UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMATICA

Cálculo de la Cohomología de De Rham de los Espacios Proyectivos por medio de la Sucesión de Gysin

Trabajo Especial de Grado Presentado ante la Ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Omar Enrique Ortiz Branco** para optar al Título de Licenciado en Matemática.
TUTOR: MSc. Tomás Guardia Ortega.

Caracas, Venezuela
Abril, 2009

Quienes suscriben, asignados por la Universidad Central de Venezuela, como integrantes del jurado examinador del Trabajo Especial de Grado titulado: **Cálculo de la Cohomologa de De Rham de los Espacios Proyectivos por medio de la Sucesión de Gysin** presentado por el **Br. Omar Enrique Ortiz Branco**, titular de la Cédula de Identidad **17.124.010**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

MSc. Tomás Guardia (UCV)
(Tutor)

Dr. Francisco Tovar (UCV)
(Jurado)

Dr. Fermín Dalmagro (UCV)
(Jurado)

Contenido

Agradecimientos

A Dios, por todo lo que tengo y lo que soy.

A mi familia, por brindarme su incondicional apoyo y procurarme siempre los mejores medios para lograr mis metas.

A Tomás, mi tutor, gracias por toda tu ayuda para la realización de este trabajo y por motivarme siempre en cada reunión que tuvimos. Fue un honor ser tu primer tesista.

Al prof. Fermín Dalmagro, por iniciarme en el mundo de la topología algebraica con esa excelente electiva de Cohomología de De Rham. Gracias también por sus acertadas correcciones para esta tesis.

Al prof. Francisco Tovar por participar en la revisión de este trabajo.

Al Vernier Group, mis grandes amigos, sin uds. la matemática no sería lo mismo.

A Rosmir, por el soporte anímico y técnico que me diste desde que empecé este proyecto.

A Gabriela, mi gou! por el impulso mutuo que nos dimos para culminar nuestras licenciaturas y poder graduarnos juntos.

Al Cuerpo de Guías del Aula Magna, mis amigos del alma, con uds. aprendí a amar la UCV en todas sus dimensiones. Gracias por hacer tan grato mi transcurso por la universidad.

Introducción

El objetivo central de este trabajo es calcular la cohomología de De Rham de los Espacios Proyectivos Complejos a través de una herramienta de la topología algebraica conocida como la Sucesión de Gysin.

La topología algebraica es una rama de la topología y del álgebra que clasifica las propiedades topológicas por medio de estructuras algebraicas (e.g. grupos, módulos, etc.). Una teoría bastante estudiada son los grupos de cohomología de De Rham de una variedad diferenciable. Estos grupos se definen por medio del complejo exacto de De Rham, es decir por medio del complejo de formas diferenciables. Un grupo de cohomología es un grupo cociente que se define por medio de la derivada exterior de una forma diferenciable.

Realizar el cálculo de estos grupos de cohomología suele ser bastante tedioso si no se disponen de herramientas algebraicas que permitan manipular el núcleo y la imagen de los operadores. Hay resultados clásicos que facilitan las cuentas como el Lema de Poincaré y la sucesión de Mayer-Vietoris. Sin embargo espacios que no son homeomorfos pueden tener la misma cohomología.

El cálculo de la cohomología de los espacios proyectivos no es trivial, requiere muchas herramientas de la topología algebraica para obtenerla. Sin embargo la sucesión de Gysin permite relacionar las cohomologías de los espacios base y techo de un fibrado orientable con fibra esférica, tal como el fibrado de Hopf, cuya base es precisamente el espacio proyectivo complejo.

En el capítulo 1 se dan las definiciones básicas sobre variedades diferenciables, mostrando sus características y propiedades fundamentales. También en este capítulo se demuestra la existencia de particiones de la unidad diferenciables para variedades.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de fibrado diferenciable que nos brinda una perspectiva adecuada para estudiar los vectores y espacios tangentes a una variedad, que permiten de cierta forma "linealizar" el estudio de la misma.

El capítulo 3 contempla el estudio de las formas diferenciables, aportando el sustento teórico necesario para definir la Cohomología de De Rham. Además se esboza brevemente el concepto de fibrado orientable.

El último capítulo proporciona los recursos indispensables para la obtención de nuestro resultado, como lo son la cohomología de la esfera unitaria y la sucesión de Gysin con los operadores que en ella intervienen.

Capítulo 1

Variedades Diferenciables

Intuitivamente una variedad diferenciable es una generalización de los conceptos de curvas y superficies diferenciables en dos sentidos: generalización a cualquier dimensión y generalización al prescindir de un espacio ambiente.

1.1 Variedades Topológicas

Las variedades topológicas son, a modo general, espacios topológicos que localmente se comportan de manera similar a $\mathbb{R}^n$. En otras palabras, cada punto de una variedad topológica posee un entorno en el cual podemos establecer un sistema de coordenadas.

Definición 1.1.1. Sea M un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable. Decimos que M es una **variedad topológica de dimensión** n (o una n-variedad topológica) si cada punto $p \in M$ posee un entorno U homeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ mediante un homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Al par (U, φ) lo llamamos **sistema de coordenadas** o **carta local** de M en p, al dominio U de φ se le conoce como **entorno coordenado**, y al homeomorfismo φ^{-1} lo llamamos **parametrización local** de M en p. Usualmente llamaremos **carta local** o simplemente **carta** de M en p, únicamente al homeomorfismo φ.

Ejemplo 1.1.2. *La n-esfera* $\mathbb{S}^n$

Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Consideremos $U = \mathbb{S}^n - S$ siendo S el polo sur y $p(U)$ la imagen de U mediante la reflexión $p : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ en el hiperplano $x_{n+1} = 0$. U es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ a través de la proyección estereográfica desde el polo sur $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(x_1, ..., x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, ..., x_n)$$

$p(U)$ también es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ pues p es un homeomorfismo.

Así, todo punto en $\mathbb{S}^n$ pertenece a uno de los entornos coordenados U ó $p(U)$ homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, probando que la *n-esfera* es una variedad topológica.

Teorema 1.1.3. Todo espacio localmente compacto y segundo numerable es paracompacto.

Demostración

La compacidad local implica regularidad y la condición de 2do numerable implica que el espacio es de Lindelöf. Ahora bien, el teorema de Morita (Dugungji [1], página 174) afirma que en espacios Lindelöf son equivalentes las condiciones de regularidad y de paracompacidad.

□

Corolario 1.1.4. Toda variedad topológica es paracompacta.

1.2 Variedades Diferenciables

Definición 1.2.1. Sea M una variedad topológica de dimensión n. Un **atlas diferenciable** para M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ de cartas locales tales que:

1. $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ es un cubrimiento abierto por conjuntos conexos de M.

2. Para cada par de cartas (U, φ), $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$ la composición:

$$\phi = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

   es suave (es decir $\phi \in \mathcal{C}^\infty$). A la función ϕ la llamaremos **cambio de cartas**.

Una variedad topológica puede tener más de un atlas diferenciable. Podemos definir una relación de equivalencia entre los atlas de una misma variedad topológica, estableciendo que dos atlas son equivalentes si su unión resulta ser nuevamente un atlas. Con esta relación de equivalencia podemos dar la siguiente:

Definición 1.2.2. Una **estructura diferenciable** para una variedad topológica es una clase de equivalencia de atlas a través de la relación descrita previamente. Una **n-variedad diferenciable** es una n-variedad topológica provista de una estructura diferenciable. Por brevedad, usualmente nos referiremos a una variedad diferenciable simplemente como variedad.

La unión de todos los atlas en una clase de equivalencia es también un atlas de la misma clase. Generalmente identificaremos la clase con dicho atlas maximal.

Dado un atlas para una variedad topológica, siempre podemos extenderlo al atlas maximal uniéndolo con todos los atlas equivalentes a él. Así pues, para ver que una variedad topológica es diferenciable basta mostrar un atlas diferenciable para ella.

Proposición 1.2.3. Sea M una variedad diferenciable. Un atlas diferenciable $\mathcal{A}$ de M es maximal si, y solo si, satisface la siguiente propiedad: Si (V,ψ) es una carta de M tal que para todo $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables, entonces $(V,\psi) \in \mathcal{A}$.

Demostración

Supongamos que $\mathcal{A}$ es maximal y sea (V,ψ) tal que para todo $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables, entonces $\mathcal{A} \cup \{(V,\psi)\}$ es equivalente a $\mathcal{A}$. Luego, como $\mathcal{A}$ es maximal, $\mathcal{A} \cup \{(V,\psi)\} \subseteq \mathcal{A}$, de donde $(V,\psi) \in \mathcal{A}$.

Reciprocamente, supongamos que para cada carta (V,ψ) de M tal que para todo $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$: $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables, entonces $(V,\psi) \in \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{B}$ un atlas diferenciable equivalente a $\mathcal{A}$, entonces para todo $(U,\varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ se tiene que $\varphi \circ \psi^{-1}$, $\psi \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables, de donde $(V,\psi) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es maximal.

$\square$

Ejemplo 1.2.4.

1. $\mathbb{R}^n$ con el atlas diferenciable compuesto únicamente por la identidad conforma una variedad diferenciable de dimensión n.

2. $\mathbb{S}^n$ con el atlas de las proyecciones estereográficas descrito anteriormente es una n-variedad diferenciable.

3. $\mathbb{S}^n$ también es una n-variedad con el atlas de las proyecciones ortogonales $\mathcal{A} = \{(H_j^+, p_j^+), (H_j^-, p_j^-)\}_{j=1}^{n+1}$ donde:

$$\begin{aligned} H_j^+ &= \{x \in \mathbb{S}^n : x_j > 0\} \\ p_j^+(x) &= (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ H_j^- &= \{x \in \mathbb{S}^n : x_j < 0\} \\ p_j^-(x) &= (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

   (el atlas de las proyecciones estereográficas y el atlas de las proyecciones ortogonales son equivalentes)

4. El conjunto $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices $n \times n$ con coeficientes reales es una n^2-variedad diferenciable mediante la identificación $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

5. Si $(M, \mathcal{A}_1)$ y $(N, \mathcal{A}_2)$ son varidades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente, entonces $(M \times N, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ es una variedad diferenciable de dimensión $n + m$ conocida como **variedad producto**, donde

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(U \times V, \varphi \times \psi) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}_1, (V, \psi) \in \mathcal{A}_2\}$$

Ejemplo 1.2.5. *Espacio Proyectivo Real* $\mathbb{R}P^n$

Definición conjuntista: Denotemos por $\mathbb{R}P^n$ al conjunto de rectas por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$. Podemos identificar este conjunto con el espacio cociente $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ con la relación de equivalencia

$$x \sim y \Leftrightarrow (x_1, ..., x_{n+1}) = (\lambda y_1, ..., \lambda y_{n+1}),\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Así los puntos de $\mathbb{R}P^n$ son las clases de equivalencia $[x_1, ..., x_{n+1}]$. Nótese que si $x_i \neq 0$,

$$[x_1, ..., x_{n+1}] = [\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{n+1}}{x_i}]$$

Topología de $\mathbb{R}P^n$: Definiendo $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n : p(x) = [x]$ tenemos que p induce la topología cociente en $\mathbb{R}P^n$,

$$\tau = \{U \in \mathbb{R}P^n : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}\}$$

Con esta topología la función p es continua y abierta. Luego, el espacio $\mathbb{R}P^n$ es segundo numerable, pues $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ lo es (y esta propiedad es invariante bajo sobreyecciones continuas y abiertas). Análogamente, $\mathbb{R}P^n$ es localmente compacto (propiedad invariante bajo funciones continuas y abiertas).

Veamos que $\mathbb{R}P^n$ es Hausdorff: Dos puntos distintos de $\mathbb{R}P^n$ los podemos identificar con los vectores $v_1, v_2 \in S^n$ tales que $v_1 \cdot v_2 > 0$ (es decir, no antipodales). Fijemos ϵ tal que, $0 < \epsilon < d(v_1, v_2)$. Luego ninguna recta por el origen intersecta a $B(v_1, \epsilon)$ y $B(v_2, \epsilon)$ simultáneamente. Así $[v_1], [v_2] \in \mathbb{R}P^n$ poseen vecindades disjuntas $p(B(v_1, \epsilon))$, $p(B(v_2, \epsilon))$.

Atlas diferenciable para $\mathbb{R}P^n$: Sean $V_1, ..., V_{n+1} \subseteq \mathbb{R}P^n$ los conjuntos

$$V_i = \{[x_1, ..., x_{n+1}] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\},\ i = 1, ..., n+1.$$

Geométricamente, V_i es el conjunto de todas las rectas por el origen en $\mathbb{R}^{n+1}$ que no están contenidas en el hiperplano $x_i = 0$.

Consideremos las inyecciones continuas $a_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dadas por $a_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n+1$.

La composición $\varphi_i^{-1} = p \circ a_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_i$ es biyectiva y continua. Su inversa φ_i es también continua; en efecto, dado V abierto en $\mathbb{R}^n$, su preimagen através de φ_i es abierto en $\mathbb{R}P^n$ pues $p^{-1}(p \circ a_i(V)) = \{\lambda v \in \mathbb{R}n+1 : \lambda \in \mathbb{R} - \{0\},\ v \in a_i(V)\}$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1}$. Por lo tanto $\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Para ver que $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ forma un atlas diferenciable para $\mathbb{R}P^n$ sólo falta probar que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(V_i \cap V_j)} : \varphi_j(V_i \cap V_j) \longrightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j)$ son suaves para todo $i, j = 1, ..., n+1$.

Sean $i, j \in \{1, ..., n+1\}$ y supongamos $i < j$ (el caso contrario es análogo),

$$\begin{aligned}
\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_1, ..., x_n) &= \varphi_i[x_1, ..., x_{j-1}, 1, x_{j+1}, ..., x_n] \\
&= \varphi_i[\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}] \\
&= (\frac{x_1}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_{j-1}}{x_i}, \frac{1}{x_i}, \frac{x_{j+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i})
\end{aligned}$$

es claramente diferenciable.

Por lo tanto $\mathbb{R}P^n$ es una variedad diferenciable.

Ejemplo 1.2.6. *Espacio Proyectivo Complejo* $\mathbb{C}P^n$

Analogamente como definimos el Espacio Proyectivo Real, el Espacio Proyectivo Complejo es el conjunto de las rectas complejas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que pasan por el origen. Es decir, $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim$ con la relación

$$z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w, \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}, \quad z, w \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$$

Nuevamente, $\mathbb{C}P^n$ dotado de la topología cociente resulta un espacio de Hausdorff, localmente compacto y segundo numerable.

También podemos construir un atlas diferenciable de forma similiar a como lo hicimos para $\mathbb{R}P^n$: mediante las cartas (U_i, φ_i) definadas por

$$U_i = \{[z] : z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}, z_i \neq 0\}, \quad z = (z_0, \ldots, z_n)$$

$$\varphi_i([z_0, \ldots, z_n]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right) \in \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$$

De aquí que la dimensión de $\mathbb{C}P^n$ como variedad es $2n$.

Además, considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{S}^{2n+1}/\sim \arrow[r, "\hat{\imath}"'] & \mathbb{C}P^n
\end{tikzcd}$$

donde $i : \mathbb{S}^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ es la inclusión y $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ la proyección canónica, tenemos que $\mathbb{C}P^n \simeq \mathbb{S}^{2n+1}/\sim$ pues $\hat{\imath}$ es una biyección continua sobre compacto (la inyectividad y la continuidad son inmediatos, la sobreyectividad se sigue de que toda recta pasa por un punto de $\mathbb{S}^{2n+1}$).

Más aún, observamos que $\mathbb{C}P^n$ es compacto y conexo, pues es la imagen de $\mathbb{S}^{2n+1}$ a través de la aplicación continua $\pi = p \circ i : \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$.

1.3 Subvariedades

Definición 1.3.1. Sea M una variedad diferenciable. Una **subvariedad** N de M es un subespacio topológico de M con la estructura diferenciable inducida de M. Es decir, si $\mathcal{A}$ es atlas diferenciable de M, él induce un atlas diferenciable para N dado por $\mathcal{A}|_N = \{(U \cap N, \varphi|_N) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$.

Ejemplo 1.3.2.

1. Todo abierto de una variedad diferenciable es una subvariedad.

2. El **grupo general lineal** $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ es una subvariedad de $M_n(\mathbb{R})$ ya que $Gl_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es abierto en $M_n(\mathbb{R})$.

Proposición 1.3.3. Sea N una subvariedad de la n-variedad M. Si N es de dimensión n, entonces N es abierta.

Demostración

Sea $p \in N$, queremos probar que existe un abierto U de M tal que $p \in U \subseteq N$. Sean (U, φ), (V, ψ) cartas de los sistemas diferenciable de M y N respectivamente, que contienen a p. Se tiene que $\varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ pues $U \cap V$ es abierto en N. Luego $\varphi^{-1}(\psi(U \cap V))$ es el abierto buscado.

□

1.4 Aplicaciones Diferenciables

Las variedades diferenciables son los objetos una categoría donde los morfismos son las *aplicaciones diferenciables.* Estas aplicaciones extienden a las variedades el concepto conocido del cálculo vectorial de función diferenciable, valiéndose para ello de las cartas de la variedad, que permiten interpretarla localmente como un espacio euclideo.

Definición 1.4.1. Dadas M y N dos variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente, y $F : M \longrightarrow N$ una función continua, diremos que f es una **aplicación diferenciable** (o **suave**) en $p \in M$, si dadas (U, φ) carta de M con $p \in U$ y (V, ψ) carta de N con $F(p) \in V$, la composición:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(F(U) \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

es diferenciable (de clase $\mathcal{C}^\infty$) en $\varphi(p)$ en el sentido usual del cálculo vectorial.

Decimos que F es una **aplicación diferenciable** si es diferenciable para todo $p \in M$

Al conjunto de las aplicaciones diferenciables de M en N lo denotamos por $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Nótese que la definición anterior no depende se la selección de las cartas en virtud de la suavidad de los cambios de cartas.

Ejemplo 1.4.2.

1. Las cartas de una n-variedad M son aplicaciones diferenciables de un abierto $U \subseteq M$ en $\mathbb{R}^n$.

2. Dada M una n-variedad y (U, φ) una carta de M definimos la j**-ésima función coordenada** de M como la composición:

   $$x_j = r_j \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

   donde r_j es la j-ésima proyección canónica. Las funciones coordenadas son aplicaciones diferenciables de los abiertos del atlas en $\mathbb{R}$.

   $$U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{r_j} \mathbb{R}$$

   Usualmente escribimos $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, notación llamada **expresión coordenada** de φ.

1.5 Particiones de la Unidad Diferenciables

Las particiones de la unidad diferenciables constituyen una herramienta topológica muy útil en el estudio de las variedades diferenciables, pues nos permitirán extender conceptos locales a la globalidad de una variedad. Las características topológicas en la definición de variedad diferenciable, entre otras razones, obedecen a la suficiencia de ser espacios paracompactos, en los cuales existen tales particiones arbitrariamente finas.

Definición 1.5.1. Sea X un espacio topológico, el **soporte** de una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto cerrado $Sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$

Definición 1.5.2. Dado X de Hausdorff, una familia $\{p_\alpha : X \longrightarrow [0,1]\}$ de funciones continuas es una **partición de la unidad** de X si:

1. $\{Sop(p_\alpha)\}$ es un cubrimiento localmente finito de X
2. $\sum_\alpha p_\alpha(x) = 1 \quad \forall\, x \in X$

Además, si $\{U_\beta\}$ es un cubrimiento abierto de X, decimos que $\{p_\alpha\}$ esta **subordinada** a $\{U_\beta\}$ si $\forall\, \alpha\ \exists \beta$ tal que $Sop(p_\alpha) \subseteq U_\beta$

Teorema 1.5.3. Sea X un espacio paracompacto y $\{U_\beta\}$ un cubrimiento abierto de X. Existe una partición de la unidad de X subordinada a $\{U_\beta\}$

DEMOSTRACIÓN: Dugundji [1], página 170.

□

Lema 1.5.4. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < d < b$ existe una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ tal que:

1. $f|_{[c,d]} \equiv 1$
2. $Sop(f) \subseteq (a, b)$

DEMOSTRACIÓN

Consideremos $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Se tiene que $h \in \mathcal{C}^\infty$ y $\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq h(t) < 1$

Sean $a', b' \in \mathbb{R}$ tales que $a < a' < c$ y $d < b' < b$.
Definimos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g(t) = \frac{h(t - a')}{h(t - a') + h(c - t)}$$

$g \in \mathcal{C}^\infty$ y satisface:

$$\begin{array}{ccc} g(t) = 0 & \text{si} & t \leq a' \\ 0 < g(t) < 1 & \text{si} & a' < t < c \\ g(t) = 1 & \text{si} & t \geq c \end{array}$$

Análogamente, la función $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$k(t) = \frac{h(b' - t)}{h(b' - t) + h(t - d)}$$

es $\mathcal{C}^\infty$ y satisface:

$$\begin{array}{ccc} k(t) = 0 & \text{si} & t \geq b' \\ 0 < k(t) < 1 & \text{si} & d < t < b' \\ k(t) = 1 & \text{si} & t \leq d \end{array}$$

Luego la aplicación buscada es $f(t) = g(t)k(t)$

□

Teorema 1.5.5. Sea M una variedad diferenciable y $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de M. Existe una partición de la unidad $\{p_\beta\}_{\beta \in \Omega}$ *diferenciable* subordinada a $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Demostración

Sea $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de M y sea $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda_0}$ un atlas diferenciable para M. Por paracompacidad de M podemos extraer un refinamiento localmente finito $\{W_j\}_{j \in \Lambda_1}$ del cubrimiento $\{U_i \cap V_\alpha\}_{(i,\alpha) \in \Lambda_0 \times \Lambda}$ constituido por abiertos conexos.

En virtud del teorema de Michael (Dugundji [1], página 163), se puede elegir un refinamiento localmente finito $\{E_\beta\}_{\beta \in \Omega}$ de $\{W_j\}_{j \in \Lambda_1}$ conformado por cerrados conexos.

Consideremos las siguientes funciones de elección:

$$\varepsilon_1 : \Omega \longrightarrow \Lambda_1$$

que asigna a cada $\beta \in \Omega$ un elemento $j \in \Lambda_1$ con $E_\beta \subseteq W_j$; y

$$\varepsilon_2 : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_0$$

que asigna a cada $j \in \Lambda_1$ un elemento $i \in \Lambda_0$ con $W_j \subseteq U_i$.

Definamos $\varepsilon = \varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$.

Notemos que $\{W_{\varepsilon_1(\beta)}, \varphi_{\varepsilon(\beta)}\}$ es un atlas diferenciable para M.

Sea $r_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la proyección canónica en el primer factor. Por argumentos de conexidad, para $\beta \in \Omega$, se tiene que

$$r_1(\varphi_{\varepsilon(\beta)}(E_\beta)) = [c_\beta, d_\beta] \subseteq (a_\beta, b_\beta) = r_1(\varphi_{\varepsilon(\beta)}(W_{\varepsilon_1(\beta)}))$$

para algunos $a_\beta, b_\beta, c_\beta, d_\beta \in \mathbb{R}$.

Usando el lema previo, existe una función $f_\beta : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ diferenciable tal que $f_\beta|_{[c_\beta, d_\beta]} \equiv 1$ y $Sop(f_\beta) \subseteq (a_\beta, b_\beta)$.

Consideremos ahora la aplicación diferenciable $h_\beta : M \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$h_\beta(x) = \begin{cases} o & \text{si } x \notin W_{\varepsilon_1(\beta)} \\ f_\beta \circ r_1 \circ \varphi_{\varepsilon(\beta)}(x) & \text{si } x \in W_{\varepsilon_1(\beta)} \end{cases}$$

Ahora definimos

$$p_\beta(x) = \frac{h_\beta(x)}{\sum_\beta h_\beta(x)}$$

$\{p_\beta\}$ es la partición de la unidad diferenciable de X subordinada a $\{V_\alpha\}$ buscada.

□

Proposición 1.5.6. Sean M una variedad diferenciable, U un abierto en M y B un cerrado contenido en U. Existe $p : M \longrightarrow [0,1]$ diferenciable tal que:

1. $p(x) = 1 \quad \forall x \in B$

2. $Sop(p) \subseteq U$

Demostración

Tomemos $\{B^c, U\}$ cubrimiento abierto de M. Por el teorema anterior, existe $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ partición de la unidad diferenciable subordinada a $\{B^c, U\}$.

Consideremos $\Lambda_0 = \{\alpha \in \Lambda : Sop(p_\alpha) \subseteq B^c\}$ y sea $p(x) = 1 - \sum_{\alpha\in\Lambda_0} p_\alpha(x)$.

Veamos que $p(x) = 1 \quad \forall x \in B$:

Si $x \in B$, $\sum_{\Lambda_0} p_\alpha(x) = 0 \;\Rightarrow\; p(x) = 1$

Además $Sop(p) \subseteq U$ ya que si $x \notin U \;\Rightarrow\; \sum_{\Lambda_0} p_\alpha(x) = \sum_{\Lambda} p_\alpha(x) = 1 \;\Rightarrow\; p(x) = 0$.

$\square$

Capítulo 2

Fibrado Tangente

2.1 Acciones de Grupos

En esta sección definiremos brevemente algunos conceptos de topología algebraica que serán necesarios para definir los *fibrados diferenciables*, objeto de estudio de este capítulo.

Definición 2.1.1. Un **grupo topológico** G es un grupo con indentidad e, dotado de una topología que hace de la operaciones de grupo aplicaciones continuas.

Un grupo topológico es un **grupo de Lie** si es una variedad diferenciable con las operaciones diferenciables.

Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico, una **acción** de G en X es una aplicación $\theta : G \times X \longrightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\theta(e, x) = x \quad \forall x \in X$
2. $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x) \quad \forall x \in X \quad \forall g,h \in G$

Notación: escribiremos gx por $\theta(g, x)$

Ejemplo 2.1.2.

1. $\theta : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \theta(e^{i\theta}, re^{i\omega}) = re^{i(\theta+\omega)}$
2. $\theta : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} : \theta(z, (z_0, \ldots, z_n)) = (zz_o, \ldots, zz_n)$
3. $\theta : Gl_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : \theta(A, x) = A.x$

2.2 Fibrados

Definición 2.2.1. Un **fibrado trivial** (con fibra F) es una cuádrupla $\eta = (E, \pi, B, F)$ tal que:

- E, B y F son espacios topológicos, llamados **techo**, **base** y **fibra**, respectivamente.
- $\pi : E \longrightarrow B$ es una aplicación continua y sobreyectiva, llamada **proyección**.
- Existe un homeomorfismo $\psi : E \longrightarrow B \times F$ tal que $p \circ \psi = \pi$ siendo $p : B \times F \longrightarrow B$ la proyección canónica sobre el primer factor. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & B \times F \arrow[dl, "p"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in B$ el conjunto cerrado $F_x = \pi^{-1}(x) \subseteq E$ es llamado **fibra sobre** x.

Definición 2.2.2. Sean E, B, F y π como en la definición anterior. Decimos que $\eta = (E, \pi, B, F)$ es un **fibrado localmente trivial** (con fibra F), o simplemente un **fibrado** (con fibra F), si existe una familia $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, que llamaremos **mapa trivializante** de η, tal que $\{V_\alpha\}$ es cubrimiento abierto de B y para todo $\alpha \in \Lambda$, $\psi_\alpha : \pi^{-1}(V_\alpha) \longrightarrow V_\alpha \times F$ es un homeomorfismo que hace a $\xi = (\pi^{-1}(V_\alpha), \pi, V_\alpha, F)$ un fibrado trivial. Al par (V_α, ψ_α) se le conoce como **trivialización local** de η.

Un fibrado localmente trivial $\eta = (E, \pi, B, F)$ es un **fibrado diferenciable** si E, B y F son variedades diferenciables y π es diferenciable.

Ejemplo 2.2.3. *Fibrado de Hopf:*

$(\mathbb{S}^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}P^n, \mathbb{S}^1)$ con π definida como en el ejemplo 1.2.6, es un fibrado diferenciable conocido como el *fibrado de Hopf*.

El homeomorfismo que hace al diagrama del fibrado conmutativo se construye de la siguiente manera:

Sea $x \in \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$, $x = (r_0 e^{i\theta_0}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})$. Escogemos como representante de la clase $[x]$ al punto $y = (\rho_0 e^{i\phi_0}, \ldots, \rho_n e^{i\phi_n}) \sim x$ tal que $\phi_n = 2\pi$. Recordemos que en $\mathbb{S}^{2n+1}$, $x \sim y \Leftrightarrow x = e^{i\theta} y, \ \theta \in [0, 2\pi)$. Luego definimos el homeomorfismo mediante $x \longmapsto ([x], e^{i\theta})$ donde $\theta = 2\pi - \theta_n$.

Proposición 2.2.4. Todo fibrado diferenciable tiene un mapa trivializante finito.

Demostración

Sea $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ un mapa trivializante del fibrado (E, π, B, F). Podemos extraer un refinamiento $\{V_{ij} : i = 1, \ldots, p; j \in \mathbb{N}\}$ de $\{U_\alpha\}$ tal que $V_{ij} \cap V_{ik} = \emptyset$ si $j \neq k$ (Greub [2], página 17). Sea $V_i = \bigcup\limits_j V_{ij}$ y definamos $\psi_i : V_i \times F \longrightarrow \pi^{-1}(V_i)$ mediante

$$\psi_i(x, y) = \psi_{ij}(x, y) \quad \text{si} \quad x \in V_{ij}, \ y \in F$$

donde ψ_{ij} es la restricción de algún ψ_α.

$\square$

Proposición 2.2.5. En un fibrado diferenciable (E, π, B, F), las fibras sobre los puntos F_x son subvariedades de E

Demostración

Fijemos $x \in B$. Sea $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ un mapa trivializante del fibrado y escojamos U_α que contenga a x. Luego la biyección

$$\psi_{\alpha,x} : F \longrightarrow F_x : \psi_{\alpha,x}(y) = \psi_\alpha(x, y)$$

le induce un atlas diferenciable a $F_x \subseteq E$.

$\square$

Definición 2.2.6. Sea $\eta = (E, \pi, B, F)$ una fibrado y $A \subseteq B$, una **sección** de η sobre A es una aplicación continua $s : A \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ s = 1_A$ (la identidad en A).

Dados dos fibrados $\eta = (E, \pi, B, F)$ y $\xi = (D, \sigma, C, J)$, un **homomorfismo de fibrados** entre η y ξ es un diagrama conmutativo de aplicaciones continuas

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi"'] & D \arrow[d, "\sigma"] \\ B \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Definición 2.2.7. Dado $\eta = (E, \pi, B, F)$ un fibrado con mapa trivializante $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$, y G un grupo topológico que actúa en F. Diremos que G es **grupo estructural** de η si $\forall (\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ tal que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ existe una aplicación continua $g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow G$ tal que $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(b, z) = (b, g_{\alpha\beta}(b), z)$ (no cambia de fibra); estas aplicaciones son llamadas **cociclos** de η

Observación.

De la definición anterior se pueden deducir fácilmente las siguientes propiedades de los cociclos:

- $g_{\alpha\alpha} = e$ (la identidad en G).
- $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$
- $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$

Definición 2.2.8. Diremos que $\eta = (E, \pi, B, F)$ es un **fibrado vectorial** si $F = \mathbb{R}^n$ (para algún n fijo) y $G = Gl_n(\mathbb{R})$.

Teorema 2.2.9. Sea $\eta = (E, \pi, B, \mathbb{R}^n)$ un fibrado vectorial. Si B es una m-variedad diferenciable y los cociclos $g_{\alpha\beta}$ son diferenciables, entonces η es diferenciable y E es mn-dimensional.

Demostración

Para ver que η es diferenciable debemos probar que E es una variedad diferenciable y que π es una aplicación diferenciable.

Veremos primero que E es una variedad, es decir, daremos un atlas diferenciable para E.

Supongamos que $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ es atlas de B. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, con los mismos abiertos de $\mathcal{A}$, es mapa trivializante de η (pues en caso contrario se consigue refinando).

Consideremos

$$\mathcal{B} = \{(\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{mn}\}_{\alpha\in\Lambda}$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es un atlas diferenciable para E:

- $\pi^{-1}(U_\alpha)$ es abierto en $E \quad \forall\alpha \in \Lambda$ pues π es continua.
- $\cup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}(\cup_\alpha U_\alpha) = \pi^{-1}(B) = E$
- $(\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos.
- $\forall\alpha,\beta \in \Lambda$ tales que $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) = \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$ (es decir $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$) se tiene que:

$$\begin{aligned}
[(\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha] \circ [(\varphi_\beta \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\beta]^{-1} &= [(\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha] \circ [\psi_\beta^{-1} \circ (\varphi_\beta^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n})] \\
&= (\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n}) \\
&= (\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ (1_{\mathbb{R}^n} \times g_{\alpha\beta}) \circ (\varphi_\beta^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n}) \\
&= (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \times g_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

  es un difeomorfismo.

Veamos ahora que π es diferenciable:
Localmente, π tiene expresión $\pi = p \circ \psi_\alpha$. Luego

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha \circ \pi \circ [(\varphi_\alpha \times 1_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha]^{-1} &= \varphi_\alpha \circ \pi \circ \psi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n}) \\
&= \varphi_\alpha \circ (p \circ \psi_\alpha) \circ \psi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n}) \\
&= \varphi_\alpha \circ p \circ (\varphi_\alpha^{-1} \times 1_{\mathbb{R}^n}) \\
&= \varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} \\
&= 1_{U_\alpha}
\end{aligned}$$

es diferenciable.

$\square$

2.3 Vectores Tangentes a una Variedad

Las nociones de vector tangente y espacio tangente a curvas y superficies suaves se generalizan a variedades diferenciales con la misma finalidad de poder estudiarlas linealmente.

Definición 2.3.1. Dada una variedad diferenciable M y un punto $p \in M$, denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(M,p)$ al conjunto de las funciones reales diferenciables en un entorno de p.

Proposición 2.3.2. $\mathcal{C}^\infty(M,p)$ es un álgebra con las operaciones usuales.

Demostración

Sean $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\mathcal{C}^\infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Existe φ en el atlas de M tal que $f \circ \varphi^{-1}$ y $g \circ \varphi^{-1}$ son diferenciables. Luego

$$(\lambda f + g) \circ \varphi^{-1} = \lambda f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}$$

es diferenciable. De donde $\lambda f + g \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$.

Análogamente $(f.g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}).(g \circ \varphi^{-1})$ es diferenciable, entonces $f.g \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$.

$\square$

Definición 2.3.3. Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Un **vector tangente** a M en p es una aplicación $v : \mathcal{C}^\infty(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $v(\lambda f + g) = \lambda v(f) + v(g)$ (es lineal)
2. $v(f.g) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ (es derivación)

El conjunto T_pM de todos los vectores tangentes a M en p lo llamaremos **espacio tangente** a M en p.

Proposición 2.3.4. T_pM es un espacio vectorial con las operaciones usuales.

Demostración

Sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$, $v_1, v_2 \in T_pM$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (\lambda v_1 + v_2)(\alpha f + g) & = & \lambda v_1(\alpha f + g) + v_2(\alpha f + g) \\ & = & \alpha\lambda v_1(f) + \lambda v_1(g) + \alpha v_2(f) + v_2(g) \\ & = & \alpha(\lambda v_1 + v_2)(f) + (\lambda v_1 + v_2)(g) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\lambda v_1 + v_2)(f.g) & = & \lambda v_1(f.g) + v_2(f.g) \\ & = & \lambda v_1(f)g(p) + f(p)\lambda v_1(g) \\ & & \qquad + v_2(f)g(p) + f(p)v_2(g) \\ & = & (\lambda v_1 + v_2)(f)g(p) + f(p)(\lambda v_1 + v_2)(g) \end{array}$$

Por lo tanto $\lambda v_1 + v_2 \in T_pM$.

$\square$

Ejemplo 2.3.5. Sea M una n-variedad y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M en p (es decir, con $p \in U$). Para cada $i = 1, \ldots, n$, la aplicación

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathcal{C}^\infty(M,p) \longrightarrow \mathbb{R} : \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\varphi(p)}$$

que llamaremos i**-ésima derivada parcial** de φ en p es un vector tangente a M en p.

Demostración

Sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta de M en p. Entonces:

$$\begin{array}{rcl} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (\lambda f + g) & = & \left.\frac{\partial}{\partial r_i}[(\lambda f + g) \circ \varphi^{-1}]\right|_{\varphi(p)} \\ & = & \left.\frac{\partial}{\partial r_i}[(\lambda f \circ \varphi^{-1}) + (g \circ \varphi^{-1})]\right|_{\varphi(p)} \\ & = & \lambda \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(f \circ \varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)} + \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(g \circ \varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)} \\ & = & \lambda \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) + \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (g) \qquad \text{es lineal.} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f.g) &= \left.\frac{\partial}{\partial r_i}[(f.g)\circ\varphi^{-1}]\right|_{\varphi(p)} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial r_i}[(f\circ\varphi^{-1})(g\circ\varphi^{-1})]\right|_{\varphi(p)} \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(f\circ\varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)}(g\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) + \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(g\circ\varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)}(f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f)g(p) + \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (g)f(p) \qquad \text{es derivación.}
\end{aligned}$$

□

2.4 Diferencial de una Aplicación Suave

Definición 2.4.1. Sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciables dadas. Para cada $p \in M$ definimos el **diferencial** de F en p como la aplicación

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N : (dF_p(v))(g) = v(g \circ F)$$

Proposición 2.4.2. Sean $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables y $p \in M$.

1. $dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es una transformación lineal.
2. $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p : T_pM \longrightarrow T_{G\circ F(p)}P$
3. $d(1_M)_p = 1_{T_pM}$
4. Si F es un difeomorfismo entonces dF_p es un isomorfismo.

Demostración

Sean $v, v_1, v_2 \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M,p)$, $g \in \mathcal{C}^\infty(N, F(p))$ y $h \in \mathcal{C}^\infty(P,(G\circ F)(p))$.

1.

$$\begin{aligned}
dF_p(\lambda v_1 + v_2)(g) &= (\lambda v_1 + v_2)(g\circ F) \\
&= \lambda v_1(g\circ F) + v_2(g\circ F) \\
&= \lambda dF_p(v_1)(g) + dF_p(v_2)(g) \\
&= (\lambda dF_p(v_1) + dF_p(v_2))(g)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
[d(G\circ F)_p(v)](h) &= v[h\circ(G\circ F)] = v[(h\circ G)\circ F] \\
&= (dF_p(v))(h\circ G) = [dG_{F(p)}(dF_p(v))](h) \\
&= [(dG_{F(p)}\circ dF_p)(v)](h)
\end{aligned}$$

3. $[d(1_M)_p(v)](f) = v(f\circ 1_M) = v(f)$

4. $1_{T_{F(p)}N} = d(F\circ F^{-1})_{F(p)} = dF_p \circ dF^{-1}_{F(p)} \Rightarrow dF_p$ es un epimorfismo.

   $1_{T_pM} = d(F^{-1}\circ F)_p = dF^{-1}_{F(p)} \circ dF_p \Rightarrow dF_p$ es un monomorfismo.

   Por lo tanto dF_p es un isomorfismo.

$\square$

Lema 2.4.3. Si M es una n-variedad y $p\in M$, entonces $\dim(T_pM) = n$

Demostración

Sea (U,φ) una carta de M en p. Como $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ es difeomorfismo, por la parte 4 de la proposición anterior, $d\varphi_p : T_pU \longrightarrow T_{\varphi(p)}\varphi(U)$ es isomorfismo.

Por otro lado, como el concepto de espacio tangente es local, ocurre que $T_pM = T_pU$. Así

$$T_pM = T_pU \simeq T_{\varphi(p)}\varphi(U) = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

$\square$

Teorema 2.4.4. Dada M una n-variedad, $p\in M$ y $(U,\varphi = (x_1,\dots,x_n))$ una carta local de M en p. El conjunto $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\}_{i=1}^{n}$ es una base de $T_p(M)$.

Demostración

Gracias al lema anterior es suficiente probar que el conjunto de las derivadas parciales es linealmente independiente.

Tomemos entonces su combinación lineal igualada a cero:

$$a_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + \cdots + a_n \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = 0$$

Veamos que $\forall i = 1, \ldots, n : a_i = 0$

Consideremos $f = r_j \circ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M, p)$. Nótese que

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (r_j \circ \varphi) = \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(r_j \circ \varphi \circ \varphi^{-1})\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial}{\partial r_i} r_j\right|_{\varphi(p)} = \delta_{ij}$$

de donde

$$0 = a_1 \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) + \cdots + a_n \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = a_j \Rightarrow a_j = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Por lo tanto $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente.

$\square$

Observación.

Para cada $p \in M$, tenemos una base de T_pM al fijar una carta local $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ de M en p. Así podemos representar cualquier $v \in T_pM$ de manera única como

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

y tenemos el isomorfismo natural entre $\mathbb{R}^n$ y T_pM

$$(a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

Veamos ahora las expresiones correspondientes a dos cartas distintas en un mismo punto $p \in M$:

Sean $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi = (y_1, \ldots, y_n)$ dos cartas locales distintas de M en p, y sea $v \in T_pM$. Representando a v en ambas bases se obtiene

$$\sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = v = \sum_{i=1}^n b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$$

Evaluando $v(y_j)$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p (y_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(r_j \circ \psi \circ \psi^{-1})\right|_{\psi(p)} = \sum_{i=1}^{n} b_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i} r_j\right|_{\psi(p)} = b_j$$

de donde

$$b_j = v(y_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (y_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_p$$

Por lo tanto la matriz cambio de base es la matriz jacobiana de la transformación $\psi \circ \varphi^{-1}$

$$J(\psi \circ \varphi^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Lema 2.4.5. Sean $F : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable, $p \in M$, $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ carta local de M en p y $\psi = (y_1, \ldots, y_m)$ carta local de N en $F(p)$. La expresión del diferencial dF_p en términos de las derivadas parciales como bases de T_pM y $T_{F(p)}N$ es

$$dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_j} \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)}$$

Demostración

Sea $g \in \mathcal{C}^\infty(N, F(p))$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (g \circ F) = dF_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)(g) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)}\right)(g) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}(g \circ \psi^{-1})\right|_{(\psi \circ F)(p)}$$

para ciertos $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

Tomando $g = y_i = r_i \circ \psi$ para cada i obtenemos que $a_i = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p (y_i \circ F)$.

$\square$

Teorema 2.4.6. Dadas M, N variedades diferenciables y $F : M \longrightarrow N$ diferenciable. Si M es conexa y $\forall p \in M : dF_p \equiv 0$, entonces F es constante.

Demostración

Fijemos $q \in F(M)$. Claramente $F^{-1}(q)$ es cerrado en M. Bastaría entonces ver que $F^{-1}(q)$ es también abierto en M, pues los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados en un espacio conexo son el espacio completo y el conjunto vacío. De manera que se tendría $F^{-1}(q) = M$, es decir, F constante.

Sean $p \in F^{-1}(q)$, $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta local de M en p y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ carta de N en q tales que $F(U) \subseteq V$ (esto siempre se puede conseguir tomando U suficientemente pequeño).

Probaremos que $U \subseteq F^{-1}(q)$.

Fijemos j. Dado que $dF_p\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i$ entonces $\dfrac{\partial(y_i \circ F)}{\partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial r_j}(y_i \circ F \circ \varphi^{-1}) = 0 \quad \forall i\, \forall j$ (por independencia lineal).

De donde $y_i \circ F \circ \varphi^{-1}$ es constante en $\varphi(U)$ para todo i.

Luego $\psi \circ F|_U$ es constante $\Rightarrow F|_U$ es constante por inyectividad de ψ y φ^{-1}.

Así $F|_U \equiv q \Rightarrow U \subseteq F^{-1}(q)$ de donde $F^{-1}(q)$ es abierto y F es constante en M.

$\square$

2.5 Fibrado Tangente a una Variedad

Definición 2.5.1. Dada una n-variedad M, definimos el **espacio tangente** a M como

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$$

y la **proyección canónica** de TM sobre M la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M : \pi(v) = p$ si $v \in T_p(M)$.

Una topología para TM se puede definir de la siguiente manera: Para cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_1, \dots, x_n))$ de M definimos:

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{p \in U_\alpha} T_pM \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \longmapsto (p, (a_1, \dots, a_n))$$

Claramente ψ_α es biyección pues $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$.

Al conjunto $\pi^{-1}(U_\alpha)$ lo dotamos de la topología inicial dada por ψ_α, y a TM de la topología final inducida por las inclusiones $i_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \hookrightarrow TM$, es decir la topología dada por

$$\{A \subseteq TM : A \cap \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ es abierto en } \pi^{-1}(U_\alpha) \text{ para todo } \alpha\}$$

Con esta topología π es continua: Sea A abierto en M, para ver que $\pi^{-1}(A)$ es abierto en TM basta ver que $\pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}(A \cap U_\alpha)$ es abierto en $\pi^{-1}(U_\alpha)$ para cada α. En efecto, $\pi^{-1}(A \cap U_\alpha) = \psi_\alpha^{-1}(A \cap U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$ es abierto puesto que ψ_α es continua y $A \cap U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ es abierto en $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5.2. $\tau = (TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ es un fibrado diferenciable que llamaremos **fibrado tangente** a M.

Demostración

Sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlas diferenciable de M, y sea ψ_α la biyección descrita arriba. Con la topología dada al espacio tangente ψ_α es homeomorfismo y π es continua y sobreyectiva. Además, es evidente la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "p"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

lo que prueba la local trivialidad.

De manera que solo debemos verficar que los cociclos son diferenciables:

Sean $(U_\alpha, \psi_\alpha = (x_1, \ldots, x_n))$ y $(U_\beta, \psi_\beta = (y_1, \ldots, y_n))$ dos trivializaciones locales de τ. Entonces

$$\begin{aligned}
(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(p, (a_1, \ldots, a_n)) &= \psi_\beta \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right) \\
&= \psi_\beta \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial y_i}{\partial x_i}\right|_p \right) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p \right) \\
&= (p, (b_1, \ldots, b_n)
\end{aligned}$$

donde $b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{i=1}^{n} a_i J_{ji}(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})|_p$

De donde vemos que los cociclos son los jacobianos $J(\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})$ que son diferenciables por ser $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ diferenciables para cualesquiera α, β.

$\square$

Corolario 2.5.3. Si M es una n-variedad, entonces TM es una $2n$-variedad.

Demostración

Es consecuencia inmediata del teorema 2.2.9.

$\square$

Proposición 2.5.4. Sea $F : M \longrightarrow N$ diferenciable. Entonces

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "dF"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[r, "F"'] & N
\end{tikzcd}$$

es un homomorfismo de fibrados y dF es diferenciable.

Demostración

Trivialmente el diagrama conmuta:

Si $v \in T_pM$ entonces $(F \circ \pi_M)(v) = F(p) = (\pi_N \circ dF_p)(v)$.

Probemos ahora que dF es diferenciable:

Sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ carta de M en p y $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_m))$ carta de N en $F(p)$, y sean $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ y $(\pi^{-1}(V), \widetilde{\psi})$ las cartas correspondientes en TM y TN respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\varphi} \circ dF \circ \widetilde{\psi}^{-1})(\varphi(p), (a_1, \ldots, a_n)) &= (\widetilde{\psi} \circ dF) \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right) \\
&= \widetilde{\psi} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} \left. \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_{F(p)} \right) \right) \\
&= \widetilde{\psi} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left. \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j} \right|_p \right) \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_{F(p)} \right) \\
&= \widetilde{\psi} \left(\sum_{1=1}^{m} b_i \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_{F(p)} \right) \\
&= (\psi(F(p)), (b_1, \ldots, b_m))
\end{aligned}$$

donde $b_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \left. \frac{\partial (y_i \circ F)}{\partial x_j} \right|_p = \sum_{j=1}^{n} a_j J_{ij}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})$ es diferenciable coordenada a coordenada pues $\psi \circ F \circ \psi^{-1} \in \mathcal{C}^{\infty}$.

□

2.6 Campos Vectoriales

Definición 2.6.1. Dada una variedad diferenciable M, un **campo vectorial** $\mathcal{X}$ sobre M es una sección diferenciable del fibrado tangente a M. En otras palabras, es una asignación suave de vectores para cada punto $p \in M$.

Al conjunto de los campos vectoriales sobre M lo denotamos por $\mathcal{X}(M)$. Con las operaciones usuales $\mathcal{X}(M)$ es un espacio vectorial.

De esta forma, si U es una carta de M, un campo vectorial sobre M lo podemos escribir localmente como una aplicación

$$\mathcal{X}|_U : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \simeq \pi^{-1}(U) \subseteq TM : \mathcal{X}(p) = (p, (a_1(p), \ldots, a_n(p)))$$

Proposición 2.6.2. Dada M una n-variedad diferenciable. $\mathcal{X}$ es un campo vectorial sobre M si, y solo si, para cada función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación

$$\mathcal{X}_f : M \longrightarrow \mathbb{R} : \mathcal{X}_f(p) = \mathcal{X}(p)(f)$$

es diferenciable.

DEMOSTRACIÓN: Ollarves [6], página 17.

$\square$

Capítulo 3

Fibrado de Formas

En este capítulo desarrollaremos brevemente la teoría necesaria para precisar el concepto de *forma diferenciable*, el cual es, a grosso modo, una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esa generalización y la moderna notación usada en el estudio de las formas difenciables se debe a Élie Cartan[1].

3.1 k-formas Alternadas

Definición 3.1.1. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $k \geq 1$, decimos que una aplicación $\alpha : E^k \longrightarrow \mathbb{R}$ es una k**-forma** sobre E si es lineal en cada variable, es decir, $\forall j = 1, \ldots, k$:

$$\alpha(v_1, \ldots, \lambda v_j + w_j, \ldots, v_k) = \lambda\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k)$$

Denotaremos por $L_k(E)$ al espacio vectorial de las k-formas sobre E.

Definición 3.1.2. Dado $k > 1$, sea $\mathcal{S}_k$ el grupo de las permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$. Diremos que una k-forma α es **alternada** si $\forall \sigma \in \mathcal{S}_k$:

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{|\sigma|}\alpha(v_1, \ldots, v_k)$$

Denotaremos por $\Lambda^k(E)$ al subespacio vectorial de las k-formas alternadas sobre E.

[1]Élie Cartan (Dolomieu, Saboya, 9 de abril 1869 - París, 6 de mayo 1951) fue un matemático francés, que llevó a cabo trabajos fundamentales en la teoría de grupos de Lie y sus usos geométricos.

Observaciones.

1. Convenimos que toda 1-forma es alternada.
2. Convenimos que $\Lambda^0(E) = \mathbb{R}$.
3. $\Lambda^1(E)$ es el espacio dual de E.
4. Si α es alternada, entonces $\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0$ siempre que $v_i = v_j$.

Definición 3.1.3. Sean $\alpha \in \Lambda^k(E)$ y $\beta \in \Lambda^l(E)$, el **producto exterior** de α por β es la $(k+l)$-forma alternada definida por

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

Proposición 3.1.4. *Propidades del producto exterior*

1. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ si $\alpha \in \Lambda^k(E)$ y $\beta \in \Lambda^l(E)$.
2. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

DEMOSTRACIÓN

1. $\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$

   Consideremos la pemutación $\tau \in \mathcal{S}_{k+l}$ dada por:

   $$\{1, \ldots, k+l\} \longmapsto \{k+1, \ldots, k+l, 1, \ldots, k\}$$

   Sea $\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}$ y llamemos $\varepsilon = \sigma \circ \tau$. Se tiene que

   $$\sigma(i) = \begin{cases} \varepsilon(k+i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \varepsilon(i-k) & \text{si } k+1 \leq i \leq k+l \end{cases}$$

   Nótese además que $(-1)^{|\varepsilon|} = (-1)^{|\sigma|}(-1)^{|\tau|} = (-1)^{kl}(-1)^{|\sigma|}$, pues para obtener τ es necesario permutar $1, \ldots, k$ con $k+1, \ldots, k+l$ sucesivamente totalizando kl permutaciones. Entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+l}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) \\
&= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_{k+l}} (-1)^{|\varepsilon|} \alpha(v_{\varepsilon(k+1)}, \ldots, v_{\varepsilon(k+l)}) \beta(v_{\varepsilon(1)}, \ldots, v_{\varepsilon(k)}) \\
&= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{S}_{k+l}} (-1)^{|\varepsilon|} \beta(v_{\varepsilon(1)}, \ldots, v_{\varepsilon(k)}) \alpha(v_{\varepsilon(k+1)}, \ldots, v_{\varepsilon(k+l)}) \\
&= (-1)^{kl} (\beta \wedge \alpha)(v_1, \ldots, v_{k+l})
\end{aligned}$$

2. Para la demostración de esta propiedad usaremos un lema previo.

   Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean $k, l, j > 0$, llamaremos $\Lambda^{k,l,r}(E)$ al espacio vectorial de las $(k+l+r)$-formas que son alternadas respecto a las k primeras variables, alternadas respecto a las l siguientes variables y alternadas respecto a las j últimas. Ánalogamente definimos $\Lambda^{k+l,j}(E)$ y $\Lambda^{k,l+j}(E)$.

   Consideremos la función $\varphi_{k,l} : \Lambda^{k,l,r}(E) \longrightarrow \Lambda^{k+l,r}(E)$ dada por

$$\varphi_{k,l}(\alpha)(v_1, \ldots, v_{k+l+r}) = \sum_{\sigma} (-1)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l+r)})$$

   donde la sumatoria está extendida sólo a las permutaciones σ que dejan fijos $k+l+1, \ldots, k+l+r$.

   De la misma forma definimos $\varphi_{l,j} : \Lambda^{k,l,j}(E) \longrightarrow \Lambda^{k,l+j}(E)$, $\varphi_{k,l+k} : \Lambda^{k,l+j}(E) \longrightarrow \Lambda^{k+l+j}(E)$ y $\varphi_{k+l,j} : \Lambda^{k+l,j} \longrightarrow \Lambda^{k+l+j}(E)$.

Lema 3.1.5. El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{k,l,j}(E) \arrow[r, "\varphi_{k,l}"] \arrow[d, "\varphi_{l,j}"'] & \Lambda^{k+l,j}(E) \arrow[d, "\varphi_{k+l,j}"] \\
\Lambda^{k,l+j}(E) \arrow[r, "\varphi_{k,l+j}"'] & \Lambda^{k+l+j}(E)
\end{tikzcd}$$

La demostración de este lema es trivial.

Apliquémoslo para probar la propiedad. Para obtener $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ consideramos la $(k+l+j)$-forma $\lambda \in \Lambda^{k,l,j}(E)$ dada por

$$\lambda(v_1, \ldots, v_{k+l+j}) = (\alpha(v_1, \ldots, v_k)\beta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}))\gamma(v_{k+l+1}, \ldots, v_{k+l+j})$$

y aplicamos $\varphi_{k+l,j} \circ \varphi_{k,l}$.

Para obtener $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ se considera $\tilde{\lambda} \in \Lambda^{k,l,j}(E)$ dada por

$$\tilde{\lambda}(v_1, \ldots, v_{k+l+j}) = \alpha(v_1, \ldots, v_k)(\beta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})\gamma(v_{k+l+1}, \ldots, v_{k+l+j}))$$

y le aplicamos $\varphi_{k,l+j} \circ \varphi l, j$.

Pero $\lambda = \tilde{\lambda}$ por asociatividad en $\mathbb{R}$ y por el lema $\varphi_{k+l,j} \circ \varphi_{k,l} = \varphi_{k,l+j} \circ \varphi_{l,j}$ de donde se sigue el resultado.

$\square$

Teorema 3.1.6. Sean E y F espacios vectoriales y $h : E \longrightarrow F$ una transformación lineal. Entonces la aplicación $h^{\#} : \Lambda^k(F) \longrightarrow \Lambda^k(E)$ definida mediante

$$h^{\#}(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(h(v_1), \ldots, h(v_k))$$

satisface las siguientes propiedades

1. $h^{\#}$ es lineal.
2. $h^{\#}$ es monomorfismo $\Longleftrightarrow$ h es epimorfismo.
3. $h^{\#}$ es epimorfismo $\Longleftrightarrow$ h es monomorfismo.
4. $h^{\#}(\alpha \wedge \beta) = h^{\#}(\alpha) \wedge h^{\#}(\beta)$

Teorema 3.1.7. Dado un espacio vectorial E, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de E y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es la base del dual E^* relativa a $\{e_1, \ldots, e_n\}$, entonces

$$\{f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n\}$$

es base de $\Lambda^k(E)$ y así $\dim \Lambda^k(E) = \binom{n}{k}$

Demostración

Veamos primero que $\{f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n\}$ genera a $\Lambda^k(E)$. Sea $v \in E$, tenemos que $v = f_1(v)e_1 + \cdots + f_n(v)e_n$. Por lo tanto, si $\alpha \in \Lambda^k(E)$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(v_1, \ldots, v_k) &= \alpha\left(\sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v_1)e_{j_1}, v_2, \ldots, v_k\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v_1)\alpha(e_{j_1}, v_2, \ldots, v_k) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v_1)\, \alpha\left(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} f_{j_2}(v_2)e_{j_2}, v_3, \ldots, v_k\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} f_{j_1}(v_1) \sum_{j_2=1}^{n} f_{j_2}(v_2)\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, v_3, \ldots, v_k) \\
&= \sum_{j_1, j_2=1}^{n} f_{j_1}(v_1)f_{j_2}(v_2)\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, v_3, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

Así sucesivamente, reemplazando cada v_i por su expresión en la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, obtenemos que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{n} f_{j_1}(v_1) \ldots f_{j_k}(v_k)\alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

Pero, para $j_{i1} < \ldots < j_{ik}$ fijos,

$$\begin{aligned}
k! f_{j_{i1}} \wedge \ldots \wedge f_{j_{ik}}(v_1, \ldots, v_k)\alpha(e_{j_{i1}}, \ldots, e_{j_{ik}}) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} f_{j_{i1}}(v_{\sigma(1)}) \ldots f_{j_{ik}}(v_{\sigma(k)})\alpha(e_{j_{i1}}, \ldots, e_{j_{ik}}) \\
&= \sum_{j_{i1}, \ldots, j_{ik}} f_{j_{i1}}(v_1) \ldots f_{j_{ik}}(v_k)\alpha(e_{j_{i1}}, \ldots, e_{j_{ik}}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_{j_{i\sigma(1)}}(v_1) \ldots f_{j_{i\sigma(k)}}(v_k)\alpha(e_{j_{i\sigma(1)}}, \ldots, e_{j_{i\sigma(k)}})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{j_1, \ldots, j_k=1}^{n} f_{j_1}(v_1) \ldots f_{j_k}(v_k)\alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}(v_1, \ldots, v_k)\alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$$

Así $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \displaystyle\sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}(v_1, \ldots, v_k)$

Esto demuestra que $\{f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n\}$ genera a $\Lambda^k(E)$.

Veamos ahora la independencia lineal. Sea

$$g = \sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} c_{j_1 \ldots j_k} f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}$$

Dado que

$$f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}(e_{i1}, \ldots, e_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_r \neq j_r, \text{ para algún } r = 1, \ldots, k \\ 1 & \text{si } i_r = j_r, \text{ para todo } r = 1, \ldots, k \end{cases}$$

se tiene que $c_{j_1 \ldots j_k} = g(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$.

En particular, para $g \equiv 0$, $c_{j_1 \ldots j_k} = 0$

□

Gracias al teorema anterior, toda k-forma alternada α sobre un espacio vectorial E de dimensión n y base dual $\{f_1, \ldots, f_n\}$ se puede escribir como

$$\alpha = \sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} c_{j_1 \ldots j_k} f_{j_1} \wedge \ldots \wedge f_{j_k}$$

(para $1 \leq k \leq n$).

3.2 Fibrado de Formas en una Variedad

Similar a la construcción del fibrado tangente a partir de los espacios tangentes a una variedad, construiremos un nuevo fibrado llamado *de formas* a partir de los espacios de k-formas alternadas, con el propósito de definir las *k-formas diferenciables.*

Definición 3.2.1. Dada una n-variedad M y $0 \leq k \leq n$, definimos el **k-espacio de formas** en M como

$$\Lambda^k(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^k(T_pM)$$

y la **proyección canónica** de $\Lambda^k(M)$ sobre M la aplicación

$$\pi : \Lambda^k(M) \longrightarrow M : \pi(\alpha) = p \quad \text{si} \quad \alpha \in \Lambda^k(T_pM)$$

Observación.

Una k-forma $\alpha \in \Lambda^k(M)$ tiene expresión local

$$\alpha = \sum_{j_1<\ldots<j_k}^{n} a_{j_1\ldots j_k} \partial x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{j_k}$$

donde ∂x_{j_i} denota el dual de $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_{j_i}}\right|_p$

Dotaremos a $\Lambda^k(M)$ de una topología de la siguiente manera: Sea $p \in M$ y $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ una carta local de M en p, entonces tenemos que:

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p\in U} \Lambda^k(T_pM)$$

y la aplicación

$$\bar{\varphi}_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM : (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

es un isomorfismo. Entonces la biyección:

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{p\in U} \Lambda^k(T_pM) \simeq \bigsqcup_{p\in U} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) = U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \simeq U \times \mathbb{R}^m, \quad m = \binom{n}{k}$$

induce en $\pi^{-1}(U)$ la topología del espacio producto $U \times \mathbb{R}^m$.

Luego a $\Lambda^k(M)$ lo dotamos con la topología final dada por las inclusiones $i : \pi^{-1}(U) \hookrightarrow \Lambda^k(M)$.

Teorema 3.2.2. $\zeta = (\Lambda^k(M), \pi, M, \Lambda^k(\mathbb{R}^n))$ es un fibrado diferenciable que llamaremos **k-ésimo fibrado de formas** en M.

Demostración

Con la topología dada a $\Lambda^k(M)$, resulta π continua y sobreyectiva. El diagrama del fibrado claramente conmuta. Resta ver que los cociclos son diferenciables.

Sean $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n)), (V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ dos cartas locales de M en un mismo punto $p \in M$, y sea $v \in T_pM$ con representación $\sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ en la base relativa a φ. Se tiene que:

$$\bar{\psi_p} \circ \bar{\varphi_p}^{-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p) = \bar{\psi_p}(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\right|_p \right) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$$

Por lo tanto, $\bar{\psi_p} \circ \bar{\varphi_p}^{-1} = J(\varphi \circ \psi^{-1})$

Consideremos ahora las trivializaciones locales (U, Φ) y (V, Ψ) correspondientes a las cartas φ y ψ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\Phi^{-1} \circ \Psi)(p, \alpha) &= \Phi^{-1}(p, \bar{\psi}_p^{\#}(\alpha)) \\
&= (p, [(\bar{\varphi}_p^{-1})^{\#} \circ \bar{\psi}_p^{\#}](\alpha)) \\
&= (p, (\bar{\psi}_p \circ \bar{\varphi}_p^{-1})^{\#}(\alpha))
\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}
(\bar{\psi_p} \circ \bar{\varphi_p}^{-1})^{\#}(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) &= \alpha(\bar{\psi_p} \circ \bar{\varphi_p}^{-1}(v_1), \ldots, \bar{\psi_p} \circ \bar{\varphi_p}^{-1}(v_k)) \\
&= \alpha(J(\varphi \circ \psi^{-1})(v_1), \ldots, J(\varphi \circ \psi^{-1})(v_k)) \\
&= J^{\#}(\varphi \circ \psi^{-1})(\alpha)(v_1, \ldots, v_k)
\end{aligned}$$

resulta

$$(\Phi^{-1} \circ \Psi)(p, \alpha) = (p, J^{\#}(\varphi \circ \psi^{-1})(\alpha))$$

y por lo tanto los cociclos son diferenciables.

□

3.3 k-formas Diferenciables

Las *k-formas diferenciables* constituyen los elementos sobre los cuales trabaja la *cohomología de De Rham*, de manera que juegan un papel fundamental en el presente estudio.

Definición 3.3.1. Dada M una n-variedad diferenciable y $1 \leq k \leq n$, una **k-forma diferenciable** sobre M es una sección diferenciable del k-ésimo fibrado cotangente a M.

Denotamos por $\Omega^k(M)$ al espacio vectorial de las k-formas diferenciables sobre M.

Observaciones.

1. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\upsilon \in \Omega^l(M)$, entonces $\omega \wedge \upsilon \in \Omega^{k+l}(M)$.

2. Claramente $\Omega^0(M)$ es el conjunto de las funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$.

3. Una k-forma diferenciable tiene la siguiente expresión local

$$\omega(p) = \sum_{j_1<\ldots<j_k}^{n} a_{j_1\ldots j_k}(p)\partial x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{j_k}$$

   donde $a_{j_1\ldots j_k}$ es una función diferenciable del entorno coordenado U respectivo en $\mathbb{R}$.

Sean M y N variedades diferenciables, cada $F : M \longrightarrow N$ diferenciable, induce una aplicación $F^\star : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ dada por

$$F^\star(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(F(p))(dF_p(v_1), \ldots, dF_p(v_k))$$

$\forall\ \omega \in \Omega^k(N);\ \ v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ y $p \in M$.

Proposición 3.3.2. Sean $F : M \longrightarrow N$ y $G : N \longrightarrow P$ aplicaciones diferenciables.

1. $F^\star$ es lineal.

2. F sobreyectiva $\Longrightarrow$ $F^\star$ es monomorfismo.

3. F inyectiva $\Longrightarrow$ $F^\star$ es epimorfismo.

4. $(G \circ F)^\star = F^\star \circ G^\star$

5. $1_M^\star = 1_{\Omega^k(M)}$

6. $F^\star(\omega \wedge \upsilon) = F^\star(\omega) \wedge F^\star(\upsilon)$

Demostración: Cartan [3], página 39.

$\square$

3.4 k-formas Diferenciables Vectoriales

Podemos generalizar el concepto de forma diferenciable para que tomen valores en espacios vectoriales más generales que $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

Definición 3.4.1. Sea M una variedad diferenciable y E un espacio vectorial de dimensión finita, una **k-forma diferenciable E-valuada** ω en M es una asignación suave de puntos de M a funciones k-lineales y alternadas

$$\omega(p) : T_pM \times \ldots \times T_pM \longrightarrow E$$

El conjunto de las k-formas diferenciables E-valuadas forman un espacio vectorial que denotaremos por $\Omega^k(M, E)$.

En particular se tiene $\Omega^k(M, \mathbb{R}) = \Omega^k(M)$.

El siguiente lema es trivial:

Lema 3.4.2. La aplicación $\Omega^k(M) \otimes E \longrightarrow \Omega^k(M, E)$ dada por $\varpi \otimes a \longmapsto \omega$, donde

$$\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \varpi(p)(v_1, \ldots, v_k) \cdot a \quad p \in M, \quad v_i \in T_pM$$

es un isomorfismo.

3.5 Variedades y Fibrados Orientables

A través de las k-formas diferenciables se puede definir el concepto de *orientabilidad* de una variedad diferenciable. Las variedades orientables son las que podremos analizar mediante la *sucesión de Gysin*.

Definición 3.5.1. Una **función determinante** en un espacio vectorial n-dimensional es una aplicación n-lineal, no nula y alternada a valores reales.

Ejemplo 3.5.2. El **determinante usual** de matrices de orden n, es una función determinante en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.5.3. Decimos que una n-variedad M es **orientable** si existe una n-forma diferenciable $\Delta \in \Omega^n(M)$ tal que

$$\Delta(p) \neq 0, \quad \forall p \in M$$

Podemos establecer una la relación de equivalencia entre tales n-formas:

$$\Delta_1 \sim \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 = f.\Delta_2$$

donde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $f(x) > 0$, $x \in M$. Una clase de equivalencia de estas n-formas es lo que se conoce como una **orientación** en M.

Si M es una variedad orientable, la elección de una orientación, o n-forma representante, se dice que **orienta** a M.

Ejemplo 3.5.4.

1. Una función determinante Δ en $\mathbb{R}^n$ interpretada como un elemento de $\Omega^n(\mathbb{R}^n)$, orienta a $\mathbb{R}^n$

2. La n-esfera unitaria $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es orientable. En efecto, sea nuevamente Δ una función determinante en $\mathbb{R}^{n+1}$, definimos $\Theta \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ mediante

$$\Theta(p)(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(p)(v_1, \ldots, v_n), \quad p \in \mathbb{S}^n, \quad v_i \in T_p\mathbb{S}^n$$

   Esta n-forma orienta a $\mathbb{S}^n$.

3. $\mathbb{C}P^n$ es orientable puesto que $\mathbb{C}P^n \simeq \mathbb{S}^{2n+1}/\sim$ y cualquier orientación para $\mathbb{S}^{2n+1}$ también orienta a $\mathbb{S}^{2n+1}/\sim$.

Ahora podemos definir los *fibrados orientables*. Sea $\eta = (E, \pi, B, F)$ un fibrado diferenciable con B n-dimensional y F r-dimensional. Recordemos que la fibra F_x sobre $x \in B$ es una subvariedad de E y denotemos la inclusión por $i_x : F_x \hookrightarrow E$.

Consideremos las r-formas diferenciables $\omega \in \Omega^r(E)$ tales que para cada $x \in B$ la r-forma diferenciable $i_x^\star\omega \in \Omega^r(F_x)$ orienta a F_x (podría no haber ninguna forma que satisfaga tal condición). Decimos que dos de estas formas ω_1, ω_2 son equivalentes si $i_x^\star\omega_1$ y $i_x^\star\omega_2$ inducen la misma orientación en F_x para cada $x \in B$.

Definición 3.5.5. El fibrado diferenciable η se dice **orientable** si existe una r-forma diferenciable $\omega \in \Omega^r(E)$ tal que $i_x^\star\omega$ orienta a F_x para cada $x \in B$. Una clase de equivalencia de tales r-formas diferenciables es llamado **orientación** del fibrado.

Proposición 3.5.6. Sea $\eta = (E, \pi, B, F)$ un fibrado diferenciable tal que E es conexo y orientable. Entonces η es orientable si B lo es.

Demostración: Greub [2], página 310.

$\square$

Ejemplo 3.5.7. El fibrado de Hopf $(\mathbb{S}^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}P^n, \mathbb{S}^1)$ es orientable pues $\mathbb{S}^{2n+1}$ es conexo y orientable y $\mathbb{C}P^n$ es orientable.

3.6 Integración de n-formas

Notación. Dada una variedad diferenciable M, denotaremos mediante $\Omega_c^k(M)$ al subespacio de las k-formas diferenciables en M con soporte compacto.

Sea M una variedad n-dimensional orientable y sea O un subconjunto abierto de M. Definiremos constructivamente una aplicación lineal:

$$\int_O : \Omega_c^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

llamada **integración de n-formas**.

Sea $\omega \in \Omega_c^n(M)$ y supongamos primero que $Sop(\omega) \subseteq U$ para alguna carta (U, φ) de M. Entonces definimos

$$\int_O \omega = \int_{\varphi(O \cap U)} (\varphi^{-1})^\star \omega$$

Veamos que esta definición no depende de la elección de la carta (U, φ):
Consideremos (V, ψ) una segunda carta tal que $Sop(\omega) \subseteq V$, y sea $W = U \cap V$. Se tiene entonces que

$$\int_{\varphi(O\cap U)} (\varphi^{-1})^\star \omega = \int_{\varphi(O\cap W)} (\varphi^{-1})^\star \omega = \int_{\psi(O\cap W)} (\varphi \circ \psi^{-1})^\star (\varphi^{-1})^\star \omega = \int_{\psi(O\cap V)} (\psi^{-1})^\star \omega$$

Ahora tomemos $\omega \in \Omega_c^n(M)$ arbitraria. Como ω tiene soporte compacto, existe una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^r$ de cartas de M tales que

$$Sop(\omega) \subseteq \bigcup_{i=1}^r U_i$$

Llamemos $U_0 = M - Sop(\omega)$. Existe una partición de la unidad diferenciable $\{p_i\}_{i=0}^r$ subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$. Luego

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} p_i \cdot \omega \quad \text{y} \quad p_i \cdot \omega \in \Omega_c^n(U_i)$$

Definimos

$$\int_O \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_O p_i \cdot \omega$$

Veremos que esta definición no depende de la elección de las cartas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ ni de la partición de la unidad $\{p_i\}$.

Sea $\{(V_j, \psi_j)\}_{j=1}^s$ una segunda familia de cartas tales que $Sop(\omega) \subseteq \bigcup_j V_j$. Llamemos $V_0 = M - Sop(\omega)$ y sea $\{q_j\}_{j=0}^s$ una partición de la unidad diferenciable subordinada al cubrimiento $\{V_j\}$.

Como $q_0 \cdot \omega = p_0 \cdot \omega = 0$, se tiene

$$p_i \cdot \omega = \sum_{j=1}^{s} q_j p_i \cdot \omega, \quad i = 1, \ldots, r$$

luego

$$\sum_{i=1}^{r} \int_O p_i \cdot \omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \int_O q_j p_i \cdot \omega = \sum_{j=1}^{s} \int_O q_j \cdot \omega$$

Proposición 3.6.1 (Propiedades de la integración de n-formas)**.**

Sea M una variedad n-dimensional orientable y $\omega \in \Omega_c^n(M)$. Entonces

1. $\int_\emptyset \omega = 0$

2. Si $\{x \in U : \omega(x) \neq 0\} = \{x \in V : \omega(x) \neq 0\}$, donde U y V son abiertos de M, entonces
$$\int_U \omega = \int_V \omega$$
En particular, si $\omega|_U = 0$, entonces $\int_U \omega = 0$.

3. Si U, V son abiertos disjuntos de M, entonces
$$\int_{U \cup V} \omega = \int_U \omega + \int_V \omega$$

Demostración

Utilizando una partición de la unidad diferenciable adecuada es fácil reducir al caso $M = \mathbb{R}^n$, donde estas propiedades no son más que las usuales de la integral de Riemann.

$\square$

Ahora veremos como se generaliza esta integración para n-formas vectoriales.

Sea M una n-variedad orientable y E un espacio vectorial de dimensión finita. Recordemos del lema 3.4.2 la relación $\Omega^k(M, E) = \Omega^k(M) \otimes E$. Es claro que también $\Omega_c^k(M, E) = \Omega_c^k(M) \otimes E$.

Sea $\omega \in \Omega_c^n(M, E)$, escribimos

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \otimes a_i$$

donde $a_1, \ldots, a_r$ son base de E y $\omega_i \in \Omega_c^n(M)$. Es fácil ver que el vector en E dado por

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\int_O \omega_i \right) a_i$$

(O es abierto de M), es independiente de la elección de la base $\{a_i\}$. Definimos entonces la integral de ω como ese vector,

$$\int_O \omega = \sum_{i=1}^{r} \left(\int_O \omega_i \right) a_i$$

3.7 Derivada Exterior

Definición 3.7.1. Sea M una n-variedad. La **derivada exterior** es el operador $\delta : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definido de la siguiente manera:

- Si $\omega \in \Omega^0(M)$ entonces $\delta\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \partial x_i = d\omega$, el diferencial de ω.

- Si $\omega \in \Omega^k(M)$ con la siguiente expresión:

$$\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} a_{j_1 \ldots j_k} \partial x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{j_k}$$

  entonces

$$\delta\omega = \sum_{j_1 < \ldots < j_k}^{n} \delta a_{j_1 \ldots j_k} \wedge \partial x_{j_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{j_k}$$

Observaciones.

1. El valor de $\delta\omega$ no depende de la expresión local de ω como se puede ver en Singer [5], página 108.

2. $\Omega^k_c(M)$ es estable bajo δ (es fácil de ver usando que $Sop(\delta\omega) \subseteq Sop(\omega)$ para $\omega \in \Omega^k(M)$).

Teorema 3.7.2. *Propiedades de la derivada exterior*

1. δ es lineal.

2. $\delta(\omega \wedge \upsilon) = \delta\omega \wedge \upsilon + (-1)^k \omega \wedge \delta\upsilon$ si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\upsilon \in \Omega^l(M)$.

3. $\delta(\delta\omega) = \delta^2\omega = 0$ para toda $\omega \in \Omega^k(M)$.

4. Si $F : M \longrightarrow N$ es una aplicación diferenciable, entonces $\delta \circ F^\star = F^\star \circ \delta$.

DEMOSTRACIÓN

1. Trivial.

2. Sean $\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k}$ y $\upsilon = \sum_{j_1<\ldots<j_l}^{n} b_{j_1\ldots j_l}\partial x_{j_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{j_l}$

   Entonces

$$\begin{aligned}
\delta(\omega\wedge\upsilon) &= \sum \delta(a_{i_1\ldots i_k}b_{j_1\ldots j_l})(\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})\wedge(\partial x_{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\partial x_{j_{k+l}})\\
&= \sum(\delta(a_{i_1\ldots i_k})b_{j_1\ldots j_l})\wedge(\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})\wedge(\partial x_{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\partial x_{j_{k+l}})\\
&+ \sum(a_{i_1\ldots i_k}\delta(b_{j_1\ldots j_l}))\wedge(\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})\wedge(\partial x_{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\partial x_{j_{k+l}})\\
&= \delta\omega\wedge\upsilon\\
&+ (-1)^k\sum(a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})\wedge(\delta b_{j_1\ldots j_l}\partial x_{j_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\partial x_{j_{k+l}})\\
&= \delta\omega\wedge\upsilon+(-1)^k\omega\wedge\upsilon
\end{aligned}$$

   donde cada una de las sumatorias están extendidas sobre los índices $1\le i_1<\ldots<i_k<j_{k+1}<\ldots<j_{k+l}\le n$

3. Primero supongamos que $\omega\in\Omega^0(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\delta^2\omega &= \delta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\partial x_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\delta\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right)\wedge\partial x_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}\partial x_j\wedge\partial x_i\right)
\end{aligned}$$

   Como $\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j}$ y $\partial x_i\wedge\partial x_j=-\partial x_j\wedge\partial x_i$ para $i\neq j$ tenemos

$$\delta^2\omega=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\partial x_j}\right)\partial x_j\wedge\partial x_i=0$$

   Ahora supongamos $\omega\in\Omega^k(M)$ con expresión $\omega=a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1}\wedge\partial x_{i_k}$. Por la parte 2. se tiene

$$\delta\omega=(\delta a_{i_1\ldots i_k})\wedge\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k}+a_{i_1\ldots i_k}\delta(\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})$$

   Pero $\delta(\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k})=\delta(1)\wedge\partial x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial x_{i_k}=0$. Y como $a_{i_1\ldots i_k}\in\Omega^0(M)$ entonces $\delta^2(a_{i_1\ldots i_k})=0$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta^2\omega &= \delta(\delta a_{i_1\ldots i_k} \wedge \partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k}) \\ &= \delta^2 a_{i_1\ldots i_k} \wedge \partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k} + \delta a_{i_1\ldots i_k} \wedge \delta(\partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k}) = 0\end{aligned}$$

En general, para $\omega \in \Omega^k(M)$ con expresión $\omega = \sum_{i_1<\ldots i_k}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k}$, usando dos veces la parte 1,

$$\begin{aligned}\delta^2\omega &= \delta^2 \sum_{i_1<\ldots i_k}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k} \\ &= \delta \sum_{i_1<\ldots i_k}^{n} \delta(a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_k}^{n} \delta^2(a_{i_1\ldots i_k}\partial x_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial x_{i_k}) \\ &= 0\end{aligned}$$

4. Cartan [3], página 38.

□

Definición 3.7.3. Decimos que $\omega \in \Omega^k(M)$ es **cerrada** si $\delta\omega = 0$. Y decimos que es **exacta** si existe $\upsilon \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\delta\upsilon = \omega$.

Capítulo 4

Cohomología de De Rham

La *cohomología de De Rham* consiste en una colección de espacios vectoriales obtenidos dentro del cálculo de la exactitud de un complejo de formas diferenciables asociado a una variedad dada, que aporta información acerca de la arquitectura del espacio.

4.1 Complejos Diferenciables

Definición 4.1.1. Un **complejo diferenciable** $\mathcal{C} = \{(C^n, d_n)\}$ es una sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales

$$0 \xrightarrow{0} C^0 \xrightarrow{d_o} C^1 \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \cdots$$

tal que $\forall n \; d_n \circ d_{n-1} = 0$.

Nótese que $d_n \circ d_{n-1} = 0$ implica $\operatorname{Img} d_{n-1} \subseteq \ker d_n$.

El espacio vectorial $H^n(\mathcal{C}) = \dfrac{\ker d_n}{\operatorname{Img} d_{n-1}}$ lo llamaremos n**-ésimo grupo de cohomología** de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 4.1.2. Si M es una variedad diferenciable y $\delta : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ la derivada exterior, entonces

$$0 \xrightarrow{0} \Omega^0(M) \xrightarrow{\delta} \Omega^1(M) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \Omega^{n-1}(M) \xrightarrow{\delta} \Omega^n(M) \xrightarrow{0} 0$$

es un complejo diferenciable llamado **complejo de De Rham**, su cohomología la llamaremos **cohomología de De Rham** y la denotaremos por $H_{DR}(M)$.

Proposición 4.1.3. Si M es una variedad conexa, entonces $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$.

Demostración

$$H^0_{DR}(M) = \frac{\ker \delta}{\operatorname{Img} 0} = \frac{\ker \delta}{0} = \ker \delta$$

Es decir $H^0_{DR}(M)$ es el conjunto de las aplicaciones $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $\delta f = df = 0$. Luego, por el teorema 2.4.6 se sigue que $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$.

$\square$

Definición 4.1.4. Decimos que un complejo diferenciable $\mathcal{C} = \{(C^n, d_n)\}$ es **exacto en** C^n si $\ker d_n = \operatorname{Img} d_{n-1}$, es decir, si $H^n(\mathcal{C}) = 0$. Y decimos que el complejo es **exacto** si es exacto en C^n para todo n.

Proposición 4.1.5. Sea

$$0 \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} 0$$

un complejo diferenciable.

1. El complejo es exacto en A si, y sólo si, f es monomorfismo.
2. El complejo es exacto en B si, y sólo si, f es epimorfismo.
3. El complejo es exacto si, y sólo si, f es isomorfismo.

Demostración

1. $\ker f = \operatorname{Img} g = 0 \Leftrightarrow f$ monomorfismo.
2. $\operatorname{Img} f = \ker h = B \Leftrightarrow f$ epimorfismo.
3. Inmediato de las partes 1 y 2

$\square$

Definición 4.1.6. Dados $\mathcal{C} = \{(C^n, d_n)\}$ y $\mathcal{D} = \{(D^n, b_n)\}$ complejos diferenciables, un **morfismo** o **transformación de cadenas** entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una familia $\mathcal{F} = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$ de transformaciones lineales tales que $b_k \circ f_k = f_{k+1} \circ d_k$. Es decir, son transformaciones que hacen al siguiente diagrama conmutativo para todo n

$$\begin{tikzcd}
C^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C^{n+1} \arrow[d, "d_{n+1}"] \\
D^n \arrow[r, "b_n"'] & D^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Un morfismo de cadenas $\mathcal{F}$ entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ lo denotaremos usualmente mediante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Si $\mathcal{F} = \{f_n : C^n \longrightarrow D^n\}$ es un morfismo de cadenas, entonces, para todo n, f_n induce una transformación lineal $f_n^* : H^n(\mathcal{C}) \longrightarrow H^n(\mathcal{D})$ dada por $f_n^*([a]) = [f_n(a)]$. Claramente f^* es monomorfismo (epimorfismo) si, y sólo si, f es monomorfismo (epimorfismo).

Notemos que en el caso del complejo de De Rham se obtiene una inducción cofuntorial: Si $F : M \longrightarrow N$ es diferenciable, sabemos que esta aplicación induce transformaciones lineales $F_k^\star : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$, que inducen a su vez $F_k^* : H_{DR}^k(N) \longrightarrow H_{DR}^k(M)$.

4.2 Lemas Algebráicos

Este apartado estará dedicado a mostrar resultados indispensables para el cálculo de cohomología de De Rham de variedades en general. Entre estos resultados destaca el teorema de *Mayer-Vietoris*, el cual reviste particular importancia y será utilizado reiteradamente en las próximas secciones.

Lema 4.2.1 (de los Cinco)**.**

Sean $\mathcal{C} = \{(C^n, d_n)\}$, $\mathcal{D} = \{(D^n, b_n)\}$ complejos diferenciables exactos y $\mathcal{F} = \{f_n\} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un morfismo de cadenas. Si f_{n-2}, f_{n-1}, f_{n+1} y f_{n+2} son isomorfismos, entonces f_n también lo es.

Demostración

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "f_{n-2}"', "\simeq"] & C^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"', "\simeq"] & C^{n} \arrow[r, "d_{n}"] \arrow[d, "f_{n}"'] & C^{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"', "\simeq"] & C^{n+2} \arrow[r, "d_{n+2}"] \arrow[d, "f_{n+2}"', "\simeq"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-2} \arrow[r, "b_{n-2}"'] & D^{n-1} \arrow[r, "b_{n-1}"'] & D^{n} \arrow[r, "b_{n}"'] & D^{n+1} \arrow[r, "b_{n+1}"'] & D^{n+2} \arrow[r, "b_{n+2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Veamos primero que f_n es monomorfismo:

Sea $x \in C^n$ tal que $f_n(x) = 0$. Luego $b_n \circ f_n(x) = 0$ y por conmutatividad del diagrama $f_{n+1} \circ d_n(x) = 0$, de donde $d_n(x) = 0$ por ser f_{n+1} isomorfismo. Como $\mathcal{C}$ es exacto en C^n existe $y \in C^{n-1}$ tal que $d_{n-1}(y) = x$. Así $0 = f_n(x) = f_n \circ d_{n-1}(y) = b_{n-1} \circ f_{n-1}(y) \Rightarrow b_{n-1} \circ f_{n-1}(y) = 0$ y por la exactitud de $\mathcal{D}$ en D^{n-1} existe $z \in D^{n-2}$ tal que $b_{n-2}(z) = f_{n-1}(y)$. Ahora bien, como f_{n-2} es isomorfismo existe $w \in C^{n-2}$ tal que $f_{n-2}(w) = z$. Es decir $f_{n-1}(y) = b_{n-2}(z) = b_{n-2} \circ f_{n-2}(w) = f_{n-1} \circ d_{n-2}(w)$. Esto implica que $y = d_{n-2}(w)$ por inyectividad de f_{n-1} y por lo tanto $x = d_{n-1}(y) = d_{n-1} \circ d_{n-2}(w) = 0$ De donde $\ker f_n = \{0\}$, es decir, f_n es monomorfismo.

Ahora veamos que f_n es epimorfismo:

Sea $y \in D^n \Rightarrow b_{n+1} \circ b_n(y) = 0$. Existe $z \in C^{n+1}$ tal que $f_{n+1}(z) = b_n(y)$ por ser f_{n+1} isomorfismo. Luego $b_{n+1} \circ f_{n+1}(z) = 0 = f_{n+2} \circ d_{n+1}(z)$ por conmutatividad del diagrama, y como f_{n+2} es isomorfismo, se sigue que $d_{n+1}(z) = 0$. En virtud de la exactitud de $\mathcal{C}$ en C^{n+1}, existe $x \in C^n$ tal que $d_n(x) = z$. Esto implica que $f_{n+1} \circ d_n(x) = b_n(y) = b_n \circ f_n(x) \Rightarrow b_n(y - f_n(x)) = 0$, de donde existe $v \in D^{n-1}$ tal que $b_{n-1}(v) = y - f_n(x)$ por la exactitud de $\mathcal{D}$ en D^n. Más aún, como f_{n-1} es isomorfismo, existe $w \in C^{n-1}$ tal que $f_{n-1}(w) = v$. Entonces $b_{n-1} \circ f_{n-1}(w) = y - f_n(x) = f_n \circ d_{n-1}(w)$, de donde, por linealidad $f_n(d_{n-1}(w) + x) = y$. Por lo tanto f_n es epimorfismo.

□

Definición 4.2.2. Sean $\mathcal{C} = \{(C^n, d_n)\}$, $\mathcal{D} = \{(D^n, b_n)\}$, $\mathcal{E} = \{(E^n, h_n)\}$ complejos diferenciables y $\mathcal{F} = \{f_n\} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $\mathcal{G} = \{g_n\} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ morfismos de cadenas. Se dice que

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

es una **suceción exacta corta** si en el siguiente diagrama cada columna es exacta

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & C^n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D^{n-1} \arrow[r, "b_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"'] & D^n \arrow[r, "b_n"] \arrow[d, "g_n"'] & D^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E^{n-1} \arrow[r, "h_{n-1}"] \arrow[d] & E^n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d] & E^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Usualmente nos referiremos a una sucesión exacta corta por una de sus columnas $0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{f_n} D^n \xrightarrow{g_n} E^n \longrightarrow 0$

Lema 4.2.3 (de la Serpiente)**.**

Si $0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{E} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces existe una aplicación lineal $\Delta_n : H^n(\mathcal{E}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{C})$ conocido como **morfismo de conexión** o **conectante** tal que

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_n^*} H^n(\mathcal{D}) \xrightarrow{g_n^*} H^n(\mathcal{E}) \xrightarrow{\Delta_n} H^{n+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_{n+1}^*} H^{n+1}(\mathcal{D}) \xrightarrow{g_{n+1}^*} \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración

Definición de Δ_n: Sea $x \in \ker h_n$. Como la sucesión corta es exacta g_n es sobreyectiva, luego existe $y \in D^n$ tal que $g_n(y) = x$. Entonces $0 = h_n(x) = h_n \circ g_n(y) = g_{n+1} \circ b_n(y)$ por la conmutatividad del diagrama. Así $b_n(y) \in \ker g_{n+1} = \operatorname{Img} f_{n+1}$, por tanto existe $z \in C^{n+1}$ tal que $f_{n+1}(z) = b_n(y)$ y como f_{n+1} es inyectiva (por la exactitud de la sucesión) este z es único. Más aún, se tiene que $f_{n+2} \circ d_{n+1}(z) = b_{n+1} \circ f_{n+1}(z) = b_{n+1} \circ b_n(y) = 0$ y como f_{n+2} es inyectiva por exactitud, entonces $d_{n+1}(z) = 0$. De modo que $z \in \ker d_{n+1}$.

Definimos $\Delta_n : H^n(\mathcal{E}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathcal{C})$ mediante $\Delta_n([x]) = [z]$.

Buena definición de Δ_n: Sean $x, a \in \ker h_n$ tales que $[a] = [x]$, entonces $a - x \in \operatorname{Img} h_{n-1}$, de donde se sigue que existe $x' \in E^{n-1}$ tal que $h_{n-1}(x') = a - x$. Basta ver entonces que $\Delta_n([h_{n-1}(x')]) = [0]$.

Como g_{n-1} es sobreyectiva por exactitud, existe $y' \in D^{n-1}$ tal que $g_{n-1}(y') = x'$. Ahora hacemos $h_{n-1}(x') = x$ (el x de la construcción anterior), y obtenemos $x = h_{n-1}(x') = h_{n-1} \circ g_{n-1}(y') = g_n \circ b_{n-1}(y')$. Así $y = b_{n-1}(y') \Rightarrow b_n(y) = b_n \circ b_{n-1}(y') = 0 \Rightarrow z = 0$.

Veamos ahora que la definición de Δ_n tampoco depende de la elección del $y \in D^n$ tal que $g_n(y) = x$:

Sean $y, y' \in D^n$ tales que $g_n(y) = x = g_n(y')$. Sabemos que existen $z, z' \in C^{n+1}$ tales que $f_{n+1}(z) = b_n(y)$ y $f_{n+1}(z') = b_n(y')$. Queremos probar que $[z] = [z']$ es decir $[z - z'] = 0$, o en otras palabras que $z - z' \in \operatorname{Img} d_n$. En efecto, $g_n(y) = g_n(y') \Rightarrow g_n(y - y') = 0$ y por exactitud de la sucesión existe $w \in C^n$ con $f_n(w) = y - y'$. De donde $f_{n+1}(z - z') = b_n(y - y') = b_n \circ f_n(w) = f_{n+1} \circ d_n(w)$ y como f_{n+1} es inyectiva $d_n(w) = z - z' \Rightarrow z - z' \in \operatorname{Img} d_n$.

Linealidad de Δ_n: Se sigue de la linealidad de todas las transformaciones del diagrama: Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $[x_1], [x_2] \in H^n(\mathcal{E})$

$\Delta_n(\lambda[x_1] + [x_2]) = \Delta_n([\lambda x_1 + x_2])$. Existen $y, y_1, y_2 \in D^n$ tales que $g_n(y_1) = x_1$, $g_n(y_2) = x_2$ y $g_n(y) = \lambda x_1 + x_2$. Así $g_n(y) = \lambda x_1 + x_2 = \lambda g_n(y_1) + g_n(y_2) = g_n(\lambda y_1 + y_2)$. Existen $z, z_1, z_2 \in C^{n+1}$ tales que $f_{n+1}(z) = b_n(y)$, $f_{n+1}(z_1) = b_n(y_1)$ y $f_{n+1}(z_2) = b_n(y_2)$, entonces $f_{n+1}(\lambda z_1 + z_2) = b_n(\lambda y_1 + y_2)$. Finalmente $\Delta_n(\lambda[x_1] + [x_2]) = [z] = [\lambda z_1 + z_2] = \lambda[z_1] + [z_2] = \lambda\Delta_n([x_1]) + \Delta_n([x_2])$.

Exactitud de la sucesión: La exactitud es clara excepto en $H^{n+1}(\mathcal{C})$. Es claro que $\operatorname{Img}\Delta_n \subseteq \ker f^*_{n+1}$ pues $f^*_{n+1}(\Delta_n([x])) = f^*_{n+1}([z]) = [f_{n+1}(z)] = [b_n(y)] = [0]$.

Veamos que $\ker f^*_{n+1} \subseteq \operatorname{Img}\Delta_n$. Sea $[x] \in \ker f^*_{n+1}$, i.e. $x \in \ker d_{n+1}$ y $f^*_{n+1}([x]) = [f_{n+1}(x)] = [0] \Rightarrow f_{n+1}(x) \in \operatorname{Img} b_n \Rightarrow$ existe $y \in D^n$ tal que $b_n(y) = f_{n+1}(x)$. Ahora bien, $h_n \circ g_n(y) = g_{n+1} \circ b_n(y) = g_{n+1} \circ f_{n+1}(x) = 0$. De manera que $g_n(y) \in \ker h_n$ y $[g_n(y)] \in H^n(\mathcal{E})$. Más aún, la definición de Δ_m muestra que $\Delta_n([g_n(y)]) = [x]$. Por lo tanto $\ker f^*_{n+1} \subseteq \operatorname{Img}\Delta_n$ y se tiene la exactitud.

$\square$

Lema 4.2.4 (de los Nueve)**.**

Supongamos que en el siguiente diagrama conmutativo de complejos diferenciables cada columna es exacta.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_{11} \arrow[r] \arrow[d] & M_{12} \arrow[r] \arrow[d] & M_{13} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{21} \arrow[r] \arrow[d] & M_{22} \arrow[r] \arrow[d] & M_{23} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{31} \arrow[r] \arrow[d] & M_{32} \arrow[r] \arrow[d] & M_{33} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Si las dos últimas filas son exactas, entonces la primera también lo es.

La demostración de este lema se realiza de con la misma técnica de *pastoreo* usada en las dos pruebas enteriores.

Proposición 4.2.5 (Sucesión de Mayer-Vietoris)**.**

Dada una variedad diferenciable conexa M y $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de M, entonces

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. Donde

$$\alpha(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \quad \text{y} \quad \beta(\omega, \upsilon) = \omega|_{U\cap V} - \upsilon|_{U\cap V}$$

Demostración

Exactitud en $\Omega^k(M)$: Sean $\omega, \upsilon \in \Omega^k(M)$ tales que $\alpha(\omega) = \alpha(\upsilon)$. Entonces $(\omega|_U, \omega|_V) = \alpha(\omega) = \alpha(\upsilon) = (\upsilon|_U, \upsilon|_V) \Rightarrow \omega|_U = \upsilon|_U$ y $\omega|_V = \upsilon|_V$. Pero como $\{U, V\}$ es cubrimiento de M, $\omega = \upsilon$ y α es monomorfismo.

Exactitud en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$: Es claro que $\beta \circ \alpha = 0$, de donde $\operatorname{Img} \alpha \subseteq \ker \beta$. Para la otra contención, tomemos $(\omega, \upsilon) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tales que $\beta(\omega, \upsilon) = 0$. Entonces se tiene $\omega|_{U\cap V} - \upsilon|_{U\cap V} = 0 \Rightarrow \omega|_{U\cap V} = \upsilon|_{U\cap V}$ de modo que no hay ambiegüedad en definir

$$\varpi(p) = \begin{cases} \omega(p) & \text{si } p \in U \\ \upsilon(p) & \text{si } p \in V \end{cases}$$

que satisface $\alpha(\varpi) = (\omega, \upsilon)$. Por lo tanto $\ker \beta \subseteq \operatorname{Img} \alpha$.

Exactitud en $\Omega^k(U \cap V)$: En virtud del teorema 1.5.5. existe $\{p_U, p_V\}$ partición de la unidad diferenciable de M subordinada al cubrimiento $\{U, V\}$. Fijemos $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ y definamos $\omega_1 = p_U \omega$, $\omega_2 = -p_V \omega$. Como $Sop(p_U) \subseteq U$ y $Sop(p_V) \subseteq V$, entonces $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ y $\omega_2 \in \Omega^k(V)$. De modo que $\beta(\omega_1, \omega_2) = \beta(p_U\omega, -p_V\omega) = p_U\omega|_{U\cap V} - (-p_V\omega|_{U\cap V}) = (p_U + p_V)(\omega)|_{U\cap V} = \omega|_{U\cap V} = \omega$.

Por lo tanto β es epimorfismo y se tiene la exactitud.

$\square$

Teorema 4.2.6 (Mayer-Vietoris)**.**

Sea M una variedad diferenciable conexa y $\{U, V\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces

$$\cdots \longrightarrow H^k_{DR}(M) \xrightarrow{\alpha^*} H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \xrightarrow{\beta^*} H^k_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_k} H^{k+1}_{DR}(M) \xrightarrow{\alpha^*} \cdots$$

es una sucesión exacta.

Demostración

Es directo de la proposición anterior y el lema de la Serpiente.

□

Proposición 4.2.7. Dadas M, N dos variedades tales que $M \cap N = \emptyset$, entonces $H^k_{DR}(M \cup N) = H^k_{DR}(M) \oplus H^k_{DR}(N)$.

Demostración

Sean M, N variedades diferenciables tales que $M \cap N = \emptyset$, luego $M \cup N$ es también una variedad diferenciable. Consideramos $\{M, N\}$ cubrimiento abierto de $M \cup N$, como $H^k_{DR}(M \cap N) = H^k_{DR}(\emptyset) = 0$, por Mayer-Vietoris se obtiene, para cada k, la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^k_{DR}(M \cup N) \xrightarrow{\alpha^*} H^k_{DR}(M) \oplus H^k_{DR}(N) \longrightarrow 0$$

Luego por la proposición 4.1.5 α^* es isomorfismo.

□

En adelante denotaremos los grupos de cohomología de De Rham de una variedad M simplemente por $H^k(M)$ omitiendo el subíndice DR por simplicidad.

4.3 Homotopías, Variedades Contráctiles y Retractos por Deformación

Definición 4.3.1. Sean M, N variedades y $f, g : M \longrightarrow M$ aplicaciones diferenciables. Diremos que f es **homotópica** a g si existe $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ diferenciable tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. Tal F es llamada **homotopía** entre f y g

Teorema 4.3.2. Dadas M, N variedades y $f, g : M \longrightarrow N$ aplicaciones diferenciables. Si f es homotópica a g, entonces $f^* = g^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$ para $k > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Spivak [4], página 376.

□

Definición 4.3.3. Una variedad diferenciable M se dice **contráctil** si 1_M (la identidad en M) es homotópica a alguna aplicación constante $c : M \longrightarrow M$

Lema 4.3.4. $\mathbb{R}^n$ es contractil.

DEMOSTRACIÓN

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, t) \longmapsto tx$ es homotopía diferenciable entre $1_{\mathbb{R}^n}$ y 0. Luego, por el teorema anterior se tiene que $1^*_{\mathbb{R}^n} = 0^* : H^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^n)$ para $k > 0$. Así $\forall \omega \in H^k(\mathbb{R}^n)$, $\omega = 1^*_{\mathbb{R}^n}(\omega) = 0^*(\omega) = 0 \Rightarrow H^k(\mathbb{R}^n) = 0$.

□

Corolario 4.3.5.

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Teorema 4.3.6. Sean M y N variedades diferenciables, con N contráctil. Entonces $H^k(M \times N) = H^k(M)$.

DEMOSTRACIÓN

Como N es contráctil, existe una homotopía suave $F : N \times \mathbb{R} \longrightarrow N$ entre 1_N y alguna aplicación constante $c : N \longrightarrow N$. Es decir $F(x, 0) = x$ y $F(x, 1) = c$.

Veamos que $1_{M\times N}$ es homotópica a $1 \times c : M \times N \longrightarrow M \times \{c\}$. Efectivamente, $G : M \times N \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times N$ definida por $G(x, y, t) = (x, F(y, t))$ es homotopía diferenciable. Luego $1^*_{M\times N} = (1 \times c)^*$ de donde $H^k(M \times N) = H^k(M \times \{c\})$. Y como $M \times \{c\} \simeq M$ entonces $H^k(M \times N) = H^k(M)$.

□

Definición 4.3.7. Una subvariedad diferenciable $A \subseteq M$ es un **retracto** de M si existe una aplicación diferenciable $r : M \longrightarrow A$ tal que $\forall a \in A \;\; r(a) = a$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1_A"'] & M \arrow[d, "r"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Y decimos que A es **retracto por deformación** si además el siguiente diagrama conmuta en homotopía

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "1_M"] & \\ A \arrow[r, hook, "i"] & M \end{tikzcd}$$

Es decir, si existe una homotopía diferenciable $F : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ entre 1_M y $i \circ r$.

Proposición 4.3.8. Sea $A \subseteq M$ una subvariedad diferenciable. Si A es retracto por deformación de M, entonces $H^k(A) = H^k(M)$.

Demostración

Como A es retracto de M, $r \circ i = 1_A \Rightarrow i^* \circ r^* = (r \circ i)^* = 1_A^* = 1_{H^k(A)} \Rightarrow$ $r^* : H^k(A) \longrightarrow H^k(M)$ es monomorfismo.

Además, como A es retracto por deformación, $i \circ r$ es homotópica a $1_M \Rightarrow$ $r^* \circ i^* = (i \circ r)^* = 1_M^* = 1_{H^k(M)} \Rightarrow r^*$ es epimorfismo.

Por lo tanto $H^k(A) = H^k(M)$.

$\square$

Ejemplo 4.3.9. $M \times \{0\}$ es retracto por deformación de $M \times \mathbb{R}$.

La aplicación diferenciable

$$r : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \{0\} : (m, t) \longmapsto (m, 0)$$

y la homotopía diferenciable

$$F : M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R} : (x, t, s) \longmapsto (x, ts)$$

entre $i \circ r$ y $1_{M\times\mathbb{R}}$, hacen al siguiente diagrama conmutar (a la izquierda) y conmutar en homotopía (a la derecha)

$$\begin{tikzcd} M \times \{0\} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "1_{M\times\{0\}}"'] & M \times \mathbb{R} \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "1_{M\times\mathbb{R}}"] & \\ & M \times \{0\} \arrow[r, hook, "i"] & M \times \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

De manera que $H^k(M \times \mathbb{R}) = H^k(M \times \{0\}) = H^k(M)$. Esto constituye la demostración del siguiente resultado

Lema 4.3.10 (de Poincaré)**.** $H^k(M \times \mathbb{R}) = H^k(M)$

Que también es consecuencia directa del teorema 4.3.6

4.4 Cohomología de De Rham de $\mathbb{S}^n$

La esfera unitaria constituye la variedad techo del *fibrado de Hopf* como vimos en el ejemplo 2.2.3. Obtener su cohomología nos facilitará significativamente el cálculo de la cohomología de De Rham de los espacios proyectivos complejos mediante la *sucesión de Gysin*, nuestro objetivo final.

Recordemos del álgebra abstracta el

Teorema 4.4.1 (fundamental de homomorfismos)**.** Sean G y H grupos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces $G/\ker f \simeq \operatorname{Img} f$.

Nos será de gran utilidad para obtener nuestro resultado.

Teorema 4.4.2 (Cohomología de De Rham de $\mathbb{S}^n$)**.**

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Procederemos por inducción sobre n.
Para $n = 1$: Consideremos el cubrimiento abierto $\{U, V\}$ para $\mathbb{S}^1$ dado por las proyecciones estereográficas donde $U = \mathbb{S}^1 - \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^1 - \{S\}$ siendo N y S los polos norte y sur respectivamente. Sabemos que $U \simeq \mathbb{R} \simeq V$ y además $U \cap V = \mathbb{S}^1 - \{N, S\} \simeq \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ claramente.

En virtud del teorema de Mayer-Vietoris tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_0} H^1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(U) \oplus H^1(V)$$

La cual, aplicando los resultados 4.1.3, 4.2.7 y 4.3.5, se traduce a

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\Delta_0} H^1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\alpha^*} 0$$

Por exactitud de la sucesión se tiene que $\ker \alpha^* = 0$ e $\operatorname{Img} \Delta_0 = H^1(\mathbb{S}^1)$. También por exactitud y por el teorema fundamental de homomorfismos obtenemos

$$\ker \beta^* = \operatorname{Img} \alpha^* \simeq \frac{\mathbb{R}}{\ker \alpha^*} = \frac{\mathbb{R}}{0} = \mathbb{R}$$
$$\ker \Delta = \operatorname{Img} \beta^* \simeq \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\ker \beta^*} = \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$
$$H^1(\mathbb{S}^1) = \operatorname{Img} \Delta \simeq \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\ker \Delta} = \frac{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

Siguiendo con el método inductivo, supongamos cierta la tesis para $n-1$ y probémosla para n:
Nuevamente cubrimos a $\mathbb{S}^n$ con los abiertos $\{U, V\}$ dados por las proyecciones estereográficas. Sabemos que $U \simeq \mathbb{R}^n \simeq V$ y además $U \cap V = \mathbb{S}^n - \{N, S\} \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$

Por Mayer-Vietoris se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{\beta^*} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_0} H^1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^1(U) \oplus H^1(V)$$

Es decir

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\beta^*} \mathbb{R} \xrightarrow{\Delta_0} H^1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} 0$$

Usando los mismos argumentos de exactitud y el teorema fundamental de homomorfismos, se obtiene que $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$.

Por otro lado, si $k > 1$. Consideramos la sucesión

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \xrightarrow{\beta^*} H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\Delta_{k-1}} H^k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^k(U) \oplus H^k(V)$$

que, por el lema de Poincaré, se reduce a

$$0 \xrightarrow{\beta^*} H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\Delta_{k-1}} H^k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\alpha^*} 0$$

Por exactitud de esta sucesión Δ_{k-1} es un isomorfismo, de manera que

$$H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = H^k(\mathbb{S}^n) \text{ si } k > 1$$

y por hipótesis inductiva obtenemos el resultado.

□

4.5 Integración Sobre la Fibra

En esta sección y la siguiente definiremos los operadores fundamentales que intervienen en la Sucesión de Gysin.

Definición 4.5.1. Sea $\eta = (E, \pi, B, F)$ un fibrado diferenciable orientable con B n-dimensional y F r-dimensional y compacto. Definiremos un operador lineal

$$\oint_F : \Omega^{p+r}(E) \longrightarrow \Omega^p(B)$$

llamado **integración sobre la fibra** de la siguiente manera:

Sea $\omega \in \Omega^{p+r}(E)$ $(p \geq 0)$. Para cada $x \in B$, ω determina una r-forma diferenciable $\Lambda^p(T_xB)$-valuada con soporte compacto, ω_x, en F_x, definida como sigue: Fijamos $z \in F_x$ y vectores tangentes

$$v_1, \ldots, v_r \in \ker d\pi_z \quad \text{y} \quad u_1, \ldots, u_p \in T_xB$$

Sea $w_i \in T_z(E)$ tal que $d\pi(w_i) = u_i$. Como $\ker d\pi_z$ tiene dimensión r, el valor $\omega(z)(w_i, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_r)$ no depende de la elección de los w_i. Definimos entonces ω_x como

$$\omega_x(z)(v_1, \ldots, v_r)(u_1, \ldots, u_p) = \omega(z)(w_1, \ldots, w_p, v_1, \ldots, v_r)$$

Así podemos definir $\oint \omega$ como

$$\left(\oint_F \omega\right)(x) = \int_{F_x} \omega_x\,, \qquad x \in B.$$

Teorema 4.5.2 (Propiedades de la integración sobre la fibra)**.**

La integración sobre la fibra es un operador sobreyectivo y satisface

1. $\oint_F (\pi^\star \omega \wedge \upsilon) = \omega \wedge \oint_F \upsilon \qquad \omega \in \Omega^p(B),\ \upsilon \in \Omega^{p+r}(E)$
2. $\delta \circ \oint_F = \oint_F \circ\, \delta$

Demostración: Greub [2], página 300.

$\square$

4.6 El Operador β^*

Primero enunciaremos dos lemas que serán utilizados en las demostraciones posteriores de este apartado.

Lema 4.6.1. Sean M y N variedades diferenciables. El operador

$$\kappa : \Omega(M) \otimes \Omega(N) \longrightarrow \Omega(M \times N) : \omega \otimes \upsilon \longmapsto \omega \times \upsilon$$

es un homomorfismo llamado **homomorfismo de Künneth** que induce un isomorfismo κ^* en cohomología y satisface:

$$\left(1_{\Omega(A)} \otimes \int_B\right) = \oint_B \circ\, \kappa$$

Nota. En el enunciado anterior no se colocan los superíndices de los Ω sobreentendiendo que son los apropiados.

Demostración: Greub [2], página 208 y 302.

$\square$

Lema 4.6.2. Dada M una variedad n-dimensional, conexa y orientable. Entonces

$$\ker \int_M = \sum_{p=0}^{n-1} \Omega_c^p(M) \otimes \delta(\Omega_c^{n-1}(M))$$

Demostración: Greub [2], página 201.

□

Consideremos $\eta = (E, \pi, B, \mathbb{S}^r)$ un fibrado diferenciable orientable con B n-dimensional y $r \geq 1$. Por la parte 1 del teorema 4.5.2 tenemos que

$$\oint \pi^\star \omega = \omega \wedge \oint 1 = 0 \qquad \omega \in \Omega^{p+r}(B)$$

de manera que podemos considerar $\pi^\star$ como una aplicación lineal

$$\beta : \Omega^{p+r}(B) \longrightarrow \ker \oint \subseteq \Omega^{p+r}(E)$$

Además, como $\ker \oint$ es estable bajo la derivada exterior δ (por parte 2 del teorema 4.5.2), β induce

$$\beta^* : H^{p+r}(B) \longrightarrow H^{p+r}(\ker \oint)$$

Proposición 4.6.3. β^* es isomorfismo.

Para probar esta proposición haremos uso del siguiente

Lema 4.6.4. La proposición es cierta si el fibrado es trivial, es decir, si $E \simeq B \times \mathbb{S}^r$.

Demostración (del Lema)

En virtud del lema 4.6.1 se tiene el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(B) \otimes \ker \int_S \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_1"] & \Omega(B) \otimes \Omega(S) \arrow[r, "1 \otimes \int_S"] \arrow[d, "\kappa"] & \Omega(B) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\Omega(B)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \oint_S \arrow[r] & \Omega(B \times S) \arrow[r, "\oint_S"] & \Omega(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde κ_1 denota la restricción de κ.

Como $1_{H(B)}$ y κ^* son isomorfismos, podemos aplicar el lema de los cinco a la sucesión que se induce en cohomología (mediante el lema de la serpiente) para obtener que κ_1^* es un isomorfismo,

$$\kappa_1^* : H(B) \otimes H\left(\ker \int_S\right) \xrightarrow{\simeq} H\left(\ker \oint_S\right)$$

Por otro lado, sea

$$\gamma : \Omega(B) \longrightarrow \Omega(B) \otimes \ker \int_S$$

el operador lineal dado por $\gamma(\omega) = \omega \otimes 1$. Puesto que κ_1 es la restricción de κ, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Omega(B) \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ \Omega(B) \otimes \ker \int_S \arrow[r, "\kappa_1"'] & \ker \oint_S \end{tikzcd}$$

De manera que solo debemos probar que γ^* es un isomorfismo.

Por el lema 4.6.2 tenemos

$$\ker \int_S = \sum_{p=0}^{r-1} \Omega^p(S) \otimes \delta(\Omega^{r-1}(S)),$$

de donde

$$H\left(\ker \int_S\right) = \sum_{p=0}^{r-1} H^p(S) = H^0(S) = \mathbb{R},$$

y así

$$H(B) \otimes H\left(\ker \int_S\right) = H(B).$$

De aquí se sigue que γ^* es un isomorfismo.

$\square$

Demostración (de la Proposición)

Según la proposición 2.2.4, existe un mapa trivializante finito $\{(U_i, \psi_i)\}_{i=1}^m$ de η, es decir, los fibrados $(\pi^{-1}(U_i), \pi, U_i, \mathbb{S}^r)$ son triviales para todo $i = 1, \ldots, m$. Procederemos la demostración por inducción sobre m. El caso $m = 1$ es precisamente lo establecido en el lema previo.

Supongamos entonces que la proposición es válida para mapas trivializantes finitos con menos de m elementos. Fijemos

$$U = U_1, \quad V = \bigcup_{i=2}^m U_i$$

y sean

$$E_U = \pi^{-1}(U), \quad E_V = \pi^{-1}(V), \quad E_{U\cap V} = \pi^{-1}(U \cap V)$$

Entonces los fibrados

$$(E_U, \pi, U, \mathbb{S}^r), \quad (E_V, \pi, V, \mathbb{S}^r), \quad (E_{U\cap V}, \pi, U \cap V, \mathbb{S}^r)$$

satisfacen la hipótesis inductiva.

Por otro lado, sean

$K_B = \ker\left(\oint : \Omega^{p+r}(E) \longrightarrow \Omega^p(B)\right)$

$K_U = \ker\left(\oint : \Omega^{p+r}(E_U) \longrightarrow \Omega^p(U)\right)$

$K_V = \ker\left(\oint : \Omega^{p+r}(E_V) \longrightarrow \Omega^p(V)\right)$

$K_{U\cap V} = \ker\left(\oint : \Omega^{p+r}(E_{U\cap V}) \longrightarrow \Omega^p(U \cap V)\right)$

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_B \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & K_U \oplus K_V \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & K_{U\cap V} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{p+r}(E) \arrow[r] \arrow[d, "\oint"] & \Omega^{p+r}(E_U) \oplus \Omega^{p+r}(E_V) \arrow[r] \arrow[d, "\oint \oplus \oint"] & \Omega^{p+r}(E_{U\cap V}) \arrow[r] \arrow[d, "\oint"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^p(B) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^p(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Las dos últimas filas son las sucesiones exactas cortas de Mayer-Vietoris. Las columnas también son sucesiones exactas cortas pues es la inclusión es inyectiva y la integral sobre la fibra es sobreyectiva. Luego, por el lema de los Nueve, la primera fila también es exacta.

Consideremos ahora las aplicaciones

$$\beta_B : \Omega^{p+r}(B) \longrightarrow K_B, \quad \beta_U : \Omega^{p+r}(U) \longrightarrow K_U$$

$$\beta_V : \Omega^{p+r}(V) \longrightarrow K_V, \quad \beta_{U\cap V} : \Omega^{p+r}(U\cap V) \longrightarrow K_{U\cap V}$$

Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{p+r}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_B"] & \Omega^{p+r}(U) \oplus \Omega^{p+r}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_U \oplus \beta_V"] & \Omega^{p+r}(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{U\cap V}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_B \arrow[r] & K_U \oplus K_V \arrow[r] & K_{U\cap V} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como β_U^*, β_V^* y $\beta_{U\cap V}^*$ son isomorfismos por hipótesis inductiva, el lema de los Cinco puede ser aplicado a la sucesión exacta inducida por el diagrama anterior para obtener que β_B^* es un isomorfismo.

□

4.7 Sucesión de Gysin

La Sucesión de Gysin es un complejo exacto que relaciona los grupos de Cohomología de De Rham de los espacios base y techo de un fibrado diferenciable orientable con fibra esférica. Fue introducida por primera vez por Werner Gysin en 1942.

Sea $\eta = (E, \pi, B, \mathbb{S}^r)$ un fibrado como antes. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \oint \overset{i}{\hookrightarrow} \Omega^{p+r}(E) \xrightarrow{\oint} \Omega^p(B) \longrightarrow 0$$

Por el lema de la Serpiente obtenemos la siguiente sucesión exacta en cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^{p+r}(\ker \oint) \xrightarrow{i^*} H^{p+r}(E) \xrightarrow{\oint^*} H^p(B) \xrightarrow{\Delta_p} H^{p+r+1}(\ker \oint) \longrightarrow \cdots$$

Por otro lado tenemos el isomorfismo β^* que hace al siguente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^{p+r+1}(\ker \oint) \arrow[r, "(\beta^*)^{-1}"] \arrow[d, "i^*"'] & H^{p+r+1}(B) \arrow[dl, "\pi^*"] \\ H^{p+r+1}(E) & \end{tikzcd}$$

Definición 4.7.1. La aplicación lineal $D : H^p(B) \longrightarrow H^{p+r+1}(B)$ dada por

$$D = (\beta^*)^{-1} \circ \Delta_p \circ \epsilon \quad \text{donde} \quad \epsilon(\omega) = (-1)^{p+1}\omega, \ \omega \in H^p(B)$$

es llamado **operador de Gysin**.

Mediante este operador podemos combinar la sucesión y el diagrama anteriores para obtener la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H^p(B) \xrightarrow{D} H^{p+r+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+r+1}(E) \xrightarrow{\oint^*} H^{p+1}(B) \longrightarrow \cdots$$

conocida como **sucesión de Gysin**.

4.8 Cohomología de De Rham de $\mathbb{C}P^n$

Veremos ahora una aplicación de la Sucesión de Gysin para calcular la cohomología de los espacios proyectivos complejos. Nuestro resultado final.

Teorema 4.8.1.

$$H^k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \text{ y k es par} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Apliquemos la sucesión de Gysin al fibrado de Hopf $(\mathbb{S}^{2n+1}, \pi, \mathbb{C}P^n, \mathbb{S}^1)$ para obtener

$$\cdots \longrightarrow H^p(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{D} H^{p+2}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+2}(\mathbb{S}^{2n+1}) \xrightarrow{\oint^*} H^{p+1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \cdots$$

Probaremos primero que $H^p(\mathbb{C}P^n) = H^{p+2}(\mathbb{C}P^n)$ para $p < 2n-1$.

Para $p = 0$ tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{D} H^2(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\mathbb{S}^{2n+1}) = 0$$

Luego, por la proposición 4.1.5 $H^0(\mathbb{C}P^n) = H^2(\mathbb{C}P^n)$.

En adelante cualquier otro punto de la sucesión, para $p < 2n-1$, tiene la siguiente forma

$$0 = H^{p+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) \xrightarrow{\oint^*} H^p(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{D} H^{p+2}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{p+2}(\mathbb{S}^{2n+1}) = 0$$

de donde efectivamente $H^p(\mathbb{C}P^n) = H^{p+2}(\mathbb{C}P^n)$ para $p < 2n-1$.

Sabemos que la dimensión de $\mathbb{C}P^n$ es $2n$ y por lo tanto $H^{2n+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$. De aquí que los grupos de cohomología impares para $\mathbb{C}P^n$ son nulos. También con esto vemos que el final de la sucesión es

$$0 = H^{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\pi^*} H^{2n+1}(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mathbb{R} \xrightarrow{\oint^*} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{D} H^{2n+2}(\mathbb{C}P^n) = 0$$

es decir, $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}$. Lo cual implica que los grupos de cohomología de $\mathbb{C}P^n$ pares y menores que $2n$ son $\mathbb{R}$.

$\square$

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron los espacios proyectivos complejos como variedades diferenciables y como espacios base de un fibrado diferenciable llamado fibrado de Hopf, con la finalidad de obtener su cohomología de De Rham. Para definir este concepto fue necesario primero introducir todo el marco teórico necesario, abarcando el estudio del fibrado tangente y el fibrado de formas de una variedad diferenciable.

El cálculo de la cohomología de De Rham de una variedad generalmente es complicado, son pocos los casos donde la solución es trivial. Es por ello que se requieren múltiples resultados algebráicos para poder simplificar los problemas. Entre dichos resultados se encuentra la Sucesión de Gysin, que fue nuestro principal objeto de estudio. Analizamos los operadores que en ésta intervienen y vimos en detalle su construcción.

La particularidad de la Sucesión de Gysin, y de aquí el interés en estudiarla, es que ella permite relacionar las cohomologías de los espacios base y techo de fibrados diferenciables orientables con fibra esférica, de manera que conociendo la cohomología de alguno de estos espacios se puede obtener información acerca de la cohomología del otro.

Cuando lo aplicamos al caso del fibrado de Hopf observamos que únicamente conociendo la cohomología de las esferas unitarias, es sumamente sencillo obtener la de los espacios proyectivos complejos. Esta aplicación particular de la Sucesión de Gysin constituyó nuestro resultado final.

Bibliografía

[1] Dugundji, James. *Topology* Allyn and Bacon, Inc. 1966.

[2] Greub, Werner - Halperin, Stephen - Vanstone Ray. *Connections, Curvature, and Cohomology. Vol. I.* Academic Press. 1972.

[3] Cartan, Henri. *Formas Diferenciables.* Ediciones Omega, S.A. 1972.

[4] Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc. 1979

[5] Singer, I.M.- Thorpe, J. *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry.* Scott, Foresman and Company. 1967.

[6] Ollarves, Alejandro. *Sobre la Cohomología de De Rham del n-Toro.* Trabajo de Grado. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. 2006.