UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

La Transformada de Hilbert en $L^p(\mathbb{R})$

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Alejandra Patricia Aguilera Aguilera** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dra. Cristina Balderrama.

Caracas, Venezuela
Mayo 2012

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**La Transformada de Hilbert en** $L^p(\mathbb{R})$", presentado por la **Br. Alejandra Patricia Aguilera Aguilera**, titular de la Cédula de Identidad **19.379.268**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Cristina Balderrama
Tutor

Stefania Marcantognini
Jurado

Andrés Contreras
Jurado

Dedicatoria

A mis padres, Neyda y Luis, y a mis queridos hermanos Jacobo y Pablo, sin ustedes mi mundo no sería el mismo.

Agradecimiento

En primer lugar, quiero agradecer a mi excelente tutora *Cristina Balderrama*, quien me guió en la realización de este trabajo. Por su habilidad y paciencia para leerlo y corregirlo las veces que fueron necesarias y por enseñarme tanto.

A mi compañero de carrera y de vida *Edwin Pin Baque* quien siempre estuvo para animarme y decirme que todo saldría excelente aunque a mi me costaba creermelo.

A mi amiga incondicional *Jennifer Guevara Thomas* por su gran apoyo y por demostrarme que la verdadera amistad existe y se mantiene intacta con el pasar del tiempo.

Finalmente, a todas las excelentes personas que conocí en el transcurso de esta maravillosa carrera, llamada MATEMÁTICA, porque todos ustedes aportaron su granito de arena para que estos años fueran los más enriquecedores de mi vida...hasta ahora.

CONTENIDO

Introducción

En matemática y procesamiento de señales, la transformada de Hilbert se denota por H y es un operador lineal que lleva su nombre en honor al matemático alemán David Hilbert (1862-1943), inicialmente definida (entre 1904 y 1912) para funciones periódicas y en este caso se puede obtener como la conjugada armónica de una serie de Fourier. Posteriormente en 1924, el matemático inglés Godfrey H. Hardy estudió este operador para funciones definidas en la recta real, el cual es el caso que se estudiará en este trabajo, y dió algunos resultados en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, entre los cuales destaca la relación que existe entre la transformada de Fourier y la transformada de Hilbert. Esta relación permite demostrar que la transformada de Hilbert es un operador continuo, unitario, su inversa viene dada por $-H$ y que además es una isometría.

Hardy definió la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}$ por medio de la siguiente expresión:

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\,dt, \quad \text{para}\, x \in \mathbb{R}.$$

El símbolo v.p. denota el valor principal de Cauchy, cuyo efecto es, básicamente, asignar un valor a una integral impropia eliminando una sección infinitamente pequeña del intervalo de integración centrada en la singularidad $t = 0$.

En 1928, Marcel Riesz demostró que la transformada de Hilbert puede ser definida para funciones en $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, y que es un operador acotado en estos espacios. Usando esto es posible demostrar que H tiene inversa para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$ y está dada por $-H$ al igual que en el caso $p = 2$.

Volviendo al espacio $L^2(\mathbb{R})$, demostrar que H es isometría usando su relación con la transformada de Fourier es relativamente sencillo. En este trabajo mostraremos otra prueba detallada de ello que consiste en estudiar la acción de H sobre las funciones de Hermite, las cuales forman un sistema ortogonal completo de este espacio. Este resultado se basa en el artículo *The Hilbert transform and the Hermite functions* de Javier Duoandikoetxea (ver [**9**]). Para esta demostración será necesario calcular explícitamente la transformada de Hilbert de la función Gaussiana

$$\mathcal{G}(x) = e^{-x^2/2}.$$

Existen varias demostraciones de esto último basadas en la teoría de funciones analíticas y ecuaciones diferenciales (ver [**1**] y [**2**]), las cuales serán mostradas con detalle en el segundo capítulo de este trabajo.

CAPÍTULO 1

Nociones de análisis armónico

En este capítulo preliminar daremos algunos resultados en análisis armónico que serán necesarios para abordar los capítulos siguientes. Comenzaremos en la sección 1 definiendo la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ y nombrando algunas de sus propiedades más conocidas. En la sección 2 daremos una extensión de la transformada de Fourier al espacio $L^2(\mathbb{R})$. Durante el estudio de este objeto matématico surgirá la siguiente interrogante: Dada la transformada de Fourier, denotada por $\widehat{f}$, de una función integrable f, ¿cómo hacer para obtener la función f de regreso? Para darle respuesta a esta pregunta se utilizarán ciertos métodos de sumabilidad para integrales que serán explicados con detalle en la sección 3. En el desarrollo de esta sección aparecerá el kernel de Poisson, el cual es importante para la sección 4, en la que se definirá la transformada de Hilbert, con la cual trabajaremos en el resto del presente trabajo. Como referencias para el desarrollo de este capítulo consultamos principalmente los libros *Interpolation of operators and singular integrals* de Cora Sadosky [**11**], *Measure and integral* de Richard L. Wheeden y Antoni Zygmund [**10**], y *Fourier analysis* de Javier Duoandikoetxea [**8**], además de otros citados en la bibliografía.

Antes de abordar los tópicos mencionados, repasamos algunos aspectos de la notación que utilizaremos. Se asumirá parte del contenido visto en los cursos de Teoría de la medida y Análisis funcional, gran parte de este contenido se puede encontrar en *Introducción a la Teoría de la medida* de Ileana Iribarren (UCV) [**7**] y *Functional Analysis* de George Bachman y Lawrence Narici [**5**].

El espacio donde trabajaremos será, generalmente, $\mathbb{R}$.

Las expresiones "casi siempre" (c.s.) o "en casi todo punto" se refieren a propiedades que se satisfacen salvo en un conjunto de medida nula.

La función característica, o función indicadora, χ_E de un conjunto E está definida por

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

La función signo se denota por $\operatorname{sgn}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \text{-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Denotamos por $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, y en algunos casos simplemente por $\mathcal{L}^p$, con $1 \leq p < \infty$, al conjunto

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \textstyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

Si consideramos la siguiente relación de equivalencia: Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles, $f \sim g$ si, y solo si, $f = g$ casi siempre. Entonces, para $p > 0$ se define el espacio $L^p(\mathbb{R})$ como el conjuto de todas las clases de equivalencia inducidas por la relación $\sim$ en el conjunto $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, esto es: $L^p(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R})/\sim$. Para $f \in L^p$ tenemos la norma definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio completo con respecto a esa norma.

Si $p = \infty$ se define $L^\infty(\mathbb{R})$ como el conjunto de las clases de equivalencia de las funciones que son acotadas c.s. y

$$\|f\|_\infty = \inf\{M : m(\{|f| > M\}) = 0\}.$$

En el caso $p = 2$, tenemos que $L^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} \, dx,$$

$f, g \in L^2$, y $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle_2^{1/2}$.

Diremos que una función f es integrable si $f \in L^1(\mathbb{R})$. Una función que es integrable sobre todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ se dice localmente integrable, y denotamos el espacio de estas funciones por $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$. Si $f \in L^p$ entonces $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$.

Sea $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$. Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es punto de Lebesgue de f si

$$\frac{1}{r} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)| \, dt \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

cuando $r \to 0$. El conjunto de todos los puntos que satisfacen (1.1) se denomina conjunto de Lebesgue de f. Es usual dar la definición de los puntos de Lebesgue en términos de bolas, es decir, si

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|f(x-t)-f(x)|\,dt=0$$

entonces x es punto de Lebesgue de f. Notemos que la expresión anterior implica que si $f\in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}f(x-t)\,dt=f(x).$$

Este resultado es conocido como el Teorema de diferenciación de Lebesgue. Por lo tanto podemos concluir que el conjunto de Lebesgue de f lo conforman los puntos que satisfacen dicho teorema.

Dada una función F definida en $\mathbb{R}$, cuando escribimos $F(\cdot)$ colocamos el punto para hacer referencia a la variable de la función. Esto lo hacemos para evitar ambigüedades al momento de relizar algunos cálculos.

$C(\mathbb{R})$ denotarán el espacio de todas las funciones continuas.

$C_0(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto. $C_0(\mathbb{R})$ es denso en L^p para todo $1\le p<\infty$.

$C_\infty(\mathbb{R})=\{f\in C(\mathbb{R}):\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0\}$.

$C^\infty(\mathbb{R})$ denota el conjunto de las funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes.

La función de densidad Gaussiana estándar es $f(x)=e^{-x^2/2}$. Un resultado que usaremos frecuentemente es

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\sqrt{2\pi}, \tag{1.2}$$

por lo que daremos una prueba de esto. Sea

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx.$$

Luego tenemos que

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy.$$

Utilizando el cambio de variables a coordenadas polares nos queda

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2/2} r\, dr\, d\theta &= \int_0^\infty 2\pi e^{-r^2/2} r\, dr = \lim_{b\to\infty} \int_0^b 2\pi e^{-r^2/2} r\, dr = -2\pi \lim_{b\to\infty} e^{-r^2/2}\Big|_0^b \\ &= -2\pi \lim_{b\to\infty} (e^{-b^2/2} - 1) = 2\pi.\end{aligned}$$

De donde $I^2 = 2\pi$. Así podemos concluir que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$. Las integrales $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4}\, dx$, se pueden calcular a partir de (1.2) haciendo un cambio de variable adecuado.

1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definición 1.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. La tranformada de Fourier de f se define por

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i x t}\, dt, \tag{1.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

A continuación se da una lista de propiedades de la transformada de Fourier.

Proposición 1.2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y α, λ números reales*

(a) $\widehat{f}$ es lineal.
(b) Si $g(x) = \overline{f(-x)}$ entonces $\widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.
(c) Si $g(x) = \lambda^{-1} f(x/\lambda)$ entonces $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(\lambda t)$.
(d) Si $g(x) = f(x) e^{2\pi i \alpha x}$ entonces $\widehat{g}(t) = \widehat{f}(t - \alpha)$.
(e) Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $h = f * g$ entonces $\widehat{h}(t) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$.
(f) $\widehat{f}$ es diferenciable y si tf es integrable entonces $\left(\frac{d\widehat{f}}{dx}\right)(t) = (-2\pi i t f(t))\widehat{\ }(x)$.

donde $f * g$ denota el producto convolución de las funciones f y g (ver (1.14)).

Demostración. La prueba de (a), (b), (c) y (d) se hacen por sustitución directa de la fórmula (1.3). La prueba de (e) es una aplicación del Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\widehat{h}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)\, e^{-2\pi ixt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\, ds\right) e^{-2\pi ixt}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, e^{-2\pi ix(t-s)}\, dt\right) g(s)\, e^{-2\pi ixs}\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(x)g(s)\, e^{-2\pi ixs}\, ds = \widehat{f}(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\, e^{-2\pi ixs}\, ds \\ &= \widehat{f}(x)\widehat{g}(x).\end{aligned}$$

Para probar (f) usamos (d),

$$\frac{\widehat{f}(x+h)-\widehat{f}(x)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\, e^{-2\pi i(x+h)t} - f(t)\, e^{-2\pi ixt}}{h}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h}\right) f(t)\, e^{-2\pi ixt}\, dt.$$

Notemos que $\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h} \to -2\pi it$ cuando $h \to 0$. Ahora,

$$\left|\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h} f(t)\, e^{-2\pi ixt}\right| = |f(t)|\left|\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h}\right| \le C|f(t)||t|$$

donde $tf(t) \in L^1$, y por el Teorema de convergencia dominada se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\widehat{f}}{dx}\right)(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(x+h)-\widehat{f}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-2\pi iht}-1}{h}\right) f(t)\, e^{-2\pi ixt}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(-2\pi it)f(t)\, e^{-2\pi ixt}\, dt = (-2\pi itf(t))\widehat{\ }(x).\end{aligned}$$

■

Observación 1.3. Notemos que si $f \in L^1$, no necesariamente $\widehat{f} \in L^1$. Por ejemplo si $f(t) = \chi_{(a,b)}(t)$, entonces,

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{(a,b)}(t)e^{-2\pi ixt}\, dt = \int_a^b e^{-2\pi ixt}\, dt = \frac{e^{-2\pi iax}-e^{-2\pi ibx}}{2\pi ix}.$$

En este caso, $\widehat{f}$ no es integrable en $\mathbb{R}$. Lo que sí se cumple es lo siguente,

Teorema 1.4. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f}$ es continua y $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\widehat{f}(x_n) - \widehat{f}(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-2\pi i t x_n} - e^{-2\pi i t x}) \right| dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-2\pi i t x_n} - e^{-2\pi i t x}|\, dt \longrightarrow 0 \ si \ n \to \infty,
\end{aligned}$$

ya que la función $|f(t)||e^{-2\pi i t x_n} - e^{-2\pi i t x}|$ está acotada por $2|f(t)| \in L^1$ y se aplica el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Esto prueba la continuidad de $\widehat{f}$.

Por otra parte,

$$|\widehat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-2\pi i t x}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_1$$

y así $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. ■

Si denotamos por $\mathcal{F}$ el operador transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ dado por $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, el teorema anterior nos dice que $\mathcal{F}$ es un operador lineal acotado de L^1 en L^∞, con $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Teorema 1.5 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *entonces* $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$.

El teorema anterior da una condición necesaria, mas no suficiente, para que una función sea la transformada de Fourier de una función en L^1. Esta condición es que $\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 1.6 (Fórmula de multiplicación)**.** *Dadas* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*, se satisface que*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x)\, dx$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i x t}\, dt \right) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x t}\, dx \right) f(t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\widehat{g}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

■

Uno de los problemas interesantes de la teoría de transformadas de Fourier es el problema de inversión, es decir, cómo determinar la función f dada $\widehat{f}$. Si consideramos una extensión de la transformada de Fourier en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, es posible encontrar una solución para el problema de inversión de manera natural utilizando las propiedades de este espacio. En la sección siguiente abordaremos este punto. El problema en $L^1(\mathbb{R})$ tiene una mayor dificultad, por lo que lo explicaremos con detalle en la sección 3.

2. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ y el Teorema de Plancherel

La definición de la transformada de Fourier dada por la fórmula (1.3) no es directamente aplicable para toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, la transformada de Fourier tiene una definición natural en este espacio. Si, además de ser integrable, suponemos que la función f es cuadrado integrable entonces $\widehat{f}$ también será cuadrado integrable. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.7. *Si $f \in L^1 \cap L^2$ entonces $\widehat{f} \in L^2$ y $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Notemos que si $f \in L^1 \cap L^2 \subset L^1$ entonces $\widehat{f}$ está definida y se puede probar que $L^1 \cap L^2$ es un subespacio lineal denso de L^2. En efecto,

(1) Sean $f,\, g \in L^1 \cap L^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(\lambda f + g)(x)|^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda f(x) + g(x)|^2\, dx \\ &= |\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx + 2\int_{\mathbb{R}} Re(\lambda f + g) + \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, dx < \infty,\end{aligned}$$

ya que $f,\, g \in L^2$.

(2) Si $f \in L^2$ debemos encontrar una sucesión $\{f_k\} \subset L^1 \cap L^2$ tal que $\lim\limits_{k\to 0} \|f - f_k\|_2 = 0$. Basta tomar la sucesión $\{f_k\}$ correspondiente como:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \le k, \\ 0 & \text{si } |x| > k. \end{cases} \tag{1.4}$$

El Teorema 1.7 afirma que $\mathcal{F}_0 : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ dado por $\mathcal{F}_0 f = \widehat{f}$ es un operador lineal acotado definido en el subconjunto denso $L^1 \cap L^2$ de L^2, de hecho $\mathcal{F}_0$ es una isometría, esto es $\|\mathcal{F}_0 f\|_2 = \|f\|_2$ para toda función $f \in L^1 \cap L^2$.

Si $f \in L^2$ definamos el operador $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ por $\mathcal{F} f := \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 f_n$, donde $\{f_n\}$ es cualquier sucesión en $L^1 \cap L^2$ que converge a f en L^2.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L^2 entonces la sucesión $\{\mathcal{F} f_n\}$ también es de Cauchy en L^2, pues

$$\|\mathcal{F}_0 f_n - \mathcal{F}_0 f_m\|_2 = \|\mathcal{F}_0(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n, m \to \infty.$$

Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 f_n$ existe. Por lo tanto tiene sentido definir $\mathcal{F}$ como antes. Notemos que la definición de $\mathcal{F}$ da directamente que en $L^1 \cap L^2$ este operador coincide con $\mathcal{F}_0$. Usando las propiedades de $\mathcal{F}_0$ es fácil verificar que $\mathcal{F}$ cumple lo siguiente:

- $\mathcal{F}$ está bien definida. Si $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L^1 \cap L^2$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_2 = 0$$
entonces $\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_0 f_n - \mathcal{F}_0 g_n\|_2 = 0$.

  En efecto, usando que $\mathcal{F}_0$ es isometría se tiene
$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_0 f_n - \mathcal{F}_0 g_n\|_2 &= \|\mathcal{F}_0(f_n - g_n)\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \\ &\leq \|f_n - f\|_2 + \|f - g_n\|_2 \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

- $\mathcal{F}$ es lineal. Sean $f, g \in L^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Podemos elegir sucesiones $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L^1 \cap L^2$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ en L^2. Entonces la sucesión $\{f_n + \lambda g_n\}$ converge a $f + \lambda g$ en L^2. Luego,
$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f + \lambda g) &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0(f_n + \lambda g_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}_0 f_n + \lambda \mathcal{F}_0 g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 f_n + \lambda \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 g_n = \mathcal{F} f + \lambda \mathcal{F} g. \end{aligned}$$

- $\|\mathcal{F} f\|_2 = \|f\|_2$. Se sigue del hecho que $\mathcal{F}_0$ es isometría, pues
$$\|\mathcal{F} f\|_2 = \|\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_0 f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{F}_0 f_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2.$$

De todo lo presentado previamente podemos generalizar el resultado dado en el Teorema 1.7 como sigue:

Teorema 1.8. *$\mathcal{F}$ es una isometría en L^2, es decir, para $f \in L^2$ se tiene que $\widehat{f} \in L^2$ y $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ para toda $f \in L^2$.*

Así, podemos concluir que

Teorema 1.9. *Sea $\mathcal{F}_0 : L^1 \cap L^2 \longrightarrow L^2$ como antes. Existe un único operador $\mathcal{F}$ acotado de L^2 en L^2 que extiende a $\mathcal{F}_0$ y que llamaremos la* transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Para el operador $\mathcal{F}$ seguiremos usando la notación $\mathcal{F} f = \widehat{f}$ para cualquier $f \in L^2$. Más específicamente, el Teorema 1.7 nos dice que $\sup\{\|\mathcal{F}_0 f\| : f \in L^1 \cap L^2 \text{ y } \|f\| \leq 1\} = 1$.

Observación 1.10. Usando la notación fijada tenemos que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define la transformada de Fourier de f como el límite en L^2 de una sucesión $\{\widehat{h}_k\}$, donde $\{h_k\}$ es cualquier sucesión en $L^1 \cap L^2$ que converge a f en L^2. Conviene elegir la sucesión $\{h_k\}$ como en la expresión (1.4) y así

$$\widehat{h}_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t) e^{-2\pi ixt}\, dt = \int_{|t|\leq k} f(t) e^{-2\pi ixt}\, dt. \tag{1.5}$$

Las propiedades de la transformada de Fourier en L^1 enunciadas en la Proposición 1.2, así como la Fórmula de multiplicación, se extienden a la trasformada de Fourier en L^2 por continuidad.

En vías de resolver el problema de inversión de la transformada de Fourier en el espacio $L^2(\mathbb{R})$ recordemos que un operador lineal que es una isometría y cuya imagen es todo el espacio de llegada, es llamado un operador unitario. Los operadores unitarios en espacios de Hilbert son invertibles y su inversa viene dada por el operador adjunto. Así, el objetivo inmediato es probar lo siguiente,

Teorema 1.11. *$\mathcal{F}$ es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. En vista del Teorema 1.8 basta probar que $\mathcal{F}$ es sobreyectivo.
Sea $\mathcal{S}$ la imagen de L^2 por $\mathcal{F}$. Entonces

(i) $\mathcal{S}$ es subespacio de L^2, pues $\mathcal{F}$ es un operador lineal.

(ii) $\mathcal{S}$ es un subespacio cerrado de L^2. En efecto, sea $\{\widehat{f}_k\} \subset \mathcal{S}$ una sucesión tal que $\|\widehat{f} - g\|_2 \to 0$ cuando $k \to \infty$ para $g \in L^2$. Entonces existe una sucesión $\{f_k\} \subset L^2$ tal que $\mathcal{F} f_k = \widehat{f}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\{\widehat{f}_k\}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, m \geq N$ entonces $\|\widehat{f}_k - \widehat{f}_m\|_2 < \epsilon$. Luego

$$\|f_k - f_m\|_2 = \|\widehat{f}_k - \widehat{f}_m\|_2 < \epsilon,$$

lo que quiere decir que $\{f_k\}$ también es de Cauchy en L^2. Como L^2 es completo, entonces existe $f \in L^2$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0$. Ahora bien,

$$\lim_{k\to\infty} \|\widehat{f}_k - \widehat{f}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0.$$

De donde $g = \widehat{f}$.

Veamos que $\mathcal{S} = L^2$. Supongamos que $\mathcal{S}$ es un subconjunto propio de L^2 entonces podríamos encontrar (por el Teorema de descomposición ortogonal de un espacio de Hilbert) una función $g \in L^2$, $g \neq 0$ tal que $\langle f, g\rangle_2 = 0$ para toda $f \in \mathcal{S}$, es decir $\langle \widehat{h}, g\rangle_2 = 0$ para toda $h \in L^2$. Luego, usando propiedades de la transformada de Fourier obtenemos

$$0 = \langle \widehat{h}, g\rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\widehat{\overline{g}}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} h(t)\overline{\widehat{g}(-t)}\, dt. \tag{1.6}$$

En particular, tomando $h(t) = \widehat{g}(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces $0 = -\|\widehat{g}\|_2 = -\|g\|_2$, lo que contradice que $g \neq 0$ c.s. Así $\mathcal{S} = L^2$ y el teorema está probado. ∎

El siguiente teorema resume los resultados básicos de la transformada de Fourier en L^2 y plantea la solución al problema de inversión.

Teorema 1.12 (Plancherel)**.** *Si $f \in L^2$ y $\{f_k\} \subset L^1 \cap L^2$ converge a f en norma L^2, entonces $\widehat{f}_k$ converge en norma L^2 a $\widehat{f} \in L^2$.*
El operador lineal $\mathcal{F} : L^2 \longrightarrow L^2$, $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ es un operador unitario, y su inversa $\mathcal{F}^{-1}$ puede ser obtenida como

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = (\mathcal{F}\widehat{f})(-t) \tag{1.7}$$

para toda $f \in L^2$.

Demostración. La primera parte corresponde a la Observación 1.10. Ya probamos que $\mathcal{F}$ es unitario, por lo que basta ver que se satisface la igualdad (1.7). Mostraremos (1.7) para $\widehat{f} \in L^1 \cap L^2$, luego como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, el caso general ($\widehat{f} \in L^2$) se sigue por continuidad.

Para $\widehat{f} \in L^1 \cap L^2$, consideremos la siguiente función

$$\widetilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)e^{2\pi ixt}\, dx = (\mathcal{F}\widehat{f}\,)(-t). \tag{1.8}$$

Si $g \in L^1 \cap L^2$, usando el Teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned}\langle g, \widetilde{f}\rangle_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)e^{2\pi ixt}\, dx}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ixt}\, dt\right)\overline{\widehat{f}(x)}\, dx \\ &= \langle \mathcal{F}g, \widehat{f}\rangle_2,\end{aligned}$$

de donde $\langle g, \widetilde{f}\rangle_2 = \langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}f\rangle_2$. Como $\mathcal{F}$ es unitario, preserva el producto escalar, es decir, $\langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}f\rangle_2 = \langle g, f\rangle_2$, lo que implica que $\langle g, \widetilde{f}\rangle_2 = \langle g, f\rangle_2$, esto es, $\widetilde{f} = f$ c.s. Así por la igualdad (1.8) obtenemos $(\mathcal{F}\widehat{f}\,)(-t) = f(t)$ ó $(\mathcal{F}f)(-t) = (\mathcal{F}^{-1}f)(t)$ c.s. ∎

Observación 1.13. Del teorema anterior podemos dar una fórmula explícita para el problema de inversión como sigue:

Si $\widehat{f} \in L^1 \cap L^2$ entonces

$$f(t) = (\mathcal{F}\widehat{f})(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx, \quad \text{c.s.}$$

En general, si $\widehat{f} \in L^2$, f puede ser expresada como el límite en L^2 de la sucesión definida por

$$f_k(t) = \int_{|x| \leq k} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx, \quad \text{c.s.}$$

3. Sumabilidad de integrales de Fourier

En la sección 1 se introdujo la transformada de Fourier de funciones integrables definidas en $\mathbb{R}$ y, como mencionamos, el problema de inversión de determinar f, dada $\widehat{f}$, no es tan sencillo como el caso que estudiamos en la sección anterior $(L^2(\mathbb{R}))$, pues en general $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ y la integral de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx \tag{1.9}$$

no necesariamente existe.

El problema consiste en encontrar una manera de dar significado a la integral de Fourier y buscar condiciones para asegurar la convergencia de la integral a la función original. Para abordar esta dificultad se utilizan ciertos métodos de sumabilidad para integrales que definiremos a continuación.

Definición 1.14. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideremos la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$. Dada una función Φ tal que $F(\cdot)\Phi(\epsilon\, \cdot) \in L^1$ para todo $\epsilon > 0$ y $\lim_{\epsilon \to 0} \Phi(\epsilon x) = 1$, la Φ-media de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx$, está dada por,

$$M_{\Phi,\epsilon}(F) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\Phi(\epsilon x)\, dx, \quad \epsilon > 0. \tag{1.10}$$

Decimos que F es Φ-sumable a $\ell \in \mathbb{R}$ si $\lim_{\epsilon \to 0} M_{\Phi,\epsilon}(F) = \ell$.

Estudiaremos dos casos particulares de la Definición 1.14. Primero introducimos el método de sumabilidad de Abel, cuyo análogo para series de Fourier es bien conocido y se puede ver en [**10**].

Definición 1.15. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dada la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$, para cada $\epsilon > 0$, su media de Abel es

$$A_\epsilon(F) = A_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\epsilon|2\pi x|}\,dx.$$

Para $F \in L^1$, $A_\epsilon(F)$ existe para todo $\epsilon > 0$ y por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue $\lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon(F) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$. Un hecho interesante es que A_ϵ puede existir, incluso si $F \notin L^1$. Existe, por ejemplo, cuando F es acotada. Si $\lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon(F)$ existe y es igual a ℓ, decimos que F es Abel sumable a ℓ.

Otro método de sumabilidad es el de Gauss, tambien llamado método de Gauss-Weierstrass.

Definición 1.16. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dada la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$, su media de Gauss de orden $\epsilon > 0$ es

$$G_\epsilon(F) = G_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\epsilon|2\pi x|^2}\,dx.$$

F se dice Gauss sumable a ℓ si

$$\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(F) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\epsilon|2\pi x|^2}\,dx = \ell.$$

Observación 1.17. Notemos que en la Definición 1.15 la función Φ dada por la Definición 1.14 es $\Phi(\epsilon x) = e^{-\epsilon|2\pi x|}$ y en la Definición 1.16 tenemos que $\Phi(\sqrt{\epsilon} x) = e^{-\epsilon|2\pi x|^2}$.

El objetivo es, dada la transformada de Fourier $\widehat{f}$ y la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\,dx$, la cual no necesariamente es convergente, calcular sus medias de Abel y Gauss con el fin de ver si podemos asegurar sumabilidad para $\widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}$.

Para estudiar la sumabilidad de Abel y Gauss de la integral (1.9) usamos en primer lugar la Fórmula de multiplicación dada en el Teorema 1.6 de la sección 1, para así obtener las siguientes expresiones

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} e^{-2\pi\epsilon|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{2\pi i \cdot t} e^{-2\pi\epsilon|\cdot|})\widehat{\ }(x)\,dx \tag{1.11}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} e^{-4\pi^2 \epsilon |x|^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{2\pi i \cdot t} e^{-4\pi^2 \epsilon |\cdot|^2})\widehat{\ }(x)\, dx. \tag{1.12}$$

En este punto es necesario calcular explícitamente las transformadas de Fourier de $e^{-2\pi\epsilon|t|}$ y $e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2}$. Haremos el cálculo para $\epsilon = 1$ y utilizando ciertas propiedades de la transformada de Fourier obtendremos las fórmulas para $\epsilon > 0$, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i x t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} \cos(2\pi x t)\, dt - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} \operatorname{sen}(2\pi x t)\, dt.$$

El segundo término de la derecha es cero pues es la integral de una función impar en un intervalo simétrico, luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i x t}\, dt = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} \cos(2\pi x t)\, dt.$$

Integrando por partes dos veces, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} \cos(2\pi x t)\, dt = \frac{1}{2\pi} - x^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} \cos(2\pi x t)\, dt,$$

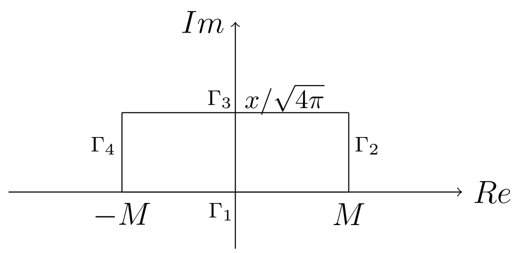
de donde $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-2\pi t} \cos(2\pi x t)\, dt = \frac{1}{2\pi(1+x^2)}$. Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|t|} e^{-2\pi i x t}\, dt = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Calculemos ahora la transformada de Fourier de $e^{-4\pi^2|t|^2}$. Reescribiendo la integral y haciendo el cambio de variables $y = \sqrt{4\pi}t$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2|t|^2} e^{-2\pi i x t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi((\sqrt{4\pi}t)^2 + 2ixt)}\, dt = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y + ix/\sqrt{4\pi})^2}\, dy.$$

Para calcular el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\, dy$, consideremos la integral compleja $\int_\Gamma e^{-\pi z^2}\, dz$, donde $z = y + ix/\sqrt{4\pi}$ y para M un número real positivo, Γ es el contorno cerrado simple orientado en sentido antihorario dado por el rectángulo



Como $e^{-\pi z^2}$ es una función entera, por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_\Gamma e^{-\pi z^2}\,dz = 0.$$

Por otra parte, parametricemos cada segmento del rectángulo dado por separado. Entonces

Para Γ_1: $z(y) = y$, $-M \le y \le M$.

$$\int_{\Gamma_1} e^{-\pi z^2}\,dz = \int_{-M}^{M} e^{-\pi y^2}\,dy$$

Para Γ_2: $z(y) = M + iy$, $0 \le y \le x/\sqrt{4\pi}$.

$$\int_{\Gamma_2} e^{-\pi z^2}\,dz = i\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M+iy)^2}\,dy.$$

Para Γ_3: $z(y) = y + ix/\sqrt{4\pi}$, $-M \le x \le M$.

$$\int_{\Gamma_3} e^{-\pi z^2}\,dz = -\int_{-M}^{M} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\,dy$$

Para Γ_4: $z(y) = -M + iy$, $0 \le y \le x/\sqrt{4\pi}$.

$$\int_{\Gamma_4} e^{-\pi z^2}\,dz = -i\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(-M+iy)^2}\,dy.$$

Luego, la integral $\int_\Gamma e^{-\pi z^2}\,dz$ es igual a la suma de las cuatro integrales anteriores y a su vez es igual a cero, es decir,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-M}^{M} e^{-\pi y^2}\,dy + i\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M+iy)^2}\,dy - \int_{-M}^{M} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\,dy - i\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(-M+iy)^2}\,dy\\
&= \int_{-M}^{M} e^{-\pi y^2}\,dy - \int_{-M}^{M} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\,dy + i\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)}(e^{-2\pi iMy} - e^{2\pi iMy})\,dy\\
&= \int_{-M}^{M} e^{-\pi y^2}\,dy - \int_{-M}^{M} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\,dy + i(-2\pi)\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)}\operatorname{sen}(2\pi My)\,dy.
\end{aligned}$$

Haciendo tender M a infinito tenemos

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\,dy - 2\pi i\lim_{M\to\infty}\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)}\operatorname{sen}(2\pi My)\,dy.$$

Para resolver el límite $\lim_{M\to\infty} \int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)} \operatorname{sen}(2\pi My)\, dy$, notemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)} \operatorname{sen}(2\pi My)\, dy\right| &\leq \int_0^{x/\sqrt{4\pi}} |e^{-\pi(M^2-y^2)} \operatorname{sen}(2\pi My)|\, dy \\ &\leq \int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)}\, dy.\end{aligned}$$

Para cada $y \in \mathbb{R}$, la familia de funciones $g_M(y) = e^{-\pi(M^2-y^2)}$ satisface que

$$g_M(y) \geq g_{M+1}(y) \quad \text{y} \quad \lim_{M\to\infty} g_M(y) = \lim_{M\to\infty} e^{-\pi(M^2-y^2)} = 0.$$

Por el Teorema de Convergencia monótona

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)}\, dy \;=\; \int_0^{x/\sqrt{4\pi}} \lim_{M\to\infty} e^{-\pi(M^2-y^2)}\, dy = 0,$$

y por lo tanto $\int_0^{x/\sqrt{4\pi}} e^{-\pi(M^2-y^2)} \operatorname{sen}(2\pi My)\, dy = 0.$

Finalmente

$$0 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\, dy,$$

y así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy = 1.$$

De lo expuesto previamente obtenemos que la transformada de Fourier de la función $e^{-4\pi^2|t|^2}$ es igual a $e^{-x^2/4}/\sqrt{4\pi}$.

De aquí en adelante, denotaremos por P y W las transformadas de Fourier de $e^{-2\pi|t|}$ y $e^{-4\pi^2|t|^2}$ respectivamente, es decir,

$$P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad y \qquad W(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{4\pi}}. \tag{1.13}$$

Las funciones P y W son positivas e integrables. P es llamado el *kernel de Poisson* y W el *kernel de Weierstrass*. Además verifican lo siguiente:

Proposición 1.18. *Para todo $\epsilon > 0$,*

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, dx = 1 \qquad y \qquad (b) \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\, dx = 1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{\arctan(x)}{\pi}\right|_{-a}^{a} \\ &= \lim_{a\to\infty}\left(\frac{\arctan(a)-\arctan(-a)}{\pi}\right) = 1\end{aligned}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} = 1.$$

■

Es posible reescribir las integrales (1.11) y (1.12) como la convolución de la funcion f con las transformadas de Fourier de las funciones $e^{-2\pi\epsilon|t|}$ y $e^{-4\pi^2\epsilon|t|^2}$, las cuales tienen una estrecha relación con los núcleos de Poisson y Weierstrass. Para esto es necesario mencionar algunos resultados de la teoría de aproximaciones de la identidad.

Recordemos que dadas dos funciones medibles f y g en $\mathbb{R}$, su convolución $f*g$ está bien definida si, para todo x, $f(x-t)g(t)$ es una función integrable en t, y escribimos:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt. \tag{1.14}$$

El operador convolución tiene gran significado en análisis. Una de las razones es que dadas dos funciones f y g, la convolución $f*g$ "mejora", en el sentido que el producto hereda las propiedades "buenas" de cada factor. Por ejemplo, si g es diferenciable (de cierto orden), entonces la convolución $f*g$ también será diferenciable (del mismo orden que g). Recordemos también algunas propiedades de este operador.

Proposición 1.19. *Sean f, g funciones medibles, α, $\beta \in \mathbb{R}$.*

(a) $f*g = g*f$

(b) $f*(g*h) = (f*g)*h$

(c) $(\alpha f+\beta g)*h = \alpha(f*h)+\beta(g*h)$

(d) $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_1$.

Ahora bien, una convolución $f*\phi$, con f medible y $\phi\in L^1$ fija, define una transformación $f \xrightarrow{T} f*\phi$ llamada *operador de convolución con kernel* ϕ. Dado ϕ y $\epsilon>0$, sea

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \tag{1.15}$$

Una familia $\{\phi_\epsilon : \epsilon > 0\}$ para la cual $f * \phi_\epsilon$ converge a f, en algún sentido, es llamada una *aproximación de la identidad*. El siguiente teorema da condiciones para que la convergencia sea válida.

Teorema 1.20. *Sea $\phi \in L^1$ tal que $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ y $\phi_\epsilon = \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon)$. Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces $\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$.*

El resultado anterior también se puede obtener en el sentido de convergencia puntual bajo condiciones adicionales. Consideremos la función $\psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\phi(t)|$. Notemos que ψ es una función par, decreciente y satisface que (ver [**11**])

(i) $\lim_{|x| \to 0} |x|\psi(x) = 0$ y $\lim_{|x| \to \infty} |x|\psi(x) = 0$.

(ii) Para todo $0 < \eta < \infty$ y $1 \leq p \leq \infty$, $\|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_{p'} \to 0$, con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ cuando $\epsilon \to 0$, donde χ_η denota la función característica del conjunto $\{x : |x| > \eta\}$ y $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\psi(x/\epsilon)$.

Teorema 1.21. *Sea $\phi \in L^1$ con $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ y sea $\psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\phi(y)|$, ϕ_ϵ como la ecuación (1.15). Si $\psi \in L^1$, entonces, para $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = f(x),$$

en todo punto de Lebesgue de f.

Observación 1.22. Bajo las hipótesis más generales ϕ, $\psi \in L^1$ y $\int_{\mathbb{R}} \phi = k$ con $k \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dt$$

en todo punto de Lebesgue de f.

Para la prueba basta considerar la función $\varphi = \phi/k$. Tenemos que $\varphi \in L^1$ y

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(t)}{k}\, dt = \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{t}{k}\right) dt = 1.$$

Además para $\epsilon > 0$ tenemos

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon k}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{\phi_\epsilon(x)}{k}.$$

Ahora aplicamos el Teorema 1.21 a la función φ y se obtiene el resultado.

Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi = 0$ el resultado también es cierto y está dado en el siguiente teorema.

Teorema 1.23. *Sea $\phi \in L^1$ con $\int_{\mathbb{R}} \phi = 0$ y sea $\psi \in L^1$ como antes, entonces, para $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ se tiene que*

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = 0$$

en todo punto de Lebesgue de f.

La demostración de este teorema requiere de otras técnicas que no son abordadas en este trabajo. Remitimos a [**11**].

Dados los aspectos anteriores podemos continuar con el problema planteado al inicio de la sección. Consideremos el método de sumabilidad dado por la media $M_{\Phi,\epsilon}(F)$ en la Definición 1.14. Sea Φ una función integrable tal que $\phi = \widehat{\Phi}$. Por la parte (c) del Teorema 1.2 de la sección 1,

$$(\Phi(\epsilon\,\cdot))\widehat{\ }(x) \;=\; \epsilon^{-1}\phi(x/\epsilon) = \phi_\epsilon(x) \quad \text{para} \quad \epsilon > 0. \tag{1.16}$$

Si denotamos por $\Phi^P(t) = e^{-2\pi|t|}$ entonces $\phi^P_\epsilon(x) = P_\epsilon(x)$. Análogamente si $\Phi^W(t) = e^{-4\pi^2|t|^2}$, tenemos que $\phi^W_{\sqrt{\epsilon}}(x) = W_\epsilon(x)$.

En los siguientes gráficos podemos ver el comportamiento de las funciones P_ϵ y W_ϵ

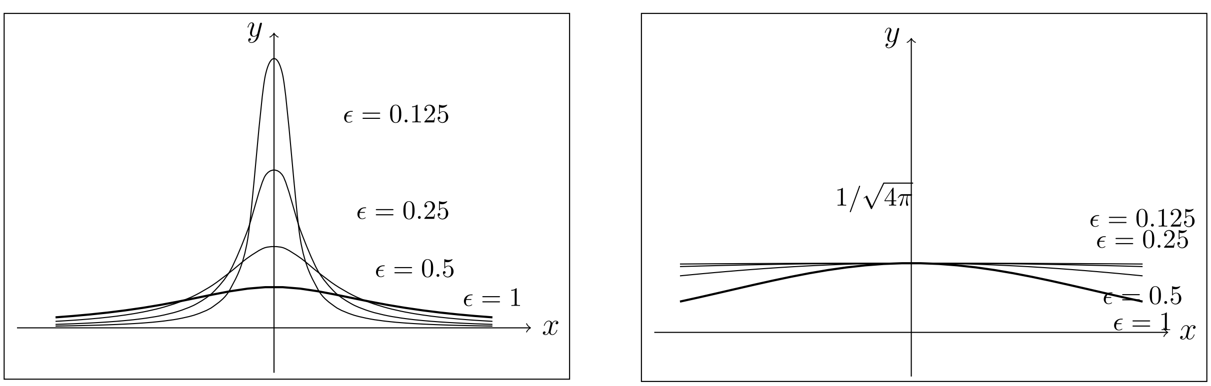


Figura 1.1. *Gráficos de las funciones $P_\epsilon(x) = \dfrac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + x^2)}$ y $W_\epsilon(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4\epsilon}$.*

Utilizando el razonamiento previo, las igualdades (1.11), (1.12) y la parte (d) del Teorema 1.2 de la sección 1, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.24. *Si $f, \Phi \in L^1$ y $\phi = \widehat{\Phi}$ entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} \Phi(\epsilon x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{2\pi i \cdot t} \Phi(\epsilon \cdot))\widehat{\ }(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_\epsilon(x-t)\, dx$$

para todo $\epsilon > 0$. En particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} \Phi^P(\epsilon x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P_\epsilon(x-t)\, dx = (f * P_\epsilon)(t) \tag{1.17}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} \Phi^W(\sqrt{\epsilon} x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W_\epsilon(x-t)\, dx = (f * W_\epsilon)(t). \tag{1.18}$$

La expresión (1.17) es conocida como la *integral de Poisson* de f y la correspondiente en (1.18) es la *integral de Weierstrass* de f.

De los Teoremas 1.20 y 1.24 se obtiene una solución para el problema de inversión:

Teorema 1.25. *Sea $\Phi \in L^1$ tal que $\phi = \widehat{\Phi} \in L^1$ y $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Entonces la Φ-media de la integral de Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx$ converge a f en L^1. En particular, las medias de Abel y Gauss de la integral de Fourier, es decir, las integrales de Poisson y Weierstrass de f, convergen a f en L^1.*

Corolario 1.26 (Unicidad)**.** *Dadas $f_1, f_2 \in L^1$ tal que $\widehat{f_1}(x) = \widehat{f_2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, entonces $f_1(t) = f_2(t)$ c.s. para $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Por el Teorema 1.25, $\widehat{f}(x) = 0$ para todo x implica que $f(t) = 0$ c.s. Aplicando esto a la función $f = f_1 - f_2$ se obtiene el resultado. ■

El problema de inversión de Fourier también admite una solución en el sentido de convergencia puntual que complementa la solución dada en el Teorema 1.25.

Teorema 1.27. *Sea $\Phi \in L^1$ tal que $\phi = \widehat{\Phi} \in L^1$ con $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$ y sea $\psi(x) = \sup_{|y| \geq |x|} |\phi(y)|$. Entonces la Φ-media de la integral de Fourier $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx$ converge a f c.s.*

En particular, las integrales de Poisson y Weierstrass de la función integrable f, $f * P_\epsilon$ y $f * W_\epsilon$ convergen a f cuando $\epsilon \to 0$ para casi todo punto $t \in \mathbb{R}$

Corolario 1.28. *Si $f \in L^1$ y $\widehat{f} \in L^1$, entonces*

$$f(t) = \int_{\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t}\, dx$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

La conclusión del Corolario 1.28 se obtiene aplicando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x) e^{2\pi i x t} e^{-4\pi^2 \epsilon |x|^2}\, dx$.

4. La transformada de Hilbert

En esta sección definimos la transformada de Hilbert de una función definida en $\mathbb{R}$, pero antes damos la noción de valor principal de una integral.

Sea f una función medible en $\mathbb{R}$ y absolutamente integrable sobre cada conjunto $\{|x-t| > \epsilon > 0,\ t \in \mathbb{R}\}$ para x fijo. Decimos que f es integrable sobre $\mathbb{R}$ en el sentido valor principal si

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-t|>\epsilon} f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{t+\epsilon}^{\infty} f(x)\, dx \right).$$

existe y es finito.

Damos una definición similar para el caso cuando f está definida en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y $t \in (a, b)$, esto es,

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{t-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{t+\epsilon}^{b} f(x)\, dx \right).$$

Ejemplo 1.29. Para ilustrar la diferencia entre el valor principal de una integral y una integral impropia, consideremos la función $f(x) = 1/x$ en el intervalo $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Entonces, la integral impropia de f es

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Como $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx$ y $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ son integrales impropias que no convergen se tiene que la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$ es divergente. Si calculamos ahora el valor principal de f en $t = 0$ tenemos

$$\text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \right) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(-\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx \right) = 0.$$

Definición 1.30. La transformada de Hilbert de una función f definida en $\mathbb{R}$ está dada por

$$Hf(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{f(t)}{x-t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\frac{f(x-t)}{t}\,dt.$$

Si definimos la transformada de Hilbert truncada por $H_\epsilon f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{|t|>\epsilon}\frac{f(x-t)}{t}\,dt$ entonces $Hf(x) = \lim_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x)$.

Para estudiar la existencia de Hf para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R})$ recurrimos a la teoría de funciones analíticas

Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ y consideremos la integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{1.19}$$

donde $z = x + i$ es un número complejo cuya parte imaginaria es igual a 1.

Si descomponemos $1/i(t-z)$ en su parte real e imaginaria podemos escribir

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{1-i(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)(1+i(x-t))}{(x-t)^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\pi((x-t)^2+1)}\,dt + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x-t}{\pi((x-t)^2+1)}\,dt \\ &= \frac{1}{2}(f*P)(x) + \frac{i}{2}(f*Q)(x) \end{aligned}$$

donde $P(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^2+1}$ es el kernel de Poisson (como en la sección anterior), y

$$Q(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+1}$$

es el *kernel de Poisson conjugado* en $\mathbb{R}^2_+ = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$.

A partir de P y Q definimos para $y > 0$ las funciones

$$P_y(x) = \frac{1}{y}P(x/y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad Q_y(x) = \frac{1}{y}Q(x/y) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Si estudiamos la integral análoga a (1.19) pero ahora con $z = x + iy$ donde $y > 0$ obtenemos

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2}(f*P_y)(x) + \frac{i}{2}(f*Q_y)(x).$$

Para cada $N > 0$, la función

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

es analítica en $\mathbb{R}^2_+$ y, para z perteneciente al semiplano superior, tiende uniformemente, cuando $N \to \infty$, a

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt.$$

Por lo tanto F también es una función analítica en $\mathbb{R}^2_+$. Así, las funciones

$$u(x,y) = f * P_y(x) \quad \text{y} \quad v(x,y) = f * Q_y(x)$$

son armónicas conjugadas; $u(x,y)$ y $v(x,y)$ se conocen como la integral de Poisson de f y la integral conjugada de Poisson de f respectivamente. Ya estudiamos en la sección anterior la integral $u(x,y)$ utilizando el hecho que $\{P_y\}$ es una aproximación de la identidad. Para estudiar $v(x,y)$ no nos podemos valer del mismo razonamiento, ya que $\{Q_y\}$ no es una aproximación de la identidad (no son funciones integrables en $\mathbb{R}$). En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |Q_y(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{x^2+y^2}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\, dx = 2\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\, dx \\
&= 2\lim_{b\to\infty} \left.\frac{\ln|x^2+y^2|}{\pi}\right|_0^b = 2\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln|b^2+y^2| - \ln|y^2|}{\pi}\right) = \infty.
\end{aligned}$$

Podemos mencionar una propiedad que tienen en común las integrales u y v. Para ello introducimos el concepto de límite no tangencial.

Definición 1.31. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, el cono $\Gamma_\alpha(x_0)$ en $\mathbb{R}^2_+$ de vértice $(x_0, 0)$ y abertura α es la región definida por

$$\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : |x - x_0| < \alpha y\}. \tag{1.20}$$

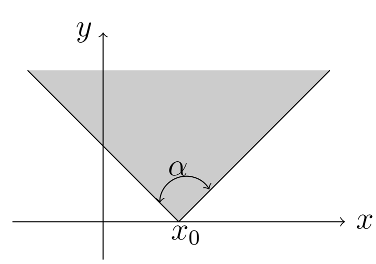


Figura 1.2. *Gráfico de la región dada por* $\Gamma_\alpha(x_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : |x - x_0| < \alpha y\}$.

Definición 1.32. Una función $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene límite no tangencial ℓ en $x_0 \in \mathbb{R}$ si, para cada $\alpha > 0$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} u(x,y) = \ell$$

dentro del cono $\Gamma_\alpha(x_0)$.

Proposición 1.33. *Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, entonces su integral de Poisson*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) P_y(x-t)\, dt = u(x,y)$$

tiene límite no tangencial en casi todo $x \in \mathbb{R}$ y es igual a f.

Demostración. Consideremos un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}$ y, para $\alpha > 0$, $(x,y) \in \Gamma_\alpha(x_0)$. Entonces

$$u(x,y) - f(x_0) \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(x_0)) P_y(x-t)\, dt.$$

Para cualquier x tal que $|x - x_0| < \alpha y$ se tiene

$$|x_0| < \alpha t + |x|,$$

si elevamos ambos lados al cuadrado tenemos

$$x_0^2 < \alpha^2 y^2 + x^2 + 2\alpha t|x|.$$

Ahora, $0 \le (\alpha y - x)^2 = \alpha^2 y^2 - 2\alpha t|x| + x^2$, de donde $2\alpha t|x| \le \alpha^2 y^2 + x^2$. Luego

$$x_0^2 + y^2 \le (1 + 2\alpha^2) y^2 + 2x^2.$$

Así,

$$x_0^2 + y^2 \le \max(1 + 2\alpha^2, 2)(x^2 + y^2).$$

Luego tenemos

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} \le C_\alpha \frac{1}{\pi}\frac{y}{x_0^2 + y^2} = C_\alpha P_y(x_0)$$

donde $C_\alpha = \max(1 + 2\alpha^2, 2)$. Luego si $(x,y) \in \Gamma_\alpha(x_0)$, entonces

$$|u(x,y) - f(x_0)| \;\; \le \;\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x_0)| P_y(x-t)\, dt \le C_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x_0)| P_y(x_0 - t)\, dt.$$

Por el Teorema 1.21 la última integral tiende a cero cuando $y \to 0$ casi siempre. Así, $u(x,y) \to f$ c.s. cuando $(x,y) \to (x_0, 0)$ dentro del cono $\Gamma_\alpha(x_0)$. ∎

Antes de mostrar un resultado análogo para la integral conjugada de Poisson $v(x,y)$, enunciamos un teorema que es importante para la demostración del mismo.

Teorema 1.34. *Sea $u(x,y)$ una función armónica en $\mathbb{R}^2_+$ tal que existen $C > 0$ y p, $1 < p \leq \infty$, tales que $\|u(\cdot,y)\|_p \leq C$ para todo $y > 0$, entonces $u(x,y)$ es la integral de Poisson de una función $f \in L^p(\mathbb{R})$.*

Una demostración de este teorema se puede ver en [**11**].

Teorema 1.35. *Para $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, la integral de Poisson conjugada de f*

$$v(x,y) = (f * Q_y)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}\,dt$$

tiende a un límite finito cuando $z \to x$ no tangencialmente.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos $f \leq 0$. Si no es así, descomponemos la función en sus partes positiva y negativa, es decir, $f = f^+ - f^-$, y aplicamos el siguiente razonamiento a las funciones $-f^+$ y $-f^-$. Sea $z = u + iv$, donde u y v son la integral de Poisson y la integral conjugada de Poisson de f respectivamente, y consideremos la función $G(z) = e^{u+iv}$. La función G es entera por lo tanto es una función armónica en $\mathbb{R}^2_+$. Como $f \leq 0$, su integral de Poisson $u(\cdot,y)$ también es negativa por lo que se tiene

$$|G(z)| = |e^{u+iv}| = |e^u| \leq 1$$

Por el Teorema 1.34, G es la integral de Poisson de una función en L^p y por la Proposición 1.33 tiene límite no tangencial casi siempre. Este límte no puede ser cero en un conjunto de medida positiva porque siendo así, u tendería no tangencialmente a $-\infty$ en un conjunto de medida positiva, lo cual es imposible ya que u es la integral de Poisson de una función en L^p. Ahora, como los límites no tangenciales de G y u existen, entonces el límite no tangencial de v existe y es finito casi siempre. ■

El siguiente teorema garantiza la existencia de la transformada de Hilbert para una función $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.36. *Para $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, la transformada de Hilbert Hf existe y es finita c.s. Más aún, es igual al límite de la integral conjugada de Poisson de f en todo punto* *de Lebesgue de f. Es decir,*

$$\lim_{y\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\frac{t}{t^2+y^2}\,dt - \int_{|t|>y}\frac{f(x-t)}{t}\,dt\right) = 0 \tag{1.21}$$

si x es un punto de Lebesgue de f.

Demostración. Para $y > 0$, la diferencia de las dos integrales en (1.21) se puede reescribir como sigue,

$$\begin{aligned} & \int_{|t|>y} f(x-t)\left(\frac{t}{t^2+y^2}-\frac{1}{t}\right) dt + \int_{|t|\le y} f(x-t)\frac{t}{t^2+y^2}\,dt \\ = & \int_{|t/y|>1} f(x-t)\frac{1}{y}\left(\frac{t/y}{(t/y)^2+1}-\frac{1}{t/y}\right) dt + \int_{|t/y|\le 1} f(x-t)\frac{1}{y}\left(\frac{t/y}{(t/y)^2+1}\right) dt \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\Phi_y(t)\,dt \end{aligned}$$

donde, $\Phi_y(t) = y^{-1}\Phi(t/y)$

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t^2+1}-\dfrac{1}{t} & \text{si } |t|>1, \\[2ex] \dfrac{t}{t^2+1} & \text{si } |t|\le 1. \end{cases}$$

Notemos que si $|t|>1$ la función $\dfrac{|t|}{t^2+1}-\dfrac{1}{|t|} = \dfrac{1}{|t|(t^2+1)}$ es decreciente y por lo tanto $\sup\limits_{|t|\ge|x|}|\Phi(t)| = \dfrac{1}{|x|(x^2+1)}$ si $|x|>1$. Por el contrario, si $|t|\le 1$ entonces

$$|\Phi(t)| = \frac{|t|}{t^2+1} \le \frac{|1|}{1^2+1} = \frac{1}{2},$$

esto es, $\sup\limits_{|t|\ge|x|}|\Phi(t)| = \dfrac{1}{2}$ si $|x|\le 1$.

En resumen,

$$\Psi(x) = \sup_{|t|\ge|x|}|\Phi(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|(1+x^2)} & \text{si } |x|>1, \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si } |x|\le 1. \end{cases}$$

Obsérvese que Φ es impar, por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\,dt = 0$ y $\Phi \in L^1$. Veamos ahora que $\Psi \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\,dx &= \int_{|x|>1} \Psi(x)\,dx + \int_{|x|\leq 1} \Psi(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{-x(x^2+1)} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx \\
&= 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx
\end{aligned}$$

Calculemos aparte la primera integral del lado derecho de la igualdad.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left(\int_{1}^{b} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{b} \frac{x}{x^2+1}\,dx \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\ln(b) - \frac{\ln(b^2+1) + \ln(2)}{2} \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\ln\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\right) + \frac{\ln(2)}{2} \right) \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \ln(1) = \frac{\ln(2)}{2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\,dx = 2\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \ln(2) + 1 < \infty.$$

Por el Teorema 1.23, $\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\Phi_y(t)\,dt = 0$ y así la prueba está completa. ■

Como se puede ver, en los Teoremas 1.35 y 1.36 se excluye el caso $p = \infty$. Si elegimos por ejemplo f la función idénticamente igual a 1, por cálculo directo se verifica que su transformada de Hilbert es el valor principal de $1/x$ en $\mathbb{R}$, que con un cálculo análogo al del Ejemplo 1.29 se puede ver que existe y es igual a cero, sin embargo su integral conjugada de Poisson es

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} Q_y(x)\,dx, \tag{1.22}$$

y como ya vimos Q_y no es una función integrable.

A continuación enunciamos algunas de las propiedades básicas de la transformada de Hilbert que serán claves para resultados que mostraremos más adelante.

Proposición 1.37. *Sean f y $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces*

(a) $H(\alpha f + g)(x) = \alpha(Hf)(x) + (Hg)(x)$.

(b) Si f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces su transformada de Hilbert es una función par.

(c) $H(f * g)(x) = (Hf * g)(x) = (f * Hg)(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

(d) Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$ y consideremos, para $\epsilon > 0$ fijo, la función $g(x,t) = \dfrac{f(x-t)}{t}\chi_{\{|t|>\epsilon\}}(t)$. Si

(i) f es derivable, en cuyo caso $\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \frac{df}{dx}(x-t)\chi_{\{|t|>\epsilon\}}(t)$ existe.

(ii) $\left|\frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\right| \leq h(t)$, para alguna función $h \in L^1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $\epsilon > 0$.

(iii) Las integrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\epsilon} g(x,t)\,dt$ y $\displaystyle\int_{\epsilon}^{\infty} g(x,t)\,dt$ convergen uniformemente para todo $\epsilon > 0$.

entonces

$$\frac{d}{dx} Hf(x) = H\left(\frac{df}{dx}\right)(x).$$

Demostración. Para probar (a) usamos la definición de la transformada de Hilbert y la linealidad de la integral.

La prueba de (b) la haremos utilizando la transformada de Hilbert truncada, es decir, dada f una función impar veamos que $H_\epsilon f(x) = H_\epsilon f(-x)$, para $\epsilon > 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}
H_\epsilon f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{\infty}^{\epsilon} \frac{f(x+t)}{t}\,dt + \int_{-\epsilon}^{-\infty} \frac{f(x+t)}{t}\,dt\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x+t)}{t}\,dt + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x+t)}{t}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{-f(x+t)}{t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{f(-x-t)}{t}\,dt \\
&= H_\epsilon f(-x).
\end{aligned}$$

Así $Hf(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(x) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} H_\epsilon f(-x) = Hf(-x)$. Usando las mismas técnicas se prueba que si f es una función par entonces su transformada de Hilbert es impar.

La propiedad (c) se demuestra usando el Teorema de Fubini. En efecto,

$$\begin{aligned}
H(f*g)(x) &= \frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(f*g)(t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(s)g(t-s)\,ds\right)dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left(\frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t-s)}{x-t}\,dt\right)ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left(\frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{x-s-t}\,dt\right)ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(s)Hg(x-s)\,ds\\
&= (f*Hg)(x).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
H(f*g) &= \frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(f*g)(t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)\,ds\right)dt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-s)}{x-t}\,dt\right)g(s)\,ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\,\text{v.p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-s-t}\,dt\right)g(s)\,ds\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}Hf(x-s)g(s)\,ds\\
&= (Hf*g)(x).
\end{aligned}$$

De las dos igualdades anteriores se deduce que $(Hf*g)(x) = (f*Hg)(x)$.

La parte (d) de la proposición se demuestra como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}Hf(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{Hf(x+h)-Hf(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\frac{1}{t}\frac{f(x-t+h)-f(x-t)}{h}\,dt\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\frac{1}{t}\frac{f(x-t+h)-f(x-t)}{h}\,dt\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}\,dt.
\end{aligned}$$

Por el Teorema del valor medio de Lagrange existe ξ entre x y $x+h$ tal que

$$\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h} = \frac{\partial g}{\partial x}(\xi,t).$$

Por la condición (ii)

$$\left|\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}(\xi,t)\right| \leq h(t), \quad h \in L^1.$$

Luego por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}Hf(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}\,dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\frac{1}{t}\frac{df}{dx}(x-t)\,dt = H\left(\frac{df}{dx}\right)(x). \end{aligned}$$

Así concluye la demostración. ■

A continuación damos un resultado importante para el caso $p=2$.

Teorema 1.38. *Si* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$(Hf)\widehat{\ }(x) = (-i \text{ sgn } x)\widehat{f}(x) \quad c.s. \tag{1.23}$$

donde $\text{sgn}(x)$ *denota el signo de* x. *En particular,*

$$\|Hf\|_2 = \|f\|_2, \tag{1.24}$$

$$H(Hf) = -f, \tag{1.25}$$

$$\int_{\mathbb{R}} Hf(x)\cdot g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot Hg(x)\,dx,\ f,g \text{ reales} \tag{1.26}$$

Demostración. Sea $z = x+iy$ y consideremos $I(z) = \dfrac{-1}{2\pi i z}$. Entonces

$$\frac{1}{2}(P_y(x)+iQ_y(x)) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{y}{x^2+y^2}+i\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{i(x-iy)}{2\pi(x^2+y^2)} = \frac{i\bar{z}}{2\pi|z|^2} = \frac{-1}{2\pi i z} = I(z).$$

Luego

$$P_y(x) = 2\,Re(I(z)) \quad y \quad Q_y(x) = 2\,Im(I(z)). \tag{1.27}$$

Para $y>0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{2\pi i z t}\,dt &= \int_0^\infty e^{2\pi i x t}e^{-2\pi y t}\,dt = \int_0^\infty e^{-2\pi y t}\cos(2\pi x t)\,dt + i\int_0^\infty e^{-2\pi y t}\,\text{sen}(2\pi x t)\,dt \\ &= I_1 + iI_2. \end{aligned}$$

Integrando por partes dos veces cada integral obtenemos que

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi y} - \frac{x^2}{y^2}\int_0^\infty e^{-2\pi yt}\cos(2\pi xt)\,dt, \\ I_2 &= \frac{x}{2\pi y^2} - \frac{x^2}{y^2}\int_0^\infty e^{-2\pi yt}\,\mathrm{sen}(2\pi xt)\,dt. \end{aligned}$$

Despejando se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2\pi yt}\cos(2\pi xt)\,dt &= \frac{y}{2\pi(x^2+y^2)} = \frac{P_y(x)}{2}, \\ \int_0^\infty e^{-2\pi yt}\,\mathrm{sen}(2\pi xt)\,dt &= \frac{x}{2\pi(x^2+y^2)} = \frac{Q_y(x)}{2}. \end{aligned}$$

Esto prueba que

$$I(z) = \int_0^\infty e^{2\pi izt}\,dt.$$

Podemos reescribir las igualdades en (1.27) como

$$\begin{aligned} P_y(x) &= 2\,Re\left(\int_0^\infty e^{2\pi ixt}e^{-2\pi yt}\,dt\right) = 2\int_0^\infty e^{-2\pi yt}\cos(2\pi xt)\,dt \\ &= 2\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi|yt|}\left(\frac{e^{2\pi xt}+e^{-2\pi xt}}{2}\right)dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi|yt|}e^{2\pi ixt}(\chi_+(t)+\chi_-(t))\,dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q_y(x) &= 2\,Im\left(\int_0^\infty e^{2\pi ixt}e^{-2\pi yt}\,dt\right) = 2\int_0^\infty e^{-2\pi yt}\,\mathrm{sen}(2\pi xt)\,dt \\ &= 2\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi|yt|}\left(\frac{e^{2\pi xt}-e^{-2\pi xt}}{2i}\right)dt = -i\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi|yt|}e^{2\pi ixt}(\chi_+(t)-\chi_-(t))\,dt \end{aligned}$$

donde χ_+ y χ_- son las funciones características de $[0,\infty)$ y de $(-\infty,0)$ respectivamente. Por el Corolario 1.28 de la sección 3 y observando que $\chi_+(t)+\chi_-(t)=1$ y $\chi_+(t)-\chi_-(t)=\mathrm{sgn}\ t$, para todo $t\neq 0$ obtenemos las siguientes igualdades

$$\widehat{P}_y(t) = e^{-2\pi|yt|}, \tag{1.28}$$

$$\widehat{Q}_y(t) = (-i\ \mathrm{sgn}\ t)e^{-2\pi|yt|}. \tag{1.29}$$

De la igualdad (1.29) se deduce que

$$(Q_y * f)\widehat{\ }(x) = \widehat{Q}_y(x)\widehat{f}(x) = (-i\ \mathrm{sgn}\ x)e^{-2\pi|yx|}\widehat{f}(x), \tag{1.30}$$

lo que implica que existe una función $g \in L^2$ tal que

$$\widehat{g}(x) = \lim_{y \to 0} (-i \text{ sgn } x) e^{-2\pi|yx|} \widehat{f}(x) = (-i \text{ sgn } x) \widehat{f}(x).$$

Usando el Teorema 1.12 se obtiene que $\lim_{y\to 0}(Q_y * f)(x) = g(x)$. Ahora, por el Teorema 1.36, $Q_y * f$ tiende a Hf, cuando $y \to 0$, es decir que $Hf(x) = g(x)$. Aplicando transformada de Fourier a ambos lados se obtiene (1.23). La igualdad (1.24) se sigue del hecho que la transformada de Fourier es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$.

Ahora, si $f \in L^2$ y $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(H(Hf))\widehat{\ }(x) = (-i\,\mathrm{sgn}\,x)(Hf)\widehat{\ }(x) = (-i\,\mathrm{sgn}\,x)^2 \widehat{f}\,(x) = -\widehat{f}\,(x) = (-f)\widehat{\ }(x), \text{c.s},$$

Obteniendo así (1.25). De aqui se sigue que $H^2 = -I$, donde I es el operador identidad en L^2. Este hecho junto con (1.24) implican que H es un operaor unitario y $H^* = H^{-1} = -H$, donde H^* denota el operador adjunto.

Para demostrar la igualdad (1.26) usamos (1.25) y el argumento anterior. Si f y g son funciones a valores reales tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} Hf(x) \cdot g(x)\, dx = \langle Hf, g \rangle_2$$

Además,

$$\begin{aligned}
\langle Hf, g\rangle_2 &= \langle Hf, -H(Hg)\rangle_2 = -\langle Hf, H(Hg)\rangle_2 = -\langle H^*(Hf), Hg\rangle_2 \\
&= -\langle -H(Hf), Hg\rangle_2 = -\langle f, Hg\rangle_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot Hg(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Así se concluye la prueba del teorema. ∎

El resultado anterior nos permite ver ahora que la integral de Poisson conjugada de una función en L^2 coincide c.s. con la integral de Poisson de su transformada de Hilbert.

Corolario 1.39. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces para $y > 0$,*

$$(f * Q_y)(x) = (Hf * P_y)(x) \quad c.s. \tag{1.31}$$

Demostración. Basta verificar que ambos lados de (1.31) tienen la misma transformada de Fourier. En efecto, utilizando propiedades de la transformada de fourier de la convolución y las fórmulas (1.23), (1.28) y (1.29) obtenidas en el teorema anterior, tenemos

$$(f * Q_y)\widehat{\ }(x) = \widehat{f}(x)\widehat{Q}_y(x) = (-i\,\text{sgn}\ x)e^{-2\pi yx}\widehat{f}(x)$$

y

$$(Hf * P_y)\widehat{\ }(x) = (Hf)\widehat{\ }(x)\widehat{P}_y(x) = (-isgn\,x)e^{-2\pi yx}\widehat{f}(x).$$

Así obtenemos la igualdad requerida. ■

En el siguiente teorema probaremos que la transformada de Hilbert es un operador continuo en L^p. Antes enunciaremos un teorema de interpolación que será necesario para su demostración.

Teorema 1.40 (Teorema de interpolación de Riesz-Thorin). *Sean* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ *y para* $t \in [0,1]$ *definamos* p *y* q *como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Si T *es un operador lineal de* $L^{p_0} + L^{p_1}$ *en* $L^{q_0} + L^{q_1}$ *tal que*

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{q_0} &\leq M_0\|f\|_{p_0} \quad \text{para}\, f \in L^{p_0}, \\ \|Tf\|_{q_1} &\leq M_1\|f\|_{p_1} \quad \text{para}\, f \in L^{p_1}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-t}M_1^t\|f\|_p \quad \text{para}\, f \in L^p.$$

La demostración de este teorema se puede ver en [**3**].

Teorema 1.41 (M. Riesz). *Si* $1 < p < \infty$ *entonces* H *es un operador continuo en* L^p *, es decir,*

$$\|Hf\|_p \leq C_p\|f\|_p,$$

para alguna constante $C_p > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que a cada función $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ le podemos asociar una función analítica, definida en $\mathbb{R}^2_+$, dada por

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = (f * P_y)(x) + i(f * Q_y)(x),$$

donde $z = x + iy$, con $y > 0$. Por los Teoremas 1.33 y 1.36, $F(z)$ tiende, cuando z tiende a x no tangencialmente, a la función $F(x) = f(x) + iHf(x)$. Luego,

$$F^2(x) = (f + i\,Hf)^2 = f^2 - (Hf)^2 + i2f \cdot Hf \tag{1.32}$$

y además, la función $f^2 - (Hf)^2$ tiene una extensión armónica u en el semiplano superior cuya conjugada armónica v tiene valor límite $H(f^2 - (Hf)^2)$. Por lo tanto,

$$H(f^2 - (Hf)^2) = 2f \cdot Hf.$$

Como para $p = 2$ se cumple $H(Hf) = -f$, tenemos que $-(f^2 - (Hf)^2) = 2H(f \cdot Hf)$, de donde

$$(Hf)^2 = 2H(f \cdot Hf) + f^2. \tag{1.33}$$

Demostraremos ahora por inducción el siguiente resultado:

Si $f \in L^{2^k}$ entonces $\|Hf\|_{2^k} \leq (2^k - 1)\|f\|_{2^k}$.

Para $k = 2$ notemos que si $f, Hf \in L^4$ entonces $f^2, (Hf)^2 \in L^2$. En efecto,

$$\|f^2\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f^2(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^4\,dx\right)^{2/4} = \|f\|_4^2 < \infty.$$

Análogamente se demuestra para $(Hf)^2$.

Reescribiendo $\|Hf\|_{2^2}^2$ y usando la fórmula (1.33), tenemos

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{2^2}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^{2^2}\,dx\right)^{2/2^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} (|Hf(x)|^2)^2\,dx\right)^{1/2} = \|(Hf)^2\|_2 \\ &\leq \|f^2\|_2 + 2\|H(f \cdot Hf)\|_2 \leq \|f\|_{2^2}^2 + 2\|f \cdot Hf\|_2.\end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\begin{aligned}\|f \cdot Hf\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |Hf(x)|^2\,dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (|f(x)|^2)^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (|Hf(x)|^2)^2\,dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2^2}\,dx\right)^{2/2^2} \left(\int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^{2^2}\,dx\right)^{2/2^2} = \|f\|_{2^2}^2 \|Hf\|_{2^2}^2.\end{aligned}$$

De donde

$$\|Hf\|_{2^2}^2 \leq \|f\|_{2^2}^2 + 2\|f\|_{2^2}\|Hf\|_{2^2}.$$

Ahora, si $\|Hf\|_{2^2} \leq \|f\|_{2^2}$ se tiene la desigualdad buscada. Es decir

$$\|Hf\|_{2^2}^2 \leq \|f\|_{2^2}^2 + 2\|f\|_{2^2}^2 = 3\|f\|_{2^2}^2 = (2^2 - 1)\|f\|_{2^2}^2.$$

Por el contrario, si $\|f\|_{2^2} \leq \|Hf\|_{2^2}$ tenemos

$$\|Hf\|_{2^2}^2 \leq \|f\|_{2^2}\|Hf\|_{2^2} + 2\|f\|_{2^2}\|Hf\|_{2^2} = 3\|f\|_{2^2}\|Hf\|_{2^2}$$

y así $\|Hf\|_{2^2} \leq (2^2-1)\|f\|_{2^2}$.

Supongamos que la desigualdad se satisface para $k = n$ y veamos que vale para $k = n+1$. Para ello hacemos un procedimiento análogo al caso $k = 2$. Esto es,

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{2^{n+1}}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |Hf(x)|^{2^{n+1}}\,dx\right)^{2/2^{n+1}} = \left(\int_{\mathbb{R}} (|Hf(x)|^2)^{2^n}\,dx\right)^{1/2^n} = \|(Hf)^2\|_{2^n}\\
&\leq \|f^2\|_{2^n} + 2\|H(f\cdot Hf)\|_{2^n} \leq \|f\|_{2^{n+1}}^2 + 2(2^n-1)\|f\cdot Hf\|_{2^n}\\
&\leq \|f\|_{2^{n+1}}^2 + 2(2^n-1)\|f\|_{2^{n+1}}\|Hf\|_{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Haciendo el mismo razonamiento que para $p = 2$ obtenemos

$$\|Hf\|_{2^{n+1}} \leq (2^{n+1}-1)\|f\|_{2^{n+1}}.$$

Ahora, H es un operador de $L^{2^k} + L^{2^{k+1}}$ en $L^{2^k} + L^{2^{k+1}}$, $k \geq 0$ por lo que acabamos de probar, esto es,

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_{2^k} &\leq (2^k-1)\|f\|_{2^k}, \,\text{para toda}\, f \in L^{2^k}\\
\|Hf\|_{2^{k+1}} &\leq (2^{k+1}-1)\|f\|_{2^{k+1}}, \,\text{para toda}\, f \in L^{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

Entonces por el Teorema de Riesz-Thorin,

$$\|Hf\|_p \leq (2^k-1)^{1-t}(2^{k+1}-1)^t\|f\|_p, \forall f \in L^p,$$

donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-t}{2^k} + \dfrac{t}{2^{k+1}}$ y $0 < t < 1$, i.e, $p = \dfrac{2^{k+1}}{2-t}$, $0 < t < 1$. Como para estos valores de t, $2^k \leq p \leq 2^{k+1}$ se tiene que H es un operador acotado en L^p con $2^k \leq p \leq 2^{k+1}$. Como el retultado anterior es válido para todo $k \geq 1$ se tiene que H es acotado en L^p para $p \geq 2$.

El resultado para $p < 2$ se obtiene con un argumento de dualidad. Recordemos que si f, g son funciones a valores reales entonces

$$\int_{\mathbb{R}} Hf(x)\cdot g(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot Hg(x)\,dx \tag{1.34}$$

Usando la igualdad anterior, la desigualdad de Hölder y el resultado para $p \geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_p &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} Hf(x)\cdot g(x)\,dx\right| : g\in L^{p'}, \|g\|_{p'}\leq 1\right\}\\
&= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot Hg(-x)\,dx\right| : g\in L^{p'}, \|g\|_{p'}\leq 1\right\}\\
&\leq \sup\left\{\|f\|_p\|Hg\|_{p'} : g\in L^{p'}, \|g\|_{p'}\leq 1\right\}\\
&\leq \|f\|_p \sup\left\{\|Hg\|_{p'} : g\in L^{p'}, \|g\|_{p'}\leq 1\right\}\\
&\leq C_{p'}\|f\|_p,
\end{aligned}$$

donde p' es el exponente conjugado de p. Así se completa la prueba del teorema. ■

Observación 1.42. Notemos que si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ y $\{f_n\}$ es una sucesión en $C_0(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ entonces por el Teorema de M. Riesz

$$\|Hf_n - Hf\|_p \leq C_p\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad n\to\infty,$$

para alguna constante C_p.

Usando lo anterior podemos ver que la transformada de Hilbert truncada de f, $H_\epsilon f$, converge a Hf en norma p cuando $\epsilon \to 0$. Basta notar que $H_\epsilon f$ satisface estimaciones como las del Teorema de M. Riesz, y por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\begin{aligned}
\|Hf - H_\epsilon f\|_p &\leq \|Hf - Hf_n\|_p + \|Hf_n - H_\epsilon f_n\|_p + \|H_\epsilon f_n - H_\epsilon f\|_p\\
&\leq C_p\|f_n - f\|_p + \|H_\epsilon f_n - Hf_n\|_p + C\|f_n - f\|_p\\
&= (C_p + C)\|f_n - f\|_p + \|H_\epsilon f_n - Hf_n\|_p,
\end{aligned}$$

donde C_p y C son constantes.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas con soporte compacto, entonces existe $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado tal que si $x \in A^c$ entonces $H_\epsilon f_n(x) = 0$ y $Hf_n(x) = 0$.

Luego

$$\begin{aligned}
\|H_\epsilon f_n - Hf_n\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p\,dx\\
&= \int_A |H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} |H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p \chi_A(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Además $|H_\epsilon f_n(x)|$ y $|Hf_n(x)|$ están acotadas para $x \in \mathbb{R}$. Así

$$|H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p \chi_A(x) \leq C^p \chi_A(x),$$

donde $C^p\chi_A \in L^1(\mathbb{R})$, para alguna constante $C_p > 0$. Por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \|H_\epsilon f_n - Hf_n\|_p^p &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p \chi_A(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon f_n(x) - Hf_n(x)|^p \chi_A(x)\, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $n \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ se tiene $\|Hf - H_\epsilon f\|_p \longrightarrow 0$.

El operador transformada de Hilbert, además de ser continuo, es un operador unitario en L^p, $1 < p < \infty$ y su inversa es $-H$. Esto último lo demostramos a continuación.

Teorema 1.43 (Fórmula de inversión)**.** *Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, entonces $H(Hf) = -f$ c.s.*

Demostración. Como la fórmula es válida en L^2, en particular lo es en $C_0(\mathbb{R})$. $C_0(\mathbb{R})$ es denso en L^p, es decir, si $f \in L^p$, existe $\{f_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Como $H^2(f_n) = H(Hf_n) = -f_n$ c.s entonces usando el teorema anterior

$$H^2(f) = H^2(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} H^2(f_n) = \lim_{n\to\infty}(-f_n) = -\lim_{n\to\infty} f_n = -f.$$

Por lo tanto $\|H^2 f + f\|_p = 0$, lo que implica $H^2(f) = -f$ c.s. ∎

CAPÍTULO 2

La transformada de Hilbert de la Gaussiana

En este capítulo calculamos la transformada de Hilbert de la función de densidad Gaussiana. Los resultados que mostraremos se basan en los artículos *The Hilbert transform of the Gaussian* de A.P. Calderón y Y. Sagher, y *On a theorem of Akhiezer* de E. Kochneff, Y. Sagher y R. Tan. En el artículo de Calderón y Sagher consideran la función de densidad Gaussiana normalizada, es decir, $f(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Para nuestro propósito y a fin de tener regularidad en el trabajo realizamos un cambio de constante, es decir, trabajaremos con la función $f(x) = e^{-x^2/2}$.

El problema a considerar fue mencionado por primera vez por Nestor M. Rivière aproximadamente en el año 1971. Se darán tres demostraciones de este resultado. En la primera se hace una conexión entre la transformada de Hilbert y la ecuación del calor unidimensional y se utilizan resultados de la teoría de aproximaciones de la identidad, en la segunda se hace uso de la transformada de Fourier y sus propiedades y en la tercera demostración usamos las propiedades de la transformada de Hilbert y la teoría de ecuaciones diferenciales. Es importante resaltar la técnica utilizada en cada demostración, ya que cada una de ellas tiene ventajas en la resolución de distintos problemas.

Para comenzar consideremos el kernel ϕ tal que $\phi_y(x) = \frac{1}{y}\phi(\frac{x}{y})$ satisface la ecuación de Laplace para el semiplano superior ($y > 0$), i. e., $\Delta\phi_y = 0$. Calculando las respectivas derivadas parciales se tiene

$$
\begin{aligned}
0 = \Delta\phi_y &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{y}\phi(x/y)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{y}\phi(x/y)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}\phi^{'}(x/y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y^2}\phi(x/y) - \frac{x}{y^3}\phi^{'}(x/y)\right) \\
&= \frac{1}{y^3}\phi^{''}(x/y) + \frac{2}{y^3}\phi(x/y) + \frac{x}{y^4}\phi^{'}(x/y) + \frac{3x}{y^4}\phi^{'}(x/y) + \frac{x^2}{y^5}\phi^{''}(x/y) \\
&= \left(\frac{1}{y^3} + \frac{x^2}{y^5}\right)\phi^{''}(x/y) + \frac{4x}{y^4}\phi^{'}(x/y) + \frac{2}{y^3}\phi(x/y).
\end{aligned}
$$

Multiplicando ambos lados por y^3 y haciendo el cambio de variables $u = x/y$ tenemos que la ecuación de Laplace antes mencionada induce la siguiente ecuación diferencial

$$(1+u^2)\phi^{''}(u) + 4u\phi^{'}(u) + 2\phi(u) = 0, \tag{2.1}$$

la cual se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}
0 &= (1+u^2)\phi^{''}(u) + 2u\phi^{'}(u) + 2u\phi^{'}(u) + 2\phi(u) \\
&= \frac{d}{du}((1+u^2)\phi^{'}(u)) + \frac{d}{du}(2u\phi(u)) \\
&= \frac{d}{du}((1+u^2)\phi^{'}(u) + 2u\phi(u)) \\
&= \frac{d}{du}\left[\frac{d}{du}\left((1+u^2)\phi(u)\right)\right]
\end{aligned}$$

Integrando dos veces la última expresión se obtiene que la solución general de la ecuación (2.1) es $\phi(u) = \dfrac{A}{1+u^2} + \dfrac{Bu}{1+u^2}$. Tomando $A = \frac{1}{\pi}$ y $B = 0$ se obtiene $P(u) = \dfrac{1}{\pi(1+u^2)}$, el kernel de Poisson. Tomando $A = 0$ y $B = \frac{1}{\pi}$, obtenemos $Q(u) = \dfrac{u}{\pi(1+u^2)}$, el kernel de Poisson conjugado. Ambas funciones fueron estudiadas con detalle en el capítulo anterior. A continuación enunciamos un teorema que relaciona las funciones P y Q usando el operador transformada de Hilbert.

Teorema 2.1. *Si H denota el operador transformada de Hilbert dado por*

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$$

entonces $HP = Q$.

Demostración. Para la demostración primero evaluamos la transformada de Hilbert truncada de P. Recordemos que la transformada de Hilbert truncada satisface

$$HP(x) = \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon P(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
H_\epsilon P(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon} \frac{P(t)}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi^2}\int_{|x-t|>\epsilon} \frac{1}{(x-t)(1+t^2)}\, dt \\
&= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \int_{|x-t|>\epsilon} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} + \frac{x}{1+t^2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} I(x).
\end{aligned}$$

Resolvamos la integral indefinida asociada a $I(x)$:

$$\int \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2} + \frac{x}{1+t^2} \right) dt \quad = \quad \ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}}{x-t} \right| + x \arctan(t)$$

Luego,

$$\begin{aligned} I(x) &= \lim_{b\to\infty} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}}{x-t} \right| + x\arctan(t) \right) \Bigg|_{-b}^{x-\epsilon} + \lim_{b\to\infty} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{1+t^2}}{x-t} \right| + x\arctan(t) \right) \Bigg|_{x+\epsilon}^{b} \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{1+(x-\epsilon)^2}}{\sqrt{1+(x+\epsilon)^2}} \right| + x\arctan(x-\epsilon) + \pi x - x\arctan(x+\epsilon). \end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior tenemos que la transformada de Hilbert truncada de P es

$$H_\epsilon P(x) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+(x-\epsilon)^2}}{\sqrt{1+(x+\epsilon)^2}} \right| + x\arctan(x-\epsilon) + \pi x - x\arctan(x+\epsilon) \right).$$

Ahora, si $\epsilon \to 0$,

$$HP(x) = \frac{\pi x}{\pi^2(1+x^2)} = \frac{x}{\pi(1+x^2)} = Q(x).$$

■

La siguiente figura muestra las gráficas del kernel de Poisson y su transformada de Hilbert.

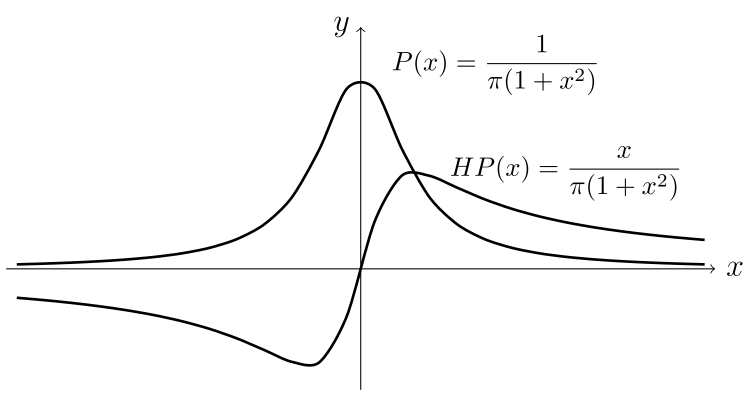


Figura 2.1. *Gráficas del kernel de Poisson y su transformada de Hilbert en el intervalo* $(-6, 6)$.

La discusión anterior sirve como motivación a lo que sigue. Sea T el operador diferencial del calor:

$$T = \partial_x^2 - \partial_t$$

y consideremos la función ϕ tal que $\phi_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$ satisface que $T(\phi_{\sqrt{2t}}(x)) = 0$. Calculando las respectivas derivadas parciales, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi_{\sqrt{2t}}(x)) - \frac{\partial}{\partial t}(\phi_{\sqrt{2t}}(x)) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\phi(x/\sqrt{2t})\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\phi(x/\sqrt{2t})\right) \\ &= \frac{1}{(2t)^{3/2}}\phi^{''}(x/\sqrt{2t}) + \frac{2}{2(2t)^{3/2}}\phi(x/\sqrt{2t}) + \frac{2x}{\sqrt{2t}(2t)^{3/2}}\phi^{'}(x/\sqrt{2t}). \end{aligned}$$

Simplificando y haciendo el cambio de variables $u = x/\sqrt{2t}$ obtenemos la ecuación diferencial

$$\phi^{''}(u) + u\phi^{'}(u) + \phi(u) = 0,$$

la cual se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{du}(\phi^{'}(u)) + \frac{d}{du}(u\phi(u)) \\ &= \frac{d}{du}(\phi^{'}(u) + u\phi(u)) \\ &= \frac{d}{du}\left[e^{-u^2/2}\left(e^{u^2/2}\phi^{'}(u) + ue^{u^2/2}\phi(u)\right)\right] \\ &= \frac{d}{du}\left[e^{-u^2/2}\frac{d}{du}\left(e^{u^2/2}\phi(u)\right)\right]. \end{aligned}$$

La solución general de esta ecuación es

$$\phi(u) = Ae^{-u^2/2} + Be^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}\,ds.$$

Tomando $A = 1$, $B = 0$ se obtiene la función de densidad Gaussiana $\mathcal{G}(u) = e^{-u^2/2}$. Ahora, si elegimos las constantes $A = 0$ y $B = \sqrt{2/\pi}$ obtenemos la función

$$\mathcal{L}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}\,ds. \tag{2.2}$$

En resumen, toda solución de la ecuación diferencial

$$\phi^{''}(u) + u\phi^{'}(u) + \phi(u) = 0, \tag{2.3}$$

viene dada por una combinación lineal de las funciones $\mathcal{G}$ y $\mathcal{L}$, es decir,

$$\phi(u) = A\mathcal{G}(u) + B\mathcal{L}(u).$$

Análogo al Teorema 2.1, el objetivo es probar que $H\mathcal{G} = \mathcal{L}$. Antes mostraremos dos resultados que serán necesarios para la demostración de este hecho.

Lema 2.2. *Las siguientes igualdades se satisfacen:*

(i) $e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds = O((\frac{1}{u})^3)$,

(ii) $\mathcal{L}(u) = O(\frac{1}{u})$,

si $|u| \to \infty$.

Demostración. En ambos items aplicamos el Teorema de L'Hôpital. Para demostrar (i) veamos que existe una constante C tal que

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds}{1/u^3} \leq C.$$

Reescribiendo el límite anterior nos queda

$$\begin{aligned}
\lim_{|u|\to\infty} \frac{e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds}{1/u^3} &= \lim_{|u|\to\infty} \frac{u^3\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds}{e^{u^2/2}} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{u^5\int_0^u e^{s^2/2}\,ds - 2u^4\int_0^u e^{s^2/2}s\,ds + u^3\int_0^u e^{s^2/2}s^2\,ds}{e^{u^2/2}}.
\end{aligned}$$

Aplicando repetidas veces el Teorema de L'Hôpital y simplificando en cada paso se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{|u|\to\infty} \frac{e^{-u^{2/2}}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds}{1/u^3} &= \lim_{|u|\to\infty} \frac{5u^4\int_0^u e^{s^2/2}\,ds - 8u^3\int_0^u e^{s^2/2}s\,ds + 3u^2\int_0^u e^{s^2/2}s^2\,ds}{ue^{u^2/2}} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{5u^3\int_0^u e^{s^2/2}\,ds - 8u^2\int_0^u e^{s^2/2}s\,ds + 3u\int_0^u e^{s^2/2}s^2\,ds}{e^{u^2/2}} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{15u^2\int_0^u e^{s^2/2}\,ds - 16u\int_0^u e^{s^2/2}s\,ds + 3\int_0^u e^{s^2/2}s^2\,ds}{ue^{u^2/2}} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{15u\int_0^u e^{s^2/2}\,ds - 16\int_0^u e^{s^2/2}s\,ds}{e^{u^2/2}} + \lim_{|u|\to\infty} \frac{3\int_0^u e^{s^2/2}s^2\,ds}{ue^{u^2/2}} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{15\int_0^u e^{s^2/2}\,ds + 15ue^{u^2/2} - 16ue^{u^2/2}}{ue^{u^2/2}} + \lim_{|u|\to\infty} \frac{3u^2}{1+u^2} \\
&= \lim_{|u|\to\infty} \frac{15\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{ue^{u^2/2}} - 1 + 3 \\
&= L_1 - 1 + 3.
\end{aligned}$$

Donde,

$$L_1 = \lim_{|u|\to\infty} \frac{15\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{ue^{u^2/2}} = \lim_{|u|\to\infty} \frac{15e^{u^2/2}}{(1+u^2)e^{u^2/2}} = \lim_{|u|\to\infty} \frac{15}{1+u^2} \leq 15.$$

Finalmente,

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds}{1/u^3} \leq 15 - 1 + 3 = 17.$$

Para demostrar (ii) hacemos un procedimiento análogo al anterior. A saber,

$$\begin{aligned}
\lim_{|u|\to\infty} \frac{\mathcal{L}(u)}{1/u} &= \lim_{|u|\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{1/u} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \frac{u\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{e^{u^2/2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \frac{\int_0^u e^{s^2/2}\,ds + ue^{u^2/2}}{ue^{u^2/2}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \left(\frac{\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{ue^{u^2/2}} + 1\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \frac{\int_0^u e^{s^2/2}\,ds}{ue^{u^2/2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \frac{e^{u^2/2}}{e^{u^2/2} + u^2 e^{u^2/2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{|u|\to\infty} \frac{1}{1+u^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&\leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}$$

Así concluye la prueba. ■

Teorema 2.3. *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, y $\mathcal{L}_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}(u/\epsilon)$ entonces*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}_\epsilon * f = \sqrt{2\pi} Hf, \quad \text{c.s.}$$

Demostración. Reescribiendo $\mathcal{L}$ tenemos

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{L}(u) \;=\; e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}\,ds = e^{-u^2}\int_0^u e^{(u-s)^2/2}e^{us}\,ds.$$

Haciendo el cambio de variables $t = u - s$ y utilizando el desarrollo en serie de Taylor en $x = 0$ de la función exponencial se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{L}(u) &= e^{-u^2}\int_0^u e^{s^2/2}e^{u(u-s)}\,ds = \int_0^u e^{s^2/2}e^{-us}\,ds\\
&= \int_0^u e^{-us}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds\\
&= \int_0^u e^{-us}\,ds + \int_0^u e^{-us}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds\\
&= \frac{1}{u}(1-e^{-u^2}) + \int_0^u e^{-us}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds.
\end{aligned}$$

Consideremos la función

$$k(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{u} & \text{si } |u| > 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

y sea $\Psi(u) = \mathcal{L}(u) - k(u)$, entonces

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Psi(u) = \begin{cases} -\frac{e^{-u^2}}{u} + \int_0^u e^{-us}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds & \text{si } |u| > 1,\\ \\ e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}\,ds & \text{si } |u| \le 1.\end{cases}$$

Ψ es impar, ya que $\mathcal{L}$ y k lo son. Además podemos acotar la función Ψ de la siguiente manera: Si $u > 1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi}{2}}|\Psi(u)| &\le \frac{e^{-u^2}}{|u|} + \int_0^u e^{-us}\frac{s^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^{n-1} ds\\
&\le e^{-u^2} + \int_0^u e^{-us}\frac{s^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds\\
&\le e^{-u^2} + \int_0^u e^{-us}\frac{s^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{s^2}{2}\right)^n ds\\
&= e^{-u^2} + \int_0^u e^{-us}\frac{s^2}{2}\,e^{s^2/2}\,ds\\
&= e^{-u^2} + \frac{1}{2}\,e^{-u^2/2}\int_0^u e^{(u-s)^2/2}s^2\,ds\\
&= e^{-u^2} + \frac{1}{2}\,e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds\\
&\le \frac{1}{2}\,e^{-u^2/2}\int_0^u e^{s^2/2}(u-s)^2\,ds \le \frac{c}{u^3}.
\end{aligned}$$

Así, $|\Psi(u)| \leq \dfrac{c}{|u|^3}$ para todo $|u| > 1$. Si $|u| \leq 1$, $\Psi = \mathcal{L}$ y por lo tanto $|\Psi(u)| \leq M$, con M una constante positiva. En resumen $|\Psi|$ está acotada por una función integrable y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Psi = 0$. Por el Teorema 1.23 del capítulo anterior tenemos que para toda función $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} (f * \Psi_\epsilon)(x) = 0, \tag{2.4}$$

en todo punto de Lebesgue de f. Notemos que $\Psi_\epsilon = \mathcal{L}_\epsilon - k_\epsilon$ y

$$\begin{aligned}
(f * k_\epsilon)(x) &= \int_{|t/\epsilon| \leq 1} f(x-t)\frac{1}{\epsilon}k(t/\epsilon)\,dt + \int_{|t/\epsilon|>1} f(x-t)\frac{1}{\epsilon}k(t/\epsilon)\,dt \\
&= \int_{|t|>\epsilon} f(x-t)\frac{1}{\epsilon}k(t/\epsilon)\,dt \\
&= \int_{|t|>\epsilon} f(x-t)\frac{1}{\epsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\epsilon}{t}\,dt \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \sqrt{2\pi}H_\epsilon f(x),
\end{aligned}$$

donde $H_\epsilon f$ denota la transformada de Hilbert truncada de f. Ahora, el límite (2.4) implica que

$$\lim_{\epsilon \to 0}(\mathcal{L}_\epsilon * f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0}(f * \Psi_\epsilon)(x) + \lim_{\epsilon \to 0}(f * k_\epsilon)(x) = \sqrt{2\pi}\lim_{\epsilon \to 0}(H_\epsilon f)(x) = \sqrt{2\pi}Hf(x).$$

Así se completa la prueba. ■

Teorema 2.4. $H\mathcal{G} = \mathcal{L}$.

Como mencionamos al inicio del capítulo, daremos tres demostraciones de este teorema. La primera pueba se basa en la teoría de aproximaciones de la identidad y en la ecuación diferencial inducida por el operador del calor T. En la segunda demostración hacemos una conexión entre la transformada de Hilbert y la transformada de Fourier y usamos algunas técnicas de la teoría de variable compleja; y la tercera se basa prácticamente en resolver una ecuación diferencial.

Primera demostración del Teorema 2.4. Del Lema 2.2 se sigue que si $1 < p$ entonces

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}\|_p^p &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{L}(u)|^p\,du = \int_{|u|<M} |\mathcal{L}(u)|^p\,du + \int_{|u|>M} |\mathcal{L}(u)|^p\,du \\ &\le \int_{|u|<M} |\mathcal{L}(u)|^p\,du + C\int_{|u|>M} \frac{1}{|u|^p}\,du < \infty,\end{aligned}$$

donde M es un número suficientemente grande. Es decir, $\mathcal{L} \in L^p$ para $1 < p$. Por lo tanto las convoluciones que aparecen en el desarrollo de la prueba están bien definidas.

Para cualquier $f \in L^p$, $1 < p < \infty$ tenemos por el Teorema 2.3 que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}_\epsilon * Hf = \sqrt{2\pi}H(H(f)) = -\sqrt{2\pi}f, \quad c.s.$$

La última igualdad se tiene por la fórmula de inversión de la transformada de Hilbert, es decir, $H(H(f)) = -f$. Por otra parte, usando la propiedad (c) de la Proposición 1.37 se tiene $\mathcal{L}_\epsilon * H(f) = H(\mathcal{L}_\epsilon) * f$, además

$$\begin{aligned}H(\mathcal{L}_\epsilon)(x) &= \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_\epsilon(t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi\epsilon}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(\frac{t}{\epsilon})}{x-t}\,dt = \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(s)}{x-\epsilon s}\,dt \\ &= \frac{1}{\epsilon\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{L}(s)}{\frac{x}{\epsilon}-s}\,dt = \frac{1}{\epsilon}(H\mathcal{L})(x/\epsilon) = (H\mathcal{L})_\epsilon(x).\end{aligned}$$

Usando las tres últimas igualdades tenemos lo siguiente

$$\lim_{\epsilon\to 0}(H(\mathcal{L}))_\epsilon * f = \lim_{\epsilon\to 0} H(\mathcal{L}_\epsilon) * f = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}_\epsilon * H(f) = -\sqrt{2\pi}f, c.s.$$

Como $\mathcal{L}$ es solución de la ecuación (2.3), se tiene que satisface $T(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}) = 0$; usando esto y propiedades de la derivación se prueba que $T(H(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})) = H(T(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}))$. Veamos,

$$\begin{aligned}T(H(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(H(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})(x)) - \frac{\partial}{\partial t}(H(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})(x)) \\ &= H\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}(x)\right) - H\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}(x)\right) \\ &= H\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}(x) - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}(x)\right) \\ &= H(T(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})).\end{aligned}$$

Como $T(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}}) = 0$ se tiene que $T((H\mathcal{L})_{\sqrt{2t}}) = T(H(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})) = H(T(\mathcal{L}_{\sqrt{2t}})) = 0$, lo que quiere decir que $H\mathcal{L}$ también es solución de la ecuación (2.3), esto es, $H\mathcal{L} = A\mathcal{G} + B\mathcal{L}$.

También se cumple que $(H\mathcal{L})_\epsilon = A\mathcal{G}_\epsilon + B\mathcal{L}_\epsilon$.

Como $\mathcal{L}$ es una función impar, $H\mathcal{L}$ es par al igual que $\mathcal{G}$, por lo que $B = 0$. Ahora, por la Observación 1.22 del capítulo anterior tenemos

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\mathcal{G}_\epsilon * f) = \sqrt{2\pi} f.$$

En resumen,

$$-\sqrt{2\pi} f = \lim_{\epsilon \to 0} (H\mathcal{L})_\epsilon * f = \lim_{\epsilon \to 0} A(\mathcal{G}_\epsilon * f) = A\sqrt{2\pi} f.$$

De aquí $A = -1$ y así $H(\mathcal{L}) = -\mathcal{G}$. Aplicando H a ambos lados de la igualdad obtenemos $H(H(\mathcal{L})) = -H(\mathcal{G})$, lo que es equivalente a $\mathcal{L} = H(\mathcal{G})$. ■

Para la segunda prueba de $H(\mathcal{G}) = \mathcal{L}$ enunciamos un lema previo.

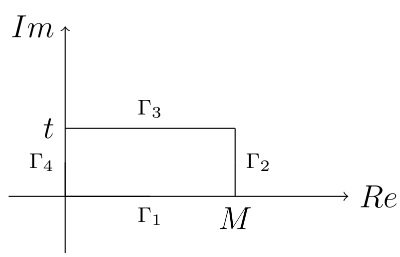
Lema 2.5. *Para* $t \geq 0$

$$Im \left(\int_0^\infty e^{-(it-x)^2/2} \, dx \right) = \int_0^t e^{x^2/2} \, dx,$$

donde Im denota la parte imaginaria de un número complejo.

Demostración. Para demostrar este lema haremos un procedimiento análogo al que se hizo en la sección 3 del capítulo 1 para calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(y+ix/\sqrt{4\pi})^2} \, dy$.

Consideremos la integral compleja $\displaystyle\int_\Gamma e^{-(it-z)^2/2} \, dz$, donde para M un número real positivo, Γ es el contorno cerrado simple orientado en sentido antihorario dado por el rectángulo



Como $e^{-(it-z)^2/2}$ es una función entera, por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_\Gamma e^{-(it-z)^2/2} \, dz = 0.$$

Por otra parte, si parametrizamos cada segmento del rectángulo por separado tenemos, Para Γ_1: $z(x) = x$, $0 \leq x \leq M$.

$$\int_{\Gamma_1} e^{-(it-z)^2/2}\, dz = \int_0^M e^{-(it-x)^2/2}\, dx$$

Para Γ_2: $z(x) = M + ix$, $0 \leq x \leq t$.

$$\int_{\Gamma_2} e^{-(it-z)^2/2}\, dz = i\int_0^t e^{-(it-M-ix)^2/2}\, dx = i\int_0^t e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2} e^{-iM(t-x)}\, dx$$

Para Γ_3: $z(x) = x + it$, $0 \leq x \leq M$.

$$\int_{\Gamma_3} e^{-(it-z)^2/2}\, dz = -\int_0^M e^{-(it-x-it)^2/2}\, dx = -\int_0^M e^{-x^2/2}\, dx$$

Para Γ_4, $0 \leq x \leq t$. $z(x) = ix$, $0 \leq x \leq t$.

$$\int_{\Gamma_4} e^{-(it-z)^2/2}\, dz = -i\int_0^t e^{-(it-ix)^2/2}\, dx = -i\int_0^t e^{(t-x)^2/2}\, dx = -i\int_0^t e^{x^2/2}\, dx.$$

La última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variables $u = t - x$ y volviendo a la variable x.

Luego,

$$0 = \int_\Gamma e^{-(it-z)^2/2}\, dz \quad = \quad \int_{\Gamma_1} e^{-(it-z)^2/2}\, dz + \int_{\Gamma_2} e^{-(it-z)^2/2}\, dz + \int_{\Gamma_3} e^{-(it-z)^2/2}\, dz + \int_{\Gamma_4} e^{-(it-z)^2/2}\, dz.$$

Esto es,

$$0 = \int_0^M e^{-(it-x)^2/2}\, dx + i\int_0^t e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2} e^{-iM(t-x)}\, dx - \int_0^M e^{-x^2/2}\, dx - i\int_0^t e^{x^2/2}\, dx.$$

Si hacemos tender M a infinito se tiene que

$$0 = \int_0^\infty e^{-(it-x)^2/2}\, dx + i\lim_{M\to\infty}\int_0^t e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2} e^{-iM(t-x)}\, dx - \int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx - i\int_0^t e^{x^2/2}\, dx.$$

Estudiemos el segundo término.

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2} e^{-iM(t-x)}\, dx\right| &\leq \int_0^t \left|e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2} e^{-iM(t-x)}\right|\, dx \\ &\leq \int_0^t e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2}\, dx. \end{aligned}$$

Si consideramos la familia de funciones $f_M(x) = e^{(t-x)^2/2} e^{-M^2/2}$ tenemos que

$$f_M(x) \geq f_{M+1}(x)$$

para todo x y $\lim\limits_{M\to\infty} e^{(t-x)^2/2}e^{-M^2/2}=0$. Por el Teorema de convergencia monótona

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^t e^{(t-x)^2/2}e^{-M^2/2}\,dx=\int_0^t \lim_{M\to\infty} e^{(t-x)^2/2}e^{-M^2/2}\,dx=0,$$

por lo tanto

$$0=\int_0^\infty e^{-(it-x)^2/2}\,dx-\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx-i\int_0^t e^{x^2/2}\,dx.$$

La anterior es una igualdad de números complejos, sus partes reales e imaginarias son iguales. Nos interesa igualar sus partes imaginarias, esto es,

$$0=Im\left(\int_0^\infty e^{-(it-x)^2/2}\,dx\right)-\int_0^t e^{x^2/2}\,dx,$$

de donde se sigue que

$$Im\left(\int_0^\infty e^{-(it-x)^2/2}\,dx\right)=\int_0^t e^{x^2/2}\,dx.$$

Así queda probado el lema. ■

Segunda demostración del Teorema 2.4. Dado que

$$\int_{-\infty}^\infty |\mathcal{G}(x)|^2\,dx \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$

$\mathcal{G}\in L^2(\mathbb{R})$ entonces $(H\mathcal{G})\widehat{\ }(x)=-i\ \mathrm{sgn}\ x\,\widehat{\mathcal{G}}(x)$.

Además,

$$\widehat{\mathcal{G}}(x)=\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{-2\pi ixt}\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-(t^2+4\pi ixt)/2}\,dt=e^{-2\pi^2x^2}-\infty^\infty e^{-(t^2+2\pi ix)^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2x^2}.$$

Usando la fórmula de inversión de la transformada de Fourier para $H\mathcal{G}$ tenemos

$$\begin{aligned}
(H\mathcal{G})(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (H\mathcal{G})\widehat{\ }(t) e^{2\pi i x t}\, dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x\, \widehat{\mathcal{G}}(x) e^{2\pi i x t}\, dx \\
&= -i\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x\, e^{-2\pi^2 x^2} e^{2\pi i x t}\, dx \\
&= -i\sqrt{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} e^{2\pi i x t}\, dx - \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi^2 x^2} e^{2\pi i x t}\, dx \right) \\
&= -i\sqrt{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} e^{2\pi i x t}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} e^{-2\pi i x t}\, dx \right) \\
&= 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} \left(\frac{e^{2\pi i x t} - e^{-2\pi i x t}}{2i} \right) dx \\
&= 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} \operatorname{sen}(2\pi x t)\, dx \\
&= 2\sqrt{2\pi}\, Im \left(\int_0^{\infty} e^{-2\pi^2 x^2} e^{2\pi i x t}\, dx \right).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $y = 2\pi x$,

$$\begin{aligned}
(H\mathcal{G})(t) &= \frac{2\sqrt{2\pi}}{2\pi}\, Im \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} e^{iyt}\, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Im \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2/2} e^{iyt}\, dx \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t^2/2}\, Im \left(\int_0^{\infty} e^{-(it-y)^2/2}\, dy \right).
\end{aligned}$$

Si $t \geq 0$, usamos el resultado probado en el lema previo y obtenemos

$$(H\mathcal{G})(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t^2/2} \int_0^{t} e^{x^2/2}\, dx.$$

Si $t < 0$, como $H\mathcal{G}$ es impar

$$(H\mathcal{G})(t) = -(H\mathcal{G})(-t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t^2/2} \int_0^{-t} e^{x^2/2}\, dx. = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{t^2/2} \int_0^{t} e^{x^2/2}\, dx.$$

Así, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$(H\mathcal{G})(t) = \mathcal{L}(t).$$

■

Antes de mostrar la tercera prueba del teorema enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sea f una función integrable. Si $Hf(x)$ existe, entonces $H(xf)(x)$ existe y*

$$H(xf)(x) = xHf(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{\infty} f(t)\, dt. \tag{2.5}$$

Demostración. El resultado se obtiene procediendo de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H(xf)(x) &= \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\infty}^{\infty} \frac{tf(t)}{x-t}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\infty}^{\infty} \frac{(x-(x-t))f(t)}{x-t}\,dt \\ &= \frac{x}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

∎

Observación 2.7. Si f no es integrable pero $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-t|>\epsilon} f(t)\,dt$ existe, la igualdad dada en la Proposición 2.6 también es cierta pero aparece este límite en lugar de la integral de f.

Tercera demostración del Teorema 2.4. Como $\mathcal{G}'(x) = -x\mathcal{G}(x)$ y $(H\mathcal{G})' = H\mathcal{G}'$, usando la Proposición (2.6) tenemos

$$(H\mathcal{G})'(x) \;=\; -H(x\mathcal{G})(x) = -xH\mathcal{G}(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}(t)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} - xH\mathcal{G}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - xH\mathcal{G}(x).$$

De donde tenemos la ecuación diferencial

$$(H\mathcal{G})'(x) + xH\mathcal{G}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{2.6}$$

Resolvamos la ecuación anterior con la condición inicial $(H\mathcal{G})(0) = 0$ (esta condición se cumple ya que $\mathcal{G}$ es una función par). Entonces multiplicando la ecuación (2.6) por el factor integrante $\mu(x) = e^{x^2/2}$ obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}(H\mathcal{G})(x)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{x^2/2}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior, se tiene que la solución general de la ecuación (2.6) es

$$(H\mathcal{G})(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt + C$$

Usando la condición inicial tenemos que $C = 0$ y así se completa la demostración. ∎

CAPÍTULO 3

La transformada de Hilbert y las funciones de Hermite

El objetivo principal de este capítulo es dar una demostración de que la transformada de Hilbert es una isometría en $L^2(\mathbb{R})$. En el Teorema 1.38 del capítulo 1, demostramos esto de una manera sencilla usando la Transformada de Fourier. La demostración que presentaremos ahora se basa en el artículo *The Hilbert transform and the Hermite functions* de Javier Duoandikoetxea [**9**] y se hará usando métodos de variable real, la definición de la Trasformada de Hilbert y su acción sobre las funciones de Hermite, las cuales definiremos a partir de los polinomios de Hermite. Algunos resultados utilizados en esta parte se pueden ver en [**6**].

Los *polinomios ortogonales de Hermite* llevan su nombre en honor al matemático francés Charles Hermite (1822-1901). Aparecen por primera vez, a raíz de la resolución del problema del oscilador armónico unidimensional en Mecánica Cuántica y están definidos por

$$\Phi_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) es conocida como la fórmula de Rodrigues. Haciendo cálculos sencillos con algunos valores de n obtenemos que los primeros polinomios de Hermite son

$$\Phi_0(x) = 1, \quad \Phi_1(x) = 2x, \quad \Phi_2(x) = 4x^2 - 2, \quad \Phi_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

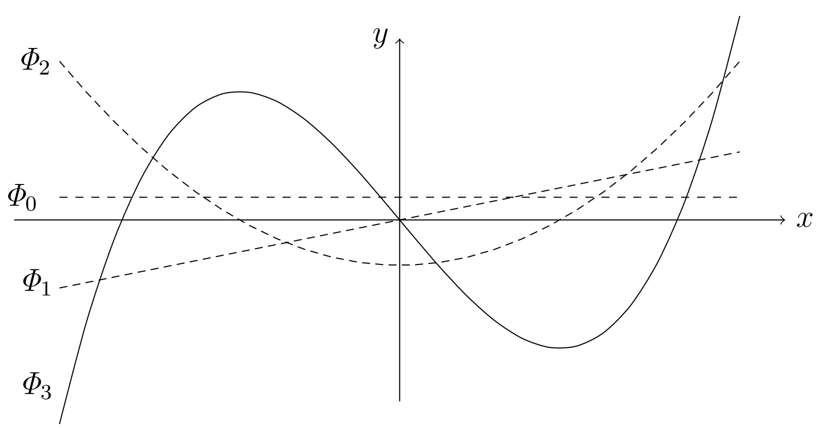


Figura 3.1. *Gráfico de los primeros cuatro polinomios de Hermite.*

A partir de la fórmula de Rodrigues podemos deducir las siguientes igualdades

$$e^{-x^2}\mathit{\Phi}_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = -\frac{d}{dx}[e^{-x^2}\mathit{\Phi}_{n-1}(x)] = e^{-x^2}[2x\mathit{\Phi}_{n-1}(x) - \mathit{\Phi}'_{n-1}(x)],$$

de donde se obtiene que los polinomios de Hermite satisfacen la fórmula de recurrencia

$$\mathit{\Phi}_n(x) = 2x\mathit{\Phi}_{n-1}(x) - \mathit{\Phi}'_{n-1}(x). \tag{3.2}$$

Si se aplica esta fórmula recursivamente se deduce que $\mathit{\Phi}_n$ es un polimonio de grado n cuyo término n-ésimo es $(2x)^n$. Además como e^{-x^2} es una función par, $\mathit{\Phi}_n$ es par o impar dependiendo de si n es par o impar.

La función generatriz de $\mathit{\Phi}_n$ viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathit{\Phi}_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathit{\Phi}'_n(x)}{n!} t^n &= 2te^{2xt-t^2} = 2t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathit{\Phi}_n(x)}{n!} t^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathit{\Phi}_n(x)}{n!} t^{n+1} \\ &= 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathit{\Phi}_{j-1}(x)}{(j-1)!} t^j, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo la sustitución $n = j-1$. Igualando coeficiente a coeficiente, obtenemos

$$\mathit{\Phi}'_0 = 0, \qquad \mathit{\Phi}'_n = 2n\mathit{\Phi}_{n-1} \quad \text{para } n > 0. \tag{3.4}$$

Combinando (3.2) y (3.4) obtenemos la fórmula recursiva

$$\mathit{\Phi}_n(x) = 2x\mathit{\Phi}_{n-1}(x) - 2(n-1)\mathit{\Phi}_{n-2}(x). \tag{3.5}$$

Una gran cantidad de problemas físicos están descritos por ecuaciones diferenciales en las que interviene un operador Laplaciano. Matemáticamente, estas ecuaciones corresponden a casos particulares del *problema de Sturm-Liouville*. Los polinomios de Hermite también se pueden obtener como un caso particular de soluciones a un problema de Sturm-Liouville.

Mostraremos ahora propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Hermite. Recordemos que las medidas absolutamente continuas μ en $\mathbb{R}$ son aquellas para las cuales existe una función ω no negativa, tal que

$$\mu(dx) = \omega(x)\, dx.$$

La función ω se llama *función de peso.*

Considerando en particular la función de peso $\omega(x) = e^{-x^2}$, se define $L^2_\omega(\mathbb{R})$ como el espacio de todas las funciones medibles tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 \omega(x)\, dx < \infty. \tag{3.6}$$

No se hace distinción entre las funciones que son iguales casi siempre. Para $f, g \in L^2_\omega(\mathbb{R})$ se define el producto interno en $L^2_\omega(\mathbb{R})$, como

$$\langle f, g\rangle_{2,\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\omega(x)\, dx. \tag{3.7}$$

El siguiente teorema permite dar otra caracterización de los polinomios en cuestión y reúne propiedades que permitirán luego caracterizar a las funciones de Hermite.

Teorema 3.1. *Los polinomios de Hermite $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ son ortogonales en $\mathbb{R}$ con respecto a la función de peso $w(x) = e^{-x^2}$, y*

$$\|\Phi_n\|^2_{2,\omega} = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{3.8}$$

Demostración. Sea f un polinomio. Entonces

$$\begin{aligned}\langle f, \Phi_n\rangle_{2,\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\Phi_n(x) e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx \\ &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$\langle f, \Phi_n\rangle_{2,\omega} = \lim_{a\to\infty} (-1)^n f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\Big|_{-a}^{a} - (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\, dx. \tag{3.9}$$

El primer término del lado derecho de la igualdad (3.9) es el producto de la función e^{-x^2} por un polinomio, este término se hace cero cuando $a \to \pm\infty$, por lo que

$$\langle f, \Phi_n\rangle_{2,\omega} = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2}\, dx.$$

Si repetimos el proceso (integración por partes) n veces, nos queda

$$\langle f, \Phi_n \rangle_{2,\omega} = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) e^{-x^2}\, dx.$$

Tomemos $f = \Phi_m$, con $m < n$, entonces $f^{(n)} \equiv 0$ y así $\langle f, \Phi_n \rangle_{2,\omega} = 0$. Esto prueba la ortogonalidad de Φ_n. Por otra parte si $f = \Phi_n$, aplicando reiteradamente la fómula de (3.2) n veces obtenemos que el término n-ésimo de Φ_n es $(2x)^n$, lo que implica que $f^{(n)}(x) = 2^n n!$. Así

$$\| \Phi_n \|_{2,\omega}^2 = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

■

Más aún, se cumple que $\{ \Phi_n \}_{n \geq 0}$ es una base ortogonal del espacio $L^2_\omega(\mathbb{R})$. Para demostrar este hecho usamos los siguientes resultados previos.

Proposición 3.2. *Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)| e^{|2\pi t x|} e^{-x^2}$ es integrable en $\mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si para todo polinomio P*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) P(x) e^{-x^2}\, dx = 0,$$

entonces $f(x) = 0$ c.s.

Demostración. Como $e^{2\pi i t x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i t x)^n}{n!}$ y

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \frac{(2\pi i t x)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|2\pi t x|^n}{n!} = e^{|2\pi x t|},$$

el Teorema de convergencia dominada aplicado a la sucesión de sumas parciales de la serie implica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t x} f(x) e^{-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi t)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) e^{-x^2}\, dx = 0.$$

Por el Teorema de inversión de Fourier $f(x) e^{-x^2} = 0$ y así $f = 0$ c.s. ■

Lema 3.3. *Sea $\{ \Phi_n \}_{n=0}^{\infty}$ la sucesión de polinomios de Hermite. Entonces todo polinomio de la forma x^k se puede escribir como combinación lineal de $\Phi_0, ..., \Phi_k$.*

Demostración. Si $k=0$ se tiene el resultado ya que $x^0 = 1 = \Phi_0$. Supongamos que se cumple para $k=n$, es decir, $x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x)$ y veamos que vale para $k=n+1$. Notemos primero que las igualdades (3.2) y (3.4) implican que

$$x\Phi_n(x) = \frac{1}{2}[\Phi_{n+1}(x) + 2n\Phi_{n-1}(x)], \quad n > 0.$$

Entonces usando esto y la hipótesis inductiva tenemos

$$x^{n+1} = xx^n = x\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x) = c_0 x + \sum_{k=1}^{n} c_k x\Phi_k(x) = \frac{c_0}{2}\Phi_0(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{2}[\Phi_{k+1}(x) + 2n\Phi_{k-1}(x)].$$

Así se completa la demostración del lema. ■

El Lema anterior nos permite afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ el espacio lineal generado por los n primeros polinomios de Hermite coincide con el espacio lineal generado por los polinomios de grado menor o igual a n.

Teorema 3.4. *El conjunto $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ es una base ortogonal de $L^2_\omega(\mathbb{R})$.*

Demostración. En vista del Teorema 3.1 basta ver que el sistema ortogonal $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ es completo. Sea $f \in L^2_\omega(\mathbb{R})$ tal que $\langle f, \Phi_n\rangle_{2,\omega} = 0$ para todo n, entonces por el Lema 3.3 para todo polinomio P se tiene que $\langle f, P\rangle_{2,\omega} = 0$ y además usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{|2\pi tx|}e^{-x^2}\,dx &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-x^2/2}|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |e^{|2\pi tx|}e^{-x^2/2}|^2\,dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2}\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{4\pi|tx|}e^{-x^2}\,dx\right)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Las dos últimas integrales son finitas ya que $f \in L^2_\omega(\mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{4\pi|tx|}e^{-x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-4\pi|tx|)}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2-4\pi|t|x)}\,dx \\
&= 2e^{4\pi^2|t|^2}\int_0^{\infty} e^{-(x-2\pi|t|)^2}\,dx = 2e^{4\pi^2|t|^2}\int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{2}(x-2\pi|t|))^2/2}\,dx
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $s = \sqrt{2}(x-2\pi|t|)$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{4\pi|tx|}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}2e^{4\pi^2|t|^2}\int_0^{\infty} e^{-s^2/2}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}}2e^{4\pi^2|t|^2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}e^{4\pi^2|t|^2}.$$

Así se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.2 y se sigue que $f = 0$ c.s. ■

Nuestro siguiente paso es definir a las funciones de Hermite.

Si consideramos $\mathcal{G}(x) = e^{-x^2/2}$ la función Gaussiana, las *funciones de Hermite* φ_n se pueden definir como el producto $\mathcal{G}(x)\Phi_n$, esto es,

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2}\Phi_n.$$

Esbozamos las gráficas de las tres primeras funciones de Hermite en el intervalo $(-2, 2)$ en la siguiente figura.

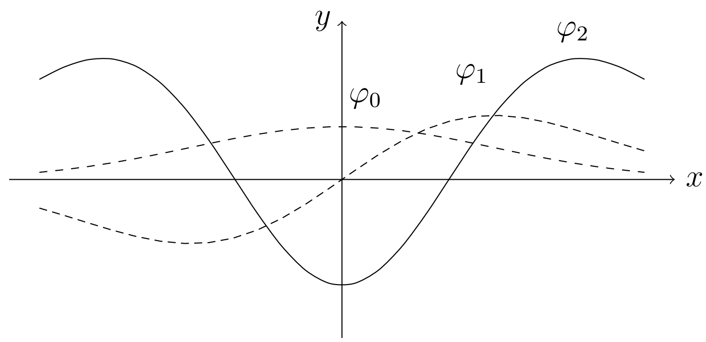


Figura 3.2. *Gráfico de las tres primeras funciones de Hermite en el intervalo* $(-2, 2)$.

La propiedades de las funciones de Hermite se pueden derivar de las de los polinomios y como veremos, ellas también forman un sistema ortogonal, pero ahora con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, de ahora en adelante trabajaremos en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. El siguiente teorema resume las propiedades más importantes de esta familia de funciones y representa un resultado clave para la demostración del teorema principal del capítulo.

Teorema 3.5. *Las funciones de Hermite $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ son una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$, es decir, son ortogonales respecto a la función de peso $\omega(x) = 1$, y satisfacen*

$$x\varphi_n(x) + \varphi_n'(x) = 2n\varphi_{n-1}(x), \tag{3.10}$$

$$x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x) = \varphi_{n+1}(x). \tag{3.11}$$

Demostración. La ortogonalidad de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ se sigue del Teorema 3.1 y de la siguiente igualdad

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n \Phi_m e^{-x^2}\, dx = \langle \Phi_n, \Phi_m \rangle_{2,\omega}.$$

Esta igualdad nos dice además que $\|\varphi_n\|_2^2 = \|\Phi_n\|_{2,\omega}^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$. La completitud de $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ es consecuencia del Teorema 3.4. Para demostrar (3.10) sustituimos $\Phi_n = \varphi_n(x)e^{x^2/2}$ en la ecuación (3.4) y obtenemos

$$2ne^{x^2/2}\varphi_{n-1}(x) = [e^{x^2/2}\varphi_n(x)]' = e^{x^2/2}[x\varphi_n(x) + \varphi_n'(x)], \tag{3.12}$$

de donde $2n\varphi_{n-1}(x) = x\varphi_n(x) + \varphi_n'(x)$. Para obtener (3.11) usamos la fórmula (3.5) remplazando n por $n+1$ y así

$$\varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - 2n\varphi_{n-1}(x) = 2x\varphi_n(x) - [x\varphi_n(x) + \varphi_n'(x)] = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x).$$

Así queda probado el teorema. ■

De la definición de las funciones de Hermite y con ayuda del teorema que acabamos de demostrar, podemos dar una propiedad importante de estas funciones y sus derivadas de primer orden.

Como $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2}\Phi_n$, haciendo un razonamiento análogo al que se hizo con los polinomios de Hermite se deduce que para un n fijo, φ_n es una función par o impar dependiendo si n es par o impar. Por otra parte, si despejamos $\varphi_n'(x)$ en la relación (3.11) del teorema anterior, esto es

$$\varphi_n'(x) \;=\; x\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x),$$

podemos deducir que si n es par, entonces φ_n' es impar ya que las funciones $x\varphi_n$ y φ_{n+1} son impares. Análogamente si n es impar entonces φ_n' es par pues es este caso $x\varphi_n$ y φ_{n+1} son funciones pares.

Para demostrar el teorema principal del capítulo no necesitaremos una expresión explícita para la transformada de Hilbert de φ_n pero sí algunas propiedades de $H\varphi_n$.

Antes generalizamos el resultado dado en la Proposición 2.6 del capítulo anterior de la siguiente manera: Para $k\geq 0$, si $x^k f\in L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, entonces

$$H(x^k f)(x) = x^k Hf(x) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-j-1}\int_{-\infty}^{\infty} t^j f(t)\,dt. \tag{3.13}$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
H(x^k f)(x) &= \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^k f(t)}{x-t}\,dt \\
&= x^k\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt+\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^k-x^k)f(t)}{x-t}\,dt \\
&= x^k Hf(x)+\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^k((t/x)^k-1)f(t)}{x-t}\,dt \\
&= x^k Hf(x)+\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^k(t/x-1)\sum_{j=0}^{k-1}(t/x)^k f(t)}{x-t}\,dt \\
&= x^k Hf(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(t/x)^j f(t)\,dt \\
&= x^k Hf(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{k-1}x^{k-j-1}\int_{-\infty}^{\infty}t^j f(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Si despejamos $Hf(x)$ en (3.13) y hacemos un cambio en el índice de la suma obtenemos lo siguiente

$$
Hf(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k}x^{-j}\int_{-\infty}^{\infty}t^{j-1}f(t)\,dt+\frac{H(x^k f)(x)}{x^k}. \tag{3.14}
$$

Notemos que usando la definición de la transformada de Hilbert tenemos

$$
\begin{aligned}
Hg(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{g(t)}{x-t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{g(t)}{x-t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{g(t)}{x-t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\left(\frac{g(t)-g(x)}{x-t}+\frac{g(x)}{x-t}\right)dt+\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{g(t)}{x-t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{g(t)-g(x)}{x-t}\,dt+\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{g(x)}{x-t}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{g(t)}{x-t}\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{g(t)}{x-t}\,dt.
\end{aligned}
$$

La última igualdad se sigue ya que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{1}{x-t}\,dt=0$.

Luego,

$$\begin{aligned}
|Hg(x)| &\le \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right| dt + \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}\frac{|g(t)|}{|x-t|}\, dt \\
&\le \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right| dt + \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}|g(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Si $t \in \{\epsilon < |x-t| < 1\}$, por el teorema del valor medio de Lagrange existe ξ entre t y x tal que

$$\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right| = |g'(\xi)| \le \|g'\|_\infty.$$

Así,

$$\begin{aligned}
|Hg(x)| &\le \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|<1}\|g'\|_\infty\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>1}|g(t)|\, dt \\
&\le \frac{2}{\pi}\|g'\|_\infty + \frac{1}{\pi}\|g\|_1 \\
&= C(\|g'\|_\infty + \|g\|_1).
\end{aligned}$$

Si g es una función integrable tal que g' existe y es acotada, lo anterior nos permite escribir la ecuación (3.14) como sigue

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k} x^{-j}\int_{-\infty}^{\infty} t^{j-1}f(t)\, dt + o(x^{-k}). \tag{3.15}$$

Usaremos la expresión (3.15) para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *$H\varphi_n$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) Para todo $n \ge 0$, $H\varphi_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Si n es impar, $H\varphi_n$ es par y

$$|H\varphi_n(x)| \le C_n|x|^{-2} \quad y \quad |(H\varphi_n)'(x)| \le C_n|x|^{-3}.$$

Además $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} H\varphi_n = 0$.

(3) Si n es par, $H\varphi_n$ es impar y

$$|H\varphi_n(x) - M_n x^{-1}| \le C_n|x|^{-3} \quad y \quad |(H\varphi_n)'(x)| \le C_n|x|^{-2},$$

donde $M_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n$.

Demostración. La primera afirmación se sigue derivando repetidamente bajo el signo de la integral, esto es, $(H\varphi_n)^{(k)} = H\varphi_n^{(k)}$.

Cuando n es impar, las integrales en $\mathbb{R}$ de φ_n, φ_n' y $x\varphi_n'$ son iguales a cero, esto se justifica notando que las funciones φ_n y $x\varphi_n'$ son impares y, por otra parte tenemos que

$$\varphi_n' \text{ es par}, \quad \varphi_n(0) = 0 \quad \text{ y } \quad \lim_{x\to\infty} \varphi_n(x) = 0,$$

lo que permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n'(t)\,dt = 2\int_0^{\infty} \varphi_n'(t)\,dt = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b \varphi_n'(t)\,dt = 2\lim_{b\to\infty}\varphi_n(b) = 0.$$

Usando la fórmula (3.15) para $k = 2$ y $f = \varphi_n$ tenemos

$$\begin{aligned} H\varphi_n(x) &= \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_n(t)\,dt + o(x^{-2}) \\ &= \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_n(t)\,dt + o(x^{-2}). \end{aligned}$$

Entonces,

$$|H\varphi_n(x)| \;\leq\; \left|\frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_n(t)\,dt\right| + |o(x^{-2})| = C_n|x|^{-2}.$$

Ahora usamos (3.15) con $k = 3$ y $f = \varphi_n'$

$$\begin{aligned} H\varphi_n'(x) &= \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n'(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_n'(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\varphi_n'(t)\,dt + o(x^{-3}) \\ &= \frac{1}{\pi}x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\varphi_n'(t)\,dt + o(x^{-3}). \end{aligned}$$

Luego,

$$|(H\varphi_n)'(x)| = |H\varphi_n'(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left|x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\varphi_n'(t)\,dt\right| + |o(x^{-3})| = C_n|x|^{-3}.$$

Por otra parte, si n es par, φ_n es par y $H\varphi_n$ es impar. Además $x\varphi_n$ y φ_n' son impares. Tomando $k = 3$ y $f = \varphi_n$ en (3.15) nos queda

$$\begin{aligned} H\varphi_n(x) &= \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} t\varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\varphi_n(t)\,dt + o(x^{-3}) \\ &= \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\varphi_n(t)\,dt + o(x^{-3}). \end{aligned}$$

De donde

$$\left|H\varphi_n(x) - \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\,dt\right| \leq \frac{1}{\pi}\left|x^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\varphi_n(t)\,dt\right| + |o(x^{-3})| = C_n|x|^{-3}.$$

Por último hacemos $k = 2$ y $f = \varphi_n'$ en (3.15) y obtenemos

$$\begin{aligned} H\varphi_n'(x) &= \frac{1}{\pi}x^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n'(t)\,dt + \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi_n'(t)\,dt + o(x^{-2}) \\ &= \frac{1}{\pi}x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi_n'(t)\,dt + o(x^{-2}), \end{aligned}$$

y así

$$|(H\varphi_n')(x)| = |H\varphi_n'(x)| \leq \frac{1}{\pi}\left|x^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi_n'(t)\,dt\right| + |o(x^{-2})| = C_n|x|^{-2}.$$

Falta demostrar que para n impar $\int_{\mathbb{R}} H\varphi_n = 0$. Sumando las fórmulas (3.10) y (3.11) obtenemos

$$2\varphi_n'(x) = 2n\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n+1}(x).$$

Aplicando H a la igualdad anterior nos queda

$$2(H\varphi_n)'(x) = 2nH\varphi_{n-1}(x) - H\varphi_{n+1}(x). \tag{3.16}$$

Integrando ambos lados de (3.16) y usando que $(H\varphi_n)'$ es impar se deduce que

$$2n\int_{\mathbb{R}} H\varphi_{n-1}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} H\varphi_{n+1}(x)\,dx.$$

Entonces para demostrar que la integral en $\mathbb{R}$ de $H\varphi_n$ es cero para todo n impar, es suficiente probar que es cero para $n = 1$. Para ello notemos que

$$-2\varphi_0'(x) = (-2e^{-x^2/2})' = -2(-xe^{-x^2/2}) = 2xe^{-x^2/2} = \varphi_1(x).$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H\varphi_1(x)\,dx = -2\int_{-\infty}^{\infty} H\varphi_0'(x)\,dx = -2\int_{-\infty}^{\infty}(H\varphi_0)'(x)\,dx.$$

Como $H\varphi_0' = (H\varphi_0)'$ es par y $H\varphi_0(0) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H\varphi_1(x)\,dx &= -4\int_0^{\infty}(H\varphi_0)'(x)\,dx = -4\lim_{b\to\infty}\int_0^b (H\varphi_0)'(x)\,dx \\ &= -4\lim_{b\to\infty}(H\varphi_0(b) - H\varphi_0(0)) = 0 \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue ya que $H\varphi_0$ decrece a cero en el infinito. ■

Teorema 3.7. *La ecuación $H(H\varphi_n) = -\varphi_n$ se satisface para todo $n \geq 0$. En consecuencia, $\{H\varphi_n\}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ y la transformada de Hilbert se puede extender como una isometría a $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. La demostración del teorema es bastante amplia, por lo que la haremos por pasos:

Paso 1.

Sea $\psi_n = H\varphi_n$, $n \geq 0$. En primer lugar veamos que $H\psi_n$ satisface la misma relación de recurrencia dada por (3.11) en el Teorema 3.5, es decir, que $H\psi_n$ satisface la relación

$$H\psi_{n+1}(x) = xH(\psi_n)(x) - (H\psi_n)'(x).$$

Para demostrar esto aplicamos la transformada de Hilbert a ambos lados de la igualdad (3.11) y obtenemos

$$H\varphi_{n+1}(x) \quad = \quad H(x\varphi_n)(x) - H(\varphi_n')(x).$$

Usando la Proposición 2.6 y la propiedad de la transformada de Hilbert de la derivada de una función se tiene

$$H\varphi_{n+1}(x) \quad = \quad x(H\varphi_n)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\, dt - (H\varphi_n)'(x),$$

lo que equivale a escribir $\psi_{n+1}(x) = -\psi_n{}'(x) + x\psi_n(x) - M_n$, donde $M_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n$. Aplicando nuevamente la transformada de Hilbert obtenemos

$$H\psi_{n+1}(x) = -(H\psi_n)'(x) + H(x\psi_n - M_n)(x).$$

Consideremos dos casos:

- Si n es impar, entonces φ_n es impar. Por lo tanto $M_n = 0$ y $H(x\psi_n)(x) = x(H\psi_n)(x)$ por la Proposición 2.6. Luego

$$H\psi_{n+1}(x) = -(H\psi_n)'(x) + xH(\psi_n)(x).$$

- Si n es par, φ_n es par y $\psi_n = H\varphi_n$ es impar. Usando esto y la transformada de Hilbert truncada tenemos

$$\begin{aligned} H_\epsilon(x\psi_n - M_n)(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{(x-t)\psi_n(x-t) - M_n}{t}\,dt \\ &= x\frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon} \frac{\psi_n(x-t)}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\left(\psi_n(x-t) + \frac{M_n}{t}\right)dt \\ &= x(H_\epsilon\psi_n)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\psi_n(x-t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{|t|>\epsilon}\frac{M_n}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando ϵ tiende a 0 tenemos

$$H(x\psi_n - M_n)(x) = x(H\psi_n)(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x-t)\,dt - \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_n}{t}\,dt.$$

El término $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(s)\,ds$ es cero, ya que ψ_n es impar. El término que involucra a M_n también es igual a cero y se verifica de la siguiente manera

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{M_n}{t}\,dt = M_n\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\,dt = 0.$$

Así, para todo $n \geq 0$ se cumple

$$H\psi_{n+1}(x) = xH(\psi_n)(x) - (H\psi_n)'(x).$$

Paso 2.

En segundo lugar veamos que $H\psi_0(x) = -\varphi_0(x)$, lo cual es equivalente a demostrar

$$\sqrt{2/\pi}(HD)(x) = -\mathcal{G}(x),$$

donde $D(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt$, ya que,

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= e^{-x^2/2} = \mathcal{G}(x), \\ \psi_0(x) &= H\varphi_0(x) = H(e^{-x^2/2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}D(x). \end{aligned}$$

Notemos que

$$D'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt\right) = -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,dt + e^{-x^2/2}e^{x^2/2},$$

es decir, $D'(x) = -xD(x) + 1$. Aplicando H a ambos lados nos queda

$$H(D')(x) = -H(xD)(x) + H(1)(x) = -xHD(x) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} D(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Lo anterior se sigue usando la Proposición 2.6 y notando que $H(1)(x) = 0$. La última integral de (3.17) es cero pues D es una función impar. Así $(HD)'(x) = -xHD(x)$, la cual es una ecuación diferencial que se puede resolver utilizando un factor integrante como sigue

$$\begin{aligned} (HD)'(x) + xHD(x) &= 0 \\ e^{x^2/2}(HD)'(x) + xe^{x^2/2}HD(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(e^{x^2/2}HD(x)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene $HD(x) = Ce^{-x^2/2}$ donde C es una constante. Si utilizamos la condición inicial $HD(0) = -\sqrt{\pi/2}$ obtenemos lo requerido. Será suficiente entonces verificar que la igualdad $HD(0) = -\sqrt{\pi/2}$ se cumple. Para $0 \leq \lambda \leq 1$, consideremos la función

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{x} \int_0^{\lambda x} e^{t^2/2}\, dt\, dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I'(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{x} x e^{\lambda^2 x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{\lambda^2 x^2/2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-\lambda^2)x^2/2}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{1-\lambda^2}x)^2/2}\, dx. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $t = \sqrt{1-\lambda^2}x$, tenemos

$$I'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

De aquí se deduce que $I(\lambda) = \sqrt{2\pi} \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{arcsen}(\lambda)$. Luego

$$\begin{aligned} (HD)(0) &= \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{D(-x)}{x}\, dx = \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{-D(x)}{x}\, dx = -\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{D(x)}{x}\, dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{x} \int_0^x e^{t^2/2}\, dt\, dx = -\frac{1}{\pi} I(1) = -\frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi}\frac{\pi}{2} = -\sqrt{\pi/2}. \end{aligned}$$

Paso 3.

La relación (3.11) y las igualdades que obtuvimos en los pasos 1 y 2, es decir, las tres igualdades siguientes

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = x\varphi_n(x) - \varphi_n'(x), \\ H\psi_{n+1}(x) = x(H\psi_n)(x) - (H\psi_n)'(x), \\ H\psi_0 = -\varphi_0, \end{cases}$$

nos permiten demostrar por inducción que $H\psi_n = -\varphi_n$ para todo $n \geq 0$. En efecto, si $n = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} H\psi_1(x) &= x(H\psi_0)(x) - (H\psi_0)'(x) = -x\varphi_0(x) - (-\varphi_0)'(x) = -(x\varphi_0(x) - \varphi_0'(x)) \\ &= -\varphi_1(x) \end{aligned}$$

Supongamos que la igualdad se cumple para $n = k$, es decir, $H\psi_k(x) = \varphi_k(x)$ y veamos que vale para $n = k+1$, esto es,

$$\begin{aligned} H\psi_{k+1}(x) &= x(H\psi_k)(x) - (H\psi_k)'(x) = -x\varphi_k(x) - (-\varphi_k)'(x) = -(x\varphi_k(x) - \varphi_k'(x)) \\ &= -\varphi_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Paso 4.

Ahora veamos que

$$\langle \varphi_n, H\psi_m \rangle_2 = -\langle H\varphi_n, \psi_m \rangle_2, \tag{3.18}$$

para todo n, m. Probemos la igualdad (3.18) primero para la transformada de Hilbert truncada. Las propiedades de decrecimiento de φ_n y ψ_n permiten aplicar el Teorema de Fubini, y así

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, H_\epsilon \psi_m \rangle_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{\psi_m(t)}{x-t}\, dt\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{|x-t|>\epsilon} \frac{\varphi_n(t)}{t-x}\, dx \right) \psi_m(t)\, dt \\ &= \langle -H_\epsilon \varphi_n, \psi_m \rangle_2 \\ &= -\langle H_\epsilon \varphi_n, \psi_m \rangle_2. \end{aligned}$$

Veamos ahora que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \langle \varphi_n, H_\epsilon \psi_m \rangle_2 = \langle \varphi_n, \lim_{\epsilon \to 0} H_\epsilon \psi_m \rangle_2. \tag{3.19}$$

Manipulando algebraicamente el lado izquierdo de la igualdad (3.19) se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\langle\varphi_n, H_\epsilon\psi_m\rangle_2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)H_\epsilon\psi_m(x)\,dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\left(\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\epsilon}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right)dx.
\end{aligned}$$

Ahora, consideremos la función

$$g(x,\epsilon)=\varphi_n(x)\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right).$$

Por el Teorema del valor medio de Lagrange existe ξ entre x y t tal que

$$\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}=-\psi_m'(\xi).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|g(x,t)| &\leq |\varphi_n(x)|\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\left|\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}\right|dt+\int_{|x-t|>1}\frac{|\psi_m(t)|}{|x-t|}\,dt\right) \\
&\leq |\varphi_n(x)|\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}|\psi_m'(\xi)|\,dt+\int_{|x-t|>1}|\psi_m(t)|\,dt\right) \\
&\leq |\varphi_n(x)|\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\|\psi_m'\|_\infty\,dt+\|\psi_m\|_1\right) \\
&\leq C|\varphi_n(x)|(\|\psi_m'\|_\infty+\|\psi_m\|_1),
\end{aligned}$$

y $C_m|\varphi_n|\in L^1$, donde $C_m=C(\|\psi_m'\|_\infty+\|\psi_m\|_1$.

Así, por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\langle\varphi_n, H_\epsilon\psi_m\rangle_2 &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\psi_m(t)-\psi_m(x)}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\psi_m(t)}{x-t}\,dt\right)dx \\
&= \langle\varphi_n, \lim_{\epsilon\to 0}H_\epsilon\psi_m\rangle_2.
\end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior demostramos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle H_\epsilon\varphi_n,\psi_m\rangle_2=\langle\lim_{\epsilon\to 0}H_\epsilon\varphi_n,\psi_m\rangle_2. \tag{3.20}$$

En efecto, haciendo cálculos similares obtenemos que el lado izquierdo de la igualdad (3.20) es igual a lo siguiente

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle H_\epsilon\varphi_n,\psi_m\rangle_2=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\psi_m(x)\left(\int_{\epsilon<|x-t|<1}\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n}{x-t}\,dt+\int_{|x-t|>1}\frac{\varphi_n(t)}{x-t}\,dt\right)dx,$$

y usando el Teorema de convergencia dominada al igual que antes se obtiene el resultado.

Combinando la igualdad $\langle\varphi_n,H_\epsilon\psi_m\rangle_2=-\langle H_\epsilon\varphi_n,\psi_m\rangle_2$ con (3.19) y (3.20) obtenemos lo deseado.

Paso 5.

De los pasos 3 y 4 tenemos,

$$\begin{cases}\langle\varphi_n,H\psi_m\rangle_2=-\langle H\varphi_n,\psi_m\rangle_2,\\ \qquad H\psi_m=H(H\varphi_m)=-\varphi_m.\end{cases}$$

De las dos igualdades anteriores se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n,H\psi_m\rangle_2&=\langle\varphi_n,H(H\varphi_m)\rangle_2=-\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_2\\ -\langle H\varphi_n,\psi_m\rangle_2&=-\langle\psi_n,\psi_m\rangle_2\end{aligned}$$

de donde $\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle_2=\langle\psi_n,\psi_m\rangle_2$. Como $\{\varphi_n\}$ es un sistema ortogonal de L^2, por la igualdad anterior la sucesión $\{\psi_n\}$ también es un sistema ortogonal de L^2. En particular si $n=m$ se tiene $\|\varphi_n\|_2=\|\psi_n\|_2=\|H\varphi_n\|_2$, es decir, H es una isometría sobre las funciones de Hermite.

Paso 6.

El próximo paso es extender H como isometría a todo L^2 y lo haremos de la siguiente manera. Como las funciones de Hermite $\{\varphi_n\}$ son un sistema ortogonal de L^2, dada $f\in L^2$, escribimos

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,\varphi_n\rangle_2}{\|\varphi_n\|_2^2}\varphi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,\varphi_n\rangle_2}{2^n n!\sqrt{\pi}}\varphi_n.$$

Entonces

$$Hf=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,\varphi_n\rangle_2}{2^n n!\sqrt{\pi}}H\varphi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f,\varphi_n\rangle_2}{2^n n!\sqrt{\pi}}\psi_n,$$

donde la suma converge en L^2. De estas igualdades se sigue que para toda $f\in L^2$

(1) $\|Hf\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\langle f, \varphi_n \rangle_2|^2}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \|f\|_2$.

(2) $\langle Hf, \psi_n \rangle_2 = \langle f, \varphi_n \rangle_2$.

(3) $H(Hf) = -f$.

Paso 7.

Falta ver que $\{\psi_k\}$ es completo. Sea $f \in L^2$ tal que $\langle f, \psi_k \rangle_2 = 0$ para todo k. Como $0 = \langle f, \psi_k \rangle_2 = -\langle H(Hf), \psi_k \rangle_2 = -\langle Hf, \varphi_k \rangle_2$ para todo k, entonces $Hf = 0$ y así $f = 0$. Esto completa la prueba del teorema. ■

Bibliografía

[1] A.P. Calderón, Y. Sagher, The Hilbert transform of the Gaussian, University of Chicago, Academic Press, 1991. 2

[2] E. Kochneff, Y. Sagher and R. Tan, On a theorem of Akhiezer, 1993. 2

[3] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on euclidean spaces , Princeton, New Jersey. Princeton University Press, 1971. 34

[4] Frederick W. King, Hilbert transform Volume 1, Encyclopedia of mathematics and its aplicattions, Cambrige university Press, 2009.

[5] George Bachman and Lawrence Narici, Functional Analysis, Academic Press, 1966. 3

[6] Gerard B. Folland, Fourier analysis ans its applications, University of Washington, 1992. 53

[7] Ileana Iribarren, Introducción a la Teoría de la medida, Universidad Central de Venezuela, 2006. 3

[8] J. Duoandikoetxea, Fourier analysis. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society. 3

[9] J. Duoandikoetxea, The Hilbert transform and Hermite functions: A real variable proof of the L^2-isometry, Journal Mathematical Analysis and Applications 347, 2007. 2, 53

[10] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund, Measure and integral. An Introduction to Real Analysis, 1977. 3, 14

[11] Sadosky, Cora, Interpolation of operators and singular integrals. An introduction to Harmonic Analysis, 1979. 3, 19, 20, 26

[12] Toro, María Angélica. La transformada de Hilbert. Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática, 1979.

[13] Urbina, W. Notas sobre teoria de aproximación y polinomios ortogonales. TFORMA. AMV, 2009.