] = E\left[\left(\frac{M(t+h) - M(t)}{h}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{h^2}E[(M(t+h))^2 - 2M(t+h)M(t) + (M(t))^2] \\ &= \frac{1}{h^2}E[(M(t+h))^2] - 2E[M(t+h)M(t)] + E[(M(t))^2] \\ &= \frac{1}{h^2}[r(0) - 2E(M(t+h)M(t)) + r(0)] \\ &= \frac{1}{h^2}[2r(0) - 2E(M(t+h)M(t))] \\ &= 2\frac{1}{h^2}[r(0) - E(M(t+h)M(t))] = 2\frac{1}{h^2}[r(0) - r(h)] \\ &= 2\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(0) - r(h)}{h^2} \end{aligned}$$

aplicando L'Hopital se tiene

$$2\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r'(0) - r'(h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r'(0) - r'(h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r'(0) - r'(h)}{0 - h} = -r''(0).$$

Este proceso  $M'(t)$  es Gaussiano, independiente de  $M(t)$  y tiene función de covarianza

$$\text{Cov}(M'(t), M'(t+h)) = -r''(h).$$

La densidad conjunta de  $M$  y  $M'$  es

$$p(u, z) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{m_2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\sigma^2} + \frac{z^2}{m_2}\right)\right].$$

En el estudio de las olas el espectro juega un papel fundamental y se interpreta como es usual, como la distribución de la energía por frecuencia. Observamos que  $r(0) = \text{Var}(M(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)d\tau$ , de modo que la varianza del proceso representa la energía total. El espectro es simétrico y normalmente sólo considera la parte positiva, y se normaliza multiplicándola por 2.

### 1.2.4 Espectro Jonswap

La formulación JONSWAP se basa en un extenso programa de medición de olas, conocida como el Proyecto Conjunto de Olas del Mar del Norte (siglas en ingles) que se llevó a cabo en 1968 y 1969 a lo largo de una línea que se extiende 160 kilómetros en el Mar del Norte desde la isla de Sylt.

El espectro representa mares generados por el viento con limitaciones de alcance, y las entradas de la formulación son la velocidad del viento y longitud del alcance. La formulación original es dada por:

$$S(f) = \alpha \frac{g^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{f^5} \exp\{-1,25(fm/f)^4\} \gamma^{\exp\{-(f-f_m)^2/2(\sigma f_m)^2\}}, \quad (1.11)$$

donde

$\gamma$  = parámetro, 3,30 en promedio.

$\bar{x}$  = alcance del viento no-dimensional =  $gx/\bar{U}^2$

$\alpha = 0,076\bar{x}^{-0,22}$

$\sigma = 0,07$  si  $f \leq f_m$  y  $0,09$  si  $f > f_m$

$f_m = 3,5(g/\bar{U})\bar{x}^{-0,33}$

$x$  = longitud de alcance del viento

$\bar{U}$  = velocidad media del viento

$g$  = constante de gravedad.



La formulación 1.11 se puede expresar en términos de la frecuencia  $\omega$  en *rps* como

$$S(f) = \alpha \frac{g^2}{\omega^5} \exp\{-1,25(\omega_m/\omega)^4\} \gamma^{\exp\{-(\omega-\omega_m)^2/2(\sigma\omega_m)^2\}}, \quad (1.12)$$

donde  $\omega_m = 2\pi f_m$ .

El parámetro  $\gamma$  se llama *Parámetro de forma de Pico* y representa el radio máximo de energía de la densidad espectral. El término asociado con la potencia de la exponencial de  $\gamma$  se llama *factor de mejoramiento de pico* y así el espectro Jonswap es el producto del espectro de Pierson Moskowitz y el factor de mejoramiento de pico (para detalles veáse 1998 [3]).

El valor del parámetro de forma pico  $\gamma$  se elige generalmente como 3,30, y el espectro se llama *formulación espectral Jonswap*. Los valores de  $\gamma$  son obtenidos del análisis de los datos originales, sin embargo, varían aproximadamente de 1 a 6, incluso para una velocidad del viento constante.  $\gamma$  es realmente una variable aleatoria que tiene distribución normal aproximadamente con media 3,30 y la varianza 0,62.

# Capítulo 2

## Satélites

### 2.1 Los Primeros Desarrollos

La caracterización de las propiedades estocásticas de las olas del mar se presentó por primera vez a principios de los años 1950, entre los principales estudios están los realizados por Neumann (1953), Pierson (1952,1955), Saint-Denis y Pierson (1953) que presentan el enfoque estocástico para el análisis de los mares aleatorios, y Longuet-Higgins (1952) demostró la estimación probabilística de las alturas de las olas aleatorias. Las cuatro décadas después de la introducción del enfoque de las predicciones estocásticas han visto avances fenomenales en el análisis probabilístico y metodologías de predicción de los mares. En 1964 se celebró un simposio en la Institución Oceanográfica Woods Hole, Massachusetts, titulado **Oceanografía para el espacio**. En ese momento, el título tenía una incongruencia con lo que en realidad se estudiaba. No fue hasta unos pocos años después del lanzamiento del Satélite Sputnik, y una comunidad formada dentro de los métodos tradicionales del estudio del mar a través de buques de investigación que estuvieron dispuestos a mostrar un grado de escepticismo de lo que puede lograrse desde un satélite viajando a una velocidad de varios kilómetros por segundo, cientos de kilómetros sobre el mar. La detección a distancia como una técnica para el estudio del mar apenas era nueva, sin embargo, podría ser encontrada en las miradas tempranas de los buques de vela. En tiempos más modernos, la detección acústica a distancia se ha utilizado con notable éxito y las cordilleras oceánicas y zanjas marginales de aguas profundas ya habían sido identificados y trazados por medio de ecosondas. Pero en 1964, pocos sensores de los satélites que habían sido puestos en órbita alrededor de la tierra captaban imágenes muy por debajo de la resolución para el estudio científico. Sin embargo, estos eran los que tenían la visión para darse cuenta de la magnitud de la

contribución que la observación por satélites podría aportar a la investigación marina, si los sensores se desarrollaban adecuadamente. Los satélites podrían proporcionar el primer paso para la comprensión de los fenómenos globales, el de la cobertura sinóptica.

Los rápidos progresos realizados durante la década de 1970 en el desarrollo de sensores de alta resolución para medir las condiciones de la superficie del mar desde satélites culminó en 1978, con el lanzamiento de tres naves espaciales de gran éxito, dedicados en gran parte a aplicaciones marinas. El desarrollo de:

- Un conjunto de sensores de microondas realizados por SEASAT.
- Escáner a Color de la Zona Costera desplegada en Nimbus-7.
- El radiómetro de alta resolución de infrarrojos (El AVHRR) realizado por una serie de satélites operacionales de la NASA, ayudó a restaurar la confianza en la comunidad científica marina que se había erosionado en parte por la euforia prematura en la década de 1960.

La década de 1980 se puede ver como un tiempo de consolidación, (un tiempo de planificación de los futuros sistemas basados en las experiencias del pasado), una década de debate, deliberaciones y decisiones que incluyó a la NASA, ESA, Canadá, India y Japón que anunciaron planes para poner en marcha sistemas dedicados a satélites marítimos.

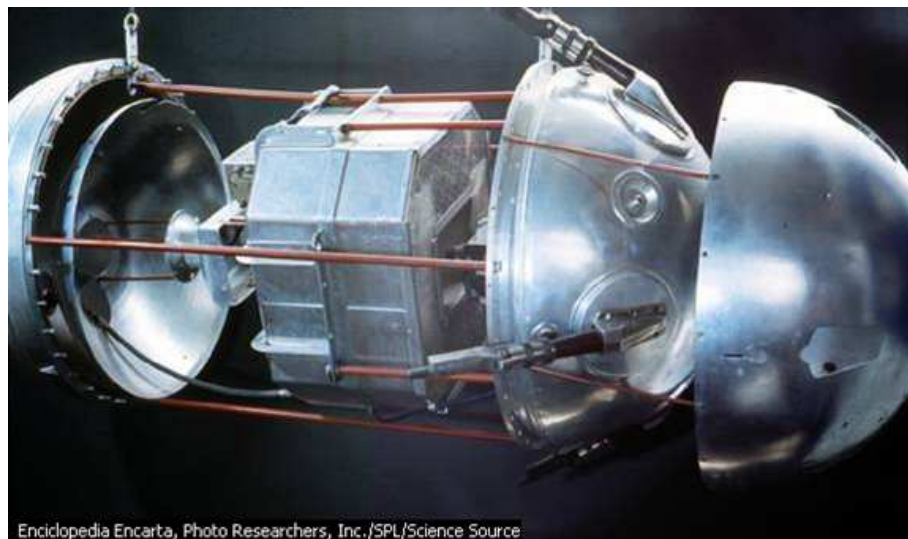


Figura 2.1: Primer satélite puesto en órbita, Sputnik 1

Los satélites oceánicos puestos en marcha en 1978 se consideraban en gran parte experimentales, diseñados para probar el concepto de que precisiones útiles combinado con cobertura global podrían producir una nueva y poderosa herramienta para la investigación oceanográfica. Estos fueron un gran éxito, sentando las bases para el desarrollo de los distintos satélites marinos que operan hoy en día, o están previstos para el futuro.

## 2.2 ¿Qué se puede medir desde los Satélites?

Los sensores de los satélites se han desarrollado para operar en la unidad óptica o una parte infrarroja del espectro electromagnético ( $\lambda \sim 0,4 - 12\mu_m$ ) para la medición del color del océano y la temperatura de la superficie, o en la parte de microondas ( $\lambda \sim 0,3 - 30cm$ ) para la medición de pequeños cambios en la rugosidad de la superficie o de la pendiente. Algunas de las funciones marinas deben ser controladas desde un satélite en órbita que tiene que producir una firma en uno de estos cuatro parámetros básicos: rugosidad de la superficie, color, pendiente y la temperatura. Por lo tanto, el viento, las olas y las manchas de superficies van a cambiar el patrón de rugosidad en pequeña escala a la que los radares son particularmente sensibles. Las manchas de fitoplancton producen cambios perceptibles en el color del océano, la pendiente de la superficie gracias a una corriente geostrofica se puede medir con precisión mediante un altímetro de radar, y los cambios de patrones de temperatura se revelan mediante el escaneo de los dispositivos infrarrojos.

Estas medidas pueden hacer una contribución significativa para una mejor comprensión en los procesos físicos, biológicos y geológicos que ocurren en el mar. Cuando los primeros satélites se estaban diseñando los ingenieros espaciales eran muy conscientes de las limitaciones que tendrían que superar. Se creía que la precisión del sensor no podría competir con las observaciones *in situ*. Los satélites veían sólo la superficie del mar y no a los procesos más profundos. (Por otra parte, muchos de los cambios en el medio marino que más afectan a la actividad humana tales como mareas, olas, tormentas, témpanos de hielo, contaminación y patrones climáticos se pueden observar en la superficie del mar). Las nubes cubren gran parte de la Tierra durante mucho tiempo, para evitar que éstas obstaculicen la visión de los satélites, los sensores operan en la parte visible o infrarroja del espectro para así poder observar la superficie del mar, y por supuesto, la rápida y repetitiva toma de muestras en un lugar específico, no se puede hacer desde un sólo satélite que orbita en la Tierra.

Estas limitaciones existen en la actualidad, pero desde el lanzamiento del primer satélite se ha podido comprobar que también se pueden superar o al menos reducir tales limitaciones. Una de las primeras revelaciones en el registro satelital fue que los procesos en el volumen del mar podían producir una señal detectable en la superficie desde el espacio.

En las zonas costeras poco profundas las imágenes de radares revelaron detalles en la topografía de fondo. Sobre el océano profundo el nivel de la superficie del mar reveló también las elevaciones o depresiones de acuerdo a la profundidad del agua. Estas cordilleras submarinas, cañones y similares se presentaron con claridad en el registro de altímetro del satélite de radar.

De hecho, la precisión de los sensores de los satélites ya supera la alcanzada por los métodos convencionales *in situ*. El altímetro TOPEX/Poseidon mide su propia altura sobre la superficie del mar hasta más de 5cm. El radar de apertura sintética ha logrado una resolución espacial de unos 25 metros. Los cambios en la temperatura superficial del mar de unas pocas décimas de grado se pueden detectar con la pendiente de radiómetro a lo largo de exploraciones de las naves gemelas espaciales de la ESA, y las velocidades del viento en la superficie del mar se pueden medir en más de 50 Km con una precisión alrededor 2m/seg y dirección de 20°.

La altura, dirección y el período de las olas se pueden controlar con mayor seguridad desde los satélites, que las estimaciones realizadas por observadores humanos. Las pequeñas pendientes producidas en las corrientes oceánicas debido a la rotación, que no se pueden medir directamente en el mar, se pueden medir por un altímetro de precisión del radar, diseñado para tal fin.

Cuando los radares no se despliegan, el mayor obstáculo para lograr la cobertura regular siguen siendo la nubosidad. Aunque se han hecho algunos progresos en observaciones oblicuas en más de una dirección para conseguir huecos en las nubes, la presencia de ellas es lo suficientemente extensa en muchas partes del globo terraqueo, como para evitar una adecuada cobertura de los sensores infrarrojos y de color. A una latitud de 50°N en Europa se ha estimado que la probabilidad de obtener dos imágenes consecutivas en un área con menos del 30% de nubes es menor al 5%. Hay, sin embargo, un género de estudios marinos que requieren para su solución que las mediciones se repitan a intervalos regulares. Sólo los

radares pueden dar esta garantía. No fue hasta el desarrollo de sensores de microondas que culminó en 1978 con el lanzamiento del SEASAT que la oceanografía desde el espacio se convirtió en realidad.

## 2.3 Órbitas y Toma de Muestras

Un satélite se mueve en una trayectoria elíptica con el centro de la Tierra en uno de los focos. En una órbita polar la nave pasa por encima de ambos polos, norte y sur. En la práctica la mayoría de los planos de los satélites de órbita polar son inclinados. La inclinación  $i$  es el ángulo que el plano de la órbita forma con el ecuador en dirección contraria a las agujas del reloj. Si  $i < 90^\circ$  la órbita se conoce como **prógrado** y su plano precisará hacia el oeste. Muchas órbitas polares se programan para ser sincronizadas con el sol, en cuyo caso,  $i > 90^\circ$ , la órbita se conoce como **retrógrado**, y los procesos se precisaran para el este. En la siguiente figura podemos apreciar un ejemplo de la inclinación que forma la órbita con el ecuador

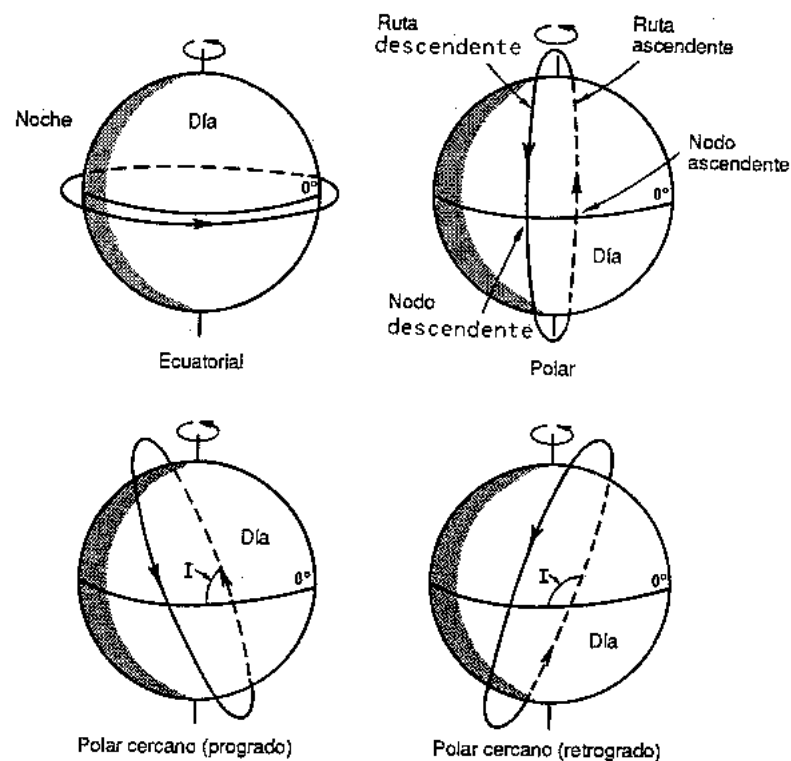


Figura 2.2: Inclinación que forma la órbita con el ecuador

Los valores seleccionados para la altura y la inclinación de un satélite de observación de la Tierra son normalmente el resultado de una serie de consideraciones principales las cuales son las siguientes:

- Período de muestreo.
- Posibles perturbaciones en la toma de muestras.
- Perturbaciones de la órbita debido a las incertidumbres en el campo de gravedad.
- Potencia disponible en los sensores.
- Posición del sitio de lanzamiento.

A continuación presentaremos una tabla en donde se muestran las principales propiedades orbitales de los satélites en función del radio de la Tierra  $R$  (6378Km), la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra  $g$  ( $9,8m/s^2$ ), la altitud del satélite  $H$  e inclinación  $i$ .

Propiedad	Expresión	$H = 150$	$H = 800$	$H = 1500Km$
Velocidad del satélite	$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}$	$v = 7,81$	$v = 7,45$	$v = 7,11Km/s$
Velocidad del Satélite con respecto a la Tierra	$vg = \frac{R}{R+H}v$	$vg = 7,63$	$vg = 6,62$	$vg = 5,76Km/s$
Período de Satélite	$T = \frac{2\pi(R+H)^{3/2}}{R\sqrt{g}}$	$T = 87,5$	$T = 100,6$	$T = 115,9min$
Números de órbitas/ Días	$N = \frac{24}{T}$	$N = 16,5$	$N = 14,3$	$N = 12,4$
Separación de los trazados ascendentes sobre el ecuador	$D = \frac{2\pi * R}{N}$	$D = 2434$	$D = 2807$	$D = 3227Km$
Distribución Uniforme de la Separación de los trazados por meses ( $M$ )	$\frac{D}{30,44M}$	13,3	15,4	17,7Km en 6 meses
Tasa de precisión del Satélite	$\Omega = -\frac{Acos(i)}{(R+H)^{7/12}}$	$\Omega = 3,14$	$\Omega = 2,26$	$\Omega = 1,63^\circ/día$

## 2.4 Elevación de la Superficie

La altura y la pendiente de la superficie del mar son de gran importancia para los oceanógrafos. Las variaciones más grandes en la altura del mar son de orden  $+/- 100m$  y reflejan la falta de homogeneidad del campo gravitatorio de la Tierra, en parte debido a las diferencias en la composición del manto subyacente y en parte por la batimetría del fondo. La superficie equipotencial conocida como el **Geoide** corresponde, sobre los océanos, a la posición media de la superficie en libre ausencia de movimientos de fluidos. Las variaciones del Geoide son las relacionadas con las mareas, las sobretensiones y corrientes oceánicas. Estas son mucho más pequeñas, por lo general en dos ordenes de magnitud, salvo en el caso de las mareas costeras, pero debido a la variabilidad temporal son de importancia para el diseño de estructuras costeras y en alta mar. Así como los gráficos de presión de la superficie pueden ser utilizados en meteorología para inferir el viento cerca de la superficie a través de la relación geostrófica, la elevación de la superficie también puede ser usada para obtener las corrientes superficiales.

### 2.4.1 El Geoide

Hasta hace unos años, las mejores estimaciones del geoide a escala mundial eran de las perturbaciones observadas en el movimiento orbital de los satélites pasivos con seguimiento en la Tierra. Sin embargo, los altímetros a bordo de Skylab y GEOS-3 miden el rango entre la superficie del océano y el satélite a una precisión (1 metro y 50cm respectivamente) que revela importantes variaciones del geoide en las escalas de espacios más cortos, que podría ser estudiados mediante técnicas anteriores. Los altímetros que se pusieron en marcha en los años 80 y 90 eran de una precisión cada vez de mayor alcance de  $\pm 2cm$  para el TOPEX/Poseidon.

Mapas detallados de batímetros de los océanos están ahora disponibles a partir de estos registros, donde los altímetros revelan detalles de las zanjas, los cantos, las fallas y las montañas submarinas, muchos de los cuales eran desconocidos antes de la llegada de los altímetros. Del gradiente medido a lo largo del trazado se puede estimar un componente en la anomalía de la gravedad de la Tierra, pero no fue hasta que se colocaron los altímetros en un patrón de órbita de lenta precisión, que se le permitió a las huellas adyacentes establecerse a una distancia de pocos kilómetros. Las medidas del gradiente también pueden ser calculadas para proporcionar gráficos de contornos en dos dimensiones de particular utilidad para las exploraciones de petróleo de alta mar.



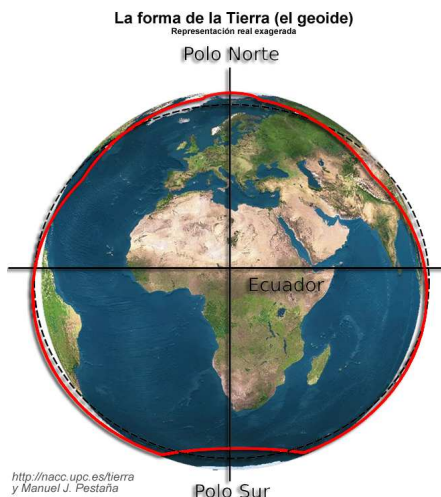


Figura 2.3: Geoide

## 2.4.2 Las Corrientes Superficiales

Las corrientes se producen como resultado del equilibrio establecido entre una serie de factores que influyen en la gravedad, en la presión de los gradientes dentro del volumen del mar, en la fuerza de Coriolis debido a la rotación de la Tierra y en las fuerzas de fricción debido principalmente a los vientos. La presión de los gradientes en la columna de agua se producen por las diferencias en la densidad a profundidades determinadas, provocada por los diferentes valores de temperatura y salinidad. Debido a que la Tierra gira de oeste a este, un observador en el hemisferio norte observa que un objeto en movimiento se desvía hacia la derecha (es decir, en sentido a las agujas del reloj), en el hemisferio sur la desviación es a la izquierda, mientras que en el ecuador no hay desviación. La resistencia en la componente horizontal de la fuerza de Coriolis depende de la latitud y de la velocidad de un objeto en movimiento, tal como una partícula de agua. Si no hubiera fuerza de Coriolis actuando (es decir, si la Tierra no estuviera en rotación) la presión del gradiente causaría que el agua se mueva directamente desde alta a baja presión. Sobre la rotación de la Tierra la fuerza de Coriolis desvía el movimiento, la aceleración del agua se reducirá a cero cuando la velocidad de la corriente en una altitud dada es lo suficientemente rápida como para producir una fuerza de Coriolis en el equilibrio exacto con la presión del gradiente horizontal. En ausencia de fuerzas de fricción este equilibrio, por supuesto, se refiere al flujo geostrófico.

A escalas globales la circulación de las capas superficiales de los océanos tienden a dividirse en

giros oceánicos que giran sobre todo en sentido horario en el hemisferio norte y anti-horario en el hemisferio sur (los vientos y los contornos de las costas pueden provocar fluctuaciones regionales). Los giros tienden a ser alargados, y en el hemisferio norte el flujo hacia los polos en el lado occidental del Atlántico Norte y Pacífico Norte es rápido, estrecho y relativamente profundo. Estos se conocen como corrientes limítrofes occidentales. A partir de la simple relación que une la corriente de velocidad geostrófica, la altitud de la tierra, la tasa de rotación y la aceleración debido a la gravedad, se calcula fácilmente la pendiente de la superficie. A través de la Corriente de las pendientes del Golfo de 150 cm a 100 km se mide por los altímetros de radar. Normalmente, por supuesto, los patrones de circulación en el fondo de los océanos producen pendientes superficiales de al menos un orden de menor magnitud. No existe un método para la medición de pendientes de la superficie directamente desde el mar, y hasta la aparición del altímetro de radar transmitidas por satélite éstas podían ser solo inferidas.

La misión del ultrapreciso altímetro del TOPEX/Poseidon era ser diseñado específicamente para asistir a los Experimentos de Circulación de Océanos del Mundo (World Ocean Circulation Experiment WOCE ) en el seguimiento de pequeñas variaciones de la pendiente causados por sistemas de corrientes oceánicas profundas.

En el altímetro no se puede diferenciar fácilmente entre las fluctuaciones del geoide y las pendientes generadas por las corrientes, pero el geoide, a diferencia de las corrientes no cambia con el tiempo, la variabilidad del océano se puede trazar mediante la comparación sucesiva de mediciones del altímetros (un método empleado con éxito para trazar los principales sistemas actuales).

Otro método que se ha utilizado para calcular los patrones de cambios en el nivel del mar, es el cálculo de una media del geoide en un área seleccionada de observaciones de altímetro, digamos durante un año, lo que resta (y haciendo correcciones en la altura calculada del altímetro por minimización de las diferencias en las pistas de intersecciones) el registro de diferencias.

En muchos aspectos, el altímetro es un instrumento versátil, que proporciona datos sobre las olas, el viento, las corrientes, los remolinos, giros oceánicos y campos de gravedad, donde las decisiones difíciles tienen que hacerse sobre la selección de un patrón de repetición de

órbitas (y el problema se agrava cuando se involucran otros sensores). El TOPEX/Poseidon con la única finalidad de monitorear la circulación de los océanos, optó por un patrón de repeticiones de 10 días como el mejor arreglo entre la variabilidad espacial y temporal. Esto hace un intervalo de alrededor de 300 Km en el ecuador. El ERS-1 y ERS-2 siguen un patrón de repetición de 35 días, aunque, el primero fue colocado con una repetición de 168 días durante 1,5 ciclos con el fin de trazar el geoide.

### 2.4.3 Las Mareas y Oleadas

Las mediciones del nivel del mar en el tiempo, así como las mediciones obtenidas a partir de los mareógrafos y de las grabadoras de la presión de fondo, dan información sobre la circulación oceánica, así como de las mareas. El mar abierto no ha sido bien muestreado por estos instrumentos convencionales, al igual que algunas regiones costeras, pero los altímetros de satélites en las últimas décadas han proporcionado datos globales de precisión y resolución sin precedentes. Estos datos se utilizan para producir mejoras significativas en el conocimiento de las mareas oceánicas y para estudiar las variaciones en las escalas globales del nivel del mar asociados a las variaciones climáticas en particular la oscilación del sur (El Niño).

En las aguas costeras, las variaciones del nivel del mar debido a las mareas y fuerzas meteorológicas tienen escalas espaciales significativamente más pequeñas que en mar abierto, de modo que no se adaptan bien al trazado del altímetro. Por otra parte, la magnitud de los cambios verticales suelen ser de mayor consideración, y estudios recientes han demostrado que la información útil sobre el nivel extremo de las mareas y los niveles de oleajes, se pueden obtener a partir de datos de altímetros.

## 2.5 Rugosidad de la Superficie

En las frecuencias en las que los sensores de microondas transmitidas por los satélites se hacen funcionar, la retro-reflexión de radiación de la superficie del mar agitado es muy sensible a pequeños cambios en los vientos y en las olas. Por lo tanto, las variaciones registradas en la retrodispersión de la sección transversal  $\sigma^0$  de estos radares se pueden interpretar en términos de vientos en la superficie y características del oleaje. En esencia, la rugosidad de la superficie se ve alterada por los vientos, olas, corrientes, mareas y otras características de la superficie.

El desafío de la detección de microondas de la superficie del océano es seleccionar valores de los parámetros de potencia de radar (el ángulo de incidencia, frecuencia, polarización y ángulo de visión), para extraer el máximo de información con la mayor resolución espacial, acerca de un determinado parámetro (velocidad del viento, olas, etc). Los instrumentos de uso más común son:

Activos	Pasivos
Altímetro de Radar	Escaneo Multi-frecuencia
Radar de Apertura Sintética	Radiómetros de Microondas
Viento Dispersómetro	

La tecnología de microondas de radar se le dió un rápido impulso durante la 2da Guerra Mundial. La razón principal para el estudio de la naturaleza de los ecos de radar de una superficie rugosa del mar se produjo por la "confusión" que interfirió con la detección de los blancos militares sobre o cerca de la superficie del mar. Después de la Guerra, el trabajo en el análisis del desorden se desarrolló en Europa, EEUU y la URSS, donde la mayor parte del trabajo teórico se hizo con anticipación. Experimentos realizados por Combie (1995) lo llevaron a la conclusión de que la interacción de las ondas de radar con la superficie del mar forma un ángulo oblicuo que se dispersa de acuerdo a la Ley de Bragg <sup>1</sup>.

Si la longitud de onda de la superficie del océano  $\lambda_\omega$  y la longitud de onda de radar  $\lambda_R$ , son tales que  $\lambda_R = 2n\lambda_\omega \text{sen}(\theta)$ , donde  $n$  es un entero y  $\theta$  es el ángulo de incidencia que se mide con respecto a la normal de la superficie, entonces la reflexión de las ondas del agua estarán en fase y por lo tanto aumentará de manera constructiva. Por ejemplo, en una frecuencia HF de 6MHz con  $\lambda_R = 50m$ , si  $\theta = 30^\circ$ , entonces

$$\lambda_\omega = \frac{50m}{2n \cdot \text{sen}(30^\circ)} = \frac{50}{n}m.$$

Así la Resonancia de Bragg se producirá a partir de las olas del mar con longitud de onda de 50m, 25m,...

En las frecuencias HF las longitudes de onda de radar coinciden con las de las ondas de gravedad del océano (por ejemplo 50-300m), pero en las longitudes de onda centimétrica de

<sup>1</sup>\* Más detalles sobre la Ley de Bragg ver en el apéndice

los radares de microondas, la retrodispersión se asume que es el resultado de dos escalas de superficies por el cual las manchas de las ondas de Bragg de dispersión son levantadas por las ondas de gravedad más dominantes, es decir, las ondas largas modulan las ondas más cortas en un proceso conocido como "estiramiento".

Las imágenes de la superficie del mar que reflejan el paso de huellas de ondas de superficie, así como las manchas, los remolinos, las ondas internas, las descargas de efluentes, barcos y otras características en la superficie son derivadas de la transformación del registro del radar de apertura sintética (Synthetic Aperture Radar SAR). El método de síntesis de apertura fue propuesto por primera vez en la década de 1950, mientras que el procesamiento normal temporal es empleado en la dirección del alcance (es decir, es perpendicular a la trayectoria del satélite), la resolución del Azimut (a lo largo de la pista) se logra mediante la retención de un blanco en el haz para obtener un claro historial del Doppler, como el satélite recorre la longitud equivalente de una apertura real proporciona la misma resolución. Esta longitud es generalmente del orden de 15Km. La señal de retorno de cada dispersor tiene una frecuencia linealmente modulada y si el objetivo es estacionario, la modulación constante es una función de parámetros conocidos tales como la longitud de onda de radar, la velocidad de la plataforma y su altura. Las antenas de haz ancho dan una mejor resolución que las de haz estrecho, ya que la resolución es inversamente proporcional al tiempo total que el objetivo se mantiene en el campo de visión.

En comparación con las superficies de la Tierra, el océano es relativamente homogéneo con una baja retrodispersión de la sección transversal y de bajo contraste. No obstante, las imágenes SAR de la superficie del mar ofrecen una gran cantidad de información sobre las características de la superficie, tales como manchas, barcos, corrientes, remolinos y las olas. De mayor preocupación que el bajo contraste es el movimiento de las olas, que a diferencia de objetivos en tierra, los dispersores del mar no permanecen inmóviles mientras se mantienen en el haz del radar. En efecto, si la dispersión de Bragg se supone que es el medio por el cual el radar interactúa con la superficie del mar, la gama de frecuencias del SAR (1.4GHz -10GHz) de las ondas producen la dispersión que tienen longitudes de onda entre los 5-30cm. Estos pueden variar considerablemente en poco tiempo y tienden a parecer como una mancha en la imagen. Sin embargo, las ondas de gravedad son claramente reflejadas en las imágenes de SAR. Fue este el conflicto aparente entre la teoría y las observaciones que ha incentivado una gran cantidad de actividades de investigación de estos fenómenos.

### 2.5.1 Dispersómetro

La velocidad y dirección del viento, también pueden derivarse de precisiones útiles, tales como el dispersómetro del viento, que transmite un haz de pulsos cortos, y devuelve las medidas en una variedad de ángulos de incidencia. Esto responde principalmente a la rugosidad de la superficie, pero en menor medida también se ve influida por la espuma y rocío que coloca un límite superior en la exactitud de las estimaciones de las altas velocidades del viento.

A los ángulos de incidencia entre  $20^\circ$  y  $70^\circ$  la retrodispersión se produce principalmente por la resonancia de Bragg y la magnitud de la retrodispersión (indicado por el símbolo  $\sigma^0$  en una escala de decibelios) se determina por la densidad espectral de las ondas de la resonancia de Bragg, por la polarización tanto de la radiación incidente y dispersada, por el ángulo de incidencia y por el ángulo de azimutal <sup>2</sup> (que depende de la trayectoria del satélite con respecto a la dirección del viento). La densidad espectral de las ondas de la resonancia de Bragg (de ahora en adelante  $\sigma^0$ ), por lo tanto puede estar relacionada con la velocidad del viento. La dependencia real ha sido en gran parte derivada empíricamente de la obra pionera con instrumentos a bordo, y de los modelos obtenidos de las primeras misiones satelitales. El modelo puede ser expresado como

$$\sigma^0(\theta, \phi) = G(\theta, \phi) + H(\theta, \phi)\log U,$$

donde  $\theta$  es el ángulo vertical de incidencia,  $\phi$  es el ángulo azimutal en la dirección de observación con respecto a la dirección del viento, y  $U$  es la dirección del viento. Los valores de  $G$  y  $H$  se obtienen empíricamente. En el punto más bajo de incidencia la retrodispersión se debe principalmente a la reflexión especular, y dado que una mayor velocidad del viento hace que el mar más agitado conduzca menos reflexión especular, entonces  $\sigma^0$  disminuye con la velocidad del viento en el punto más bajo. A los  $10^\circ$  de incidencia  $\sigma^0$  es casi independiente de la velocidad del viento, pero a mayores ángulos alrededor de  $20^\circ$ ,  $\sigma^0$  aumenta con la velocidad del viento de acuerdo a las leyes que gobiernan la dispersión de Bragg. Este es el régimen en el que operan los dispersómetros. Al ver el océano desde diferentes ángulos, con múltiples haces, se pueden encontrar soluciones que se extraen de la velocidad del viento, además de la mejor estimación de la dirección del viento (aunque, deben ser resueltos por una consideración de las condiciones meteorológicas).

---

<sup>2\*</sup> El ángulo azimutal es el comprendido entre el meridiano de un lugar y el plano vertical en que esté la visual dirigida a un objeto cualquiera, a veces un astro.

El primer dispersómetro (volado por SEASAT) miró en solo dos direcciones ( $45^\circ$  hacia adelante y  $45^\circ$  detrás del centro) con haces a ambos lados de la nave espacial. Para reducir las ambigüedades los sensores ERS utilizan 3 antenas, pero se limitan a la medida en solo un lado.

Está ahora claro que los vientos de la superficie pueden ser medidos a partir de satélites con mayor precisión, que por los buques, con la gran ventaja de proporcionar una cobertura uniforme sobre los océanos. Se informa que se hicieron más mediciones del viento durante los 100 días de operación del SEASAT que en los pasados 100 años con las mediciones convencionales de buques. El modelo ERS-1 fue diseñado para medir la velocidad del viento con una precisión de  $2m/seg$  en el rango de  $4m/seg$  a  $24m/seg$ ; los primeros análisis revelaron también un buen desempeño con vientos de altas velocidades. Su ancho de cobertura es de 500 km y proporciona vectores de viento sobre una celda de resolución de 50 km a lo largo y ancho del trazado. En la figura 2.4 podemos observar la geometría del dispersómetro del viento

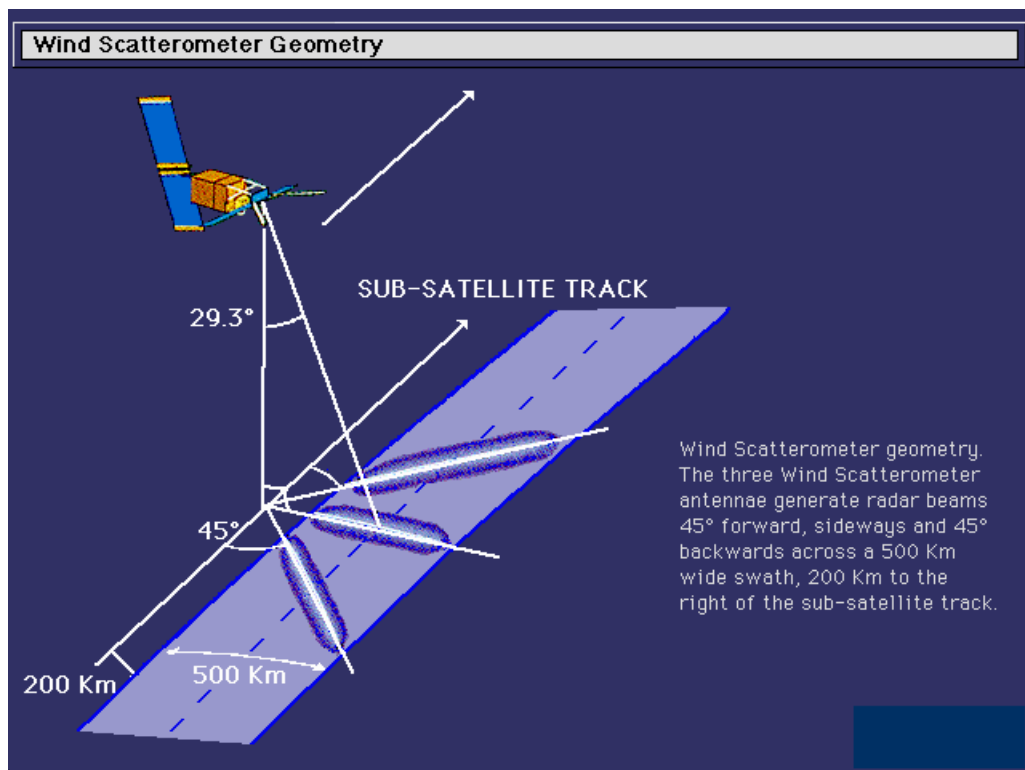


Figura 2.4: Geometría del Dispersómetro

### 2.5.2 Altimetros

El tercer instrumento activo que proporciona información sobre la rugosidad de la superficie es el altímetro de radar. El altímetro, es un radar que observa el punto más bajo, y mide la altitud exacta del satélite por encima de la superficie del mar, mediante la medición del intervalo de tiempo entre la transmisión y recepción de un flujo de pulsos muy cortos. La precisión actual de alrededor de 2cm-5cm se logra mediante una combinación de sofisticadas técnicas de pulso compresión y trazado del nivel del mar.

La técnica es básicamente simple, aunque no siempre fácil de ejecutar. La altura de la órbita (que es la altura radial del satélite por encima del geocentro), se mide y se calcula a través de la localización del satélite, por lo general por una combinación de rayos laser, transpotadores, GPS y sistemas electrónicos a bordo como DORIS o PRARE. La altura de la superficie del mar, se puede determinar restando la medición altimétrica de la altura de la órbita. Las variaciones de esta superficie se miden con respecto a un elipsoide de referencia que se aproxima a la superficie de la tierra y se define por una fórmula internacionalmente acordada. Además de las mediciones del nivel del mar, las señales de retorno del altímetro pueden ser usadas para medir la velocidad del viento en la superficie y altura de las olas. La medición de la velocidad del viento se basa en la retrodispersión del radar sobre en la sección transversal del punto más bajo. A medida que el viento aumenta la radiación incidente se refleja fuera de la superficie del mar más rugosa, causando que la retrodispersión de la sección transversal disminuya. Las mediciones de altura de ola se basan, en cambio, en la pendiente del borde delantero del impulso de retorno (la mayor de las olas será el retorno más amplio del pulso).

El altímetro llevado en los satélites ERS es un instrumento de la banda Ku (13.8GHz) que señala el punto más bajo, similar a la utilizada en SEASAT pero con una mayor capacidad de seguimiento sobre superficies rugosas que le permite monitorear la superficie cambiante del hielo. Esta mide la altura significativa de ola con una precisión de 0.5 % o 10 %, que sea mayor.

## 2.6 El Hielo

Los satélites son especialmente adecuados para el control de las regiones polares, donde el clima puede ser inhóspito y las zonas son envueltas por nubes u oscuridad durante largos



periodos del año. El reconocimiento de altas latitudes significa, por supuesto, que una órbita de alta inclinación no siempre es ideal para el monitoreo del comportamiento de los océanos. (El TOPEX/Poseidon, por ejemplo, se ha colocado en una órbita de  $65^\circ$  que apenas llega a la zona del hielo polar, pero que proporciona los ángulos más adecuados de intersección entre las órbitas descendentes y ascendentes sobre los océanos).

Los dos sensores a bordo del satélite que proporcionan información sobre las condiciones del hielo, son el radar de apertura sintética y el altímetro de radar. Las imágenes producidas por el RAE son utilizadas en los ERS-1, ERS-2 y Radarsat (el último con la misión primordial del monitoreo del hielo) y son útiles no sólo para la operación del día a día de los buques ayudándolos a encontrar pasajes a través de los hielos, sino que también pueden ser usados para estudiar los cambios estacionales e interanuales en los casquetes polares, que pueden reflejar los cambios producidos por el calentamiento global.

Los altímetros a bordo en el ERS-1 y ERS-2 fueron diseñados específicamente para realizar un seguimiento sobre las superficies de hielo, teniendo así una ventana de observación de tiempo más amplio para el pulso de retorno, el cual permite que la forma más impredecible del eco de las capas de hielo continental se sostengan en el bloqueo y rastreo. El retorno de hielo del mar, por el contrario, parece especular más desde el océano y tiene un rastreo que alcanzó su punto máximo. La diferencia en la forma de onda (hielo en el océano), se puede utilizar para realizar un seguimiento con una buena precisión del borde de la capa de hielo.

# Capítulo 3

## Análisis de Datos y Resultados

### 3.1 Análisis de datos

Para realizar el estudio del mar empleando datos satelitales, se utilizan datos de la Guaira (Venezuela), San Juan (Puerto Rico), Veracruz (México) y Key West (USA), entre los años 1985 y 1994, obtenidos de la página de la NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration)<sup>1</sup>. El formato de estos datos están en horas y consiste en archivos agrupados por años. El archivo de registro consta de una matriz de 731 filas (donde la primera fila está el encabezado del archivo <sup>2</sup>y en las restantes filas se encuentra información sobre la estación y las alturas de todo el año) y de 16 columnas ( la 1era columna se encuentra el número de la estación, la 2da columna la versión de la estación, la 3era columna el nombre de la estación, en la cuarta columna el año, mes, día y número de registro por día y en las restantes 12 columnas corresponden a los registros de cada hora en medio día).

Los pasos a seguir para realizar el análisis de los datos son los siguientes:

1. Convertir los datos en una serie de tiempo, de dos columnas (donde la primera representa el tiempo en horas y la segunda las alturas alcanzadas en metros) y 8760 ó 8784 filas que depende si el año a trabajar es bisiesto o no.
2. Limpiar los datos, pues existen datos perdidos.
3. Estimar la densidad espectral y el espectro S-Jons para cada mes, para ello se utiliza la instrucción “*dat2spec*” y “*jonswap*” respectivamente de toolbox WAFO para MATLAB.

---

<sup>1</sup>\*<http://ilikai.soest.hawaii.edu/uhs/c/rqds.html>

<sup>2</sup>\* Más detalles sobre el encabezado del archivo ver en el apéndice

4. Estimar la altura significativa de la ola ( $H_m$ ), para ello se utiliza la instrucción “*spec2char*”, usando como dato de entrada, el espectro de cada mes.
5. Realizar la simulación de procesos gaussianos propuesto por (2009 [2]), del mes de enero de 1985 para los datos de la Guaira.
6. Calcular la densidad espectral y el espectro S-Jons, usando los comandos antes mencionados a los datos de la simulación, tanto como día a día como hora a hora.
7. Realizar comparaciones con los resultados obtenidos en el paso 3 y en el paso 6.

## 3.2 Resultados

A continuación se presentan unas tablas donde se reflejan las alturas significativas  $H_s(m)$  de las Estaciones La Guaira (Venezuela), San Juan (Puerto Rico), Veracruz (México) y Key West (USA), entre los años 1985 y 1994.

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,5056	0,6310	Sin datos	0,6904
Febrero	0,4053	0,6212	0,8013*	0,7024
Marzo	0,4043	0,5750	0,7243	0,6612
Abril	0,4338	0,5841	0,7166	0,6780
Mayo	0,4664*	0,6025	0,7410	0,6989
Junio	0,4922*	0,6423	0,8008	0,7143
Julio	0,5042	0,6466	0,8178	0,7066
Agosto	0,4518	0,5930	0,7330	0,6450*
Septiembre	0,4139	0,5682	0,6917	0,7092*
Octubre	0,4143	0,6123	0,8045	0,6787
Noviembre	0,52996	0,6270	0,8297	0,7263
Diciembre	0,4887*	0,6690	0,9227	0,7291

Cuadro 3.1: Tabla de Alturas Significativas del Año 1985, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4686	0,6416	0,8648	0,6955
Febrero	0,4323	0,6072	0,7603	0,7299
Marzo	0,4034	0,5921	0,7545	0,7108
Abril	0,4084	0,5828	0,7704	0,7268
Mayo	0,4682	0,5801	0,7731	0,7097
Junio	0,5173	0,6261	0,8015	0,7241
Julio	0,4647	0,6229	0,7860	0,6891
Agosto	0,4572	0,6183	0,7469	0,6783
Septiembre	0,4251	0,5904	0,6900	0,6564
Octubre	0,3955	0,5935	0,7125	0,6616
Noviembre	0,4786	0,6403	0,8930	0,6911
Diciembre	0,5519	0,6599	0,9275	0,7404

Cuadro 3.2: Tabla de Alturas Significativas del Año 1986, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4945	0,6659	0,9083	0,7499
Febrero	0,4322	0,5714	0,7606	0,6854
Marzo	0,4389	0,5536	0,7374	0,7129
Abril	0,3972	0,5707	0,7555	0,6641
Mayo	0,4767	0,6538*	0,8139*	0,6845
Junio	0,5294	0,6423	0,8353	0,7435
Julio	0,4972	0,5984	0,8270*	0,7038
Agosto	0,4537	0,5761	0,7377*	0,6670
Septiembre	0,4336	0,5814	0,7745*	0,6722
Octubre	0,4418	0,5824	0,8053	0,7045
Noviembre	0,5040	0,6112	0,8075	0,7036
Diciembre	0,5819	0,6448	0,8816	0,7244

Cuadro 3.3: Tabla de Alturas Significativas del Año 1987, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4838	0,6480	0,9147	0,7610
Febrero	0,4310	0,5730	0,8861	0,5968
Marzo	0,4506	0,5719	0,7332	0,7075
Abril	0,3902	0,5629	0,7405	0,6767
Mayo	0,4759	0,5958*	0,8027	0,6911
Junio	0,4926	Sin datos	0,8641	0,6995
Julio	0,4808	Sin datos	0,8151	0,7215
Agosto	0,4122	Sin datos	0,7291	0,6888
Septiembre	0,4185	0,6106*	0,8070	0,6809
Octubre	0,5008	Sin datos	0,7673	0,6754
Noviembre	0,4880	Sin datos	0,8505	0,6932
Diciembre	0,4504	Sin datos	0,8831	0,6916

Cuadro 3.4: Tabla de Alturas Significativas del Año 1988, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4702	Sin datos	0,8511	0,6880
Febrero	0,4248	Sin datos	0,8821	0,5577
Marzo	0,4130	0,5607*	0,7616	0,5603
Abril	0,4167	0,5683	0,7582	0,6909
Mayo	0,4512	0,5901	0,7694	0,6988
Junio	0,5173	0,6245	0,8300	0,7282
Julio	0,4777*	0,6268	0,8461	0,7064
Agosto	0,4438*	0,5874*	0,7082	0,6656
Septiembre	0,3565	0,6815*	0,7901	0,6341
Octubre	0,3945	0,5910	0,7913	0,6731
Noviembre	Sin datos	0,6220	0,8329	0,7372
Diciembre	0,5334*	0,6435	1,0745	0,7334

Cuadro 3.5: Tabla de Alturas Significativas del Año 1989, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4945	0,6140	0,7980	0,6966
Febrero	0,4164	0,6137	0,7266	0,6900
Marzo	0,3939	0,5742	0,7343	0,6994
Abril	0,4138	0,5942	0,7542	0,6875
Mayo	0,4643	0,5837	0,7909	0,6939
Junio	0,4713	0,6033	0,7672	0,6913
Julio	0,4491	0,5915	0,7425	0,6820
Agosto	0,4425	0,5701	0,7293	0,6671
Septiembre	0,3838	0,5537	0,6603	0,6400
Octubre	0,3792	0,5709	0,7181	0,6549
Noviembre	0,5642	0,6322	0,8322	0,6962
Diciembre	0,5013	0,6719	0,9909	0,7462

Cuadro 3.6: Tabla de Alturas Significativas del Año 1990, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4407*	0,6453	0,8199	0,7169
Febrero	0,4223*	0,5941*	0,7379	0,6982
Marzo	0,3476	0,5532	0,6812	0,6920
Abril	Sin datos	0,5700	0,7493	0,6966
Mayo	0,4131*	0,6451	0,7906	0,7119
Junio	0,4851	0,6533	0,7993	0,6874
Julio	0,4370	0,6058	0,7318	0,6579
Agosto	0,4069	0,5978	0,6669	0,6649
Septiembre	0,3974	0,5991	0,7531	0,6739
Octubre	0,3922	0,6341	0,7668	0,6582
Noviembre	0,4616	0,6519	0,8675	0,8183
Diciembre	0,4707	0,6175	0,8434	0,7090

Cuadro 3.7: Tabla de Alturas Significativas del Año 1991, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4505	0,6180	0,8217	0,7196
Febrero	0,4774	0,5792	0,7349	0,7052
Marzo	0,3185	0,5289	0,6515	0,6446
Abril	0,3959	0,5692	0,6733	0,6823
Mayo	0,4289	0,6012	0,7574	0,7207
Junio	0,5202	0,6134	0,7972	0,7145
Julio	0,4447	0,5969	0,7346	0,7937*
Agosto	0,3871	0,5832	0,6436	0,6398*
Septiembre	0,3849	0,5407	0,6849	0,6334
Octubre	0,3969	0,5538	0,8571	0,6682
Noviembre	0,4768	0,6198	0,7826	0,7191
Diciembre	0,4843*	0,5853	0,7610	0,6640

Cuadro 3.8: Tabla de Alturas Significativas del Año 1992, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,4616*	0,5551	0,8217	0,6792
Febrero	0,3716	0,5486	0,7349	0,6886
Marzo	0,3558	0,5151	0,6515	0,7270
Abril	0,3611	0,5493	0,6733	0,6759
Mayo	0,4137	0,5724	0,7574	0,6634
Junio	0,4546	0,5897	0,7972	0,6938
Julio	0,4390	0,5873	0,7346	0,6806
Agosto	0,3668	0,5732	0,6436	0,6425
Septiembre	0,3588	0,5677	0,6849	0,6743
Octubre	0,3530	0,5690	0,8571	0,6457
Noviembre	0,4291	0,5999	0,7826	0,6748
Diciembre	0,4851	0,6205	0,7610	0,7350

Cuadro 3.9: Tabla de Alturas Significativas del Año 1993, medida en metros

Meses	Estaciones			
	La Guaira	San Juan	Veracruz	Key West
Enero	0,3971	0,6106	0,7359	0,7009
Febrero	0,3614	0,5660	0,7036	0,7075
Marzo	0,3836	0,5741	0,6624	0,7197
Abril	0,4095	0,5696	0,6847	0,6650
Mayo	0,4052	0,5861	0,7108	0,6875
Junio	0,4055*	0,5653	0,7025	0,6704
Julio	0,4172	0,5871	0,6431	0,6526
Agosto	0,4030	0,5438	0,6021	0,6202
Septiembre	0,3366	0,5584	0,5756	0,6303
Octubre	0,3566	0,5671	0,6614	0,6227
Noviembre	0,4015	0,5910	0,6989	0,6854
Diciembre	0,4726	0,6270	0,83332	0,7060

Cuadro 3.10: Tabla de Alturas Significativas del Año 1994, medida en metros

Los datos que tienen (\*), se refiere a meses en donde no están todas las horas de muestreo. Para la Guaira (Venezuela) se puede observar que sus alturas significativas se encuentran entre 0,3185 metros y 0,5819 metros, además es importante resaltar que las menores alturas significativas alcanzadas en cada año son frecuente en los meses de marzo, abril, septiembre y octubre, mientras que las mayores se destacan en los meses de junio, noviembre y diciembre, sólo en el año 1988 se encuentra un dato atípico pues la mayor altura significativa en este año es en el mes de octubre.

Para San Juan (Puerto Rico), las alturas significativas están entre 0,5151 metros y 0,6719 metros, al mismo tiempo se puede observar que las menores alturas significativas se repiten entre los meses de marzo, abril, mayo, agosto y septiembre, y las mayores alturas significativas están entre los meses de noviembre, diciembre y enero.

Por otra parte para Veracruz (México) las alturas significativas se encuentran en un rango de 0,6021 metros y 0,9909 metros, aunque existe un dato atípico, que es en el mes de diciembre de 1989 en donde la altura es de 1,0745 metros. Las menores alturas significativas son usuales en los meses de marzo, agosto y septiembre, en cambio las mayores alturas significativas se



encuentra en enero, octubre, noviembre y diciembre.

Para finalizar en Key West (USA) las alturas significativas están en un intervalo de 0,6202 metros y 0,7610 metros, en esta región las menores alturas significativas son frecuentes en los meses de febrero, marzo, julio y septiembre, mientras que las mayores alturas significativas están en noviembre, diciembre y enero.

En general podemos decir que en todas las regiones analizadas, las máximas alturas significativas se encuentran entre los meses de noviembre, diciembre y enero y las mínimas alturas significativas son usuales en los meses de marzo y septiembre. A continuación, se presenta un gráfico en donde se muestran todas las alturas significativas de todos los meses entre los años 1985-1994 de la Guaira, San Juan, Veracruz y Key West.

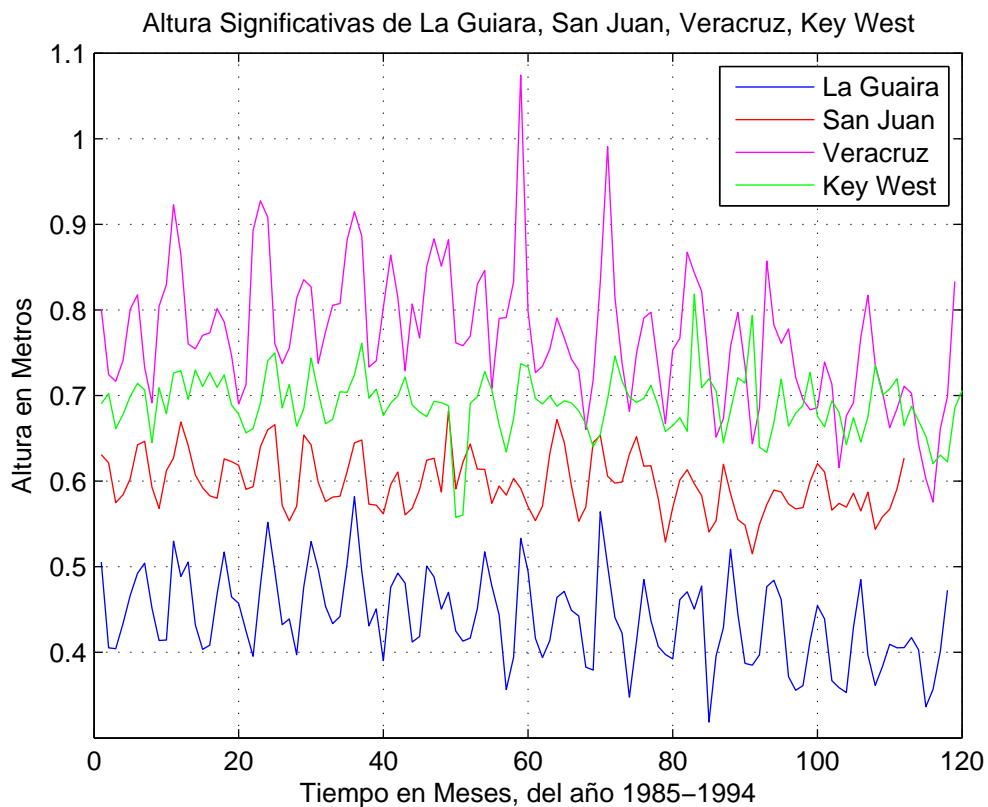


Figura 3.1: Alturas Significativas

Se puede observar, que para las cuatro regiones las alturas significativas tienden a decrecer con el tiempo. Además, se puede distinguir que las mayores alturas significativas se encuentran en Veracruz (México) seguidas por Key West (USA), esto se debe principalmente por ser costas del Golfo de México y las menores alturas significativas las tienen San Juan (Puerto Rico) y la Guaira (Venezuela), cabe señalar que las alturas de la Guaira son mucho más pequeñas a las alturas de San Juan y esto se debe a que el mar de la Guaira es un mar llano a diferencia del mar de San Juan.

Es importante también resaltar que existen datos atípicos en Veracruz, en donde las alturas significativas se acercan y sobrepasan a un metro, tales datos se observan en el mes de Diciembre de 1989 y 1990 respectivamente. También se observa un dato atípico para Key West, que por el contrario a Veracruz, sus alturas significativas se encuentran muy por debajo de su rango, pues son menores a los 0,60 metros, éstas alturas se registran para los meses de febrero y marzo de 1989.

### 3.3 Simulación del Registro de Olas

Para realizar un análisis más detallado de los espectros de energía se procedió a realizar una simulación del registro de olas de la Estación de la Guaira, del mes de enero de 1985, para ello se utilizó el procedimiento propuesto (2009 [2]), para simulación de procesos gaussianos.

Sea  $g$  la densidad espectral de un proceso  $X$  estacionario con segundo momento finito. La función de covarianza de  $X$  tiene la siguiente representación espectral

$$\rho(\tau) = \int_0^{\infty} g(v) \cos(v\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

Sea el rango de frecuencias  $[0, \bar{\gamma}]$ , con  $0 < \bar{\gamma} < \infty$  y sea

$$g_n(v) = \sum_{i=1}^n g(v_{i-1}) \mathbf{1}_{(v_{i-1} < v < v_i)}$$

una aproximación de  $g$  donde  $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_n = \bar{v}$ .

Sean

$$\rho(\tau) = \int_0^{\infty} g(v) \cos(v\tau) dv \quad y$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_n(\tau) &= \int_0^{\bar{v}} g_n(v) \cos(v\tau) dv \\ &= \sum_{p=1}^n g(v_{p-1}) \frac{\text{sen}(v_p\tau) \text{sen}(v_{p-1}\tau)}{\tau} \end{aligned}$$

funciones de covarianzas de  $g$  y  $g_n$ .

Sea  $G(t)$  un proceso gaussiano estacionario con densidad espectral  $g$  y funciones de covarianzas (3.1). Consideremos un proceso gaussiano estacionario con media 0 y varianza 1, y función de covarianza

$$\rho_n(\tau) = \frac{\tilde{\rho}_n}{\tilde{\rho}_0}.$$

Dado que  $g_n$  es una densidad espectral,  $\tilde{\rho}_n$  una función de covarianza, también lo será  $\rho_n(\tau) = \frac{\tilde{\rho}_n}{\tilde{\rho}_0}$ .

Finalmente, el proceso gaussiano simulado con densidad espectral  $g_n$  que converge a  $g$ , es de la forma

$$Z_n(t) = \sum_{k=1}^n \sigma_k (A_k \cos(v_k t) + B_k \text{sen}(v_k t)) \quad (3.2)$$

donde  $v_k > 0$  son distintas frecuencias,  $A_k$  y  $B_k$  son variables aleatorias  $N(0, 1)$  y  $\sigma_k$  son constantes que se obtienen de la densidad espectral.

Valiéndonos del procedimiento anterior, se realiza las simulaciones de los registros de olas, con la función “Proceso Gaussiano” implementada en Matlab y cuyos datos de entrada son la densidad espectral ( $S_n$ ), el número de registros ( $N = 86400$ ) y la varianza del registro ( $\sigma^2$ ).

### 3.3.1 Densidad Espectral

#### Análisis de la densidad espectral mes a mes de la Guaira entre los años 1985-1994

Al calcular la densidad espectral por meses a los datos de la Guaira en el tiempo comprendido desde enero 1985 hasta diciembre de 1994, se puede observar que las frecuencias de energía predominantes para todos los meses son  $fp_1 = 0,26rad/s$  y  $fp_2 = 0,5rad/s$ , como se podrá ver en las figuras 3.2, y 3.3. La explicación, a que todas las frecuencias de energías sean iguales para todos los meses, se debe principalmente a que se trabaja con datos de satélites que son recolectados por horas, y no por segundos tal como sucede con las boyas superficiales, por lo cual se pierden muchos datos que pueden representar algún cambio en las frecuencias de energías, además cabe destacar que el mar de la Guaira, es un mar llano en donde no se presentan grandes cambios en la superficie del mismo.

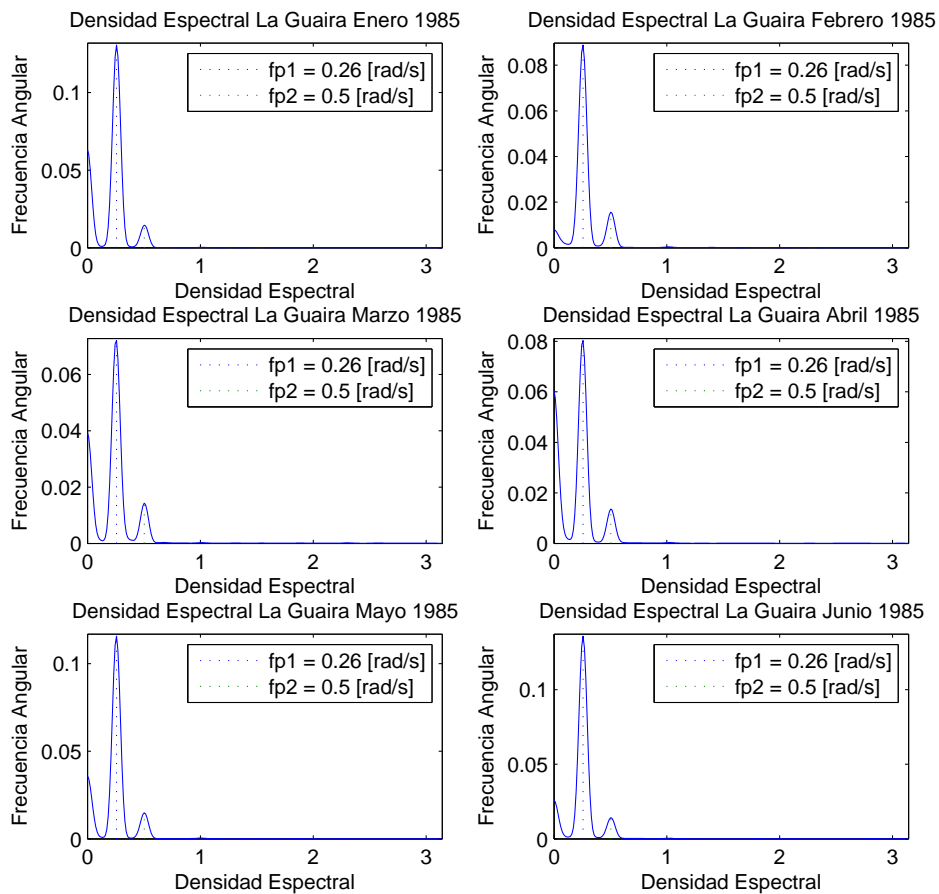
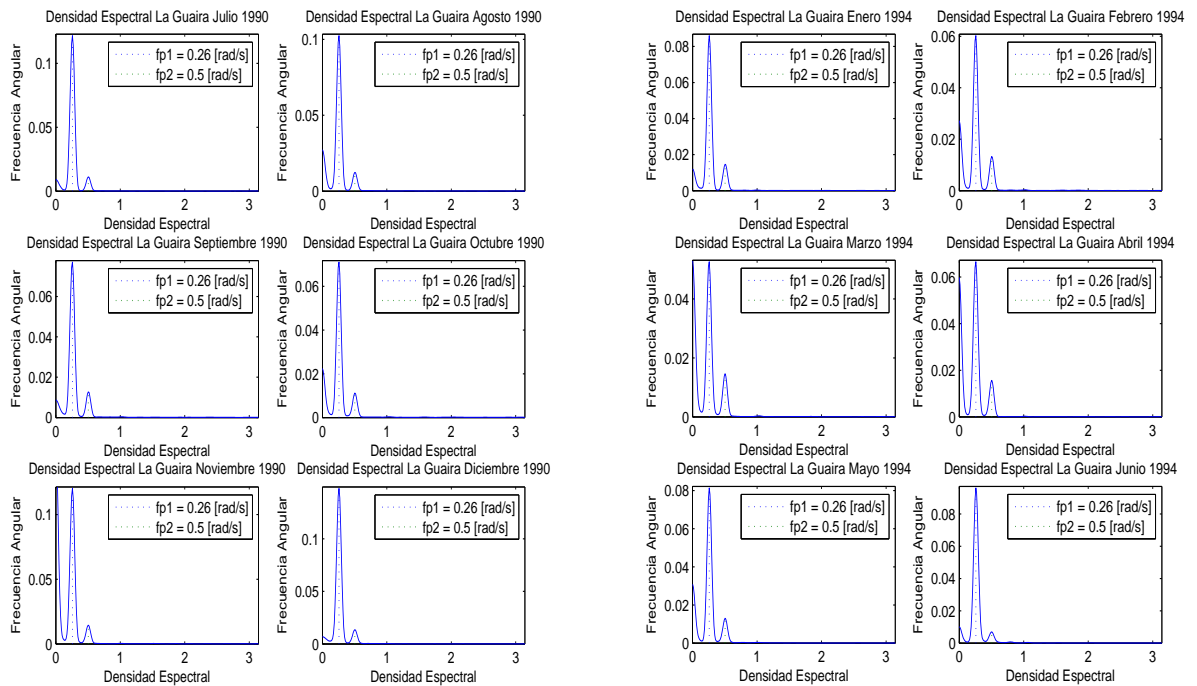


Figura 3.2: Densidad Espectral de la Guaira entre los meses de enero hasta junio de 1985



La Guaira Junio-Diciembre 1990

La Guaira Enero- Junio 1994

Figura 3.3: Densidad Espectral de la Guaira, por meses

### Análisis de la densidad espectral día a día de la simulación

Al hacer la simulación de la Guaira del mes de enero de 1985 y calcular la densidad espectral día a día de tal simulación, se percibe que las frecuencias de energías  $fp_1$ , se encuentran entre los valores de  $0,47rad/s$  y  $0,57rad/s$ , lo cual es similar a las frecuencias  $fp_2$  de la densidad espectral obtenidas de los datos de la Guaira mes a mes. Por el contrario, para la segunda frecuencia  $fp_2$  de la densidad espectral de la simulación, se obtienen valores muy cambiantes desde  $0,031rad/s$  hasta  $1rad/s$ , cabe destacar que en algunos casos se tienen frecuencias en donde se aproximan a la primera frecuencia  $fp_1$  y segunda frecuencia  $fp_2$  de las densidades espectrales mes a mes de la Guaira, vease la figura 3.4.

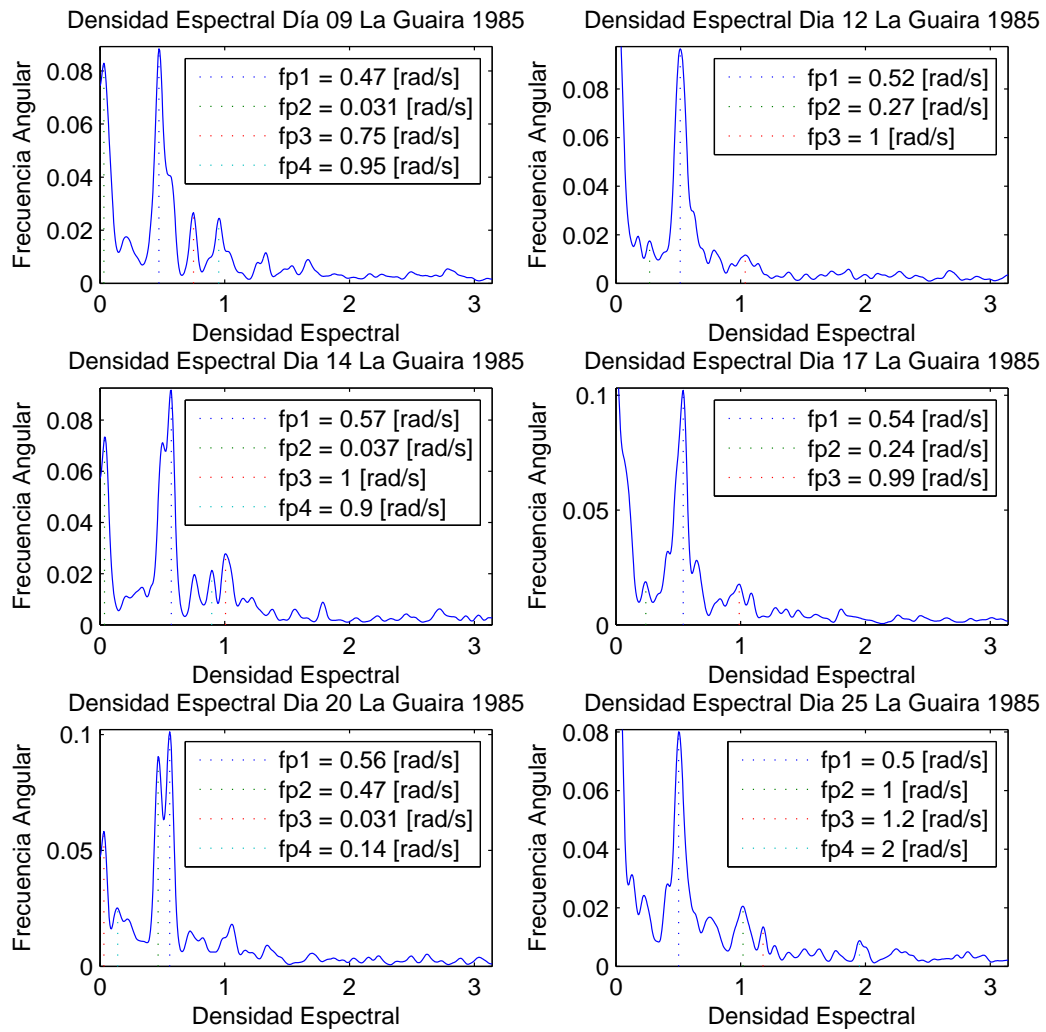


Figura 3.4: Densidad Espectral de la Simulación día a día de la Guaira para el mes de Enero del 1985

### Análisis de la densidad espectral hora a hora de la simulación

Para las densidades espectrales hora a hora que se calculan a partir de la simulación del mes de enero de la Guaira de 1985, se obtienen para la frecuencia  $fp_1$  valores predominantes entre el intervalo de  $0,47rad/s$  y  $0,57rad/s$  (como se ve en la figura 3.5), tal como sucedía para las frecuencias  $fp_1$  de las simulaciones día a día, pero también existen valores de la frecuencia de energía  $fp_1$  de la simulación hora a hora entre el intervalo de  $0,025rad/s$  y  $0,055rad/s$ , tales valores se notan en algunas horas de los días 16, 21 y 22 del mes de enero

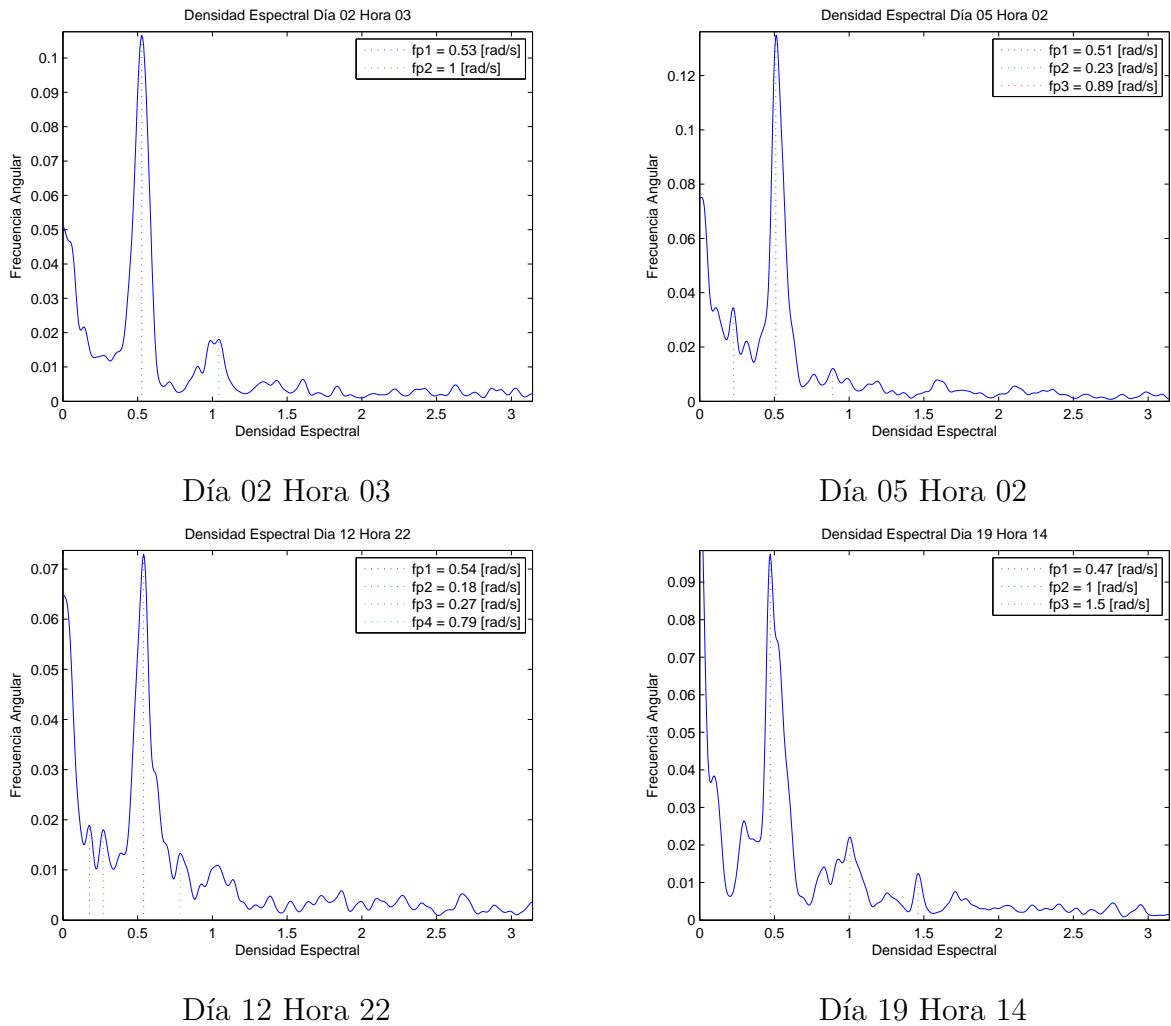


Figura 3.5: Densidad Espectral hora a hora de la Simulación de la Guaira para el mes de enero 1985

(vease la figura 3.6). Por otra parte, para los valores de frecuencia  $fp_2$  de las densidades espectrales hora a hora de la simulación, al igual que para las simulaciones día por día se obtienen frecuencias muy variantes que van de valores mínimos de  $0,037rad/s$  hasta valores máximos de  $1rad/s$ . Es importante señalar, que las densidades espectrales de la simulación hora a hora la frecuencia  $fp_1$  se encuentra entre el rango de  $0,025rad/s$  y  $0,055rad/s$ , la segunda frecuencia  $fp_2$ , está en un rango que se aproxima a  $0,5rad/s$ , siendo ésta última unas de las frecuencias principales de la densidad espectral mes a mes de los datos de la Guaira (vease la figura 3.6).

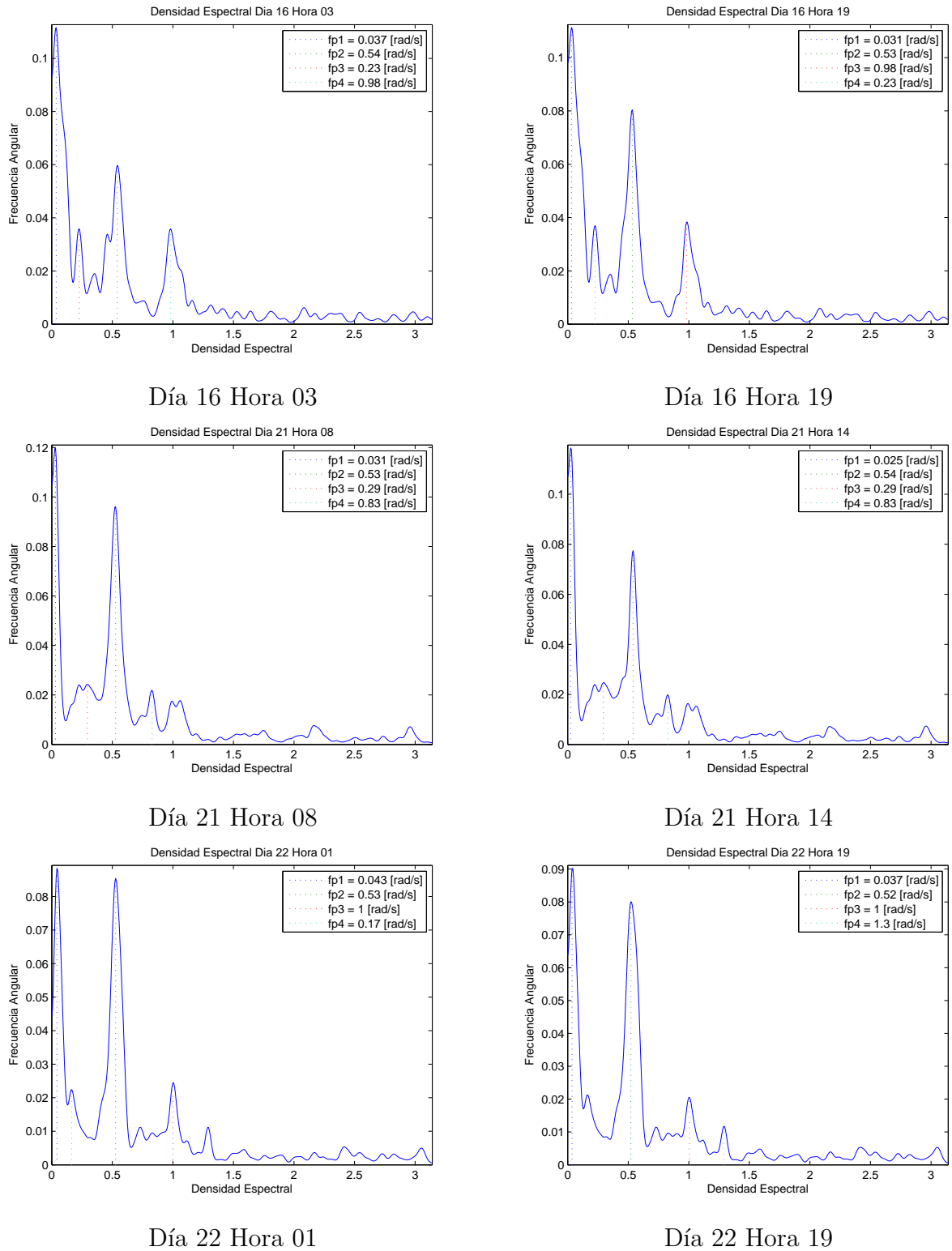


Figura 3.6: Densidad Espectral hora a hora de la Simulación de la Guaira para el mes de enero 1985



### 3.3.2 Espectro S-Jons

#### Análisis del Espectro S-Jons mes a mes de la Guaira entre los años 1985-1994

Al tener los resultados de las densidades espectrales mes a mes de la Guaira y ver que todas las frecuencias de energías para la primera frecuencia  $fp_1$  y segunda frecuencia  $fp_2$  son las mismas para todos los meses, se optó por calcular el espectro S-Jons en el tiempo comprendido del mes de enero de 1985 hasta el mes de diciembre de 1994 para verificar si con éste espectro sucedía lo mismo. La frecuencia de energía predominante para los espectros S-Jons se encuentran en un intervalo que va desde  $0,11 \text{ rad/s}$  hasta  $0,26 \text{ rad/s}$ , siendo ésta última frecuencia la más habitual para todos los meses, además de coincidir con la frecuencia  $fp_1$  de la densidad espectral de los datos la Guaira mes a mes, véanse las figuras 3.7 y 3.8. Sin embargo, todas las frecuencias no se encuentran en el intervalo nombrado anteriormente, pues existen tres casos donde las energías de frecuencias son muy bajas en comparación a tal intervalo, tales frecuencias son menores a  $0,090 \text{ rad/s}$ , como se muestra en la figura 3.9.

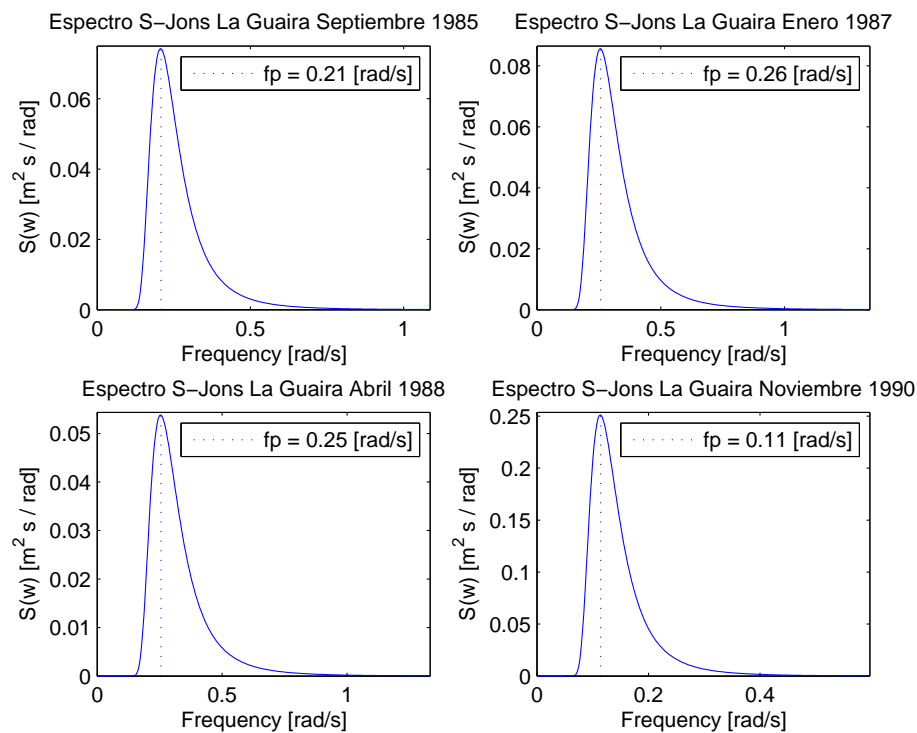


Figura 3.7: Espectro S-Jons de la Guaira, por meses

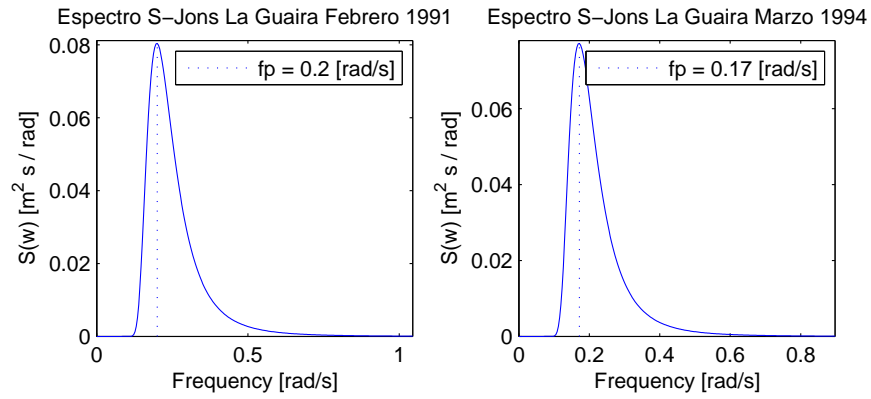


Figura 3.8: Espectro S-Jons de la Guaira, por meses

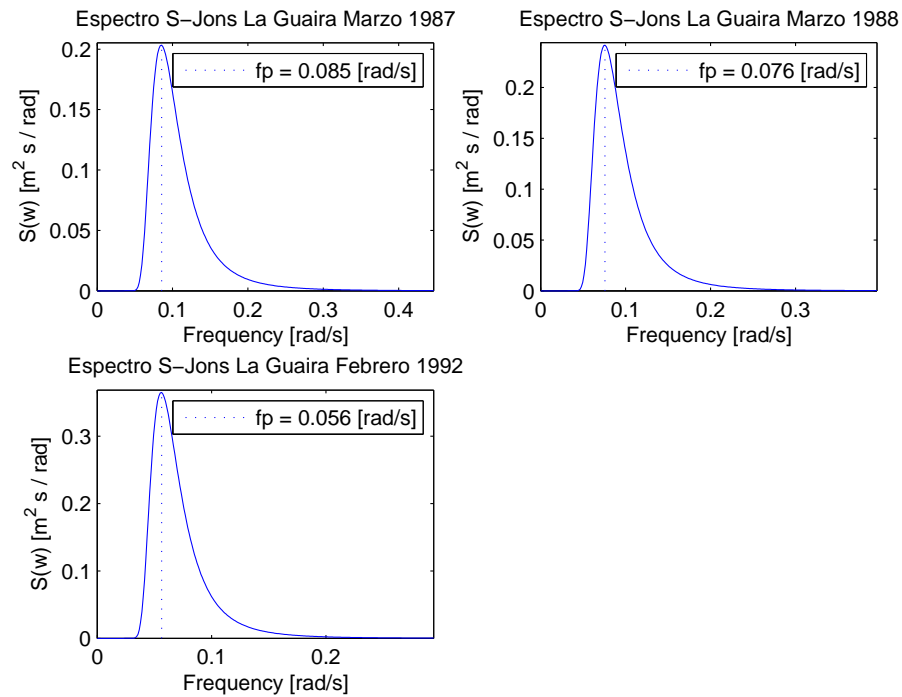


Figura 3.9: Espectro S-Jons de la Guaira, por meses

### Análisis del espectro S-Jons día a día de la simulación

Los espectros S-Jons día por día son también calculados para la simulación de la Guaira del mes enero del 1985, en este caso las frecuencias de energías no se encuentran en un intervalo de repetición, tal como sucedía para las frecuencias de energías de los espectros

S-Jons calculados para los datos de la Guaira mes a mes. Las frecuencias son muy variantes, van desde valores mínimos de  $0,081 \text{ rad/s}$  hasta  $0,52 \text{ rad/s}$ . Sin embargo, es importante resaltar que aproximadamente el 50 % de las frecuencias del espectro S-Jons se encuentran en un intervalo de  $0,47 \text{ rad/s}$  hasta  $0,52 \text{ rad/s}$ , tales frecuencias son cercanas a la frecuencia  $fp_2$  de la densidad espectral de los datos de la Guaira mes a mes, véanse las figuras 3.10 y 3.11.

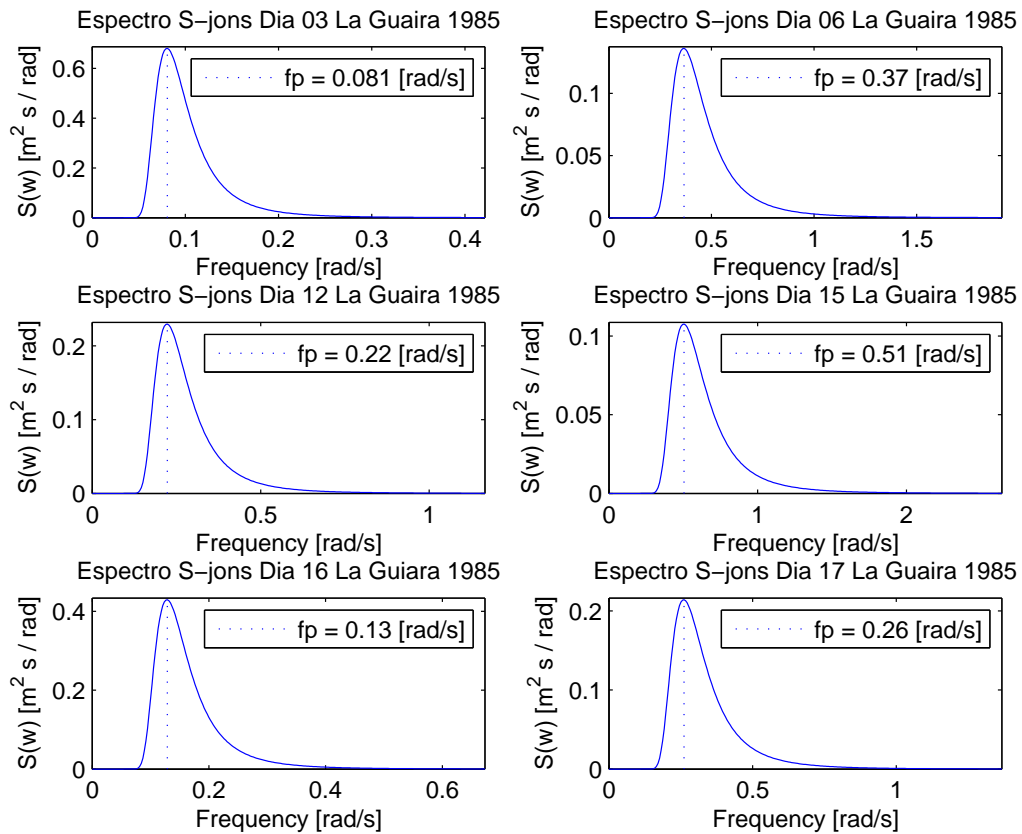


Figura 3.10: Espectro S-Jons de la Simulación día a día de la Guaira para el mes de Enero del 1985

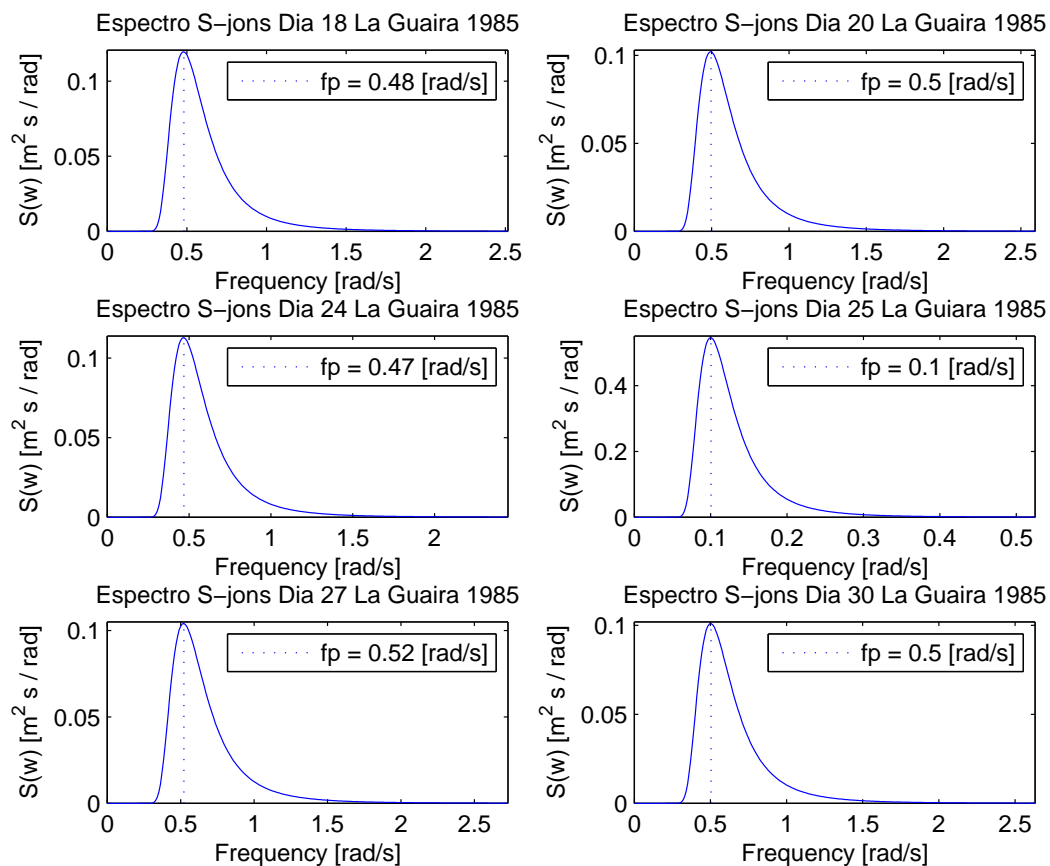


Figura 3.11: Espectro S-Jons de la Simulación día a día de la Guaira para el mes de Enero del 1985

### Análisis del espectro S-Jons hora a hora de la simulación

Para los espectros S-Jons hora a hora calculados a partir de la simulación de la Guaira, se tienen frecuencias de energías que predominan entre los intervalos de  $0,11 \text{ rad/s}$  hasta  $0,27 \text{ rad/s}$ , el intervalo  $0,30 \text{ rad/s}$  hasta  $0,40 \text{ rad/s}$  y el intervalo de  $0,43 \text{ rad/s}$  hasta  $0,54 \text{ rad/s}$  (véase la figura 3.12 y 3.13), el primer intervalo se aproxima con las frecuencias  $f_{p1}$  del espectro S-Jons de los datos de la Guaira mes a mes, mientras que el último intervalo ( $0,43 \text{ rad/s} - 0,54 \text{ rad/s}$ ) se aproxima con la frecuencia  $f_{p2}$  de la densidad espectral de los datos de la Guaira mes a mes. No obstante, existen otras frecuencias que van desde los valores mínimos de  $0,024 \text{ rad/s}$  hasta  $0,095 \text{ rad/s}$ , estas frecuencias no son habituales y sólo se reflejan en algunas horas de los días 03, 16, 19 y 25 (véase los últimos cuatro gráficos de

la figura 3.13), tal como sucedía para algunas frecuencias  $fp_1$  del espectro S-Jons mes a mes.

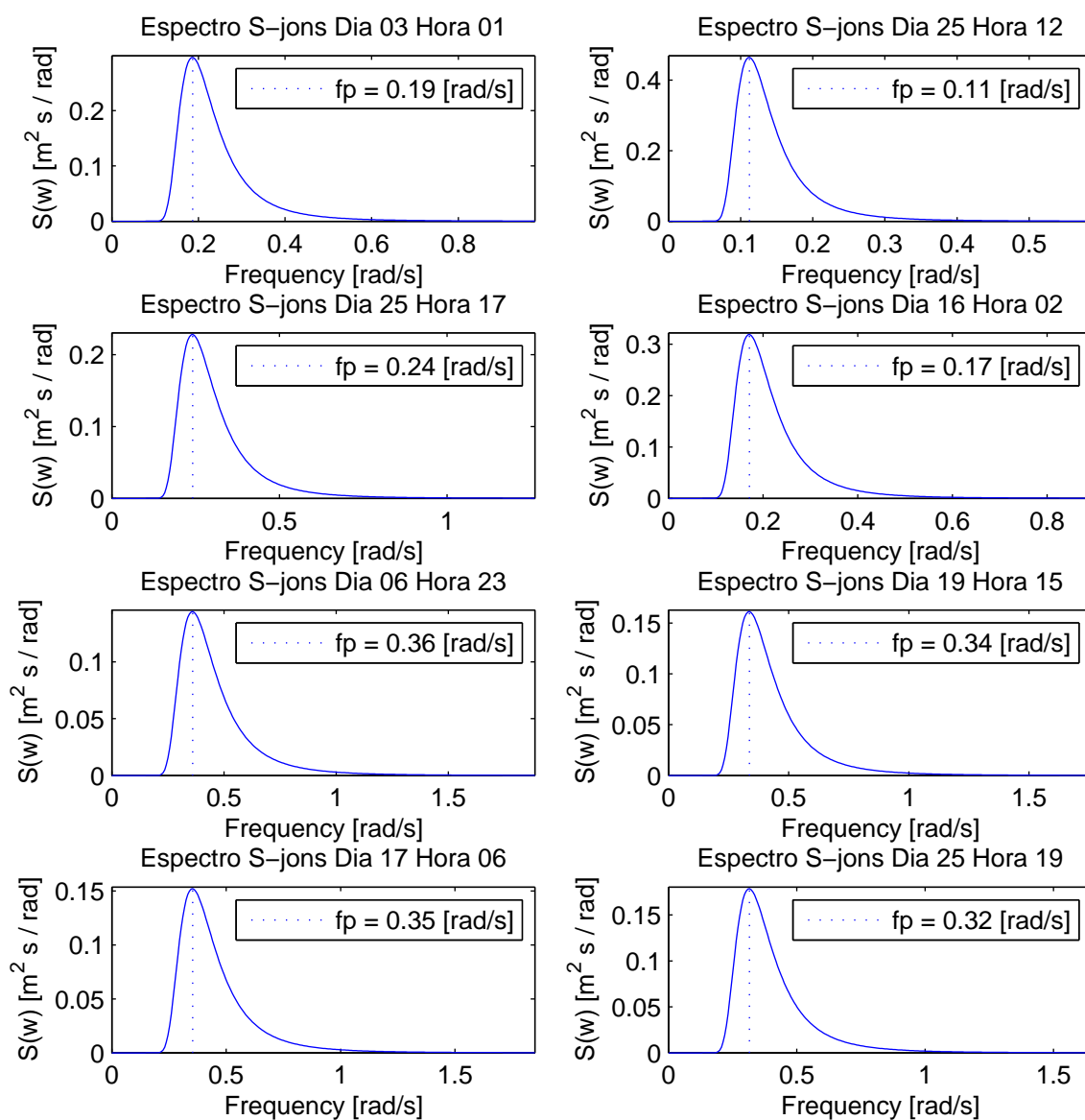


Figura 3.12: Espectro S-Jons de la Simulación hora a hora de la Guaira para el mes de Enero del 1985

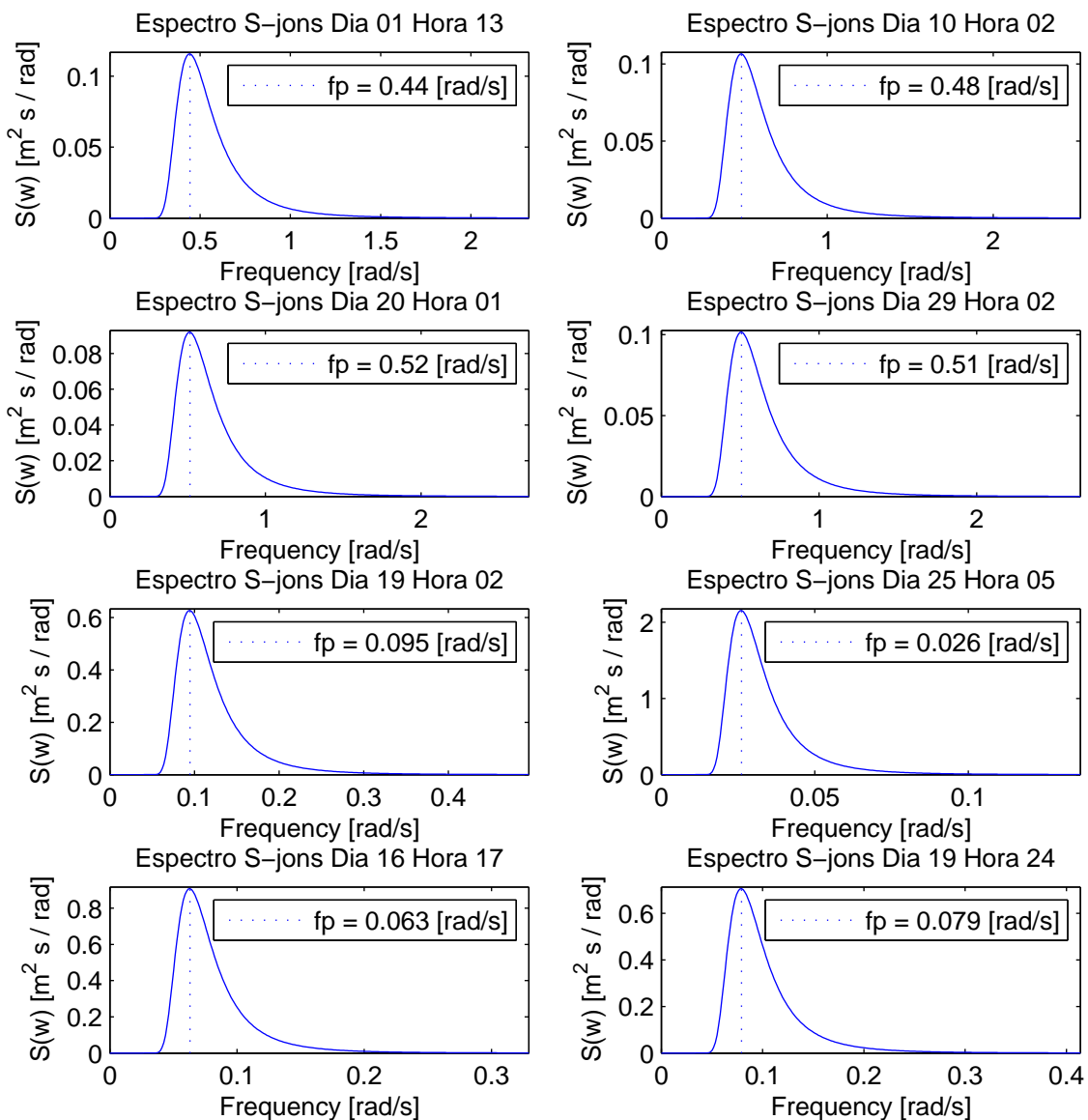


Figura 3.13: Espectro S-Jons de la Simulación hora a hora de la Guaira para el mes de Enero del 1985

### 3.4 Conclusiones

Al calcular las alturas significativas  $H_s$  de las regiones de la Guaira (Venezuela), San Juan (Puerto Rico), Veracruz (México) y Key West (USA), entre el tiempo comprendido de enero de 1985 hasta diciembre de 1994, se pudo notar que las menores alturas son alcanzadas por la Guaira, esto se debe principalmente a que el mar de esta región es un mar llano, a diferencia de Veracruz en donde se tienen las mayores alturas de estas 4 regiones, debido primordialmente a ser costa del Golfo de México. Además se puede notar un patrón de repeticiones entre las máximas y mínimas alturas significativas alcanzadas de las regiones antes mencionadas, en donde las máximas alturas se presentan entre los meses de noviembre, diciembre y enero y las mínimas entre marzo y septiembre.

Por los resultados obtenidos de las densidades espectrales mes a mes a los datos de la Guaira entre los años de 1985 hasta 1994, se puede percatar que las energías de frecuencias son las mismas para todos los meses estudiados, esto se debe esencialmente a que se trabajan con datos satelitales que son recolectados hora a hora y por ende se pueden omitir datos que pueden representar algún cambio importante en el comportamiento de las energías de frecuencias de las densidades espectrales. Por otra parte al calcular el espectro S-Jons a los mismos datos se puede percatar cambios en las energías de frecuencias, por lo cual se puede concluir que para este tipo de datos es más eficiente trabajar con el espectro S-Jons.

Al realizar las comparaciones entre los resultados que se obtienen de las frecuencias de energías de las densidades espectrales de los datos originales con los datos de la simulación, se puede notar que existen frecuencias que son muy cercanas, en particular, es importante resaltar que la segunda frecuencia de la densidad espectral que se obtiene de los datos originales se aproxima a la que se alcanza para la primera frecuencia de la densidad espectral de la simulación, por lo que es un buen indicador que la simulación que se realiza es la conveniente. Por otra parte al hacer la comparación con las energías de frecuencias que se tienen del espectro S-Jons se puede ver que tanto los datos originales como los datos de la simulación alcanzan energías de frecuencias muy variantes que no se mantienen en un patrón de repetición, esto se debe a que el mar en la región de la Guaira es un mar llano y por lo tanto su comportamiento es no Gaussiano, lo mismo ocurre con el comportamiento de San Juan (Puerto Rico) y Key West (USA).

# Apéndice

## Descripción de los Datos

El formato de los datos están en horas y consiste en archivos agrupados por años. Es importante recalcar, que en los satélites se pueden perder datos por diversas razones ya explicadas en capítulos anteriores, es por ello que éstos datos perdidos son completados con una bandera de datos (9999). Un encabezado existe en el comienzo de cada año y se codifica como:

Campo	Bytes	Longitud	Comentario
Número de la Estación	1-3	3	exactamente 3 dígitos
Versión de la Estación	4	1	Letra de la A a la Z
Nombre de la Estación	23,6	18	abreviado si es necesario
Región / País	25-43	19	abreviado si es necesario
Año	45-48	4	
Latitud	50 a 56	6 grados	minutos, decimas, (decimal implícita) y hemisferio
Longitud	57-63	7 grados	minutos, decimas, (decimal implícita) y hemisferio
Diferencia con GMT	65-68	4	los datos de tiempo están relacionados en términos con GMT en horas y decimas de diferencia (decimal implícita) con latitudes Este Positivas.



Campo	Bytes	Longitud	Comentario
Método de decimación	70	1	Codifica como: 1. Filtrada 2. Promedio simple de todas las muestras 3. Lectura in situ 4. Otros
Desplazamiento de referencia	72-76	5	desplazamiento constante que se añade a cada valor de datos para que se relacionen con el medidor medio de la marea o referencia primaria en las mismas unidades de datos.
Código de referencia	77	1	R= data con referencia a datos y x= datos que no hace referencia a dato.
Unidades	79-80	2	Siempre Milímetros = MM

Además los datos se codifican como:

Campo	Bytes	Longitud	Comentario
Numero de la Estación	1-3	3	Exactamente 3 dígitos
Versión de la Estación	4	1	De la letra A a la Z
Nombre de la Estación	6-9	4	Abreviado si es necesario
Año	12-15	4	
Mes	16-17	2	Valor Numérico
Día	18-19	2	
Número de registros por día	20	1	1 ó 2
Datos del nivel del mar	21-80	60	12 valores del nivel del mar, 00 a 11 horas (1), el horario de 12 a 23 (2)

## Ley de Bragg

Consideremos dos planos paralelos de la red distantes entre si por  $d$ . La diferencia de trayectos correspondientes a rayos reflejados en planos adyacentes es  $2d \sin \theta$ , midiéndose  $\theta$  a partir del plano. Se produce la interferencia constructiva de la radiación procedente de planos sucesivos cuando la diferencia de trayectos es un número entero  $n$  de la longitud de onda  $\lambda$ , de modo que

$$2d \sin \theta = n\lambda.$$

Esta es la ley de Bragg. La reflexión se Bragg puede producirse únicamente para longitudes de onda  $\lambda \leq 2d$ .

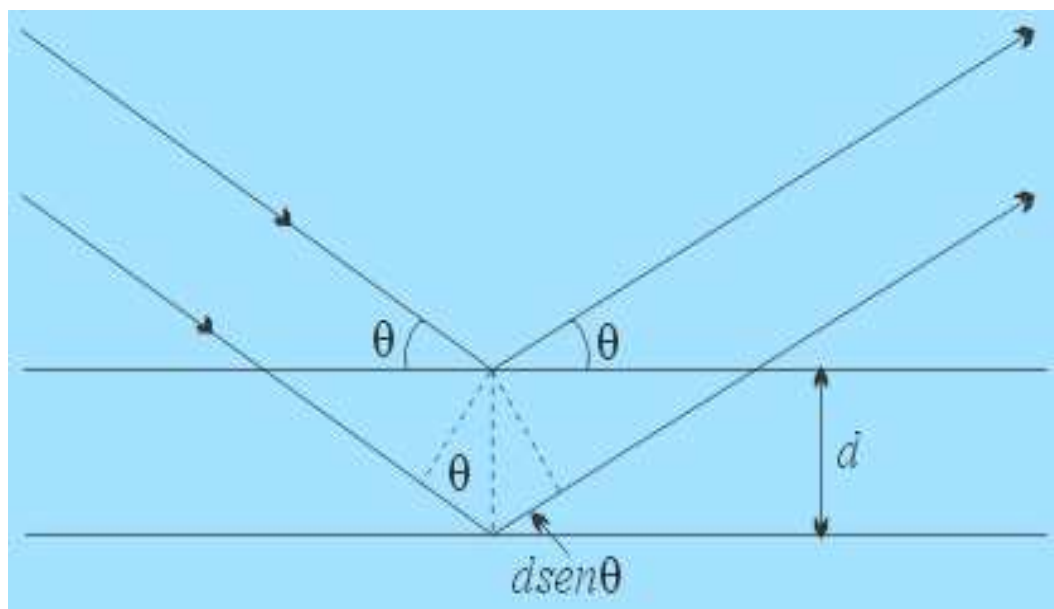


Figura 3.14: Ley de Bragg

# Bibliografía

- [1] C. Aage, T.D. Allan, D.J.T.Carter, G.Lindgren y M.olagnon. (1998) *Ocean fron Space: A textbook for Offshore Engineers and Naval Architects*. Godalming, Suurey, UK.
- [2] Grigoriu, M. (2009) *Existence and construction of translation models for stationary non-Gaussian processes*. Porpabilistic Engineering Mechanics, 24, pp. 545-551.
- [3] Ochi, M.K., (1998) *Ocean Waves, The Stochastic Approach*. Cambridge University Press. Cambridge, UK. pp. 13-57.
- [4] Ortega, Joaquín (2001) *Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Volumen VIII, Nro. 2, pp. 111-130
- [5] Rychlik, I., Johannesson, P., Leadbetter, M. R. (1997) *Modeling and Statistical Analysis of Ocean Wave Data Using Transformed Gaussian Processes*. Marine Structures 10, pp. 13-47.
- [6] Roseblantt, M., (1991) *Stochastic Curve Estimation*. NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics. Vol 3, pp 54-60.
- [7] (2000) *WAFO a Matlab Toolbox of Random Waves and Loads Tutorial Version 2.0.02*. Lund Institute of Technology, Suecia. pp. 6-27.
- [8] Charles Kittel (1997) *Introducción de la física del estado solido*. pp.35.