

*Cuantización del Campo de Maxwell en
presencia de una carga eléctrica y un
monopolo magnético en la representación
de ciclos*

Br. Ulianova M. López C.

Tutor: Dr. Lorenzo Leal

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 26 de octubre de 2011

Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

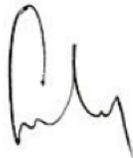
Escuela de Física



Cuantización del Campo de Maxwell en presencia de una carga eléctrica y un monopolo magnético en la representación de ciclos.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la
ilustre Universidad Central de Venezuela
por la Bach. Ulianova López Castillo para optar al
Título de Licenciada en Física

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por la Bach. Ulianova López titulado: Cuantización del campo de Maxwell en presencia de una carga eléctrica y un monopolo magnético en la representación de ciclos, para optar al título de Licenciada en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.



Prof. Lorenzo Leal, Tutor



Prof. Ernesto Fuenmayor



Prof. Pío Arias

Caracas, 26 de Octubre de 2011

Agradecimientos

A Dios y la Virgen del Valle por siempre cuidarme.

A mis Padres por su cariño, su apoyo, su dedicación y por tanto esfuerzo para que yo alcanzara este triunfo.

A el Prof. Lorenzo por siempre estar atento, por sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación como investigador.

A mis profesores: Iván Escalona, Luis Cortina, Salvatore De Vincenzo, Carlos Gago, Abraham Lozada, Miroslav Vetrovec, Embaid Pierre, Ernesto Fuenmayor, Pio Arias, Alberto Bellorín, José Antonio López, Esteban Álvarez, por contribuir en mi formación profesional.

A todos los que creyeron en mi, a toda la gente que me apoyo, a mis amigos y familiares y a esta institución que me ha formado.

Resumen

Ulianova López Castillo

Universidad Central de Venezuela

Dr. Lorenzo Leal, Tutor

Se estudia la formulación de Schwinger para el electromagnetismo con fuentes eléctricas y magnéticas. Se resume el método de Dirac para la cuantización de sistemas singulares y la formulación de caminos, ciclos y superficies, orientada al estudio del campo electromagnético con cargas eléctricas y magnéticas estáticas. Se determina la estructura de la función de onda exigida por la ligadura de Gauss y se interpreta geoméricamente cierto factor de fase de dicha función, que permite eliminar la carga (o el monopolo) de la descripción, a expensas de tratar con funciones de onda multivaluadas.

Índice

Introducción	1
-------------------------------	---

Capítulo I

1 Formalismo Hamiltoniano	3
1.1 Formulación Lagrangeana	3
1.2 Formulación Hamiltoniana	4
1.3 Método de Dirac	5
1.4 Cuantización en el caso de ligaduras de primera clase:	10
1.5 Cuantización en el caso de ligaduras de segunda clase:	11

Capítulo II

2 Representaciones Geométricas de Camino, Ciclos y Supercies	14
2.1 Caminos y Ciclos:	14
2.2 Supercies:	18

Capítulo III

3 Campo de Maxwell	20
3.1 Ecuaciones de Maxwell y tensor electromagnético	20
3.2 La cuantización canónica del campo de Maxwell sin fuentes	22
3.3 Representación de caminos del campo de Maxwell	26

Capítulo IV

4 Cuantización del electromagnetismo con carga eléctrica y carga magnética estáticas.	29
4.1 Acción de Schwinger	29
4.2 Cuantización a la Dirac.	31

Capítulo V

5 Representación Geométrica para el campo electromagnético con cargas

eléctricas y magnéticas estáticas 42

5.1 CASO DIRECTO 43

5.2 CASO DUAL 48

Conclusiones 52

Bibliografía 53

Introducción

El campo de Maxwell, al ser un campo de calibre, admite una representación geométrica que se conoce como la representación de ciclos. En ella, la ligadura de Gauss, que genera las transformaciones de calibre espaciales, se satisface automáticamente.

Por otra parte la teoría de Maxwell puede escribirse en forma simétrica con respecto a los campos eléctrico y magnético, si se incluyen cargas magnéticas y sus respectivas corrientes. Dirac [7, 8] desarrolló una teoría del electromagnetismo con cargas magnéticas, que podría, explicar la cuantización de la carga eléctrica. En efecto, la consistencia entre el electromagnetismo y la mecánica cuántica conduce a la relación

$$\frac{eg}{4\pi} = \frac{1}{2}n,$$

donde e y g son las cargas eléctricas y magnética elementales, y n es un entero.

En esta tesis se estudia la cuantización del electromagnetismo con una carga eléctrica y otra magnética, estáticas, en representaciones geométricas apropiadas. Se partirá de una acción propuesta por Schwinger, se realizará la cuantización canónica y se explorarán algunos aspectos geométricos interesantes que surgen al formular la representación geométrica. En particular, se observa que las fuentes (esto es, la carga eléctrica o la magnética), pueden “absorberse” en un factor de fase que produce condiciones de borde singulares para la función de onda.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, se realiza una revisión del método de Dirac para sistemas singulares. Dicho método no se aleja de lo que es el método canónico, que será muy útil para

hacer la cuantización.

En el segundo capítulo se resume la formulación de caminos, ciclos y superficies.

En el tercer capítulo se detalla la cuantización del campo de Maxwell libre, es decir, sin fuentes y la representación de camino de dicha teoría a modo de ejemplo para el desarrollo que sigue.

En el cuarto capítulo se estudia la cuantización del electromagnetismo con cargas eléctrica y magnética estáticas, partiendo de la formulación de Schwinger para el electromagnetismo con fuentes eléctricas y magnéticas.

Por último, en el quinto capítulo empleamos los resultados obtenidos en el capítulo precedente para realizar el estudio de la formulación geométrica. Se realiza la interpretación geométrica del factor de fase que adquiere la función de onda, cuando se hace desaparecer la carga eléctrica o magnética del hamiltoniano y de la ligadura de Gauss; y la relación que está tiene con la carga eléctrica y con el monopolo.

Capítulo I

1 Formalismo Hamiltoniano

En este capítulo nos dedicamos a resumir los elementos básicos de la formulación hamiltoniana de una teoría, como paso previo al estudio de la cuantización canónica de ciertas teorías, de campo.

Si uno quisiera hallar las ecuaciones de movimiento para cualquier sistema mecánico, sería lo mismo considerar las ecuaciones de Euler- Lagrange, que las ecuaciones de Hamilton: por ambos lados llegamos a las ecuaciones de movimiento. Es decir, existen dos caminos, la formulación lagrangeana y la hamiltoniana.

1.1 Formulación Lagrangeana

Sea $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ el lagrangeano de la teoría, se define la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1.1)$$

donde q_i y \dot{q}_i son las coordenadas y velocidades generalizadas, respectivamente. Se postula un principio variacional, obteniendo como resultado las ecuaciones de Euler- Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (1.2)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de Euler- Lagrange para la teoría, sólo queda resolverlas y así obtendremos la evolución de dicho sistema en el tiempo.

1.2 Formulación Hamiltoniana

Definimos los momentos conjugados como:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.3)$$

Se define el hamiltoniano a partir de una transformación de Legendre como:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1.4)$$

donde se supone que \dot{q}_i ha sido obtenido al menos implícitamente, como una función de las coordenadas y de los momentos conjugados, mediante el uso de la ecuación (1.3). Se postula un principio variacional tomando los q_i y los p_i como variables independientes, obteniendo como resultado las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.6)$$

Definimos los corchetes de Poisson como:

$$\{A(q, p), B(q, p)\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (1.7)$$

La dinámica escrita en términos de corchetes de Poisson estará dada por:

$$\dot{A} = \{A, H\}, \quad (1.8)$$

para cualquier objeto físico (donde objeto físico es aquel que cumple con $A = A(q, p)$).

En este punto se tiene toda la base para realizar la cuantización, ya que el formalismo hamiltoniano está completo y sólo faltaría aplicar los postulados de la mecánica cuántica.

Ahora bien, este formalismo es válido siempre y cuando se pueda despejar de la ecuación (1.3), las velocidades en función de los momentos conjugados y las coordenadas, obteniéndose

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p). \quad (1.9)$$

Si se cumple lo dicho anteriormente, diremos que el lagrangeano es no singular. Es importante resaltar que si no se puede despejar las velocidades en función de los momentos conjugados y las coordenadas, la ecuación (1.3) generará relaciones del tipo:

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0, \quad (1.10)$$

indicándonos que no todos los p_i y los q_i son independientes. Este tipo de relaciones son llamadas ligaduras primarias.

Dirac en 1964 [1] propone un método hamiltoniano que toma en cuenta el caso de lagrangeanos singulares, sin alejarse de lo que es el método canónico.

1.3 Método de Dirac [1][2][3]

Este nuevo formalismo debe tomar en cuenta las ligaduras primarias.

Consideraremos la variación funcional de H :

$$\delta H = \delta \dot{q}_i p_i + \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i$$

usando la ecuación 1.3 obtenemos:

$$\delta H = \delta \dot{q}_i p_i + \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i - p_i \delta \dot{q}_i$$

finalmente:

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i \quad (1.11)$$

Podemos observar que la variación funcional de H , depende de δq_i y de δp_i , aunque éstas no sean independientes. Es decir, en cualquier caso H puede ser expresada como $H = H(q_i, p_i)$.

Ahora se deben hallar las ecuaciones de Hamilton, teniendo en cuenta la posibilidad de que los q 's y p 's no sean independientes. Para ello se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.

Definimos entonces un nuevo lagrangiano:

$$\begin{aligned} L'(q_i, p_i, U_m) &= L(q_i, \dot{q}_i, t) - \sum_m U_m \phi_m(q_i, p_i) \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q) - \sum_m U_m \phi_m \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde U_m son los multiplicadores de Lagrange y ϕ_m son las ligaduras primarias.

Ahora aplicamos el principio variacional al nuevo lagrangeano. Obtendremos:

$$\frac{\partial L'}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_i} \right) = 0$$

donde $\xi = \{q_i, p_i, U_m\}$

Calculando las ecuaciones dinámicas para cada una de las variables se obtiene:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i} + U_m \frac{\partial \phi_m(q_i, p_i)}{\partial p_i} \quad (1.13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i} - U_m \frac{\partial \phi_m(q_i, p_i)}{\partial q_i} \quad (1.14)$$

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0. \quad (1.10)$$

Definiendo el nuevo Hamiltoniano como:

$$H^*(q_i, p_i) = H(q_i, p_i) + U_m \phi_m(q_i, p_i), \quad (1.15)$$

las ecuaciones anteriores quedan expresadas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H^*(q_i, p_i)}{\partial p_i} \quad (1.16)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*(q_i, p_i)}{\partial q_i} \quad (1.17)$$

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0. \quad (1.10)$$

Si tomamos en cuenta la definición de los corchetes de Poisson, mediante la ecuación (1.8), podemos escribir las ecuaciones de Hamilton en el formalismo de Poisson de la forma:

$$\dot{p}_i = \{p_i, H^*(q_i, p_i)\} \quad (1.18)$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H^*(q_i, p_i)\} \quad (1.19)$$

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0. \quad (1.10)$$

Tomando la ecuación (1.19) y desarrollándola, vamos a la llegar a siguiente expresión:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H^*(q_i, p_i)\} = \{q_i, H(q_i, p_i) + U_m \phi_m(q_i, p_i)\}$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H(q_i, p_i)\} + U_m \{q_i, \phi_m(q_i, p_i)\} + \{q_i, U_m\} \phi_m(q_i, p_i).$$

Se puede observar que no es necesario calcular el corchete correspondiente a $\{q_i, U_m\}$, pues éste está multiplicado por ϕ_m que es igual a cero.

Es importante hacer notar que no se deben sustituir las ligaduras en la dinámica antes de calcular los corchetes de Poisson, pues ellas forman parte de la dinámica del sistema. Para recordar esto se introduce una nueva notación mediante la cual la ecuación (1.10) se expresa de la forma:

$$\phi_m(q_i, p_i) \approx 0, \quad (1.20)$$

donde “ \approx ” se lee como “débilmente cero”. Esto quiere decir que no todos los corchetes de Poisson de las ligaduras con las variables canónicas son cero.

Para que nuestra dinámica sea consistente, se deben preservar las ligaduras en el tiempo, dando como resultado:

$$\dot{\phi}_m(q_i, p_i) = \{\phi_m(q_i, p_i), H^*(q_i, p_i)\} \approx \{\phi_m(q_i, p_i), H(q_i, p_i)\} + U_m \{\phi_m, \phi_n\} \quad (1.21)$$

Esta ecuación puede generar cuatro situaciones, las cuales son:

i.- Una inconsistencia como $(1 = 0)$, indicando que el lagrangeano genera ecuaciones de movimiento inconsistentes. Si esto ocurre, el problema se abandona, pues es totalmente inconsistente.

ii.- Una igualdad del tipo $(0 = 0)$. Esta se puede satisfacer de dos formas:

- a) Cuando la expresión resultante del corchete de Poisson es idénticamente igual a cero.
- b) Cuando la expresión resultante del corchete de Poisson es una función de las ligaduras, y se anula como consecuencia de estas.

iii.- Se pueden encontrar relaciones entre los p y las q , independientes de las ligaduras primarias. Estas relaciones son llamadas ligaduras secundarias y son de la forma:

$$\chi(q_i, p_i) = 0 \quad (1.22)$$

iv.- Se pueden encontrar relaciones que determinen a las U_m en función de los p y de las q , de la forma:

$$U_m = U_m(q_i, p_i) \quad (1.23)$$

Este proceso se repite cuantas veces sea necesario hasta que solo ocurra (ii) ó (iv), ya que si ocurre (iii), tendríamos que repetir el proceso, es decir, se calcula la preservación en el tiempo.

En este momento tenemos dos conjuntos de ligaduras:

$$\begin{array}{lll} \phi_m(q_i, p_i) & m = 1 \dots M & \text{Ligaduras primarias} \\ \chi_k(q_i, p_i) & k = 1 \dots K & \text{Ligaduras secundarias} \end{array}$$

Se puede reunir estos conjuntos en uno general:

$$\eta_j(q_i, p_i) \quad j = 1 \dots M + K = J \quad (1.24)$$

Ahora diremos que un objeto O es de primera clase, si se cumple:

$$\{O, \eta_j(q_i, p_i)\} \approx 0 \quad \forall J \quad (1.25)$$

Y diremos que un objeto O es de segunda clase, si se cumple:

$$\{O, \eta_j(q_i, p_i)\} \neq 0 \quad \text{al menos para un } J \quad (1.26)$$

Se puede observar que el Hamiltoniano H^* es un objeto de primera clase, pues conmuta con todas las ligaduras, quedando esto plenamente establecido al imponer la preservación en el tiempo de estas, mediante la ecuación (1.21)

Ahora podemos dividir en dos grupos el conjunto de todas las ligaduras:

- Ligaduras de primera clase, son aquellas que cumplen con (1.25); y las denotaremos por:

$$\psi_i(q, p) \approx 0 \quad i = 1 \dots I$$

- Ligaduras de segunda clase, son aquellas que cumplen con (1.26); y las denotaremos por:

$$\sigma_l(q, p) \approx 0 \quad l = 1 \dots N = J - 1$$

1.4 Cuantización en el caso de ligaduras de primera clase:

Si todas las ligaduras de la teoría son de primera clase, podemos continuar con la cuantización y solo faltaría aplicar los postulados de la mecánica cuántica. Tomando ($\hbar = 1$ y $c = 1$):

i) Las variables canónicas pasan a ser operadores en el espacio de Hilbert y los corchetes de Poisson pasan a ser conmutadores:

$$\{q_i, p_j\} \longrightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j] \quad (1.27)$$

tal que:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

ii) La evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H^* |\psi_t\rangle \quad (1.28)$$

iii) Se consideran kets físicos aquellos que cumplen con:

$$\hat{\psi}_j(q, p) |\psi_t\rangle = 0 \quad \forall J \quad (1.29)$$

Observemos que sustituyendo la ecuación (1.29) en la ecuación (1.28), se obtiene:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \quad (1.30)$$

Esto termina con la cuantización de la teoría con ligaduras de primera clase. Las ligaduras de primera clase restringen el espacio de Hilbert.

1.5 Cuantización en el caso de ligaduras de segunda clase:

Primero se deben tomar combinaciones lineales de ligaduras de segunda clase para ser reemplazadas por el mayor número de ligaduras de primera clase, tratando de dejar el menor número posible de las ligaduras de segunda clase.

Las ligaduras de segunda clase que queden después de realizar lo dicho anteriormente, se denotarán por:

$$\chi_s(q, p) \approx 0 \quad s = 1, \dots, S \quad (1.31)$$

En primer lugar hay que calcular los corchetes de Poisson entre las ligaduras de segunda clase y construir la matriz $C_{ss'}$ expresada de la forma:

$$C_{ss'} = \begin{pmatrix} 0 & \{\chi_1, \chi_2\} & \{\chi_1, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_1, \chi_s\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & 0 & \{\chi_2, \chi_3\} & \cdots & \{\chi_2, \chi_s\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{\chi_s, \chi_1\} & \{\chi_s, \chi_2\} & \{\chi_s, \chi_3\} & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Dirac [1] enunció y probó el siguiente teorema:

El determinante de la matriz $(C_{ss'})$ no es igual a cero, ni siquiera débilmente.

Tomando en cuenta este enunciado y que la matriz $(C_{ss'})$, es antisimétrica, por definición, podemos observar que el número de ligaduras de segunda clase tiene que ser par, ya que el determinante de una matriz antisimétrica es cero si su dimensión es impar. Por lo tanto también se puede asegurar la existencia de la inversa $(C_{ss'})$, que denotaremos por $C_{ss'}^{-1}$:

$$C_{ss''}^{-1} \{\chi_{s''}, \chi_{s'}\} = \delta_{ss'}$$

Definimos los corchetes de Dirac como:

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_s\} C_{ss'}^{-1} \{\chi_{s'}, B\}. \quad (1.33)$$

Estos corchetes cumplen con las reglas usuales de los corchetes de Poisson:

- i) $\{A, B\} = -\{B, A\}$
- ii) $\{A, C\} = 0$ si $C = \text{constante}$
- iii) $\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}$
- iv) $\{A, BC\} = \{A, B\} C + B \{A, C\}$

Los corchetes de Dirac son compatibles con las ligaduras de segunda clase, ya que si tomamos $B = \chi_r$ siendo χ_r una ligadura de segunda clase, entonces nos queda:

$$\{A, \chi_r\}^* = \{A, \chi_r\} - \{A, \chi_s\} C_{ss'}^{-1} \{\chi_{s'}, \chi_r\} = \{A, \chi_r\} - \{A, \chi_s\} \delta_{sr} = \{A, \chi_s\} - \{A, \chi_s\} = 0$$

entonces estas ligaduras pueden tomarse como igualdades fuertes:

$$\chi_s = 0 \quad (1.34)$$

Otra propiedad importante de los corchetes de Dirac es que si g es un objeto de primera clase el corchete de Dirac es el mismo que el corchete de Poisson, debido a que el de Dirac tiene un término de la forma $\{g, \chi_s\} C_{ss'}^{-1} \{\chi_{s'}, f\}$, que se anula ya que $\{g, \chi_s\} = 0$ por ser g de primera clase.

En consecuencia tenemos que la dinámica será:

$$\dot{f} = \{f, H^*\}^* = \{f, H^*\} \quad (1.35)$$

La dinámica estará descrita por el hamiltoniano (ecuación (1.15)), la ecuación (1.35), y las ligaduras de primera clase.

Llegados a este punto podemos continuar con la cuantización y aplicar los postulados de la mecánica cuántica:

i) Las variables canónicas pasan a ser operadores en el espacio de Hilbert y los corchetes de Dirac pasan a ser conmutadores:

$$\{q_i, p_j\}^* \longrightarrow -i [\hat{q}_i, \hat{p}_j] \quad (1.36)$$

tal que:

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$$

ii) La evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H^* |\psi_t\rangle \quad (1.37)$$

iii) Se consideran kets físicos aquellos que cumplen con:

$$\hat{\psi}_j(q, p) |\psi_t\rangle = 0 \quad \forall J. \quad (1.38)$$

siendo $\hat{\psi}_j$ las ligaduras de primera clase.

Observemos que sustituyendo la ecuación (1.38) en la ecuación (1.37), se obtiene:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle \quad (1.39)$$

Esto termina con la cuantización de la teoría con ligaduras de segunda clase. Las ligaduras de segunda clase restringen los operadores del espacio de Hilbert.

La discusión anterior se hizo para el caso de un número finito de grados de libertad. En el caso de campos, hay que hacer los reemplazos:

- Índices discretos a variables continuas.
- Sumas a integrales en las variables continuas.

Capítulo II

2 Representaciones Geométricas de Camino, Ciclos y Superficies

Las representaciones geométricas [3, 4, 5, 6, 14] han sido una herramienta útil en el tratamiento de teorías de calibre, debido a que resuelven las ligaduras de calibre que surgen en la cuantización de manera automática.

2.1 Caminos y Ciclos:

Comencemos introduciendo la representación de caminos abelianos.

Definimos una curva $\gamma(t)$, con $t \in I=[0,1]$ como una aplicación del intervalo I en un espacio dado. La curva $\gamma(t)$, para nuestros propósitos, debe ser continua a trozos. La curva inversa se define como

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t). \quad (2.1)$$

Definiendo la composición de curvas como sigue. Sean $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(t)$ dos curvas. La yuxtaposición o producto de las dos trayectorias γ_1 y γ_2 , denotada por $\gamma_1 \bullet \gamma_2$ está definida por:

$$(\gamma_1 \bullet \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t) & t \in [1/2, 1] \end{cases} .$$

Ahora consideraremos el siguiente objeto:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) \equiv \int_{\gamma} dx' \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.2)$$

llamado distribución de tangentes o factor de forma de la curva γ . Este objeto es invariante bajo reparametrizaciones.

Establecemos que dos curvas γ y γ' son equivalentes, y se expresa $\gamma \sim \gamma'$, si tienen el mismo factor de forma, es decir, si cumplen con:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma'). \quad (2.3)$$

Esta relación es de equivalencia, pues cumple con las siguientes propiedades

1.- Es reflexiva:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma) \quad (2.4)$$

2.- Es simétrica:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma') \implies T^i(\vec{x}, \gamma') = T^i(\vec{x}, \gamma) \quad (2.5)$$

3.-Es transitiva:

$$T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma') \text{ y } T^i(\vec{x}, \gamma') = T^i(\vec{x}, \gamma'') \implies T^i(\vec{x}, \gamma) = T^i(\vec{x}, \gamma''). \quad (2.6)$$

Un conjunto de curvas equivalentes, esto es, una clase de equivalencia, diremos que es un camino $[\gamma]$ abeliano.

El producto entre caminos da como resultado otro camino,

$$[\gamma] \bullet [\gamma'] \equiv [\gamma \cdot \gamma']. \quad (2.7)$$

Los caminos forman un grupo Abelian. En efecto se cumplen los axiomas de grupo:

i) Clausura:

$$[\gamma] \bullet [\gamma'] \text{ es un camino} \quad (2.8)$$

ii) Asociatividad:

$$[\gamma] \bullet ([\gamma'] \bullet [\gamma'']) = [\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')] = [(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''] = ([\gamma] \bullet [\gamma']) \bullet [\gamma'']. \quad (2.9)$$

iii) Existencia del elemento neutro $[n]$:

$$[\gamma] \bullet [n] = [n] \bullet [\gamma] = [\gamma]. \quad (2.10)$$

iv) Elemento inverso: $[\gamma]^{-1}$

$$[\gamma] \bullet [\gamma]^{-1} = [\gamma]^{-1} \bullet [\gamma] = [n]. \quad (2.11)$$

Consideremos ahora funcionales complejos definidos sobre caminos

$$\Psi : [\gamma] \longrightarrow C, \quad (2.12)$$

que más adelante representarán las funciones de onda de los estados físicos. Por sencillez, denotaremos a los caminos como a las curvas, con γ .

Modifiquemos levemente al camino γ componiéndolo con otro que tiene extremo inicial en \vec{x} y extremo final según la dirección del vector tangente \vec{u} infinitesimal, el cual podemos denotarlo como u_x^{x+u} . Ahora el funcional evaluado en el camino ligeramente perturbado (hasta primer orden en \vec{u}) es

$$\Psi(\gamma \bullet u_{\vec{x}}) = \Psi(\gamma) + u^i \delta_i(\vec{x}) \Psi(\gamma). \quad (2.13)$$

El operador δ_i antes introducido se comporta como una variación infinitesimal sobre caminos y se conoce como derivada de camino.

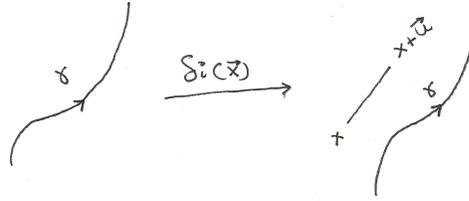


Fig. 2.1 Modificación del camino γ debido al operador $\delta_i(\vec{x})$

Ahora en vez de “perturbar” a γ con un camino infinitesimal u , lo modificamos componiéndolo con un ciclo δC

$$\delta C = u_{\vec{x}} \bullet v_{\vec{x}+\vec{u}} \bullet \bar{u}_{\vec{x}+\vec{u}+\vec{v}} \bullet \bar{v}_{\vec{x}+\vec{v}} \quad (2.14)$$

el cual es el borde de un área infinitesimal σ , de elemento de área $\sigma^{ij} = u^i v^j - u^j v^i$, generada por los vectores \vec{u} y \vec{v} .

Ψ evaluado en el nuevo camino está dado en primera aproximación por

$$\Psi(\gamma \bullet \delta C) - \Psi(\gamma) = \frac{1}{2} \sigma^{ij} \Delta_{ij}(\vec{x}) \Psi(\gamma) \quad (2.15)$$

expresión que define a la derivada de ciclo Δ_{ij} . Puede probarse que

$$\Delta_{ij}(\vec{x}) = \partial_i \delta_j(\vec{x}) - \partial_j \delta_i(\vec{x}) \quad (2.16)$$

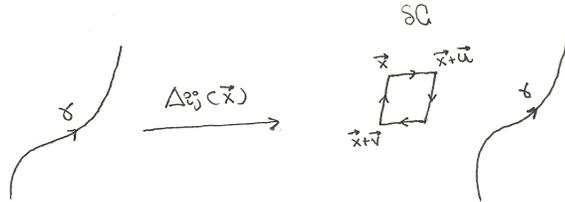


Fig. 2.2 Modificación del camino γ debido al operador $\Delta_{ij}(\vec{x})$

2.2 Superficies:

Similar al caso de caminos, consideremos el espacio de superficies suaves a trozos y orientadas en R^3 . Podemos plantear el factor de forma superficial $T^{ij}(x, \Sigma)$ definido por:

$$T^{ij}(x, \Sigma) = \int_{\Sigma} d\Sigma_y^{ij} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.17)$$

donde,

$$d\Sigma_y^{ij} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial s} \frac{\partial y^j}{\partial t} - \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial s} \right) dt ds, \quad (2.18)$$

y s, t son los parámetros superficiales. En vez de considerar funcionales dependientes de caminos uno considera ahora funcionales dependientes de superficies. Y entonces para este caso en vez de perturbar a γ con un camino infinitesimal \vec{u} , tendremos superficies Σ que perturbamos con superficies infinitesimales $\delta\Sigma$. En general Σ será la unión de varios “pedazos” de superficie; podría resultar que fueran superficies cerradas, y éstas formarían un subconjunto del grupo de superficies. En el caso general tomaremos superficies abiertas. Hasta primer orden en σ_{ij} tenemos que el funcional de onda cambia del modo

$$\Psi(\delta\Sigma \bullet \Sigma) - \Psi(\Sigma) = \sigma^{ij} \delta_{ij}(x) \Psi(\Sigma), \quad (2.19)$$

donde

$$\sigma^{ij} = u^i v^j - v^j u^i, \quad (2.20)$$

es el elemento de superficie generado por los vectores \vec{u} y \vec{v} . A δ_{ij} la llamaremos derivada de superficies abiertas, y representa la generalización de la derivada de caminos. Ahora, usando la derivada de superficies δ_{ij} es posible definir la derivada de superficies cerradas Δ_{ijk} ,

$$\Psi(\delta\Sigma \bullet \Sigma) - \Psi(\Sigma) = V^{ijk} \Delta_{ijk}(x) \Psi(\Sigma). \quad (2.21)$$

La derivada de superficies cerradas agrega un pequeño cubo o “dado” de volumen V^{ijk} . Se relaciona con δ_{ij} del modo

$$\Delta_{ijk}(x) = \partial_i \delta_{jk}(x) + \partial_j \delta_{ki}(x) + \partial_k \delta_{ij}(x). \quad (2.22)$$

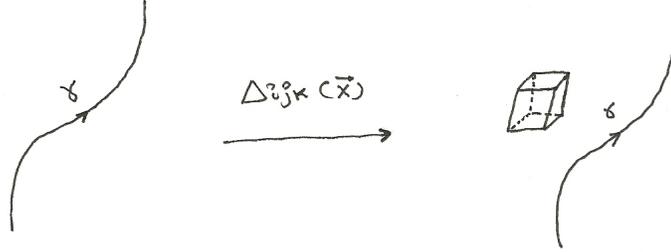


Fig. 2.3 Modificación del camino γ debido al operador $\Delta_{ijk}(\vec{x})$

Por otra parte, se puede calcular la derivada de superficies abiertas del factor de forma de superficies. Se tiene

$$\delta_{ij}(\vec{x}) T^{kl}(\vec{y}, \Sigma) = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.23)$$

Este resultado lo utilizaremos más adelante para realizar nuestros cálculos.

Capítulo III

3 Campo de Maxwell

3.1 Ecuaciones de Maxwell y tensor electromagnético

El electromagnetismo en el vacío puede ser descrito por dos campos vectoriales tridimensionales, que son el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y el campo magnético $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Entonces las ecuaciones de Maxwell con fuentes $c = 1$ se escriben:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \text{Ley de Gauss} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad \text{Ley de Ampere} \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Ley de Faraday} \quad (3.4)$$

Se define el tensor electromagnético:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

El tensor electromagnético dual $*F^{\mu\nu}$ es obtenido al contraer $F^{\mu\nu}$ con el tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = F^{\mu\nu} (\vec{E} \longrightarrow \vec{B}, \vec{B} \longrightarrow -\vec{E}) \quad (3.6)$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse en función del tensor electromagnético. Las inhomogéneas (3.1) y (3.3) están combinadas en

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.7)$$

donde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ es la densidad de corriente. Las ecuaciones homogéneas están comprendidas en:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \quad (3.8)$$

Si contraemos la ecuación anterior con el tensor de Levi-Civita y renombramos los índices sumados, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

El campo magnético puede expresarse en función del potencial vector $A^\mu = (A^0, A^i)$ como:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.10)$$

o bien

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \quad (3.11)$$

El eléctrico a su vez se escribirá

$$E^i = -\frac{\partial A^i}{\partial t} - \partial^i A^0 \quad (3.12)$$

ó

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.13)$$

3.2 La cuantización canónica del campo de Maxwell sin fuentes

La densidad lagrangiana que describe al campo de Maxwell es:

$$L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \quad (3.15)$$

y en este caso los variables o campos independientes son A_μ .

Para hacer la formulación hamiltoniana, separamos la parte espacial de la temporal

$$L = +\frac{1}{2}(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i)^2 - \frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2. \quad (3.16)$$

Calculamos los momentos conjugados:

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial_0(\partial_0 A_0)} = 0 \longrightarrow \pi^0 \approx 0 \quad \text{ligadura primaria} \quad (3.17)$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial_0(\partial_0 A_i)} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = F_{0i} = E^i \implies \partial_0 A_i = \partial_i A_0 + \pi^i \quad (3.18)$$

Entonces π^0 es una ligadura primaria, porque no se puede despejar \dot{A}_0 en función de las coordenadas y de los momentos conjugados; en cambio, al calcular π^i si se puede despejar \dot{A}_i en función de las variables canónicas y del momento conjugado.

Definimos el Hamiltoniano como:

$$H = \int dx^3 \{p_i \dot{q}_i - L\}, \quad (3.19)$$

entonces para este caso tenemos:

$$H = \int dx^3 \left\{ \left(\pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i \right) - L \right\}, \quad (3.20)$$

y sustituyendo las ecuaciones (3.17) y (3.18), el hamiltoniano queda expresado:

$$H = \int dx^3 \left\{ \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 \right\}. \quad (3.21)$$

Integrando por partes el primer término y usando el teorema de Gauss llegamos a:

$$H = \int dx^3 \left\{ -A_0 \partial_i \pi^i + \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 \right\}. \quad (3.22)$$

Los corchetes de Poisson entre los campos independientes vienen dados por

$$\{A_\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{y})\} = \delta_\alpha^\beta \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.23)$$

$$\{A_0(\vec{x}), A_i(\vec{y})\} = 0 \quad (3.24)$$

$$\{\pi^0(\vec{x}), \pi^i(\vec{y})\} = 0. \quad (3.25)$$

Siguiendo a Dirac, consideramos el Hamiltoniano

$$H^* = \int dx^3 \{H + U \phi_m\}, \quad (3.26)$$

donde U_m son los multiplicadores de lagrange y ϕ_m son las ligaduras primarias. Entonces H^* queda expresado de la siguiente manera:

$$H^* = \int dx^3 \left\{ -A_0 \partial_i \pi^i + \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + \lambda \pi^0 \right\}. \quad (3.27)$$

El paso siguiente, consiste en imponer la preservación en el tiempo de la ligadura primaria:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^0 &= \left\{ \pi^0(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 \partial_i \pi^i + \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + \lambda \pi^0 \right] \right\} \approx 0 \\
&= \left\{ \pi^0(\vec{x}), \int dy^3 [-A_0 \partial_i \pi^i] \right\} \\
&= \int dy^3 \left\{ \pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y}) \right\} \partial_i^y \pi^i + A_0 \left\{ \pi^0(\vec{x}), \partial_i \pi^i \right\} \approx 0 \\
\dot{\pi}^0 &= \partial_i \pi^i \equiv K_i \approx 0 \quad \text{ligadura secundaria} \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Resulta así una nueva ligadura (ligadura de Gauss) cuya preservación en el tiempo

$$\begin{aligned}
\dot{K}_i &= \left\{ \partial_k \pi^k(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 \partial_i \pi^i + \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i)^2 + \lambda \pi^0 \right] \right\} \approx 0 \\
&= -\partial_k \partial_l F^{kl} = 0, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

no genera más ligaduras. Sólo falta averiguar de qué clase son las ligaduras. Para eso calculamos el corchete de Poisson entre ellas:

$$\left\{ \pi^0(\vec{x}), \partial_i \pi^i(\vec{y}) \right\} = 0. \tag{3.30}$$

Entonces ambas ligaduras son de primera clase. En este momento nuestro sistema está descrito por H^* y las dos ligaduras de primera clase. Ahora faltaría aplicar los postulados de la mecánica cuántica:

1.- Los campos pasan a operadores:

$$A, \pi \longrightarrow \hat{A}, \hat{\pi} \tag{3.31}$$

2.- Los corchetes de Poisson pasan a conmutadores:

$$[A_\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{y})] = -i \delta_\alpha^\beta \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.32}$$

3.- Son kets físicos los que cumplan con:

$$\pi^0(\vec{x}) |\psi\rangle = 0, \tag{3.33}$$

$$\partial_i \pi^i(\vec{x}) |\psi\rangle = 0. \quad (3.34)$$

4.- La dinámica estará dada por:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H^* |\psi_t\rangle. \quad (3.35)$$

con

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right)$$

Esto pone fin a la cuantización del campo de Maxwell. Pero no todas las variables canónicas son físicamente relevantes, y una manera de deshacerse de estas variables consiste en introducir nuevas ligaduras, llamadas ligaduras de fijación de calibre. Como la teoría electromagnética es invariante de calibre, queda la libertad de fijar uno específico; para este caso escogemos el calibre temporal, $A_0 \approx 0$. Fijado este calibre, el campo de Maxwell queda sujeto a satisfacer tres ligaduras, que son:

$$\phi_1 = A_0(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.36)$$

$$\phi_2 = \pi^0(\vec{x}) \approx 0 \quad (3.37)$$

$$\phi_3 = \partial_i \pi^i(\vec{x}) \approx 0. \quad (3.38)$$

Ahora calculamos los corchetes de Poisson para ver de qué clase son estas ligaduras:

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{A_0(\vec{x}), \pi^0(\vec{x})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.39)$$

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \{A_0(\vec{x}), \partial_i \pi^i(\vec{x})\} = 0 \quad (3.40)$$

$$\{\phi_2, \phi_3\} = \{\pi^0(\vec{x}), \partial_i \pi^i(\vec{x})\} = 0 \quad (3.41)$$

Así pues ϕ_1 y ϕ_2 son de segunda clase, mientras que ϕ_3 es de primera clase. El número de ligaduras de segunda clase es par, y la matriz $C_{ss'}$ viene dada por

$$C_{ss''} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Con ella podemos calcular los corchetes de Dirac, y hacer fuertemente cero las ligaduras de segunda clase

$$\phi_1 = A_0(\vec{x}) = 0 \quad (3.43)$$

$$\phi_2 = \pi^0(\vec{x}) = 0 \quad (3.44)$$

i) Los corchetes de Dirac pasan a conmutadores y las variables canónicas a operadores:

$$\left[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\pi}^j(\vec{x}') \right] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.45)$$

ii) Los estados físicos son los que satisfacen:

$$\partial_i \hat{E}^i |\Psi\rangle = 0 \quad (3.46)$$

iii) Los estados evolucionan de acuerdo a la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi_i^2 + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right) |\Psi\rangle. \quad (3.47)$$

3.3 Representación de caminos del campo de Maxwell

Como los observables de la teoría electromagnética no involucran directamente al potencial vector, el cual no es invariante de calibre, sino a su rotor $F_{ij}(\vec{x}) = \partial_{xi} A_j(\vec{x}) - \partial_{xj} A_i(\vec{x})$, que si lo es, conviene estudiar el álgebra que involucra al observable $\hat{F}_{ij}(\vec{x})$

$$\begin{aligned} \left[\hat{F}_{ij}(\vec{x}), \hat{E}^k(\vec{x}') \right] &= \left[\partial_{xi} \hat{A}_j(\vec{x}), \hat{E}^k(\vec{x}') \right] - \left[\partial_{xj} \hat{A}_i(\vec{x}), \hat{E}^k(\vec{x}') \right] \\ &= \partial_{xi} \left[\hat{A}_j(\vec{x}), \hat{E}^k(\vec{x}') \right] - \partial_{xj} \left[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{E}^k(\vec{x}') \right] \\ &= i \left(\partial_{xi} \delta_j^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \partial_{xj} \delta_i^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

A continuación se postula la siguiente realización:

$$\hat{F}_{ij}(\vec{x}) \longrightarrow i\Delta_{ij}(\vec{x}) \quad (3.49)$$

$$\hat{E}^i(\vec{x}) \longrightarrow T^i(\vec{x}, \gamma) \quad (3.50)$$

Comprobemos si la realización cumple con el álgebra de los observables:

$$\begin{aligned} [i\Delta_{ij}(\vec{x}), T^k(\vec{x}', \gamma)] \Psi(\gamma) &= i\Delta_{ij}(\vec{x}) (T^k(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma)) - T^k(\vec{x}', \gamma) (i\Delta_{ij}(\vec{x}) \Psi(\gamma)) \\ &= i(\Delta_{ij}(\vec{x}) T^k(\vec{x}', \gamma)) \Psi(\gamma) \\ &= i\{(\partial_{xi}\delta_j(\vec{x}) - \partial_{xj}\delta_i(\vec{x})) T^k(\vec{x}', \gamma)\} \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Necesitaremos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} u^i\delta_i(\vec{x}) T^k(\vec{x}', \gamma) &= T^k(\vec{x}', u_x \bullet \gamma) - T^k(\vec{x}', \gamma) \\ &= \int_{u_x \bullet \gamma} dx''^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \int_{\gamma} dx'' \delta^{(3)}(\vec{x}' - \vec{x}'') \\ &= \int_{u_x} dx''^k \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}'') \\ &= u^i \delta_i^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \delta_i(\vec{x}) T^k(\vec{x}', \gamma) &= \delta_i^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente tenemos que:

$$[i\Delta_{ij}(\vec{x}), T^k(\vec{x}', \gamma)] \Psi(\gamma) = i\{\partial_{xi}\delta_j^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') - \partial_{xj}\delta_i^k \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\} \Psi(\gamma), \quad (3.53)$$

entonces, en efecto la realización escogida satisface el álgebra.

Al cuantizar el campo de Maxwell postulamos que los estados físicos debían satisfacer la ligadura de Gauss:

$$\partial_i \hat{E}^i |\Psi\rangle = 0, \quad (3.54)$$

que realizándola sobre caminos podemos reescribir como:

$$\partial_{x^i} T^i(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma) = 0. \quad (3.55)$$

Una elección adecuada de caminos, nos permitirá satisfacer automáticamente la ligadura de Gauss. Procedamos a desarrollar la ligadura de Gauss.

$$\begin{aligned} \partial_{x^i} T^i(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma) &= \partial_{x^i} \int_{\gamma} dx'^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ &= - \int_{\gamma} dx'^i \partial_{x'^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Psi(\gamma) \\ &= -\rho(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma) \\ &= -\sum_s \left(\delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (3.56)$$

El objeto $\rho(\vec{x}, \gamma)$ es una distribución con soporte en los extremos de los tramos del camino, donde β_s es el extremo final y α_s es el extremo inicial del tramo.

La ligadura de Gauss se satisface automáticamente si escogemos caminos que tengan el mismo punto inicial y final en cada tramo continuo, es decir, $\beta_s = \alpha_s$. Estos caminos cerrados los llamaremos ciclos.

La evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\gamma, t) = \int d^2x \frac{1}{2} \left(T^i(\vec{x}, \gamma) T^i(\vec{x}, \gamma) + \frac{1}{2} \Delta_{ij}(\vec{x}) \Delta_{ij}(\vec{x}) \right) \Psi(\gamma, t) \quad (3.57)$$

donde podemos interpretar al primer término como el “término potencial” ya que es cuadrático en la variable posición $T^i(\vec{x}, \gamma)$. El segundo término que tiene una especie de Laplaciano Δ_{ij}^2 , representa a la energía cinética en el espacio de ciclos.

Capítulo IV

4 Cuantización del electromagnetismo con carga eléctrica y carga magnética estáticas.

4.1 Acción de Schwinger

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar la cuantización del electromagnetismo en presencia de una carga eléctrica y una magnética estáticas. Partiremos de la acción de primer orden de Schwinger [9], que se basa en los principios de la Teoría de Dirac [7,8]: para la formulación del electromagnetismo con monopolos. Esta acción es

$$S = \int dx^4 \left(A_\mu J_e^\mu + B_\mu J_m^\mu - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (4.1)$$

donde A_μ y $F_{\mu\nu}$ son campos independientes, J_m es la densidad de corriente magnética y J_e la densidad de corriente eléctrica. B_μ viene dado por:

$$B_\mu = \int dy^4 \star F_{\mu\nu}(y) f^\nu(y - x) + \partial_\mu \lambda(x) \quad (4.2)$$

y f obedece:

$$\partial_\mu f^\mu(y) = \delta^4(y). \quad (4.3)$$

La función λ es arbitraria. El dual $\star F_{\mu\nu}$ está dado por:

$$\star F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

donde ε es el tensor de Levi-Civita.

Si variamos la ecuación (4.1) con respecto a A_μ da como resultado el primer juego de ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_e^\mu, \quad (4.5)$$

mientras que al variar con respecto a $F_{\mu\nu}$ se produce la siguiente relación:

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(x) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int dy^4 J_m^\alpha f^\beta(x-y), \quad (4.6)$$

que con el uso de las ecuaciones (4.2) y (4.3) conduce al segundo juego de ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_\mu \star F^{\mu\nu} = J_m^\mu. \quad (4.7)$$

Así, obtenemos las ecuaciones de Maxwell con corrientes eléctricas y magnéticas. La dualidad electricidad-magnetismo se manifiesta a través de la invariancia de las ecuaciones bajo las rotaciones [10,11]:

$$J_e \longrightarrow \cos \phi J_e + \sin \phi J_m \quad (4.8)$$

$$J_m \longrightarrow -\sin \phi J_e + \cos \phi J_m \quad (4.9)$$

$$F \longrightarrow \cos \phi F + \sin \phi \star F. \quad (4.10)$$

4.2 Cuantización a la Dirac.

Recordemos que estamos estudiando el electromagnetismo con cargas eléctrica y magnética estáticas. Por lo tanto las densidades de corrientes vienen dada por:

$$J_e^i = 0 \quad (4.11)$$

$$J_m^i = 0, \quad (4.12)$$

entonces:

$$J_e^0(x) = e\delta^3(x) \quad (4.13)$$

y

$$J_m^0(x) = g\delta^3(x). \quad (4.14)$$

Una conveniente opción para f^μ es:

$$f^\nu(y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{y^i}{|\vec{y}|^3} \delta_i^\nu \delta(y_o) \quad (4.15)$$

Entonces sustituimos las ecuaciones (4.11) y (4.12) en (4.1) y la acción nos queda expresada de la siguiente manera:

$$S = \int dx^4 \left(A_0 J_e^0 + B_0 J_m^0 - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right). \quad (4.16)$$

Calculamos los momentos conjugados de las variables independientes, que son A_μ y $F_{\mu\nu}$:

$$\pi^0 = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_0} \approx 0 \quad \text{ligadura primaria} \quad (4.17)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{F}^{ij}} \approx 0 \quad \text{ligadura primaria} \quad (4.18)$$

$$\pi^i = \frac{\delta L}{\delta \partial_0 A_i} = -F^{0i} = E^i. \quad (4.19)$$

Observemos que las variables independientes son A_μ y F_{ij} , porque F^{0i} , ya es el momento conjugado π^i , y por lo tanto no es necesario tratarlo como una coordenada y definir su propio momento conjugado. Se introduce el símbolo \approx para recordar que no necesariamente el corchete de Poisson de la ligadura con las variables canónicas vale cero. Siguiendo el método de Dirac, el hamiltoniano viene dado por

$$H = \int dx^3 \left\{ \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \pi^{ij} \dot{F}^{ij} - A_0 J_e^0 - B_0 J_m^0 + F^{0i} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) \right\} \\ + \int dx^3 \left(\frac{1}{2} F^{ij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) - \frac{1}{2} F^{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \right). \quad (4.20)$$

Usando las ecuaciones (4.13), (4.14), (4.17), (4.18) y (4.19) se obtiene:

$$H = \int dx^3 \left\{ -A_0 e \delta^3(x) - B_0 J_m^0 - \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} F^{ij} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) + \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right\}. \quad (4.21)$$

Ahora calculamos el término $B_0 J_m^0$. De la ecuación (4.2) nos da:

$$B_0 J_m^0 = \int dy^4 \star F_{0k}(y) f^k(y-x) g \delta^3(y) + \partial_0 \lambda(x) g \delta^3(y), \quad (4.22)$$

donde:

$$\star F_{0k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{0kij} F_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{ij}, \quad (4.23)$$

y usando la ecuación (4.23) en (4.22) se obtiene:

$$\int dx^3 B_0 J_m^0 = \int dx^3 \int dy^4 \star F_{0k}(y) f^k(y-x) g \delta^3(y) = \frac{1}{2} g \int dx^3 \varepsilon_{ijk} F_{ij} f^k(x). \quad (4.24)$$

Definiendo $f_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$ y usando la ecuación (4.24) en la ecuación (4.21), el hamiltoniano nos queda:

$$H = \int dx^3 \left\{ -A_0 e \delta^3(x) - \frac{1}{2} g \varepsilon_{ijk} F_{ij} f^k(x) - \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} F^{ij} f_{ij} + \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right\}. \quad (4.25)$$

Si definimos $b_{ij} \equiv g\varepsilon_{ijk}f^k(x)$ entonces:

$$H = \int dx^3 \left\{ -A_0 e\delta^3(x) + \frac{1}{2}F^{ij}(f_{ij} - b_{ij}) + \frac{1}{2}\pi_i^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2 \right\} + \int dx^3 \pi^i \partial_i A_0. \quad (4.26)$$

Integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss en el último término nos da:

$$H = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}F^{ij}(f_{ij} - b_{ij}) + \frac{1}{2}\pi_i^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2 \right\} + \int dx^3 A_0 [(\partial_i \pi^i) - e\delta^3(x)]. \quad (4.27)$$

Es importante hacer notar que en ausencia de carga magnética, el hamiltoniano se reduce al hamiltoniano de la teoría de Maxwell ordinaria, ya que en ese caso el campo magnético F_{ij} y el rotor del potencial vector f_{ij} coinciden.

Calculamos el nuevo Hamiltoniano:

$$H^* = H + \int dx^3 \{U\pi^0 + U_{ij}\pi^{ij}\}, \quad (4.28)$$

y sustituyendo la ecuación (4.28) nos queda:

$$H^* = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}F^{ij}(f_{ij} - b_{ij}) + \frac{1}{2}\pi_i^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2 \right\} + \int dx^3 A_0 [(\partial_i \pi^i) - e\delta^3(x)] + \int dx^3 \{U\pi^0 + U_{ij}\pi^{ij}\}. \quad (4.29)$$

Los corchetes de Poisson vienen dados por:

$$\{F_{ij}(\vec{x}), \pi^{kl}(\vec{y})\} = (\delta_i^k \delta_j^l - \delta_i^l \delta_j^k) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.30)$$

$$\{A_\alpha(\vec{y}), \pi^\beta(\vec{x})\} = \delta_\beta^\alpha \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.31)$$

$$\{\pi^\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{y})\} = 0 \quad (4.32)$$

$$\{A_\alpha(\vec{x}), A_\beta(\vec{y})\} = 0 \quad (4.33)$$

$$\{A_\alpha(\vec{x}), \pi^{kl}(\vec{y})\} = 0 \quad (4.34)$$

$$\{\pi^\alpha(\vec{x}), F^{kl}(\vec{y})\} = 0 \quad (4.35)$$

$$\{\pi^\alpha(\vec{x}), \pi^{\mu\beta}(\vec{y})\} = 0 \quad (4.36)$$

$$\{A^\alpha(\vec{x}), F^{kl}(\vec{y})\} = 0 \quad (4.37)$$

$$\{F^{\alpha\beta}(\vec{x}), F^{kl}(\vec{y})\} = 0 \quad (4.38)$$

$$\{\pi^{\alpha\beta}(\vec{x}), \pi^{kl}(\vec{y})\} = 0. \quad (4.39)$$

Siguiendo el método de Dirac [1], uno debe imponer la preservación en el tiempo de las ligaduras primarias. Recordemos que tenemos dos ligaduras primarias asociadas a π^0 y π^{ij} (ecuación (4.17) y (4.18); respectivamente). Primero realizamos la preservación en el tiempo de π^0 :

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0 = \{\pi^0, H^*\} = & \left\{ \pi^0(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 e\delta^3(\vec{y}) + \frac{1}{2} F^{ij}(f_{ij} - b_{ij}) + \frac{1}{2} \pi_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right] \right\} + \\ & + \left\{ \pi^0(\vec{x}), \int dy^3 [(\partial_i \pi^i) A_0 + U \pi^0 + U_{ij} \pi^{ij}] \right\} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Usando las propiedades elementales de los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0 = & \int dy^3 \left[-e\delta^3(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y})\} + \frac{1}{2} \{\pi^0(\vec{x}), F^{ij}(f_{ij} - b_{ij})(\vec{y})\} \right] + \\ & + \int dy^3 \left[+\frac{1}{2} \{\pi^0(\vec{x}), \pi_i(\vec{y}) \pi_i(\vec{y})\} - \frac{1}{4} \{\pi^0(\vec{x}), F_{ij}(\vec{y}) F_{ij}(\vec{y})\} \right] + \\ & + \int dy^3 [+ \{\pi^0(\vec{x}), (\partial_i \pi^i) A_0\} + \{\pi^0(\vec{x}), U \pi^0\} + \{\pi^0(\vec{x}), U_{ij} \pi^{ij}\}]. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones (4.32), (4.35), (4.36), tomando en consideración que no es necesario calcular el corchete de Poisson de $\{q(\vec{x}), U(\vec{y})\}$ y sustituyendo $f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$, nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0 = & \int dy^3 \left[-e\delta^3(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y})\} + \frac{1}{2} F^{ij}(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), \partial_i A_j(\vec{y}) - \partial_j A_i(\vec{y})\} \right] + \\ & + \int dy^3 (\partial_i \pi^i)(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y})\} \approx 0 \\ = & \int dy^3 \left[-e\delta^3(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y})\} + \frac{1}{2} \partial_i^y F^{ij}(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_j(\vec{y})\} \right] + \\ & + \int dy^3 \left[-\frac{1}{2} \partial_j^y F^{ij}(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_i(\vec{y})\} + (\partial_i \pi^i)(\vec{y}) \{\pi^0(\vec{x}), A_0(\vec{y})\} \right] \approx 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Con el empleo del corchete de Poisson, ecuación (4.32) se obtiene finalmente

$$\dot{\pi}^0 = - \int dy^3 e \delta^3(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \int dy^3 (\partial_i \pi^i(\vec{y})) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \approx 0, \quad (4.43)$$

$$\boxed{\dot{\pi}^0 = R = -e \delta^3(\vec{x}) + \partial_i \pi^i(\vec{x}) \approx 0} \quad \text{ligadura secundaria.} \quad (4.44)$$

Al realizar la preservación en el tiempo de π^0 nos da entonces una nueva ligadura (secundaria). Siguiendo el método de Dirac hay que realizar la preservación en el tiempo de esta nueva ligadura:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \{R(\vec{x}), H^*\} \\ &= \left\{ -e \delta^3(\vec{x}) + \partial_i \pi^i(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 e \delta^3(\vec{y}) + \frac{1}{2} F^{lm} (f_{lmj} - b_{lm}) + \frac{1}{2} \pi_l^2 - \frac{1}{4} F_{lm}^2 \right] \right\} \\ &\quad + \left\{ -e \delta^3(\vec{x}) + \partial_i \pi^i(\vec{x}), \int dy^3 [(\partial_l \pi^l) A_0 + U \pi^0 + U_{lm} \pi^{lm}] \right\} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tomando en cuenta que no es necesario calcular $\{q(\vec{x}), U(\vec{y})\}$ y haciendo uso de los corchetes de Poisson (4.31), (4.32), (4.35) y (4.36), finalmente nos queda:

$$\dot{R} = \int dy^3 \left[+ \frac{1}{2} \partial_i^x F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^i(\vec{x}), f_{lm}(\vec{y}) \} \right] \approx 0. \quad (4.46)$$

A partir de la definición $f_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \int dy^3 \left[\frac{1}{2} \partial_i^x F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^i(\vec{x}), \partial_l A_m(\vec{y}) \} - \frac{1}{2} \partial_i^x F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^i(\vec{x}), \partial_m A_l(\vec{y}) \} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dy^3 \partial_i^x \partial_l^y F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^i(\vec{x}), A_m(\vec{y}) \} - \frac{1}{2} \int dy^3 \partial_i^x \partial_m^y F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^i(\vec{x}), A_l(\vec{y}) \} \approx 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

usando ahora la ecuación (4.31) da como resultado:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\frac{1}{2} \int dy^3 \partial_i^x \partial_l^y F^{lm}(\vec{y}) \delta_m^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \frac{1}{2} \int dy^3 \partial_i^x \partial_m^y F^{lm}(\vec{y}) \delta_l^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_m^x \partial_l^x F^{lm}(\vec{x}) + \frac{1}{2} \partial_l^x \partial_m^x F^{lm}(\vec{x}) = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

es decir, no se generan más ligaduras. El proceso de preservación de éstas se termina.

Ahora hay que realizar la preservación en el tiempo de nuestra otra ligadura primaria π^{ij} expresada por la ecuación (4.18):

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = \{ \pi^{ij}, H^* \} = & \left\{ \pi^{ij}(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 e \delta^3(\vec{y}) + \frac{1}{2} F^{lm} (f_{lm} - b_{lm}) + \frac{1}{2} \pi_l^2 - \frac{1}{4} F_{lm}^2 \right] \right\} + \\ & + \{ \pi^{ij}(\vec{x}), \int dy^3 [(\partial_l \pi^l) A_0 + U \pi^0 + U_{lm} \pi^{lm}] \} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Usando las relaciones de los corchetes de Poisson (4.34), (4.36) y sustituyendo $f_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l$, nos queda:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ij} = & \int dy^3 \left[+\frac{1}{2} \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F^{lm}(\vec{y}) \} (f_{lm} - b_{lm})(\vec{y}) + \frac{1}{2} \partial_l^y F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^{ij}(\vec{x}), A_m(\vec{y}) \} \right] \\ & + \int dy^3 \left[-\frac{1}{2} \partial_m^y F^{lm}(\vec{y}) \{ \pi^{ij}(\vec{x}), A_l(\vec{y}) \} - \frac{1}{2} F_{lm}(\vec{y}) \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} \right] \approx 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Empleando la ecuación (4.34) se tiene

$$\dot{\pi}^{ij} = \int dy^3 \left[+\frac{1}{2} \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F^{lm}(\vec{y}) \} [(f_{lm} - b_{lm})(\vec{y}) - F_{lm}(\vec{y})] \right] \approx 0. \quad (4.51)$$

Usando ahora la ecuación (4.30) se obtiene:

$$\dot{\pi}^{ij} = \int dy^3 \left[+\frac{1}{2} (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \delta(\vec{x} - \vec{y}) [(f_{lm} - b_{lm})(\vec{y}) - F_{lm}(\vec{y})] \right] \quad (4.52)$$

$$\boxed{\dot{\pi}^{ij} = K_{ij} = (F_{ij} - f_{ij} + b_{ij})(\vec{x}) \approx 0} \text{ ligadura secundaria.} \quad (4.53)$$

Siguiendo el método de Dirac, hay que realizar la preservación en el tiempo de esta nueva ligadura secundaria.

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ij} = & \{ K_{ij}, H^* \} \\ \dot{K}_{ij} = & \left\{ (F_{ij} - f_{ij} + b_{ij})(\vec{x}), \int dy^3 \left[-A_0 e \delta^3(\vec{y}) + \frac{1}{2} F^{lm} (f_{lm} - b_{lm}) + \frac{1}{2} \pi_l^2 - \frac{1}{4} F_{lm}^2 \right] \right\} \\ & + \{ (F_{ij} - f_{ij} + b_{ij})(\vec{x}), \int dy^3 [(\partial_l \pi^l) A_0 + U \pi^0 + U_{lm} \pi^{lm}] \} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Haciendo uso de las relaciones de los corchetes de Poisson, ecuaciones (4.33), (4.34), (4.35), (4.36) y sustituyendo f_{lm} , nos queda:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{ij} = & \int dy^3 [+U_{lm}(\vec{y}) \{F_{ij}(\vec{x}), \pi^{lm}(\vec{y})\} + \partial_i^x \pi_l(\vec{y}) \{A_j(\vec{x}), \pi_l(\vec{y})\} \\
& - \partial_j^x \pi_l(\vec{y}) \{A_i(\vec{x}), \pi_l(\vec{y})\} + \partial_i^x \partial_l^y \{A_j(\vec{x}), (\pi^l)(\vec{y})\} A_0(\vec{y}) \\
& - \partial_j^x \partial_l^y \{A_i(\vec{x}), (\pi^l)(\vec{y})\} A_0(\vec{y}) + \partial_i^x U(\vec{y}) \{A_j(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})\} \\
& - \partial_j^x U(\vec{y}) \{A_i(\vec{x}), \pi^0(\vec{y})\}] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Con el uso de las ecuaciones (4.31) y (4.30) resulta

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{ij} = & - \int dy^3 U_{ij}(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \partial_i^x \int dy^3 \pi_l(\vec{y}) \delta_l^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) + \\
& - \partial_j^x \int dy^3 \pi_l(\vec{y}) \delta_l^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

finalmente

$$\dot{K}_{ij} = S_{ij} = -2U_{ij}(\vec{x}) + \partial_i^x \pi^j - \partial_j^x \pi^i \approx 0. \tag{4.57}$$

De aquí pueden despejarse los multiplicadores de Lagrange, y utilizando la ecuación (4.19) nos queda:

$$U_{ij}(\vec{x}) = -\frac{1}{2} (\partial_j^x F^{0i} - \partial_i^x F^{0j}) \approx 0. \tag{4.58}$$

Después de este desarrollo hemos terminado de realizar la preservación en el tiempo de todas las ligaduras. Recordemos cuáles son las ligaduras que tenemos:

$$\phi_1 = \pi^0 \approx 0 \text{ ligadura primaria} \tag{4.59}$$

$$\phi_2 = \pi^{ij} \approx 0 \text{ ligadura primaria} \tag{4.60}$$

$$\phi_3 = R = -e\delta^3(\vec{x}) + \partial_i \pi^i(\vec{x}) \approx 0 \text{ ligadura secundaria} \tag{4.61}$$

$$\phi_4 = F_{ij}(\vec{x}) - f_{ij}(\vec{x}) + b_{ij}(\vec{x}) \approx 0 \text{ ligadura secundaria} . \tag{4.62}$$

Al realizar la preservación en el tiempo de ϕ_1 nos dió ϕ_3 , después tuvimos que realizar la preservación en el tiempo de ϕ_3 lo que no arrojó más ligaduras. A su vez, al realizar la preservación en el tiempo de ϕ_2 nos dió ϕ_4 , después tuvimos que realizar la preservación en el tiempo de ϕ_4 sin que aparecieran nuevas ligaduras, lo que nos dió una expresión que permitió despejar los multiplicadores de Lagrange.

El paso siguiente será calcular los corchetes de Poisson entre las ligaduras, para conocer cuáles son de primera clase y cuáles de segunda.

$$\bullet \{\phi_1, \phi_2\} = \{\pi^0(\vec{x}), \pi^{ij}(\vec{y})\}. \quad (4.63)$$

Mediante el uso de la ecuación (4.36):

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 0. \quad (4.64)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \bullet \{\phi_1, \phi_3\} &= \{\pi^0(\vec{x}), -e\delta^3(\vec{y}) + \partial_i \pi^i(\vec{y})\} \\ &= \partial_i^y \{\pi^0(\vec{x}), \pi^i(\vec{y})\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Usando el corchete (4.32) queda entonces:

$$\{\phi_1, \phi_3\} = 0. \quad (4.66)$$

El siguiente corchete sería:

$$\begin{aligned} \bullet \{\phi_1, \phi_4\} &= \{\pi^0(\vec{x}), F_{ij}(\vec{y}) - f_{ij}(\vec{y}) + b_{ij}(\vec{y})\} \\ &= \{\pi^0(\vec{x}), F_{ij}(\vec{y})\} - \partial_i^y \{\pi^0(\vec{x}), A_j(\vec{y})\} + \partial_j^y \{\pi^0(\vec{x}), A_i(\vec{y})\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Usando los corchetes (4.31) y (4.35):

$$\{\phi_1, \phi_4\} = 0. \quad (4.68)$$

Podemos notar así que ϕ_1 es de primera clase.

Ahora estudiamos ϕ_2 .

$$\begin{aligned}
\bullet \{ \phi_2, \phi_3 \} &= \{ \pi^{ij}(\vec{x}), -e\delta^3(\vec{y}) + \partial_l \pi^l(\vec{y}) \} \\
&= \partial_l^y \{ \pi^{ij}(\vec{x}), \pi^l(\vec{y}) \} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\bullet \{ \phi_2, \phi_4 \} &= \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) - f_{lm}(\vec{y}) + b_{lm}(\vec{y}) \} \\
&= \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} - \{ \pi^{ij}(\vec{x}), \partial_l A_m(\vec{y}) \} + \{ \pi^{ij}(\vec{x}), \partial_m A_l(\vec{y}) \} \\
&= \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} - \partial_l^y \{ \pi^{ij}(\vec{x}), A_m(\vec{y}) \} + \partial_m^y \{ \pi^{ij}(\vec{x}), A_l(\vec{y}) \} \\
&= \{ \pi^{ij}(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} \\
&= -(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\
&\neq 0
\end{aligned} \tag{4.70}$$

por lo que ϕ_2 es de segunda clase.

Ahora faltaría calcular:

$$\begin{aligned}
\bullet \{ \phi_3, \phi_4 \} &= \{ -e\delta^3(\vec{x}) + \partial_i \pi^i(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) - f_{lm}(\vec{y}) + b_{lm}(\vec{y}) \} \\
&= -\{ \partial_i \pi^i(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} + \{ \partial_i \pi^i(\vec{x}), \partial_l A_m(\vec{y}) \} - \{ \partial_i \pi^i(\vec{x}), \partial_m A_l(\vec{y}) \} \\
&= -\partial_i^x \{ \pi^i(\vec{x}), F_{lm}(\vec{y}) \} + \partial_i^x \partial_l^y \{ \pi^i(\vec{x}), A_m(\vec{y}) \} - \partial_i^x \partial_m^y \{ \pi^i(\vec{x}), A_l(\vec{y}) \} \\
&= \int dy^3 [+\partial_i^x \partial_l^y \delta_m^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) - \partial_i^x \partial_m^y \delta_l^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})] = 0;
\end{aligned} \tag{4.71}$$

por lo tanto ϕ_3 es de primera clase y ϕ_4 es de segunda clase.

Resumiendo, tenemos dos ligaduras de segunda clase que son:

$$\phi_2 = \pi^{ij} \approx 0 \tag{4.60}$$

$$\phi_4 = F_{ij}(\vec{x}) - f_{ij}(\vec{x}) + b_{ij}(\vec{x}) \approx 0. \tag{4.62}$$

Recordemos que las variables canónicas que tenemos son $A_0, A_i, \pi^0, \pi^i, F_{ij}, \pi^{ij}$. Siguiendo el procedimiento de Dirac, debemos introducir los corchetes de Dirac para obtener una teoría cuántica consistente con estas ligaduras de segunda clase. Pero dado que los corchetes de Dirac van a ser consistentes con las ligaduras de segunda clase, éstos se pueden poner como igualdades fuertes.

Podemos escribir F_{ij} y sus momentos π^{ij} en términos del resto de las variables canónicas, y sustituir estas expresiones en el Hamiltoniano total. Es decir, de la ecuación (4.68) se puede despejar F_{ij} en función de las otras variables canónicas. Entonces resulta:

$$F_{ij}(\vec{x}) = f_{ij}(\vec{x}) - b_{ij}(\vec{x}) \quad (4.72)$$

y usando la ecuación (4.19) nos eliminamos el momento conjugado π^{ij} .

Una vez realizado esto, sólo tenemos que considerar los corchetes de Dirac entre las variables canónicas que quedan, que son A_i, A_0 y sus conjugados canónicos. Pero se puede observar que estos corchetes de Dirac coinciden con los de Poisson.

En este punto, también es conveniente eliminar la ligadura $\phi_1 = \pi^0$. Esto se puede lograr mediante la fijación del calibre temporal $A_0 = 0$ y tratando esta nueva ligadura como una ligadura de segunda clase. Entonces, podemos colocar A_0 y π^0 como igualdades fuertes. Podemos observar que los nuevos corchetes de Dirac son iguales a los de Poisson, por lo que consideramos sólo las variables restantes, es decir, A_i y sus conjugados canónicos.

Ya estamos listos para realizar la cuantización de la teoría.

- Primero las variables canónicas pasan a operadores y los corchetes de Poisson pasan a conmutadores:

$$A_i \longrightarrow \hat{A}_i \quad (4.73)$$

$$\pi_i \longrightarrow \hat{\pi}_i \quad (4.74)$$

$$\{A_i(\vec{y}), \pi^j(\vec{x})\} = \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \longrightarrow [A_i(\vec{y}), \pi^j(\vec{x})] = -i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.75)$$

$$\{\pi^\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{y})\} = 0 \longrightarrow [\pi^\alpha(\vec{x}), \pi^\beta(\vec{y})] = 0 \quad (4.76)$$

$$\{A_\alpha(\vec{x}), A_\beta(\vec{y})\} = 0 \longrightarrow [A_\alpha(\vec{x}), A_\beta(\vec{y})] = 0 \quad (4.77)$$

- Las ligaduras de primera clase, definen los estados físicos $|\Psi\rangle$ como aquellos que satisfacen:

$$(\partial_i \pi^i(\vec{x}) - e\delta^3(\vec{x})) \Psi = 0 \quad (4.78)$$

- Sobre el espacio físico, la dinámica es dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = \hat{H} |\psi_t\rangle \quad (4.79)$$

con

$$\hat{H} = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_i^2 - \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \frac{1}{2} F^{ij} (f_{ij} - b_{ij}) + A_0 (\partial_i \pi^i(\vec{x}) - e\delta^3(\vec{x})) \right].$$

Usando las ecuaciones (4.72) y (4.78) nos queda finalmente

$$\hat{H} = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}_i^2 + \frac{1}{4} (f_{ij} - b_{ij})^2 \right] \quad (4.80)$$

En el caso de que no existiera el monopolo, $f_{ij} = F_{ij}$ y entonces nos quedaría el hamiltoniano de la teoría libre.

Capítulo V

5 Representación Geométrica para el campo electromagnético con cargas eléctricas y magnéticas estáticas.

En este capítulo estudiaremos las representaciones geométricas para los resultados encontrados en el capítulo anterior, tomando en consideración los trabajos [12, 13, 14], donde se estudió el campo electromagnético con una carga eléctrica estática sola, y el campo electromagnético con un monopolo. Para nuestro caso, como tendremos tanto carga eléctrica como magnética, hay que escoger una realización de los observables que satisfaga el álgebra para ambas realizaciones: la directa y la dual.

Comenzamos realizando un cambio de variable, que resulta ser muy conveniente para tratar dicho problema. Hacemos

$$C^i(\vec{x}) = E^i(\vec{x}) - E_{carga\ puntual}^i(x), \quad (5.1)$$

donde,

$$E_{carga\ puntual}^i(x) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)^i}{|x - x_0|^3}, \quad (5.2)$$

Y tomando en consideración que $\pi^i = E^i$, el hamiltoniano (ecuación 4.95) resulta ser,

$$\hat{H} = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} (C^i(\vec{x}) + E_{cp}^i(x))^2 + \frac{1}{4} (f_{ij} - b_{ij})^2 \right] \quad (5.3)$$

y la ligadura, ecuación (4.93) queda satisfecha por la siguiente ecuación:

$$\partial_i C^i(x) + \partial_i E_{carga\ puntual}(x) - e\delta^3(\vec{x}) = 0, \quad (5.4)$$

ya que

$$\partial_i E_{carga\ puntual}(x) = e\delta^3(\vec{x}). \quad (5.5)$$

Entonces la ecuación (5.4) resulta

$$\boxed{\partial_i C^i(x) = 0}. \quad (5.6)$$

Recordemos que el álgebra satisfecha por los operadores viene dada por

$$[A_i(\vec{y}), \pi^j(\vec{x})] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.75)$$

con todos los demás conmutadores iguales a cero. Entonces se tiene

$$[A_i(\vec{y}), C^j(\vec{x})] = i\delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5.7)$$

Debemos realizar entonces (5.3), (5.6) y (5.7).

5.1 CASO DIRECTO

Propongamos la siguiente realización “*directa*”

$$\hat{C}^i(\vec{x}) \longrightarrow eT^i(\vec{x}, \gamma) \quad (5.8)$$

$$\hat{A}_j(\vec{x}) \longrightarrow \frac{i}{e}\delta_j(\vec{x}) \quad (5.9)$$

Comprobemos si la realización cumple con el álgebra de los observables

$$\begin{aligned}
\left[\frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] \Psi(\gamma) &= i [\delta_i(\vec{x}), T^j(\vec{y}, \gamma)] \Psi(\gamma) \\
&= i \delta_i(\vec{x}) (T^j(\vec{y}, \gamma) \Psi(\gamma)) - iT^j(\vec{y}, \gamma) (\delta_i(\vec{x}) \Psi(\gamma)) \\
&= i (\delta_i(\vec{x}) T^j(\vec{y}, \gamma)) \Psi(\gamma)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Para concluir la prueba debemos hacer uso del siguiente resultado

$$\begin{aligned}
u^i \delta_i(\vec{x}) T^j(\vec{y}, \gamma) &= T^j(\vec{y}, u_x \bullet \gamma) - T^j(\vec{y}, \gamma) \\
&= \int_{u_x \bullet \gamma} dx'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}') - \int_{\gamma} dx'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}') \\
&= \int_{u_x} dx'^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}') \\
&= u^i \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}')
\end{aligned}$$

implica

$$\delta_i(\vec{x}) T^j(\vec{y}, \gamma) = \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}') \tag{5.11}$$

Entonces, finalmente tenemos

$$\left[\frac{i}{e} \delta_i(\vec{x}), eT^j(\vec{y}, \gamma) \right] \Psi(\gamma) = i \delta_i^j \delta^3(\vec{x} - \vec{y}'), \tag{5.12}$$

por lo que concluimos que la realización escogida para los observables en el espacio de caminos en efecto satisface el álgebra.

Al realizar el cambio de variable, postulamos que los estados físicos debían satisfacer la siguiente ligadura:

$$(\partial_i C^i(\vec{x})) |\Psi\rangle = 0 \tag{5.13}$$

que realizándola sobre caminos podemos reescribir como

$$(e \partial_i T^i(\vec{x}, \gamma)) \Psi(\gamma) = 0 \tag{5.14}$$

A continuación observaremos que una elección adecuada de caminos nos permitirá satisfacer automáticamente el requisito impuesto sobre los estados físicos por la ligadura. Veamos qué resulta de desarrollar la ligadura en el espacio de caminos. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_i T^i(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma) &= \partial_i \int_{\gamma} dx^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Psi(\gamma) \\
&= - \int_{\gamma} dx^i \partial_{x^i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Psi(\gamma) \\
&= -\rho(\vec{x}, \gamma) \Psi(\gamma),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde se ha introducido

$$\rho(\vec{x}, \gamma) = \sum_s \left(\delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right). \tag{5.16}$$

El objeto $\rho(\vec{x}, \gamma)$ es una distribución con soporte en los extremos de los tramos de los caminos, distinguiendo mediante un signo si son inicio o final del tramo. β_s es el punto final del tramo y α_s el punto inicial.

Entonces la ecuación (5.14) nos queda de la siguiente manera

$$\left[-e \sum_s \left(\delta^3(\vec{x} - \vec{\beta}_s) - \delta^3(\vec{x} - \vec{\alpha}_s) \right) \right] \Psi(\gamma) = 0 \tag{5.17}$$

La ligadura se satisface automáticamente si escogemos caminos cerrados (ciclos), es decir, $\vec{\alpha}_s = \vec{\beta}_s$.

En la realización escogida, la evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = \hat{H} |\psi_t\rangle \tag{1.39}$$

con

$$\hat{H} = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} (eT^i(\vec{x}, \gamma) + E_{cp}^i)^2 - \frac{1}{4e^2} (\Delta_{ij}(\vec{x}) + eib_{ij}(\vec{x}))^2 \right] \tag{5.18}$$

Cuando $g=0$, $E_{cp}^i = 0$, y H se reduce al hamiltoniano del electromagnetismo libre en la representación de caminos.

Reescribiremos ahora el hamiltoniano en términos de funcionales de ciclo multivaluados. Consideremos

$$T^{ij}(\vec{x}, \Sigma) = \int d\Sigma_y^{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.19)$$

donde $d\Sigma_y^{ij}$ es el elemento superficial:

$$d\Sigma_y^{ij} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial s} \frac{\partial y^j}{\partial r} - \frac{\partial y^i}{\partial r} \frac{\partial y^j}{\partial s} \right) ds dr, \quad (5.20)$$

siendo s y r parámetros superficiales. Definimos un funcional que depende de superficies

$$\Psi_e[\Sigma] \equiv \exp\left(ie \int d\Sigma_y^{km} b_{km}(\vec{y})\right) \Psi_e[\gamma] \quad (5.21)$$

$$= \exp\left(\frac{ieg}{4\pi} \Omega(\Sigma)\right) \Psi_e[\gamma] \quad (5.22)$$

donde $\Omega(\Sigma)$ es el ángulo sólido subtendido por Σ , medido desde el monopolo. Podemos calcular la derivada superficial del factor de forma, es decir, ecuación (5.21), obteniendo

$$\delta_{ij}(\vec{x}) \Psi_e[\Sigma] = \exp\left(\frac{ieg}{4\pi} \Omega(\Sigma)\right) \left[\frac{ieg}{4\pi} \delta_{ij}(\vec{x}) \Omega(\Sigma) \Psi_e[\gamma] + \delta_{ij}(\vec{x}) \Psi_e[\gamma] \right], \quad (5.23)$$

ahora faltaría calcular $\delta_{ij} \Omega(\Sigma)$ que resulta

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(\vec{x}) \Omega(\Sigma) &= \delta_{ij}(\vec{x}) \left(\frac{4\pi}{g} \int d\Sigma_y^{km} b_{km}(\vec{y}) \right) \\ &= \frac{4\pi}{g} \int dy^3 \delta_{ij}(\vec{x}) T^{km}(\vec{y}, \Sigma) b_{km}(\vec{y}). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación (2.23) nos queda,

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(\vec{x}) \Omega(\Sigma) &= \frac{4\pi}{g} \int dy^3 \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^k) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) b_{km}(\vec{y}) \\ &= \frac{2\pi}{g} (b_{ij} - b_{ji})(\vec{x}) = \frac{4\pi}{g} b_{ij}(\vec{x}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ahora sustituimos el resultado anterior en la ecuación (5.21) y resulta

$$\delta_{ij}(\vec{x}) \Psi_e[\Sigma] = \exp\left(\frac{ieg}{4\pi}\Omega(\Sigma)\right) (ieb_{ij}(\vec{x}) + \Delta_{ij}(\vec{x})) \Psi_e[\gamma]. \quad (5.25)$$

Utilizando este resultado en (5.18), vemos que ahora la evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\Sigma, t] = \hat{H}\Psi[\Sigma, t] \quad (1.39)$$

con

$$\hat{H} = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} (eT^i(\vec{x}, \gamma) + E_{cp}^i)^2 - \frac{1}{4e^2} (\delta_{ij}(\vec{x}))^2 \right]. \quad (5.26)$$

Si no existiera la carga eléctrica, entonces $E_{carga\ puntual}^i = 0$ y nos quedaría el hamiltoniano del caso [12], que se parece a la ecuación de Schrödinger libre, excepto porque en lugar de funcionales que dependen de ciclos tenemos funcionales que dependen de superficies. Al igual que sucedía en el caso [12] la única propiedad de Σ que es relevante es el ángulo sólido subtendido desde el monopolo, entonces esta dependencia superficial es topológica. Si reemplazamos a Σ por otra superficie Σ' que tenga el mismo borde γ , el funcional de onda cambia como

$$\Psi[\Sigma'] = \exp(iegp) \Psi[\Sigma], \quad (5.27)$$

donde p es el número de veces que la superficie $S = \Sigma'$ o $(-\Sigma)$ (que resulta de la composición de Σ' y la superficie opuesta a Σ) encierra al monopolo. Podemos tomar la ecuación de Schrödinger de la Teoría de Maxwell con un monopolo externo y una carga eléctrica, como la que corresponde a la teoría libre (si no existiera la carga eléctrica), siempre y cuando las condiciones de borde no triviales nos lo permitan. Cada vez que la superficie encierre al monopolo la función de onda se multiplica por un factor de $\exp(iegp)$. Los funcionales de onda dependientes de ciclos pasan a ser multivaluados debido a la presencia del monopolo magnético, y la ecuación de Schrödinger es

$$i\partial_t \Psi [\gamma, t] = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} (eT^i(\vec{x}, \gamma) + E_{carga puntual}^i)^2 - \frac{1}{4e^2} (\Delta_{ij}(\vec{x}))^2 \right] \Psi [\gamma, t] \quad (5.28)$$

donde el funcional de onda multivaluado $\Psi [\gamma, t]$ obedece a las condiciones de borde

$$\Psi [[S] . \gamma] = \exp(iegp) \Psi [\gamma]. \quad (5.29)$$

En la ecuación anterior, $[S] . \gamma$ significa que el camino γ ha descrito una trayectoria cerrada barriendo la superficie S y envolviendo p veces al monopolo. Un punto en el conjunto es un ciclo, mientras que las curvas cerradas barridas por los ciclos serán superficies cerradas.

5.2 CASO DUAL

Propongamos ahora la siguiente realización “*dual*” en el espacio de funcionales dependientes de superficies

$$\hat{C}^i(\vec{x}) \longrightarrow -\frac{i}{g} \epsilon_{ijk} \delta_{jk}(\vec{x}) \quad (5.30)$$

$$\hat{A}_i(\vec{x}) \longrightarrow g \epsilon_{ijk} T^{jk}(\vec{x}, \Sigma) \quad (5.31)$$

Comprobemos si la realización cumple con el álgebra de los observables

$$\begin{aligned} & \left[g \epsilon_{ilm} T^{lm}(\vec{x}, \Sigma), -\frac{i}{g} \epsilon_{jkr} \delta_{kr}(\vec{y}) \right] \Psi(\gamma) = -i \left[\epsilon_{ilm} T^{lm}(\vec{x}, \Sigma), \epsilon_{jkr} \delta_{kr}(\vec{y}) \right] \Psi(\gamma) \\ & = -i \left(\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkr} T^{lm}(\vec{x}, \Sigma) (\delta_{kr}(\vec{y}) \Psi(\gamma)) - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkr} \delta_{kr}(\vec{y}) (T^{lm}(\vec{x}, \Sigma) \Psi(\gamma)) \right) \\ & = -i \left(\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkr} (\delta_{kr}(\vec{y}) T^{lm}(\vec{x}, \Sigma)) \Psi(\gamma) \right) = -i \left(\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkr} \frac{1}{2} (\delta_l^k \delta_m^r - \delta_m^k \delta_l^r) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \right) \\ & = \delta_j^i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

es decir, se cumple el álgebra de los operadores para esta realización.

Ahora desarrollaremos la ligadura de Gauss para esta nueva realización. La ecuación (5.13) queda

$$-\frac{i}{g}\epsilon_{ijk}\partial_i\delta_{jk}(\vec{x})\Psi(\Sigma) = 0. \quad (5.33)$$

Esta ecuación nos dice que en realidad el funcional $\Psi(\Sigma)$ sólo depende del borde $\partial\Sigma$. Por lo tanto, la derivada δ_{ij} se convierte en una derivada de ciclo Δ_{ij} .

La evolución de los estados físicos viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\partial\Sigma, t] = \hat{H}\Psi[\partial\Sigma, t] \quad (1.39)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int dx^3 & \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{g}\epsilon_{ijk}\Delta_{jk}(\vec{x}) + E_{cp}^i(x) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\partial_i(g\epsilon_{jrs}T^{rs}(\vec{x}, \Sigma)) - \partial_j(g\epsilon_{ilm}T^{lm}(\vec{x}, \Sigma)) - b_{ij} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Uno puede simplificar más si calculamos

$$\epsilon^{pij}\partial_i A_j = \epsilon^{pij}\partial_i\epsilon_{jrs}T^{rs} = (\delta_r^p\delta_s^i - \delta_s^p\delta_r^i)\partial_i T^{rs} = \partial_i T^{pi} - \partial_i T^{ip} = 2\partial_i T^{pi}, \quad (5.35)$$

de igual manera se calcula el otro término

$$\epsilon^{pij}\partial_j A_i = \epsilon^{pij}\partial_j\epsilon_{ilm}T^{lm} = (\delta_m^p\delta_l^j - \delta_l^p\delta_m^j)\partial_j T^{lm} = \partial_j T^{jp} - \partial_j T^{pj} = -2\partial_j T^{pj}. \quad (5.36)$$

Si tomamos en cuenta que la derivada del factor de forma superficial es:

$$\partial_j T^{pj}(\Sigma) = T^p(\partial\Sigma), \quad (5.37)$$

es decir, depende del factor de forma del borde de la superficie, la ecuación (5.34) nos queda

$$i\partial_t\Psi[\partial\Sigma, t] = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{g}\epsilon_{ijk}\Delta_{jk}(\vec{x}) + E_{cp}^i(x) \right)^2 + (2gT^p(\partial\Sigma) - b_p^*)^2 \right] \Psi[\partial\Sigma, t] \quad (5.38)$$

Podemos absorber el término E_{cp}^i si definimos un nuevo funcional que depende de superficies

$$\Psi_m [\Sigma] \equiv \exp \left(-\frac{ig}{2} \int dx^3 T^{km} (\vec{x}, \Sigma) * E_{km} (\vec{y}) \right) \Psi_m [\partial\Sigma] = \exp (X) \Psi_m [\partial\Sigma]. \quad (5.39)$$

En efecto, si procedemos a calcular la derivada de superficie de este nuevo funcional se tiene

$$\begin{aligned} \delta_{ij} (\vec{x}) \Psi_m [\Sigma] &= \exp (X) \left[\frac{ig}{2} \left(\int dy^3 \delta_{ij} (\vec{x}) T^{km} (\vec{y}, \Sigma) * E_{km} (\vec{y}) \right) \Psi_m [\gamma] + \delta_{ij} (\vec{x}) \Psi_m [\gamma] \right], \\ &= \exp (X) \left[\left(\frac{ig}{2} \int dy^3 \frac{1}{2} (\delta_k^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_k^j) \delta^{(3)} (\vec{x} - \vec{y}) * E_{km} (\vec{y}) \right) \Psi_m [\gamma] + \delta_{ij} (\vec{x}) \Psi_m [\gamma] \right] \\ &= \exp (X) \left[\left(\frac{ig}{2} * E_{ij} \right) + \delta_{ij} (\vec{x}) \right] \Psi_m [\gamma] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Recordando que sobre funcionales de ciclo $\delta_{ij} (\vec{x}) = \Delta_{ij} (\vec{x})$, obtenemos

$$\delta_{ij} (\vec{x}) \Psi_m [\Sigma] = \exp (X) \left[\left(\frac{ig}{2} * E_{ij} (\vec{x}) \right) + \Delta_{ij} (\vec{x}) \right] \Psi_m [\gamma] \quad (5.41)$$

Así pues en la ecuación (5.38) podemos hacer el reemplazo

$$\left(-\frac{i}{g} \epsilon_{ijk} \Delta_{ij} (\vec{x}) + E_{cp}^i (\vec{x}) \right) \Psi_m [\Sigma] = -\frac{i}{g} \epsilon_{ijk} \delta_{ij} (\vec{x}) \Psi_m [\Sigma], \quad (5.43)$$

con lo cual la ecuación (5.38) queda expresada de la siguiente manera

$$i\partial_t \Psi_m [\Sigma, t] = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{g} \epsilon_{ijk} \delta_{ij} (\vec{x}) \right)^2 + (2gT^p - b_p^*)^2 \right] \Psi_m [\Sigma, t] \quad (5.44)$$

Logramos así que desapareciera del hamiltoniano el elemento que dependía de la carga eléctrica. Y al igual que en el caso anterior, el argumento del factor de fase sólo depende topológicamente de Σ . Si reemplazáramos Σ por otra superficie Σ' que tenga el mismo borde γ , el funcional de onda cambia como

$$\Psi [\Sigma'] = \exp (iegp) \Psi [\Sigma], \quad (5.45)$$

donde p es el número de veces que la superficie $S = \Sigma'$ o $(-\Sigma)$ encierra a la carga eléctrica. Igual que en la realización directa cada vez que la superficie encierre a la carga eléctrica la función de onda toma el valor de $\exp(iegp)$. Los funcionales de onda dependientes de ciclos empiezan a ser multivaluados y la ecuación de Schrödinger queda

$$i\partial_t \Psi [\gamma, t] = \int dx^3 \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{i}{g} \epsilon_{ijk} \Delta_{ij} (\vec{x}) \right)^2 + (2gT^p - b_p^*)^2 \right] \Psi [\gamma, t] \quad (5.46)$$

donde el funcional de onda $\Psi [\partial\Sigma, t]$ obedece las condiciones de borde (ecuación (5.45)).

Conclusiones

En este trabajo se realizó la formulación canónica del electromagnetismo con una carga eléctrica y otra magnética, estáticas ambas, a partir de la acción de Schwinger, y siguiendo los lineamientos de las referencias [12, 13].

Se vió que es posible establecer dos representaciones de ciclo “duales”: una “directa”, en la cual los ciclos son líneas de campo eléctrico, y el operador de campo magnético actúa derivando, y otra “dual”, en la que se intercambian los roles de los campos eléctrico y magnético.

En ambos, puede “ocultarse” la presencia de la carga eléctrica (o la magnética) del hamiltoniano (o la ligadura de Gauss) a cambio de admitir funcionales de onda dependientes de ciclo, que sean multivaluados. La dualidad electricidad-magnetismo de la teoría queda puesta en evidencia también en la geometría de las dos representaciones de ciclos.

De igual forma que sucedía en el caso [12, 13] la única propiedad de Σ que es importante es el ángulo sólido subtendido desde el monopolo o desde la carga eléctrica. Entonces podemos reemplazar a Σ por otra superficie Σ' que tenga el mismo borde γ , por lo tanto el funcional de onda cambia como

$$\Psi [\Sigma'] = \exp (iegp) \Psi (\Sigma)$$

donde p en el caso directo es el número de veces que la superficie $S=\Sigma'$ o $(-\Sigma)$ encierra al monopolo y para el caso dual es el número de veces que la superficie S encierra a la carga eléctrica.

Sería interesante considerar el caso general: cargas eléctricas y magnéticas dinámicas y estudiar allí cómo se traducen los resultados que se muestran en este trabajo. Una propuesta más ambiciosa pero en principio factible también, sería el considerar el acoplamiento de campos cargados (eléctrica y magnéticamente) con el de, Maxwell, y realizar la cuantización canónica siguiendo las líneas aquí descrita.

Bibliografía

- [1]P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Springer, 1996
- [2]Camacaro Jaime. Algunas aplicaciones del método de cuantización de Dirac. T.E.G., *Universidad Central de Venezuela*, Caracas, Venezuela., Abril 1995.
- [3]Martinez Yisely. Observables topológicos en teorías no topológicas. T.E.G., *Universidad Central de Venezuela*, Caracas, Venezuela., Mayo 2006.
- [4]Prof. Lorenzo Leal. Notas de representaciones geométricas. *Universidad Central de Venezuela*, Caracas, Venezuela. Noviembre 2010.
- [5]C. Di Bartolo, F. Nori, R. Gambini and A. Trías. Lett Nuov. Cim. 38, 497 (1983)
- [6]Zapata Oswaldo. Formulación de caminos de la teoría topologicamente masiva abeliana. T.E.G., *Universidad Central de Venezuela*, Caracas, Venezuela., Julio 1999.
- [7]P.A.M. Dirac. Proc. Roy. Soc. Lond. A 113, 60, (1931)
- [8]P.A.M. Dirac. Phys. Rev. 74, 317, (1948)
- [9]J. Schwinger, Phys. Rev. D12, 3105, (1975)
- [10]J.D. Jackson. Classical Electrodynamics. Wiley, 3rd edition, 1998.
- [11]Olive David. Nucl.Phys.Proc.Suppl. 45A (1996) 88-102; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 46 (1996).
- [12]L. Leal and A. López, Journ. Math.Phys 47,1, 230601 (2005).
- [13]L. Leal. Modern Physics Letters A, Volume 25, Issue 31, pp. 2677-2682 (2010).
- [14]P.J. Arias, E. Fuenmayor and L. Leal. Phys. Rev. D 69, 125010 (2004).