



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

SIMULACIÓN DE GALAXIA MEDIANTE AUTÓMATAS CELULARES

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela, por el

bachiller:

Autor: Efraín José Gatuzz Suarez - C.I.: 18.088.485

Para optar por el título de Licenciado en Física

Tutores Académicos: Dra. Maria Carolina Bessega Lodi

Dr. Esteban Álvarez

Caracas, Octubre de 2010

“Los cielos cuentan la gloria de Dios, y el firmamento anuncia la obra de sus manos”

Salmo 19:1

Agradecimientos

- A mi Dios, quien ha estado conmigo en todo momento: ¡sigue guiando mis pasos!. No imagino mi vida sin ti.
- A mi princesa Jessica: mientras Dios es mi inspiración desde el cielo, tu eres mi inspiración acá en la tierra. Gracias por tu apoyo incondicional en todo momento. El regalo más hermoso que obtuve al estudiar en la facultad de ciencias fue encontrarte a ti, y ahora al mirar atrás se que no fue casualidad nuestro encuentro. Eres mi bendición.
- A mi familia, quienes me han apoyado en el cumplimiento de este sueño que para muchos no tiene sentido. Gracias por creer en mi, por darme ánimo, por estar conmigo en todo momento. Deseo honrarlos con mi vida.
- A mi tutora la Dra. Carolina Bessega quien me introdujo en el mundo de la astrofísica y a quien le debo la realización de este trabajo. Gracias por su apoyo en todo momento, aún a la distancia. Es la persona más dedicada y responsable que he conocido.
- Al profesor Esteban quien me ayudó siempre que lo necesité, quien me motivó a dar lo mejor de mi, estoy en deuda con usted. A la profesora Nurith, quien me facilitó el trabajo de la defensa con sus valiosos consejos. Muchas gracias.
- A mis amigos del sexteto, gracias por su apoyo y aliento, gracias a ustedes lo que muchas veces pensé que sería difícil, se hizo fácil. Maybemar, eres una de las chicas más especiales que he conocido: si tu eres feliz yo también soy feliz. José, contigo puedo hablar de cualquier cosa: gracias por tu valiosa amistad, eres una de las personas en quien más

confío. Ángel contigo aprendí que personas muy diferentes pueden ser grandes amigos, gracias por estar ahí siempre que te necesité. Jorge ¡que bueno haberte conocido! Contigo tuve conversaciones muy interesantes que no olvidaré, además de las muchas anécdotas por supuesto. Yenlay ¡sin ti no seríamos el sexteto! Me alegra haber compartido esta carrera contigo, te deseo muchísimos éxitos.

Efrain Gatuuz

Resumen

Simulación de galaxia mediante autómatas celulares

Efrain José Gatuzz Suarez

Dra. María Carolina Bessega Lodi, Tutor

Dr. Esteban Álvarez, Tutor

Universidad Central de Venezuela

Existen diversos métodos y herramientas matemáticas utilizadas para modelar estructuras galácticas, sin embargo, la mayoría de dichos modelos no incluyen al mismo tiempo la cinemática galáctica y los procesos evolutivos dentro de la galaxia, tales como los inherentes a la evolución estelar. Se propone un modelo que simule ambos efectos utilizando para ello un autómata celular. Dicho modelo considera los procesos de formación estelar desarrollados por Mueller & Arnett (1976) junto con los mecanismos de evolución estelar propuestos por Lejeune & Perdang (1996). Al considerar únicamente procesos de formación estelar, el modelo propuesto genera patrones espirales característicos de las galaxias de tipo espiral. A medida que se introducen los elementos característicos de los procesos de evolución estelar, se observa la necesidad de otro(s) mecanismo(s) para que los patrones espirales permanezcan invariables, morfológicamente hablando, durante largos períodos de tiempo. Se observa además que los procesos de formación estelar son auto-sostenidos por los procesos de evolución estelar: la expulsión de gas de una estrella a su entorno, permite la inicialización de nuevos procesos de formación estelar, sin necesidad de que se introduzca gas mediante fuentes externas. El modelo propuesto presenta características propias de un sistema dinámico complejo.

Índice general

1. Introducción	10
1.1. Objetivo del trabajo	13
2. Estructura, dinámica y cinemática galáctica	15
2.1. Evolución estelar	16
2.1.1. Formación estelar	16
2.1.2. Protoestrellas	20
2.1.3. Secuencia principal	21
2.1.4. Evolución de las estrellas de baja masa	23
2.1.5. Evolución de las estrellas de alta masa	28
2.2. Cinemática galáctica	30
2.2.1. Rotación galáctica	30
3. Autómatas celulares	33
3.1. Propiedades de los autómatas celulares	34
4. Modelo	38
4.1. Estados del automata	38

4.2. Función de transición	40
4.3. Formación estelar	40
4.3.1. Formación estelar inducida	40
4.3.2. Formación estelar espontánea	41
4.4. Evolución estelar	41
4.5. Estado inicial del sistema	43
5. Resultados	44
5.1. Estructura espacial	44
5.2. Evolución global de las especies galácticas	51
6. Conclusiones	54
6.1. Recomendaciones	56
7. Apéndice A	57
7.1. Código fuente en lenguaje C++	57

Índice de figuras

1.1. Estructura espiral de una galaxia: Modelo de Mueller & Arnett	12
2.1. Diagrama de Hubble	15
2.2. Pilares de la creación	17
2.3. Formación estelar inducida (SPSF por sus siglas en inglés)	20
2.4. Diagrama H-R: secuencia principal	22
2.5. Proceso evolutivo de estrellas de baja masa	23
2.6. Imagen comparativa del tamaño de una gigante roja	25
2.7. Concentración de enanas blancas	27
2.8. Nebulosa planetaria NGC 2440	28
2.9. Proceso evolutivo de estrellas de alta masa	29
2.10. Estrella de neutrones en el remanente de supernova Puppis A	30
2.11. Curva de rotación diferencial galáctica: modelo de Oort-Linbland	31
3.1. Vecindad de una celda	35
3.2. Vecindarios típicos de un autómata celular	35
3.3. Validación del autómata celular: reproducción del modelo de Mueller & Arnett	37

4.1. Curvas de rotación diferencial para las galaxia M101, M31, M81 y la via láctea .	39
5.1. Validación del autómata celular: comparación con el modelo de Mueller & Arnett	45
5.2. Dependencia del autómata a las condiciones iniciales	46
5.3. Autómata celular considerando dos estados: gas y protoestrella masiva	47
5.4. Autómata celular considerando 3 estados: gas , protoestrella masiva y protoes- trella de baja masa	48
5.5. Autómata celular con 4 estados: gas , protoestrella masiva, protoestrella de baja masa y secuencia principal	49
5.6. Autómata celular con 6 estados: gas , protoestrella masiva, protoestrella de baja masa, secuencia principal, gigante roja y remanente inerte	50
5.7. Evolución global de las poblaciones galácticas	52

Capítulo 1

Introducción

Existen diversos métodos y herramientas matemáticas utilizadas para modelar estructuras galácticas, sin embargo, la mayoría de dichos modelos no incluyen al mismo tiempo la dinámica galáctica y los procesos evolutivos dentro de la galaxia, tales como los inherentes a la evolución estelar. Esto nos motiva a proponer modelos que incluyan ambos elementos, ya sea explícitamente o implícitamente.

Los autómatas celulares (AC) son herramientas muy útiles para estudiar tanto el comportamiento dinámico como la evolución estelar: con un tiempo discretizado, un espacio discretizado ($2D$ en la mayoría de los modelos elaborados hasta el momento) y una representación discreta de la física, la dinámica de los AC es capturada en forma de iteraciones algebraicas, reduciendo notablemente la dificultad para su estudio.

En el presente trabajo se implementará un modelo de autómata celular en 2 dimensiones de una galaxia espiral a fin de simular la estructura galáctica local.

Es importante mencionar lo compleja y extensa que es, en astrofísica, el área de la evolución estelar y en la cual todavía existen muchas preguntas que contestar. Nuestro modelo es una aproximación general del problema: muchos factores, etapas y elementos de la estructura galáctica han sido intencionalmente omitidos; podrán introducirse en trabajos posteriores.

Recordemos como ha sido el desarrollo de las grandes teorías de la física moderna, tomemos como ejemplo la mecánica cuántica: a partir de unas reglas generales se comenzó su desarrollo y a lo largo de las últimas décadas muchos son los científicos que han profundizado en dicha teoría, agregando elementos más “finos” que nos permiten comprender fenómenos que no pueden ser explicados con una primera aproximación.

Numerosos autores han propuesto diferentes métodos para realizar simulaciones galácticas, entre los más importantes tenemos los modelos diferenciales de orden inferior y modelos diferenciales de orden superior. Los modelos diferenciales de orden inferior son empleados para describir sistemas dinámicos utilizando para ello *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDOs) de bajo orden ($n = 3, 4, \dots$). Estos modelos proporcionan una base teórica para entender de manera general el comportamiento evolutivo de las estrellas, junto con la evolución química de la galaxia en su conjunto. La principal virtud de estos modelos es que ellos demuestran el rol importante que juegan los elementos no lineales en las ecuaciones que describen la evolución del sistema (Shore 1985). Sin embargo, con estos modelos los efectos mecánicos, como la rotación galáctica y la interacción gravitatoria, son completamente ignorados.

Otro tipo de método son los denominados modelos diferenciales de orden superior, los cuales se presentan en la forma de *ecuaciones diferenciales ordinarias* de orden superior ($> 10^3$), conocidos como simulaciones de N-cuerpos. Estos modelos, originalmente en $2D$, incorporan únicamente la interacción gravitatoria y la rotación galáctica.

Modelos de este tipo permiten reproducir la distribución espacial del gas interestelar y son presentados bajo la suposición de que sus constituyentes son permanentemente masas puntuales sin estructura: la evolución física intrínseca de las especies galácticas es ignorada (Hohl 1971). Además de esto, para entender los aspectos generales de la dinámica de N-cuerpos, es

necesario utilizar un gran número de partículas (del orden de 10^6 - 10^7 partículas), lo que influye directamente en el tiempo de cómputo.

Cómo se comentó anteriormente, en este trabajo se utilizará el método de autómatas celulares, el cual será explicado en la sección 2,3. El primer trabajo realizado para simular la morfología global de galaxias espirales en el marco de los autómatas celulares, fue realizado por Mueller & Arnett (1976). En dicho trabajo se consideró la interacción gravitatoria entre los elementos que conforman la galaxia y los procesos de formación estelar, obteniéndose así patrones correspondientes a galaxias de tipo espiral, como se observa en la figura 1.1.

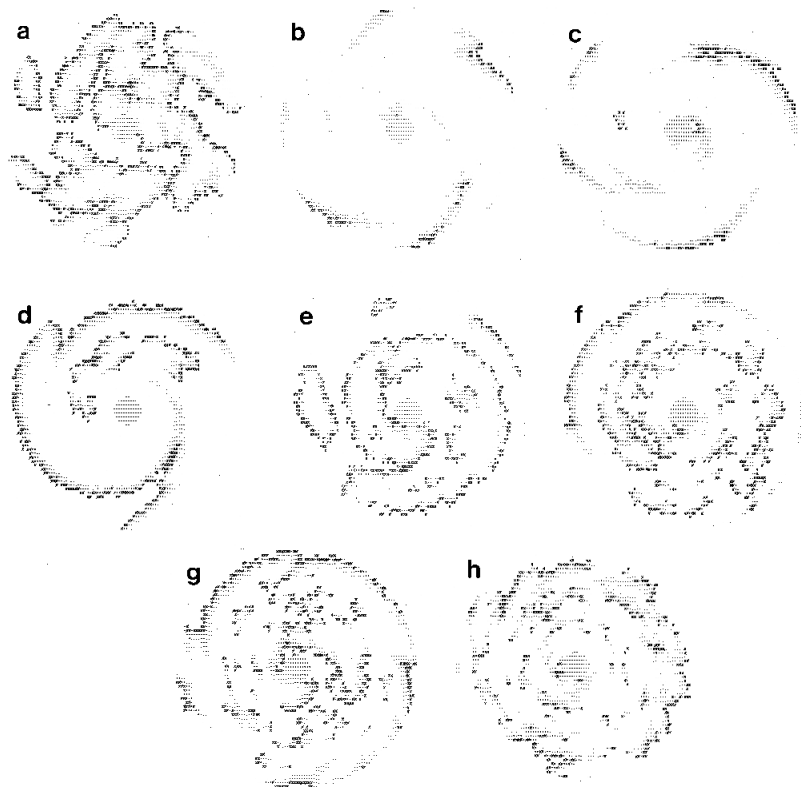


Figura 1.1: Evolución de una galaxia en la simulación de Mueller & Arnett. La edad de cada figura, en pasos de tiempo (cada paso de tiempo representa 25 millones de años) son: a) 5, b) 10, c) 30, d) 50, e) 70, f) 100, g) 130, h) 180. *Créditos: Mueller & Arnett 1976 Pag. 672*

A partir de este trabajo se han realizado muchas contribuciones a este tipo de modelo (vease

Gerola & Seiden (1978), Schulman & Seiden (1982), Comins & Shore (1990)). En este sentido, las referencias principales para la realización de nuestro modelo, son los trabajos realizados por Mueller y Arnett (1976) y Perdang y Lejeune (1996).

En el trabajo de Mueller y Arnett se incorpora una rotación diferencial junto con la formación estelar autoinducida; en la simulación numérica se observa el desarrollo de brazos galácticos fracturados semejantes a los observados en las galaxias espirales; en el trabajo de Perdang y Lejeune, por otra parte, se incorpora una secuencia detallada de los procesos de evolución estelar observándose un comportamiento evolutivo de las diferentes especies galácticas (protoestrellas, estrellas en la secuencia principal, gigantes rojas, remanentes inertes) que se asemeja con el comportamiento observado en las galaxias reales.

1.1. Objetivo del trabajo

En este trabajo nos hemos planteado como objetivo realizar e implementar un modelo de autómatas celulares en dos dimensiones que simule una galaxia. Para ello debemos simular los diferentes mecanismos evolutivos de los componentes de la galaxia (en particular aquellos relacionados con la evolución estelar) e implementar los efectos de la dinámica galáctica que producen patrones espirales característicos de las galaxias espirales.

Estos objetivos requieren unos comentarios adicionales:

Los componentes galácticos predominantes son el gas y polvo (en la forma de nubes moleculares) y las estrellas (en sus diferentes fases evolutivas), es por esta razón que al hablar acerca de los mecanismos evolutivos de la galaxia nos referimos a los relacionados con la evolución estelar. Así pues, debemos conocer los diferentes procesos de formación y evolución estelar para

saber cuales de estos procesos serán tomados en cuenta en nuestro modelo.

Una vez implementado el autómata, se espera encontrar patrones de distribución espacial de la materia que se asemejen con los observados en las galaxias espirales, además de esto, un análisis del número de especies encontradas para cada especie galáctica en cada instante de tiempo, nos permitirá comprobar si la evolución física de los componentes galácticos se corresponde con la observada en las galaxias.

En la primera parte de este trabajo se explicarán los procesos de evolución estelar que serán considerados en nuestro modelo galáctico; en la segunda parte del trabajo se explicará la teoría de los autómatas celulares, en la tercera parte se explicarán las suposiciones fundamentales del modelo propuesto; finalmente, analizaremos y discutiremos los resultados obtenidos.

Capítulo 2

Estructura, dinámica y cinemática galáctica

Una galaxia es un conjunto de estrellas, nubes de gas y polvo unidos gravitacionalmente. Las galaxias han sido clasificadas de acuerdo a su forma aparente obteniéndose como resultado la denominada secuencia de Hubble (véase Figura 2.1).

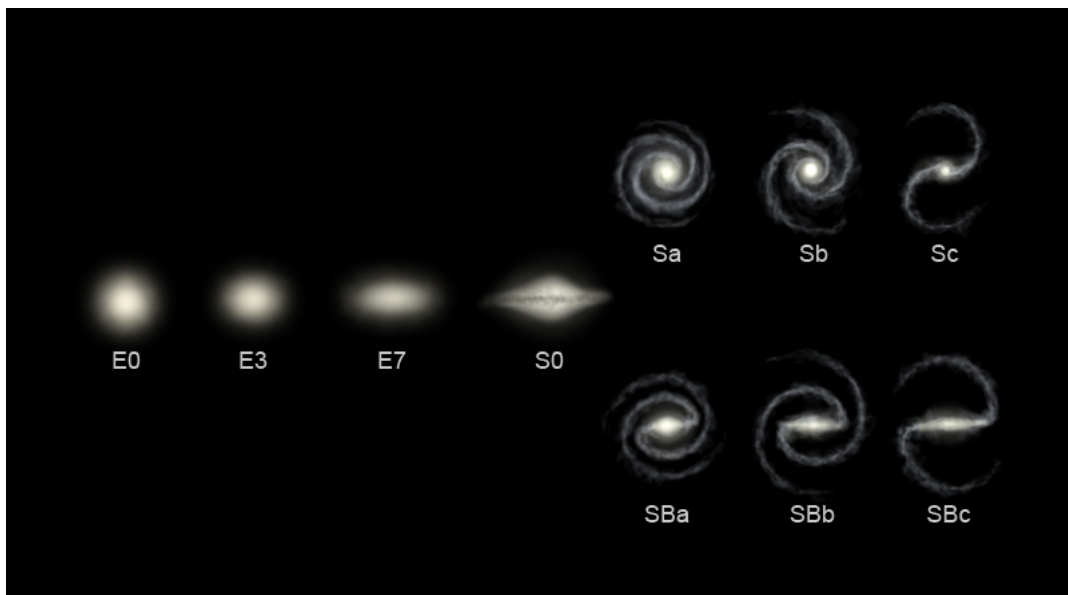


Figura 2.1: Diagrama de Hubble: en el se encuentra una clasificación de las galaxias según su forma aparente. *Créditos:* http://www.astro.psu.edu/users/cpalma/astro1h/Images/FG15_09.JPG

El material interestelar (gas y polvo que se puede presentar en forma de nubes de hidrógeno molecular, en gas parcialmente ionizado o en gas totalmente ionizado) y las estrellas en sus diferentes etapas evolutivas, son los diferentes elementos que conforman y caracterizan la estructura galáctica; nos referiremos a dichos elementos como especies galácticas.

La dinámica galáctica está relacionada con los procesos de evolución estelar (incluyendo los relacionados con la formación estelar), esto nos lleva a la necesidad de estudiar las etapas de evolución estelar.

2.1. Evolución estelar

La evolución estelar se refiere a la secuencia de cambios físicos que experimenta una estrella a lo largo de su existencia; abarcando desde los procesos de formación estelar hasta los procesos relacionados con la muerte de la estrella, incluyendo las distintas etapas intermedias.

2.1.1. Formación estelar

Todos los fenómenos de formación estelar están relacionados con el material interestelar. Los primeros descubrimientos de dicho material (mayormente gas) fueron hechos entre 1968 y 1970. Cerca del 70 % de la masa del gas interestelar -del cual se forman las estrellas- corresponde al hidrógeno, el cual se encuentra bien sea en forma molecular (H_2), como gas neutral (H I) o como gas ionizado (H II) dependiendo de la temperatura y la densidad del gas. La mayor parte de la masa restante está conformada por helio. El medio interestelar de nuestra galaxia ha sido clasificado por diferentes autores en diferentes fases (Ferreire. K (2001) Michael D. Smith - The origin of stars (2004)), según su temperatura y densidad (Cuadro 2.1).

Fase	Temperatura (K)	Densidad (cm^{-3})	Masa ($\times 10^9 M_{\odot}$)
Medio caliente ionizado	$3 - 20 \times 10^5$	3×10^{-3}	0,003
Medio tibio ionizado	10000	3×10^{-1}	0,05
Medio tibio neutral	8000	4×10^{-1}	0.2
Medio frio neutral	40 – 100	6×10^1	3
Nubes moleculares	10-30	3×10^2	3

Cuadro 2.1: Fases del material interestelar

El material interestelar reside en nubes de gas y polvo, conocidos como nebulosas. Las nebulosas moleculares son regiones frías (10-30 K) con dimensiones que varían entre 10 y 100 parsecs. Las nubes moleculares no son estructuras uniformes y el gas y el polvo dentro de ellas se distribuye a lo largo de estructuras filamentosas muy complejas que se corresponden con regiones de formación estelar, como podemos observar en la Figura 2.2.

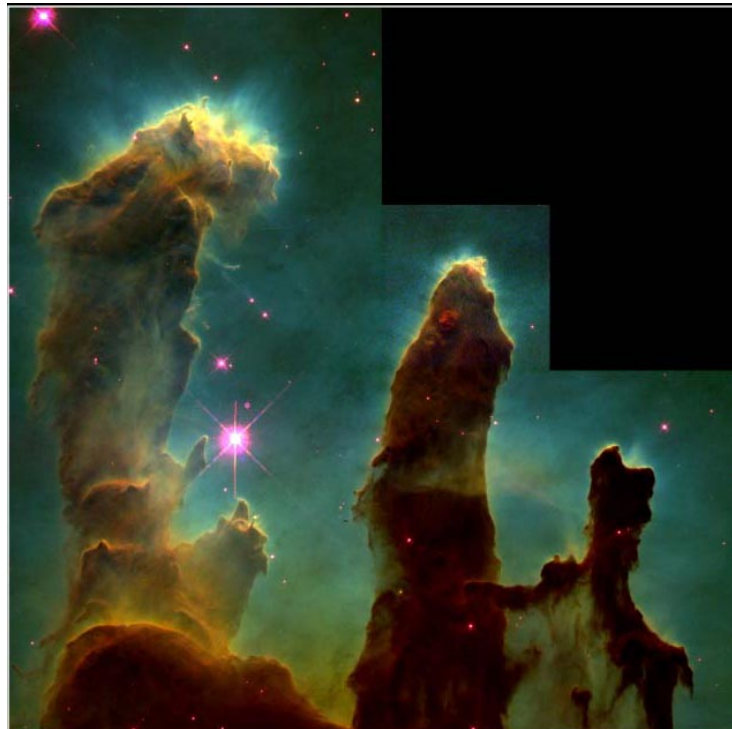


Figura 2.2: Columnas de gas y polvo interestelar, también conocidas como pilares de la creación, pertenecientes a la nebulosa del águila; son regiones de formación estelar muy activas. *Fotografía NASA, ESA, STScI, J. Hester y P. Scowen (Arizona State University)*

En la formación estelar ocurren procesos altamente inestables, estos procesos transforman la densidad del gas de una muy baja ($\sim 10^{-23}$ g/cm) a una muy alta ($\sim 10^2$ g/cm). En los gases interestelares pueden describirse dos procesos generales de formación estelar: formación estelar espontánea y formación estelar inducida.

Formación estelar espontánea

Una nube interestelar se vuelve inestable cuando la fuerza de gravedad es mayor que la fuerza debido al gradiente de la presión interna del gas, es ahí cuando la nube comienza a contraerse. Los criterios de Jeans determinan las condiciones para el inicio de la contracción. Estos criterios son la masa de Jeans y el radio de Jeans, los cuales deben su nombre al físico Sir James Jeans quien fue el primero en investigar inestabilidades de esta clase (1902).

El radio de Jeans R_J constituye el límite inferior para la dimensión de una región estable a temperatura T , conteniendo una masa M , dentro de una nube de gas. Contracciones por debajo de este límite provocan que la región perturbada colapse: la presión del gas resulta insuficiente para mantener el equilibrio con la gravedad. Para el radio de Jeans tenemos que:

$$R_J = \frac{\alpha \mu G M_\odot}{3 RT}, \quad (2.1)$$

donde M_\odot es la masa del sol, G es la constante de gravitación universal, α es una constante de proporcionalidad, μ está relacionado con la masa atómica, R es la constante de gas ideal y T es la temperatura.

De forma similiar, la masa de Jeans M_J corresponde a el límite superior de masa que puede ser contenida en equilibrio hidrostático dentro de una región de un volumen dado y viene dada

por

$$M_J \approx 10^5 \frac{T^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} M_\odot \quad (2.2)$$

Una vez que se rompe el equilibrio hidrostático en la nube molecular, esta comienza a contraerse elevando así la temperatura de su núcleo y a medida que se contrae comienza a rotar por conservación del momento angular; una nueva estrella se está formando.

Formación estelar inducida

Cuando en una estrella de alta masa muere, se origina una explosión conocida como explosión de supernova; dicha explosión envía a su alrededor ondas de radiación junto con una gran cantidad de partículas. Estas emisiones viajan como ondas de presión empujando y presionando todos los elementos cercanos. Si la estrella se encontraba en una nebulosa grande, estas presiones desencadenarán la formación de otras estrellas, proceso conocido como autopropagación (vease Figura 2.3).

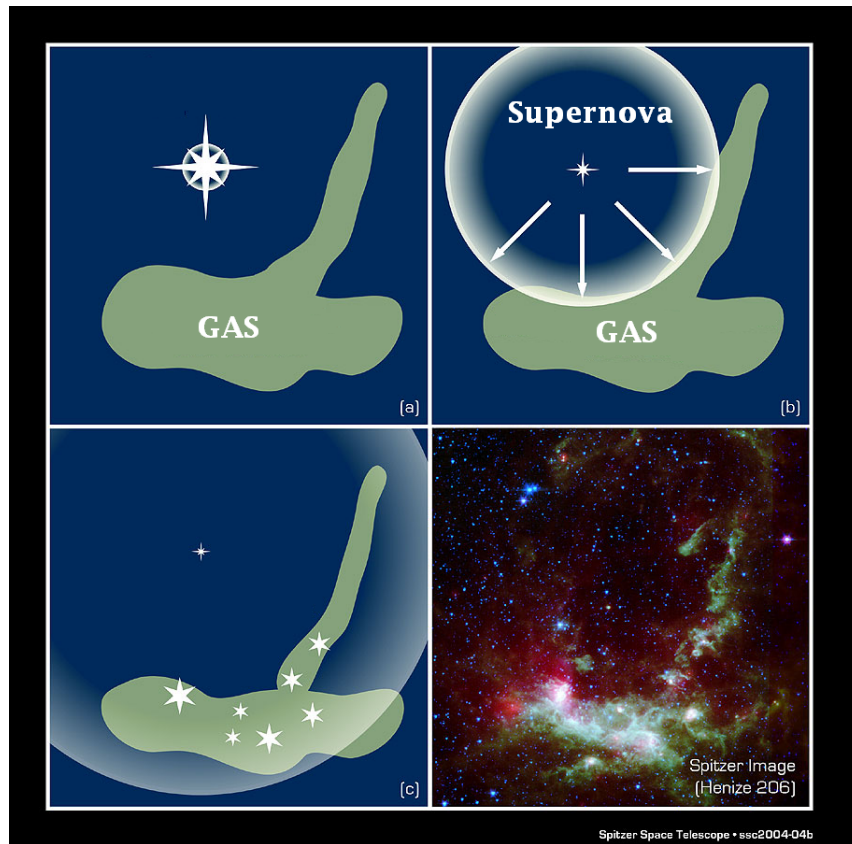


Figura 2.3: Esquema representativo de la formación estelar inducida: (a) Ocurre una explosión de supernova cercana a una nube caliente de gas y polvo (b) La onda de choque comprime la nube molecular (c) Se forman estrellas en la estela de la onda de choque la cual actúa como catalizador del proceso (d) Imagen real tomada por el Telescopio Espacial Spitzer donde se observa el resultado del proceso. *Créditos: NASA/IPAC*

Estas ondas de choque pueden ser consideradas como ayudantes de la fuerza gravitacional en la compresión de las estrellas, por esto se le suele denominar a este proceso formación estelar catalítica ya que acelera el proceso de formación estelar.

2.1.2. Protoestrellas

Una nube molecular al colapsar, bien sea por procesos de formación espontáneos o procesos de formación inducidos, termina en un estado estable, denominado *protoestrella*. La protoestrella es una *esfera isotérmica en equilibrio hidrostático*(Shu 1977). El tiempo que tarda en

contraerse la nube, convertirse en una protoestrella y luego encender su horno nuclear, abarca menos del 1 % de la vida de la estrellas. Por ejemplo, una estrella de $1M_{\odot}$ dura 3×10^7 años contrayéndose hasta la ignición del hidrógeno, en contraste con los 10^{10} años que dura fusionando hidrógeno en su núcleo. Para estrellas más masivas las escalas de tiempo se contraen significativamente: para una estrella de $9M_{\odot}$, la etapa de contracción toma aproximadamente 10^5 años y la etapa de secuencia principal toma unos 2×10^7 años. Estas diferencias en las escalas temporales influyen directamente en la observación: mayores escalas de tiempo dinámicas resultan en una mayor probabilidad de observar dicho estado, y viceversa. Esto trae como consecuencia la escasez en la observación de protoestrellas.

2.1.3. Secuencia principal

Una vez que las estrellas alcanzan condiciones estables (equilibrio térmico) y se enciende su núcleo, pasan ahora a formar parte de la secuencia principal (SP). En dicho estado se fusiona constantemente hidrógeno en helio; tan pronto como la estrella quema todo el hidrógeno de su núcleo, la misma deja de pertenecer a la secuencia principal. La mayor parte de las estrellas pasan el 90 % de su vida, aproximadamente, en la secuencia principal. Podemos observar una representación gráfica de la secuencia principal en el diagrama H-R de la Figura 2.4:

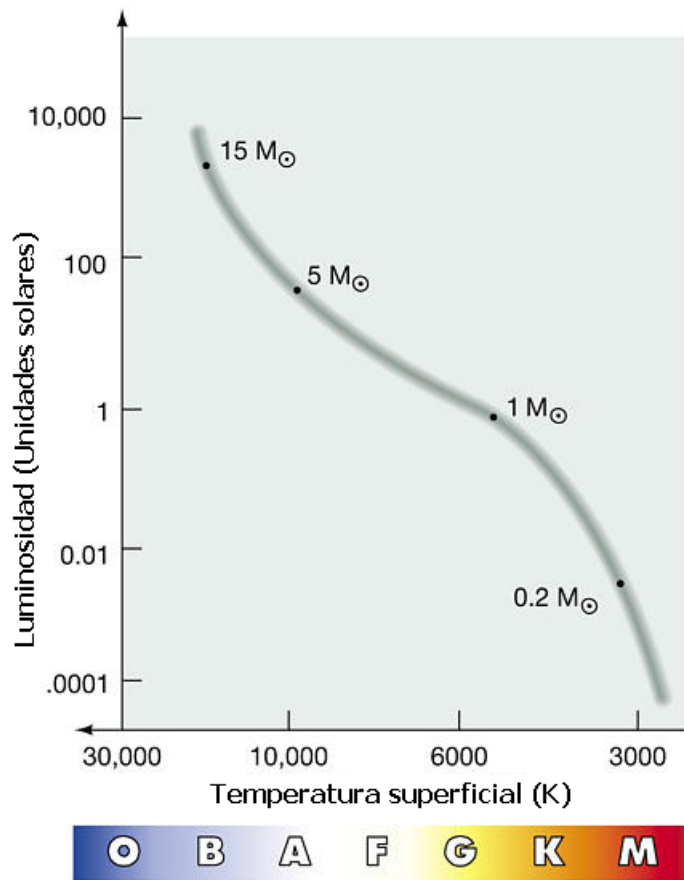


Figura 2.4: Diagrama H-R donde se muestra la secuencia principal. *Créditos: Spectral Classification - Pearson Prentice Hall - 2005*

En la secuencia principal podemos distinguir distintos tipos de objeto de acuerdo a su masa:

- **Estrellas de baja masa:** Son estrellas que fusionan hidrógeno y cuyas masas pertenecen al rango $0,075 M_{\odot} < M < 0,25 M_{\odot}$. Son llamadas también enanas rojas y su característica principal es que no tienen la temperatura suficiente para fusionar Helio (He) a Carbono (C) en su núcleo.
- **Estrellas de masa intermedia:** A esta categoría pertenece nuestro Sol. Sus masas se encuentran en el rango $0,25 M_{\odot} < M < 1,2 M_{\odot}$. Estas estrellas son capaces de fusionar Helio (He) en Carbono (C) y en algunos casos Oxígeno (O). Estrellas cuyas masas sean

> $0,4 M_{\odot}$ evolucionarán al estado de gigantes rojas

- **Gigantes y Supergigantes:** Estas estrellas, con masas $> 1,2 M_{\odot}$, pueden transformar Hidrógeno en Helio a través del ciclo de carbono CNO¹

A partir de la fase de la secuencia principal, la evolución de la estrella dependerá de su masa.

2.1.4. Evolución de las estrellas de baja masa

Las estrellas de baja masa ($< 11M_{\odot}$) siguen el proceso evolutivo descrito en la figura 2.5

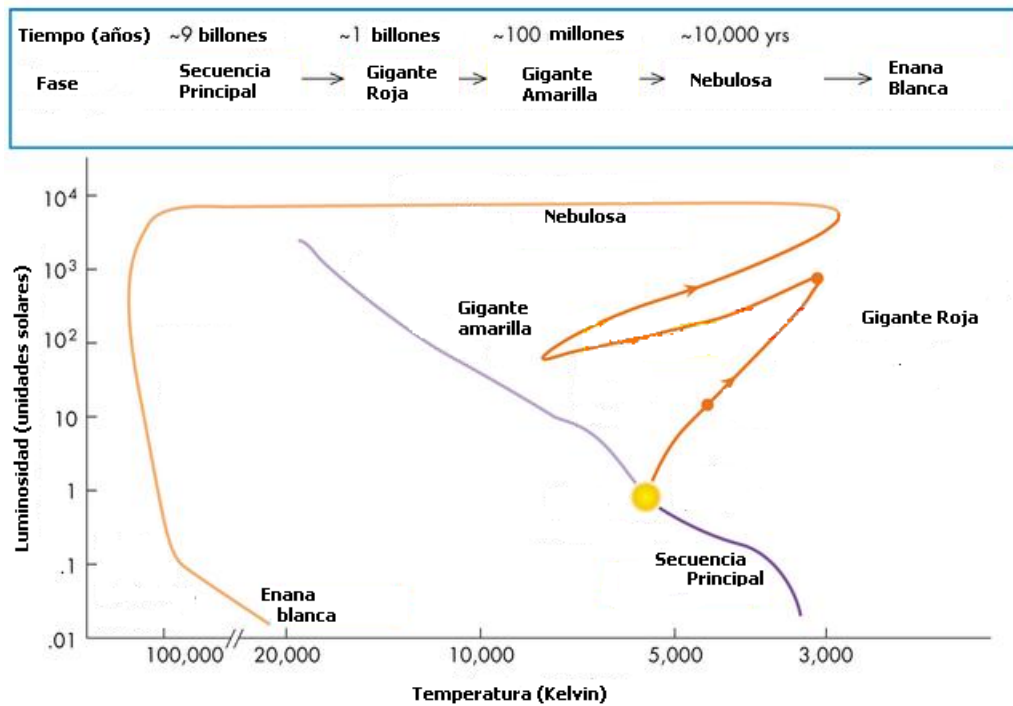


Figura 2.5: Proceso evolutivo de estrellas de baja masa ($< 11M_{\odot}$).Créditos: <http://skyserver.sdss.org/dr1/en/astro/stars/images/starevol.jpg>

¹El resultado neto del ciclo (CNO) es la fusión de cuatro protones en una partícula alfa 4He , dos positrones e^+ y dos neutrinos ν , liberando energía en forma de rayos gamma γ . Los núcleos de carbono, oxígeno y nitrógeno sirven como catalizadores y se regeneran en el proceso

Podemos distinguir dos fases en la evolución de las estrellas de baja masa a partir de la secuencia principal: gigante roja y enana blanca.

Gigantes rojas

Al consumirse el hidrógeno combustible en el núcleo de una estrella, su producción de energía disminuye, y el núcleo inicia el colapso. El hidrógeno no quemado en la periferia se convierte gradualmente en helio - que se acumula en el núcleo y la radiación resultante detiene la contracción general. Pero el colapso del núcleo prosigue hasta alcanzar una temperatura aun mayor, para quemar el helio y producir elementos más pesados. Ese proceso continúa hasta que el núcleo de helio alcanza del 10 al 15 % de toda la masa de la estrella, cuando alcanza el límite de Schönberg-Chandrasekhar², momento en el que el núcleo comienza a contraerse. Bajo su propio peso y el de las capas externas, el núcleo se contrae rápidamente, la envoltura circundante se expande y la estrella se convierte en una gigante roja, una estrella de baja temperatura cuyo radio es muy grande (vease Figura 2.6).

²Los valores estimados para este límite dependen del modelo de composición química usado para la estrella. Dicho límite está expresado como la razón entre la masa del núcleo y la masa del núcleo más la envoltura, sus valores típicos oscilan entre 0.10 y 0.15

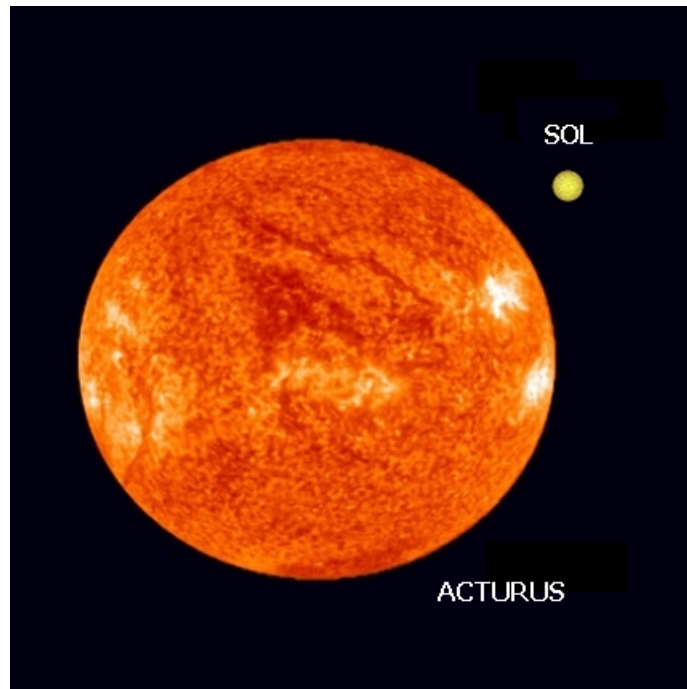


Figura 2.6: Imagen comparativa entre el tamaño típico de una gigante roja, nuestro Sol y nuestro planeta Tierra. *Créditos: Universidad de Waikato - Nueva Zelanda*

En ese tiempo, el núcleo en contracción se calienta hasta el punto que el helio que contiene “arde” y produce carbono. El reinicio de los procesos de fusión nuclear en el núcleo, (lo que origina un incremento de la temperatura), impide que el núcleo siga colapsando; es por esta razón que una estrella puede permanecer como gigante roja varios millones de años antes de que cese toda reacción nuclear, momento en el cual la estrella se encuentra en su estado final evolutivo.

Enana blanca

Para estrellas de baja masa tenemos que el estado final evolutivo es el de la enana blanca. Una enana blanca es un remanente estelar que se genera cuando una estrella de masa menor a 9 – 10 masas solares ha agotado su combustible nuclear. De hecho, se trata de una etapa

de la evolución estelar que atravesará el 97% de las estrellas que conocemos. Son estrellas que contienen alrededor de 1 masa solar, un radio característico de aproximadamente 5000km y una densidad de alrededor de 10^6g/cm^3 . El valor máximo de masa de las enanas blancas es de 1,4 masas solares y su valor exacto depende de su composición química. Este límite fue descubierto por Chandrasekhar (1934) y se conoce como *límite de Chandrasekhar* en honor a su descubridor.

En teoría, las enanas blancas se enfriarán con el tiempo hasta que ya no emitan radiación detectable transformándose así en una enana negra, sin embargo, el proceso de enfriamiento es tan lento que la edad del universo es muy corta para albergar alguna de estas enanas negras (Johnson 2007). Las enanas blancas emiten solamente energía térmica almacenada ya que su núcleo no fusiona ningún elemento; es por ello que tienen luminosidades muy débiles, aunque pueden ser detectadas por los telescopios (Figura 2.7).

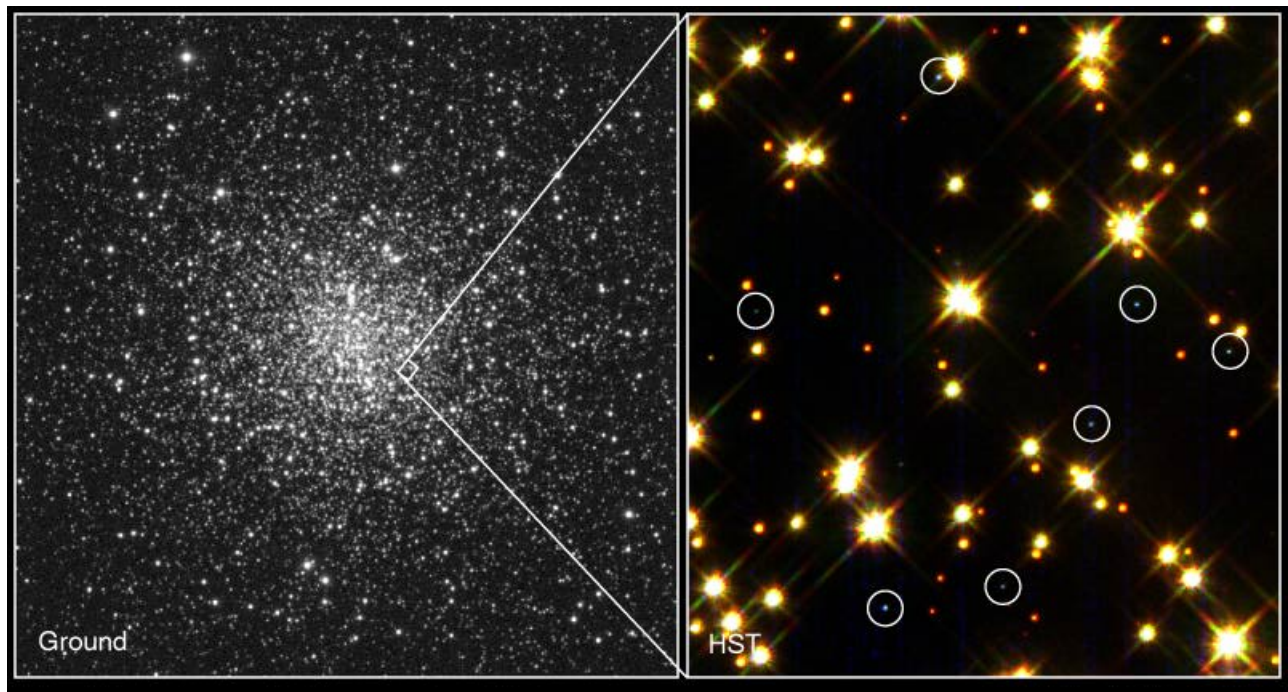


Figura 2.7: Fotografía tomada por el telescopio espacial Hubble de una región cercana al cúmulo globular conocido como M4 en la cual se puede observar una gran concentración de enanas blancas. *Créditos: H. Richer (UBC) et al., WFPC2, HST, NASA*

Cuando una gigante roja no posee suficiente temperatura como para luego fusionar el carbono y el oxígeno, su núcleo se comprime por la gravedad y su envoltura es expulsada en una serie de pulsos térmicos, produciendo entonces una nebulosa, denominada nebulosa planetaria, que envuelve a la enana blanca (Figura 2.8).



Figura 2.8: Nebulosa planetaria NGC 2440. En ella se observa una de las enanas blancas más brillantes conocidas (el punto brillante cercano al centro de la imagen) rodeada por una envoltura brillante en expansión de plasma y gas ionizado conocida como nebulosa planetaria. *Créditos: H. Bond (STScI) R. Ciardullo (PSU), WFPC2, HST, NASA*

2.1.5. Evolución de las estrellas de alta masa

Las estrellas de alta masa ($> 11M_{\odot}$) siguen un proceso evolutivo similar al de las estrellas de baja masa, sin embargo, difiere en el estado final, como podemos observar en la figura 2.9

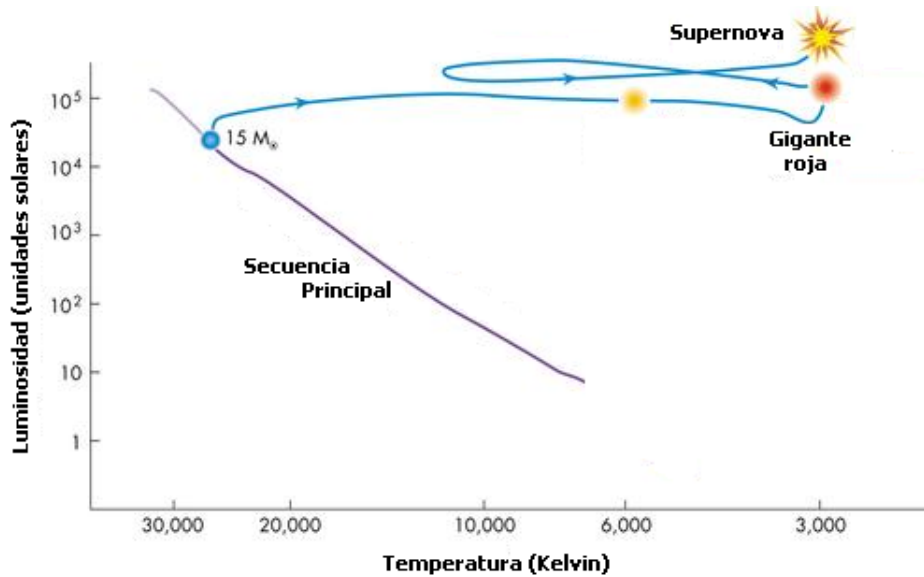


Figura 2.9: Proceso evolutivo de estrellas de baja masa ($> 11M_{\odot}$).Créditos: http://www.astro.psu.edu/users/cpalma/astro1h/Images/FG12_16.JPG

Como podemos observar, luego de pasar por la secuencia principal, una estrella de alta masa pasará al estado evolutivo conocido como gigante roja (véase arriba) una vez consumido todo su combustible nuclear; finalmente colapsará dando lugar a una explosión de supernova, el remanente de dicha explosión es un estado conocido como estrella de neutrones.

Las explosiones de supernova enriquecen el medio interestelar al expulsar, en forma de ondas de choque, elementos pesados.

Estrella de neutrones

Si una enana blanca supera el *límite de Chandrasekhar* (como en el caso de las estrellas de alta masa), colapsará convirtiéndose en una estrella de neutrones, las cuales, como su nombre lo indica, están formadas principalmente por neutrones. Este proceso ocurre generalmente en estrellas de alta masa. El primer modelo físico de las estrellas de neutrones fue propuesto por Oppenheimer y Volkoff (1939) quienes asumieron que dichas estrellas están compuestas por un

gas de alta densidad de neutrones libres. Actualmente se estima su límite superior de masa entre $2M_{\odot}$ y $3M_{\odot}$. La comprobación de su existencia está asociada con el descubrimiento de los púlsares, que son estrellas de neutrones rotando a altas velocidades, emitiendo pulsos de radiación electromagnética de manera periódica (Figura 2.10).

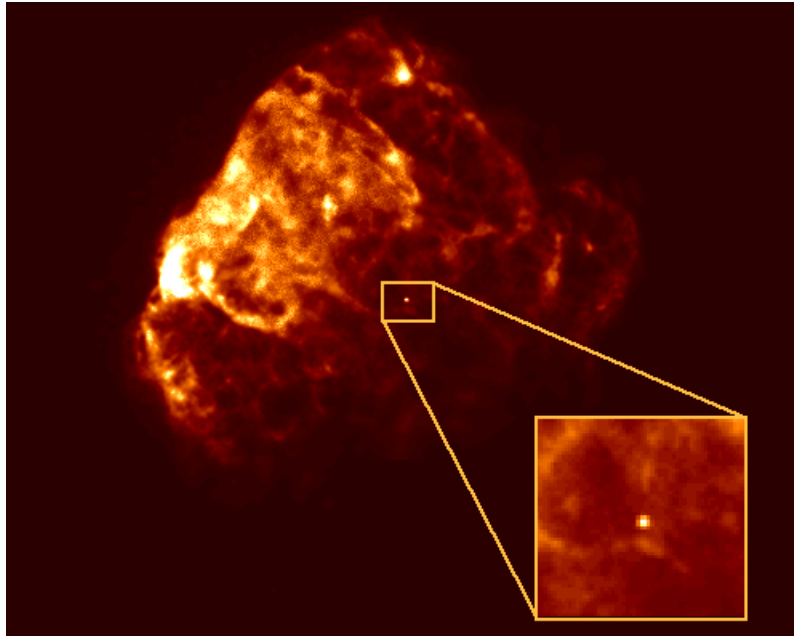


Figura 2.10: Remanente de supernova Puppis A, en el acercamiento podemos observar una de las estrellas de neutrones más jóvenes observadas hasta este momento. *Créditos: S. Snowden, R. Petre (LHEA/GSFC), C. Becker (MIT) et al., ROSAT Project, NASA*

2.2. Cinemática galáctica

La cinemática galáctica es gobernada por la rotación galáctica.

2.2.1. Rotación galáctica

Para la rotación galáctica, generalmente se toma en cuenta el modelo propuesto por Oort-Linblad, quienes demostraron en 1925, que el disco de una galaxia se encuentra en un estado

de rotación diferencial alrededor de un eje perpendicular al plano galáctico y que pasa por su centro.

Si toda la masa de la galaxia estuviera contenida en su centro, la velocidad circular de una estrella decrecería con la raíz cuadrada de su distancia galactocéntrica. Si la masa estuviera distribuida homogéneamente y con simetría esférica, la velocidad circular se incrementaría linealmente con la distancia galactocéntrica. En las galaxias, como es bien sabido, no se da ninguno de estos dos casos: la materia está distribuida en un disco plano, un bulbo y un halo. Esta distribución da una forma característica a la curva de rotación galáctica (ver figura 2.11).

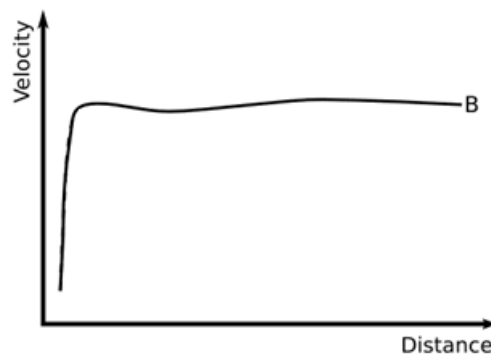


Figura 2.11: Forma general de la función que describe la rotación diferencial galáctica según el modelo de Oort-Linblad, el el cual, la velocidad angular depende únicamente del radio. *Créditos:* <http://en.wikipedia.org/wiki/File:GalacticRotation2.svg>

De esta curva se deduce que la parte más interna del disco rota aproximadamente como un sólido rígido, con una velocidad circular creciente con la distancia al centro de la galaxia. Por contra, a grandes distancias del centro de la curva de rotación se vuelve plana en gran medida, dando como resultado una velocidad circular casi constante con la distancia galactocéntrica.

Una vez conocidos los diferentes procesos que conforman la estructura y dinámica galáctica estamos en capacidad de proponer un modelo que simule una galaxia, sin embargo, debemos conocer a profundidad el sistema dinámico que vamos a utilizar para nuestra simulación, es

decir, los autómatas celulares.

Capítulo 3

Autómatas celulares

Los autómatas celulares son sistemas dinámicos, es decir, presentan un cambio o evolución de su estado en el tiempo. El autómata celular es un sistema discreto tanto desde el punto de vista espacial como temporal, es decir, evoluciona en pasos discreto de tiempo, es un arreglo espacial discreto y el conjunto de configuraciones posibles del sistema constituye un conjunto finito (tenemos un número finito de configuraciones).

Los autómatas celulares poseen las siguientes características:

- El espacio es representado por una rejilla uniforme (que puede tener $n \geq 1$ dimensiones) conformada por celdas, cada una de las cuales es denominada un automatón celular, el cual en cada instante discreto de tiempo, se encuentra en un estado particular dentro de un número finito de estados $k \geq 2$.
- El tiempo evoluciona de manera discreta, de manera que los cambios de estado de las celdas se consideran en momentos discretos o ciclos de tiempo. El valor $t = 0$ es comunmente reservado para el período de tiempo inicial antes de que cualquier cambio de estado en las celdas tome lugar.

- Las leyes del sistema son locales en el sentido de que el cambio de estado depende de las celdas cercanas o vecinas: acciones a distancia no son permitidos; para definir completamente un autómata celular es necesario definir el tipo de vecindad.
- Las leyes del sistema son uniformes, esto es, las leyes son las mismas para todas las celdas, además, todas las celdas evolucionarán simultáneamente.

3.1. Propiedades de los autómatas celulares

Los autómatas celulares están conformados por cuatro elementos bien definidos: el conjunto finito de estados K en los que puede encontrarse cada automatón, la función de transición φ , la configuración inicial del sistema c_0 y la vecindad ν que es conformada por los vecinos ortogonales y/o diagonales con respecto a un automatón central.

- **Función de transición:** dado un automatón en un estado y ciclo de tiempo determinado, la función o regla de transición define la dinámica del sistema devolviendo el siguiente estado del automatón, para ello necesita como argumentos los estados actuales tanto del elemento considerado como de aquellos que conforman su vecindad. Las reglas de transición pueden ser deterministas o probabilistas.
- **Vecindario:** En un autómata celular de 2 dimensiones, las celdas son caracterizadas por dos números enteros que definen su posición en el espacio, en el caso de un autómata rectangular, un número representa la fila y el otro la columna, como vemos en la Figura 3.1.

$i - 1, j - 1$	$i - 1, j$	$i - 1, j + 1$
$i, j - 1$	i, j	$i, j + 1$
$i + 1, j - 1$	$i + 1, j$	$i + 1, j + 1$

Figura 3.1: Vecindad de una celda

Con esta notación podemos definir los dos tipos de vecindarios más utilizados en los autómatas celulares $2D$:

1. Vecindario de *von Neumann*: conformado por cuatro (o cinco) celdas dependiendo de si se incluye o no la celda central, las celdas sin incluir la celda central son $[i,j+1; i+1,j; i,j-1; i-1,j]$.
2. Vecindario de *Moore*: el cual está formado por las ocho (o nueve si se incluye la central) celdas que se encuentran alrededor de la celda central, es decir, las celdas $[i,j+1; i+1,j; i,j-1; i-1,j; i+1,j+1; i+1,j-1; i-1,j-1; i-1,j+1]$.

Ambos tipos de vecindarios los podemos ver en la Figura 3.2.

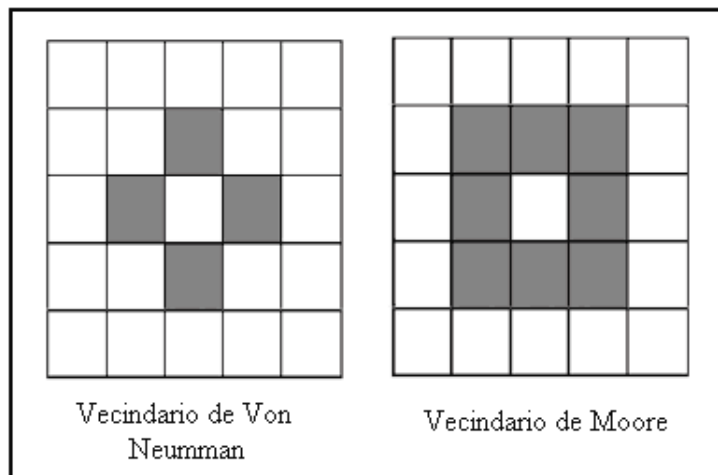


Figura 3.2: Imagen de los dos tipos de vecindarios más utilizados en los autómatas celulares: a la izquierda tenemos el vecindario de von Neumann y a la derecha el vecindario de Moore.

También es necesario definir cuales son las condiciones de frontera del autómata celular, en particular existen tres tipos de condiciones de frontera:

- *Frontera abierta*: se considera que todas las células fuera del espacio del autómata toman un valor fijo.
- *Frontera reflectora*: las células fuera del espacio del autómata toman los valores dentro de este como si se tratara de un espejo.
- *Frontera periódica*: una celda que está en la frontera interactúa con sus vecinos inmediatos y con las celdas que están en el extremo opuesto del autómata.

En definitiva, para poder utilizar un autómata celular en la simulación de galaxias, es necesario definir cada uno de los elementos que conforman nuestro autómata. Una vez implementado el código se obtiene una imagen del autómata para cada ciclo de tiempo, en dicha imagen se puede observar la distribución espacial de las diferentes especies galácticas. En la figura 3.3 se observan las imágenes obtenidas al reproducir el modelo de autómata celular propuesto por Mueller & Arnett (1976).

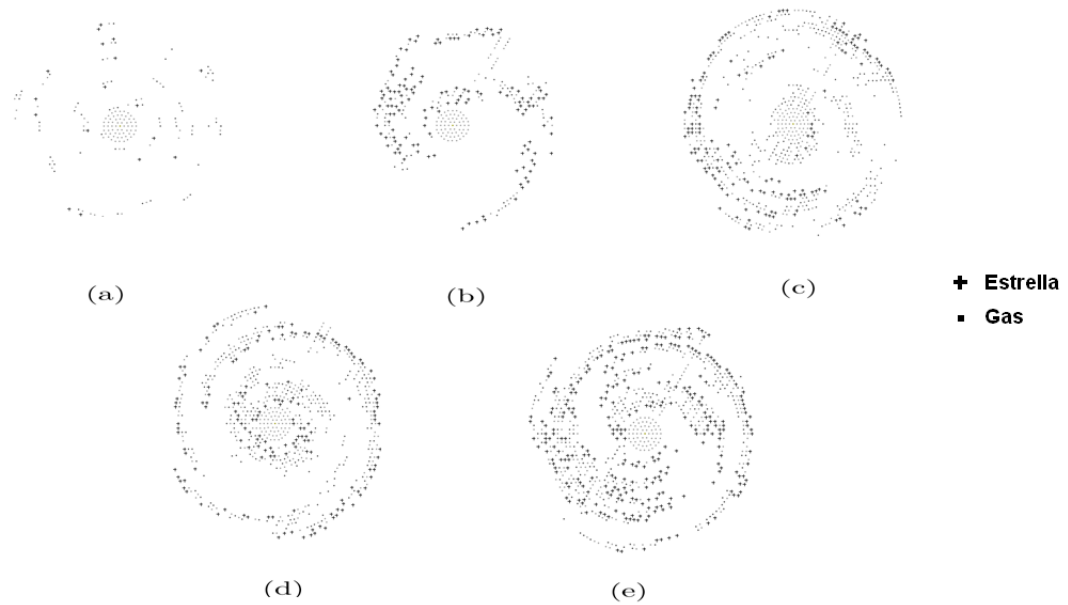


Figura 3.3: Imágenes obtenidas por el autómata celular implementado. Se toman en cuenta dos especies galácticas: gas caliente (aquellas celdas en estado gas en las cuales el proceso de formación estelar ocurrió una o dos iteraciones atrás, identificadas con puntos) y estrella (cruz) para la iteración (a) 10, (b) 50, (c) 100, (d) 130 y (e) 180. Al poder reproducir el modelo propuesto por Mueller & Arnett, se verifica el correcto funcionamiento del autómata celular.

Capítulo 4

Modelo

Una vez conocidos los diferentes procesos evolutivos del principal componente que conforma la galaxia, es decir, las estrellas; se puede utilizar el autómata celular como una herramienta para simular la dinámica galáctica, para ello debemos definir cuales son los estados, la función de transición, las condiciones iniciales y las condiciones de frontera de nuestro sistema.

4.1. Estados del automata

En el autómata celular $2D$ propuesto para modelar el disco galáctico, el grueso del disco es ignorado y sólo son considerados movimientos circulares alrededor del centro galáctico. El disco es dividido en 30 anillos concéntricos y cada anillo es dividido a su vez en celdas aproximadamente cuadradas. Cerca de 2600 celdas son usadas. Cada anillo rota de acuerdo a una curva de rotación dada, en particular se tomó la curva de rotación de la galaxia M101 presentada por Roberts y Rots (1974) (Vease figura 4.1). Esta curva fue escogida por pertenecer a una galaxia de tipo espiral.

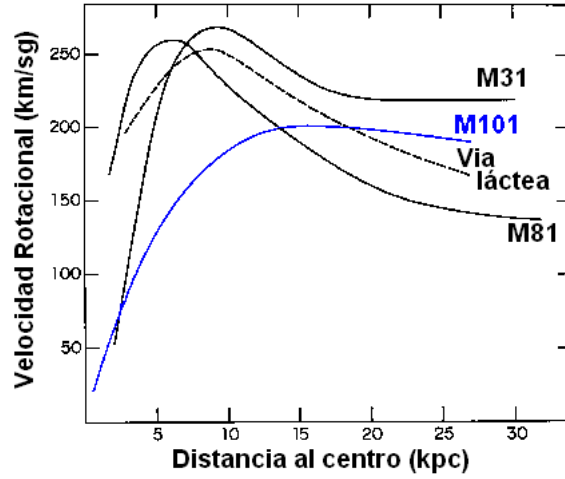


Figura 4.1: Imagen de diferentes curvas de rotación diferencial, en el modelo propuesto se tomó en cuenta la curva correspondiente a la galaxia M101 *Créditos: Roberst & Rots 1974*

El modelo incorpora las *especies galácticas* dadas por la tabla 4.1.

Estado	Abreviatura
Gas	gas
Protoestrella masiva	P
Estrella en secuencia principal	M
Gigante roja	R
Protoestrella de baja masa	L
Remanente inerte	I

Cuadro 4.1: Especies galácticas incorporadas en el modelo propuesto

Cada celda del autómata puede estar en en cualquiera de estos estados en cada iteración. Esto se representa mediante la notación $E_{r,\theta}^n = X$ donde E es el estado, (r, θ) es la ubicación de la celda en coordenadas polares, n es la iteración y X es el estado de la celda. Las celdas en estado gas poseen un parámetro t_f , el cual es igual al número de iteraciones desde que la última vez que una estrella se formó en la celda: sólo puede ocurrir formación estelar si ha transcurrido cierto tiempo de transición (τ) desde la última formación estelar¹.

¹El tiempo de transición τ representa el tiempo necesario para que el gas caliente donde se produjo un

4.2. Función de transición

Los procesos de formación estelar en el disco galáctico, son simuladas por transiciones del estado de una celda a otro estado en nuestro autómata celular, transcurriendo el tiempo de manera discreta. En el modelo propuesto se considera la formación estelar auto-propagada: una celda induce la formación estelar en todas las celdas vecinas.

Es necesario definir el vecindario a utilizar ya que del mismo dependen las reglas del autómata: las celdas vecinas consideradas para la formación autopropagada de protoestrellas de baja masa desde una celda (r, θ) son cuatro (vecindario de Von neumann), a su vez, las celdas vecinas consideradas para la formación autopropagada de protoestrellas masivas desde una celda (r, θ) son ocho (vecindario de Moore).

4.3. Formación estelar

4.3.1. Formación estelar inducida

Los procesos de formación estelar se aplican en el autómata mediante las siguientes reglas:

1. Si $E_{r,\theta}^n = gas$ y $t_f < \tau$ entonces $E_{r,\theta}^{n+1} = gas$ y $t_f = t_f + 1$

Esta regla representa el enfriamiento de la nube molecular, el cual se encuentra caliente y presenta turbulencias debido a las ondas de choque que se originan muchas veces en los procesos de formación estelar (Mueller & Arnett , 1976).

2. Si $E_{r,\theta}^n = R$ y existe una celda vecina $E_{r',\theta'}^n = gas$ con $t_f \geq \tau$ entonces $E_{r,\theta}^{n+1} = gas$ y

proceso de formación estelar, se enfríe lo suficiente como para permitir un nuevo proceso de formación estelar

$$t_f = 0$$

3. Si $E_{r,\theta}^n = gas$ y $t_f \geq \tau$ y existe una celda vecina $E_{r',\theta'}^n = R$ (entonces $E_{r,\theta}^{n+1} = P$ y $t_f = 0$

Ambas reglas representan el proceso de formación estelar autoinducido en el cual una estrella que se encuentre en una fase avanzada de evolución estelar, induce la formación estelar en las celdas vecinas

4.3.2. Formación estelar espontánea

También se considera el efecto de la formación estelar espontánea: en cada iteración, se escoge aleatoriamente un número de celdas en estados gas y se convierten a estado protoestrella masiva o de baja masa.

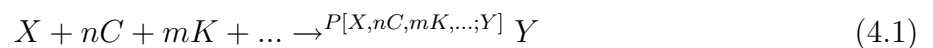
Todos los parámetros que controlan los procesos de formación estelar en el modelo propuesto son escogidos según el modelo de Mueller & Arnett:

- El tiempo de regeneración $\tau = 7$ iteraciones.
- El número de celdas s por iteración en las cuales ocurre formación estelar espontánea.

Dicho valor es el 1% de la tasa de formación estelar total.

4.4. Evolución estelar

Para la evolución estelar se incorporan las reglas probabilísticas propuestas por Lejeune & Perdang (1996), cada regla se expresa mediante una ecuación estequiométrica:



Esta notación nos dice que si en un tiempo discreto τ una celda (r, θ) se encuentra en un estado X , y n celdas (r', θ') , (r'', θ'') ,... , del vecindario $N(r_i, \theta_j)$ de la celda (r, θ) se encuentran en estado C , m celdas en estado K , etc, entonces en un tiempo discreto $\tau + 1$ el estado X es reemplazado por el estado Y

Las reacciones tomadas en cuenta y sus respectivas probabilidades² se observan en el cuadro 4.2:

Reacción	Probabilidad	Valor
$P \rightarrow M$	P_1	0,050
$P + mM + rR \rightarrow M$	P_2	0,010
$P + mM + rR \rightarrow gas$	P_3	0,050
$M \rightarrow R$	P_4	0,0250
$M + rR \rightarrow R$	P_5	0,0750
$M + mM + rR \rightarrow gas$	P_6	0,0100
$R \rightarrow I$	P_7	0,0005
$L \rightarrow I$	P_8	0,000004

Cuadro 4.2: Reglas evolutivas y probabilidades de transición

Estas probabilidades son obtenidas tomando el tiempo que representa cada iteración y dividiéndolo entre el tiempo aproximado que dura cada etapa de la evolución estelar: mientras mayor sea el tiempo de vida, mayor será la probabilidad de observar dicha especie galáctica y viceversa. Para poder tomar los valores probabilísticos propuestos por Lejeune & Perdang (cuadro 4.2), se tomó $\Delta t = 5 \times 10^5$ años; esto trae como consecuencia que en el modelo propuesto, los procesos de formación estelar ocurren cada cinco iteraciones³

Debido a que las condiciones físicas en el núcleo galáctico son inciertas, los procesos de formación y evolución estelar no son aplicados en el núcleo galáctico.

²Los valores de las probabilidades son los propuestos por Lejeune & Perdang en su investigación

³Debido a que dichos procesos ocurren cada $\Delta t = 2,5 \times 10^6$ según el modelo de Mueller & Arnett

4.5. Estado inicial del sistema

El estado inicial de la galaxia es una distribución difusa y espacialmente no uniforme de gas: toda celda del autómata se encuentra en estado gas, además el t_f de cada celda varía aleatoriamente entre 1 y τ ; esto representa nubes moleculares cuya distribución de temperatura no es uniforme. Al inicio de cada corrida, se escogen aleatoriamente 40 celdas a las cuales se les asigna estado estrella, en el modelo propuesto, estas 40 celdas se distribuyen en 20 protoestrellas masivas y 20 protoestrellas de baja masa⁴.

Para una corrida estándar, se tomaron los valores propuestos por Mueller & Arnett para los distintos parámetros que definen el autómata: $s = 1$, $\tau = 7$, $v_{rot}^{max} = 200$ km/sg.

Las condiciones de frontera adoptadas en nuestro modelo son de tipo fija: celdas que se encuentren fuera del disco galáctico no son tomadas en cuenta, esto simula el hecho de que a medida que aumenta la distancia galactocéntrica, los procesos de formación estelar disminuyen (Emelgreen & Parravano 1994).

⁴En el modelo de Mueller & Arnett estas 40 celdas son asignadas con el estado estrella sin hacer ninguna clasificación de acuerdo a la masa. En el modelo propuesto se realizaron varias corridas con diferentes proporciones iniciales de protoestrellas de alta y baja masa sin que se observase ninguna diferencia significativa en la formación de estructuras espirales, se adoptó entonces la distribución 20/20 como la estándar

Capítulo 5

Resultados

5.1. Estructura espacial

A fin de validar el autómata celular que se utilizó en este trabajo, primero se reprodujo el modelo propuesto por Mueller & Arnett (véase fig. 5.1). En dicho modelo cada iteración de tiempo representa $2,5 \times 10^6$ años y las celdas solamente pueden estar en dos estados: estrella (1) o gas (0). Las imágenes no son exactamente iguales debido a que las condiciones iniciales son aleatorias, sin embargo se observa un comportamiento similar al obtenido por Mueller & Arnett.

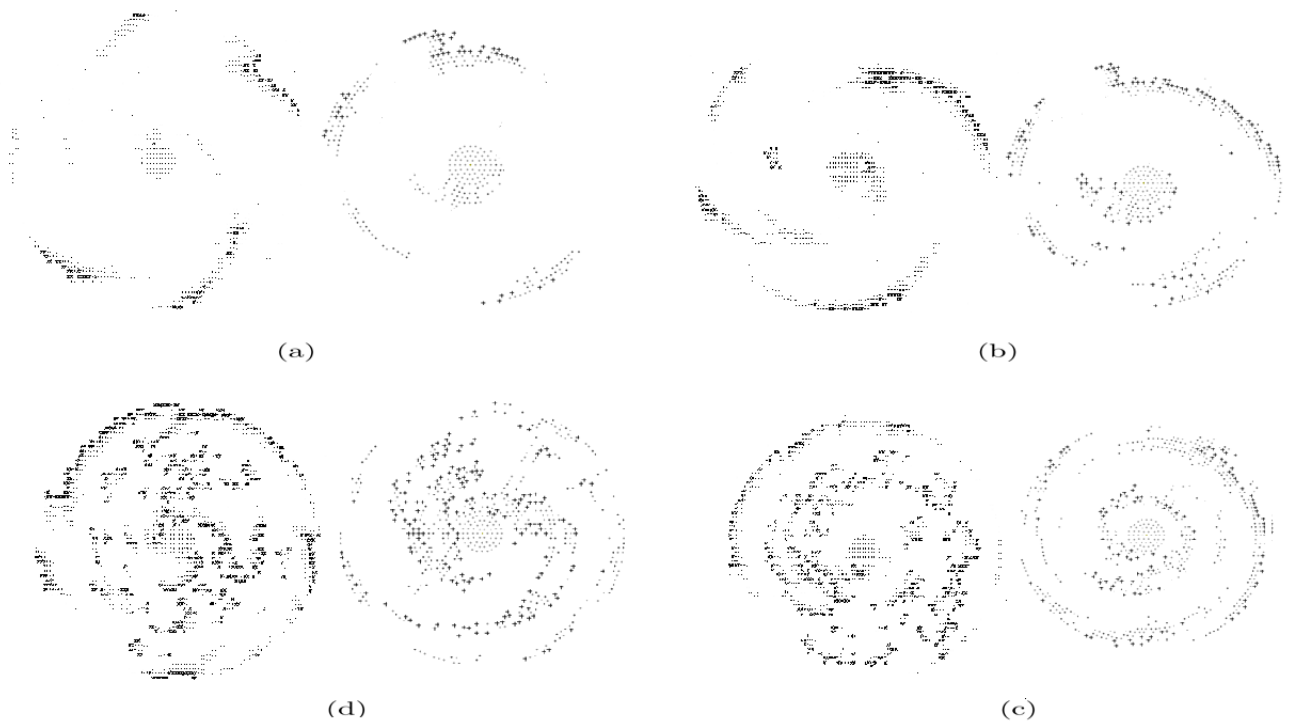


Figura 5.1: Imágenes obtenidas por el autómata celular al reproducir el modelo de Mueller & Arnett. A la izquierda se encuentran las imágenes obtenidas por Mueller & Arnett y a la derecha las obtenidas por nuestro autómata. Se toman en cuenta dos especies galácticas: gas caliente (aquellas celdas en estado gas en las cuales el proceso de formación estelar ocurrió una o dos iteraciones atrás, identificadas con puntos) y estrella (cruz) para la iteración (a) 10, (b) 30, (c) 100 y (d) 130 . Se verifica el correcto funcionamiento del autómata celular.

Si consideramos dos especies galácticas solamente (protoestrella masiva y gas), se observa una fuerte dependencia del sistema a las condiciones iniciales (véase figura 5.2).

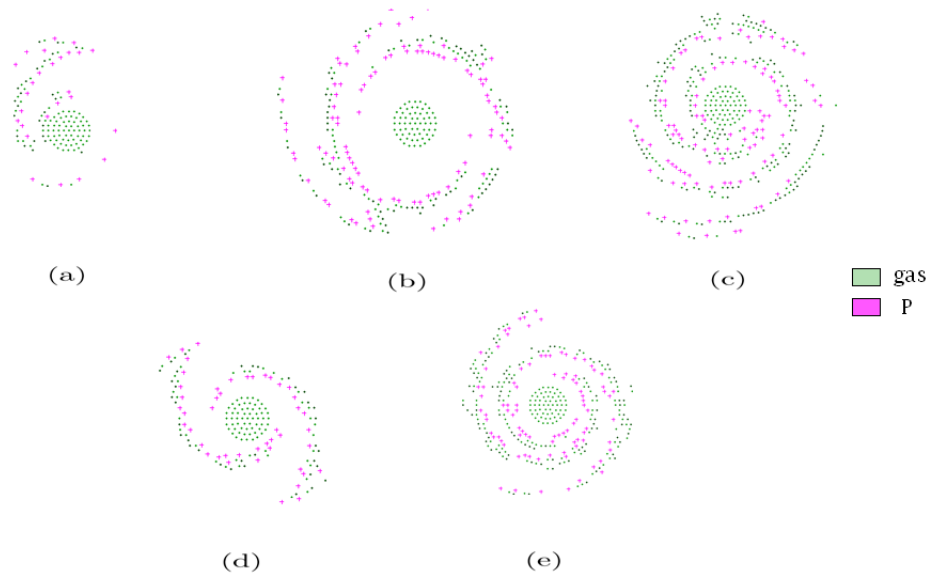


Figura 5.2: Imágenes obtenidas por el autómata celular al considerar dos especies galácticas solamente, protoestrella masiva (color magenta) y gas (color verde), para la iteración 20 y diferentes condiciones iniciales: para cada corrida varía la distribución espacial inicial de las protoestrellas masivas y de las celdas en estado gas. No se forman patrones espirales para cualquier condición inicial.

En la figura 5.3 se observan los resultados obtenidos considerando dos especies galácticas: protoestrellas masivas y gas interestelar para $\Delta t = 5 \times 10^5$ años¹. Las regiones bajo formación estelar son identificadas con color azul. Se puede observar con mayor claridad los patrones de espiral si también se identifican las regiones de gas muy caliente: celdas donde la formación estelar ocurrió una o dos iteraciones atrás (en la figura dichas celdas son representadas con color verde). Se observa que surgen dos brazos en forma de espiral unicamente implementando las reglas que simulan los procesos de formación estelar, bajo estas condiciones dichos brazos tienden a mantenerse durante ≈ 100 iteraciones desde su formación. La rotación galáctica fue implementada en sentido aintihorario de manera arbitraria.

¹Para poder aplicar los valores de las probabilidades propuestos por Lejeune es necesario simular dicho tiempo.

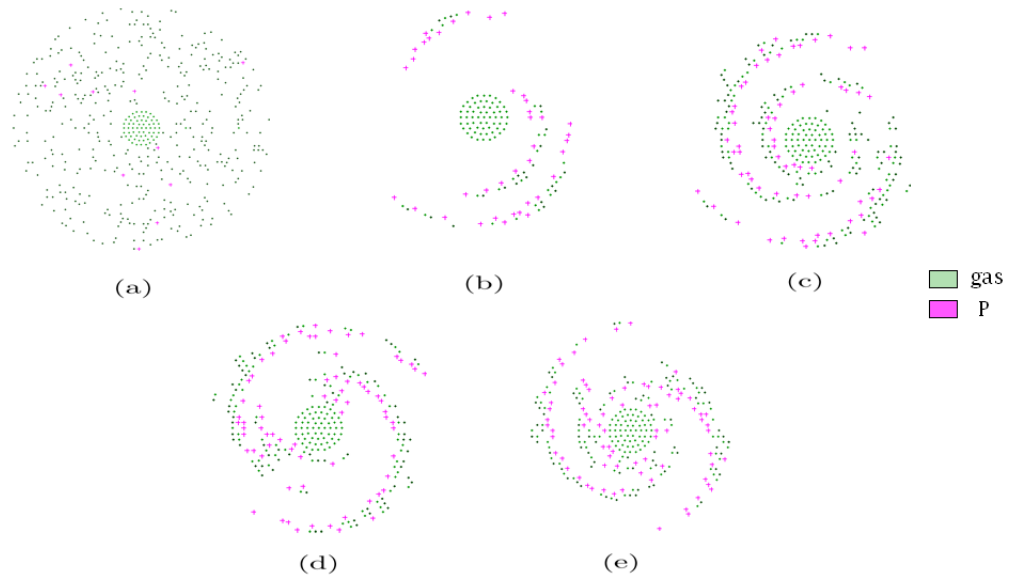


Figura 5.3: Imágenes obtenidas considerando dos estados, junto con sus reglas, en el autómata celular propuesto: gas caliente (aquellas celdas en estado gas en las cuales el proceso de formación estelar ocurrió una o dos iteraciones atrás, identificadas con color verde) y protoestrella masiva (color magenta) para la iteración (a) 0, (b) 10, (c) 22, (d) 62 y (e) 108. Se observa la formación de dos brazos espirales claramente definidos, dichos brazo surgen implementando unicamente procesos de formación estelar.

En las figura 5.4 se observan los resultados obtenidos al modificar el autómata anterior agregando el estado protoestrella de baja masa. Se observan patrones espirales que se mantienen por ≈ 60 iteraciones. Para valores grandes de Δt los brazos ya no están claramente definidos.

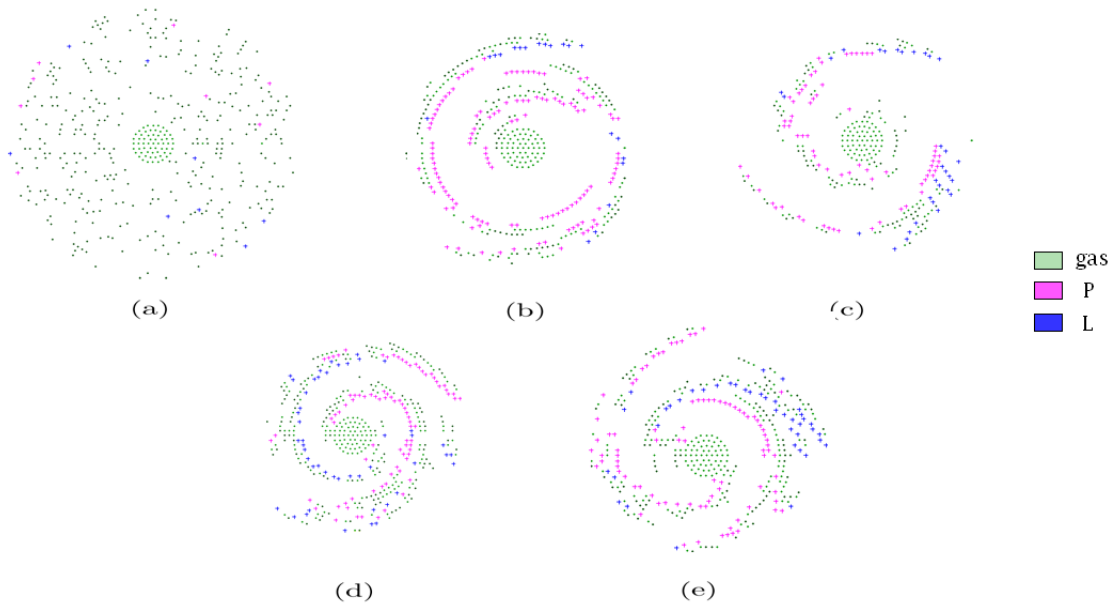


Figura 5.4: Imágenes obtenidas considerando considerando tres eestados, junto con sus reglas, en el autómata celular propuesto: gas (color verde), protoestrella masiva (color magenta) y protoestrella de baja masa (color azul) para la iteración (a) 0, (b) 10, (c) 22, (d) 62 y (e) 108. Se observan patrones espirales para $t < 100$ iteraciones.

Al modificar el autómata agregando el estado secuencia principal, se identifican pocos patrones espirales, el sistema tiende más bien a agruparse formando cúmulos alrededor del núcleo de la galaxia como se observa en la figura 5.5.

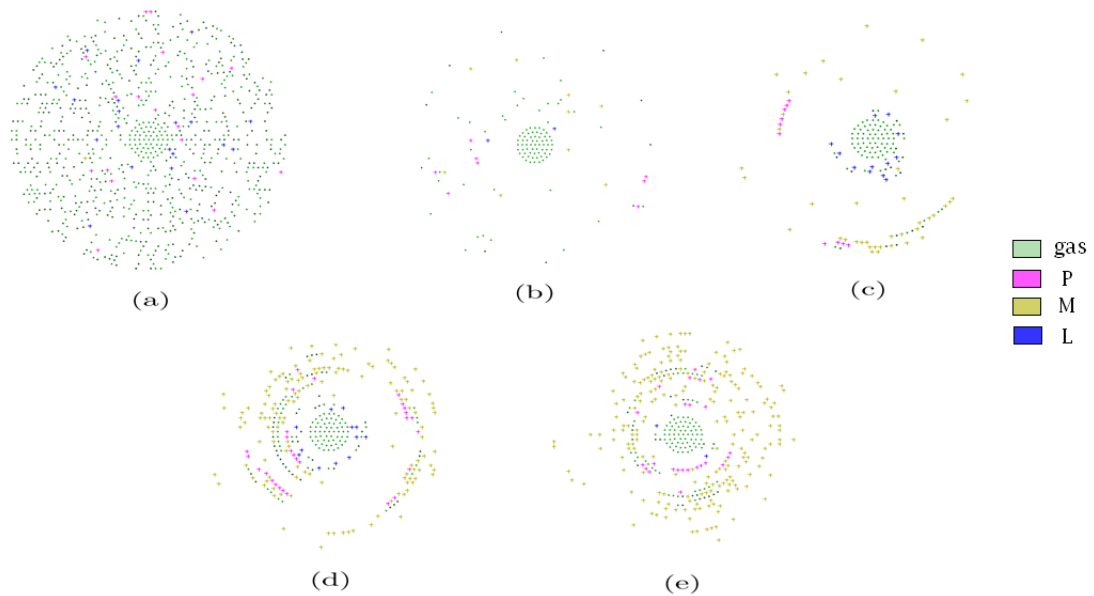


Figura 5.5: Imágenes obtenidas considerando considerando cuatro eestados, junto con sus reglas, en el autómata celular propuesto: gas (color verde), protoestrella masiva (color magenta), protoestrella de baja masa (color azul) y estrellas en secuencia principal (amarillo) para la iteración (a) 0, (b) 10, (c) 22, (d) 62 y (e) 108.

En la figura 5.6 se observan los resultados obtenidos al agregar el estado estrella gigante roja al autómata. Se observan patrones de espiral generalmente antes de $t = 40$ iteraciones, a partir de ahí se pierde cualquier tipo de patrón espiral, se forman anillos concéntricos alrededor del núcleo galáctico.

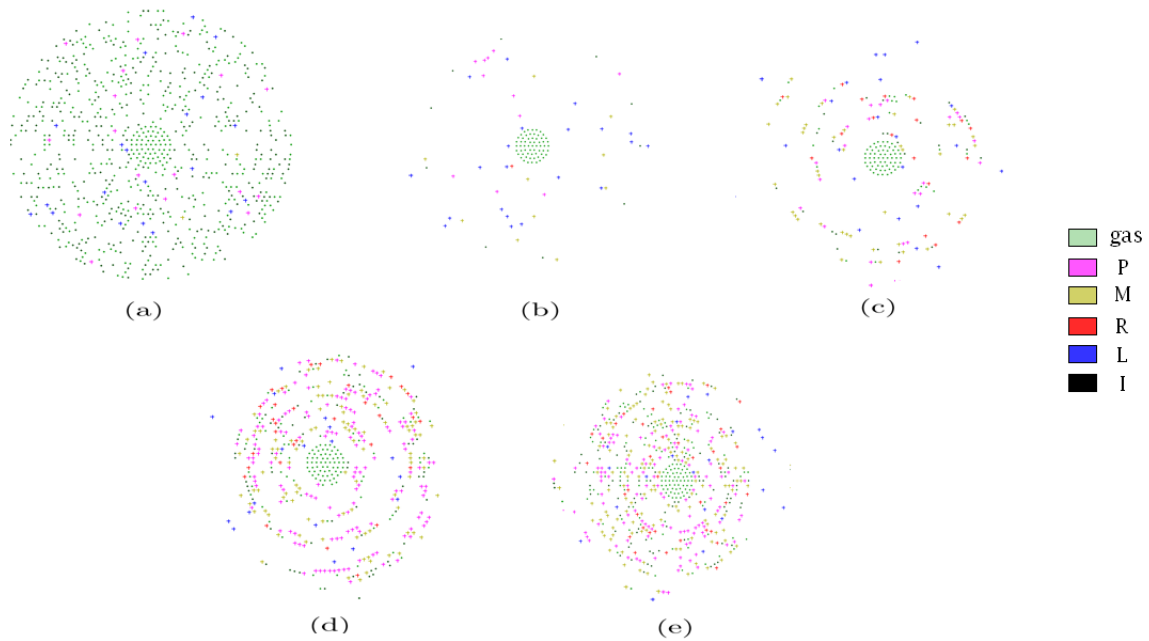


Figura 5.6: Imágenes obtenidas considerando considerando seis estados, junto con sus reglas, en el autómata celular propuesto: gas (color verde), protoestrella masiva (color magenta), protoestrella de baja masa (color azul), estrellas en secuencia principal (amarillo), gigantes rojas (color rojo) y remanentes inertes (color negro); para la iteración (a) 0, (b) 10, (c) 22, (d) 62 y (e) 108.

A medida que se introducen estados al sistema se reduce la probabilidad de que se den las condiciones necesarias para los procesos de formación estelar autoinducida, procesos que son capaces de producir patrones espirales.

Al observar este comportamiento del autómata, se infiere que hace(n) falta otro(s) mecanismo(s) aparte de los procesos de formación estelar para que los patrones de espiral permanezcan invariantes, morfológicamente hablando, durante largos períodos de tiempo. Una de las teorías propuestas para resolver dicho problema es la teoría de ondas de densidad (véase por ejemplo David Fernandez Barba 2004). En el modelo de Mueller & Arnett, los autores intentaron simular dichos procesos sin resultados satisfactorios. La teoría de ondas de densidad no fue considerada en nuestro trabajo por razones de tiempo, dicha teoría ha sido propuesta para

explicar la formación y estabilidad de los patrones espirales..

5.2. Evolución global de las especies galácticas

La figura 5.7 muestra la secuencia evolutiva de las fracciones globales de masa de las 6 especies galácticas. Para los parámetros adoptados, 2 fases pueden ser distinguidas:

Una primera fase de corta duración en la cual el gas se va enfriando y comienzan los procesos de formación estelar de manera que aumenta la población de protoestrellas masivas, estrellas en secuencia principal y gigantes rojas. Esta fase (trasiente) ocurre en el intervalo de tiempo $0 < t < 100$.

Una segunda fase *cuasi-estacionaria* toma lugar, dicha fase se caracteriza porque la población de protoestrellas masivas, secuencia principal y gigantes rojas oscila alrededor de un valor constante.

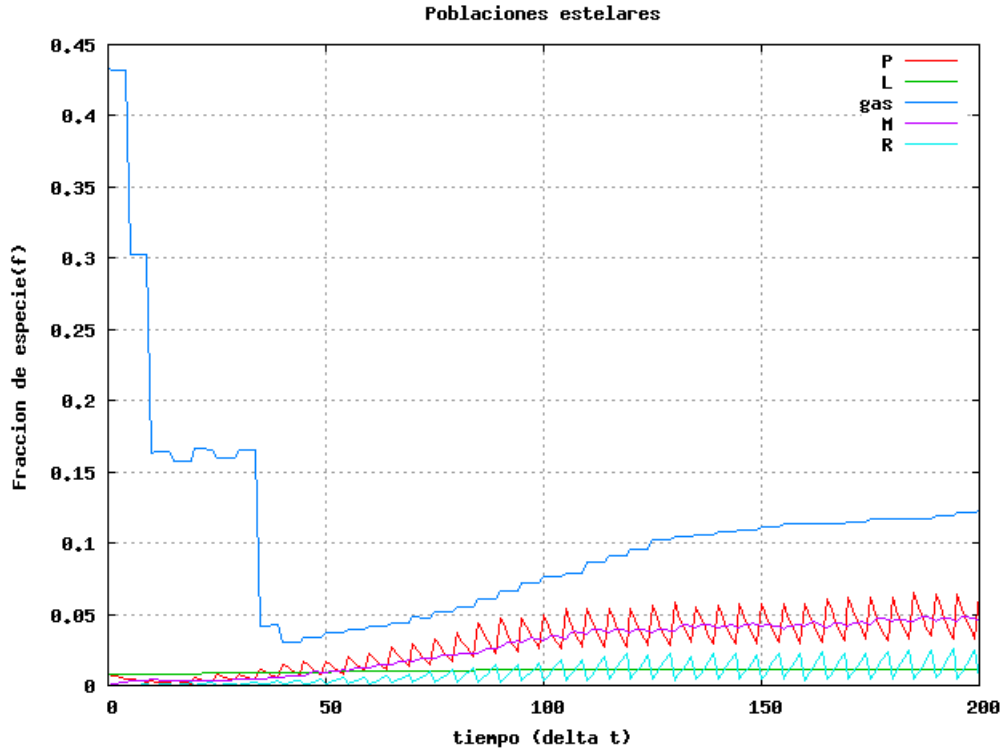


Figura 5.7: Evolución global de las diferentes poblaciones galácticas en el modelo propuesto. La gráfica representa la fracción de masa galáctica en la forma de una especie X en una iteración τ sobre todas las celdas contenidas en el autómata (P = protoestrella masiva, M = secuencia principal, R = gigante roja, G = gas, L = protostrella de baja masa, I = remanente inerte)

Además de estas dos fases, el gráfico posee algunas características que deben mencionarse:

1. **Fase de transición inicial:** Tiene lugar una *fase de transición inicial* en la que se observan dos procesos simultáneos: aumento de la población de protoestrellas, gigantes rojas y disminución de la fracción de gas.
2. **Condiciones iniciales:** la fracción de gas inicial en la que puede ocurrir formación estelar en el modelo propuesto es $\approx 45\%$ del número total de celdas. En el modelo propuesto, una celda en estado gas está caracterizada por el número de iteraciones que ha transcurrido desde la última vez que se formaron protoestrellas en dicha celda (t_f). Sólomente se pueden dar procesos de formación estelar cuando $t_f = 35$. Este es el valor dado por Mueller &

Arnett en su investigación. El valor t_f representa el tiempo que le toma al gas enfriarse lo suficiente para permitir la formación estelar, en nuestro modelo corresponde a $\approx 17,5 \times 10^6$ años, similar al valor obtenido por Mueller & Arnett: $\approx 10^7$ años.

3. **Comportamiento oscilatorio:** En el modelo propuesto, las poblaciones estelares tienen un comportamiento oscilatorio como consecuencia de la incorporación del parámetro t_f . La formación estelar autoinducida ocurre cada 5 iteraciones, en ese momento las estrellas que se encuentran en fase final (gigante roja o remanente inerte) se transforman en gas caliente (estado gas con $t_f \leq 2$) e inducen la formación estelar en su vecindad. Como este proceso ocurre de forma periódica, se observa un comportamiento oscilante. Además vemos que aún sin perturbar el sistema desde el exterior añadiendo gas u otras poblaciones estelares, los procesos de formación estelar se siguen dando.

4. **Fracción de estrellas de baja masa:** La formación de protoestrellas de baja masa es prácticamente nula. Como los procesos de formación estelar espontánea utilizados son los del modelo de Muller & Arnett donde la tasa de formación estelar espontánea es $\approx 1\%$ de la tasa total de formación estelar, y además se utilizan las reglas de evolución estelar propuestas por Lejeune (donde la evolución de protoestrellas de baja masa a remanentes inertes tiene una probabilidad muy baja, del orden de 10^{-6}), la formación de protoestrellas de baja masa es mínima en nuestro modelo.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se propone un modelo de galaxia mediante autómatas celulares, para ello se utilizó como base el modelo propuesto por Mueller & Arnett (MA) y a su vez se añadieron algunos aspectos de la evolución estelar propuestos por Lejeune & Perdang (LP) en su investigación. De esta manera se combina la dinámica galáctica junto con la evolución estelar para modelar el sistema.

Se observó que los procesos de formación estelar autoinducidos son capaces de formar patrones espirales similares a los observados en las galaxias de tipo espiral, esta relación existente entre los procesos de formación estelar autoinducido y la formación de patrones espirales ha sido comprobada por diversas investigaciones (por ejemplo Gerola & Seiden 1978, Jungwiert & Palous 1994, Salo & Laurikainen 2000)

A medida que se añadieron especies galácticas (estados) al sistema, se observa que los patrones espirales dejan de formarse, esto se debe a que al tener más estados, se reduce la probabilidad de que se den las condiciones necesarias para los procesos de formación estelar autoinducida, los cuales están relacionados, como se mencionó anteriormente, con la formación

de patrones espirales.

De manera que dichos patrones requieren otros mecanismos, aparte de la formación estelar autoinducida, para permanecer invariables, morfológicamente hablando, durante largos períodos de tiempo.

Al analizar la evolución global de las especies galácticas consideradas en el sistema, se concluye que los procesos de formación estelar pueden ser sostenidos mediante el “reciclaje estelar”¹: aun cuando el sistema es cerrado (no se introduce gas ni ningún otro elemento mediante fuentes externas), el gas expulsado por las estrellas en sus diferentes etapas evolutivas, permite que se sigan dando los procesos de formación estelar. Este proceso ha sido estudiado con anterioridad (véase Kennicutt & Tamblyn 1994).

El modelo propuesto tiene características propias de un sistema dinámico complejo². Debido a la sensibilidad de las soluciones a las condiciones iniciales, no se producen en todas las corridas patrones espirales.

¹La expulsión de gas de una estrella a su entorno.

²Por ejemplo: una fuerte dependencia a las condiciones iniciales

6.1. Recomendaciones

- Implementar una función inicial de masa en el sistema. Dicha función nos indica cual es la distribución de estrellas que se van a formar en un disco galáctico para diferentes rangos de masa.
- Investigar e implementar otras reglas que puedan simular los procesos de formación estelar tanto espontánea como autoinducida.
- Añadir más especies galácticas al sistema.
- Incluir reglas que simulen ondas de densidad, las cuales están relacionadas con la formación de patrones espirales.
- Realizar un análisis espacial de las condiciones iniciales: identificar las regiones donde se dan los procesos de formación estelar y estudiar las características de dichas regiones.

Capítulo 7

Apéndice A

7.1. Código fuente en lenguaje C++

Para la salida gráfica de este código es necesario usar la librería pngwriter

```
/* Este codigo es para realizar simulacin de una galaxia mediante autmatas celulares*/
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include "include/pngwriter.h" //para generar las imagenes .png
int** A; //grid del automata con condiciones de frontera
int** grid; //grid del automata (estados de las celdas)
int** tf; //grid del automata (tiempo de las celdas)
/*****grids de memoria*****/
int** tfmem;int** tf2mem;int** X;int** X2;
double** X3;
//grids para salida grfica
int** malla;int** malla2;int** AA; int** BB;
using namespace std;
int i,j,l,k,vecinos,r,theta,t,T,roto,caso,h,aa,bb,alfa,beta,a,b,contador,contador1;
int contador2,contador3,contador4,caso1,caso2;
int contador5,contador6,contador7,contador8,c,d,e,f;
int tr,S,J,Rmax,totalceldas,CFEE;
int gas=1; int L=2;int P=3; int M=4; int R=5; int I=6;
void imprime_automata(int** AA,int** BB,int ANCHO,pngwriter imagen);
```

```

static void graficar();
static void graficar1();
static void graficar2();
int formacionestelar(int** AA,int** BB);
int evolucionestelar(int** AA,int** BB);
int condicionesiniciales();
double datosgrafica(int** AA,int** BB);
double H,x,y,phi,Pp,suma,Umed,w,giro,suma1,z,v,m,q,v_max,ALFA,Rmax_metros,P1;
double va1,vb1,va2,vb2,va3,vb3;
float rota;
double PI = 3.141519265359;
int main()
{
srand(time(0));
srand48(time(0));
pngwriter imagen(800,800,0,"imagenes/00000000.png");
A=new int*[5000];grid=new int*[5000];tf=new int*[5000];tfmem=new int*[5000];
tf2mem=new int*[5000];X=new int*[5000];X2=new int*[5000];X3=new double*[5000];
malla=new int*[5000];malla2=new int*[5000];AA=new int*[5000];BB=new int*[5000];
for (i=0;i<5000;i++){
A[i]=new int[5000];grid[i]=new int[5000];tf[i]=new int[5000];
X[i]=new int[5000];X2[i]=new int[5000]; X3[i]=new double[5000];
tfmem[i]=new int[5000];tf2mem[i]=new int[5000];
malla[i]=new int[5000];malla2[i]=new int[5000];
AA[i]=new int[5000];BB[i]=new int[5000];
//inicio[i]=new int[5000];inicio2[i]=new int[5000];
}

/*****Tamao del automata y tiempo total*****/
T=200;

/*****CONSTANTES DEL AUTOMATA*****/
tr=7; Rmax=30; v_max=200; ALFA=7; CFEE=1;
Rmax_metros=30*500;
va1=((13.3*Rmax_metros)/(29.5*(v_max/ALFA)));
va2=((4*Rmax_metros)/(29.5*(v_max/ALFA)));
vb2=((110*4*15)/(29.5*(v_max/ALFA)));
va1=va1/5;va2=va2/5;vb2=vb2/5;
condicionesiniciales();
for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
inicio <<" "<<grid[r][theta]<< endl;
inicio2 <<" "<<tf[r][theta]<< endl;
}}
}

```

```

datosgrafica(grid,tf);
imprime_automata(grid,tf,400,imagen);          //automata, condicion inicial
/*****ITERACIONES*****/
for(t=1;t<T+1;t++){
/*****Umedia*****/
suma=0;
for(r=0;r<Rmax;r++){ //rotacion en coordenadas polares
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
if((grid[r][theta]==L)||
(grid[r][theta]==P)|| (grid[r][theta]==M)|| (grid[r][theta]==R)|| (grid[r][theta]==I)){suma++;}
}}
Umed=suma/(totalceldas);
/*****ROTACION DIFERENCIAL*****/
for(r=1;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
X2[r][theta]=grid[r][theta];
tf2mem[r][theta]=tf[r][theta];
}}
rota=0;
for(r=1;r<Rmax;r++){
if(r<20){w=val*double(r);}
if((r>=20)&&(r<Rmax)){w=va2*double(r)+vb2;}
//archivo<<" "<<r<<" " <<w<<endl;
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
giro=double(theta)+w;
if(giro>=6*r){
rota = giro/(double(6)*double(r));
rota = rota - int(rota);
rota = ((6.0*double(r))*rota)+0.1;
roto = int(rota);
X[r][roto]=X2[r][theta];
tfmem[r][roto]=tf2mem[r][theta];
}else if(giro<6*r){
X[r][theta+int(w)]=X2[r][theta];
tfmem[r][theta+int(w)]=tf2mem[r][theta];
}rota=0;}}
suma=0;
for(r=1;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
grid[r][theta]=X[r][theta];
tf[r][theta]=tfmem[r][theta]; }}

```

```

for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
X[r][theta]=grid[r][theta];
tfmem[r][theta]=tf[r][theta]; }}
/*****REGLAS DEL AUTOMATA - FORMACION ESTELAR*****/
aa=0;
if(t%5==0){
aa=1;
formacionestelar(grid,tf);}
/*****REGLAS DEL AUTOMATA - EVOLUCION ESTELAR*****/
if(aa==0){
evolucionestelar(grid,tf);}
for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
grid[r][theta]=X[r][theta];
tf[r][theta]=tfmem[r][theta];}}
// ACA IRIA LA SALIDA GRAFICA Y LOS DATOS DE POBLACIONES ESTELARES
}

delete[] grid; delete[] A; delete[] malla;
delete[] malla2; delete[] X; delete[] X2;
delete[] X3; delete[] tf; delete[] tfmem;
delete[] tf2mem; delete[] AA; delete[] BB;
return 0;
}
/*****CONDICIONES INICIALES*****/
int condicionesiniciales(){
//condiciones iniciales: todas las celdas se encuentran en estado gas
totalceldas=0;
for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
X3[r][theta]=0;
totalceldas++;
grid[r][theta]=gas;
S = rand()%(tr)+1;
tf[r][theta]=S;
if(r<5){
tf[r][theta]=1; }}}
contador=0;
while(contador<=29){
S = (rand()%(Rmax))+5;

```

```

        J = (rand()%(6*S))+0;
    if(grid[S][J]==gas){
grid[S][J]=L;
tf[S][J]=0;
contador++; }}
contador=0;
while(contador<=9){
S = (rand()%(Rmax))+5;
    J = (rand()%(6*S))+0;
    if(grid[S][J]==gas){
grid[S][J]=P;
tf[S][J]=0;
contador++; }}}
/*****FORMACION ESTELAR*****/
int formacionestelar(int** AA,int** BB){
suma=0; suma1=0;
for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
//ACA CONTAMOS LOS VECINOS
if(AA[r][theta]==gas){caso1=1;} //el gas se enfra
if(AA[r][theta]==I){caso1=2;} //formacin propagada de estrellas de baja masa
if(AA[r][theta]==R){caso1=3;} //formacin propagada de estrellas de alta masa
switch(caso1){
case 1: // no hay formacion estelar, el tiempo desde la ultima formacion estelar aumenta
if(r<5){break;} //if(X[r][theta]!=gas){break;}
X[r][theta]=gas; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]+1;
break;
case 2: //formacion estelar de baja masa autoinducida
if(r<5){break;}
X[r][theta]=gas; tfmem[r][theta]=0;
//VECINOS
caso=0;
for(i=0;i<4;i++){
caso++;
switch(caso){
// vecinos cruz
case 1:
alfa=theta+1; if(alfa>=6*r){alfa=alfa-(6*r);}
if(BB[r][alfa]>=tr&&AA[r][alfa]==gas){X[r][alfa]=L; tfmem[r][alfa]=0;}
break;
case 2:

```

```

alfa=theta-1; if(alfa<0){alfa=(6*r)-alfa;}
if(BB[r][alfa]>=tr&&AA[r][alfa]==gas){X[r][alfa]=L; tfmem[r][alfa]=0;}
break;
case 3:
alfa=r+1; if(r+1>=Rmax){break;}
if(BB[alfa][theta]>=tr&&AA[alfa][theta]==gas){X[alfa][theta]=L; tfmem[alfa][theta]=0;}
break;
case 4:
alfa=r-1; if(r-1<5){break;}
if(BB[alfa][theta]>=tr&&AA[alfa][theta]==gas){X[alfa][theta]=L; tfmem[alfa][theta]=0;}
break;}}
break;
case 3: //formacion estelar de alta masa autoinducida
if(r<5){break;}
X[r][theta]=gas; tfmem[r][theta]=0;
//VECINOS
caso=0;
for(i=0;i<6;i++){
caso++;
switch(caso){
// vecinos cruz
case 1:
alfa=theta+1; if(alfa>=6*r){alfa=alfa-(6*r);}
if(BB[r][alfa]>=tr&&AA[r][alfa]==gas){X[r][alfa]=P; tfmem[r][alfa]=0;}
break;
case 2:
alfa=theta-1; if(alfa<0){alfa=(6*r)-alfa;}
if(BB[r][alfa]>=tr&&AA[r][alfa]==gas){X[r][alfa]=P; tfmem[r][alfa]=0;}
break;
case 3:
alfa=r+1; if(r+1>=Rmax){break;}
if(BB[alfa][theta]>=tr&&AA[alfa][theta]==gas){X[alfa][theta]=P; tfmem[alfa][theta]=0;}
break;
case 4:
alfa=r-1; if(r-1<5){break;}
if(BB[alfa][theta]>=tr&&AA[alfa][theta]==gas){X[alfa][theta]=P; tfmem[alfa][theta]=0;}
break;
case 5:
alfa=r+1; beta=theta+1; if(r+1>=Rmax){break;} if(beta>=6*r){beta=beta-(6*r);}
if(BB[alfa][beta]>=tr&&AA[alfa][beta]==gas){X[alfa][beta]=P; tfmem[alfa][beta]=0;}
break;

```

```

case 6:
alfa=r+1; beta=theta-1; if(r+1>=Rmax){break;} if(beta<0){beta=(6*r)-beta;}
if(BB[alfa][beta]>=tr&&AA[alfa][beta]==gas){X[alfa][beta]=P; tfmem[alfa][beta]=0;}
break;
case 7:
alfa=r-1; beta=theta-1; if(r-1<5){break;} if(beta<0){beta=(6*r)-beta;}
if(BB[alfa][beta]>=tr&&AA[alfa][beta]==gas){X[alfa][beta]=P; tfmem[alfa][beta]=0;}
break;
case 8:
alfa=r-1; beta=theta+1; if(r-1<5){break;} if(beta>=6*r){beta=beta-(6*r);}
if(BB[alfa][beta]>=tr&&AA[alfa][beta]==gas){X[alfa][beta]=P; tfmem[alfa][beta]=0;}
break;  }}
break  }
    if(X[r][theta]==L){suma++;}
    if(X[r][theta]==P){suma1++;} }
//formacion estelar espontanea baja masa
contador=1;
while(contador<=CFEE*suma/100){
S = (rand()%(Rmax))+5;
    J = (rand()%(6*S))+0;
if(grid[S][J]==gas){
X[S][J]=L;
tfmem[S][J]=0;
contador++; } }
//formacion estelar espontanea alta masa
contador=1;
while(contador<=CFEE*suma1/100){
S = (rand()%(Rmax))+5;
    J = (rand()%(6*S))+0;
if(grid[S][J]==gas){
X[S][J]=P;
tfmem[S][J]=0;
contador++; }}}
/*****EVOLUCION ESTELAR*****/
int evolucionestelar(int **AA, int** BB){
for(r=0;r<Rmax;r++){
for(theta=0;theta<6*r;theta++){
    if(AA[r][theta]==gas){caso2=1;}
    if(AA[r][theta]==L){caso2=2;}
    if(AA[r][theta]==P){caso2=3;}
    if(AA[r][theta]==M){caso2=4;}

```

```

if(AA[r][theta]==R){caso2=5;}
switch(caso2){
case 1:
    if(r<5){break;} //gas-->gas
X[r][theta]=gas; tfmem[r][theta]=BB[r][theta];
break;
case 2:
    if(r<5){break;}
P1 = drand48()*(1-0.0000001)+0.0000001;
if(P1<=0.000004){ //P1<=0.000004
X[r][theta]=I; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break; }
X[r][theta]=L; tfmem[r][theta]=BB[r][theta];
break;
case 3:
    if(r<5){break;}
P1 = drand48()*(1-0.000001)+0.000001;
if(P1<=0.100){ //P1<=0.050
X[r][theta]=M; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break;}
// P+mM+rR-->M
P1 = drand48()*(1-0.000001)+0.000001; //probabilidad
if(P1<=0.010&&c>3&&d>0){ //P1<=0.180
X[r][theta]=M; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break;}
X[r][theta]=P; tfmem[r][theta]=BB[r][theta];
break;
case 4:
    if(r<5){break;}
P1 = drand48()*(1-0.000001)+0.000001; //probabilidad
if(P1<=0.0750&&d>0){ //P1<=0.180
X[r][theta]=R; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break;}
P1 = drand48()*(1-0.000001)+0.000001;
if(P1<=0.0250){ //P1<=0.0250
X[r][theta]=R; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break; }
P1 = drand48()*(1-0.000001)+0.000001; //probabilidad
if(P1<=0.0100&&c>3&&d>0){ //P1<=0.180
X[r][theta]=R; tfmem[r][theta]=BB[r][theta]; break;}
X[r][theta]=M; tfmem[r][theta]=BB[r][theta];
break;
case 5:
    X[r][theta]=R; tfmem[r][theta]=BB[r][theta];
break; }}}}

```


Bibliografía

- [1] Astronomy and Astrophysics Committee The decade of discovery in astronomy and astrophysics, National Academy Express, Washington-USA, 1991.
- [2] Barba D. F. Estructura espacial y cinemática de la componente estelar joven en el entorno solar , Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, Barcelona, 16 de diciembre de 2004.
- [3] De Boer K.S and Suggewiss W. Star and Stellar Evolution, , EDP Ciencias, Francia, 2008.
- [4] Emelgreen B. G. & Parravano A. ApJ 435, L121, 1994.
- [5] Escuela de ingeniera industrial, Autómatas Celulares, Investigacin de operaciones, UCAB.
- [6] Gerola H. & Seiden P. Stochastic star formation and spiral structure of galaxies, The Astrophysical Journey. 223: 129-139 (1978).
- [7] Gomez R.A. White Paper: automatas celulares.
- [8] Hernandez P. A. Introducción a los sistemas dinámicos y autómatas celulares, Escuela superior de computo IPN, 24 de agosto del 2008.
- [9] Hohl F. ApJ 168, 343 1971
- [10] Ilachinski A. Cellular Automata A Discrete Universe, World Scientific Publishing, London - England, 2001.
- [11] Johnson J. Extreme Stars: White Dwarfs & Neutron Stars, Ohio State University (2007).
- [12] Jungwiert B. & Paolus J. Stochastic self-propagating star formation with anisotropic probability distribution, Astron. Astrophy. 287: 55-67 (1994).
- [13] Kennicutt R. & Tamblyn P. Past and future star formatiion in disk galaxies, The Astrophysical Journey. 435: 22-36 (1994).
- [14] Lawniczak A. & Di Stefano B. Development of CA model of highway traffic, Department of Mathematics and Statistics, University of Guelph, Canada,2008.
- [15] Martín A. Automatas celulares elementales reversibles Departamento de matemática aplicada, Universidad de Salamanca.
- [16] Martinez G., Mendez A. M., Zambrano M.M. Un subconjunto de autoómata celular con comportamiento complejo o en dos dimensiones, Diciembre 2005.

- [17] Moreno J.A. Notas del curso Física Computacional III: Introducción a los autómatas celulares, , Facultad de ciencias UCV-Escuela de Física.
- [18] Mueller Mark W. & Arnett W. David. Propagating star formation irregular structure in spiral galaxies , The astrophysical Journal, 210:670-678, 15 de diciembre 1976.
- [19] Murdin P. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, Grove's Dictionaries, USA, 2001.
- [20] Peredo M. y Ramallo R. Aplicación de autómatas celulares a simulación básica de incendios forestales, Universidad Católica de San Pablo, Cochabamba-Bolivia.
- [21] Perdagn J. & Lejeune A. Cellular Automaton experimentos on local galactic structure. I. Model assumptions, Astron. Astrophys. Suppl. Serv. 119, 231-246 (1996).
- [22] Perdagn J. & Lejeune A. Cellular Automaton experimentos on local galactic structure. II. Numerical simulations, Astron. Astrophys. Suppl. Serv. 119, 249-263 (1996).
- [23] Prialnik D. An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution, Tel Aviv University, Cambridge University press, USA, 2000.
- [24] Roberts M. S. & Rots A. H. Comparison of rotation curves of different galaxy types, Astron. & Astrophys. 26, 483-485 (1973).
- [25] Salo H. & Laurikainen E. N-body model for M51-I, Multiple encounter versus single passage?, Mont. Not. R. Astron. Soc. 319, 377-392 (2000).
- [26] Shore S. N. Birth and Infancy of Stars, Les Houches, Session 16, 1985.
- [27] Shu Frank H. The physical universe: an introduction to Astronomy, University Science Books. Sausalito, California (1982).
- [28] Steeb W. The nonlinear workbook, , World Scientific, London-England, 2005.
- [29] Toffoli T. & Margolus N. Cellular Automatas Machine, Massachusetts Institute of Tecnology, USA, 1987.
- [30] Bar-Yam Y. Dynamics of complex systems, Massachusetts Institute of Tecnology, USA, 1997.