UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Topologías sobre conjuntos numerables

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la **Br. Lysis González Zorrilla** para optar al título de Licenciada en Matemática.

Tutor: Dr. José G. Mijares.

Caracas, Venezuela
Julio 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Topologías sobre conjuntos numerables** ", presentado por la **Br. Lysis González Zorrilla**, titular de la Cédula de Identidad **18.357.232**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciada en Matemática**.

Dr. José G. Mijares
Tutor

Dra. Laura Galindo
Jurado

Dr. Carlos A. Di Prisco
Jurado

A mis padres: Jasmin y Pablo,

a quienes hubiera elegido siempre para ser su hija...

❀

Mientras trabajé en éste proyecto recibí ayuda técnica y espiritual de muchas de personas. Quisiera agradecer especialmente

A Dios, por todas sus bendiciones. Por darme seguridad y confianza cada vez que lo necesito. Gracias siempre.

A mis padres, por demostrar que pueden sacar adelante a sus hijos sin importar los tropiezos que se presenten, porque sin escatimar esfuerzo alguno sacrificaron gran parte de su vida para educarme, por enseñarme que el trabajo tiene siempre sus frutos y recompensas, porque creyeron en mí y me dieron el apoyo necesario para ser quien ahora soy.

A mis hermanos: Ariadna, Theo, Aquiles, Igor, Fidel y Al Najib, por llenar de amor y alegría cada día de mi vida y brindarme, junto a mis padres, un hogar cálido. Los quiero mucho muchachos.

A Expedito, por todos los momentos vividos, por estar siempre a mi lado, por su constante estímulo, su amistad incondicional, por sus palabras alentadoras en los momentos difíciles.

A Goyo, maestro. Por su generosidad al brindarme la oportunidad de trabajar con el en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la concreción de éste trabajo. Por su paciencia, apoyo y comprensión. Gracias por todo lo que me has enseñado, ha sido un honor ser tu tesista.

A la Profe Laura y el Profe Di Prisco, por sus valiosas sugerencias, correciones y estímulo. Gracias por inspirarme.

Al profesor Carlos Uzcátegui, por sus importantes aportes y su disposición a ayudar en todo momento.

A todos los profesores que contribuyeron en mi formación académica, no sólo de la Universidad sino de toda la vida, muchisimas gracias porque de alguna manera forman parte de lo que ahora soy.

A Mario Benedetti y a Gioconda Belli por toda su poesía

A la música del viento, al aroma dulce de los nardos de mi ventana y a la belleza de las azucenas.

Muchas gracias a todos

Lysis

❀❀❀

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

Dado un conjunto X, el conjunto de partes $\wp(X)$ se identifca con el espacio producto $\{0,1\}^X$ a través de la aplicación biyectiva que hace corresponder cada subconjunto de X a su función característica. Así, cuando X es numerable, $\wp(X)$ es un espacio métrico completo y separable, homeomorfo al conjunto de Cantor y cualquier topología τ definida sobre X está asociada a un subconjunto de $\{0,1\}^X$; de modo que tiene sentido preguntarse si τ es, como subconjunto de $\{0,1\}^X$, un conjunto abierto, cerrado, F_σ, G_δ, boreliano, analítico,etc.

Éste tipo de restricciones aparece en resultados nétamente topológicos, a pesar de que éste hecho no es muy conocido,por ejemplo, aparece en la caracterización que Godefroy da de los compactos de Rosenthal separables, (es decir, espacios compactos de funciones de primera clase de Baire con la topología de la convergencia puntual)[1].

El estudio de las topologías en éste contexto se inició con el trabajo [15] y ha mostrado tener interesantes aplicaciones [14, 17].

En éste trabajo estudiamos la caracterización de topologías definidas sobre conjuntos numerables que S. Todorcevic y C. Uzcátegui dan en [13] , estableciendo conexiones entre las propiedades de la teoría descriptiva de conjuntos y propiedades puramente topológicas.

En el capítulo 1 presentamos algunos preliminares de topología que serán de utilidad a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 describimos diversos conceptos y probamos resultados de la teoría descriptiva de conjuntos que nos permitirán estudiar [13].

En el capítulo 3 estudiamos a τ como subconjunto de $\{0,1\}^X$. Primero definimos un tipo especial de topologías: las Alexandroff y mostramos que están representadas por pre-ordenes, luego analizamos cuando una topología τ es un subconjunto cerrado, abierto y denso de $\{0,1\}^X$.

Existen numerosos resultados concernientes a las propiedades de filtros e ideales definidos sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ desde el punto de vista de la teoría descriptiva de conjuntos, [9, 12, 18, 19]. En la sección (3.2) mostramos que cada filtro sobre $\mathbb{N}$ tiene asociada una topología, de manera que los resultados sobre la existencia de filtros de complejidad proyectiva dada proveen inmediatamente ejemplos de topologías sobre $\mathbb{N}$ de la misma complejidad. Esas topologías no son Hausdorff, sin embargo, dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{N}$, a través de una construcción sencilla [13] es posible definir una topología Hausdorff de la misma complejidad que el filtro $\mathcal{F}$.

En nuestro tercer capítulo estudiamos topologías que tienen la propiedad de Baire y comprobamos que si una topología T_1 la tiene, entonces debe ser un conjunto magro a menos que tenga solo una cantidad finita de puntos límite. Vemos también que no existen topologías T_1 que sean G_δ pero que si hay topologías T_0 $G_\delta-$completas (y por lo tanto, estrictamente G_δ).

Al final, estudiamos algunos resultados concernientes a la complejidad de bases y subbases, así como el problema de la complejidad de una topología generada por una base F_σ o analítica.

En éste trabajo usaremos la notación y terminología usual de la teoría descriptiva de conjuntos: Si X es un conjunto, $X^{[<\infty]}$ denotará la familia de todos los subconjuntos finitos de X. Así, $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ será la familia de todos los subconjuntos finitos de números naturales y $2^{<\omega}$ la familia de todas las sucesiones finitas de 0's y 1's. Escribiremos ω cuando nos refiramos a el primer ordinal infinito (a veces lo identificaremos con $\mathbb{N}$), $\omega+1$ cuando nos refiramos a su sucesor $\omega \cup \{\omega\}$, ω_1 denotará a el primer ordinal no numerable.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En éste capítulo describimos el contexto en el que se abordan distintas cuestiones que hemos tratado en éste trabajo.

Omitiremos la demostración de algunos resultados básicos que se pueden leer con mayor detalle en [2, 5, 6, 8, 11].

1.1 Espacios Topológicos

Definición 1.1. Sea X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X. Diremos que τ es una **topología** sobre X si:

1. X, $\emptyset \in \tau$.

2. τ es cerrada bajo uniones arbitrarias. Es decir, si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \tau$ es una familia cualquiera de elementos de τ entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \tau$.

3. τ es cerrada bajo intersecciones finitas. Es decir, dada $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$,una familia finita de elementos de τ, se tiene, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \tau$.

A los elementos de τ los llamaremos **conjuntos abiertos** y al par (X, τ) **espacio topológico**.

Por comodidad, siempre que no exista ambigüedad, escribiremos sólo X para referirnos a un espacio topológico (X, τ).

Ejemplo 1.2. Son ejemplos de espacios topológicos los siguientes

1. (X, τ_{ind}), donde $\tau_{ind} = \{\emptyset, X\}$, $X \neq \emptyset$. τ es la **Topología Indiscreta**.

2. El par (X, τ_{dis}), donde X es cualquier conjunto y $\tau_{dis} = \wp(X)$ es la familia de todos los subconjuntos de X. La familia $\tau_{dis} = \wp(X)$ recibe el nombre de **Topología Discreta**.

3. Sea X un conjunto. Un subconjunto **cofinito** de X es un subconjunto $A \subseteq X$ cuyo complemento $X \backslash A$ es un conjunto finito. El par (X, τ_{cof}), con $\tau_{cof} = \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ o } A \text{ cofinito}\}$ es un espacio topológico. τ_{cof} es llamada **Topología Cofinita**.

1.2 Conjuntos abiertos y cerrados.

Definición 1.3. Un subconjunto de un espacio topológico X es **cerrado** si y sólo si su complemento $X \backslash A$ es abierto.

Un subconjunto del espacio topológico (X, τ) que es abierto y cerrado a la vez es un conjunto **clopen**.

***Proposición* 1.4.** *Sea X un espacio topológico. Entonces se verifica:*

1. *$\emptyset$ y X son conjuntos clopen.*

2. *La familia de los conjuntos abiertos, τ, es cerrada bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas.*

3. *La familia de los conjuntos cerrados es cerrada bajo uniones finitas e intersecciones arbitrarias.*

1.3 Entornos.

Los entornos constituyen la manera más natural de describir topologías. Esta herramienta indica como funcionan las cosas cerca de cada punto, es decir, permite dar una descripción local.

Definición 1.5. Sea X un espacio topológico. Un **entorno** de un punto $x \in X$ es un conjunto $V \subseteq X$ que contiene un conjunto abierto al cual x pertenece.

Dado $x \in X$ denotaremos como $\mathcal{NBH}$(x) a la familia de todos los entornos de x.

Observación 1.6. Notemos que cada entorno de un punto contiene un entorno abierto del punto. Por lo tanto, **sin pérdida de generalidad, consideraremos entornos abiertos en las pruebas de nuestro trabajo.**

Observación 1.7. Los entornos también son llamados vecindades.

***Teorema* 1.8.** *Un conjunto es abierto si y sólo si contiene una vecindad para cada uno de sus puntos.*

1.4 Bases para una Topología.

Definición 1.9. Una **base** para una topología τ definida sobre un conjunto X es una subfamilia $\mathcal{B}$ de τ tal que para cada $x \in X$, y cada vecindad $U(x)$, existe un miembro V de $\mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq U$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman **abiertos básicos**

Existe una caracterización para las bases que es frecuentemente usada como una definición:

***Proposición* 1.10.** *Una subfamilia $\mathcal{B}$ de una topología τ es una base para τ si y sólo si cada miembro de τ es la unión de miembros de $\mathcal{B}$.*

Definición 1.11. Una familia $\mathcal{S}$ de conjuntos es una **subbase** para una topología τ si la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para τ. Es decir, si cada miembro de τ es unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Ejemplo 1.12. Los siguientes son ejemplos de bases y subbases para las topologías que hemos considerado en los ejemplos anteriores

1. El conjunto $\{X\}$ es una base para la topología indiscreta definida sobre X.
2. La familia $\{\{x\} : x \in X\}$ de los subconjuntos de X con un solo elemento es una base para τ_{dis} definida sobre X.
3. Si X es un conjunto infinito dotado de τ_{cof}, entonces la familia $\mathcal{S}$ =$\{X\backslash\{x\} : x \in X\}$ es una subbase para τ_{cof}.

Observación 1.13. Existen generalmente muchas bases y subbases diferentes para una topología τ sobre un conjunto X. La elección depende de los problemas a considerar.

1.5 Espacios T_0, T_1 y Hausdorff.

Definición 1.14. Un espacio topológico X se dice T_0, si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$, existe una vecindad abierta de x, $V(x)$, tal que $y \notin V(x)$.

Por otro lado, si además existe un entorno abierto de y, $V(y)$, tal que $x \notin V(y)$ y $y \notin V(x)$, decimos que X es T_1.

La siguiente es otra caracterización de los espacios T_1

***Teorema* 1.15.** *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. *X es T_1.*
2. *Para cada $x \in X$, el conjunto unitario $\{x\}$ es cerrado. Decimos en éste caso, abusando del lenguaje, que los* **"puntos son cerrados"**.

Demostración

(1. $\Rightarrow$ 2.) Sea $x \in X$ cualquiera. Por hipótesis, para cada $y \in X\backslash\{x\}$, existe un abierto $V(y)$ al cual x no pertenece. De modo que $X\backslash\{x\} = \bigcup_{y \neq x} V(y)$ es unión arbitraria de abiertos y por tanto, abierto.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Supongamos que para cualesquiera x, y elementos distintos en X se tiene que $\{x\}, \{y\}$ son cerrados. Los conjuntos $V(x) = X\backslash\{y\}$ y $V(y) = X\backslash\{x\}$ son vecindades abiertas de x e y respectivamente tales que $x \notin V(y), y \notin V(x)$. □

Definición 1.16. Un espacio topológico X es **Hausdorff** o T_2, si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$. Se suele decir que U y V separan a x e y.

Observación 1.17. Notemos que si un espacio topológico (X, τ) es T_2 entonces es T_1.

Ejemplo 1.18. En los ejemplos de espacios topológicos que hemos venido considerando tenemos

1. τ_{ind} no es T_1 (luego, no es T_2).

2. τ_{dis} es T_2 (y por tanto, T_1 y T_0).

3. τ_{cof} es T_1 pero no T_2.

1.6 Interior y Clausura de un conjunto.

Definición 1.19. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto adherente** a A si x no puede ser separado del conjunto A por ninguna de sus vecindades. Ésto es, para toda vecindad de x, $V(x)$ se tiene $V(x) \cap A \neq \emptyset$.

Por otro lado, decimos que $x \in A$ es un **punto interior** a A si existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq A$.

A el conjunto $\overline{A} = \{x : \text{x es adherente a A}\}$ lo llamamos la **adherencia** o **clausura** de A.

El conjunto $int(A) = \{x : x \text{ es interior a } A\}$ es llamado **interior** de A

***Teorema* 1.20.** *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, esto es $\overline{A} = \bigcap\{F : F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$.*

1.7 Frontera

Dado un espacio topológico X, la **frontera** de $A \subseteq X$ es el conjunto $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$

***Teorema* 1.21.** *En un espacio topológico X se verfican las siguientes propiedades para todo $A \subseteq X$:*

1. *$Fr(A)$ es cerrado.*
2. *$\overline{X \backslash A} = X \backslash int(A)$.*
3. *$Fr(A) \cap int(A) = \emptyset$.*
4. *$\overline{A} = int(A) \cup Fr(A)$.*

1.8 La Topología Producto.

Existe una manera standard de dotar de una topología a el producto cartesiano de espacios topológicos. La construcción la presentamos a continuación, es muy útil en distintos contextos y es de especial importancia en nuestro trabajo.

Definición 1.22. Sean (X, τ_X) y (X, τ_Y) espacios topológicos. La **topología producto** en $X \times Y$ es la topología que tiene como base a la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde $U \in \tau_X$ y $V \in \tau_Y$.

Observación 1.23. Tenemos entonces por el teorema (1.8), que un subconjunto W de $X \times Y$ es abierto en la topología producto si y sólo si para cada $(x, y) \in W$ existen vecindades abiertas $U(x) \subseteq X$ y $V(y) \subseteq Y$ tales que $U(x) \times V(y) \subseteq W$.

Es posible expresar la topología producto en términos de una subbase. Para hacerlo, definamos antes unas funciones especiales llamadas proyecciones.

Definición 1.24. Consideremos las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_2 : X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

π_1 y π_2 son llamadas **proyecciones** de $X \times Y$ en su primer y segundo factor respectivamente.

Si U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es precisamente el conjunto $U \times Y$ que es un abierto en $X \times Y$. De manera similar, si V es un abierto en Y, entonces $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$, abierto tambien en $X \times Y$.

Este hecho lo enunciamos en el siguiente teorema:

***Teorema* 1.25.** *La colección* $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \in \tau_X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \in \tau_Y\}$ *es una subbase para la topología producto en* $X \times Y$.

Extendamos ésta definición a el producto cartesiano de una familia arbitraria de espacios topológicos:

Sea $\{X_\alpha, \tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

la función que aplica cada elemento del espacio producto en su β-ésima coordenada,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}) = x_\beta$$

llamada **función proyección** asociada al índice β.

Sea $\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \in \tau_{X_\beta}\}$ y sea $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in \Lambda} S_\beta$.

La **topología producto** en el espacio $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Consideremos $\mathcal{B}$, la base que $\mathcal{S}$ genera. Sea $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$ un subconjunto finito de Λ y sea U_{β_i} un conjunto abierto en X_{β_i} para $i = 1, ..., n$. Entonces,

$$B = \pi_{\beta_i}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap ... \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n})$$

es un elemento de $\mathcal{B}$.

Otra forma muy útil de describir éste elemento básico es la siguiente:

Si $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in B$ entonces su β_1-ésima coordenada está en U_{β_1}, su β_2-ésima coordenada en U_{β_2} y así sucesivamente.

No hay restricciones sobre la α-ésima coordenada de x si α no es uno de los índices $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$.

Como resultado, podemos escribir a B como el producto:

$$B = \prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$$

donde U_α denota el espacio X_α si $\alpha \neq \beta_1, ..., \beta_n$.

Ejemplo 1.26. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ un conjunto numerable y sea $2 = \{0, 1\}$.

Asociemos a cada subconjunto de X su función caracteríatica e identifiquemos al conjunto $\wp(X)$ con 2^X dotado de la toplogía producto $\tau(2^X)$ que resulta de considerar a $\{0, 1\}$ un espacio discreto.

Notemos que cada función $f \in 2^X$ puede pensarse como una sucesión de 0's y 1's; así la n-ésima proyección coordenada es $\pi_n : 2^X \longrightarrow \{0, 1\}$ con $\pi_n(f((x_k)_{k\in\mathbb{N}})) \in \{0, 1\}$. Sean $U_1 = \emptyset, U_2 = \{0\}, U_3 = \{1\}$ y $U_4 = \{0, 1\}$ los elementos de la topología discreta en $\{0, 1\}$ y sean para $n \in \mathbb{N}$ fijo:

$$S_{1n} = \pi_n^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$S_{2n} = \pi_n^{-1}(\{0\}) = \{f \in 2^X : f(x_n) = 0\}$$

$S_{3n} = \pi_n^{-1}(\{1\}) = \{f \in 2^X : f(x_n) = 1\}$

$S_{4n} = \pi_n^{-1}(\{0,1\}) = \{f \in 2^X : f(x_n) \in \{0,1\}\} = 2^X$

Consideremos $S_n = \{S_{1n},\ S_{2n},\ S_{3n},\ S_{4n}\}$. Entonces la colección

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

es una subbase para la topología producto. La base $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{S}$ es tal que:

$$B \in \mathcal{B} \text{ si y sólo si existen } I \subseteq \{1, ..., 4\} \text{ y} J \in \mathbb{N}^{[<\infty]} \text{ tales que } B = \bigcap_{i \in I, j \in J} S_{ij}$$

Ejemplo 1.27. Dotemos a el espacio $2^X \times 2^X$ de la topología producto que resulta de considerar a 2^X un espacio topológico como en el ejemplo anterior.

Por la definición (1.22), cada abierto A en $2^X \times 2^X$ es de la forma $A = U \times V$, donde U, V son abiertos en (2^X).

Tambien, en virtud de la observación (1.23), $A \in 2^X \times 2^X$ es abierto si y sólo si para cada $(a_1, a_2) \in A$ existen vecindades abiertas $V(a_1), V(a_2) \subseteq 2^X$ tales que $V(a_1) \times V(a_2) \subseteq A$.

1.9 Filtros

Definición 1.28. Un filtro $\mathscr{F}$ sobre un conjunto X es una familia no vacía de subconjuntos de X, que satisface

1. Si $A, B \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$.

2. Si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$

Observación 1.29. Notemos que, por lo tanto, para cualquier filtro $\mathscr{F}$ sobre X, tenemos que $X \in \mathscr{F}$.

Ejemplo 1.30. Los siguientes son ejemplos de filtros definidos sobre un conjunto X

1. Dado $B \subseteq X$, la familia $\mathscr{F} < B >= \{A \subseteq X : B \subseteq A\}$ es el **filtro prncipal de B**.

2. Dado $x \in X$, la familia de todas las vecindades de x, $\mathcal{NBH}(x)$, es un filtro.

3. Si X es infinito, $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : X \backslash A \text{ es finito}\}$ es el **Filtro de Fréchet**.

1.10 Redes.

La teoría de redes o de sucesiones generalizadas fué introducida por Moore y Smith en 1922 y proporciona un método alternativo para presentar nociones de convergencia en un espacio topológico. Lo que sucede es que las sucesiones no son suficientes para estudiar la convergencia, excepto en el caso de que el espacio sea primero numerable, ésto es, un espacio en el que cada punto posee una base local contable [6]. El siguiente ejemplo, que extraemos de [5], nos muestra que existen espacios topológicos en los que las sucesiones no son adecuadas para describir convergencia

Ejemplo 1.31. Consideremos $\Omega = \omega_1 + 1$ el conjunto de los ordinales menores o iguales a el primer ordinal no numerable ω_1 y sea su topología la toplogía del orden. Supongamos que vale el Axioma de Elección. Entonces ω_1 es un punto de acumulación de $\Omega \backslash \{\omega_1\}$ pero ninguna sucesión en $\Omega \backslash \{\omega_1\}$ converge a ω_1:

Cualquier vecindad básica, V, de ω_1 en $\Omega \backslash \{\omega_1\}$ debe ser de la forma $(\alpha, \omega_1] = \{\lambda \in \omega_1 : \alpha < \lambda \leq \omega_1\}$ o de la forma $[\alpha, \omega_1] = \{\lambda \in \omega_1 : \alpha \leq \lambda \leq \omega_1\}$ con $\alpha \in \omega_1$. De éste modo, cualquier $\beta > \alpha$ satisface $\beta \in V \backslash \{\omega_1\}$.

Por otro lado, supongamos que existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \omega} \subseteq \Omega \backslash \{\omega_1\}$ tal que $f_n \to \omega_1$. Notemos que podemos asumir que $\{f_n\}_n$ es creciente porque en caso contrario extraemos una subsucesión que si lo sea y que tenga el mismo límite.

Consideremos la función creciente $F : \omega \to \omega_1$ tal que $F(n)$ es el segmento inicial que f_n determina en ω_1. Como $\{f_n\}$ converge a ω_1, es posible escribir $\omega_1 = \bigcup_{n<\omega} F(n)$; donde para cada n, $F(n)$ es numerable. Contradicción, pues ω_1 es no numerable.

Formalmente, una **sucesión** en X es una aplicación de $\mathbb{N}$ en X. De una manera más informal, estamos utilizando los números naturales para "ordenar"la familia de puntos en X. La clave para una buena generalización de la noción de sucesión se basa en la idea de "ordenar"una colección de puntos en X, usando un conjunto con menos condiciones que las propias de los conjuntos ordenados.

Definición 1.32. Sea D un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria sobre D. Decimos que $\leq$ **dirige** a D si

1. Para cada $d \in D$, es $d \leq d$. Es decir, $\leq$ es reflexiva .
2. Si $d_1, d_2, d_3 \in D$ y $d_1 \leq d_2$ y $d_2 \leq d_3$, entonces $d_1 \leq d_2$. Esto es, $\leq$ es transitiva.
3. Dados $d_1, d_2 \in D$, existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \leq d_3$ y $d_2 \leq d_3$.

Observación 1.33. Las condiciones 1 y 2 son familiares para una relación de orden. Sin embargo, falta la antisimetría: una dirección no tiene por qué ser un orden parcial. La condición 3 proporciona la orientación que buscamos para D.

Definición 1.34. Un **conjunto dirigido** es un par $(D, \leq)$ tal que $\leq$ dirige a D.

Ejemplo 1.35. Los siguientes son ejemplos de conjuntos dirigidos

1. Todo conjunto con un buen orden es un conjunto dirigido.
2. Dado X un espacio topológico y $x \in X$, el filtro de todas las vecindades del punto x, $(\mathcal{NBH}(\mathrm{x}),\supseteq)$ es un conjunto dirigido.
3. Dado un conjunto infinito X, la familia de todos los subconjuntos finitos de X es un conjunto dirigido por la relación $\subseteq$.

Definición 1.36. Una **red** es un par $(S, \geq)$ tal que S es una función y $\geq$ dirige el dominio de S.

Imitando la notación usual de las sucesiones, escribimos el valor $S(\alpha)$ como S_α.

Ejemplo 1.37. Las sucesiones y las funciones reales son ejemplos de redes.

Definición 1.38. Una red $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en un espacio topológico X **converge a un límite L** si para cada entorno V de L, existe algún $\alpha_V \in \Lambda$ tal que $S_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_V$.

***Proposición* 1.39.** *Dados un espacio topológico X, $A \subseteq X$ y $p \in X$, se tiene que $p \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A que converge a p.*

Demostración

($\Rightarrow$) Si $p \in \overline{A}$, entonces para cada vecindad N de p, será posible elegir un elemento $a_N \in A$ tal que $a_N \in N$. La red $\{a_N\}_{N\in NBH(p)}$ converge a p como se quería.

($\Leftarrow$)Si alguna red de puntos de A converge a p, cada entorno de p contiene puntos de A y así $p \in \overline{A}$. □

***Corolario* 1.40.** *Dado (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. A es cerrado si y sólo si contiene cada punto límite de cada red en A convergente.*

Demostración

($\Rightarrow$) Sea $\{a_\alpha\} \subseteq A$ con $a_\alpha \to p$. Por el teorema anterior, $p \in \overline{A}$ y como $A = \overline{A}$, $p \in A$.

($\Leftarrow$) Sea $p \in \overline{A}$. Por el teorema anterior, existe una red $a_\alpha \subseteq A$ tal que $a_\alpha \to p$. Por hipótesis, $p \in A$. Luego, $A = \overline{A}$. □

***Proposición* 1.41.** *Consideremos el espacio topológico 2^X como en (1.26) y sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_1}$, $\{B_\beta\}_{\beta\in\Lambda_2}$ redes en 2^X. Entonces $\{(A_\alpha, B_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ es una red en $2^X \times 2^X$. Más aún, si $A_\alpha \to A$ y $B_\beta \to B$, entonces $(A_\alpha, B_\beta) \to (A, B)$.*

Demostración

Definamos en $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ la relación:

$$(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta') \iff \alpha \leq_{\Lambda_1} \alpha' \;\; y \;\; \beta \leq_{\Lambda_2} \beta'$$

Notemos que:

1. $\leq$ es reflexiva y transitiva pues las relaciones $\leq_{\Lambda_1}$ y $\leq_{\Lambda_2}$ lo son.

2. Dados (α, β), $(\alpha', \beta') \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$, existen $\alpha'' \in \Lambda_1 \quad y \quad \beta'' \in \Lambda_2$ tales que $\alpha, \alpha' \leq_{\Lambda_1} \alpha'' \quad y \quad \beta, \beta' \leq_{\Lambda_2} \beta''$.

De modo que $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ es un conjunto dirigido y por tanto, $\{(A_\alpha, B_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1\times\Lambda_2}$ es una red en $2^X \times 2^X$.

Supongamos ahora que $A_\alpha \to A$ y que $B_\beta \to B$. Consideremos $V((A, B)) \subseteq 2^X \times 2^X$ un entorno cualquiera de (A, B). Por ser $V((A, B))$ un abierto, existen vecindades $V(A), V(B) \subseteq 2^X$ con $V(A) \times V(B) \subseteq V((A, B))$.

Ahora bien, fijas tales $V(A)$ y $V(B)$, por hipotesis, existen $\alpha_0 \in \Lambda_1$ y $\beta_0 \in \Lambda_2$ tales que $A_\alpha \in V(A)$ y $B_\beta \in V(B)$ para todo $\alpha \geq_{\Lambda_1} \alpha_0$ y para todo $\beta \geq_{\Lambda_2} \beta_0$ respectivamente. Así, $(A_\alpha, B_\beta) \in V(A) \times V(B) \subseteq V((A, B))$ cada vez que $(\alpha, \beta) \geq (\alpha_0, \beta_0)$. Es decir, $(A_\alpha, B_\beta) \to (A, B)$ como queríamos demostrar. $\square$

1.11 Densidad.

Un subconjunto A que está por todas partes del espacio (X, τ) merece un nombre especial.

Definición 1.42. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es **denso** en X si y sólo si $\overline{A} = X$.

***Teorema* 1.43.** *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Son equivalentes:*

1. *A es denso en X.*

2. *Para cada abierto no vacío V de X, $V \cap A \neq \emptyset$.*

3. *Para cada $x \in X$, existe una red $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq A$ tal que $a_\alpha \to x$.*

Demostración

(1. $\Rightarrow$ 2.) Sea $V \subseteq X$ abierto no vacío de X y elijamos $x_0 \in V$. Como x_o es un punto de clausura de A, tenemos $V \cap A \neq \emptyset$.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Supongamos que $V \cap A \neq \emptyset$ para cada abierto no vacío V de X. Sean $x \in X$ y $V(x)$ una vecindad arbitraria de x. Por hipótesis, existe $a \in A$ con $a \in V(x)$. Como $V(x)$ es arbitraria, $x \in \overline{A}$. Así $X \subseteq \overline{A}$, y como $\overline{A} \subseteq X$ siempre, se tiene $\overline{A} = X$.

(1. $\Leftrightarrow$ 3.) Inmediato. Es corolario de la proposición (1.39)

$\square$

Definición 1.44. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $x \in X$ es un **punto aislado** de A si y sólo el conjunto $\{x\} \in \tau$

Decimos que un subconjunto A de X es **discreto** si cada uno de sus puntos es un punto aislado.

1.12 Funciones Contínuas

Definición 1.45. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es **contínua** si para cada conjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.

Observación 1.46. La continuidad de una función depende no sólo de la función f sino también de las topologías definidas en X e Y. Notemos que si la topología del espacio Y está dada por una base $\mathcal{B}$, entonces para probar la continuidad de f basta demostrar que la imágen inversa de cada abierto básico es abierto en X:

Si V es un abierto cualquiera en Y entonces es unión de abiertos básicos $V = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$. Por lo que $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$ así que $f^{-1}(V)$ es abierto si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$lo es.

Ahora bien, si la topología en Y está dada por una subbase $\mathcal{S}$, para probar la continuidad de una función f será suficiente mostrar que la imágen inversa de cada elemento de la subbase es abierto:

Un abierto básico arbitrario B de Y es una intersección finita $S_1 \cap S_2 \cap ...S_n$ de elementos de la subbase. Como

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap f^{-1}(S_2) \cap ... \cap f^{-1}(S_n)$$

entonces la imágen inversa de cada abierto básico será abierto cada vez que lo sean las imágenes inversas de los elementos de la subbase.

***Proposición* 1.47.** *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si f es contínua entonces f preserva la convergencia de redes.*

Demostración

Consideremos $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una red cualquiera en X con $x_\alpha \to x$ y sea $f : X \to Y$ una función contínua.

Veamos que $\{f(x_\alpha)\} \to f(x)$:

Dado un entorno abierto V de $f(x)$ tenemos por definición de imágen inversa y por la continuidad de f que $f^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x. Como $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$, donde $\alpha_0 \in \Lambda$ está dado por la convergencia de $\{x_\alpha\}$, se sigue entonces que $f(x_\alpha) \in V$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$ como queríamos. $\square$

***Proposición* 1.48.** *Consideremos los espacios topológicos 2^X y $2^X \times 2^X$ como en el ejemplo (1.26). Las siguientes funciones son contínuas:*

$$\begin{array}{rcl} \bigcap : 2^X \times 2^X & \longrightarrow & 2^X \\ (A, B) & \longmapsto & A \cap B \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \bigcup : 2^X \times 2^X & \longrightarrow & 2^X \\ (A, B) & \longmapsto & A \cup B \end{array}$$

Demostración

Recordemos que identificamos cada subconjunto de X con su función característica.

Veamos que la aplicación $(A, B) \longmapsto A \cap B$ es contínua. Por la observación (1.46) basta probar que la imágen inversa de cada elemento de la subbase de 2^X es un abierto en $2^X \times 2^X$.

Consideremos $x \in X$, $j \in \{0,1\}$ y $S = \{f \in 2^X : f(x) = j\}$ un elemento cualquiera de la subbase de 2^X. Entonces $\bigcap^{-1}(S) = \{(g_1, g_2) \in 2^X \times 2^X : g_1 \cap g_2 \in S\}$

Dado $(g_1, g_2) \in \bigcap^{-1}(S)$ definamos las vecindades abiertas

$$V(g_1) = \{h \in 2^X : h(x_n) = g_1(x_n)\} \quad y \quad V(g_2) = \{h \in 2^X : h(x_n) = g_2(x_n)\}$$

Fijemos $(h_1, h_2) \in V(g_1) \times V(g_2)$. Se sigue que $h_1 \cap h_2(x) = g_1 \cap g_2(x)$. Así $h_1 \cap h_2 \in \bigcap^{-1}(S)$ y $\bigcap^{-1}(S)$ es abierto como queríamos.

La demostración para la aplicación $\bigcup$ es análoga a la anterior. □

Hay funciones biyectivas, contínuas y cuya inversa también es contínua. Estas funciones son muy importantes en topología y reciben el nombre de **homeomorfismos**. A continuación presentamos un ejemplo que nos será de utilidad.

***Proposición* 1.49.** *La aplicación* $\mathscr{C} : 2^X \to 2^X$ *con* $\mathscr{C}(A) = X \backslash A$ *es un homeomorfismo.*

Demostración

Claramente $\mathscr{C}$ es biyectiva. Veamos entonces que es contínua:

Sea $x \in X$ cualquiera y sea S un elemento de la subbase que hemos considerado para 2^X. Entonces o bien S es de la forma $S = \{A \subseteq X : x \in A\}$ o bien es $S = \{A \subseteq X : x \notin A\}$.

Por tanto, $\mathscr{C}^{-1}(S) = \{\mathscr{C}^{-1}(A) : A \in S\}$ es el conjunto $\{B \subseteq X : x \notin B\}$ en el primer caso mientras que en el segundo caso es $\{B \subseteq X : x \in B\}$.

Notemos que en ambos casos $\mathscr{C}^{-1}(S)$ es abierto en 2^X, es decir, $\mathscr{C}$ es contínua. □

1.13 Espacios Compactos

Definición 1.50. Un espacio topológico X se dice **compacto** si cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento abierto finito. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice compacto, si A con la topología relativa, es un espacio topológico compacto.

Ejemplo 1.51. 1. Un espacio discreto es compacto sólo cuando es finito.

2. En (X, τ_{ind}), todo subconjunto es compacto.

3. En cualquier espacio X, todo subconjunto finito y el conjunto vacío son compactos.

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades de los espacios compactos y serán importantes en nuestro trabajo.

***Teorema* 1.52.** *1. La imágen contínua de un conjunto compacto es compacto.*

2. Un subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

3. Un subconjunto compacto A de un espacio X Hausdorff es cerrado en X.

4. Si X es un espacio compacto, Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ es una funcion contínua entonces f es cerrada. (i.e. Si C cerrado entonces $f(C)$ es cerrado).

Demostración

Por razones de espacio sólo probaremos que vale 4. Para ello usaremos 1., 2., y 3:

Sea $C \subseteq X$ cerrado. Como X es compacto y f es contínua, C y $f(C)$ son compactos. La condición Y Hausdorff implica que $f(C)$ es cerrado. $\square$

***Teorema* 1.53.** *(Tychonoff) Un producto de espacios topológicos es compacto si y sólo si cada espacio factor lo es.*

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES. TEORIA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS

En éste capítulo trataremos algunos conceptos y nociones de la Teoría Descriptiva de Conjuntos que serán de utilidad en nuestro trabajo. Las demostraciones que omitimos se pueden revisar en [3, 7].

Para comenzar, estudiemos un tipo de espacio topológico especial: los espacios Polacos.

2.1 Espacios Polacos

Definición 2.1. Un espacio topológico X es **completamente metrizable** si admite una métrica compatible d tal que el espacio métrico (X, d) es completo. Un espacio completamente metrizable que contiene un subconjunto denso numerable (i. e. separable) es **Polaco**.

Probemos que el producto numerable de espacios Polacos es un espacio Polaco. Antes veamos que

Proposición 2.2. *Si $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de espacios separables, el espacio producto $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es separable.*

Demostración

Consideremos $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios separables. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n = \{x_0^n, x_1^n, ...\}$ un subconjunto denso numerable en X_n.

Definamos para cada $K \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$, S_K, la familia de todas las funciones con dominio K y codominio $\mathbb{N}$. Es fácil ver que S_K es numerable para cada K y puesto que $\mathbb{N}^{[<\infty]}$ es numerable, $F = \bigcup_{K\in\mathbb{N}^{[<\infty]}} S_K$ también lo es.

Ahora bien, dada $f \in F$, definimos $x_f \in \prod X_n$ como:

$$x_f(n) = \begin{cases} x_{f(n)}^n & \text{si} \quad n \in Dom(f) \\ \\ x_0^n & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

Sea $U \subseteq \prod_n X_n$ un abierto básico. Entonces existen $j \in \mathbb{N}$, naturales $n_1 < ... < n_j$ y abiertos $U_{n_i} \subseteq X_{n_i}(1 \leq i \leq j)$ tales que para cada x, $x \in U$ si y sólo si $x(n_i) \in U_{n_i}$.

La densidad de D_{ni} nos permite escoger m_i por cada n_i tal que $x_{mi}^{ni} \in U_{ni}$, así, para $f \in \Pi_n X_n$ con $f(n_i) = m_i$, $i \in \{1, ..., k\}$, se tiene que $x_f \in U$.

Luego, $D = \{x_f : f \in F\}$ es denso. $\square$

Teorema 2.3. *El producto de una sucesión de espacios Polacos es un espacio Polaco.*

Demostración

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios Polaco. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea d_n la métrica en X_n. Podemos suponer que $d_n(x, y) < 1$ $\forall x, y \in X_n$ pues, en caso contrario, consideramos la métrica $\acute{d}$=$\frac{d}{1+d}$ [3].

Definamos en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ la aplicación $\widetilde{d}$ así:

$$\widetilde{d}(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} d_n(f(n), g(n))$$

Entonces $(\prod X_n, \widetilde{d})$ es completo y, como cada X_n es separable,por la Proposición (2.2), $\prod_n X_n$ tambien lo es y así $\prod_n X_n$ es Polaco. □

2.2 Grupos Polacos

Definición 2.4. Un **grupo topológico** es un grupo $(G, \cdot)$ junto con una topología en G tal que la función $f : G^2 \to G$ con $f((x, y)) = x.y^{-1}$ es contínua. Un **grupo Polaco** es un grupo topógico cuya topología es Polaca.

***Proposición* 2.5.** *Todo grupo $(G, \cdot)$ numerable dotado de la topología indiscreta es un grupo Polaco.*

Demostración

Sean $(G, \cdot)$ un grupo numerable dotado de $\tau_G = \{\emptyset, G\}$ la topología discreta y f la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : G^2 & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x.y^{-1} \end{array}$$

Es fácil ver que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(G) = G^2$. De modo que f es contínua y $(G, \cdot)$ es un grupo topológico.

Ahora bien, consideremos en G^2 la métrica discreta $d : G^2 \to \mathbb{R}^+$,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ una sucesión de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Ésto implica que $d(x_n, x_m) = 0$ para todo $n, m \geq N$. Es decir, $x_n = x_m = c$ constante a partir de N. Así, $d(x_n, c) = d(c, c) = 0 < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$ y $x_n \to c$; $c \in G$. Es decir, (G, d) es completo.

Además, como $G \subseteq G$ es numerable e intersecta a todo abierto no vacío en τ_G, (G, τ_G) es separable. $\square$

***Proposición* 2.6.** *Si* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de grupos Polacos entonces el espacio producto* $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *tambien lo es.*

Demostración

Definamos para cada $x = (x_1, x_2, ...)$ e $y = (y_1, y_2, ...)$ en $\prod_n X_n$ la operación $*$ así:

$x * y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, ...)$, donde, $\cdot$ es el producto del grupo correspondiente en cada coordenada.

Notemos que $(\prod_n X_n, *)$ es un grupo con inverso $x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, ...)$ para cada $x = (x_1, x_2, ...)$ y elemento neutro $e = (e_1, e_2, ...)$, donde para cada n, x_n^{-1}, e_n son el inverso de x_n y el elemento neutro en X_n respectivamente.

Consideremos ahora la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f : (\prod X_n)^2 & \longrightarrow & \prod X_n \\ (x, y) & \longmapsto & x * y^{-1} \end{array}$$

Como f es continua y, como el producto numerable de espacios Polacos es Polaco, la topología producto con que dotamos a $\prod X_n$ es Polaca.

Luego, $(\prod X_n, *)$ es un grupo Polaco. $\square$

Ejemplo 2.7. Los siguientes son ejemplos de grupos Polacos:

1. En virtud de la proposicion (2.5), el par $(\mathbb{Z}_2, +)$, con $+$ la suma usual en $\mathbb{Z}_2$, dotado de la topología discreta es un grupo Polaco.

2. El par $(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}, +)$, donde $+$ es la operacion que definimos en espacios producto, dotado de la topología producto resultante es un grupo Polaco por la proposición (2.6).

3. El espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ junto con la diferencia simétrica como operación es un grupo Polaco [3]. Veamos ésto con mas detalle:

   Los espacios $2^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ resultan homeomorfos al definir entre ellos la función que aplica cada sucesión x de 0's y 1's en la sucesión $(\overline{x(n)})_n$ que tiene a la clase $\overline{k}$ en la coordenada i si y sólo si x tiene valor k en esa coordenada; $k \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N}$.

   Ahora bien,

   Dados $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, identificandolos con las sucesiones $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$ y éstas a su vez con los subconjuntos de $\mathbb{N}$ de los cuales x, y son las funciones características, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{(x+y)}(n) = (\overline{x} + \overline{y})(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overline{x}(n) \neq \overline{y}(n) \\ 0 & \text{en otro} \quad \text{caso} \end{cases}$$

   De modo que,

$$n \in x \triangle y \Leftrightarrow \overline{x} + \overline{y}(n) = 1$$

   Así, $\overline{x} + \overline{y}$ es la función característica de $x \triangle y$.

   Luego, en virtud de 2 y de lo anteriormente expuesto, $(2^{\mathbb{N}}, \triangle)$ es topológicamente igual a $(\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}, +)$, y por tanto, también es un grupo Polaco.

2.3 Propiedad de Baire

2.3.1 Conjuntos Magros

Definición 2.8. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado **nunca denso** si el conjunto $X \backslash \overline{A}$ es denso en X.

***Proposición* 2.9.** *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Son equivalentes:*

1. *A es nunca denso.*

2. *$int(\overline{A}) = \emptyset$.*

3. *$\overline{A}$ es nunca denso.*

Demostración

Sea $A \subseteq X$. Por la proposición (1.21), se sigue que

$$A \text{ es nunca denso} \Leftrightarrow X\backslash\overline{A} \text{ es denso} \Leftrightarrow X = \overline{X\backslash\overline{A}} = X\backslash int(\overline{A}) \Leftrightarrow int(\overline{A}) = \emptyset$$

y, como $\overline{A}$ es un conjunto cerrado,

$$A \text{ nunca denso} \Leftrightarrow \emptyset = int(\overline{A}) = int(\overline{\overline{A}}) \Leftrightarrow \overline{A} \text{ nunca denso}$$

□

***Proposición* 2.10.** *Sea X un espacio topológico. Si $A \subseteq X$ es nunca denso entonces $X\backslash A$ es denso.*

Demostración

Sea $V \subseteq X$ un abierto cualquiera. Entonces $\emptyset \neq V \cap X\backslash\overline{A} \subseteq V \cap X\backslash A$ □

Definición 2.11. Un conjunto $A \subseteq X$ es **magro** o **de primera categoría** si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donde cada A_n es nunca denso. Un conjunto no magro es tambien llamado de **segunda categoría**. El complemento de un conjunto magro es llamado **comagro**.

Observación 2.12. Intuitivamente, podemos pensar a los conjuntos nunca densos y a los de primera categoría como los conjuntos ‟más flacos″del espacio, aquellos que ‟caracen de espesor″y a los de segunda categoría como los conjuntos ‟gordos″de X.

***Proposición* 2.13.** *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Si A es un conjunto magro entonces está contenido en una unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos. De modo que el comagro $X\backslash A$ contiene una intersección numerable de abiertos densos.*

Demostración

Supongamos que $A \subseteq X$ es magro. Entonces existe una familia numerable de conjuntos nunca densos $\{A_n\}_n$ tal que $A = \bigcup_n A_n \subseteq \bigcup_n \overline{A_n}$ y, por tanto, $X \backslash A \supseteq \bigcap_n X \backslash \overline{A_n}$.

Notemos que para cada natural n, en virtud de las Proposiciones (2.9) y (2.10), $\overline{A_n}$ y $X \backslash \overline{A_n}$ son cerrado nunca denso y abierto denso respectivamente.

□

***Lema* 2.14.** *Si $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de conjuntos nunca densos, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es nunca denso.*

Demostración

Basta probar que si A, B son conjuntos nunca densos, entonces $A \cup B$ es nunca denso, ya que, por inducción, es posible extender el resultado a cualquier número finito de conjuntos.

Sea $C = int(\overline{A \cup B})$. Entonces $C \subseteq \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ lo cual implica

$$C \cap X \backslash \overline{B} \subseteq (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap X \backslash \overline{B} = \overline{A} \cap (X \backslash \overline{B}) \subseteq \overline{A}$$

Pero $C \cap X \backslash \overline{B}$ es abierto y, por ser A nunca denso $int(\overline{A}) = \emptyset$. Luego,

$$C \cap X \backslash \overline{B} = int(C \cap X \backslash \overline{B}) \subseteq int(\overline{A}) = \emptyset$$

De donde, $C \cap X \backslash \overline{B} = \emptyset$, y $C \subseteq \overline{B}$. Como tambien $int(\overline{B}) = \emptyset$ y C es abierto, $C = \emptyset$. Por tanto, $A \cup B$ es nunca denso. □

***Proposición* 2.15.** *La unión de una familia numerable de conjuntos magros es un conjunto magro.*

***Corolario* 2.16.** *La intersección de una familia numerable de conjuntos comagros en un espacio topológico tambien es comagro.*

2.3.2 Espacios de Baire y conjuntos con la Propiedad de Baire.

***Proposición* 2.17.** *Sea X un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivaletes:*

1. *Cada conjunto abierto no vacío en X es no magro.*
2. *Cada conjunto comagro en X es denso.*
3. *La intersección de una familia numerable de abiertos densos en X es denso.*

Definición 2.18. Un espacio topológico es llamado un **espacio de Baire** si satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

***Teorema* 2.19.** *(De la Categoría de Baire) Cada espacio completamente metrizable es un espacio de Baire. También, cada espacio Hausdorff, localmente compacto es de Baire.*

Notemos que, en virtud del teorema anterior, cualquier espacio Polaco es un espacio de Baire.

Definición 2.20. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ tiene la **Propiedad de Baire** (P.B.) si existe un abierto $U \subseteq X$ tal que la diferencia simétrica $A \triangle U$ es un conjunto magro. En este caso escribimos $A =^* U$.

***Proposición* 2.21.** *Sea X un espacio topológico. Si A es un conjunto cualquiera, $(X \backslash \overline{A}) \cup A$ es denso en X.*

Demostración

Notemos que

$$X = (X \backslash \overline{A}) \cup \overline{A} \subseteq \overline{X \backslash \overline{A}} \cup \overline{A} = \overline{(X \backslash \overline{A}) \cup A}$$

Luego, $(X \backslash \overline{A}) \cup A$ es denso en X. $\square$

***Lema* 2.22.** *Si A es un conjunto cerrado entonces la frontera de A, $Fr(A)$, es nunca denso.*

Demostración

Como $Fr(A)$ es cerrado, basta demostrar que $X\backslash Fr(A)$ es denso.

Tenemos que

$$X\backslash Fr(A) = X\backslash[\overline{A} \cap \overline{X\backslash A}] = X\backslash\overline{A} \cup X\backslash\overline{X\backslash A}$$

Ahora bien, si A es cerrado, $A = \overline{A}$ y denotando $B = X\backslash A$, se sigue que

$X\backslash Fr(A) = B \cup X\backslash\overline{B}$ es denso por la proposición (2.21) como queríamos ver. □

***Proposición* 2.23.** *Si $F \subseteq X$ es cerrado, $F\backslash int(F)$ es nunca denso.*

Demostración

Recordemos primero que:

1. F cerrado $\Rightarrow F = \overline{F}$.
2. $\overline{A} = int(A) \cup Fr(A)$ para todo $A \subseteq X$.
3. El conjunto $Fr(A)$ es cerrado para todo $A \subseteq X$.

Sea F un subconjunto cerrado cualquiera de X. Por lo arriba recordado y por el lema (2.22), tenemos que:

$$int(\overline{F\backslash int(F)}) = int(\overline{\overline{F}\backslash int(F)}) = int(\overline{Fr(F)}) = int(Fr(F)) = \emptyset$$

□

***Proposición* 2.24.** *Sea X un espacio topológico. La clase de los conjuntos que tiene la P.B. es una $\sigma-$algebra en X que contiene a todos los conjuntos abiertos y a los conjuntos magros.*

Demostración

Debemos probar que la familia de todos los conjuntos que poseen la P.B. contiene al vacío, es cerrada bajo complementos y uniones numerables (y así, bajo intersecciones numerables). Veamoslo:

Notemos que si F es cerrado,por la proposición (2.23), $F \triangle int(F) = F \setminus int(F)$ es nunca denso y por tanto, magro. De modo que, $F =^* int(F)$ y así, los conjuntos cerrados y, en particular el conjunto vacío, tienen la P.B.

Además, dado M un conjunto magro cualquiera, se tiene que el conjunto vacío $\emptyset$ es tal que $M \triangle \emptyset = M$ es magro. Se sigue entonces que los magros tambien poseen la P.B.

Ahora, si A tiene la P.B., $A =^* U$ para algún U abierto. Entonces

$$(X \setminus A) \triangle (X \setminus U) = (A \cup U) \setminus (A \cap U) = A \triangle U$$

es magro. De modo que $X \setminus A =^* X \setminus U =^* int(X \setminus U)$, y así, $X \setminus A$ tiene la P.B.

Consideremos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X con la P.B., entonces para cada n, $A_n =^* U_n$ con U_n abierto. Como

$$(\bigcup_n A_n) \triangle (\bigcup_n U_n) = \bigcup_n \bigcap_n (A_n \cup U_n) \setminus (A_n \cap U_n) = \bigcup_n \bigcap_n (A_n \triangle U_n)$$

es magro, se tiene $\bigcup_n A_n =^* \bigcup_n U_n$ □

***Corolario* 2.25.** *Los conjuntos abiertos, cerrados, magros, comagros, F_σ y G_δ de un espacio topológico X poseen la propiedad de Baire. Más aún, los Borelianos poseen la P. B.*

Localizamos las nociones previas a conjuntos abiertos en un espacio topológico a traves de la siguiente

Definición 2.26. Sea X un espacio topológico y $U \subseteq X$ un conjunto abierto. Decimos que A es magro en U si $A \cap U$ es magro en X. (Notemos que esto es equivalente a decir que $A \cap U$ es magro con la topología relativa). Entonces A es comagro en U si $U \setminus A$ es magro, lo cual significa que hay una sucesión de abiertos densos en U cuya intersección está contenida en A.

Observación 2.27. Si A es comagro en el abierto $U = \bigcup_\alpha A_\alpha$ unión de abiertos básicos, entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha \backslash A = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap X \backslash A)$ es magro en X. Por lo tanto, para cada α, $A_\alpha \cap X \backslash A \subseteq \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap X \backslash A) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, donde C_n es cerrado nunca denso para todo n, de modo que para cada α, $A_\alpha \cap X \backslash A = A_\alpha \backslash A$ es magro en X, es decir, A es comagro en A_α para todo α.

Así, si un conjunto A es comagro en un abierto no básico, existen abiertos básicos en los que A es tambien comagro.

***Proposición* 2.28.** *Sea X un espacio topológico y supongamos que $A \subseteq X$ tiene la P. B. Entonces A es magro o existe un abierto no vacío $U \subseteq X$ en el cual A es comagro. Si X es un espacio de Baire, exactamente una de esas alternativas vale.*

***Proposición* 2.29.** *Sean X un espacio topológico, h un homeomorfismo de X sobre sí mismo y A un subconjunto de X. Entonces A y $h(A)$ son ambos de igual categoría en X.*

Demostración

Sea $A = \bigcup_n A_n$ un conjunto magro en X. Entonces $h(A) = h(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n h(A_n)$ es tal que para cada n, $h(A_n)$ es nunca denso, pues

$$A_n \text{ es nunca denso} \Leftrightarrow X \backslash \overline{A_n} \text{ es denso} \Leftrightarrow h(X \backslash \overline{A_n}) \text{ es denso}$$

Como h es biyectiva, $h(X \backslash \overline{A_n}) = X \backslash h(\overline{A_n})$, de modo que, en efecto, $h(A_n)$ es nunca denso y así, $h(A)$ es magro.

Por otro lado,

$$A \text{ comagro} \Leftrightarrow X \backslash A \text{ magro} \Leftrightarrow h(X \backslash A) = X \backslash h(A) \text{ magro} \Leftrightarrow h(A) \text{ comagro}.$$

Luego, vale la conclusión del teorema. □

***Teorema* 2.30.** *Sea G un grupo topológico. Sea $H \subseteq G$ un subgrupo que tiene la Propiedad de Baire y es no magro. Entonces H es clopen.*

2.4 Árboles

El concepto de árbol es una herramienta básica combinatoria en la teoría descriptiva de conjuntos.

Definición 2.31. Un **árbol** en un conjunto A es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ cerrado bajo segmentos iniciales; es decir, si $t \in T$ y $s \sqsubseteq t$, entonces $s \in T$ (En particular, $\emptyset \in T$ si T es no vacío). Una **rama infinita** de T es una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x \mid n \in T$ para todo n. El **cuerpo** de T, denotado como $[T]$, es el conjunto de todas las ramas infinitas de T, ésto es

$$[T] = \{x \in A^{\mathbb{N}} : \forall n(x \mid n \in T)\}$$

Finalmente, decimos que un árbol T es **podado** si cada $s \in T$ tiene una extensión propia $t \supset s$, $t \in T$.

Denotaremos por $\mathscr{K}(2^X)$ al espacio de todos los subconjuntos compactos de 2^X dotado de la **topología de Vietoris**, es decir, la topología generada por los conjuntos de la forma $\{K \in \mathscr{K}(2^X) : K \subseteq U\}$ y $\{K \in \mathscr{K}(2^X) : K \cap U \neq \emptyset\}$, para U abierto en X. Enunciemos de ([3],p 27) la siguiente

***Proposición* 2.32.** *Sea* $\Phi : \mathscr{K}(2^{\mathbb{N}}) \to 2^{2^{<\omega}}$ *dada por* $\Phi(K) = \{s \in 2^{<\omega} : \exists \alpha \in K\ (s \prec \alpha)\}$. *Entonces* Φ *es* $1-1$, *contínua y* $\Phi(K)$ *es un árbol tal que* $K = [\Phi(K)]$. *De hecho,* Φ *es un homeomorfismo de* $\mathscr{K}(2^{\mathbb{N}})$ *en el conjunto de los árboles podados.*

2.5 Las Jerarquías de Borel y Proyectiva.

Definición 2.33. Sea X un espacio topológico. La clase de los **Borelianos** en X es la $\sigma-$álgebra generada por los conjuntos abiertos en X y la denotaremos por $B(X)$.

Observación 2.34. $B(X)$ es la familia más pequeña de subconjuntos de X que contiene a los abiertos, cerrados y es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.

Supongamos ahora que X es metrizable, de modo que cada conjunto cerrado es un G_δ. Sea ω_1 el primer ordinal no numerable, y para cada $1 \leq \epsilon < \omega_1$ definimos por recursión transfinita las clases de subconjuntos de X, Σ^0_ϵ, Π^0_ϵ como sigue, [3, 7]:

$\Sigma^0_1 = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\}$;

$\Pi^0_\epsilon = \{U \subseteq X : X \backslash U \in \Sigma^0_\epsilon$;

$\Sigma^0_\epsilon = \{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : A_n \in \Pi^0_{\epsilon_n}, \epsilon_n < \epsilon, n \in \mathbb{N}\}$, si $\epsilon > 1$.

Además, $\Delta^0_\epsilon = \Sigma^0_\epsilon \cap \Pi^0_\epsilon$.

Así, la **Jerarquía de Borel** consiste en:

Σ^0_1 la clase de los abiertos, Π^0_1 la clase de los cerrados, Σ^0_2 la de los conjuntos F_σ (uniones numerables de cerrados), Π^0_2 la de los G_δ (intersecciones numerables de abiertos), Σ^0_3 es la clase de los $G_{\delta\sigma}$ (uniones numerables de G_δ), Π^0_3 la de los $F_{\sigma\delta}$ (intersecciones numerables de F_σ),...

Por encima de los Borelianos se encuentran los **conjuntos proyectivos**, que se obtienen de los Borelianos a través de la proyección (o la imágen contínua) y complementación. La clase de los conjuntos proyectivos, detonada por P, se ramifica en una jerarquía infinita de tamaño ω, el primer ordinal infinito. La **Jerarquía Proyectiva**, consiste en los conjuntos analíticos(A) (imágen contínua de Borelianos), co-analíticos (CA) (complementos de analíticos), PCA (imágenes contínuas de CA), CPCA (complementos de PCA),...

En éste trabajo consideraremos, de la Jerarquía Proyectiva, sólo conjuntos analíticos, por ésta razon definimos más formalmente:

Definición 2.35. Sea X un espacio Polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado **analítico** si existe un espacio Polaco Y y una función contínua $f : Y \to X$ con $f(Y) = A$. La clase de los conjuntos analíticos se denota por Σ^1_1.

Los conjuntos analíticos satisfacen la siguiente propiedad

Proposición 2.36. *Si X es un espacio Polaco y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos analíticos de X, entonces $\bigcup_n A_n$, $\bigcap_n A_n$ son analíticos.*

2.6 Jerarquía de Wadge.

Definición 2.37. Sean X, Y espacios topológicos y $A \subseteq X, B \subseteq Y$ subconjuntos cualesquiera. Decimos que A es **Wadge reducible** a B, ($A \leq_W B$), si existe una función contínua $f : X \to Y$ con $f^{-1}(B) = A$; es decir, $x \in A$ si y sólo si $f(x) \in B$.

Esto nos da una noción de complejidad relativa entre conjuntos en espacios topológicos: si $A \leq_W B$, entonces A es "más simple"que B. La relación reflexiva y transitiva $\leq_W$ es llamada **Pre-orden de Wadge**.

Definición 2.38. Sea Γ una familia de conjuntos. Denotamos por $\Gamma(X)$ a la colección de subconjuntos de X que están en Γ.

Si X es un espacio Polaco, decimos que $B \subseteq X$ es $\Gamma-$**fuerte** si $A \leq_W B$ para todo $A \in \Gamma(Y)$, donde Y es un espacio Polaco **cero-dimensional** (Hausdorff y con una base consistente en conjuntos clopen). Si además, $B \in \Gamma(X)$, decimos que B es $\Gamma-$**completo**.

Ejemplo 2.39. Un conjunto B es $\mathbf{G}_\delta -$ **completo** si es G_δ como subconjunto de un espacio Polaco X y si existen un espacio Polaco cero-dimensional Y y un conjunto G_δ $A \subseteq Y$ tales que $A \leq_W B$.

Definición 2.40. Diremos que un conjunto B es $\mathbf{G}_\delta -$ **verdadero** si es G_δ pero no es F_σ.

***Teorema* 2.41.** *(Wadge) Sea X un espacio Polaco cero-dimensional. Entonces $A \subseteq X$ es $\Sigma^0_\epsilon-$completo si y sólo si A está en $\Sigma^0_\epsilon \backslash \Pi^0_\epsilon$.*

El teorema anterior motiva la siguiente

Observación 2.42. Si un subconjunto B de un espacio Polaco es $G_\delta-$completo entonces es $G_\delta-$verdadero.

CAPÍTULO 3

TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS NUMERABLES

Consideremos X un conjunto numerable y asociemos cada subconjunto de X a su función característica. Notemos que esta asociación nos permite identificar a $\wp(X)$ con 2^X. Ahora bien, viendo el espacio 2^X como el producto de una cantidad numerable de copias de $2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta, dotamos a 2^X de la topología producto y, como cada topología τ sobre X es un subconjunto de $\wp(X)$, haciendo la identificación anterior, tiene sentido preguntarse que propiedades topológicas posee τ como subconjunto de 2^X y cuando, bajo estas condiciones, es un abierto, cerrado, magro, F_σ, G_δ,...

En éste capítulo responderemos estas preguntas, es decir, caracterizaremos a τ como subconjunto de 2^X, espacio que, por ser X numerable, es homeomorfo al espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$. Es de especial importancia para éste propósito recordar ciertas características de $2^{\mathbb{N}}$, algunas de las cuales fueron expuestas como ejemplos en la sección (1.8) y otras que extraemos de [3] y presentamos a continuación

***Teorema* 3.1.** *(Brouwer) El espacio de Cantor es , salvo homeomorfismo, el único espacio perfecto no vacío, compacto metrizable, cero-dimensional.*

Observemos que la calidad de espacio métrizable de $2^{\mathbb{N}}$ implica que también es Hausdorff y es un espacio primero numerable (i.e. cada punto posee una base local contable).

Ésta última propiedad nos permite estudiar la convergencia en término de sucesiones (ver ejemplo 1.31).

Además, $2^{\mathbb{N}}$ es un espacio Polaco y por tanto, de Baire.

Bien, luego de considerar las propiedades anteriormente expuestas, estamos listos para caracterizar a una topología τ como subconjunto de 2^X:

3.1 Topologías abiertas, cerradas y densas

Introduzcamos la definición de un tipo especial de topologías:

Definición 3.2. Una topología τ sobre X se dice **Alexandroff** si es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.

***Proposición* 3.3.** *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *τ es Alexandroff.*

2. *Para cada $x \in X$, el conjunto $N_x = \bigcap\{V \subseteq X : x \in V \;\; y \;\; V \in \tau\}$ es un $\tau-$abierto.*

Demostración

(1. $\Rightarrow$ 2.) Inmediato.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Consideremos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \tau$. Veamos que $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ contiene una vecindad de cada uno de sus puntos. Sea $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Entonces para cada α, $x \in A_\alpha$ con $A_\alpha \in \tau$, es decir, $A_\alpha \in \{V \subseteq X : x \in V \;\; \& \;\; V \in \tau\}$. Luego, $N_x \subseteq A_\alpha$ para todo α y $N_x \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$.

$\square$

Definición 3.4. N_x es llamada la **vecindad minimal** de x.

Es bien conocido que las topologías Alexandroff están representadas por casi-ordenes como lo indica el siguiente teorema:

***Teorema* 3.5.** *Una topología τ sobre X es Alexandroff si y sólo si existe una relación binaria $\leq$ sobre X que es transitiva y reflexiva tal que $A \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in A$, $\{y \in X : x \leq y\} \subseteq A$. Más aún, la vecindad minimal de x es $A_x = \{y \in X : x \leq y\}$.*

Así, τ es T_0 si y sólo si $\leq$ es antisimétrica. Es decir, $\leq$ es un orden parcial.

También, la clausura del conjunto A en la topología τ es

$$cl_\tau(A) = \bigcup_{x\in A} cl_\tau(\{x\}) = \bigcup_{x\in A}\{y \in X : y \leq x\}$$

Así, $y \leq x$ si y sólo si $y \in cl_\tau(\{x\})$.

Demostración

Definamos la relación $\leq$ en X así:

Para cada $x, y \in X$,

$$x \leq y \Leftrightarrow A_y \subseteq A_x$$

Claramente, $\leq$ es reflexiva y transitiva.

Veamos que para cada $x \in X$, $A_x = \bigcap\{y \in X : x \leq y\}$.

Fijemos $x \in X$ y sea $y \in A_x$ cualquiera. Entonces A_x es vecindad abierta para y y por minimalidad de A_y, debe ser $A_y \subseteq A_x$. Es decir, $x \leq y$.

Así, $A_x \subseteq \{y \in X : x \leq y\}$.

Por otro lado, si $y \in X$ es tal que $x \leq y$, por definición tenemos que $A_y \subseteq A_x$ y, por ser $\leq$ reflexiva, $y \in A_x$.

Luego, $A_x = \{y \in X : x \leq y\}$.

Probemos ahora que τ es T_0 si y sólo si $\leq$ es antisimétrica.

($\Rightarrow$) Supongamos que τ es T_0 y consideremos $x, y \in X$ con $x \leq y$ y $y \leq x$. Entonces $A_x = A_y$ y por tanto, $x = y$ pues de lo contrario se contradice la hipótesis.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que τ es antisimétrica. Probaremos por reducción al absurdo que τ es T_0.

Si τ no es T_0 existen $x, y \in X$ distintos tales que y pertenece a toda vecindad de x y viceversa.

Lo anterior vale en particular, para las vecindades minimales A_x y A_y y por tanto tenemos que

$$\exists x\ \exists y(x \neq y \wedge x \leq y \wedge y \leq x)$$

Lo cual es contradictorio, pues hemos supuesto que $\leq$ es antisimétrica.

Luego, τ debe ser T_0.

□

Observación 3.6. El teorema anterior nos provee de un método que permite la construcción de una topología Alexandroff en un conjunto X dotado de una relación binaria $\leq$ reflexiva y transitiva. La construcción es la siguiente:

Consideraremos $\mathcal{B}= \{A_x : x \in X\}$, la familia de todos los conjuntos de la forma $A_x = \{y \in X : x \leq y\}$, $x \in X$. Sea τ a la topología generada por $\mathcal{B}$. Notemos que $A \in \tau$ si y sólo si para cada $x \in A$, $A_x \subseteq A$:

($\Rightarrow$) Sean $\Lambda \subseteq X$, $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ y $x \in A$ cualquiera. Entonces existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\alpha_0}$. Así:

$$y \in A_x \Rightarrow y \geq x \geq \alpha_0 \Rightarrow y \in A_{\alpha_0} \Rightarrow y \in A$$

($\Leftarrow$) Recíprocamente, sea $A \subseteq X$ y supongamos que para cada $x \in A$, $A_x \subseteq A$. Claramente $\bigcup_{x\in A} A_x \subseteq A$.

Además, como $\leq$ es reflexiva, para cada $x \in A$, $x \in A_x \subseteq \bigcup_{x\in A} A_x$, de modo que $A = \bigcup_{x\in A} A_x$.

De ahora en adelante, dado $(X, \leq)$ como arriba, llamaremos **la topología Alexandroff** en $(X, \leq)$ a la topología construida con el método anterior.

Los siguientes lemas serán de utilidad para caracterizar a τ como subconjunto cerrado de 2^X.

***Lema* 3.7.** *El conjunto $W = \{(B, C) \in 2^X \times 2^X : B \nsubseteq C\}$ es abierto en la topología producto con la que dotamos a $2^X \times 2^X$.*

Demostración

Fijemos $(B, C) \in W$. Como $B \nsubseteq C$, existe $b \in B$ tal que $b \notin C$. Consideremos las vecindades abiertas de B y C respectivamente

$$V(B) = \{A \in 2^X : b \in A\} \text{ y } V(C) = \{A \in 2^X : b \notin A\}$$

Entonces, para cada $(A, D) \in V(B) \times V(C)$, se tiene $b \in A$ y $b \notin D$. Es decir, $(A, D) \in W$ y así, W es abierto. □

***Lema* 3.8.** *Sea $S \subseteq 2^X$ cerrado. Si S es cerrado bajo intersecciones (uniones) finitas, entonces S es cerrado bajo intersecciones (uniones) arbitrarias.*

Demostración

Consideremos $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una red en S y sea K la familia de los subconjuntos finitos de Λ. Definamos en K la relación binaria $\leq$ así:

$$A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B$$

Notemos que $\leq$ es reflexiva y transitiva. Además, dados $A, B \in K$; el conjunto $D = A \cup B \in K$ es tal que $A \leq D$ y $B \leq D$. De modo que $(K, \leq)$ es un conjunto dirigido.

Definamos ahora

$$\begin{aligned} B : K &\longrightarrow S \\ J &\longmapsto \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J\} \end{aligned}$$

$\{B_J\}_{J \in K} \subseteq S$ es una red en S. Más aún, $\{B_J\}_{J \in K}$ converge a $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Veamoslo:

Sea $V \subseteq 2^X$ un entorno básico cualquiera de $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$. Entonces existen conjuntos finitos y disjuntos $R, F \subseteq X$ tales que

$$V = \{B \in 2^X : R \subseteq B \quad \& \quad B \cap F = \emptyset\}$$

Observemos que como $\bigcap_\alpha A_\alpha \in V$; $\bigcap_\alpha A_\alpha \cap F = \emptyset$. Así, para cada $x \in F$, existe $\alpha_x \in \Lambda$ tal que $x \notin A_{\alpha_x}$.

Sea $J_0 = \{\alpha_x : x \in F\}$. Luego,

$$B_{J_0} = \bigcap\{A_\alpha : \alpha \in J_0\} = \bigcap\{A_{\alpha_x} : x \in F\}$$

es disjunto de F. Además, para todo $J \geq J_0$, se tiene que $B_J \subseteq B_{J_0}$, por tanto $B_J \cap F = \emptyset$.

También,

$$R \subseteq \bigcap_\alpha A_\alpha \Rightarrow R \subseteq A_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow R \subseteq B_J \quad \forall J \in K \Rightarrow R \subseteq B_J \quad \forall J \geq J_0$$

Luego, $B_J \in V$ siempre que $J \geq J_0$ y $B_J \to \bigcap_\alpha A_\alpha$ como habíamos afirmado.

Análogamente, definiendo

$$\begin{aligned} B : K &\longrightarrow S \\ J &\longmapsto \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in J\} \end{aligned}$$

obtenemos una red $\{B_J\}_{J\in K}$ en S que converge a $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$:

Supongamos ahora que V es una vecindad básica de $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Como $R \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$, para cada $x \in R$ existe $\alpha_x \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\alpha_x}$. Consideremos entonces $J_0 = \{\alpha_x : x \in R\}$. Se sigue que para todo $J \geq J_0$, $R \subseteq B_{J_0} = \bigcup\{A_{\alpha_x} : x \in R\} \subseteq B_J$. Y como

$$F \cap \bigcup_\alpha A_\alpha = \emptyset \Rightarrow F \cap A_\alpha = \emptyset \quad \forall \alpha \in \Lambda \Rightarrow F \cap B_J = \emptyset \quad \forall J \in K$$

tenemos que $B_J \in V$ para todo $J \geq J_0$.

$\square$

Bien, respondamos ahora la pregunta: ¿Cuándo una topología dada, τ, es un subconjunto cerrado, abierto o denso de 2^X?

***Teorema* 3.9.** *$\tau \subseteq 2^X$ es cerrado si y sólo si τ es Alexandroff.*

Demostración

($\Rightarrow$) Como $\tau \subseteq 2^X$ es cerrado y cerrado bajo intersecciones finitas, por el Lema(3.8), τ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias. Luego, τ es Alexandroff.

($\Leftarrow$) Supongamos que τ es Alexandroff y consideremos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una red en τ con $A_\alpha \to A$. Por la Proposición (1.40), basta ver que $A \in \tau$. Esto es equivalente a demostrar que para cada $x \in A$, la vecindad minimal $N_x \subseteq A$, como lo indica el Teorema (3.5). Veamoslo:

Sea $x \in A$ cualquiera y sea N_x su vecindad minimal. Como $A_\alpha \to A$, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que $A_\alpha \in V(A) = \{B \subseteq X : x \in B\}$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. Así, para tales α's, $A_\alpha \in \{A \subseteq X : x \in A \quad \& \quad A \in \tau\}$ y $A_\alpha \supseteq N_x$.

Notemos ahora que el par $(N_x, A_\alpha) \in X\backslash W$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$, con W como en el Lema (3.7) y, puesto que la red en $X\backslash W$ $\{(N_x, A_\alpha)\}_{\alpha\geq\alpha_0}$ converge a (N_x, A) y $X\backslash W$ es cerrado, se tiene que $(N_x, A) \in X\backslash W$. Es decir, $N_x \subseteq A$ como queriamos. $\square$

***Teorema* 3.10.** *$\tau \subseteq 2^X$ es abierta si y sólo si existe un subconjunto de X $\tau-$clopen, discreto y cofinito. En particular, cada topología abierta es clopen.*

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $\tau \subseteq 2^X$ es abierta. Entonces para cada $A \in \tau$, existe un entorno $V(A)$ abierto en 2^X, contenido en τ.

Ahora bien, notemos que $\emptyset, X \in \tau$ implica que existen conjuntos finitos $K, F \subseteq \tau$ tales que $\{B \subseteq X : K \subseteq B\}, \{B \subseteq X : B \cap F = \emptyset\} \subseteq \tau$.

Definamos el conjunto

$$V(F,K) = \{A \subseteq X : A \cap F = \emptyset \text{ o } K \subseteq A\} \subseteq \tau.$$

y sea $C = F \cup K$. Notemos que C, $X\backslash C \in V(F,K) \subseteq \tau$ y por tanto, $X\backslash C$ es τ-clopen.

Además, como C es unión finita de conjuntos finitos, $X\backslash C$ es cofinito y si $x \in X\backslash C$ entonces $\{x\} \in V(F,K)$ y $\{x\} \in \tau$. De modo que cada punto de $X\backslash C$ es un punto aislado. Es decir, $X\backslash C$ es τ-discreto.

Luego, $X \backslash C$ es el conjunto que buscabamos.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe un conjunto finito C τ-clopen cuyo complemento es τ-discreto.

Para cada $K \subseteq C$, con $K \in \tau$, definamos

$$V_K = \{A \subseteq X : K \subseteq A \quad \& \quad A \cap (C \backslash K) = \emptyset\}.$$

Fijemos un tal K y consideremos $A \in V_K$. Claramente, podemos escribir $A = A \backslash K \cup K$ con $A \backslash K \subseteq X \backslash C$. Como $X \backslash C$ es discreto, $A \backslash K$ también lo es y así $A \backslash K \in \tau$.

Además puesto que $K \in \tau$, A es unión de abiertos y por lo tanto pertenece a τ. Puesto que $A \in V_K$ es arbitrario, se tiene $V_K \subseteq \tau$.

Ahora bien, notemos que dado $A \in \tau$, haciendo $K = A \cap C$, se tiene que $A \in V_K$ y como para cada K, V_K es abierto en 2^X, tenemos que τ contiene una vecindad de cada uno de sus elementos.

Luego, $\tau \subseteq 2^X$ es abierta. $\square$

***Teorema* 3.11.** *La clausura de τ en 2^X, denotada por $\overline{\tau}$, es una topología. Por lo tanto, $\overline{\tau}$ es la topología Alexandroff más pequeña que contiene a τ.*

Demostración

Como $\overline{\tau} \subseteq 2^X$ es cerrado, basta ver que $\overline{\tau}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas, pues aplicando el Lema (3.8), tendremos que $\overline{\tau}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones arbitrarias y $\overline{\tau}$ será una topología Alexandroff.

Probemoslo entonces:

Sean $A, B \in \overline{\tau}$. Por la Proposición (1.39), existen redes $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda_1}, \{B_\beta\}_{\beta \in \Lambda_2} \subseteq \tau$ que convergen a A y B respectivamente. De las proposiciones (1.41),(1.47) y (1.48) se sigue que $A_\alpha \cup B_\beta \to A \cup B$ y $A_\alpha \cap B_\beta \to A \cap B$.

Como $\overline{\tau}$ es cerrado, $\overline{\tau}$ contiene a los límites de sus redes. Luego, $A \cup B, A \cap B \in \overline{\tau}$ y así, $\overline{\tau}$ es una topología Alexandroff.

Ahora bien, por definición $\overline{\tau}$ es el cerrado más pequeño que contiene a τ. Como τ es cerrada si y sólo si es Alexandroff, tenemos que $\overline{\tau}$ es la topología Alexandroff más pequeña que contiene a τ. □

***Teorema* 3.12.** *τ es densa en 2^X si y solamente si τ es T_1.*

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que τ es densa en 2^X y consideremos x e y dos puntos distintos cualesquiera en X. Como $V = \{A \subseteq X : x \in A \ \ \& \ \ y \notin A\}$ es abierto en 2^X, $\tau \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, existe $A \in \tau$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$.

Luego, τ es T_1.

($\Leftarrow$) Consideremos $A \subseteq X$ cualquiera. Como X es numerable, A es finito o numerable. Si A es finito, entonces A es cerrado pues como τ es T_1, para cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado. De modo que

$$\forall x \in X,\ \{x\} \in \{A \subseteq X : A \text{ es finito }\} \subseteq \{A \subseteq X : A \text{ es cerrado}\}$$

así, claramente, al considerar la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n = A$ para todo n, tenemos que $A_n \to A$.

Por otro lado, si $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ es numerable, definimos la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde, para cada n, $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, A_n es cerrado y $A_n \subseteq A_{n+1}$. Nuevamente, $A_n \to A$.

Hemos visto que cualquier elemento de 2^X es límite de alguna sucesión de cerrados. Ahora bien, como la aplicación $\mathscr{C} : 2^X \to 2^X$ tal que $\mathscr{C}(A) = X \backslash A$ es un homeomorfismo, tenemos que culquier elemento de 2^X es límite de alguna sucesión de abiertos. En efecto:

Dados $A \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados convergente a A, por ser $\mathscr{C}$ contínua, $\mathscr{C}(A_n) \to \mathscr{C}(A)$. Notemos que para cada n, $\mathscr{C}(A_n)$ es abierto y por la sobreyectividad de $\mathscr{C}$, cada elemento de 2^X es de la forma $\mathscr{C}(A)$ para algún A.

Así, el conjunto $\{A \subseteq X : A \text{ es abierto}\} = \tau$ es denso en 2^X. □

3.2 Topologías F_σ y topologías generadas por filtros

Aumentando la complejidad desde el punto de vista de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, y subiendo en la Jerarquía de Borel encontramos a los conjuntos F_σ. Nos preguntamos, ¿existen topologías definidas sobre X que, como subconjuntos de 2^X, sean F_σ? A continuación presentamos el

Ejemplo 3.13. Un ejemplo de topología F_σ es la topología cofinita:

Sea $\tau = \{\emptyset\} \cup \{B \subseteq X : X \setminus B \text{ es finito}\}$ la topología cofinita sobre X.

Notemos que

$\{\emptyset\} = \bigcap_{x \in X}\{B \subseteq X : x \notin B\}$ es cerrado pues es intersección numerable de cerrados en 2^X.

Además,

$$\{B \subseteq X : X \setminus B \text{ es finito}\} = \bigcup_{F \in X^{[<\infty]}}\{X \setminus F\}$$

es unión numerable de cerrados. Luego, τ es F_σ.

Dado un filtro $\mathscr{F}$, es posible construir una topología Hausdorff basada en él. A continuación presentamos un método para hacerlo:

Sea $\mathscr{F}$ un filtro sobre ω. Definamos el conjunto

$$\tau(\mathscr{F}) = \{\{\omega\} \cup A : A \in \mathscr{F}\} \cup \wp(\omega)$$

Entonces $\tau(\mathscr{F})$ es una familia de subconjuntos de $\omega + 1$ que contiene al conjunto vacío y, como $\omega \in \mathscr{F}$ siempre, $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} \in \tau(\mathscr{F})$ también.

Además, dada $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia arbitraria de subconjuntos en $\tau(\mathscr{F})$, $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \tau(\mathscr{F})$. Veámoslo con más detalle:

Sea $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$ tal que $\alpha \in \Lambda_1$ si y sólo si $B_\alpha \in \wp(\omega)$. Luego, $\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_1$ si y sólo si existe $A_\alpha \in \mathscr{F}$ tal que $B_\alpha = \{\omega\} \cup A_\alpha$.

Tenemos entonces que:

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha = [\bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} B_\alpha] \cup [\bigcup_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_1}\{\omega\} \cup A_\alpha] = \{\omega\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} B_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_1} A_\alpha$$

con $A_\alpha \in \mathscr{F}$ para cada $\alpha \in \Lambda \backslash \Lambda_1$. Como $\bigcup_{\alpha \in \Lambda \backslash \Lambda_1} A_\alpha$ contiene elementos de $\mathscr{F}$, se sigue que $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \in \tau(\mathscr{F})$.

Por otro lado, $\tau(\mathscr{F})$ es tambien cerrada bajo intersecciones finitas:

Sean $I \in \mathbb{N}^{[<\infty]}$ y $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \tau(\mathscr{F})$ y consideremos $I_1 \subseteq I$ tal que $i \in I_1$ si y sólo si $B_i \in \wp(\omega)$. Notemos entonces que,

$$i \in I \backslash I_1 \Leftrightarrow \exists A_i \in \mathscr{F} \ (B_i = \{\omega\} \cup A_i)$$

Si $I_1 = \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup \{\omega\}) = \{\omega\} \cup \bigcap_{i \in I} A_i \in \tau(\mathscr{F})$

Cuando $I_1 \neq \emptyset$, fijamos $i_0 \in I_1$ y tenemos

$$\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq B_{i_0} \in \wp(\omega) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \in \wp(\omega) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} B_i \in \tau(\mathscr{F})$$

Luego, $\tau(\mathscr{F})$ es una topología sobre $\omega + 1$. Más aún, si $\mathscr{F}$ es no principal, $\tau(\mathscr{F})$ es Hausdorff:

Supongamos que τ no es Hausdorff. Entonces existen $x, y \in \omega + 1$ distintos que no se pueden separar por vecidades abiertas.

Claramente, tales x e y no pueden ser ambos puntos en ω, pues $\{x\}, \{y\} \in \tau(\mathscr{F})$ son disjuntas. Entonces debe ser $x = \omega$ y $y \in \omega$ o viceversa. Supongamos que $x = \omega$, $y \in \omega$ y consideremos $A \in \mathscr{F}$ cualquiera y $B = \{y \in \omega : \forall\ V(\omega)(y \in V(\omega))\}$.

Por hipótesis, $(A \cup \{\omega\}) \cap \{y\} \neq \emptyset$. Luego, $A \cap \{y\} \neq \emptyset$ y $y \in A$ para todo $A \in \mathscr{F}$. Es decir, $\mathscr{F} = \{A \subseteq \omega : B \subseteq A\}$; un filtro principal.

Definamos ahora la función

$$\begin{aligned} \mathcal{W} : 2^\omega &\longrightarrow 2^{\omega+1} \\ A &\longmapsto A \cup \{\omega\} \end{aligned}$$

Como $\omega + 1$ es numerable, $2^{\omega+1}$ se comporta como el espacio 2^X con X numerable dotado de la topología producto con la que hemos venido trabajando. Por lo tanto, si S es un elemento cualquiera de la subbase de $2^{\omega+1}$, existen $x \in \omega + 1$ y $j \in \{0, 1\}$ tales que

$$S = \{B \in \wp(\omega + 1) : \mathscr{X}_B(x) = j\}$$

donde $\mathscr{X}_B$ es la función característica de B. Veamos que $\mathcal{W}^{-1}(S) = \{A \in \wp(\omega) : A \cup \{\omega\} \in S\}$ es abierto en 2^ω.

Dado $x \in \omega + 1$, si $x \in \omega$, tenemos que

$$\mathcal{W}^{-1}(S) = \{A \in \wp(\omega) : \mathscr{X}_A(x) = j\}$$

es abierto en 2^ω.

Por otro lado, cuando $x = \omega$, como $\mathscr{X}_{\{\omega\} \cup A}(x) = 1$ siempre, tenemos que

$$\mathcal{W}^{-1}(S) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad j = 0 \\ \\ \wp(\omega) = 2^\omega & \text{si} \quad j = 1 \end{cases}$$

En cualquiera de los casos se tiene que $\mathcal{W}^{-1}(S)$ es abierto en 2^ω.

Además, claramente, $A \in \mathscr{F}$ si y sólo si $\mathcal{W}(A) \in \tau(\mathscr{F})$. Esto es, $\mathscr{F}$ es Wadge reducible a $\tau(\mathscr{F})$.

Enunciamos éste resultado en la siguiente

***Proposición* 3.14.** *Para cada filtro no principal $\mathscr{F}$ definido sobre ω, existe una topología Hausdorff, $\tau(\mathscr{F})$, definida sobre $\omega + 1$ tal que $\mathscr{F} \leq_W \tau(\mathscr{F})$.*

3.3 Topologías magras, G_δ y $\triangle_2^0$

Como cualquier filtro G_δ es necesariamente principal, la proposición anterior no nos provee ejemplos de topologías Hausdorff G_δ. Mostraremos más adelante que existen topologías T_1, no indiscretas, definidas sobre $\mathbb{N}$ que son G_δ como subconjuntos de $2^\mathbb{N}$ y luego, daremos un ejemplo de topología $G_\delta-$completa. Antes, veremos cuando una topología τ sobre X es un subconjunto magro de 2^X. En éste caso, la caracterización la obtendremos como un corolario del siguiente resultado que es interesante por sí mismo:

***Teorema* 3.15.** *Sea G un subconjunto comagro de $2^\mathbb{N}$. Si G es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas entonces $G = 2^\mathbb{N}$.*

Demostración

Recordemos que $2^{\mathbb{N}}$ es un grupo Polaco con la diferencia simétrica como operación. Consideremos G un subconjunto comagro de $2^{\mathbb{N}}$ cerrado bajo uniones e intersecciones finitas y definamos el conjunto

$$CL(G) = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : A, \mathbb{N}\backslash A \in G\}$$

Notemos que podemos escribir $CL(G) = G \cap \{\mathbb{N}\backslash A \in 2^{\mathbb{N}} : A \in G\}$. Como la aplicación $A \mapsto \mathbb{N}\backslash A$ es un homeomorfismo, tenemos que G es homeomorfo a $\{\mathbb{N}\backslash A : A \in G\}$ y así, en virtud de la proposición (2.29) y del corolario (2.16), $\{\mathbb{N}\backslash A : A \in G\}$ y $CL(G)$ son conjuntos comagros.

Ahora bien, $CL(G)$ es no vacío pues en caso contrario,el conjunto $\{\mathbb{N}\backslash A : A \in G\}$ comagro estaría contenido en $2^{\mathbb{N}}\backslash G$ magro, lo cual es imposible.

Consideremos entonces $A, B \in CL(G)$ cualesquiera. Tenemos que $A, B, \mathbb{N}\backslash A, \mathbb{N}\backslash B \in G$ y como G es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas, $A \triangle B \in CL(G)$.

Además, como para cada $A \in CL(G)$, $A \triangle A = \emptyset$, vale $A^{-1} = A \in CL(G)$. De donde, $CL(G)$ es un subgrupo del grupo de Cantor. Más aún, por ser $CL(G)$ comagro, en virtud del corolario (2.25), es un subgrupo de $2^{\mathbb{N}}$ que tiene la propiedad de Baire.

Se sigue, del Teorema (2.30), que $CL(G)$ es un subconjunto clopen y comagro de $2^{\mathbb{N}}$. Es decir, $2^{\mathbb{N}}\backslash CL(G)$ es clopen y magro. Luego, debe ser $2^{\mathbb{N}}\backslash CL(G) = \emptyset$ y $CL(G) = 2^{\mathbb{N}}$.

Finalmente, $2^{\mathbb{N}} = CL(G) \subseteq G \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, implica $G = 2^{\mathbb{N}}$. $\square$

***Corolario* 3.16.** *Si τ es una topología T_1 y como subconjunto de 2^X posee la Propiedad de Baire, entonces debe ser un subconjunto magro de 2^X a menos que tenga sólo finitos puntos no aislados.*

Demostración

Como τ tiene la P. B. y 2^X es un espacio de Baire, vale el Lema (2.28). Luego,existe un abierto no vacío $U \subseteq 2^X$ en el que τ es comagro. Supongamos sin pérdida de generalidad, en virtud de la observación (2.27), que U es un abierto básico; entonces existen $F, K \subseteq X$ finitos y disjuntos tales que

$$U = \{B \subseteq \mathbb{N} : K \subseteq B \text{ y } B \cap F = \emptyset\}$$

Sean $A = X \backslash (K \cup F)$ y ρ la restricción de τ a A.

Notemos que como τ es T_1, $K \cup F$ es una union finita de conjuntos $\tau-$cerrados y por tanto, cerrado. Así, $A \in \tau$.

Además, ρ es comagro en 2^A y, por el Teorema (3.15), dado que $\rho \subseteq 2^A$ es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas, tenemos que $\rho = 2^A = \wp(A)$, la topología discreta en A.

Ahora bien, notemos que

$$x \in X \backslash (K \cup F) \Rightarrow \{x\} \in \wp(A) = \rho \Rightarrow \{x\} = B \cap C; B, C \in \tau \Rightarrow \{x\} \in \tau \Rightarrow x \text{ es aislado}$$

Así, $\{x \in X : x \text{ es no aislado}\} \subseteq K \cup F$ y por tanto, τ tiene una cantidad finita de puntos no aislados. $\square$

***Corolario* 3.17.** *Si una topología T_1 sobre un conjunto numerable X es un subconjunto G_δ de 2^X entonces debe ser discreta.*

Demostración

Basta ver, en virtud del Teorema (3.15), que $\tau \subseteq 2^X$ es comagro. Esto es, que τ contiene la intersección de una familia numerable de abiertos densos en 2^X.

Como τ es G_δ, existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^X$ familia numerable de abiertos tales que $\tau = \bigcap_n A_n$. Resta probar que para cada n, A_n es denso. Veamoslo:

$$\tau \subseteq 2^X \text{ denso} \Rightarrow 2^X = \overline{\bigcap_n A_n} \subseteq \bigcap_n \overline{A_n} \subseteq \overline{A_n} \text{ para todo } n$$

Luego, $2^X = \overline{A_n}$ para todo n. $\square$

Luego de obtener el resultado enunciado en el Corolario (3.16), es natural que nos preguntemos si todas las topologías que tienen una cantidad infinita de puntos de acumulación y que poseen la Propiedad de Baire son subconjuntos magros. En general, no es así. Existen topologías con infinitos puntos no aislados que no son magras:

Ejemplo 3.18. Sea $\tau = \{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$ y consideremos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \tau$.

Notemos que si $A_\alpha = \emptyset$ para todo α, entonces $\bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha A_\alpha = \emptyset \in \tau$, mientras que cuando algún A_α es no vacío, $\{0\} \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$ y $\bigcap_\alpha A_\alpha$ o bien es vacía , o bien contiene al conjunto unitario $\{0\}$

De modo que τ es una topología sobre $\mathbb{N}$. Más aún, τ es Alexandroff y por tanto, τ como subconjuto de $2^{\mathbb{N}}$ es cerrada y posee la Propiedad de Baire.

Ahora bien, para cada par de puntos distintos cualesquiera $x, y \in \mathbb{N}$, tenemos que $\{0, x\} \in \tau$ es una vecindad de x a la cual y no pertenece, de modo que τ es T_0.

El cero es el único punto aislado de τ pues dado $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $V(n)$ una vecindad abierta de n, tenemos que $0 \in V(n)$.

Finalmente, es claro que τ contiene a el abierto básico $\{A \subseteq \mathbb{N} : 0 \in A\}$, razón por la cual no es un subconjunto magro de $2^{\mathbb{N}}$.

Hasta ahora hemos caracterizado a las topologías abiertas, cerradas, densas y magras y dimos un ejemplo de topología F_σ. También existen topologías que son $\triangle_2^0$, es decir, topologías que son F_σ y G_δ, como la del siguiente

Ejemplo 3.19. Sea $X = \omega + 1$ con $\leq$ el orden usual y sea τ la topología Alexandroff definida en $(X, \leq)$.

Como $A_\omega = \{\omega\} \in \tau$, consideremos $\tau^* = \tau\backslash\{\{\omega\}\}$.

Entonces $\tau^* \subseteq \tau$ implica $\overline{\tau^*} \subseteq \overline{\tau} = \tau$, pues τ es Alexandroff y por tanto, cerrada como subconjunto de $2^{\omega+1}$.

Fijemos un entorno básico V arbitrario de $\{\omega\}$ en $2^{\omega+1}$. Notemos que cualquier abierto básico en $2^{\omega+1}$ al cual $\{\omega\}$ pertenece debe tener la forma de alguna de las siguientes vecindades:

$V_1 = \{A \subseteq \omega + 1 : \omega \in A\}$

$V_2 = \{A \subseteq \omega + 1 : A \cap F = \emptyset\}$; para algún $F \subseteq \omega$ finito.

$V_3 = V_1 \cap V_2$; con V_1, V_2 como arriba.

Puesto que ω es numerable, siempre es posible elegir $x \in \omega \backslash F$ tal que $\{\omega, x\} \in V_i$; $i \in \{2, 3\}$. Cuando V tiene la forma de V_1, tal x es arbitrario en ω.

Si V es unión de abiertos básicos, como $\{\omega\} \in V$, existe un abierto W con la forma de V_1, V_2 o V_3 tal que $\{\omega, x\} \in W \subseteq V$.

Luego, $\{\omega\}$ es un punto de acumulación de τ^* y por tanto, $\{\{\omega\}\} \subseteq \overline{\tau^*}$.

Como $\tau = \tau^* \cup \{\{\omega\}\}$ y $\tau^* \subseteq \overline{\tau^*}$, lo anterior nos demuestra que $\overline{\tau^*} = \tau$.

Bien, veamos ahora que τ^* es Δ_2^0 en $2^{\omega+1}$:

Dados $n, m \in \omega$, $n \leq m$ implica $A_n \supseteq A_m$. Por tanto,

$$A \in \tau^* \Leftrightarrow \exists \Lambda \subseteq \omega \;\; (A = \bigcup_{n \in \Lambda} A_n = A_{min\Lambda})$$

donde $min\Lambda$ es el mínimo en el conjunto de índices Λ.

Luego,

$$\exists I \subseteq \omega \; (\tau^* = \bigcup_{n \in I} A_n)$$

Como $2^{\omega+1}$ es Hausdorff los puntos son cerrados. Así, $\{A_n\}$ es cerrado en $2^{\omega+1}$ para todo $n \in \omega$ y τ^* es F_σ.

Por otro lado, para cada $m, n \in \omega$ definimos el abierto

$$\mathcal{U}_{n,m} = \{B \subseteq \omega + 1 : \{0, ..., n-1\} \cap B = \emptyset \;\; \& \;\; \{n, ..., n+m-1\} \subseteq B\}$$

Así

$$A \in \tau^* \Leftrightarrow \exists n \in \omega \;\; (A = A_n) \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}_{n,1}, \mathcal{U}_{n,2}, \mathcal{U}_{n,3}, ...$$

ésto es, $A \in \tau^*$ si y sólo si $\exists n \in \omega$ tal que $A \in \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{U}_{n,k}$.

De donde, $\tau^* = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{U}_{n,k}$, $n \in \omega$, intersección numerable de abiertos en $2^{\omega+1}$. Es decir, τ^* es G_δ.

3.4 Topologías $G_\delta-$verdaderas.

El próximo ejemplo muestra que existen topologías $G\delta-$verdaderas, ésto es, topologías que son G_δ y no son F_σ.

Ejemplo 3.20. Una topología T_0 definida sobre un conjunto numerable X es un subconjunto $G_\delta-$completo de 2^X.

Para estudiar éste ejemplo con mayor detalle, presentamos primero el siguiente lema, el cual nos permitirá mostrar un resultado general que señala un lugar natural en el que podemos buscar topologías G_δ.

***Lema* 3.21.** *Sea X un conjunto numerable y τ la topología Alexandroff en X. Entonces τ no tiene puntos aislados en 2^X si y sólo si cada subconjunto finito es $\tau-$nunca denso.*

Demostración

($\Leftarrow$) Sea $A \in \tau$ un abierto cualquiera y sea $V(A) \subseteq 2^X$ un entorno de A. Entonces existen $K, F \subseteq X$ finitos y disjuntos tales que

$$V(A) = \{B \in 2^X : K \subseteq B \text{ y } F \cap B = \emptyset\}$$

Notemos que como cada conjunto finito es $\tau-$nunca denso, A debe ser numerable. Consideremos entonces $x \in A \backslash K$.

$\{x\} \cup F$ es $\tau-$nunca denso. Luego, existe un abierto $W \subseteq A$ con $W \cap (\{x\} \cup F) = \emptyset$. De modo que $K \cup W \in V(A) \backslash \{A\}$.

Hemos probado que siempre es posible elegir un elemento en $V(A)\backslash\{A\}$. Como A y $V(A)$ son arbitrarios, A es punto de acumulación de τ en 2^X.

($\Rightarrow$) Sea $F \subseteq X$ finito y A_x un abierto básico cualquiera. Veamos que existe un subconjunto abierto de A_x disjunto de F.

Si $F \cap A_x = \emptyset$, por ser $A_x \subseteq A_x$, no hay nada que probar.

Supongamos entonces que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F \cap A_x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Buscamos $y \in X$ con $x_1, x_2, ..., x_n < y$; donde $\leq$ es la relación binaria dada por la topología Alexandroff.

Como $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq A_x$ y A_x es abierto, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, la vecindad minimal A_{x_i} es tal que $A_{x_i} \subseteq A_x$. Por hipótesis, A_{x_i} no puede ser un conjunto unitario para ningún i, luego, podemos escoger, para cada i, un elemento $y_i \in A_{x_i} \backslash \{x_i\}$.

Notemos que como $\leq$ no es un orden total, los elementos escogidos anteriormente no necesariamente son comparables bajo la relación $\leq$. Sea B el conjunto formado por los y_i's que si son comparables.

Si $B = \emptyset$, consideremos la familia de abiertos $\{A_{y_i}\}_{i=1}^n$. Para cada i, $A_{y_i} \subseteq A_{x_i} \subseteq A_x$; de modo que $A = \bigcup_{i=1}^n A_{y_i} \subseteq A_x$ es abierto y, por construcción, $\emptyset = (F \cap A_x) \cap A = F \cap A$.

Si todos los y_i elegidos son comparables entonces su máximo elemento, y, es tal que $A_y \subseteq A_{y_i} \subseteq A_{x_i} \subseteq A_x$ para todo i y $\emptyset = (F \cap A_x) \cap A_y = F \cap A_y$.

Finalmente, en cualquier otro caso, escogemos y como el máximo de elemento de B y hacemos $A = A_y \cup \bigcup_{y_i \in \{y_i\} \backslash B} A_{y_i}$. Entonces A es abierto, $A \subseteq A_x$ y $\emptyset = (F \cap A_x) \cap A = F \cap A$. □

Lema 3.22. *Sea τ una topología Alexandroff sobre un conjunto numerable X y sean $D(\tau) = \{B \in \tau : B$ es $\tau-$denso$\}$ y $\rho = D(\tau) \cup \{\emptyset\}$. Entonces ρ es una topología G_δ. Más aún, si τ no tiene puntos aislados entonces $\tau = \overline{\rho}$.*

Demostración

ρ es una topología: Claramente, $X, \emptyset \in \rho$. Sea $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \rho$. Si existe α_0 tal que $B_{\alpha_0} \neq \emptyset$ entonces $X = \overline{B_{\alpha_0}} \subseteq \overline{\bigcup_\alpha B_\alpha}$, de modo que $\overline{\bigcup_\alpha B_\alpha} = X$ y $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \rho$.

Además, como la intersección finita de abiertos no vacios densos tambien es un abierto no vacío denso, tenemos que la intersección finita de elementos de ρ pertenece a ρ.

Ahora bien, como τ es Alexandroff, existe una relación reflexiva y transitiva $\leq$ en X tal que para cada $C \subseteq X$, la clausura de C en τ, $cl_\tau(C)$, es $cl_\tau\{C\} = \bigcup_{y \in C}\{x \in X : x \leq y\}$ [13]. Por lo tanto, si para cada $x \in X$, consideramos $A_x = \{y \in X : x \leq y\}$ y $S_x = \{C \in 2^X : x \in C\}$, tendremos que

$$C \in D(\tau) \Leftrightarrow (C \in \tau) \wedge (X = cl_\tau(C)) \Leftrightarrow (C \in \tau) \wedge (\forall x \in X \; \exists y \in C(y \in A_x)).$$

Así, $D(\tau) = \tau \cap \{C \in 2^X : (\forall x \in X)(\exists y \in A_x)(y \in C)\}$. Es decir,

$$D(\tau) = \tau \cap \{C \in 2^X : (\forall x \in X)(\exists y \in A_x)(c \in S_y)\}$$

De modo que $D(\tau) = \tau \cap (\bigcap_{x\in X} \bigcup_{y\in A_x} S_y)$ y $\{\emptyset\} = \bigcap_{x\in X}\{C \in 2^X : x \notin C\}$ son conjuntos G_δ, y por tanto, ρ también lo es.

Supongamos que τ no tiene puntos aislados y probemos que $\tau = \overline{\rho}$:

Como por definición $D(\tau), \{\emptyset\} \subseteq \tau$, tenemos que $\overline{D(\tau)}, \overline{\{\emptyset\}} \subseteq \overline{\tau} = \tau$ pues τ es Alexandroff y por tanto, cerrada como subconjunto de 2^X. Se sigue que $\overline{\rho} = \overline{D(\tau) \cup \{\emptyset\}} = \overline{D(\tau)} \cup \overline{\{\emptyset\}} \subseteq \tau$.

Por otro lado, dados $O \in \tau$ y $F, K \subseteq X$ finitos disjuntos tales que $F \subseteq O$ y $K \cap O = \emptyset$, sea $V = X \backslash \overline{K}$.

Por el lema (3.21), K es $\tau-$nunca denso, por lo que V es abierto denso. Además, $F \subseteq V$ y

$$K \subseteq \overline{K} \Rightarrow V \subseteq X \backslash K \Rightarrow V \cap K = \emptyset$$

□

En general, la topología dada por el resultado previo no es un conjunto $G_\delta-$verdadero como se evidencia en el próximo

Ejemplo 3.23. Sean $\leq$ el orden usual en $X = \omega + 1$ y τ la topología Alexandroff en X.

Notemos que un conjunto abierto V es $\tau-$denso si y sólo si $\omega \in V$: si V τ-denso entonces la intersección $V \cap A_\omega = V \cap \{\omega\}$ es no vacía y recíprocamente, si $\omega \in V \subseteq \omega + 1$ y $A = \bigcup_{x\in\Lambda} A_x$; $\Lambda \subseteq \omega + 1$ es un abierto cualquiera, como $\{\omega\} \subseteq A_x$ para todo $x \in \omega + 1$, se tiene que $\{\omega\} \subseteq A$ y $\{\omega\} \subseteq V \cap A$. Luego,

$$D(\tau) = \{B \in \tau : \omega \in B\} = \tau \cap \{B \in 2^X : \omega \in B\}$$

es intersección finita de cerrados en 2^X y por tanto, también cerrado.

De este modo, la topología $\rho = D(\tau) \cup \{\emptyset\}$ del resultado anterior es también F_σ en $2^{\omega+1}$ por lo que no es $G_\delta-$verdadera.

Estudiemos con detenimiento el ejemplo siguiente

Ejemplo 3.24. Sea $X = 2^{<\omega}$ la familia de todas las sucesiones finitas de $0's$ y $1's$. Consideremos en X el orden $\preceq$ definido así:

$$s \preceq t \Leftrightarrow t \text{ extiende a } s$$

Sean τ la topología Alexandroff definida sobre $(X, \preceq)$ y $\rho = D(\tau) \cup \{\emptyset\}$ como en los ejemplos anteriores. Puesto que $\preceq$ es antisimétrica (es un orden parcial), en virtud de (3.5)tenemos que τ es una topología T_0. Además, cada subconjunto finito de X es $\tau-$nunca denso:

Dados $F \subseteq X$ y $A \in \tau$ cualesquiera, supongamos que $A \cap F = \{s_1, ..., s_n\}$. Para cada s_i $(1 \leq i \leq n)$ consideremos una extensión s_i^* con $s_i^* \neq s_i$ y sea $A' = \bigcup_{i=1}^{n} A_{s_i^*}$. Entonces $A' \in \tau$ y como $A_{s_i^*} \subset A_{s_i} \subseteq A$; para todo i, $(1 \leq i \leq n)$, tenemos que A'es un subconjunto propio de A.

Más aún, por construcción, $\emptyset = A' \cap (A \cap F) = (A' \cap A) \cap F = A' \cap F$.

Por el Lema (3.21) concluimos que τ no tiene puntos aislados y por el resultado anterior $\tau = \overline{\rho}$, de donde, ρ tambien es T_0.

Mostraremos ahora que ρ es un subconjunto $G_\delta-$completo de $2^{2^{<\omega}}$. Para tal fin, veremos algunos hechos que simplificarán los argumentos.

***Lema* 3.25.** *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$, entonces T es $\tau-$cerrado si y sólo si T es un árbol.*

Demostración

($\Rightarrow$) Si T es $\tau-$cerrado entonces T es el complemento de un abierto. Luego, existe $\Lambda \subseteq 2^X$ tal que

$$T = \bigcap_{s \in \Lambda} \{t \in 2^{<\omega} : t \prec s\}$$

Sean $t \in T$ y u un segmento inicial de t. Entonces $u \preceq t \prec s$ para todo $s \in \Lambda$. Así, $u \in T$ y T es un árbol.

($\Leftarrow$) Supongamos que T es un árbol y fijemos $s \in T$ cualquiera. Como τ es Alexandroff

$$t \in cl_\tau(\{s\}) \Rightarrow t \preceq s \Rightarrow t \text{ es segmento inicial de } s \Rightarrow t \in T$$

Dado que s es arbitrario, esto demuestra que $cl_\tau(\{s\}) \subseteq T$ para todo $s \in T$. Es decir, $cl_\tau(T) = \bigcup_{s \in T} cl_\tau(\{s\}) \subseteq T$

Luego, $cl_\tau(T) = T$ y T es $\tau-$cerrado.

□

Notemos que podemos asociar abiertos básicos en 2^ω con $\tau-$abiertos básicos y viceversa:

Dado un abierto básico cualquiera $A = \{B \subseteq \mathbb{N} : K \subseteq B \;\;\&\;\; B \cap F = \emptyset\}$, con $F, K \subseteq \mathbb{N}$ conjuntos finitos y disjuntos; consideramos la sucesión $s \in 2^{<\omega}$ de tamaño m; donde m es el máximo natural en el conjunto $K \cup F$; y cuya $i-$ésima coordenada es

$$s(i) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in K \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

El conjunto $A_s = \{t \in 2^{<\omega} : s \preceq t\}$ es el $\tau-$**abierto determinado por** A.

Recíprocamente, para cada $s \in 2^{<\omega}$, asociamos el abierto A_s a el abierto básico

$$A = \{B \subseteq \mathbb{N} : \{i \in \mathbb{N} : s(i) = 1\} \subseteq B \;\;\&\;\; \{i \in \mathbb{N} : s(i) = 0\} \cap B = \emptyset\}$$

tal A es el **abierto en 2^X asociado o detreminado por** A_s.

La convención anterior nos simplificará la notación en la prueba del próximo

Lema 3.26. *Sean T un árbol binario y $[T]$ el conjunto de las ramas infinitas de T. Entonces T es $\tau-$cerrado$-$nunca denso si y sólo si $[T]$ es nunca denso en $2^{\mathbb{N}}$.*

Demostración

$(\Rightarrow)$ Sean $A \subseteq 2^X$ un abierto básico cualquiera y A_s el $\tau-$abierto determinado por A. Como T es $\tau-$nunca denso, existe $A_{\acute{s}} \subseteq A_s$ tal que $T \cap A_{\acute{s}} = \emptyset$. Luego, el abierto $\acute{A}$ asociado a $\acute{s}$ está contenido en A, pues para cada $j \in \{0,1\}$ fijo

$$A_{\acute{s}} \subseteq A_s \Rightarrow \{i \in \mathbb{N} : s(i) = j\} \subseteq \{i \in \mathbb{N} : \acute{s}(i) = j\}$$

Además, como $A_{\acute{s}} \cap T = \emptyset$, tal $\acute{A}$ es disjunto de $[T]$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $[T] \subseteq 2^\omega$ es nunca denso y consideremos un $\tau-$abierto básico cualquiera A_s. Sean $A \subseteq 2^X$ el abierto asociado a s y $\acute{A} \subseteq A$ el conjunto con la propiedad $\acute{A} \cap [T] = \emptyset$ que existe por hipótesis. Se sigue que el $\tau-$abierto $A_{\acute{s}}$ determinado por $\acute{A}$ es disjunto de T; de modo que T es un árbol $\tau-$nunca denso y, por el Lema anterior, $\tau-$cerrado.

□

Ahora bien, consideremos el homeomorfismo $\Phi : \mathscr{K}(2^{\mathbb{N}}) \to 2^{2^{<\omega}}$ dado en la Proposición (2.32). Como $2^{\mathbb{N}}$ es un espacio compacto, cada subconjunto cerrado es también un compacto y, de los lemas anteriores se sigue que Φ aplica

$$\{B \subseteq 2^{\mathbb{N}} : B \text{ cerrado}-\text{nunca denso}\} \mapsto \{F \subseteq 2^{<\omega} : F \text{ es } \tau-\text{cerrado}-\text{nunca denso}\}$$

y como la colección de todos los subconjuntos cerrados$-$nunca densos de $2^{\mathbb{N}}$ es $G_\delta-$completo [4], su imágen a través de Φ también lo es.

Finalmente, como la función complemento,$\mathscr{C}$, en $2^{\mathbb{N}}$ es un homeomorfismo,

$$D(\tau) = \{\mathscr{C}(B) \in 2^{\mathbb{N}} : B \text{ es cerrado}-\text{nunca denso}\} = \{A \in 2^{\mathbb{N}} : A \text{ es abierto-denso}\}$$

es $G_\delta-$completo. Luego, en vitud de lo visto anteriormente y del Teorema de Wadge (2.41), ρ es una topología T_0, $G_\delta-$verdadera.

.

3.5 Complejidad de bases y subbases

Estudiemos ahora el problema de determinar la complejidad de una topología generada por una base F_σ o analítica. Pero antes, probemos el siguiente

***Lema* 3.27.** *Si $C \subseteq 2^X$ es cerrado (o F_σ) entonces el producto cartesiano de una cantidad finita de copias de C es también un conjunto cerrado (o F_σ).*

Demostración

Sea $C \subseteq 2^X$ cerrado. Entonces existen una colección de abiertos básicos y dos familias disjuntas de subconjuntos finitos de X, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\{K_\alpha\}_\alpha$, $\{F_\alpha\}_\alpha$ respectivamente; tales que $X\backslash C = \bigcup_\alpha B_\alpha$.

Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$(2^X)^n\backslash C^n = (2^X)^n\backslash(\bigcap_\alpha 2^X\backslash B_\alpha \times ... \times \bigcap_\alpha 2^X\backslash B_\alpha) = (2^X)^n\backslash \bigcap_\alpha(2^X\backslash B_\alpha \times ... \times 2^X\backslash B_\alpha)$$

ésto es,

$$(2^X)^n\backslash \bigcap_\alpha\{(A_1, ..., A_n) : \forall i \ (A_i \notin B_\alpha)\} = (2^X)^n\backslash\{(A_1, ..., A_n) : \forall i \ \ \forall\alpha \ (A_i \notin B_\alpha)\}$$

es decir, $(2^X)^n\backslash C^n = \{(A_1, ..., A_n) : \exists\alpha \ \exists i \ (A_i \in B_\alpha)\}$.

Así, dado un tal $(A_1, ..., A_n)$, si $i_0 \in \{1, ..., n\}$ es tal que $A_{i_0} \supseteq K_\alpha$ y $A_{i_0} \cap F_\alpha = \emptyset$ para algún α, definiendo $V(A_{i_0}) = B_\alpha$ y $V(A_i) = 2^X$ para todo $i \neq i_0$, tenemos que $V(A_1) \times ... \times V(A_{i_0}) \times ... \times V(A_n) \subseteq (2^X)^n\backslash C^n$, de donde, $(2^X)^n\backslash C^n$ es abierto.

Supongamos ahora que $C \subseteq 2^X$ es F_σ. Existe $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de cerrados en 2^X tal que $C = \bigcup_k C_k$. Así

$$C^n = \underbrace{\bigcup_k C_k \times ... \times \bigcup_k C_k}_{n \quad veces} = \bigcup_k(\underbrace{C_k \times ... \times C_k}_{n \quad veces}) = \bigcup_k \hat{C}_k$$

donde, por lo visto arriba; para cada k, el conjunto $\hat{C}_k$ es cerrado en $(2^X)^n$.

□

El siguiente teorema responde la pregunta que nos formulamos antes: ¿Cuál es la complejidad de una topología generada por una base F_σ o analítica?

***Teorema* 3.28.** *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable.*

1. *X admite una base F_σ si y sólo si admite una subbase F_σ.*

2. *Si X admite una base (o subbase) F_σ entonces τ es Π^0_3.*

3. *Si X admite una base (o subbase) Σ^1_1 entonces τ es Σ^1_1.*

Demostración

1. Sean $\mathcal{S}$ una subbase para X y $\mathcal{B}$ la base que $\mathcal{S}$ genera. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la función intersección

$$\begin{aligned} f_n : (2^X)^n &\longrightarrow 2^X \\ (B_1, ..., B_n) &\longmapsto \bigcap_{i=1}^{n} B_i \end{aligned}$$

Notemos que

$$A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \exists S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}\ (A = \textstyle\bigcap_{i=1}^{n} S_n)$$

ésto es,

$$A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \exists (S_1, ..., S_n) \in \mathcal{S}^n\ (A = f_n(S_1, ..., S_n)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ (A \in f_n(\mathcal{S}^n))$$

de modo que, $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathcal{S}^n)$.

Ahora bien, si $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ es F_σ, por el Lema anterior, $\mathcal{S}^n \subseteq (2^X)^n$ también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por ser f_n una función contínua, en virtud de la Proposición (1.52), tenemos que f_n es cerrada.

Luego, $\mathcal{B} = \bigcup_n \bigcup_k f_n(C_k)$ es un conjunto F_σ.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es F_σ y veamos que ésto implica que $\mathcal{S}$ es F_σ:

Ya habíamos visto que $\mathcal{B} = \bigcup_n f_n(\mathcal{S}^n)$, esto nos permite escribir

$$S \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists k \ \ \exists n \ \ \exists (S_1, ..., S_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})(S = \pi_k(S_1, ..., S_n))$$

donde, $\pi_k : (2^X)^n \to 2^X$ es la proyección sobre el $k-$ésimo factor. Así, $\mathcal{S} = \bigcup_k \pi_k(f^{-1}(\mathcal{B}))$.

Como $\mathcal{B}$ es F_σ,tenemos que $\mathcal{B} = \bigcup_n C_n$; con $C_n \in \Pi_1^0$ para todo n. Se sigue que $f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\bigcup_n C_n) = \bigcup_n f^{-1}(C_n)$ donde para cada n, $f^{-1}(C_n) \in \Pi_1^0$ porque f es una función contínua.

Luego,

$$\mathcal{S}= \bigcup_k \pi_k(\bigcup_n f^{-1}(C_n)) = \bigcup_k \bigcup_n \pi_k(f^{-1}(C_n))$$

y dado que la proyecciones son funciones contínuas, por la Proposición (1.52), π_k es cerrada y así, $\mathcal{S}$ es Σ_2^0.

2. Sea τ la topología generada por la base $\mathcal{B}$. Tenemos que

$$A \in \tau \leftrightarrow \forall x \in X \ (x \in A \rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \ (x \in B \ \wedge \ B \subseteq A))$$

Supongamos que $\mathcal{B}$ es F_σ, ésto es, $\mathcal{B}= \bigcup_n C_n$; $\forall n C_n \in \Pi_1^0$. Entonces

$$A \in \tau \leftrightarrow \forall x \ (x \in A \rightarrow \exists n \ (\exists B \in C_n \ \wedge x \in B \wedge \ B \subseteq A))$$

Para cada $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$, definamos el conjunto

$$G_x^n = \{A \subseteq X : \exists B \in C_n \ (x \in B \ \& \ B \subseteq A)\}$$

y la relación binaria $R_x^n \subseteq 2^X \times 2^X$ tal que para cada $A, B \in 2^X$,

$$R_x^n(A, B) \Leftrightarrow B \in C_n \ \wedge x \in B \ \wedge B \subseteq A.$$

Notemos que R_x^n es una relación cerrada (ver [3], p 27) y puesto que

$$A \in G_x^n \Leftrightarrow \exists B \in 2^X(R_x^n(A, B))$$

se sigue que para cada $(x, n) \in X \times \mathbb{N}$, el conjunto G_x^n es la proyección de un cerrado en $2^X \times 2^X$ sobre 2^X y como las proyecciones son aplicaciones contínuas, por el Teorema (1.52), G_x^n es cerrado.

Luego, $A \in \tau \leftrightarrow \forall x \ (x \in A \rightarrow \exists n(A \in G_x^n))$ implica que τ es Π_3^0.

Cuando la subbase $\mathcal{S}$ es F_σ, por lo demostrado en la primera parte de éste teorema, tenemos que $\mathcal{B}$ también es F_σ y así, τ es Π_3^0.

3. Supongamos ahora que $\mathcal{B}\subseteq 2^X$ es analítico. La fórmula

$$A \in \tau \leftrightarrow \forall x \in X \ (x \in A \rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \ (x \in B \ \wedge \ B \subseteq A))$$

nos permite deducir que τ es Σ_1^1 porque la intersección y la unión numerable de conjuntos analíticos son también un conjuntos analíticos.

$\square$

BIBLIOGRAFÍA

[1] G. Godefroy, *Compacts de Rosenthal*, Pacific J. Math.91 (1980) 293-306.

[2] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Editorial Limusa-Wiley, México, 1973.

[3] A.S Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, Berlin, 1994.

[4] A. S. Kechris, A. Louveau, W. H. Woodin, *The structure of $\sigma-$ideals of compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1) (1987) 263-288.

[5] J. L. Kelley, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina, 1962.

[6] Macho S. M. *Topología general*, Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herrico Unibertsitatea, 2002.

[7] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, North Holland, Amsterdam, 1980.

[8] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Englewood Clifss, N.J.,1975.

[9] S. Solecki, *Analytic ideals*, Bull. Symbolic Logic 2 (3) (1996) 339-348.

[10] A.K. Steiner, *The lattice of topologies: structure and complementation*, Trans. Amer. Math. Soc. 122(2)(1966) 379-398.

[11] A. Tineo, *Topología de espacios métricos*, Karíña Editores, Venezuela, 1995.

[12] S. Todorcevic, *Analytic gaps*, Fund. Math. 150 (1)(1996), 55-66.

[13] S. Todorcevic, C. Uzcátegui, *Analytic topologies over countable sets*, Topology Appl.111 (2001) 299-326.

[14] S. Todorcevic, C. Uzcátegui, *Analytic k-spaces*, Top. Appl.146-147 (2005) 511-526

[15] C. Uzcátegui, *On Borel topologies over countable sets*, Notas de Matemática, Preprint 169, Dept. de Matemática, Universidad de Los Andes (1997).

[16] C. Uzcátegui, *Alexandroff topologies viwed as closed sets in the Cantor Cube*, Divulgaciones Matemáticas. 13 (1)(2005) 45-53.

[17] C. Uzcátegui, *Dos aplicaciones de las topologías analíticas*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana XV (2):309-322 (2008)

[18] F.van Egelen, *On Borel ideals*, Ann. Pure Appl.Logic 70 (1994)177-203.

[19] S. Zafrany, *On Analytic filters and prefilters*, J. Symbolic Logic 55 (1) (1990) 315-322.