

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ESTUDIO PARAMÉTRICO DE PLACAS SOBRE FUNDACIÓN ELÁSTICA

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br.:
De Veer Martínez, Félix Johannes
Para optar al Título de
Ingeniero Civil

Caracas, 2012

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

ESTUDIO PARAMÉTRICO DE PLACAS SOBRE FUNDACIÓN ELÁSTICA

Tutor Académico: Prof. José Manuel Velásquez

Presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Por el Br.:
De Veer Martínez, Félix Johannes
Para optar al Título de
Ingeniero Civil

Caracas, 2012

A mis padres, Inés Martínez y John De Veer, por ser los ingenieros que edificaron todo lo que soy. Por haber sido el pilar de toda mi educación, tanto académica, como moral.

A mi abuela Lola por haber sembrado en mí la importancia de trabajar por un logro personal y por ser mi gran referencia de vida.

A mi hermano John por su incondicional apoyo a través del tiempo.

Este y todos mis logros han sido posibles gracias a ellos.

AGRADECIMIENTOS

Es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con las personas e instituciones que han facilitado las cosas para que este trabajo llegue a un feliz término, expresándoles mis agradecimientos.

Quiero extender mi agradecimiento a la Universidad Central de Venezuela y a todos aquellos educadores que han sido partícipes de mi formación profesional. La ardua labor que realizan bajo condiciones adversas no es en vano y siempre será recordada por aquellos que nos sentimos orgullosos de lograr una carrera profesional en esta ilustre institución educativa.

De manera especial agradezco a Andrea Rivas, mi compañera y amiga. Quien con mucho amor y paciencia me ha acompañado incondicionalmente en gran parte de este trayecto. Gracias por creer en mí y ser un motivo de superación.

Mi más sincero agradecimiento a mi familia. Sin su apoyo y guía hubiera sido imposible lograr esta dura meta. Especialmente a mi madre Inés y a mi padre John quien para mí define en su totalidad lo que un gran ingeniero debe ser.

Para mis amigos; especialmente Emilio, Roger, Tulio, María, Mariajosé, Carla y Luisa. El camino que hemos recorrido hubiese sido mucho más complicado sin nuestra amistad y trabajo en equipo.

A la ACI por haberme otorgado una licencia digital de estudiante, que me permitió el acceso a mucha de la información que sustenta este Trabajo.

Por último, quiero agradecer al profesorado que sirvió de guía y apoyo para el desarrollo de este Trabajo. Al Ing. Eliud Hernandez y muy especialmente a mi tutor de tesis Ing. José Manuel Velásquez; su apoyo y confianza en mi Trabajo y su capacidad para guiar mis ideas han sido aportes incalculables para el desarrollo de esta tesis y mi formación profesional.

De Veer M., Félix J.

**ESTUDIO PARAMÉTRICO DE PLACAS
SOBRE FUNDACIÓN ELÁSTICA**

Tutor Académico: Prof. José Manuel Velásquez

Trabajo Especial de Grado. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería.

Escuela de Ingeniería Civil. 2012, 130 págs.

Palabras Clave: fundación, placa, losa, cimentación, elástica, estructuras, platea, elementos finitos.

El análisis estructural de placas de cimentación sobre fundación elástica involucra un gran número de variables que hace muy complicado desarrollar modelos analíticos que las consideren todas. Es por ello que se han desarrollado métodos que hacen posible el estudio de las plateas de forma viable. Tal es el caso del método simplificado (Hetenyi, 1966) y el de análisis por elementos finitos.

La comprensión del comportamiento verdadero de una losa de fundación es esencial para asegurar economía y seguridad en el diseño de estos elementos.

Por lo antes mencionado es fundamental el conocimiento de la influencia de las variables involucradas en el proceso de análisis estructural de placas sobre fundación elástica. Esto permite al ingeniero definir con fundamento técnico cómo obtener los parámetros asociados al proceso.

Es por ello que, en el marco de este Trabajo Especial de Grado, se realizó un estudio paramétrico de placas sobre fundación elástica para así conseguir patrones de influencia de las variables en las sollicitaciones obtenidas en el

proceso de análisis. Específicamente para el método simplificado (Hetenyi, 1966) y de análisis por elementos finitos (mediante un programa informatizado).

Para tal fin se realizaron análisis estructurales iterativos de plateas mediante la variación de un parámetro mientras los otros se fijaron en un valor coherente. Este proceso se realizó para todas las variables que fueron objeto de estudio.

Además, se cotejaron los resultados obtenidos por cada metodología para así evidenciar las discrepancias y/o similitudes entre ellas.

INDICE GENERAL

CAPÍTULO I	1
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	2
1.3. OBJETIVOS	4
General	4
Específicos	4
1.4. APORTES	5
CAPÍTULO II	6
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. Variables Involucradas	6
2.1.1. Tipo de suelo inmediatamente inferior a la fundación	6
2.1.2. Rigidez de la fundación	8
2.1.3. Magnitud de cargas	9
2.2. Métodos de Estudio	10
2.2.1. Método Simplificado	10
2.2.2. Método de Análisis por elementos finitos	17
2.3. Punzonado en la losa de cimentación	21
2.3. Desviación estándar	23
CAPÍTULO III	24
3. MÉTODO	24
3.1. Recopilación y catalogación de información	24
3.2. Selección de las variables de estudio	25
3.3. Consideraciones limitantes en el proyecto	25
3.4. Definición de las características generales de las losas de fundación	28
3.4.1. Materiales	28
3.4.2. Dimensiones	29
3.5. Definición de los parámetros de cuantificación de resultados	29
3.6. Estudio paramétrico de las variables	30
3.6.1. Método Simplificado	30
3.6.2. Método de Análisis por Elementos Finitos	32
3.7. Identificación de patrones de influencia de las variables en ambos métodos	37
3.8. Comparación de los patrones de influencia obtenidos para ambos métodos	37
CAPÍTULO IV	38
4. RESULTADOS Y ANÁLISIS	38

4.1. Método de Análisis por Elementos Finitos _____	39
4.1.1. Momentos radiales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa _____	39
4.1.2. Momentos tangenciales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa _____	46
4.1.3. Momentos radiales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa _____	51
4.1.4. Momentos tangenciales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa _____	56
4.1.5. Magnitudes de deflexión máxima en función de espesores, cargas y módulos de balasto ____	60
4.2. Método Simplificado _____	61
4.2.1. Momentos radiales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa _____	63
4.2.2. Momentos tangenciales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa _____	68
4.2.3. Momentos radiales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa _____	73
4.2.4. Momentos tangenciales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa _____	77
4.2.5. Diferencia de magnitudes de deflexión máxima en función de espesores, cargas y módulos de balasto _____	80
4.3. Comparación entre Método Simplificado y Método de Análisis por Elementos Finitos _____	81
4.3.1. Diferencia de magnitudes de momentos radiales en función del radio _____	81
4.3.2. Diferencia de magnitudes de momentos tangenciales en función del radio _____	85
4.3.3. Diferencia de magnitudes de momentos en función del módulo de balasto _____	88
4.3.4. Porcentaje de variación de momentos entre métodos en función de múltiplos de radio de rigidez efectiva _____	91
4.3.5. Diferencia de magnitudes de deflexión máxima entre ambos métodos en función de espesores, cargas y módulos de balasto _____	93
4.4. Aportes adicionales: Estudio de losas semi-infinitas por ambos métodos _____	94
4.4.1. Carga en borde _____	95
4.4.1. Carga en esquina _____	98
CAPÍTULO V _____	104
5.1. CONCLUSIONES _____	104
5.1.1. Estudio de losas infinitas _____	104
5.1.1. Estudio de losas semi-infinitas _____	106
5.2. RECOMENDACIONES _____	107
6. REFERENCIAS _____	109
7. APÉNDICES _____	111
7.1. Funciones Z y sus derivadas _____	111
7.2. Tablas tipo de manejo de datos _____	120
7.3. Cálculos tipo _____	128
7.4. Hoja de cálculo Mathcad® en digital de funciones Z y dZ _____	130

LISTA DE TABLAS

Tabla Nº 3.1. Rango de evaluación de cargas en losas _____	26
Tabla Nº 4.1 Valores de momentos radiales mínimos para distintos módulos de balasto y desviaciones estándar de los mismos _____	43
Tabla Nº 4.2. Valores de momentos radiales mínimos para distintos módulos de balasto y desviaciones estándar de los mismos _____	67
Tabla Nº 7.1. Ábaco de funciones Z1, Z2, Z3, Z4 y sus derivadas _____	119
Tabla Nº 7.2. Ejemplo de tabla de manejo de data exportada y depurada de SAFE® ____	120
Tabla Nº 7.3. Ejemplo de hoja de cálculo de solicitaciones del método simplificado ____	121
Tabla Nº 7.4. Radios de rigidez efectiva en función de espesores y módulos de balasto	122
Tabla Nº 7.5. Ejemplo de hoja de cálculo de porcentaje de variación de momentos entre métodos _____	123
Tabla Nº 7.6. Ejemplo de hoja de cálculo de diferencia de momentos obtenidos por métodos _____	124
Tabla Nº 7.7. Hoja de cálculo de deflexión máxima en el método simplificado _____	125
Tabla Nº 7.8. Hoja de cálculo de diferencia de deflexiones máximas entre métodos ____	125
Tabla Nº 7.9. Hoja de cálculo de diferencias de momentos entre métodos para un radio específico _____	126
Tabla Nº 7.10. Hoja de cálculo de momentos a 1m y 2m de borde para ambos métodos _____	126
Tabla Nº 7.11. Hoja de cálculo de momentos a 1m y 2m de esquina para ambos métodos _____	127

LISTA DE GRÁFICAS Y FIGURAS

Figura N° 2.1. Analogía de momentos tangenciales y radiales con momentos M_{11} y M_{22} _____	19
Figura N° 2.2. Grid o Malla del programa SAFE® _____	20
Figura N°3.1. Dimensiones de columna usadas en el cálculo del punzonado (vista en planta) _____	27
Figura N° 3.2. Series F_i , series R y funciones Z obtenidas mediante hoja de cálculo de Mathcad® _____	31
Figura N° 3.3. Ejemplo aplicación de carga puntual sobre una losa en el programa SAFE® _____	33
Figura N° 3.4. Deformada de losa sometida a la acción de una carga puntual en su centro _____	34
Figura N° 3.5. Deflexión máxima de losa arrojada por el programa informatizado SAFE® _____	35
Figura N° 3.6. Ejemplo de aplicación carga puntual en borde sobre una losa en el programa SAFE® _____	36
Gráfica N° 4.1.1. Momento radial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm _____	39
Gráfica N° 4.1.2. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm _____	40
Gráfica N° 4.1.3. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm _____	40
Gráfica N° 4.1.4. Momento radial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm _____	41
Gráfica N° 4.1.5. Momento radial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm _____	41
Gráfica N° 4.1.6. Momento radial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm _____	42

Gráfica Nº 4.1.7. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	42
Figura Nº 4.1 <i>Definición de zonas de comportamiento uniforme en gráficas de M_r</i>	43
Gráfica Nº 4.1.8. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	46
Gráfica Nº 4.1.9. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	47
Gráfica Nº 4.1.10. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	47
Gráfica Nº 4.1.11. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	48
Gráfica Nº 4.1.12. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	48
Gráfica Nº 4.1.13. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	49
Gráfica Nº 4.1.14. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	49
Gráfica Nº 4.1.15. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25$ Ton, $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	51
Gráfica Nº 4.1.16. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50$ Ton, $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	52
Gráfica Nº 4.1.17. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100$ Ton, $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	52
Gráfica Nº 4.1.18. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	53
Gráfica Nº 4.1.19. <i>Comprobación de disipación de momentos radiales considerando el criterio del 5% de M_r máximo</i>	53
Gráfica Nº 4.1.20. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25$ Ton, $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	56

Gráfica Nº 4.1.21. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50\text{Ton}$, $P=75\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=50\text{ cm}$</i>	57
Gráfica Nº 4.1.22. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100\text{ Ton}$, $P=150\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=75\text{ cm}$</i>	57
Gráfica Nº 4.1.23. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=100\text{ cm}$</i>	58
Gráfica Nº 4.1.24. <i>Comprobación de disipación de momentos radiales considerando el criterio del 5% de M_t máximo</i>	58
Gráfica Nº 4.1.25. <i>Magnitudes de deflexión máxima vs. módulos de balasto, espesores y cargas</i>	60
Gráfica Nº 4.2.1. <i>Radio de rigidez efectiva vs. espesor de losa vs. módulo de reacción del suelo 3D</i>	61
Gráfica Nº 4.2.2. <i>Radio de rigidez efectiva vs. espesor de losa vs. módulo de reacción del suelo 2D</i>	62
Gráfica Nº 4.2.3. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=25\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$</i>	63
Gráfica Nº 4.2.4. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$</i>	64
Gráfica Nº 4.2.5. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=50\text{ cm}$</i>	64
Gráfica Nº 4.2.6. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=75\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=50\text{ cm}$</i>	65
Gráfica Nº 4.2.7. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=100\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=75\text{ cm}$</i>	65
Gráfica Nº 4.2.8. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=150\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=75\text{ cm}$</i>	66
Gráfica Nº 4.2.9. <i>Momento radial vs. Radio para una carga $P=200\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=100\text{ cm}$</i>	66
Gráfica Nº 4.2.10. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=25\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$</i>	68

Gráfica Nº 4.2.11. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	69
Gráfica Nº 4.2.12. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	69
Gráfica Nº 4.2.13. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	70
Gráfica Nº 4.2.14. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	70
Gráfica Nº 4.2.15. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	71
Gráfica Nº 4.2.16. <i>Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	71
Gráfica Nº 4.2.17. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25$ Ton, $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	73
Gráfica Nº 4.2.18. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50$ Ton, $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	74
Gráfica Nº 4.2.19. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100$ Ton, $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	74
Gráfica Nº 4.2.20. <i>Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	75
Gráfica Nº 4.2.21. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para cargas $P=25$ Ton, $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm</i>	77
Gráfica Nº 4.2.22. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50$ Ton, $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm</i>	78
Gráfica Nº 4.2.23. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100$ Ton, $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm</i>	78
Gráfica Nº 4.2.24. <i>Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm</i>	79
Gráfica Nº 4.2.25. <i>Diferencia de magnitudes de deflexión máxima vs. módulos de balasto, espesores y cargas</i>	80

Gráfica Nº 4.3.1. <i>Diferencia de magnitudes de momento radial entre métodos vs. radio para $e=30\text{cm}$, $k=1\text{kg/cm}^3$ y $P=25\text{ Ton}$</i>	81
Gráfica Nº 4.3.2. <i>Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=50\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=50\text{ Ton}$</i>	82
Gráfica Nº 4.3.3. <i>Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=75\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=100\text{ Ton}$</i>	82
Gráfica Nº 4.3.4. <i>Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=100\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=200\text{ Ton}$</i>	83
Gráfica Nº 4.3.5. <i>Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=30\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=25\text{ Ton}$</i>	85
Gráfica Nº 4.3.6. <i>Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=50\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=50\text{ Ton}$</i>	86
Gráfica Nº 4.3.7. <i>Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=75\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=100\text{ Ton}$</i>	86
Gráfica Nº 4.3.8. <i>Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=100\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=200\text{ Ton}$</i>	87
Gráfica Nº 4.3.9. <i>Diferencia de magnitudes de momentos vs.módulo de balasto para un radio $r=25\text{cm}$, $e=30\text{ cm}$ y $P=25\text{ Ton}$</i>	88
Gráfica Nº 4.3.10. <i>Diferencia de magnitudes de momentos vs.módulo de balasto para un radio $r=50\text{ cm}$, $e=30\text{ cm}$ y $P=25\text{ Ton}$</i>	89
Gráfica Nº 4.3.11. <i>Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs.módulo de balasto para un radio $r=300\text{ cm}$, $e=30\text{ cm}$ y $P=25\text{ Ton}$</i>	89
Gráfica Nº 4.3.12. <i>Porcentaje de variación de momentos entre métodos en función de los múltiplos de L</i>	91
Gráfica Nº 4.3.13. <i>Diferencia de magnitudes de deflexión máxima vs.módulos de balasto, espesores y cargas</i>	93
Gráfica Nº 4.4.1. <i>Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=30\text{ cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y carga $P=25\text{ Ton}$ a 1 m de borde</i>	95
Gráfica Nº 4.4.2. <i>Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=30\text{ cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y carga $P=25\text{ Ton}$ a 2 m de borde</i>	96

Gráfica Nº 4.4.3. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=50$ cm, $k=1$ kg/cm ³ y carga $P=50$ Ton a 1 m de borde _____	96
Gráfica Nº 4.4.4. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=50$ cm, $k=1$ kg/cm ³ y carga $P=50$ Ton a 2 m de borde _____	97
Gráfica Nº 4.4.5. Momentos en función del radio y k en losa semi-infinita de $e=30$ cm y carga $P=25$ Ton a 1 m de esquina _____	98
Gráfica Nº 4.4.6. Momentos en función del radio y k en losa semi-infinita de $e=30$ cm y carga $P=25$ Ton a 2 m de esquina _____	99
Gráfica Nº 4.4.7. Momentos en función del radio y cargas en losa semi-infinita de $e=30$ cm, $k=1$ kg/cm ³ y P a 1 m de esquina _____	100
Gráfica Nº 4.4.8. Momentos en función del radio y cargas en losa semi-infinita de $e=30$ cm, $k=1$ kg/cm ³ y P a 2 m de esquina _____	100
Gráfica Nº 4.4.9. Momentos en función del radio y espesores en losa semi-infinita de $k=1$ kg/cm ³ y $P=75$ Ton a 1 m de esquina _____	102
Gráfica Nº 4.4.10. Momentos en función del radio y espesores en losa semi-infinita de $k=1$ kg/cm ³ y $P=75$ Ton a 2 m de esquina _____	102
Gráfica Nº 7.1. Funciones $Z1$, $Z2$ y sus derivadas _____	111
Gráfica Nº 7.2. Funciones $Z3$, $Z4$ y sus derivadas _____	112
Figura Nº 7.3. Derivada de función $Z1$ obtenida para un $x=0.446$ en el programa Mathcad® _____	128
Figura Nº 7.4. Derivada de función $Z1$ obtenida para un $x=0.446$ en el programa Mathcad® _____	128
Figura Nº 7.5. Derivada de función $Z3$ obtenida para un $x=0.446$ en el programa Mathcad® _____	129
Figura Nº 7.6. Derivada de función $Z4$ obtenida para un $x=0.446$ en el programa Mathcad® _____	129

NOTA: Todas las gráficas y figuras presentadas en este Trabajo Especial de Grado son de elaboración propia.

LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS

SÍMBOLO	SIGNIFICADO	UNIDAD
bo	ancho de franja de estudio en el punzonado	cm
d	altura útil de una placa	cm
D	rigidez a flexión de una placa	kg*cm
dZ1, dZ2, dZ3, dZ4	derivadas de las funciones Z del Método Simplificado	adimensional
e	espesor de placa	cm
Ec	módulo de elasticidad del concreto	kg/cm ²
f'c	resistencia del concreto a compresión a los 28 días	kg/cm ²
h	altura de una sección	cm
I	momento inercia	cm ⁴
k	módulo de reacción del suelo / módulo de balasto	kg/cm ³
ks	módulo de reacción del suelo por ancho de longitud unitaria	kg/cm ²
L	radio de rigidez efectiva	cm
Mr	momento radial	kg*m
Mt	momento tangencial	kg*m
Mx	momento alrededor de un eje cartesiano "X" definido	kg*m
My	momento alrededor de un eje cartesiano "Y" definido	kg*m
M11	momento alrededor del eje local "1" de un elemento en el programa SAFE	kg*m
M22	momento alrededor del eje local "2" de un elemento en el programa SAFE	kg*m
P	carga puntual	kg
p	presión	kg/cm ²
Q	corte	kg
S	desviación estándar	unidades data
r	radio desde el punto de aplicación de carga	cm
rc	recubrimiento de cálculo del acero	cm
Vc	corte del concreto	kg
x	cociente de r/L	adimensional
yo	deflexión máxima de placa	cm
Z1, Z2, Z3, Z4	funciones Z del Método Simplificado	adimensional
α	factor de posición de columnas	adimensional
β	factor de forma de columnas	adimensional
λ	longitud característica de viga	cm ⁻¹
σult	capacidad de carga última de suelo	kg/cm ²
μ	coeficiente de Poisson	adimensional

ABREVIATURA	SIGNIFICADO
ACI	American Concrete Institute
COVENIN	Comisión Venezolana de Normas Industriales
AEF	Análisis por Elementos Finitos

CAPÍTULO I

1.1. INTRODUCCIÓN

Las losas de fundación son un tipo de cimentación de uso común en proyectos estructurales de distinta índole. A pesar de ser elementos que pueden considerarse geoméricamente sencillos, involucran procesos de interacción con el suelo que resultan complejos de modelar y predecir de forma sencilla.

Han sido desarrolladas metodologías que permiten dicha aproximación al comportamiento estructural de las placas sobre fundación elástica. El método de Análisis por Elementos Finitos y el Método Simplificado son ejemplos de esto.

Existe un número relativamente reducido de parámetros a considerar en dichos métodos. Tales como variables geotécnicas, geométricas y de magnitud de cargas. Sin embargo, la comprensión del comportamiento verídico de dichos elementos es fundamental para asegurar economía y seguridad en el diseño.

Es por ello que, el conocimiento de la influencia de los parámetros mencionados en el análisis estructural, es esencial para asegurar el diseño óptimo; es decir, el menos costoso sin que esto implique una acción en detrimento de la seguridad.

El presente Trabajo Especial de Grado busca investigar la respuesta de las placas, en términos de solicitaciones, ante la variación de parámetros geotécnicos, geométricos y de magnitud de cargas. Para ello se realizó un estudio paramétrico mediante el programa informatizado de AEF SAFE® v.12 y el Método Simplificado. La investigación se hizo para cargas puntuales en losas infinitas y semi-infinitas.

Además, se realizó una comparación entre dichos métodos, para de esta forma evidenciar posibles discrepancias entre ellos.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Ocasionalmente, en el análisis estructural de elementos de concreto armado, se hacen suposiciones para la obtención de las solicitaciones simplificando procesos que son muy complicados de evaluar. Esto permite el avance de un proyecto estructural de forma mucho más rápida que al intentar considerar en su totalidad las condiciones reales que actúan sobre el elemento.

Esto sucede con el cálculo estructural de las losas sobre fundación elástica o plateas, en las que al considerarse la elasticidad del elemento se crea una interacción suelo-placa que es muy compleja de predecir.

Es por ello que en este ámbito se hacen dichas suposiciones y se hace uso de fórmulas simplificadas a través de metodologías que facilitan operaciones infinitesimales. Con esto se logra predecir un comportamiento muy complicado mediante una aproximación sencilla.

Por otra parte, los programas informatizados de elementos finitos disponibles para este uso, hacen un análisis exhaustivo del comportamiento de las estructuras y modelan la reacción elástica del suelo mediante resortes. Este método analiza la estructura mediante el ensamblaje de un conjunto finito de elementos y los desplazamientos de sus nodos. Con ello se convierte un problema continuo en uno discreto y esto comúnmente requiere numerosos cálculos. No obstante, dichos cómputos son realizados sin mayor inconveniente gracias a los avances logrados en la informática.

El proceso de análisis y diseño estructural de placas sobre fundación elástica desarrollado por ambas metodologías posee variables que influyen en los resultados obtenidos.

Estas variables suelen obtenerse con cierta incertidumbre y mientras más precisa es la obtención de las mismas, más tiempo es requerido para ello. A su vez esto implicará el avance más lento del proyecto con todas las consecuencias que ello acarrea.

Aún más importante, el conocimiento del grado de influencia de las variables permite el desarrollo de criterio técnico para el análisis y diseño estructural de plateas de forma coherente, económica y segura.

Por lo antes mencionado, surge la necesidad de identificar patrones de influencia en el análisis estructural de placas sobre fundación elástica. De esta forma es posible conocer cuáles de estos factores afectan en mayor o menor medida los resultados obtenidos a través de las dos metodologías comentadas y con ello decidir cuán exhaustiva debe ser la obtención de las mismas.

En el marco de este Trabajo Especial de Grado se realizó un estudio paramétrico de variables involucradas en los resultados del proceso de análisis estructural de placas sobre fundación elástica al utilizar el método simplificado y el de análisis por elementos finitos.

De igual forma, se contrastaron los patrones de influencia obtenidos por ambas metodologías para de esta manera evidenciar posibles discrepancias entre las solicitaciones obtenidas de ellas.

1.3. OBJETIVOS

General

Analizar la influencia de variables geométricas, geotécnicas y de magnitud de cargas en el cálculo estructural de placas sobre fundación elástica mediante un método simplificado y uno de análisis por elementos finitos.

Específicos

1) Definir un esquema de cálculo estructural simplificado de placas de fundación.

2) Escoger las variables geométricas, geotécnicas y de magnitud de cargas que serán objeto de estudio en el trabajo.

3) Detectar patrones de influencia de las variables estudiadas mediante el cálculo estructural de placas de fundación por una metodología simplificada y de análisis por elementos finitos.

4) Contrastar la influencia de las variables estudiadas por el método simplificado y de análisis por elementos finitos.

1.4. APORTES

Este Trabajo Especial de Grado aportó al tesista un amplio conocimiento acerca del proceso de análisis y diseño estructural de placas sobre fundación elástica, tanto por el método simplificado como por el de análisis por elementos finitos. A su vez se logró el aprendizaje del programa informatizado de análisis por elementos finitos SAFE® v.12.

Se generó un ábaco de funciones Z y sus derivadas para valores más discretos que los expresados por Hetenyi (1946) y al que todas las bibliografías consultadas del método simplificado hacen referencia. Esto reduce el error asociado a la interpolación entre valores del ábaco. Además, se anexa en este Trabajo de forma digital una hoja de cálculo de Mathcad® que permite la obtención exacta de dichas funciones y derivadas de ellas eliminando por completo el error comentado.

Al haber identificado el grado de influencia de las variables estudiadas, se definió cuáles de éstas deben ser obtenidas con mayor o menor precisión para los procesos de análisis y diseño de placas de fundación y así aproximarse de forma mas práctica y segura a las condiciones verídicas del comportamiento estructural del elemento.

De igual forma, se pudieron cotejar los resultados obtenidos por el método simplificado y el de análisis por elementos finitos en losas de fundación. Esto permitió reconocer si existe una discrepancia significativa entre dichas metodologías. Con esta información el lector puede generar criterio técnico para considerar la validez de los métodos aplicados.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

La información presentada en este marco conceptual se compone de la definición de las variables involucradas, de los métodos de estudio, de las normativas pertinentes y conceptos afines al trabajo.

Todo esto directamente relacionado al estudio de la influencia de variables en el análisis estructural de placas sobre fundación elástica por dos métodos.

2.1. Variables Involucradas

2.1.1. Tipo de suelo inmediatamente inferior a la fundación

Las características del suelo deben ser definidas para la realización del análisis estructural de una fundación. La información de esta variable viene dada por el “coeficiente de reacción del suelo o módulo de balasto” k , el cual es obtenido experimentalmente de forma directa o indirecta mediante correlaciones.

El módulo de balasto “ k ” es una relación entre las cargas y las deformaciones. El mismo es definido como el esfuerzo que, distribuido sobre un área unitaria, causa una deflexión unitaria y viene expresado en unidades de fuerza sobre unidades de longitud al cubo.

En general, el módulo de balasto se considera por ancho “ b ” unitario, por lo que k a veces también es denotado como “ k_s ” y representado en unidades de toneladas por metro cuadrado (T/m^2) o kilogramos por centímetro cuadrado (Kg/cm^2).

El comportamiento del suelo es generalmente más complicado que de la manera asumida en el cálculo de esfuerzos mediante las teorías del módulo de

reacción del suelo. Sin embargo, se ha demostrado (Terzaghi, 1955) que resultados suficientemente precisos pueden ser obtenidos bajo el uso de las mismas.

El uso de las teorías de módulo de reacción de suelos está fundamentado en la simplificación de relaciones complejas entre las presiones de contacto y las deformaciones. Las mismas arrojan resultados con suficiente precisión al ser aplicadas a suelos en los que las deformaciones estén localizadas en la vecindad general de las cargas y cuando las presiones máximas de contacto sean menores que aproximadamente la mitad de la capacidad de carga última del suelo (Terzaghi, 1955).

En el proceso constructivo de una platea, al realizar la excavación (de ser necesaria), suele ocurrir expansión o levantamiento de la base de la fundación, la cual depende de factores como la profundidad de la misma, el tipo de suelo (mayor en arcillas), esfuerzo de preconsolidación, etc.

Existen dos aproximaciones al problema del levantamiento de la base, como una recompresión o como un problema elástico. De ser tratado como una recompresión la respuesta del suelo a la misma será proporcionada por los estudios geotécnicos. Si es tratado como un problema elástico debe modificarse el módulo de balasto según ciertas consideraciones (ACI 336.2R-88).

2.1.2. Rigidez de la fundación

Esta influye en las deflexiones que pueden ocurrir en la fundación al contacto con el suelo y por ende afectará la variación de las presiones actuantes sobre la fundación. A mayor rigidez del elemento, menor será la deflexión del mismo bajo la acción de una carga.

La rigidez es función del módulo de elasticidad del material que compone el elemento y del momento de inercia de su sección transversal.

El módulo de elasticidad del concreto se consideró según lo establecido en la Norma COVENIN 1753-2006, que para concretos de peso normal se asume como:

$$E_c = 15100 * \sqrt{f'_c} \dots (1)$$

Donde:

f'_c (Kg/cm^2) = Resistencia del concreto a la compresión a los 28 días

El momento de inercia de una sección transversal rectangular esta definida como:

$$I \text{ (cm}^4\text{)} = \frac{b * h^3}{12} \dots (2)$$

Donde:

b (cm) = ancho de la sección

h (cm) = altura de la sección

Al estudiar la rigidez de las placas se considerará una sección de ancho “b” unitario para la obtención de un valor de momento de inercia.

Como acotación técnica se recomienda usar el momento de inercia efectiva para el análisis de plateas. El valor de la misma se obtiene mediante la ecuación (9-8) de la Norma ACI 318-08.

Es necesario comentar que para efectos de análisis y diseño de placas sobre fundación elástica se recomienda también el uso en las combinaciones de cargas de un módulo de elasticidad del concreto reducido en la mitad para el estudio de cargas estáticas y el valor completo del mismo para cargas dinámicas (Ulrich, 1995).

2.1.3. Magnitud de cargas

Una carga aplicada a un elemento genera esfuerzos en él. La Ley de Hooke establece que los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones.

Es por ello que, en una placa sobre fundación elástica, la aplicación de una carga puntual en ella generará deflexiones cuyas magnitudes corresponderán con las de dicha carga.

En una fundación sobre suelo elástico, considerando las teorías de módulo de reacción de suelos, las deflexiones son proporcionales a las presiones. Por ello se tiene que:

$$p \text{ (Kg/cm}^2\text{)} = k * y \text{ (3)}$$

Donde:

$$k \text{ (Kg/cm}^3\text{)} = \textit{módulo de reacción del suelo}$$

$$y \text{ (cm)} = \textit{deflexión del elemento en un punto}$$

De igual forma como se observó previamente, las deflexiones son función de la rigidez.

La ecuación diferencial de una viga sobre fundación elástica es:

$$EI * \frac{d^4y}{dx^4} = -k * y + q \dots (4)$$

En la misma se observa la relación directa entre las variables mencionadas.

2.2. Métodos de Estudio

2.2.1. Método Simplificado

Una losa sobre fundación elástica recibe las cargas de la superestructura mediante las columnas o muros, para de esta forma ser transmitidos al suelo. El comportamiento de la fundación es complejo al considerar lo que sucede en la superestructura y en el suelo. No se ha diseñado ningún método de análisis que permita evaluar todas las variables involucradas en el problema y que determine de forma totalmente precisa las presiones de contacto entre el elemento estructural y el suelo.

Por ello, el método simplificado hace suposiciones con base en el conocimiento de la interacción de los elementos del sistema para de esta forma hacer más sencillo el comportamiento complejo que implica el considerar todos los factores involucrados. Estas suposiciones siempre van acompañadas de criterios conservadores.

Para el análisis de placas sobre fundación elástica se consideran secciones prismáticas desde el punto de aplicación de la carga, esto debido a que el efecto de la misma se transmite en dirección radial mediante esfuerzos. El problema entonces se convierte en uno basado en coordenadas polares sujeto a cargas simétricas respecto al origen “o”.

La influencia de las cargas en la placa crea una zona de influencia radial con origen en el punto de aplicación de la carga. Superponiendo el aporte de todas las cargas aplicadas a la placa dentro de la zona de influencia, el efecto total de dichas cargas en cualquier punto puede determinarse. Esta zona de influencia no es muy grande y no es necesario considerar columnas o muros más allá de dos vanos en todas las direcciones (ACI 436-66, 1966).

El método simplificado que será objeto de estudio fue definido por el Comité 436 de la American Concrete Institute (Octubre, 1966), mediante el reporte denominado “Procedimientos de Diseño Sugerido para Zapatas Combinadas y Placas de Fundación”. Este método está fundamentado en la Teoría de Vigas sobre Fundación Elástica desarrollada por Hetenyi (1946).

Para realizar el análisis, la teoría considera secciones prismáticas generadas desde el punto de aplicación de la carga. Es por ello que los elementos se estudian mediante un sistema basado en coordenadas polares sujeto a esfuerzos simétricos con respecto a este punto.

Por equilibrio de momentos en una sección prismática genérica se obtiene que:

$$\frac{dMr}{dr} + \frac{Mr}{r} - \frac{Mt}{r} - Qr = 0 \quad \dots (5)$$

Donde:

Mr = Momento radial

Mt = Momento tangencial

Qr = Corte radial

De la *Ecuación N°5* y del equilibrio de fuerzas verticales se genera la metodología simplificada a emplear en el Trabajo.

A continuación se expresan las formulaciones y consideraciones del mismo.

La rigidez a flexión se considera como:

$$D = \frac{E_c * t^3}{12 * (1 - \mu^2)} \dots (6)$$

Donde “ μ ” es el Coeficiente de Poisson.

El radio de rigidez efectiva se calcula mediante:

$$L = \sqrt[4]{\frac{D}{k_s}} \dots (7)$$

Los momentos radiales y tangenciales para cada carga en un punto determinado se calculará como:

- Momento Radial

$$Mr = -\frac{P}{4} * \left[Z_4 \left(\frac{r}{L} \right) - (1 - \mu) * \frac{Z_3 \left(\frac{r}{L} \right)}{\frac{r}{L}} \right] \dots (8)$$

- Momento Tangencial

$$Mt = -\frac{P}{4} * \left[\mu * Z_4\left(\frac{r}{L}\right) + (1 - \mu) * \frac{Z_3'\left(\frac{r}{L}\right)}{\frac{r}{L}} \right] \dots (9)$$

Donde:

r = distancia desde el punto que es investigado y el punto de aplicación de la carga, (m).

L = radio de rigidez efectiva, (m).

P = carga concentrada, (ton).

Z₃, Z₄, Z₄' = funciones tabuladas en la Tabla III, "Beams on Elastic Foundations", (Hetenyi. 1946) y expresadas de forma más discreta en el *Apéndice 7.1* (elaboración propia).

Mediante ecuaciones de Bessel y funciones de Neumann se obtienen las funciones arriba mencionadas:

$$\underline{Z_1} := 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{(6!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{16}}{(8!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{20}}{(10!)^2} \dots (10)$$

$$\underline{Z_2} := -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{(5!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{14}}{(7!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{18}}{(9!)^2} \dots (11)$$

$$\underline{Z}_3 := \frac{\underline{Z}_1}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot [\underline{R}_1 + (0.577216 + \ln(\underline{x}) - \ln(2)) \cdot \underline{Z}_2] \dots (12)$$

$$\underline{Z}_4 := \frac{\underline{Z}_2}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot [\underline{R}_2 + (0.577216 + \ln(\underline{x}) - \ln(2)) \cdot \underline{Z}_1] \dots (13)$$

Donde:

$$\underline{R}_1 := \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^2 - \frac{\phi_3}{(3!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^6 + \frac{\phi_5}{(5!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^{10} - \frac{\phi_7}{(7!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^{14} \dots (14)$$

$$\underline{R}_2 := \frac{\phi_2}{(2!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^4 - \frac{\phi_4}{(4!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^8 + \frac{\phi_6}{(6!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^{12} - \frac{\phi_8}{(8!)^2} \cdot \left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^{16} \dots (15)$$

$$\phi_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \dots (16)$$

Para poder convertir los momentos radiales y tangenciales a coordenadas rectangulares se usan las fórmulas:

$$M_x = M_r * \cos^2 \phi + M_t * \sen^2 \phi \dots (17)$$

$$M_y = M_r * \sen^2 \phi + M_t * \cos^2 \phi \dots (18)$$

El esfuerzo cortante por unidad de ancho de placa se puede determinar por:

$$Q = -\frac{P}{4L} * Z_4' \left(\frac{r}{L}\right) \dots (19)$$

La deflexión máxima de la placa ocurrirá bajo la aplicación de la misma, por ende esta se expresa como:

$$y_o = \frac{P}{8\rho^2 D} \dots (20)$$

Donde:

$$\rho = \sqrt[4]{\frac{k_s}{D}} \dots (21)$$

Para la obtención de la respuesta estructural debida a la combinación de todas las cargas de las columnas, los efectos de las mismas deben ser superpuestos en el punto que sea objeto de estudio.

Lo antes mencionado es para evaluar la influencia de una carga sobre un área infinita. Sin embargo, para el estudio de los esfuerzos en las losas en los extremos, se debe aplicar una corrección (Shukla, 1984) siguiendo el procedimiento mencionado a continuación:

a) Los momentos, cortes y deflexiones se calculan para el radio correspondiente a la distancia que se encuentra el extremo. Esto considerando la losa como si fuera de área infinita.

b) La losa se divide en franjas de ancho unitario.

c) Se asumen las franjas como vigas semi-infinitas y se les aplican los momentos y cortes obtenidos en "a)" con la misma magnitud pero en sentido contrario.

d) Para el cálculo de los momentos, cortes y deflexiones en las vigas semi-infinitas se utilizan las fórmulas:

$$M \text{ (Kgf} \cdot \text{m)} = M1 \cdot A_{\lambda x} - P1 \cdot \frac{B_{\lambda x}}{\lambda} \dots (22)$$

$$Q \text{ (Kgf)} = -2 \cdot M1 \cdot \lambda \cdot B_{\lambda x} - P1 \cdot C_{\lambda x} \dots (23)$$

$$w \text{ (cm)} = -\frac{2 \cdot M1 \cdot \lambda^2}{K_S} \cdot C_{\lambda x} + \frac{2 \cdot P1 \cdot \lambda}{K_S} \cdot D_{\lambda x} \dots (24)$$

Donde:

$$\lambda \text{ (1/m)} = \sqrt[4]{\frac{K_S \cdot b}{4 \cdot E C \cdot I}} \dots (25)$$

$$A_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cdot (\cos \lambda x + \sin \lambda x) \dots (26)$$

$$B_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cdot \sin \lambda x \dots (27)$$

$$C_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cdot (\cos \lambda x - \sin \lambda x) \dots (28)$$

$$D_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cdot \cos \lambda x \dots (29)$$

y

$P1, M1 =$ Cortes y momentos obtenidos del análisis del paso "a")"

$x(m) =$ distancia desde el punto de aplicación de carga hasta el punto en estudio

Como convención la compresión es positiva.

Las ecuaciones $A_{\lambda x}$, $B_{\lambda x}$, $C_{\lambda x}$ y $D_{\lambda x}$ son válidas para el lado derecho de la carga. Es decir, para el lado izquierdo el Q cambiará signo y es por ello que siempre se evaluarán valores de x positivos.

2.2.2. Método de Análisis por elementos finitos

Cuando se pretende predecir el comportamiento de un fenómeno físico, este se puede abordar mediante el estudio del comportamiento de un número finito de partes bien definidas; a esto se le denomina un problema discreto.

En otros casos, la subdivisión continúa siendo indefinida y el problema se soluciona mediante la matemática infinitesimal, esto lleva a ecuaciones diferenciales que implican un número infinito de elementos, limitando enormemente las posibilidades de sobre-simplificar las situaciones. A estos problemas se les llama continuos.

Con el tiempo, varios métodos de discretización han sido desarrollados para de esta forma poder resolver problemas continuos de forma sencilla. Todos son aproximaciones a las soluciones continuas, que discrepan menos de estas a medida que las variables discretas aumentan.

Con la ayuda de las computadoras, los problemas discretos pueden ser solucionados sin mayor inconveniente aun cuando el número de elementos estudiados es muy grande. Tal es el caso aplicado del software desarrollado por Computer & Structures, Inc., llamado SAFE[®], usado para la ejecución del análisis por elementos finitos en este Trabajo Especial de Grado.

En el caso de análisis por elementos finitos de las estructuras, las relaciones fuerzas-desplazamientos son calculadas para cada elemento y luego se procede a la unión de todo siguiendo el procedimiento de establecer el equilibrio local en cada punto nodal.

El procedimiento de análisis mencionado consiste básicamente en:

1) Separar el medio continuo en líneas o superficies imaginarias en un número finito de elementos.

2) Los elementos se asumen como interconectados mediante un número discreto de puntos nodales situados en sus fronteras. Los desplazamientos de estos nodos serán los parámetros desconocidos del problema.

3) Un conjunto de funciones son escogidas para definir únicamente el estado de tensiones de cada elemento y representarlos en términos de desplazamientos nodales.

4) Se genera un sistema de fuerzas concentrado en los nodos y equilibrando las tensiones de frontera y las distribuciones de cargas determinadas, resultan en una relación de rigidez del elemento.

En los programas informatizados de elementos finitos y específicamente en SAFE[®], la interacción suelo estructura se modela a través de resortes por área tributaria de cada nodo.

Es necesario mencionar que el método de elementos finitos no es exacto a menos que se realice un esfuerzo considerable al discretizar de forma sustancial el problema continuo.

El método de elementos finitos implica el uso de la teoría de placas finas y esta suposición comúnmente usada es adecuada. Se ha demostrado que la placa tiene que ser muy gruesa para invalidar la teoría de placas finas (Frederick, 1957).

El programa SAFE[®] asigna ejes locales a cada elemento de área que se genere en el mismo. Al realizar la discretización de un área para su análisis por elementos finitos cada una de las áreas discretas que forman el elemento poseen ejes locales intrínsecos a ellas.

Los ejes locales tienen una identificación visual sencilla debido a los colores que representa cada uno de ellos. El color rojo representa el eje local 1, el verde el eje local 2 y el azul el eje local 3.

Cuando se exporta información sobre las solicitaciones de la estructura, esta se presenta en función de los ejes locales de cada área. Es por ello que, estudiando los ejes locales, se puede hacer una analogía de estos con las direcciones radiales y tangenciales expresadas en el método simplificado pero solo bajo condiciones muy específicas.

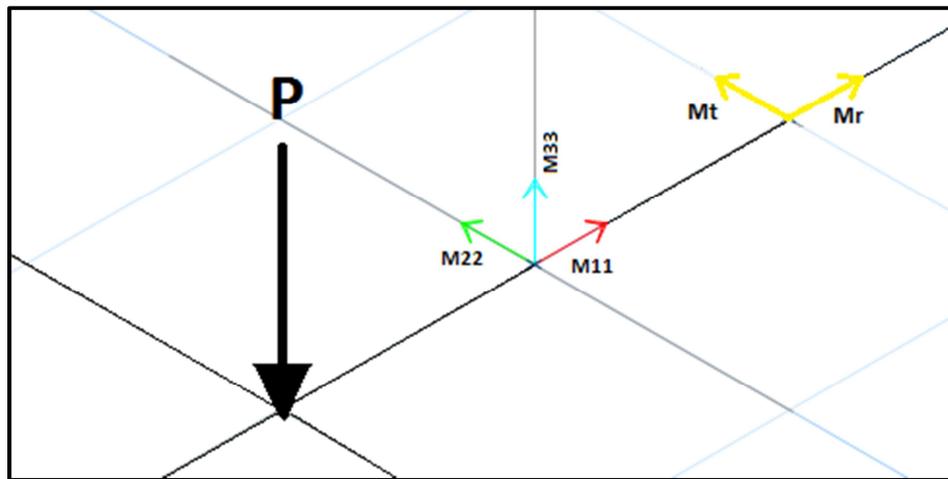


Figura N° 2.1. Analogía de momentos tangenciales y radiales con momentos M_{11} y M_{22}

Como se puede observar en la Figura N°2.1., los momentos M_{11} equivaldrán a los momentos radiales y los M_{22} a los tangenciales en los puntos ubicados sobre la línea en dirección paralela al eje local 1 y que pasa por el punto de aplicación de la carga. Sucederá de forma inversa en la dirección ortogonal, en la línea con dirección paralela al eje local 2 y que pase por el punto de aplicación de la carga los momentos M_{22} equivaldrán a los momentos radiales y los momentos M_{11} a los momentos tangenciales.

Esta aseveración es posible sólo en condiciones absolutamente simétricas y por ello los problemas planteados en el Trabajo tendrán esta característica. La solución analítica presentada permite cotejar los dos métodos expuestos en este Trabajo Especial de Grado.

La Figura N°2.1. es una representación de la solución usada para cotejar ambos métodos. Sin embargo, como se ha mencionado previamente, los ejes locales son una propiedad de las áreas más no de los nodos. Es por ello que para obtener las solicitaciones del punto de estudio (nodo) se deben promediar de forma simple, con base en lo expuesto anteriormente, los momentos de interés obtenidos para las áreas que circundan el nodo.

El programa informatizado mencionado requiere la creación de un sistema Grid o de Malla que representa una cuadrícula compuesta por líneas ortogonales y que permite la creación y delimitación de áreas. Además, una de las esquinas del Grid, representa el origen del sistema de coordenadas usado por el SAFE®.

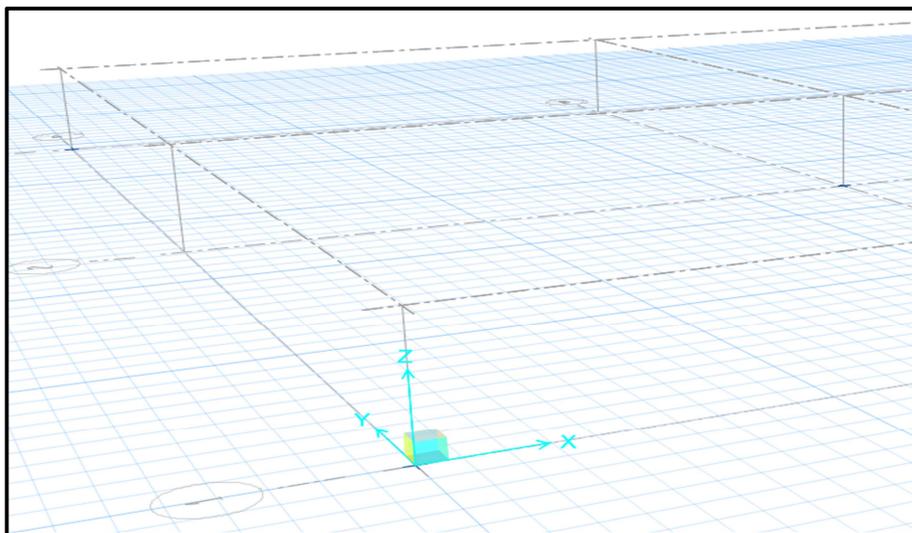


Figura N° 2.2. Grid o Malla del programa SAFE®

Toda la data obtenida en forma de coordenadas está referenciada a este origen y sus ejes se orientan de forma evidente como se observa en la Figura N°2.2.

2.3. Punzonado en la losa de cimentación

El espesor de la losa (Norma ACI-318-08) está determinado por el análisis por corte de la misma. En el Capítulo 11, apartado 12.2.1 en donde se considera que la sección crítica para el cortante en losas en dos direcciones sometidas a flexión sigue el perímetro del borde de la zona de carga. La ecuación de diseño resulta suponiendo una sección pseudo crítica, localizada en una distancia $d/2$ a partir de la periferia de la carga concentrada.

El corte resistente por el concreto se considerará como el menor entre:

$$V_c = \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \frac{\sqrt{f'_c} b_o d}{6} \dots (30)$$

Donde β es la relación del lado largo al lado corto de la columna,

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 2\right) \frac{\sqrt{f'_c} b_o d}{12} \dots (31)$$

Donde α_s es 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde, y 20 para columnas en esquina, y

$$V_c = \frac{\sqrt{f'_c} * b_o * d}{3} \dots (32)$$

Donde:

b_o = ancho de la sección

d = altura útil de la sección

La diferencia entre la carga máxima transmitida por la columna y el esfuerzo último del suelo por el área de punzonado debe ser menor o igual al menor valor de corte calculado minorado:

$$\phi V_c \geq P_u - \sigma_{ult} * A_{\text{punzonado}} \dots (33)$$

Donde:

$$\phi = 0.85$$

σ_{ult} = capacidad de carga última del suelo

En las placas sobre fundación elástica se recomienda diseñar el espesor de las mismas de forma que estas soporten todo el corte solicitado por la estructura. El corte por flexión suele ser considerablemente menor al corte por punzonado y es por ello que se consideró en el trabajo únicamente el corte por punzonado para la selección del espesor del elemento (ACI 336.2R, 88).

2.3. Desviación estándar

La desviación estándar es una medida de la dispersión de un conjunto de datos. Esta establece la forma en que los valores fluctúan con respecto a la media.

Por definición, la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se tiene entonces que:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x)^2}{n-1}} \dots (34)$$

Donde:

x_i = Datos de la muestra

x = Media aritmética

n = tamaño de la muestra

CAPÍTULO III

3. MÉTODO

En este Trabajo Especial de Grado se desarrolló un análisis paramétrico de las variables involucradas en el análisis estructural de placas de cimentación. Esto implicó el cálculo y diseño iterativo mediante el uso de recursos electrónicos.

Al proceder con la evaluación de cada una de las variables se debieron definir y fijar en cada caso todos los demás parámetros involucrados en el análisis estructural.

Los procedimientos metodológicos que se realizaron son los presentados a continuación:

3.1. Recopilación y catalogación de información

Se realizó un proceso de recopilación y catalogación exhaustiva de información existente referente al tema, que sirvió de fundamento para el entendimiento de los conceptos y procedimientos asociados al complejo tópico que resulta el análisis estructural de placas sobre fundación elástica.

Producto de esta búsqueda de información, ninguna investigación que estudiara de forma paramétrica el método simplificado y lo cotejara con el de elementos finitos fue encontrada. Es por ello que este Trabajo Especial de Grado adquiere mayor importancia al iniciar desde los conceptos más básicos para de esta forma generar conocimientos que no han sido desarrollados.

Fue fundamental la búsqueda de textos normativos asociados al cálculo de placas usándose como referencia de este tipo las publicaciones, revistas y normas ACI (American Concrete Institute) de los Estados Unidos de América. Esto

debido a que en la Norma COVENIN vigente en nuestro país no se especifican criterios técnicos para el uso de métodos de cálculo de losas de fundación ni se describe ninguno de ellos.

Se usaron ampliamente las guías y manuales del programa informatizado SAFE[®] que forman parte del paquete de instalación de dicho programa en el ordenador y que son creados por la compañía Computers & Structures, Inc.

3.2. Selección de las variables de estudio

Se debió, en función del marco conceptual pertinente, escoger las variables que fueron estudiadas en el Trabajo.

Estas variables fueron el módulo de reacción del suelo o módulo de balasto, el espesor de la placa y la magnitud de cargas. Siendo estas de fundamental importancia en el estudio de una placa de fundación y las que presentan mayor variabilidad en proyectos de fundaciones (Calavera, 2000).

Para que el estudio paramétrico de ambos métodos fuera cotejable, las condiciones de cada caso de evaluación del elemento debieron ser iguales para las dos metodologías.

3.3. Consideraciones limitantes en el proyecto

En los análisis no se plantearon condiciones de carga con momentos transmitidos por las columnas/muros, ni excentricidad en la carga axial de las mismas.

Esto es debido a que muchas veces lo mencionado anteriormente implica el análisis no lineal de las plateas. En el programa SAFE® esto puede solucionarse de forma sencilla en el modelado. Sin embargo, al momento del análisis estructural el programa invierte un tiempo bastante prolongado para esta consideración adicional, cosa que hizo inviable el análisis iterativo de las placas en el tiempo estipulado para la ejecución del Trabajo Especial de Grado.

Únicamente se estudiaron cargas puntuales aplicadas a los elementos.

Se debió tener un concepto claro del orden de magnitud coherente a ser considerado para el análisis de cada variable de manera que los casos estudiados en el Trabajo no fuesen ajenos a situaciones que pueden ser observadas comúnmente en el desarrollo de proyectos de este tipo.

Por ello se generó una hoja de cálculo mediante la cual se pudiera hacer una aproximación a las magnitudes de cargas que serían estudiadas para cada espesor de losa. La limitante en cada caso, como se mencionó previamente, es el punzonado producido en el elemento.

Espesor Losa (cm)	Dimensión 1 de Columna "d1" (cm)	Dimensión 2 de Columna "d2" (cm)	Vc (kgf)		A punzonado (cm ²)	Pu máxima admisible (Tonf)	Rango de Pa evaluar (Tonf)
30	40	40	28460.5	18974	3906	20.03	45.03
			116213.7				0
			18973.7				
50	60	60	80638.1	53759	10506	56.20	81.20
			407670.3				31.20
			53758.7				
75	85	85	181435.7	120957	23256	126.07	151.07
			1021020.4				101.07
			120957.1				
100	110	110	321761.8	214508	41006	223.34	248.34
			1911069.8				198.34
			214507.8				

Tabla N° 3.1. Rango de evaluación de cargas en losas

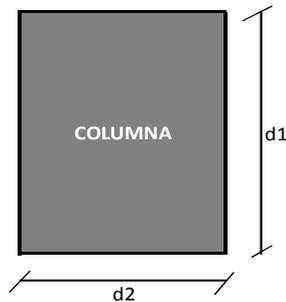


Figura N°3.1. Dimensiones de columna usadas en el cálculo del punzonado (vista en planta)

En la Tabla N°3.1. se puede observar como primeramente se asumió, en base al espesor de la losa, las dimensiones de columna (en todo caso cuadrada) observadas en la Figura N°3.1. En cada caso se asumieron los lados de la columna como 10 cm mayores que el espesor de la losa. Con ello se obtuvo el corte resistente por el concreto, el área de punzonado y por último la carga máxima admisible para cada caso. A su vez, todo esto se generó partiendo de un esfuerzo último del suelo de 1 kg/cm^2 .

Con esta carga y asumiendo una variación de la misma de 25 Tonf, se obtuvo el rango de estudio de magnitudes de carga aproximado para cada espesor de losa y con el cual se procedió al análisis de las mismas. Con esta información y por motivos prácticos se definieron las cargas cada 25 Tonf hasta las 100 Tonf y cada 50 Tonf luego de las 100 Tonf. Por ende, finalmente se evaluaron cargas de 25, 50, 75, 100, 150 y 200 toneladas.

Con respecto a los valores de módulo de balasto que se usaron fueron entre $1\text{-}3 \text{ kg/cm}^3$. Este rango considera cimientos de baja capacidad portante (Timoshenko, 1959) como arcillas de alta plasticidad, suelos orgánicos de alta

plasticidad y limos de alta plasticidad; típicos para el empleo de losas de fundación (Calavera, 2000).

En el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado no se consideraron los conceptos mencionados sobre variación del módulo de elasticidad del concreto y uso de momento de inercia efectiva para el estudio de losas sobre fundación elástica.

De igual forma, se obviaron variaciones en el estudio debidas al levantamiento de la base de las fundaciones.

3.4. Definición de las características generales de las losas de fundación

Para poder realizar el proceso de análisis estructural, se debió establecer, en base a la variable que va a ser estudiada, las condiciones generales del elemento. Estas condiciones generales permanecieron constantes a lo largo del proceso iterativo de análisis, cambiando solo la variable en estudio.

Las condiciones mencionadas fueron las mismas para ambas metodologías, de forma que pudo realizarse de forma efectiva y lógica el contraste entre los resultados obtenidos por los métodos.

3.4.1. Materiales

– Concreto:

Resistencia a la compresión a los 28 días ($f'c$): 250 kg/cm^2

Coefficiente de Poisson (μ): 0.2

Módulo de elasticidad (E_c): $15100 \cdot \sqrt{f'c} = 238752 \text{ kg/cm}^2$

El coeficiente de Poisson y el módulo de elasticidad se obtuvieron según lo establecido por el apartado 8.5 de la Norma Fondonorma 1753-06 y la resistencia a compresión a los 28 días se eligió por ser un valor comúnmente usado en nuestro país para el cálculo de estructuras.

3.4.2. Dimensiones

Se necesitó definir espesores de las losas para su análisis estructural. Se escogieron de 30, 50, 75 y 100 centímetros. Representando estos valores un rango de dimensiones que es comúnmente aplicado en la práctica.

Al realizar el estudio con las cargas aisladas en una placa de dimensiones finitas, se definieron dichas dimensiones como mayores a dos veces $4L$, es decir, 8 veces el radio de rigidez efectiva. Asumiendo este criterio de disipación del efecto de una carga como correcto (Shukla, 1984). Al hacer esto en cada caso no se obtuvo ningún análisis estructural con levantamientos que requirieran análisis no lineal de los elementos.

El recubrimiento de cálculo "rc" asumido fue de 7.5 cm, el cual es un valor recomendado para fundaciones (Calavera, 2000).

3.5. Definición de los parámetros de cuantificación de resultados

Previo al inicio de los procesos de análisis y diseño de los elementos, se requirió especificar en función de qué parámetros se cuantificarían los resultados.

A pesar de ser pocos los parámetros resultantes del cálculo estructural, resultó fundamental definir cuáles de ellos presentarían finalmente los patrones de influencia.

Los parámetros escogidos para observar esto fueron el momento tangencial, el momento radial, los múltiplos de L y la deflexión máxima bajo la acción de la carga.

De igual forma se debió establecer el método de presentación de los patrones de influencia de las variables.

En el caso de presentación de resultados de los métodos por separado y para cotejarlos se hizo en su gran mayoría de forma gráfica y en menor medida mediante tablas.

3.6. Estudio paramétrico de las variables

Se procedió, ya ejecutadas las acciones previas, al análisis estructural iterativo de las losas de fundación, cambiando en cada iteración sólo una de las variables. Esto se realizó para ambas metodologías para cada valor de la variable.

3.6.1. Método Simplificado

Primeramente se generó una tabla que expresa el módulo de balasto en función del radio de rigidez efectiva y el espesor de la losa. Con esta data se pudo generar una gráfica en la que se observa la variabilidad y dependencia de estos valores entre sí. De esta tabla se obtuvieron las magnitudes de radio de rigidez efectiva usadas para el análisis de cada caso.

Debido a la complejidad asociada a la obtención de los valores de las funciones Z_x , se utilizó el programa Mathcad® v.14.0. para generar una hoja de cálculo para las derivadas propias de cada función.

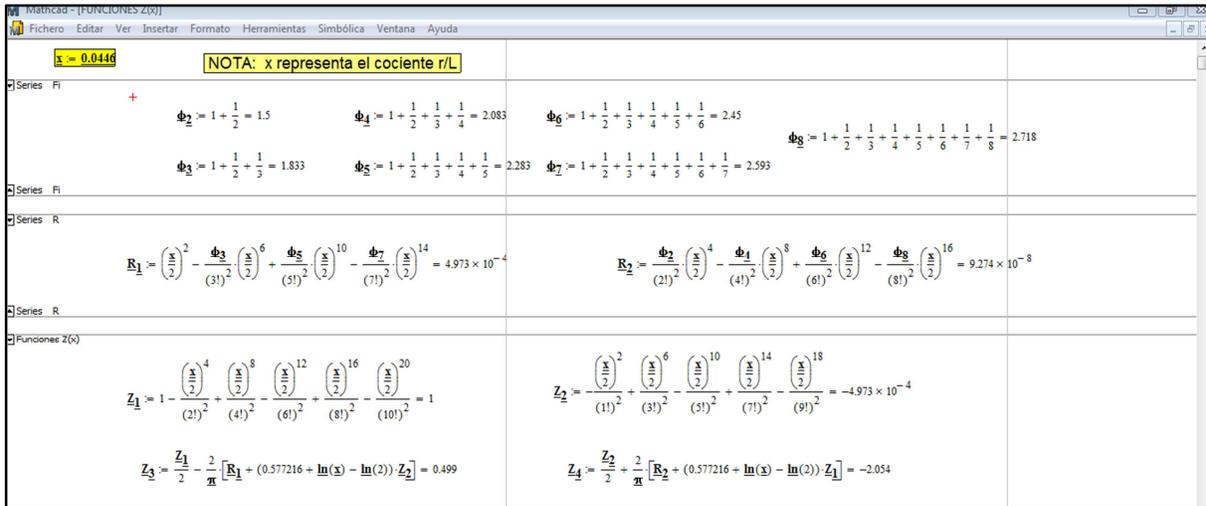


Figura N° 3.2. Series Fi, series R y funciones Z obtenidas mediante hoja de cálculo de Mathcad®

De esta forma se generó un ábaco ampliado (Tabla N°7.1.) mucho más discreto en los valores de r/L que el ábaco presentado por Hetenyi y al que todas las bibliografías del método simplificado hacen referencia (Calavera, Bowles, Shukla, Varguese). Este ábaco se presenta como aporte para casos en los que no se cuente con el software informatizado Mathcad® y para poder disminuir los errores asociados a la interpolación en el ábaco de Hetenyi.

Además, se entrega como aporte del Trabajo la hoja de cálculo en digital en un CD (Apéndice N° 7.4) de forma que se puedan obtener valores de forma totalmente precisa sin necesidad de interpolación entre los valores del ábaco.

Lo dicho anteriormente elimina completamente la desventaja mencionada en la ACI 336.2R-88 del método simplificado con respecto a otros métodos sobre los errores asociados a la interpolación entre valores del ábaco.

En la hoja de cálculo de Mathcad® se requiere el ingreso de un valor adimensional “x” positivo correspondiente al cociente entre el radio (hasta el punto en estudio) y el radio de rigidez efectiva, es decir, r/L.

Cabe destacar que para la realización del estudio paramétrico de este Trabajo Especial de Grado se obtuvieron los valores de las funciones Z_x y sus derivadas de forma exacta mediante la hoja de cálculo hecha en Mathcad®.

Fue menester el uso de los recursos electrónicos para la facilitación del análisis y diseño por el método simplificado. Es por ello que se realizó la programación de este proceso mediante el programa Excel® del proveedor Microsoft®.

Posteriormente, se obtuvieron valores de momentos tangenciales y radiales por este método y de forma iterativa.

De igual forma se programó la Ecuación N°32, presentada en el Marco Teórico, que permite obtener según el método simplificado la deflexión máxima en la losa y se usó para obtener esta información para cada caso de estudio.

Como aporte adicional se calcularon casos de cargas aplicadas en el borde y esquinas de losas de fundación. Según lo establecido en el Subcapítulo 2.2.1, este problema se resuelve estudiando franjas de la placa como vigas sobre fundación elástica. Para ello se colocaron las cargas a distancias de 1 m y 2 m del borde y esquina y se estudió paramétricamente cada caso.

La data resultante de cada proceso fue compilada y organizada debidamente para la facilitación del procesamiento posterior de la misma.

3.6.2. Método de Análisis por Elementos Finitos

Primeramente, se creó un archivo base en SAFE® en el cual se definieron los materiales, características elásticas del suelo y secciones que serían utilizadas a lo largo de la investigación.

Luego, dependiendo de cada caso, se generaron los Grids o Mallas (definidos por ejes numéricos y alfabéticos) necesarios para el dibujo y delimitación de las secciones de área.

Para el estudio de carga puntual se modelaron losas cuadradas cuyos centros geométricos corresponden al punto de aplicación de las mismas.

Como se mencionó previamente, las dimensiones de las losas modeladas en SAFE® se definieron considerando la suposición de que la longitud de dispersión de la carga en una losa corresponde a 4 veces el radio de rigidez efectiva "L". Gracias a esto ninguna losa analizada presentó levantamientos de placa que requirieran análisis no lineal de las mismas.

Considerando todo esto es posible entonces asignar un área, un módulo de reacción del suelo y una carga según se haya definido por las especificaciones técnicas descritas.

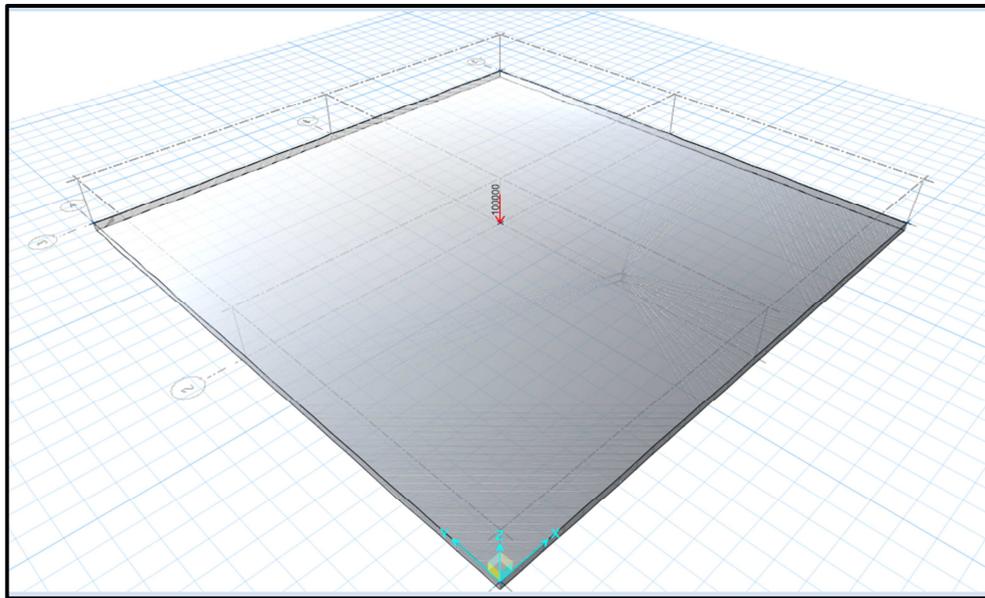


Figura Nº 3.3. Ejemplo aplicación de carga puntual sobre una losa en el programa SAFE®

Es muy importante definir el tamaño del Mesh o de discretización que se va a emplear en el área para su análisis por elementos finitos. Para ser consecuente con los valores adoptados en el método simplificado y por ser considerado de suficiente rigurosidad, se adoptaron valores de 25 y 50 centímetros para la división.

El Mesh de 25 cm se adoptó para losas de hasta 40 m de dimensión. Esto debido a la imposibilidad de los recursos electrónicos de Hardware a mi alcance de realizar los cálculos exigidos por un Mesh más exhaustivo y en secciones de áreas tan grandes.

Por último, y previo al comienzo del análisis estructural, se debieron definir los patrones de carga (uno solo definido como CP), combinaciones de carga y casos de carga. Siempre cuidando que los factores de mayoración fueran iguales a 1.

Ya considerado todo esto se procedió entonces al análisis estructural de cada tipo de losa.

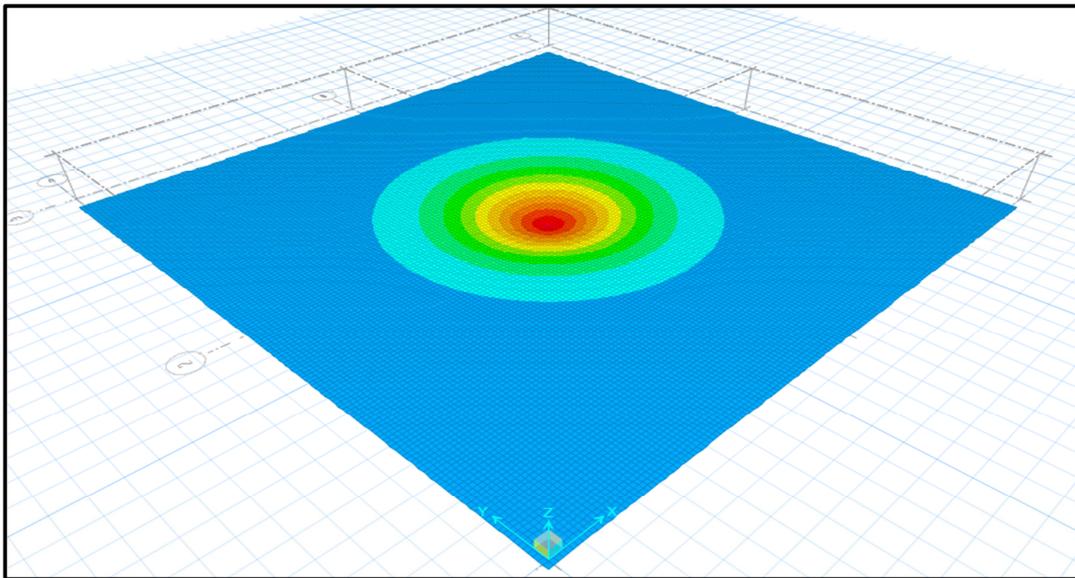


Figura N° 3.4. Deformada de losa sometida a la acción de una carga puntual en su centro

Para la obtención de la data referente a momentos tangenciales y momentos radiales se exportó a formato Excel® reportes con información de esfuerzos en elementos de áreas e información geométrica del caso de estudio.

La información dada en estos reportes es por área y en función de los ejes locales de cada elemento. Es por ello que al analizar cada uno de estos reportes se usaron los momentos en dirección M11 y M22 promediados de forma simple para cada nodo, totalmente cotejables a los momentos radiales y tangenciales por ser ortogonales y conceptualmente idénticos según las condiciones especificadas en el Marco Teórico.

Para la obtención de la deflexión máxima en losa se usó sencillamente la interfaz gráfica del programa en la que, al colocar el apuntador sobre un punto, se expresa la deflexión a la que está sujeta el mismo (ver Figura N° 3.6). En este caso dicho punto es el centro geométrico de la losa y lugar exacto de aplicación de la carga.

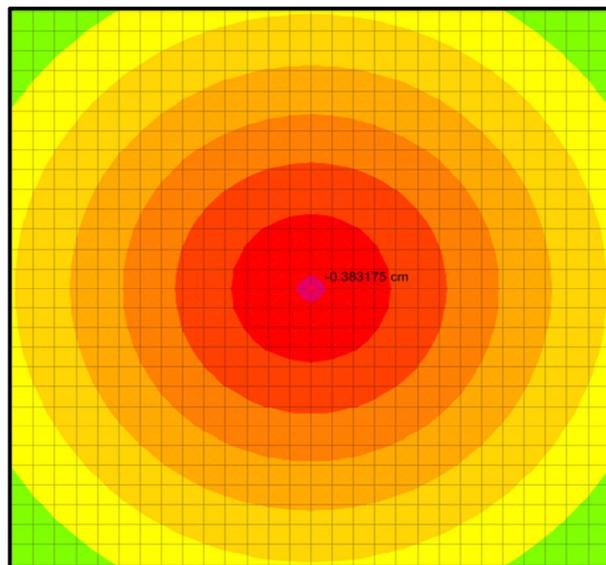


Figura N° 3.5. Deflexión máxima de losa arrojada por el programa informatizado SAFE®

Como aporte adicional se realizó el estudio de cargas puntuales en borde y esquina de losa (ver Figura N° 3.7).

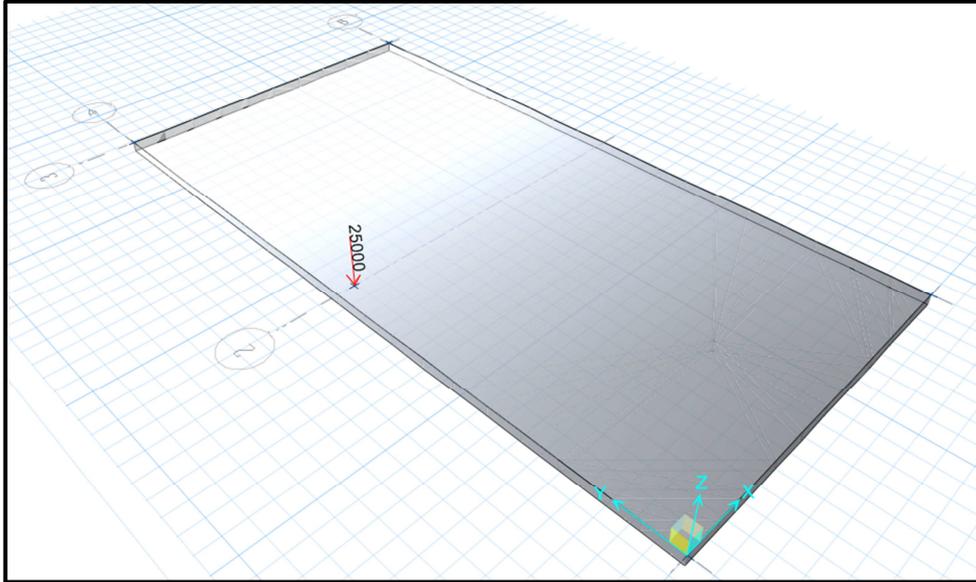


Figura N° 3.6. Ejemplo de aplicación carga puntual en borde sobre una losa en el programa SAFE®

En el caso particular del estudio de carga en borde y esquina se obtuvieron las solicitaciones mediante la interfaz gráfica previamente mencionada para cada nodo ubicado a los radios de interés.

De igual manera, la información obtenida por este método a través de los informes mencionados fue depurada, compilada y organizada de manera que su procesamiento posterior fuese más sencillo.

3.7. Identificación de patrones de influencia de las variables en ambos métodos

Se procesaron los datos obtenidos del estudio paramétrico de las variables y se representaron de forma gráfica y numérica según se consideró más apropiado. Por motivos de expresión técnica se decidió presentar los datos en su mayoría de forma gráfica.

Primero se generaron gráficas de momentos en función del radio y de múltiplos de L para verificar la suposición de que a una distancia igual a 4 veces L desde el punto de aplicación de la carga se puede considerar la influencia de la misma como nula.

Luego se crearon gráficas correspondientes a las deflexiones obtenidas en función del módulo de reacción del suelo y de las cargas.

Todo esto en primer lugar para el Método de Análisis por Elementos Finitos y luego por el Método Simplificado.

3.8. Comparación de los patrones de influencia obtenidos para ambos métodos

Por último, se cotejaron los resultados obtenidos por ambas metodologías en función de parámetros de cuantificación definidos previamente. Estos parámetros fueron la diferencia de valores de momentos y de deflexiones entre los dos métodos.

Lógicamente, las diferencias se obtuvieron para casos en los que las variables involucradas tuviesen los mismos valores en ambos métodos, de forma que fueran efectivamente cotejables.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Como se mencionó en el método, se hizo de forma iterativa el análisis de las losas sobre fundación elástica mediante el programa informatizado de AEF SAFE® v.12 y por el Método Simplificado. La data resultante de estos procesos en forma tabulada se pueden observar en el Apéndice, Tabla N°7.2. y Tabla N°7.3.

A continuación se presentan las gráficas correspondientes a las sollicitaciones obtenidas para cada proceso de cálculo organizadas por tipo de gráfica para cada situación de estudio.

Primeramente se plasman los resultados asociados al estudio de losas infinitas. Tanto el método de AEF como luego el Método Simplificado. En cada caso se presenta en primer lugar el estudio de los momentos en función del radio, luego los momentos en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva y por último el estudio de las deflexiones para todos los casos estudiados.

A su vez, en cada estudio de los momentos, se observan primero los radiales y luego los tangenciales.

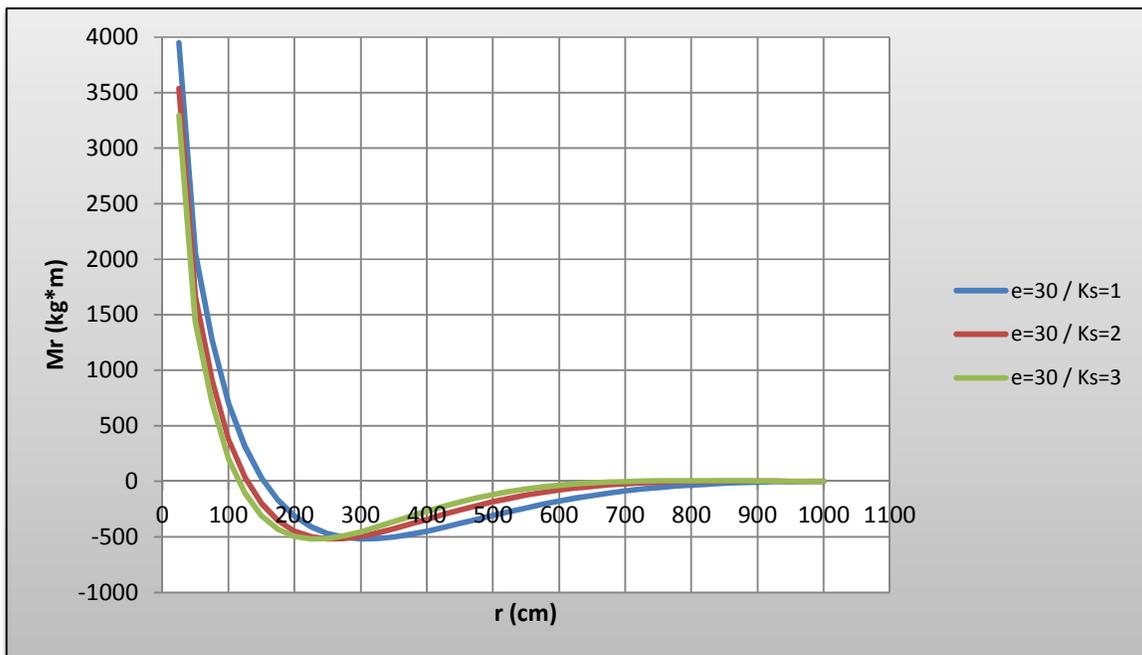
Posteriormente, se presentan la comparaciones hechas entre la data obtenida por cada uno de los dos métodos estudiados en este Trabajo Especial de Grado. La presentación de los resultados cotejados se hizo de forma similar a la realizada con los datos de los métodos por separado. Con la excepción de que se consideró como factor principal de comparación la sustracción o diferencia existente entre las magnitudes de los momentos y deflexiones obtenidas.

Por último, los aportes adicionales son presentados como el estudio de losas semi-infinitas. Investigación que abarca tanto cargas ubicadas al borde de plateas como en las esquinas de las mismas.

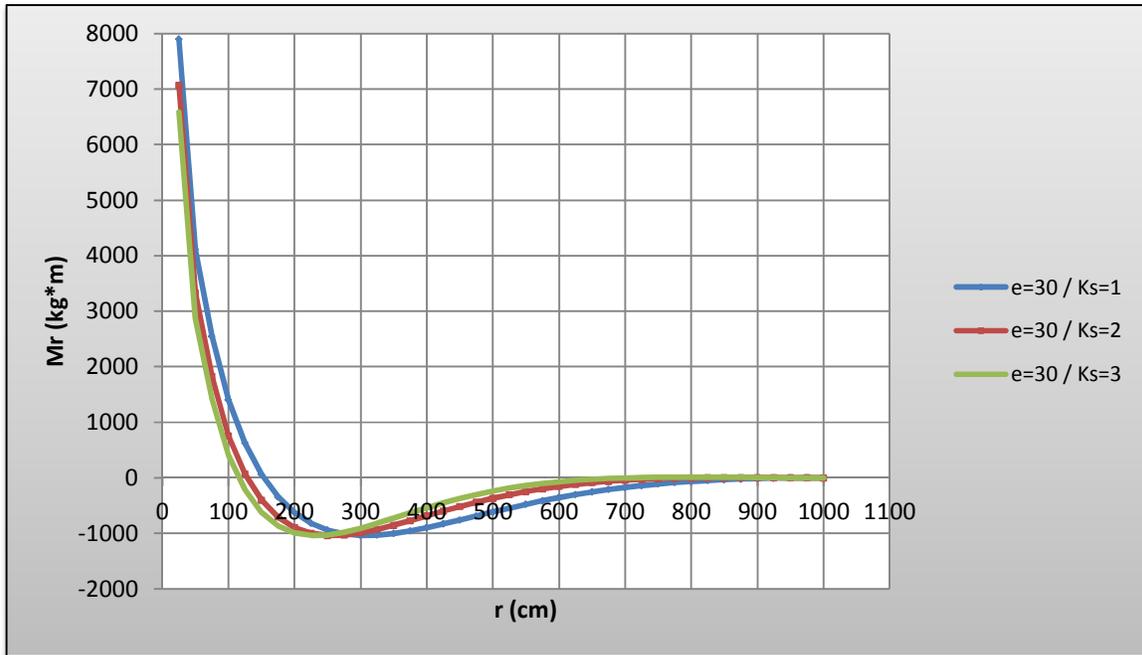
4.1. Método de Análisis por Elementos Finitos

4.1.1. Momentos radiales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa

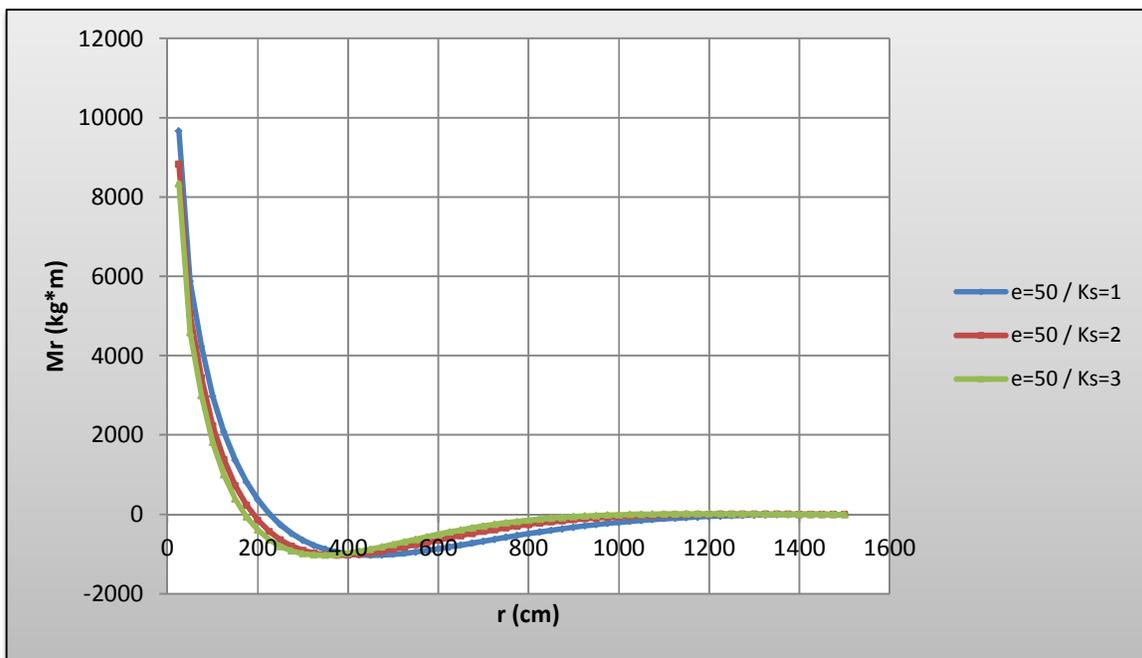
Gráfica N° 4.1.1. Momento radial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$



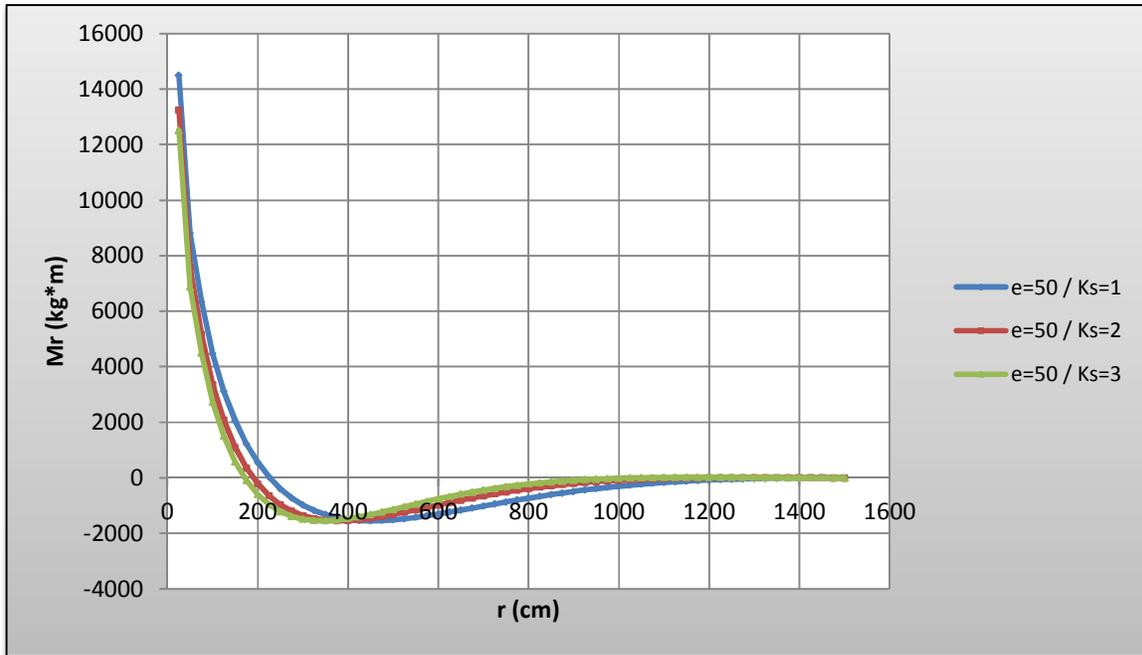
Gráfica N° 4.1.2. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm



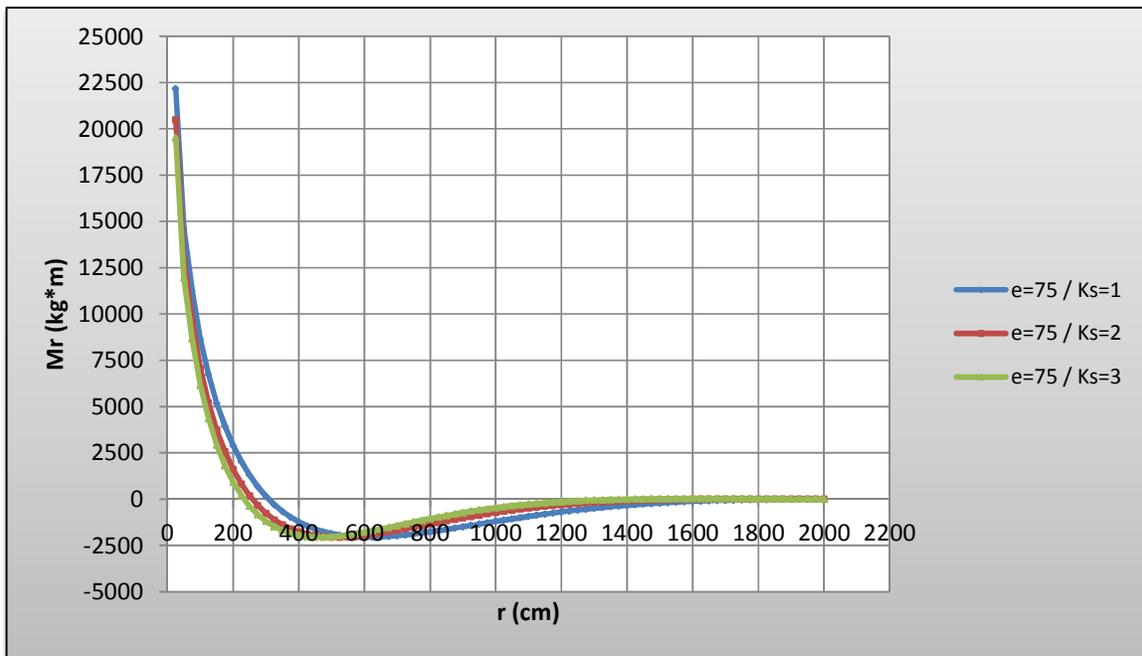
Gráfica N° 4.1.3. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm



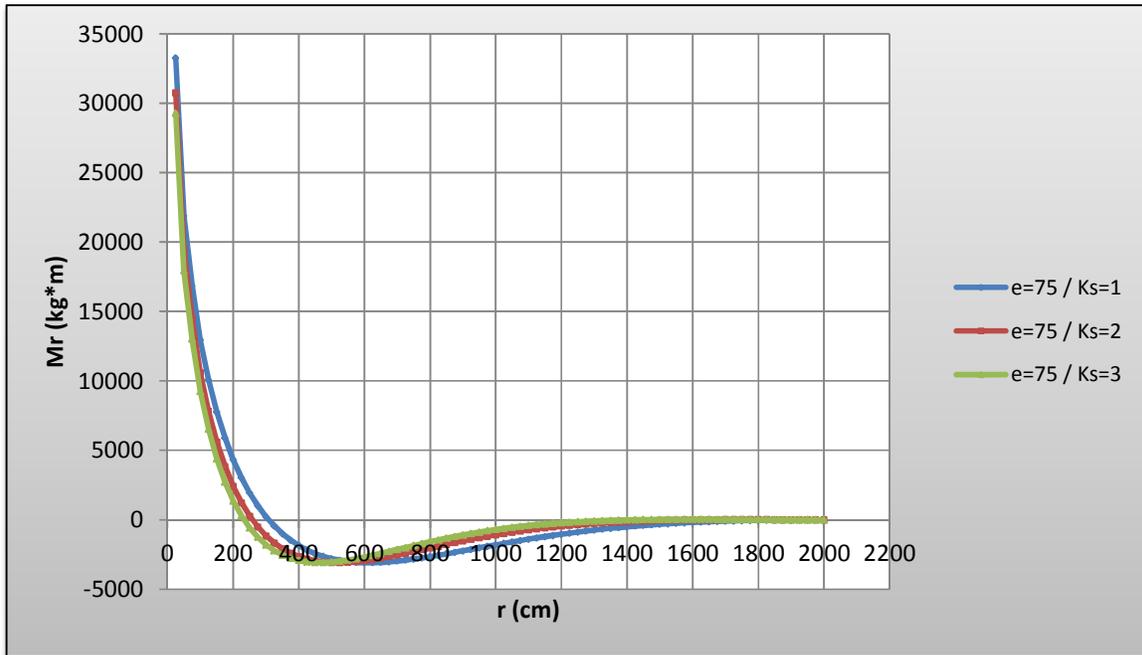
Gráfica N° 4.1.4. Momento radial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$



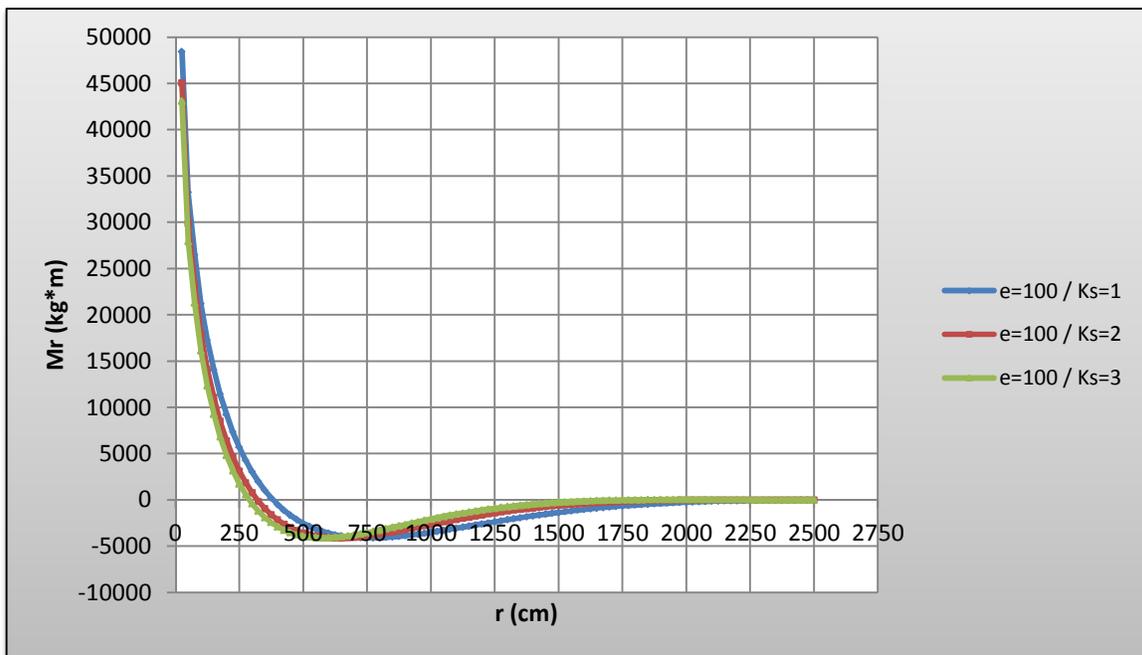
Gráfica N° 4.1.5. Momento radial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$



Gráfica N° 4.1.6. Momento radial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$



Gráfica N° 4.1.7. Momento radial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm



e	P \ K	MENOR Mr			Desviación Estándar
		1 kg/cm ³	2 kg/cm ³	3 kg/cm ³	
30 cm	25 Ton	-517.7	-518.8	-519.5	0.91
	50 Ton	-1035.4	-1037.6	-1039.0	1.81
50 cm	50 Ton	-1030.3	-1030.2	-1029.7	0.33
	75 Ton	-1545.4	-1545.3	-1544.5	0.49
75 cm	100 Ton	-2052.7	-2050.6	-2048.4	2.14
	150 Ton	-3079.1	-3075.9	-3072.7	3.21
100 cm	200 Ton	-4099.6	-4092.1	-4088.8	5.52

Tabla Nº 4.1 Valores de momentos radiales mínimos para distintos módulos de balasto y desviaciones estándar de los mismos

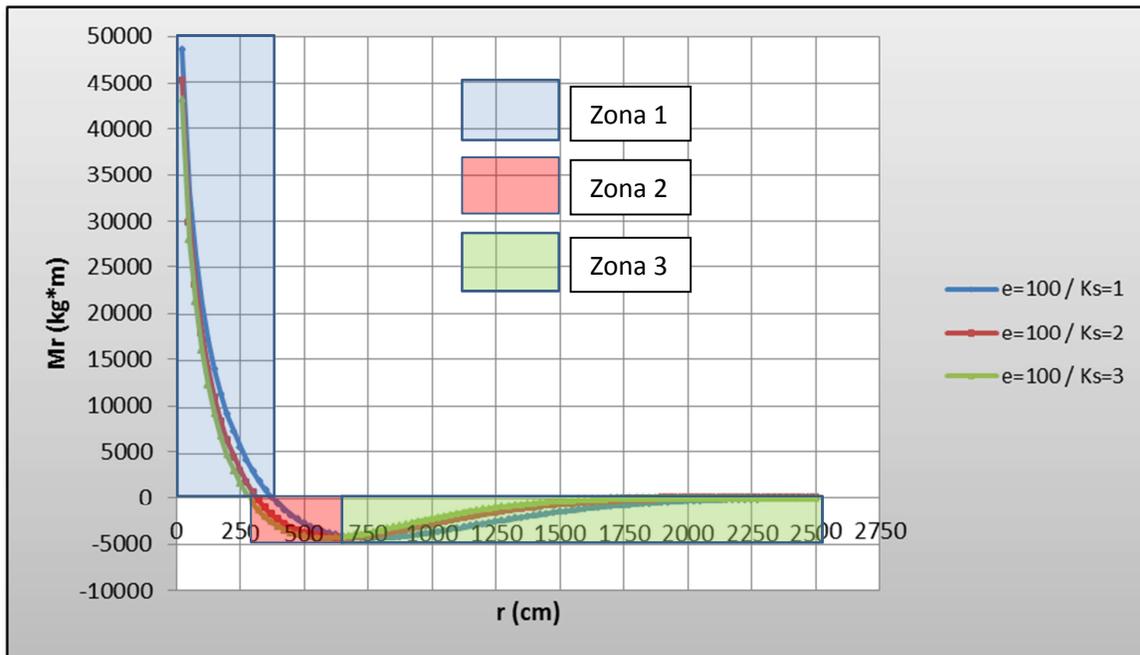


Figura Nº 4.1 Definición de zonas de comportamiento uniforme en gráficas de M_r

Se puede observar que el comportamiento de todas las curvas es el mismo, sin embargo las magnitudes de ellas varían según los factores de cálculo considerados.

Las gráficas muestran que los momentos radiales tienen lo que pudiésemos denominar como tres tendencias según la variación del radio, identificadas como Zona 1, Zona 2 y Zona 3.

En la Zona 1; se evidencia una tendencia marcadamente decreciente a radios menores que se apacigua hasta un punto de momento cero. A lo largo de esta Zona a menores radios se obtienen los valores de momento positivos mayores y los momentos son directamente proporcionales a la carga P e inversamente proporcionales a k .

En la Zona 2; la pendiente tiende a cero a mayores radios hasta que se logra este valor, y este punto de inflexión de la pendiente se dan los mayores momentos negativos. Además, podemos aseverar que el valor absoluto de los momentos en esta Zona es inversamente proporcional a la carga P y directamente proporcional al módulo de balasto k .

En la Zona 3; la curva se hace creciente hasta un punto de máxima pendiente. En esta zona se conservan siempre valores de momento negativos.

Por último, se presenta una disminución de la pendiente y se observa un comportamiento asintótico de la curva a $M_r=0$ lográndose momentos de valores absolutos cada vez menores y cercanos a cero.

Las curvas obtenidas hacen evidente cómo la influencia de una carga se disipa mientras más nos alejamos del punto de aplicación de la misma hasta distancias donde se hace despreciable el efecto de ella. Esta disipación ocurre en la Zona 3 luego de haber sucedido el máximo momento negativo.

Otra observación que puede hacerse es que el punto de inflexión donde la pendiente se hace cero se ubica a mayores radios desde el punto de aplicación de la carga mientras menor es el módulo de reacción del suelo.

Se observó que los momentos radiales mínimos en cada caso de carga y espesor son muy similares para distintos módulos de balasto. Es por ello que se generó la Tabla N° 4.1 en la que se pueden ver estos valores para todos los casos estudiados y la desviación estándar de dichos números.

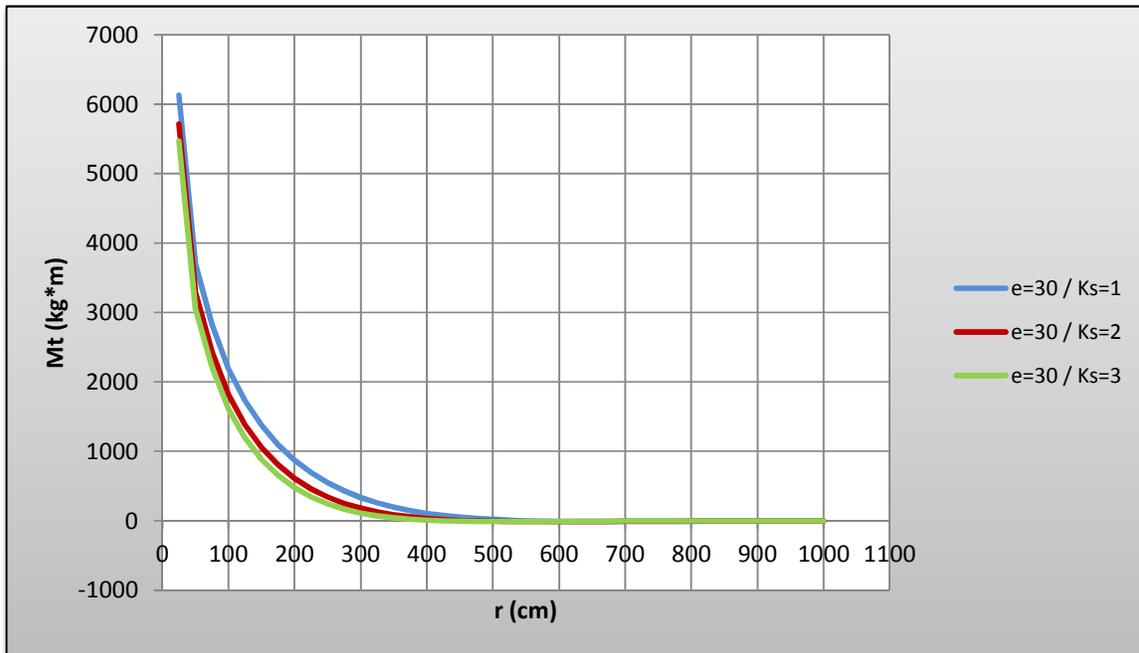
Con esto se observa que la desviación no excede de $6 \text{ kg}^*\text{m}$ y, considerando el orden de magnitudes trabajados en la investigación, se puede asumir que los momentos radiales mínimos no dependen del k sino sólo de la carga puntual aplicada y en menor medida del espesor de placa.

La magnitud de los momentos radiales positivos es directamente proporcional al espesor de la placa.

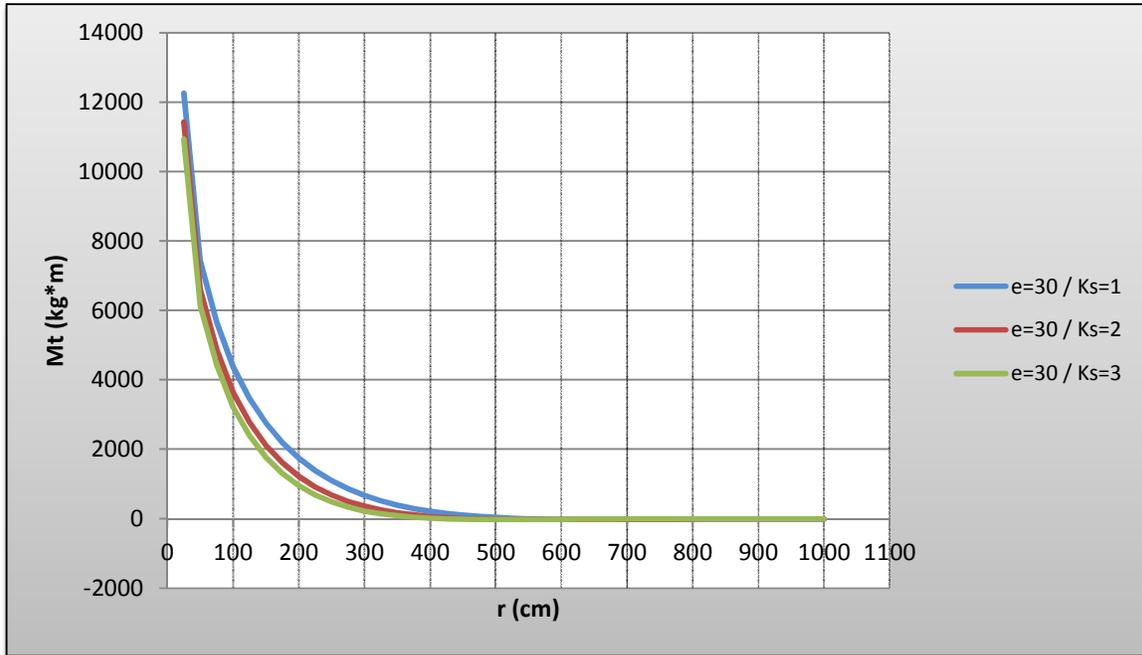
Los mayores momentos radiales ocurren en las proximidades del punto de aplicación de la carga.

4.1.2. Momentos tangenciales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa

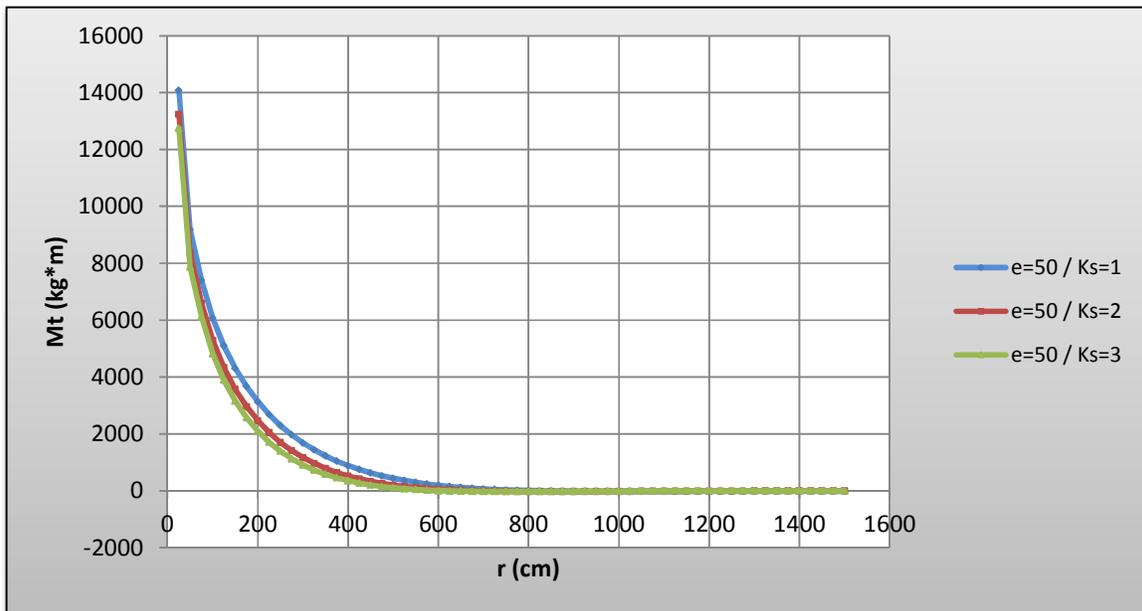
Gráfica Nº 4.1.8. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm



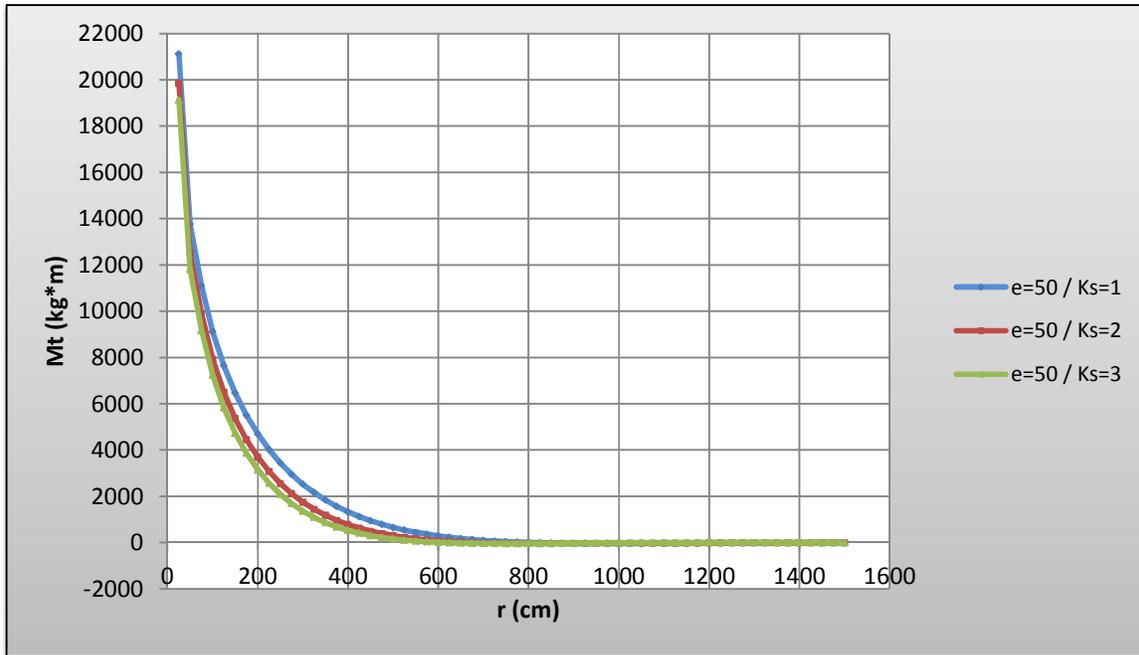
Gráfica Nº 4.1.9. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm



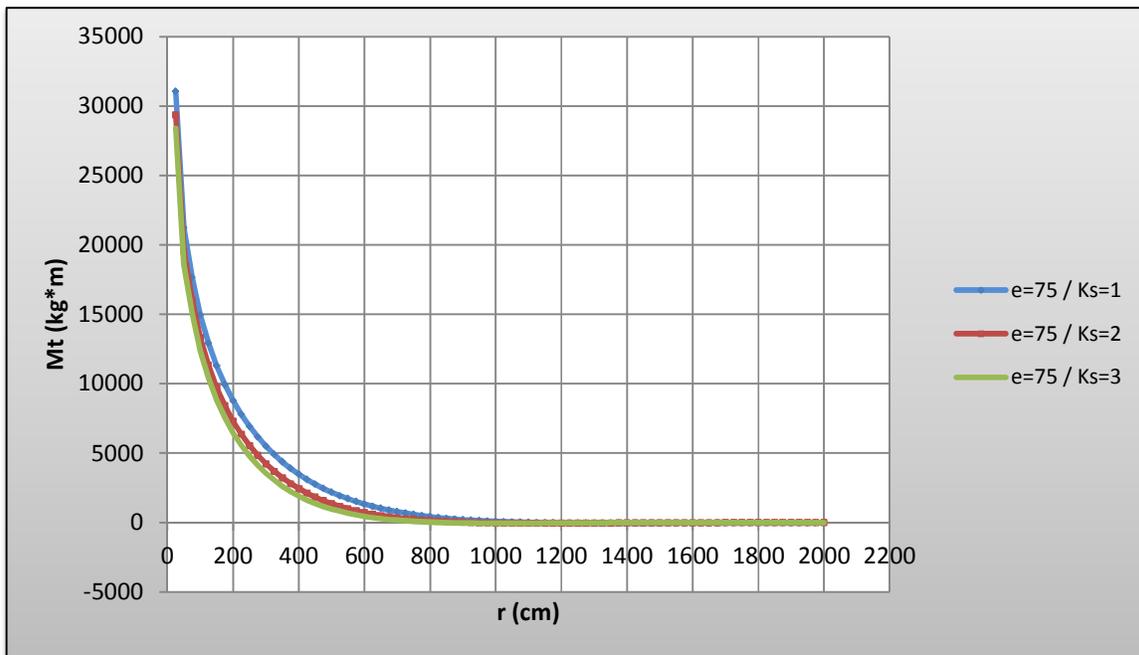
Gráfica Nº 4.1.10. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm



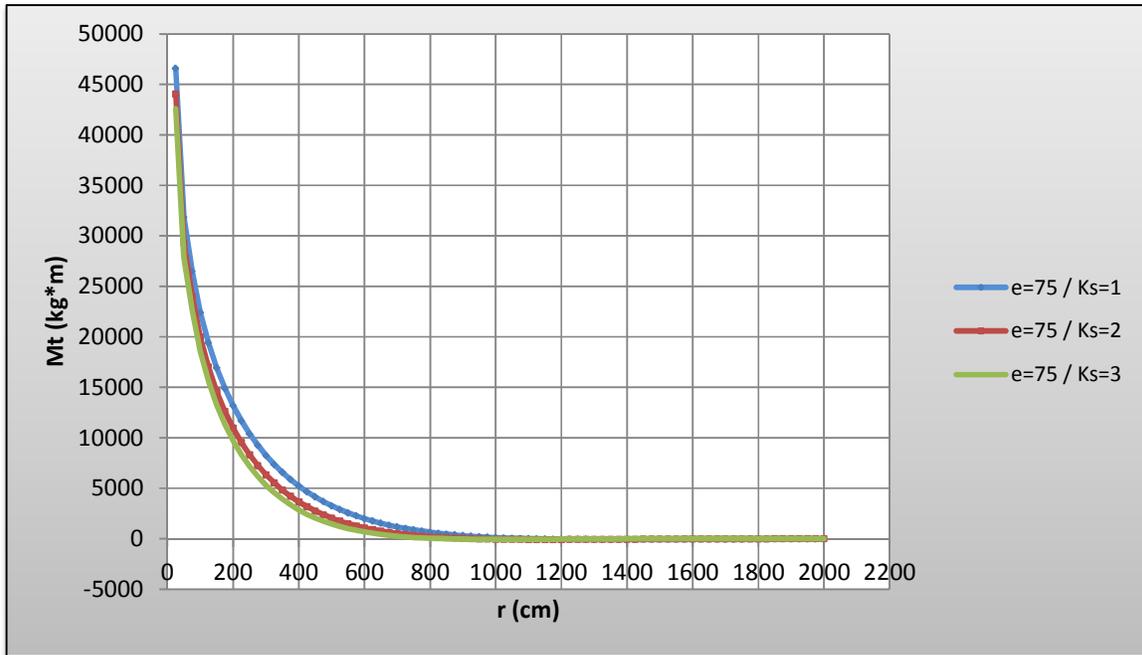
Gráfica N° 4.1.11. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm



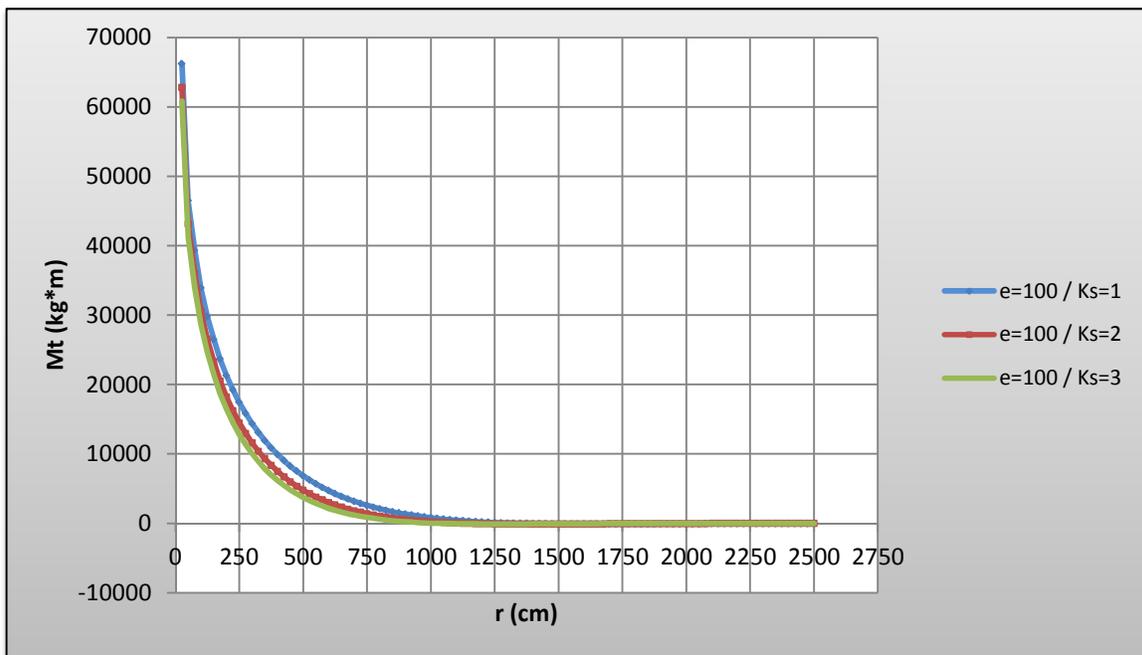
Gráfica N° 4.1.12. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm



Gráfica N° 4.1.13. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm



Gráfica N° 4.1.14. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$



Todas las gráficas de momentos tangenciales expresadas en las páginas previas, evidencian un comportamiento similar de las curvas, y al igual que sucede con los momentos radiales las magnitudes son lo que varía según los valores de los parámetros considerados.

Independientemente de dichos valores se hace evidente que todas las curvas tienen un comportamiento acentuadamente decreciente para radios menores y con el aumento del radio la pendiente tiende a cero cada vez más.

Al igual que las curvas del momento radial, las de momentos tangenciales son asintóticas a $M_t=0$. Sin embargo, se puede considerar que los momentos tangenciales sólo poseen una rama positiva al haberse obtenido valores de momento negativo muy bajas en relación al orden de magnitudes de cada caso.

Es posible aseverar que los momentos tangenciales son directamente proporcionales a la magnitud de la carga e inversamente proporcionales a la del módulo de reacción del suelo. Además, los momentos tangenciales disminuyen a mayores radios hasta disiparse por completo en un valor igual a cero sin llegar a presentar valores de momentos negativos significativos.

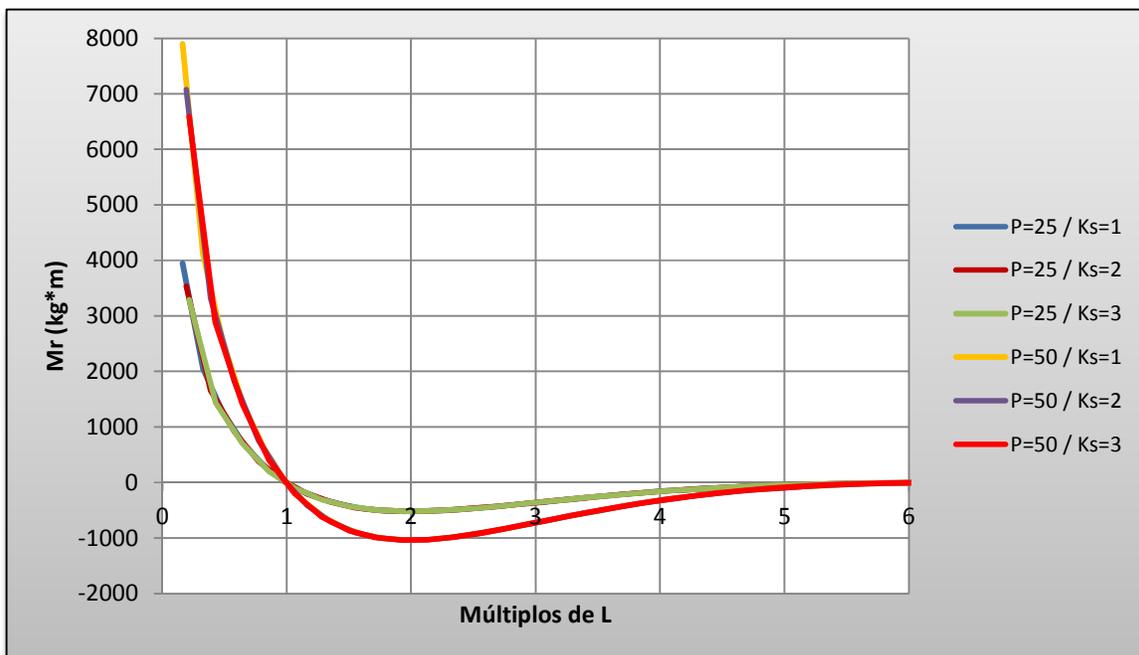
La magnitud de los momentos tangenciales es directamente proporcional al espesor de la placa.

Los mayores momentos tangenciales ocurren a menores radios.

4.1.3. Momentos radiales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa

Como se mencionó en el marco teórico, según bibliografía consultada (Shukla, 1984), el efecto de una carga en una placa sobre fundación elástica la carga se disipa a una distancia igual a cuatro veces el radio de rigidez efectiva de la sección. Es por ello que se generaron gráficas que pudiesen evidenciar y comprobar este aspecto. A continuación se publican las mismas:

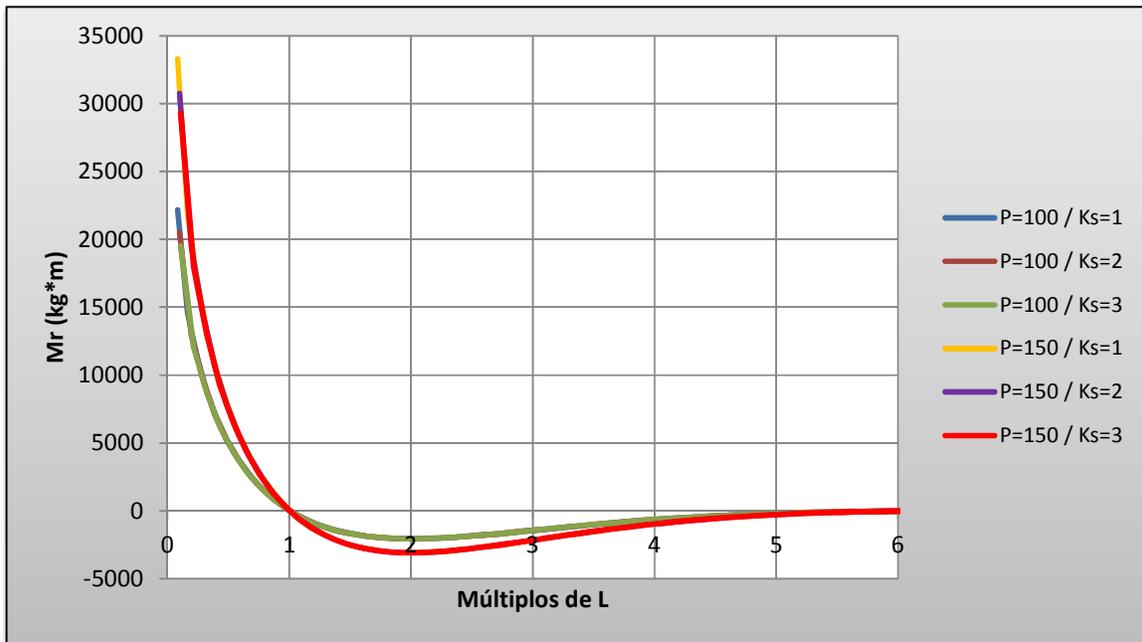
Gráfica Nº 4.1.15. Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25\text{Ton}$, $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$



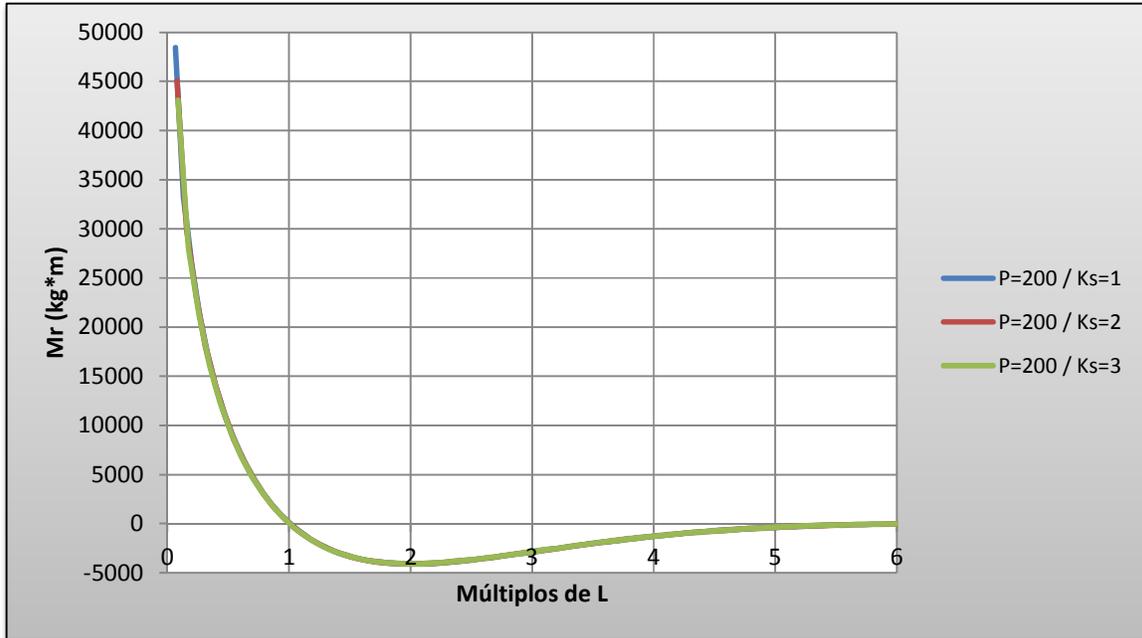
Gráfica N° 4.1.16. *Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas P=50Ton, P=75 Ton y espesor de losa e=50 cm*



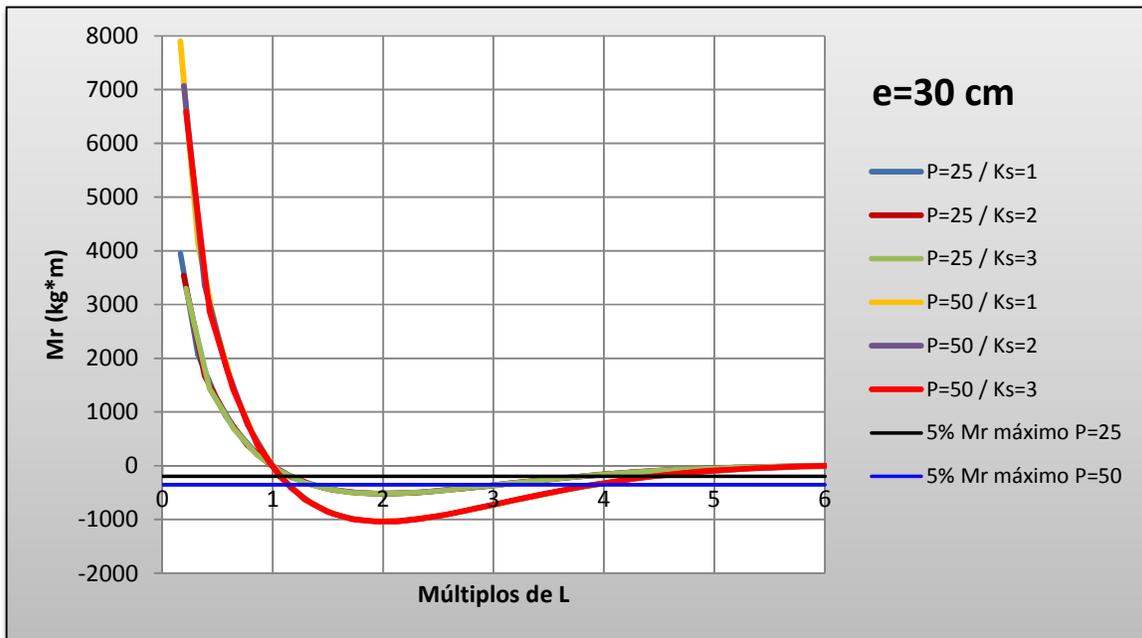
Gráfica N° 4.1.17. *Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas P=100 Ton, P=150 Ton v espesor de losa e=75 cm*



Gráfica N° 4.1.18. Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm



Gráfica N° 4.1.19. Comprobación de disipación de momentos radiales considerando el criterio del 5% de M_r máximo



Como primera observación es evidente que el comportamiento de las curvas es exactamente el mismo. Independientemente del módulo de balasto evaluado las curvas de M_r en función de los múltiplos de radio de rigidez efectiva son idénticas. Tan evidente es la tendencia de las mismas, que las curvas están solapadas y se imposibilita diferenciar curvas de distintos k entre sí.

Al suceder variaciones de cargas, las curvas presentan el mismo comportamiento pero con magnitudes diferentes. Es decir, el k no influye en las magnitudes de las curvas pero la carga P sí.

En segundo lugar, los momentos radiales siempre poseen una magnitud nula a una distancia L desde el punto de aplicación de la carga tal como se observa en las Gráficas N°4.1.15.-N°4.1.19.

En tercer lugar, el punto de menor momento radial sucedió siempre a una distancia $2L$ del punto de aplicación de la carga.

Es obligatorio comentar que el valor del 5% del M_r máximo evaluado se logra a tres radios distintos, una vez en la Zona 1 (con signo positivo), una vez en la Zona 2 y una última vez en la Zona 3 (ambas con signo negativo). Sin embargo, podemos observar que al obtenerse este valor en la Zona 3 los momentos disminuyen cada vez más de forma asintótica a cero y es por ello que este es el radio que se puede considerar como el de influencia máxima de la carga.

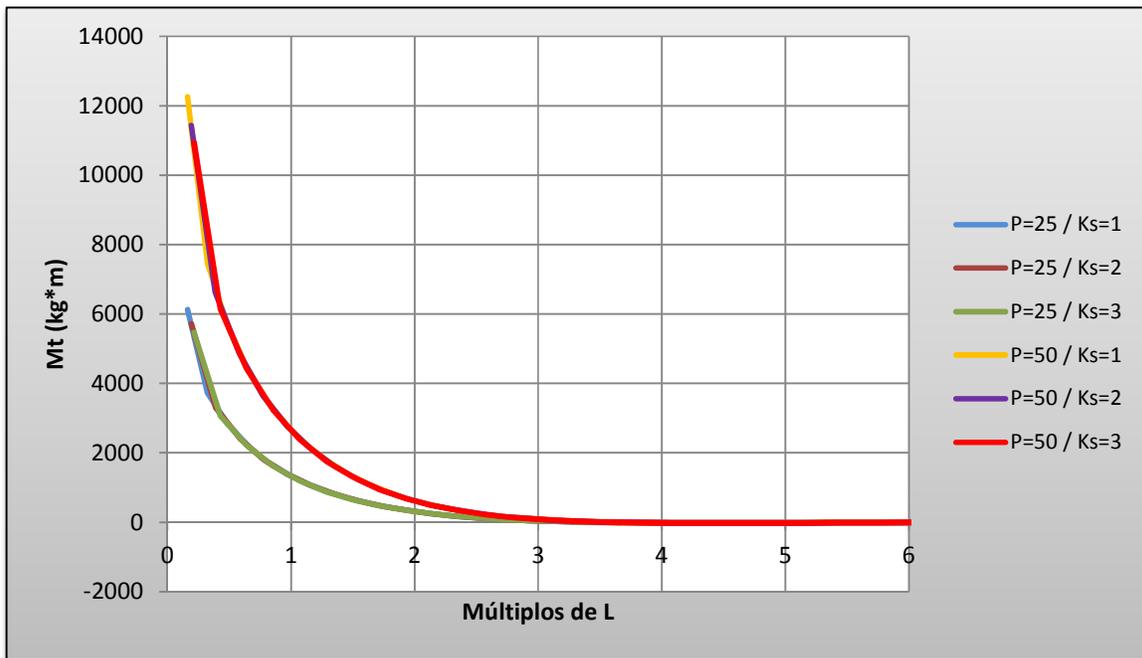
Se puede aseverar la premisa de que a una distancia $4L$ las magnitudes de momento radial se hacen despreciables, al haberse demostrado en la Gráfica N°4.1.19. que en este punto los momentos son menores al 5% del valor obtenido para el menor radio estudiado (25 cm), inclusive esta magnitud se obtiene un poco antes de la distancia $4L$ en la Zona 3.

Únicamente a una distancia igual a $6L$ se puede observar la disipación total de la carga.

La tendencia de las pendientes de las gráficas es igual a la descrita para la comparación de los momentos en función del radio.

4.1.4. Momentos tangenciales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa

Gráfica N° 4.1.20. Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25\text{Ton}$, $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$



Gráfica N° 4.1.21. Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50\text{Ton}$, $P=75\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=50\text{ cm}$



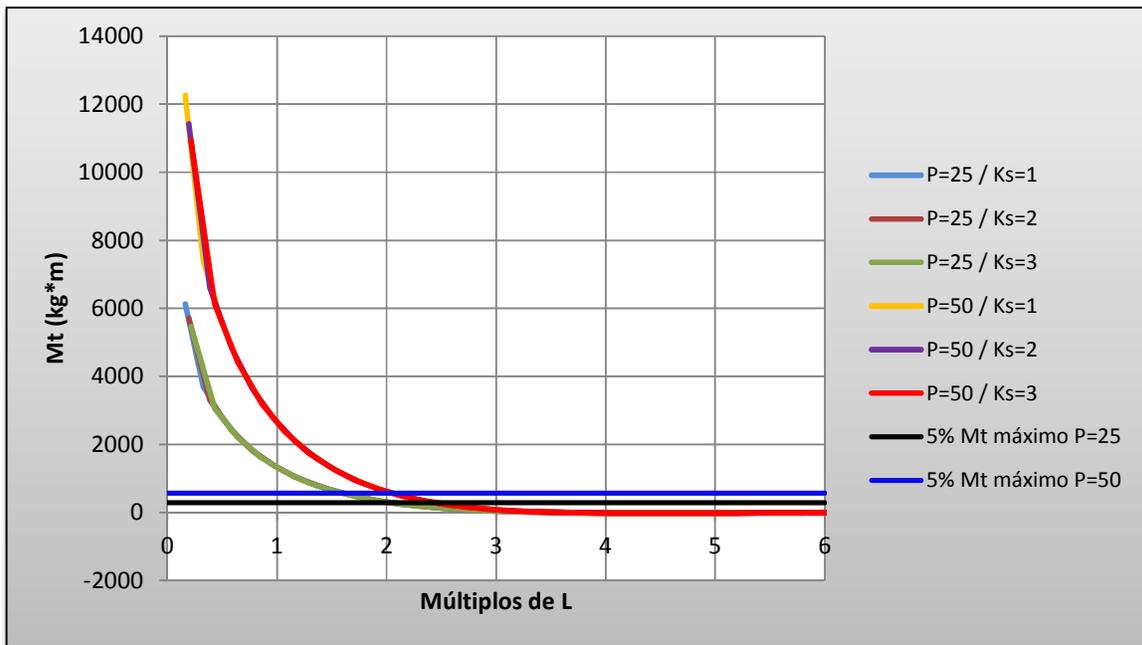
Gráfica N° 4.1.22. Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100\text{ Ton}$, $P=150\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=75\text{ cm}$



Gráfica N° 4.1.23. Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm



Gráfica N° 4.1.24. Comprobación de disipación de momentos radiales considerando el criterio del 5% de M_t máximo



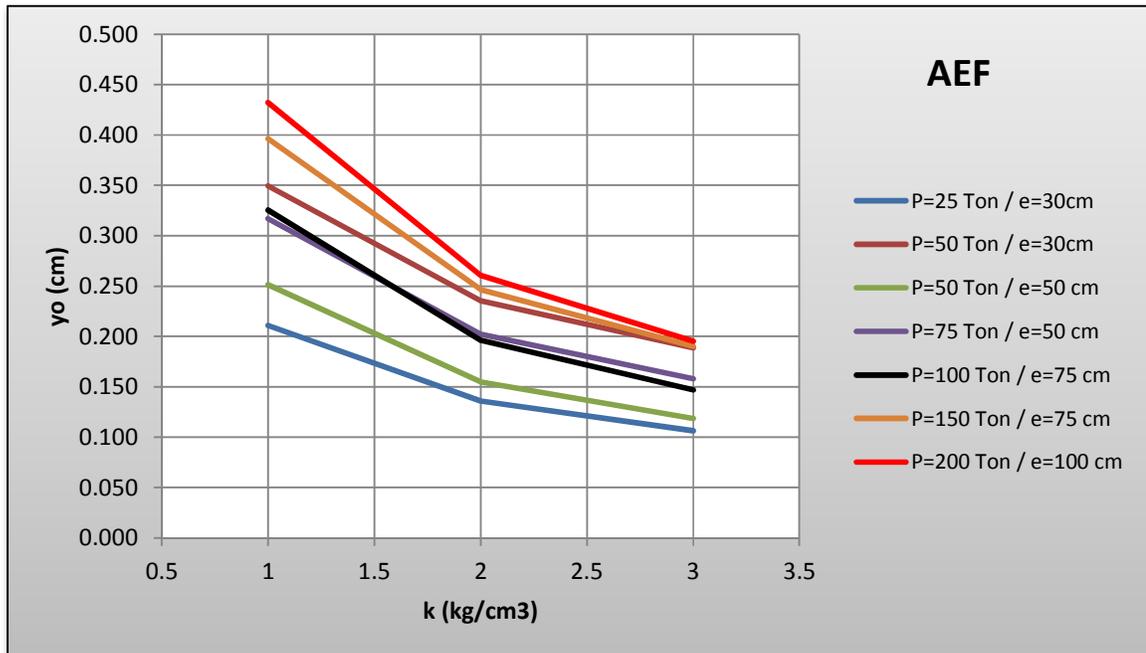
En el caso correspondiente a momentos tangenciales, la tendencia de las pendientes de las curvas es idéntica a la descrita en el análisis de los M_t en función del radio.

El comportamiento de los momentos tangenciales en función de los múltiplos de L es el mismo para cada sección independientemente de k . De forma que las curvas de distintos valores de módulo de balasto se solapan y se imposibilita diferenciarlas entre sí, tal como sucede con los momentos radiales. Sin embargo, las magnitudes de M_t varían en función de la carga y del espesor.

A diferencia de lo evidenciado en las curvas de M_r , se aprecia en la Gráfica N°4.1.24. que la disipación del momento tangencial corresponde exactamente a una distancia $2L$ según el criterio del 5% de la magnitud máxima (a 25 cm del pto. de aplicación de P) y a $4L$ de forma absoluta.

4.1.5. Magnitudes de deflexión máxima en función de espesores, cargas y módulos de balasto

Gráfica Nº 4.1.25. Magnitudes de deflexión máxima vs. módulos de balasto, espesores y



La magnitud de deflexiones máximas es directamente proporcional a la carga e inversamente proporcional a k .

Existe un comportamiento errático de las pendientes y valores obtenidos impidiendo observar una tendencia distinta a la mencionada.

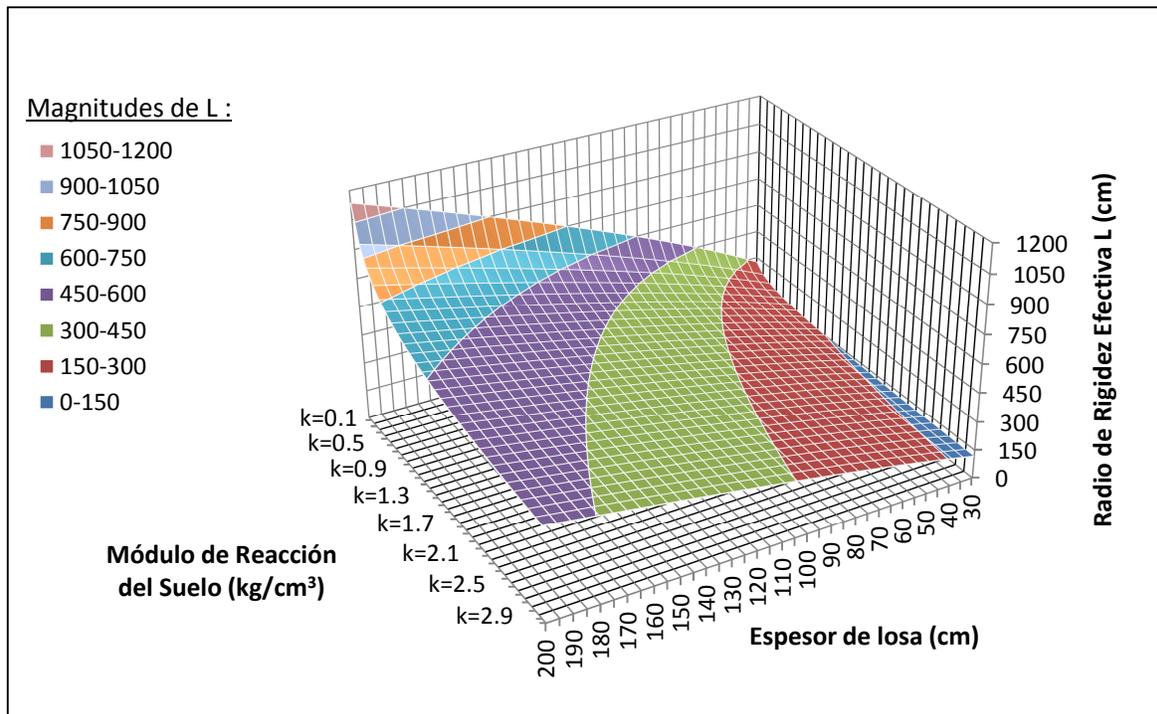
4.2. Método Simplificado

Se generó un ábaco en el que se obtuvieron los radios de rigidez efectiva para un gran número de condiciones posibles. Esto no solo se hizo para el cálculo de las placas sino también para el propósito investigativo de observar tendencias que surgen de la manipulación de las variables que influyen en este importante factor.

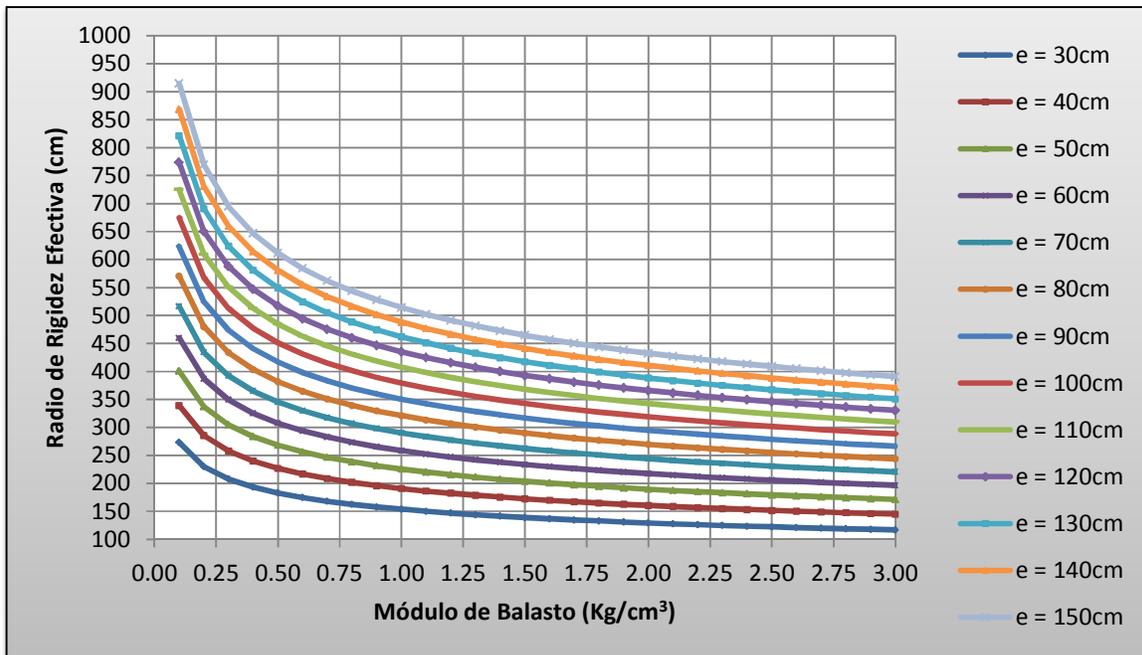
El ábaco se hizo para valores de módulo de balasto entre 0 y 3 kg/cm³ con intervalos de 0.1 kg/cm³ y con espesores de losa entre 30 cm y 200 cm con intervalos de 0.5 cm.

En la Gráfica N°4.2.1 y la Gráfica N°4.2.2 se observan representaciones visuales de la variabilidad de los valores de L cuando se consideran de forma simultánea espesor de losa y *k* del suelo.

Gráfica N° 4.2.1. Radio de rigidez efectiva vs. espesor de losa vs. módulo de reacción del suelo



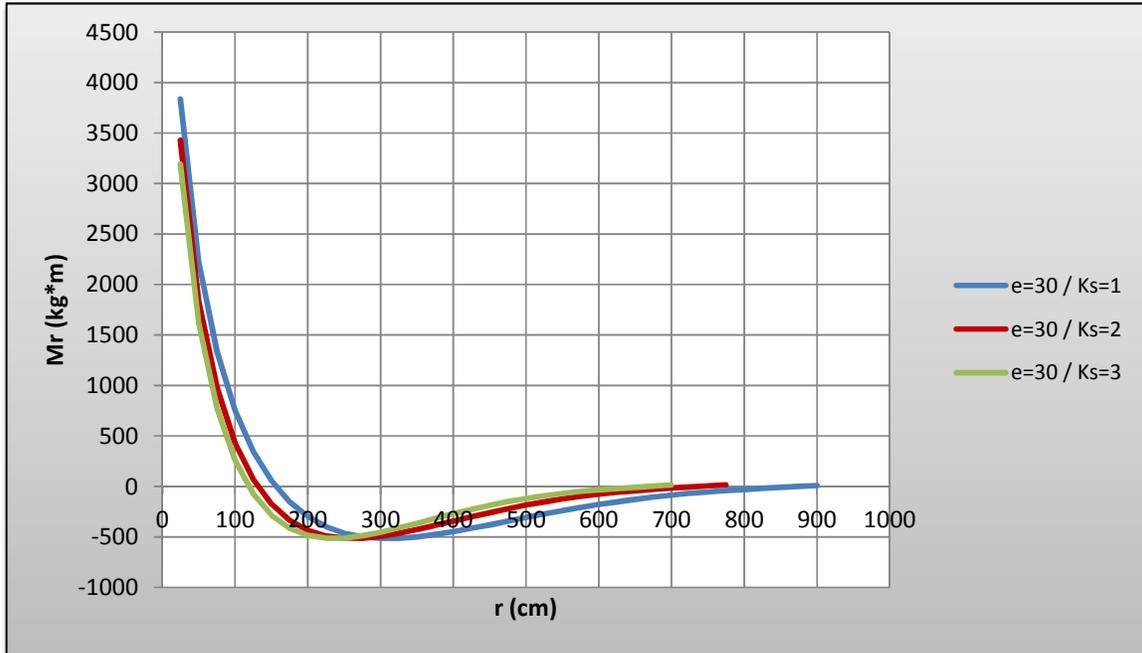
Gráfica N° 4.2.2. Radio de rigidez efectiva vs. espesor de losa vs. módulo de reacción del suelo



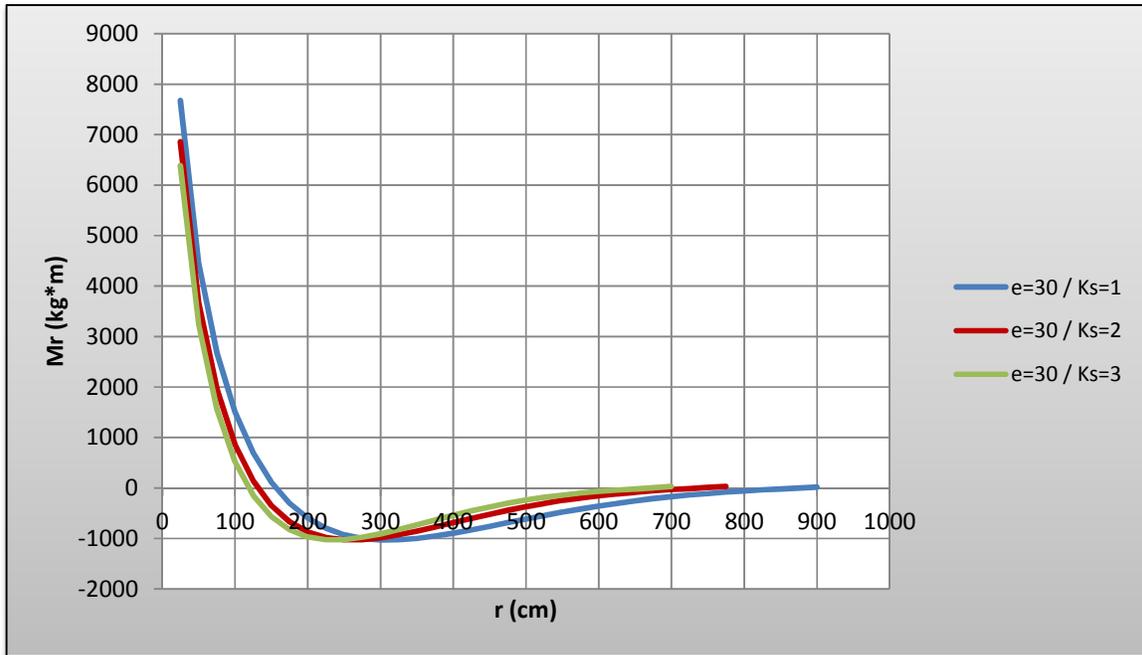
El radio de rigidez efectiva L es directamente proporcional al espesor de la losa e e inversamente proporcional al módulo de balasto.

4.2.1. Momentos radiales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa

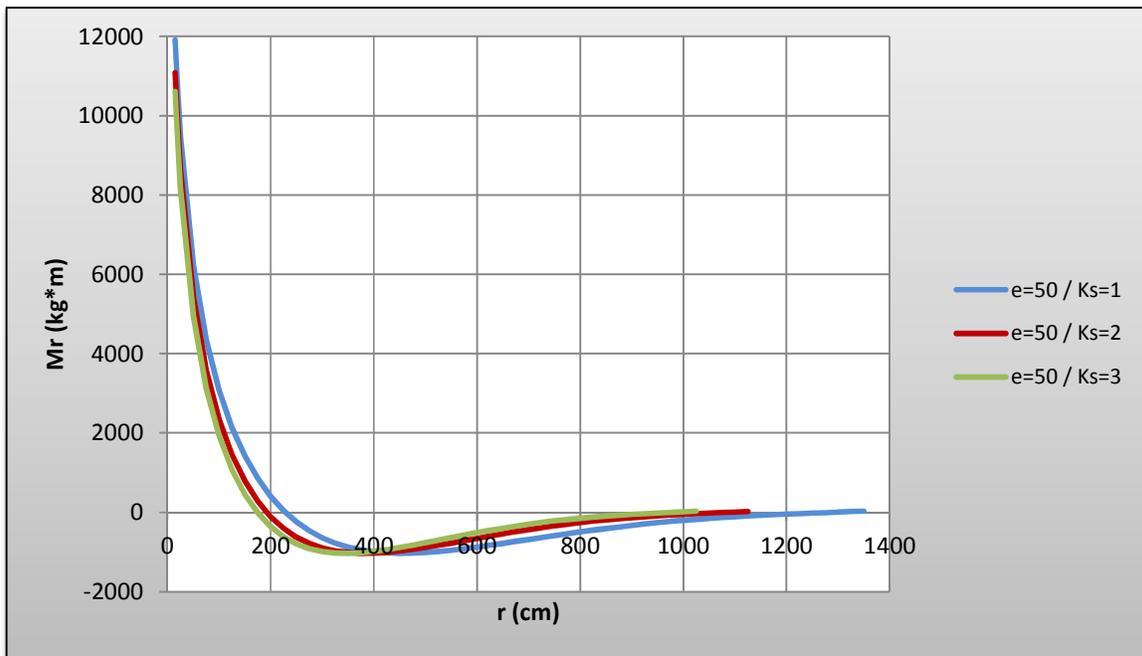
Gráfica N° 4.2.3. Momento radial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$



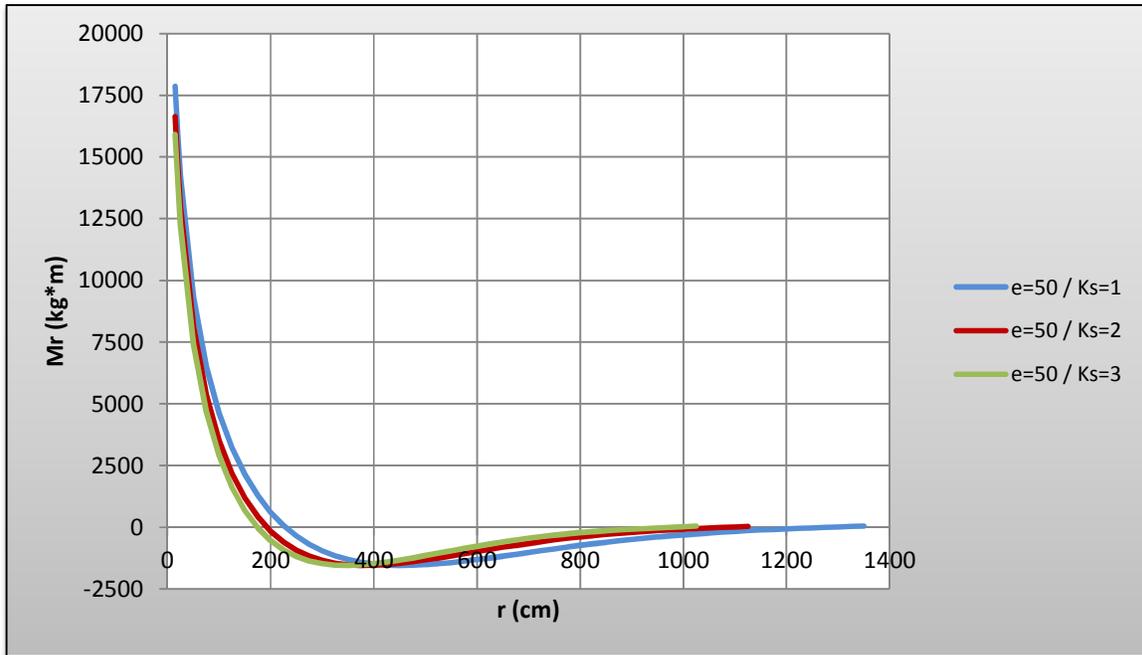
Gráfica Nº 4.2.4. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$



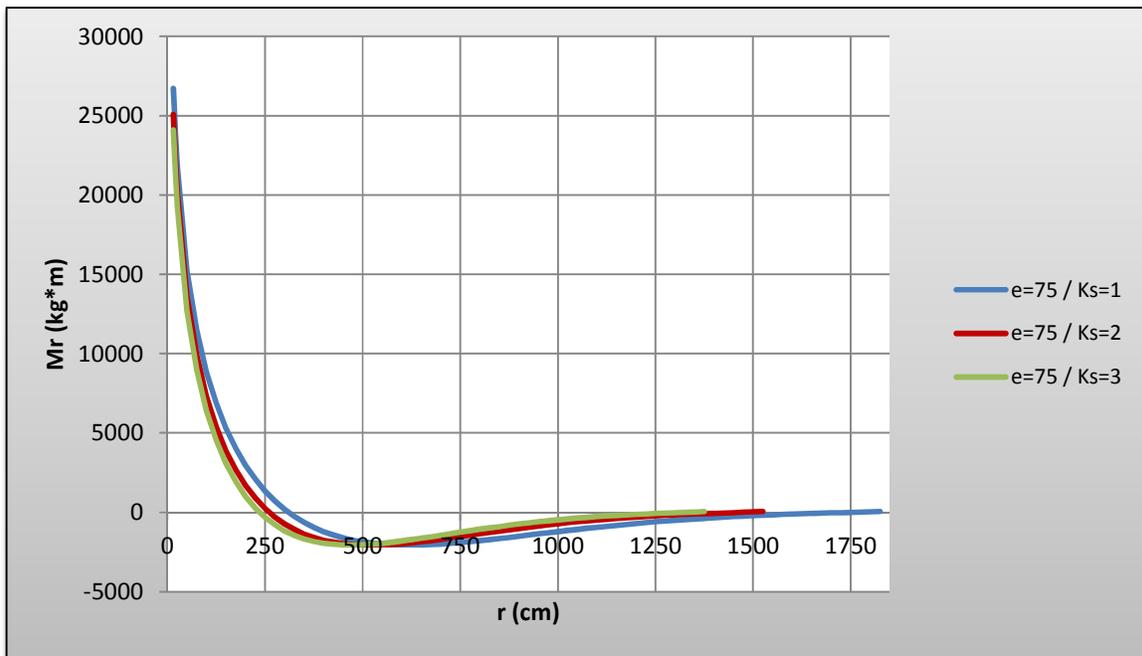
Gráfica Nº 4.2.5. Momento radial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$



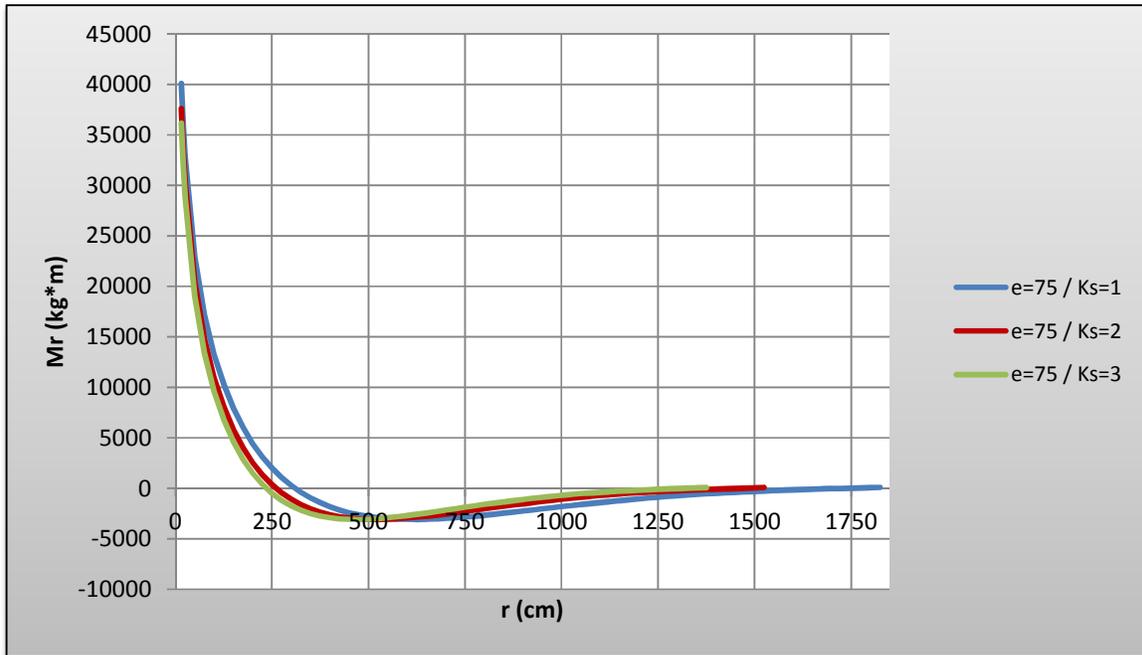
Gráfica N° 4.2.6. *Momento radial vs. Radio para una carga P=75 Ton y espesor de losa e=50*



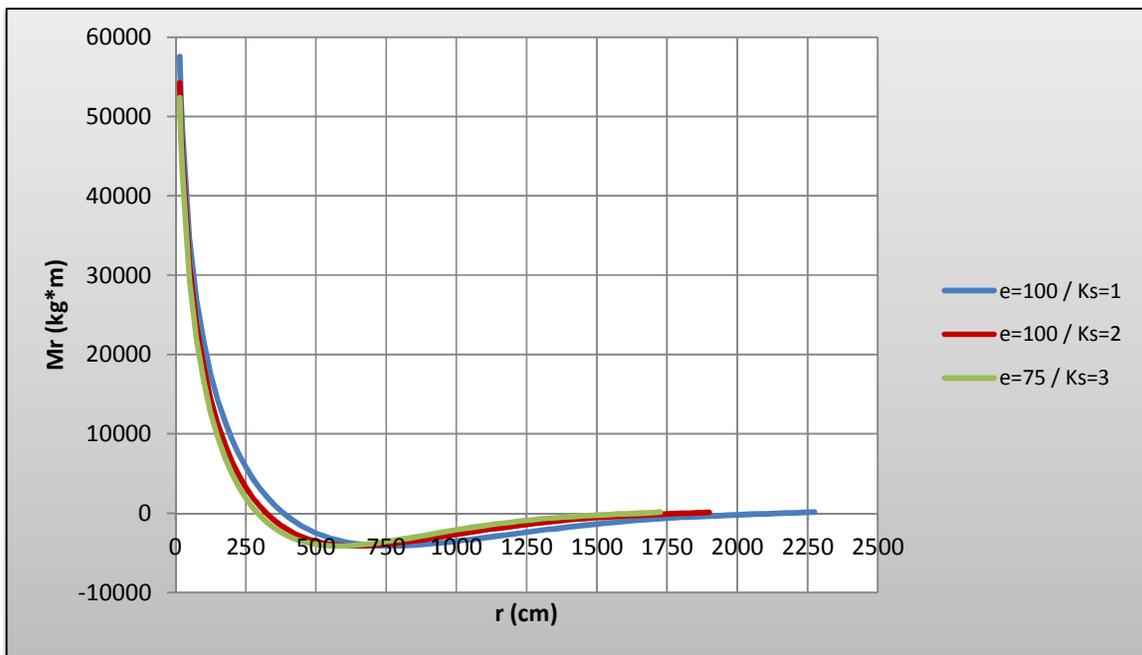
Gráfica N° 4.2.7. *Momento radial vs. Radio para una carga P=100 Ton y espesor de losa e=75 cm*



Gráfica N° 4.2.8. *Momento radial vs. Radio para una carga P=150 Ton y espesor de losa e=75*



Gráfica N° 4.2.9. *Momento radial vs. Radio para una carga P=200 Ton y espesor de losa e=100 cm*



e	P \ K	MENOR Mr			Desviación Estándar
		1 kg/cm ³	2 kg/cm ³	3 kg/cm ³	
30 cm	25 Ton	-514.5	-513.8	-513.4	0.59
	50 Ton	-1029.1	-1027.5	-1026.7	1.17
50 cm	50 Ton	-1031.1	-1030.5	-1030.9	0.30
	75 Ton	-1546.7	-1545.8	-1546.4	0.45
75 cm	100 Ton	-2061.7	-2061.9	-2061.7	0.09
	150 Ton	-3092.6	-3092.8	-3092.6	0.13
100 cm	200 Ton	-4123.7	-4124.2	-4124.5	0.45

Tabla Nº 4.2. Valores de momentos radiales mínimos para distintos módulos de balasto y desviaciones estándar de los mismos

El comportamiento de las gráficas es exactamente igual al descrito en el análisis de la data correspondiente a momentos radiales del método de AEF. Ambos métodos arrojaron gráficos con comportamientos idénticos.

Se puede aseverar de igual forma que los momentos radiales mínimos son iguales independientemente del valor de módulo de reacción del suelo como se observa en la Tabla Nº4.2. En el caso del Método Simplificado se obtuvo una desviación estándar aún menor no superando un valor de 1.20 Kg*m.

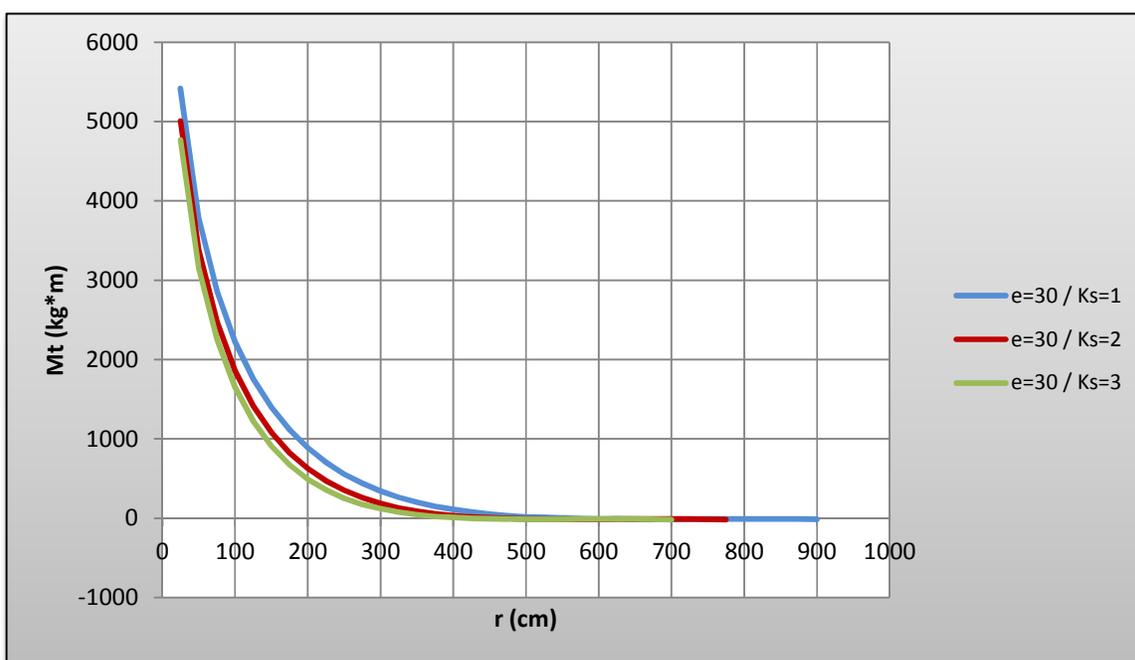
Al igual que con el método de AEF podemos aseverar que la magnitud de los momentos radiales es directamente proporcional a la carga e inversamente proporcional al módulo de balasto, a excepción de la zona con pendiente negativa correspondiente a momentos negativos y hasta el punto de pendiente igual a cero.

La magnitud de los momentos radiales positivos es directamente proporcional al espesor de la placa.

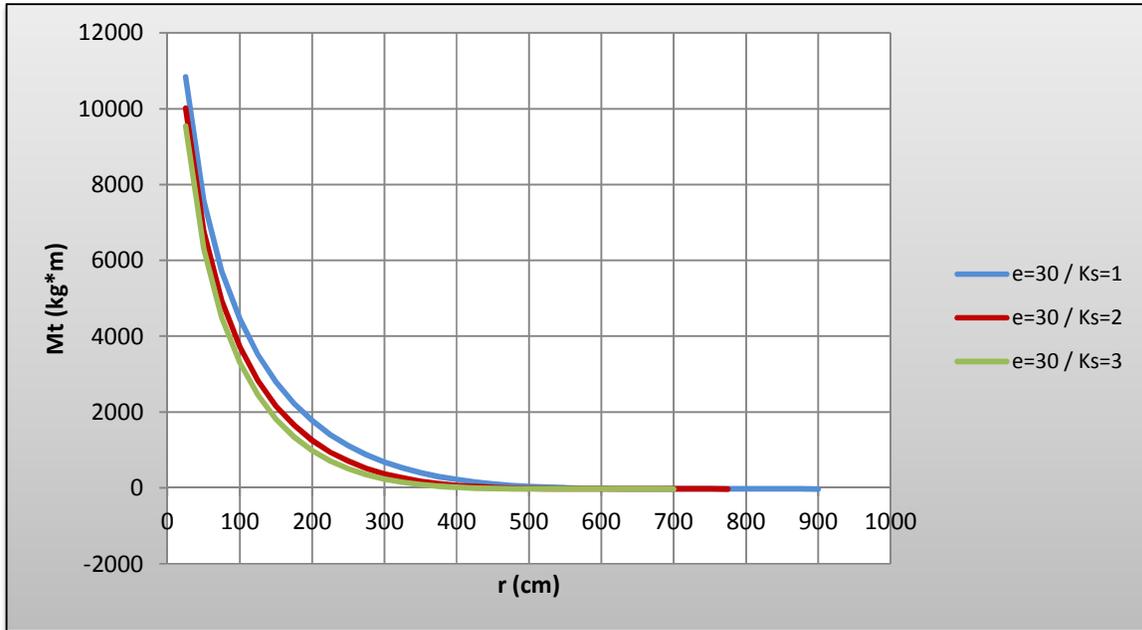
Los momentos radiales de mayor magnitud ocurren en las proximidades del punto de aplicación de P.

4.2.2. Momentos tangenciales en función del radio, módulo de balasto y espesor de losa

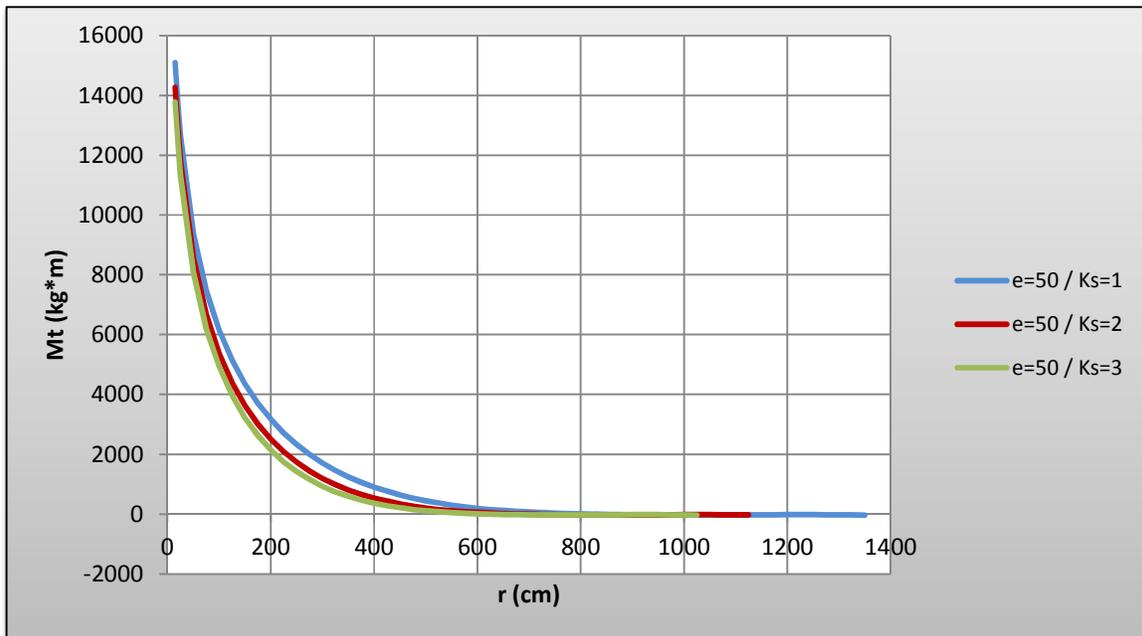
Gráfica Nº 4.2.10. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=25$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm



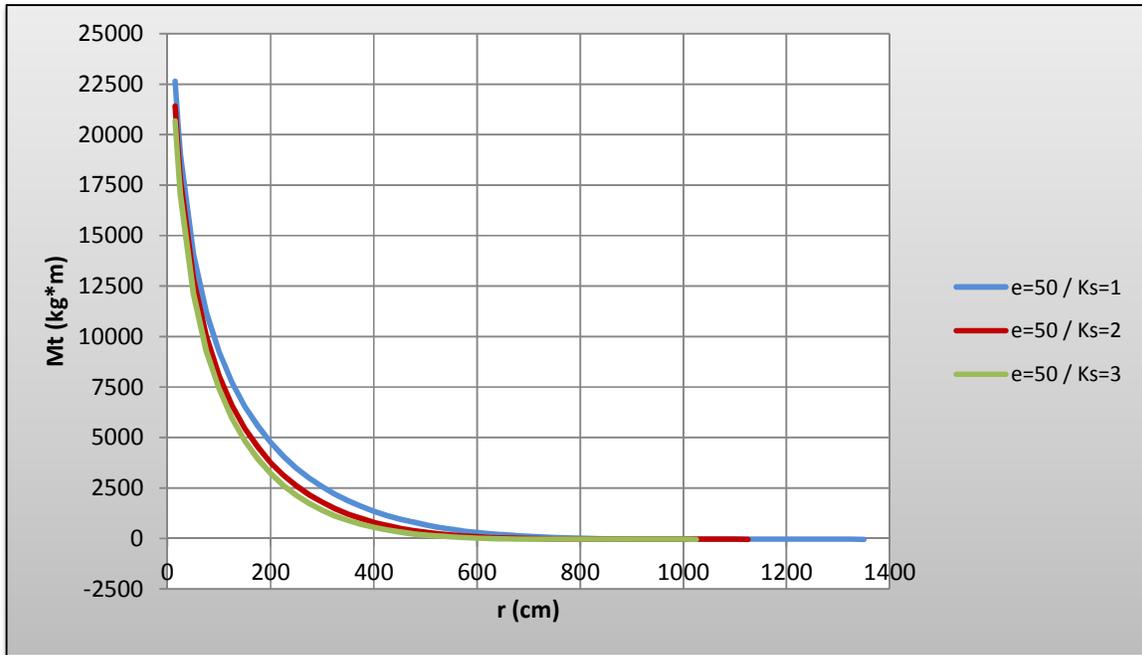
Gráfica Nº 4.2.11. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=30$ cm



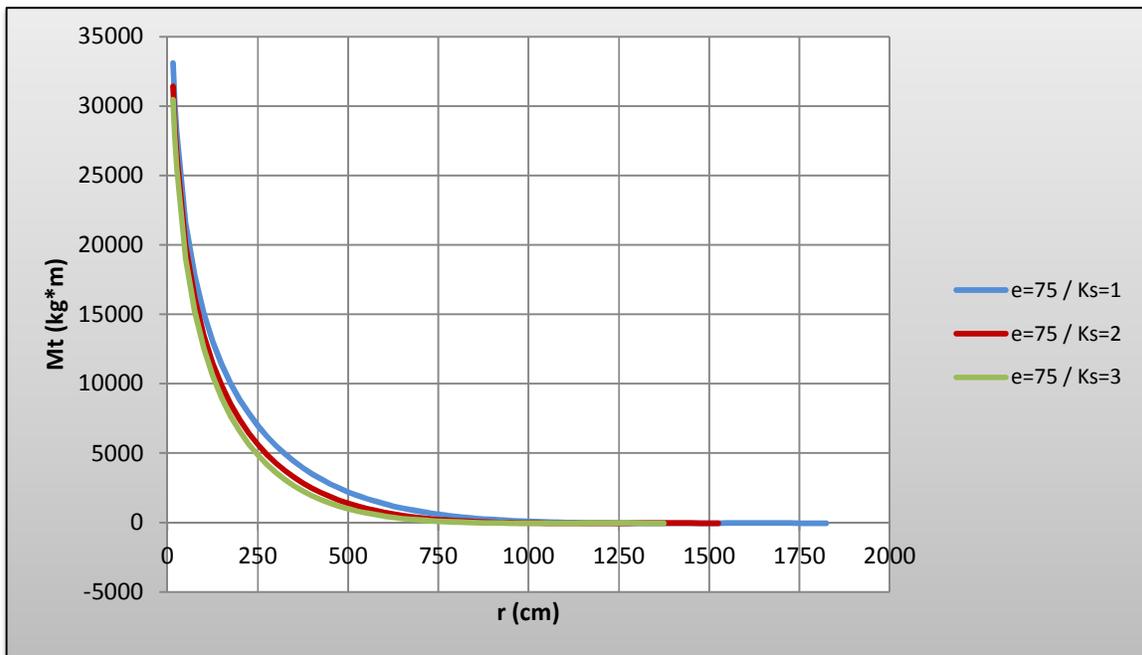
Gráfica Nº 4.2.12. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=50$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm



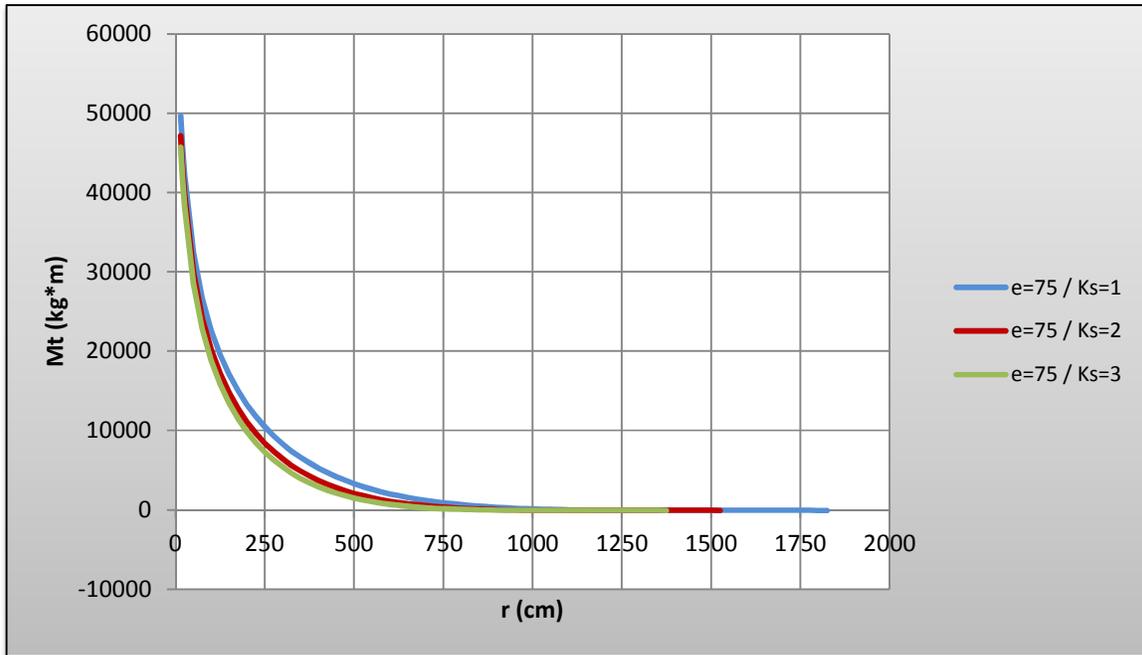
Gráfica N° 4.2.13. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=75$ Ton y espesor de losa $e=50$ cm



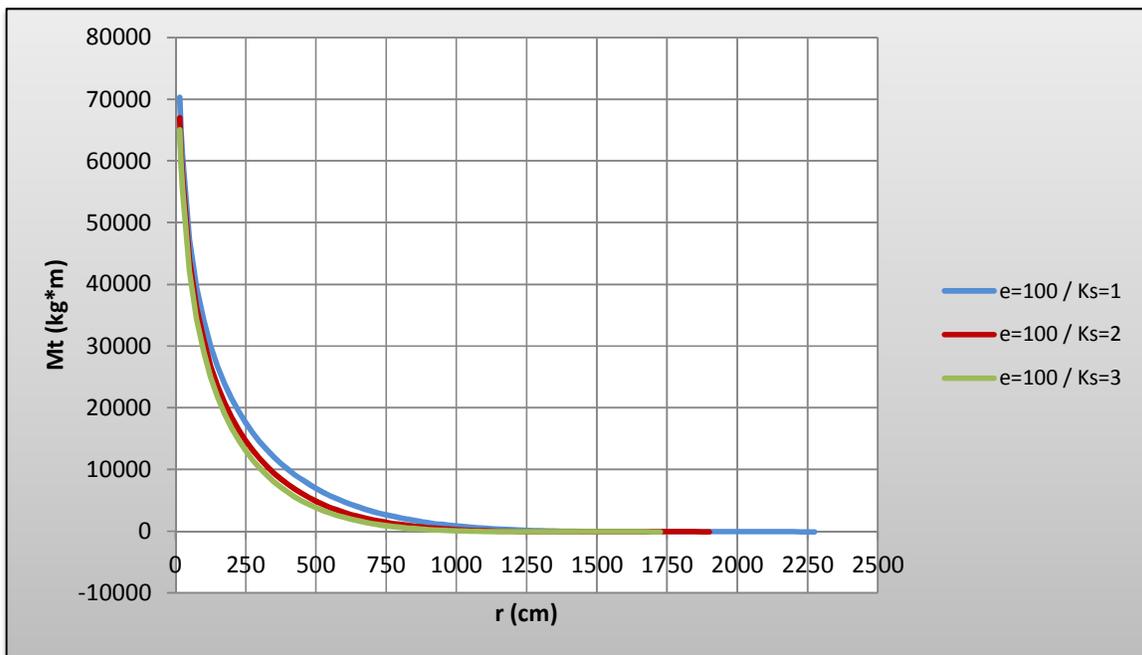
Gráfica N° 4.2.14. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=100$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm



Gráfica N° 4.2.15. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=150$ Ton y espesor de losa $e=75$ cm



Gráfica N° 4.2.16. Momento tangencial vs. Radio para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm



Al igual que lo obtenido para los momentos radiales, las gráficas de momento tangencial presentaron un comportamiento idéntico al descrito para el método de AEF. En donde los valores decrecen en mayor medida a menores radios y en menores magnitudes a mayores radios, tendiendo a cero con el aumento del mismo.

Las magnitudes de M_t son directamente proporcionales a la magnitud de la carga y el espesor de placa e inversamente proporcionales a los valores de módulo de balasto.

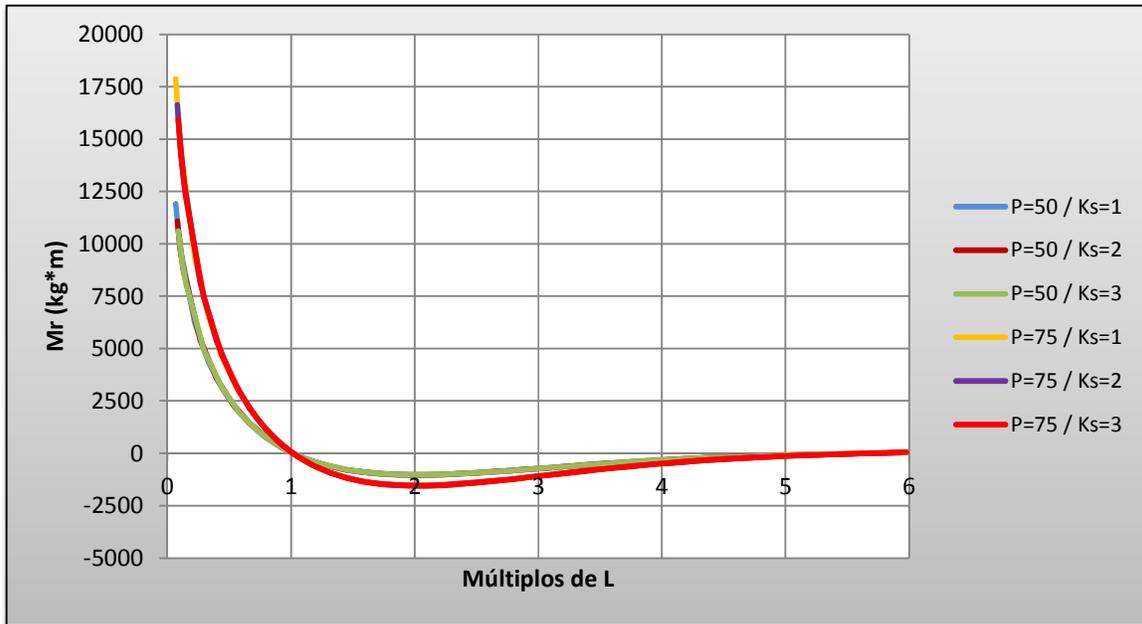
Las magnitudes mayores de momento tangencial suceden a menores radios.

4.2.3. Momentos radiales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa

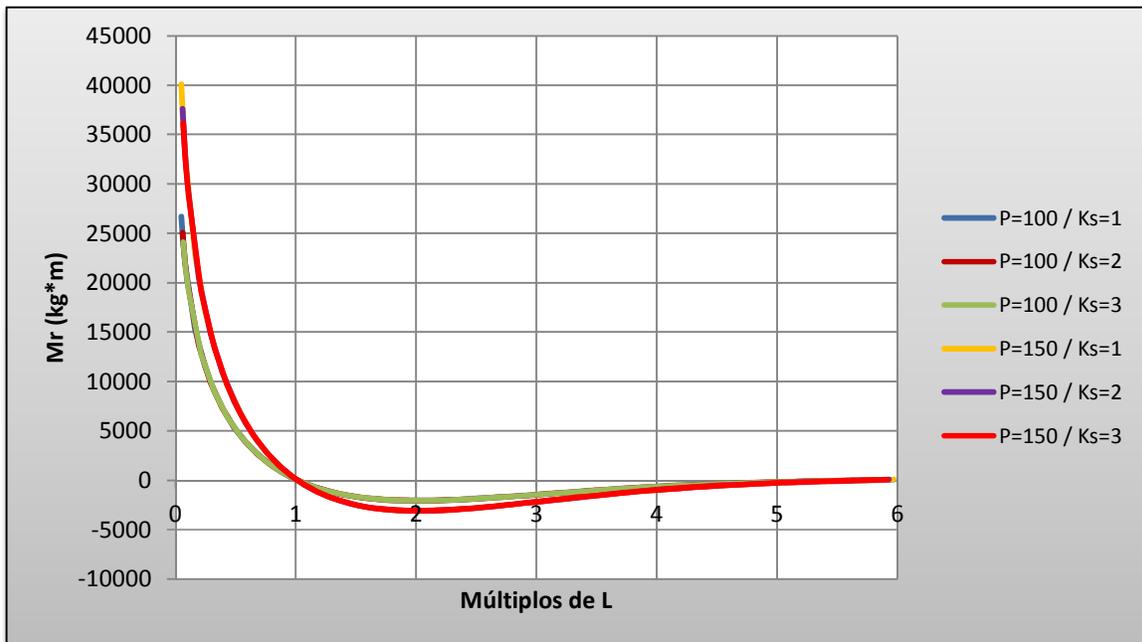
Gráfica N° 4.2.17. Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=25\text{Ton}$, $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$



Gráfica N° 4.2.18. Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=50\text{Ton}$, $P=75\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=50\text{ cm}$



Gráfica N° 4.2.19. Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas $P=100\text{ Ton}$, $P=150\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=75\text{ cm}$



Gráfica Nº 4.2.20. *Momento radial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga $P=200$ Ton y espesor de losa $e=100$ cm*



El comportamiento de las curvas de momento radial en función de los múltiplos de radio de rigidez efectiva es el mismo independientemente del módulo de reacción del suelo.

De nuevo se hace evidente que:

Primero que a una distancia L del punto de aplicación de la carga el momento radial se hace igual a cero.

Segundo que a una distancia $2L$ se logra el menor momento que genera la carga.

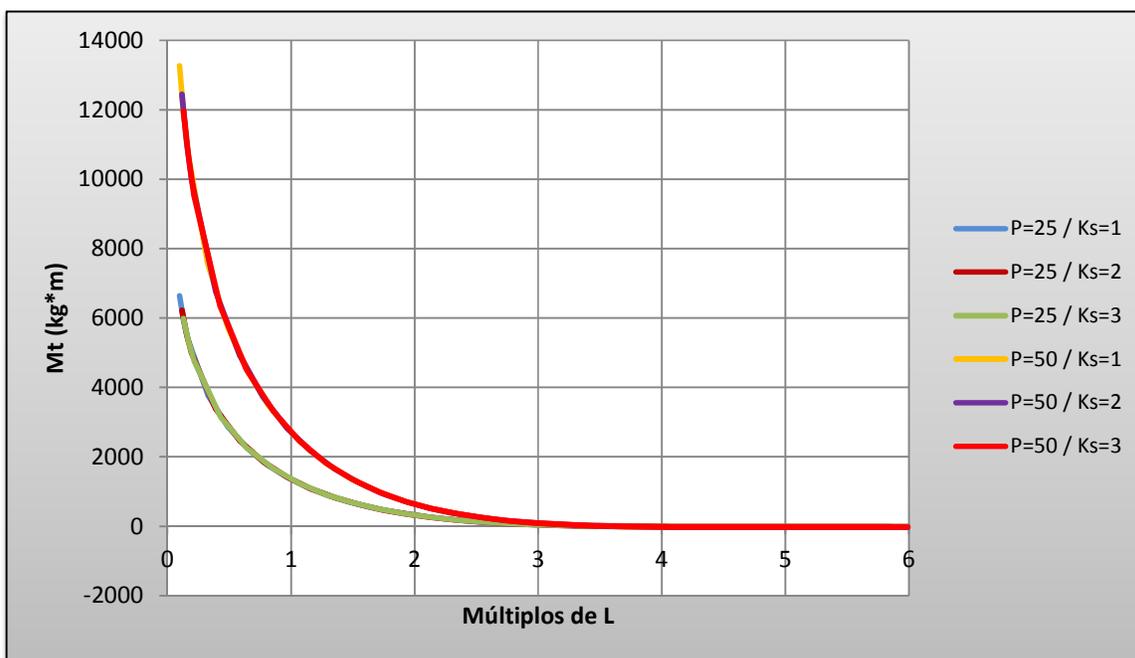
Tercero que a una distancia $4L$ se puede considerar disipada la carga y a una $6L$ la influencia de P es absolutamente nula.

En las Gráficas N°4.2.17.-N°4.2.20. se plasma como el valor del momento radial es directamente proporcional al espesor de placa y a la magnitud de carga aplicada a la placa sobre fundación elástica.

Los mayores momentos radiales ocurren en las proximidades del punto de aplicación de P y a distancias menores a una vez L desde dicho punto.

4.2.4. Momentos tangenciales en función de múltiplos del radio de rigidez efectiva, módulo de balasto y espesor de losa

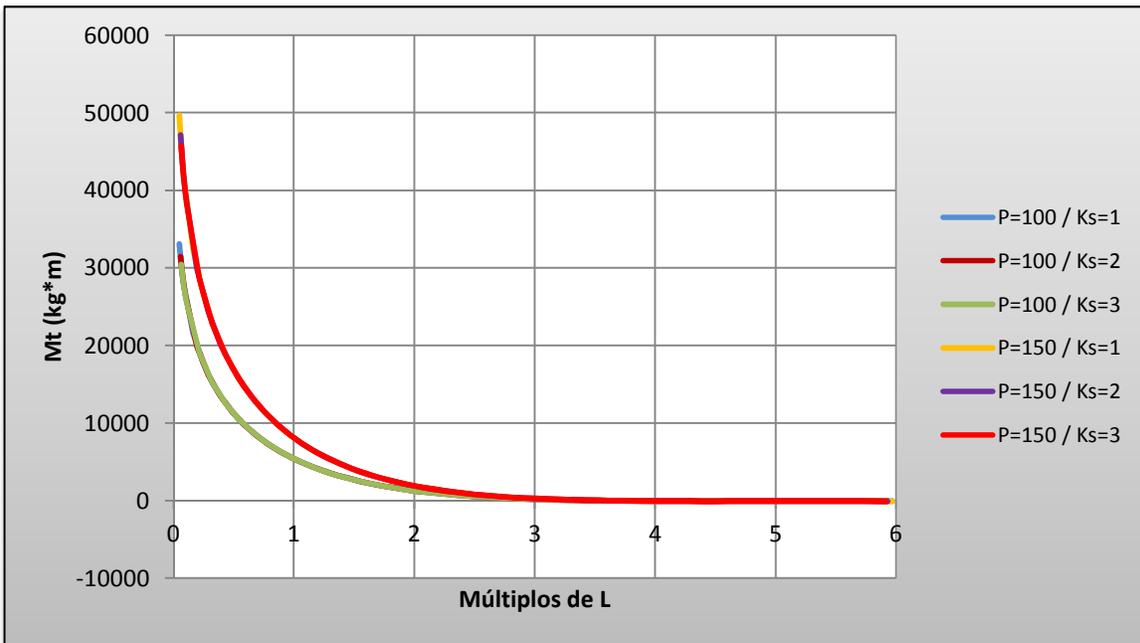
Gráfica N° 4.2.21. Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para cargas $P=25\text{Ton}$, $P=50\text{ Ton}$ y espesor de losa $e=30\text{ cm}$



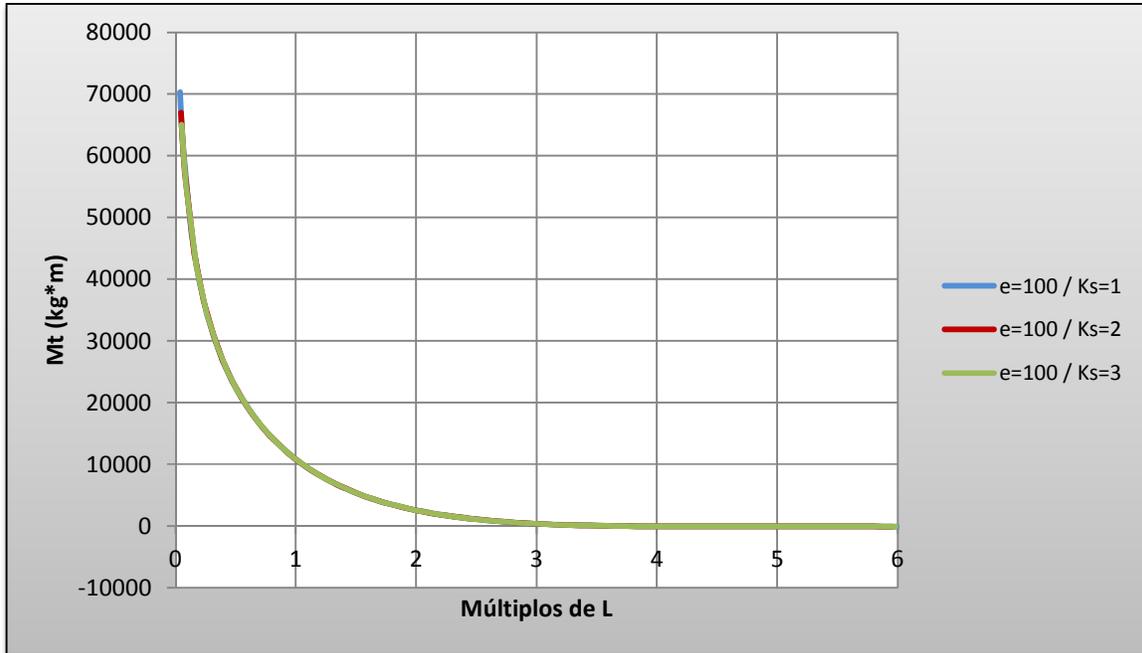
Gráfica Nº 4.2.22. *Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas P=50Ton, P=75 Ton y espesor de losa e=50 cm*



Gráfica Nº 4.2.23. *Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para unas cargas P=100 Ton, P=150 Ton y espesor de losa e=75 cm*



Gráfica N° 4.2.24. *Momento tangencial vs. múltiplos del radio de rigidez efectiva para una carga P=200 Ton y espesor de losa e=100 cm*

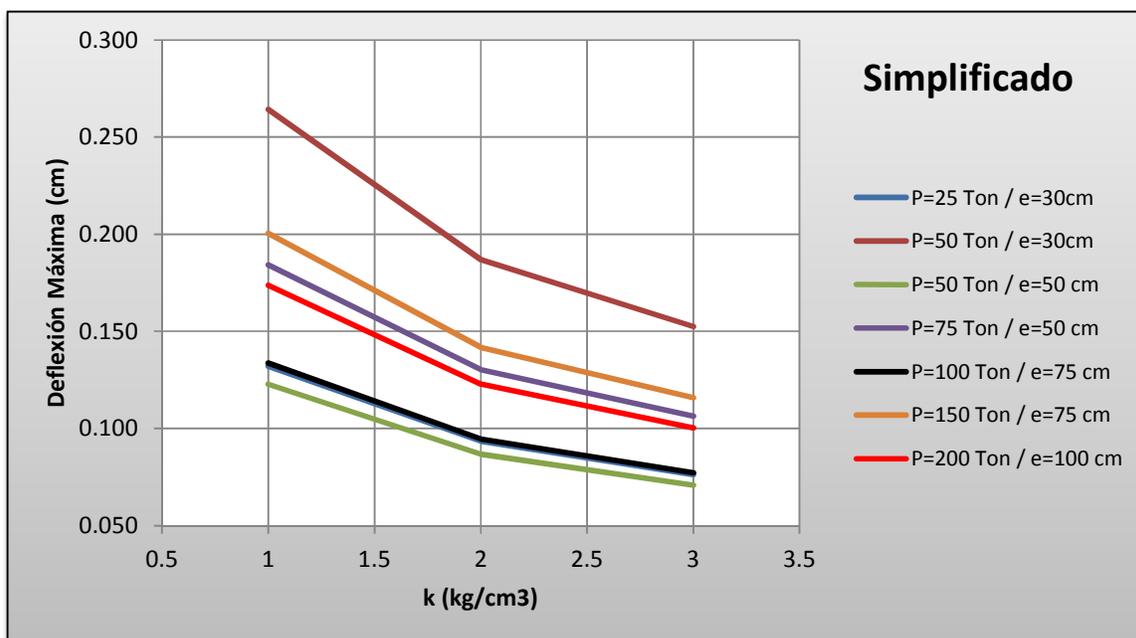


En las Gráficas N°4.2.21.-N°4.2.24. es acertado destacar que el efecto de la carga se puede considerar como disipado bajo el criterio del 5% del momento máximo a una distancia $2L$ del punto de aplicación de P y totalmente disminuida a una distancia $4L$.

Los mayores momentos tangenciales se dan a menores radios desde el punto de aplicación de la carga puntual.

4.2.5. Magnitudes de deflexión máxima en función de espesores, cargas y módulos de balasto

Gráfica N° 4.2.25. Diferencia de magnitudes de deflexión máxima vs. módulos de balasto, espesores y cargas



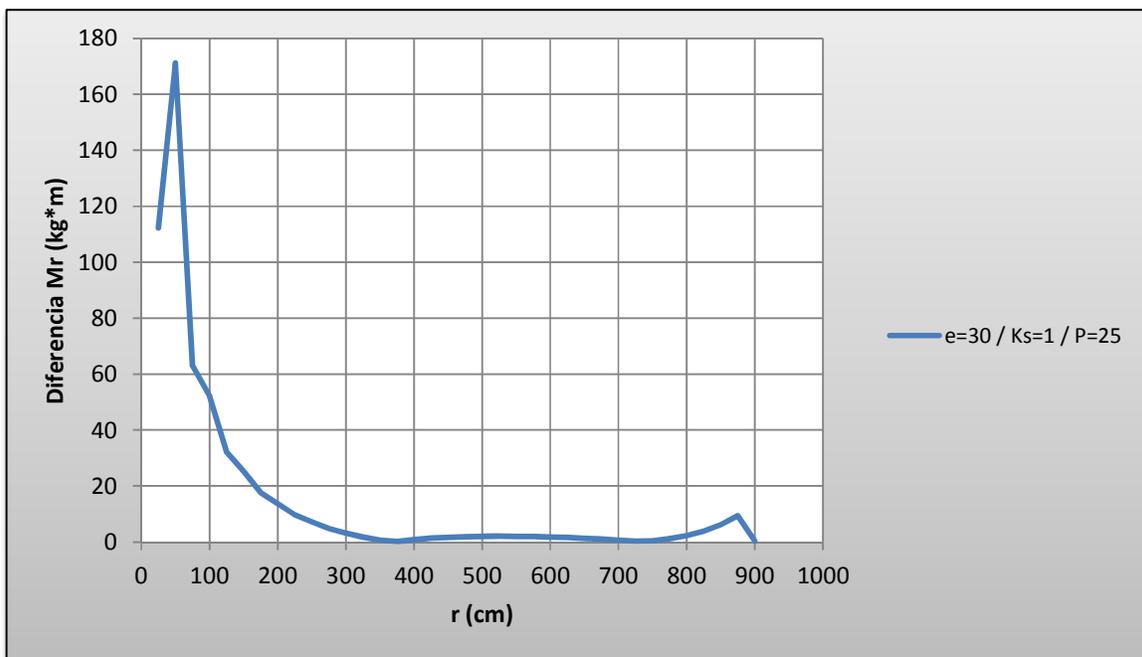
Las deflexiones máximas son directamente proporcionales a la carga e inversamente proporcionales al módulo de reacción del suelo.

4.3. Comparación entre Método Simplificado y Método de Análisis por Elementos Finitos

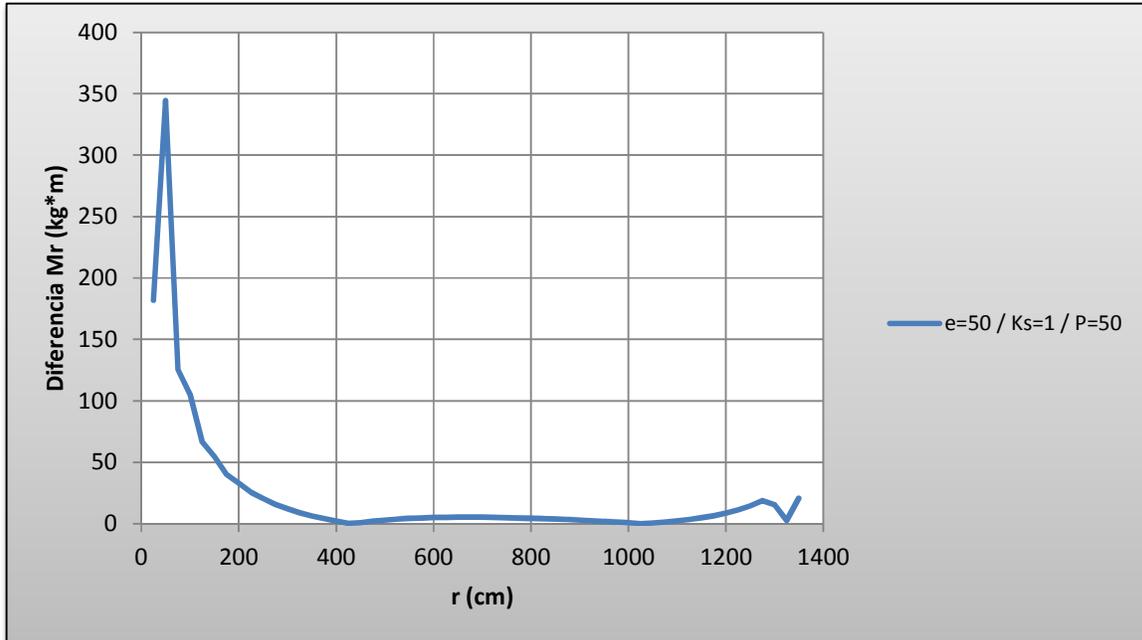
Como primera forma de comparación se decidió expresar la diferencia o sustracción entre los valores absolutos de momentos obtenidos para cada método en función de los distintos radios. Esto se hizo para todos los espesores, considerando una carga y un módulo de balasto por espesor.

4.3.1. Diferencia de magnitudes de momentos radiales en función del radio

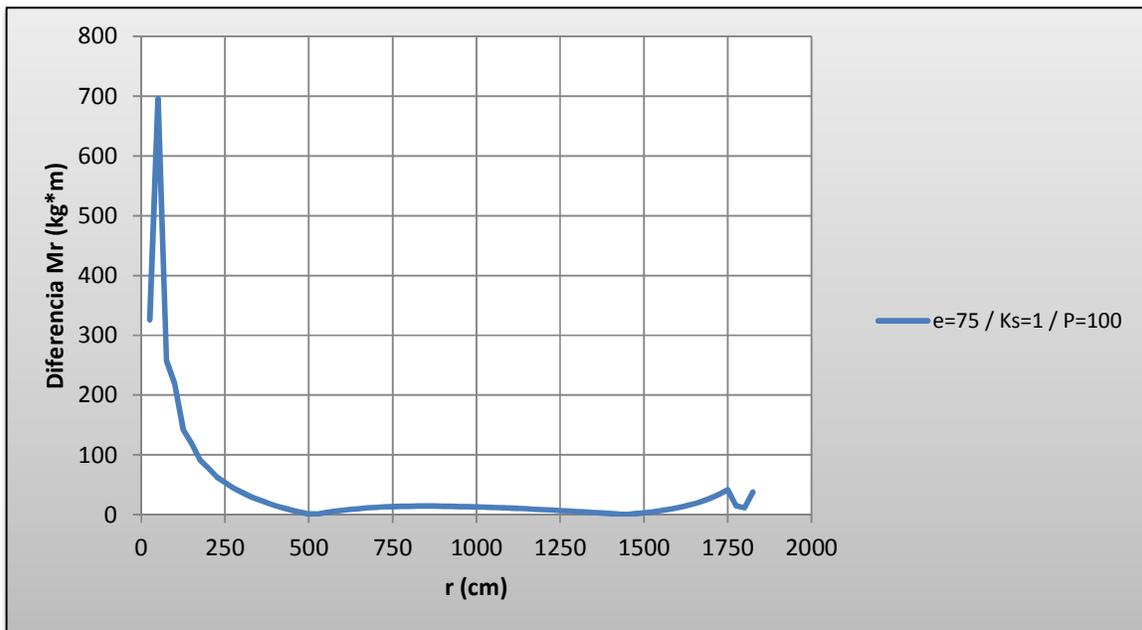
Gráfica N° 4.3.1. Diferencia de magnitudes de momento radial entre métodos vs. radio para $e=30\text{cm}$, $k=1\text{kg/cm}^3$ y $P=25\text{ Ton}$



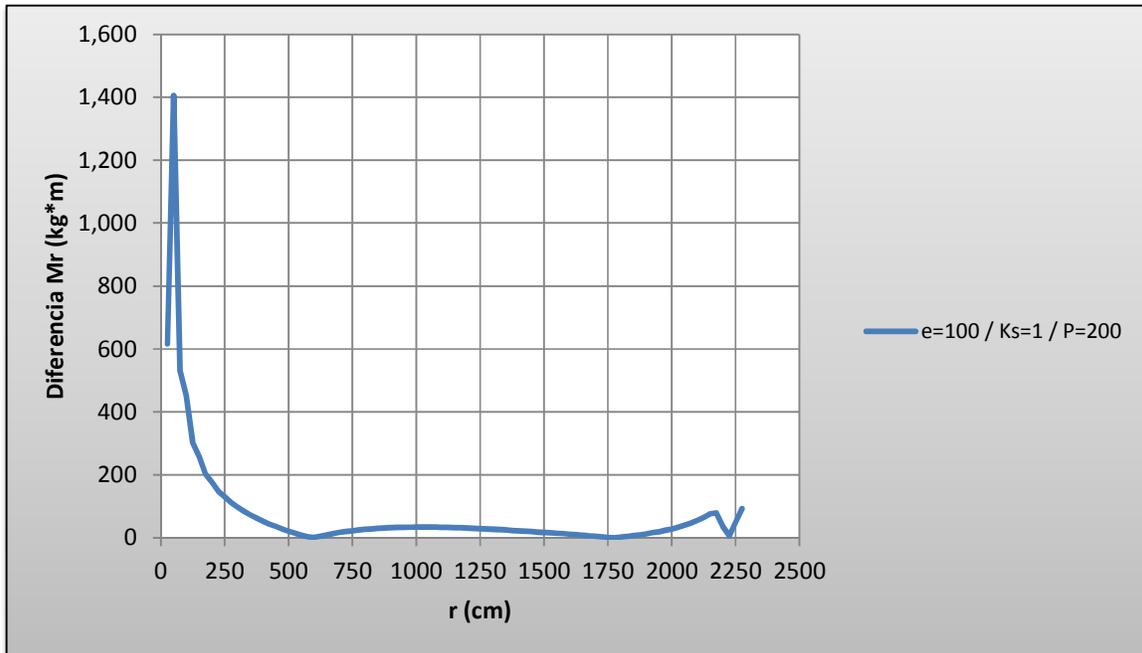
Gráfica N° 4.3.2. Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=50\text{cm}$, $k=1$ kg/cm^3 y $P=50$ Ton



Gráfica N° 4.3.3. Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=75\text{cm}$, $k=1$ kg/cm^3 y $P=100$ Ton



Gráfica N° 4.3.4. Diferencia de magnitudes de momento radial vs. radio para $e=100\text{cm}$, $k=1$ kg/cm^3 y $P=200\text{ Ton}$



En todas las Gráficas comparativas se presenta un comportamiento considerablemente similar entre los casos de estudio.

La sustracción de los valores absolutos de momento radial obtenidos por ambas metodologías presenta en primer lugar un incremento considerable en todos los casos a un radio de 50 cm del punto de aplicación de P. Luego de este incremento se inicia un descenso pronunciado de la diferencia hasta llegar a un valor nulo, a partir de este punto se reportan aumentos y decrecimientos de muy baja magnitud en cada caso.

Se desconoce la razón del aumento brusco de la diferencia entre los dos métodos a un radio en particular como es $r=50\text{cm}$.

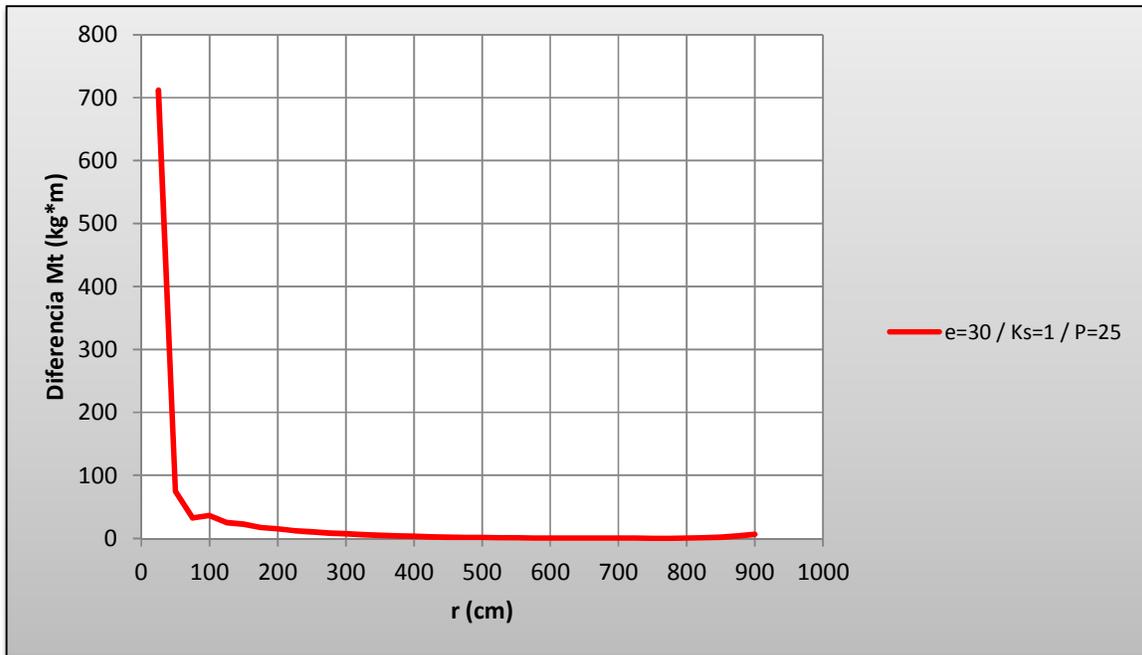
La diferencia entre métodos para valores de momento radial es directamente proporcional a la magnitud de la carga P.

Sólo se generaron curvas para un solo valor de módulo de balasto ya que previamente en el estudio de los métodos de forma individual se concluyó que el comportamiento entre curvas de distintos k seguía un patrón y variaron solo sus magnitudes.

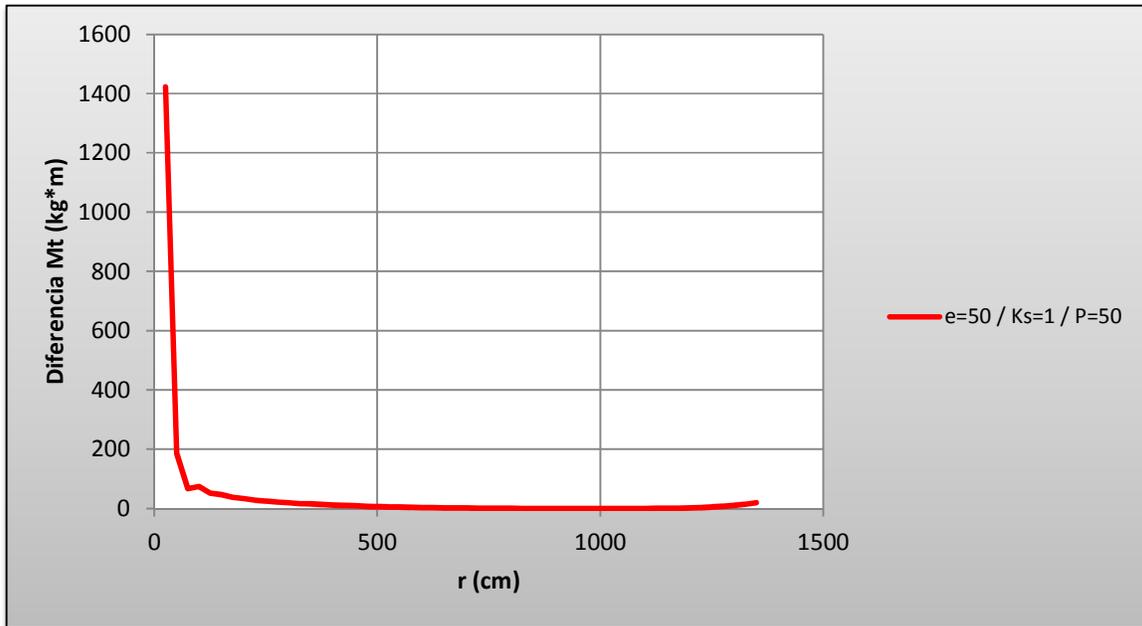
Es por ello que al conocer el comportamiento de la diferencia para un valor de k se puede inferir con criterio que con otros valores de este factor el comportamiento será el mismo pero con magnitudes distintas (a mayores k menores diferencias).

4.3.2. Diferencia de magnitudes de momentos tangenciales en función del radio

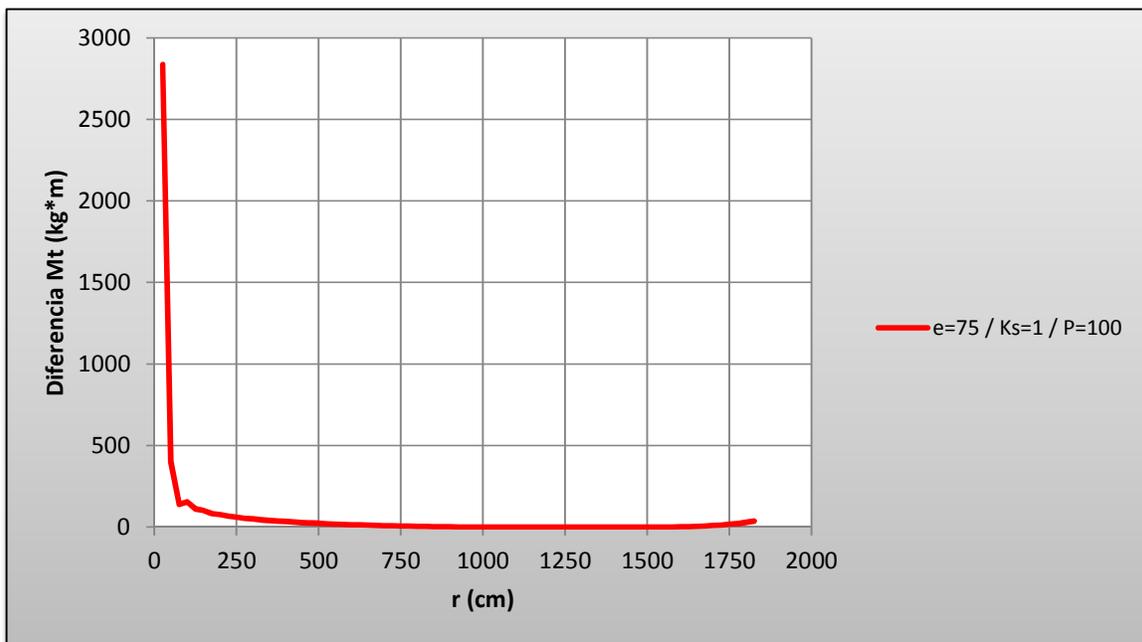
Gráfica N° 4.3.5. Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=30\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=25\text{ Ton}$



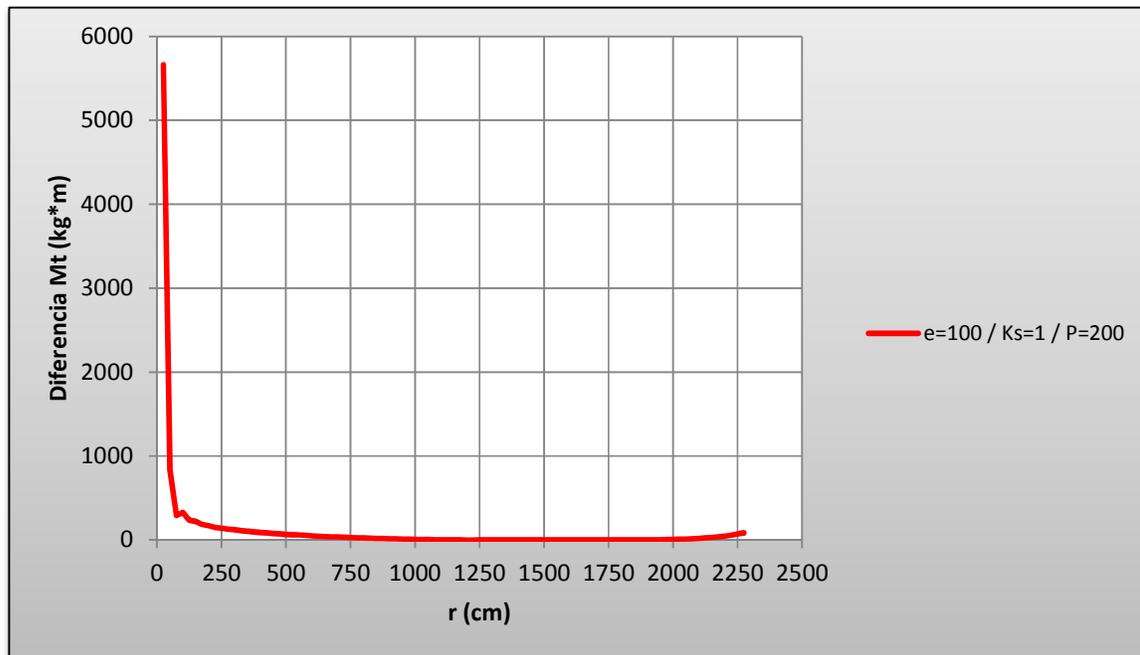
Gráfica Nº 4.3.6. Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=50\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=50\text{ Ton}$



Gráfica Nº 4.3.7. Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=75\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=100\text{ Ton}$



Gráfica Nº 4.3.8. Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs. radio para $e=100\text{cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y $P=200\text{ Ton}$



Con el aumento del radio la diferencia disminuye de forma muy brusca a radios menores que $r=100\text{cm}$. Luego se torna ligeramente decreciente en términos generales (hay pequeños incrementos).

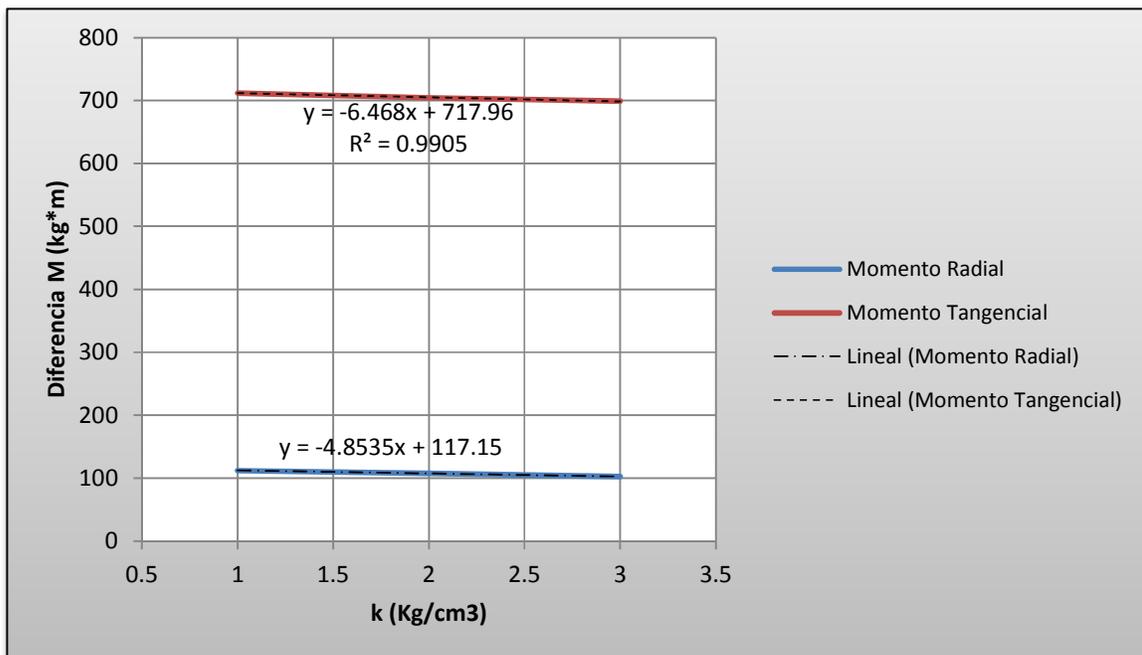
La diferencia es directamente proporcional a la magnitud de la carga puntual.

Se presentaron datos considerando un solo módulo elástico del suelo por las razones especificadas en el análisis de las diferencias de momentos radiales.

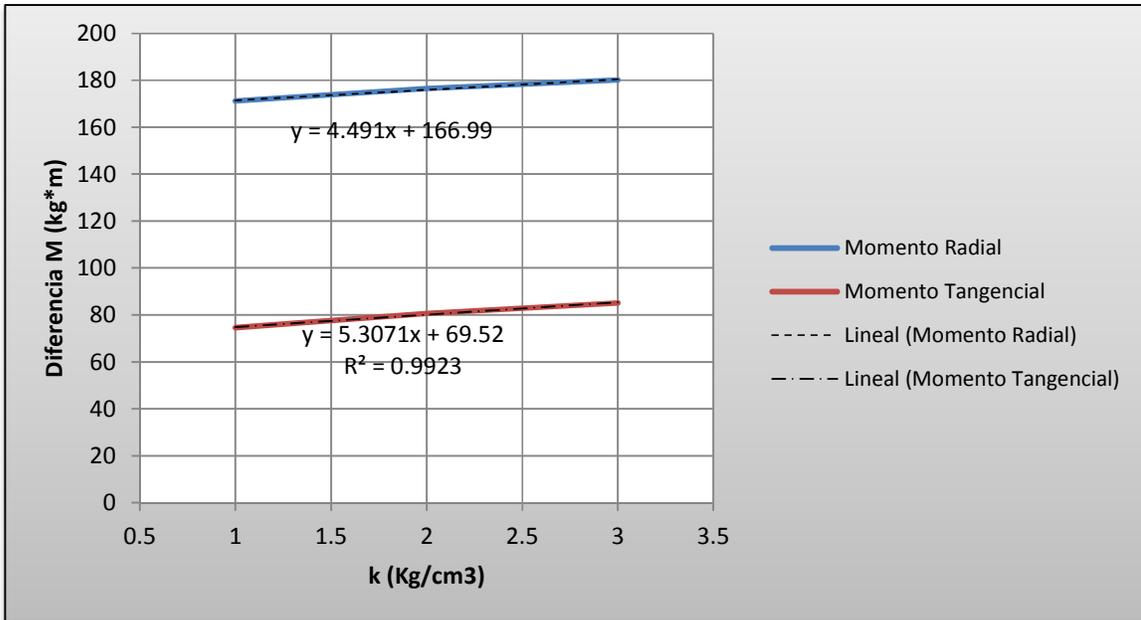
4.3.3. Diferencia de magnitudes de momentos en función del módulo de balasto de balasto

Para observar la influencia del módulo de balasto en las diferencias de los valores de momentos para los dos métodos se escogió un espesor de 30cm y una carga de 25 Ton. Además se evaluó la data para valores de radio de 25 y 50 cm.

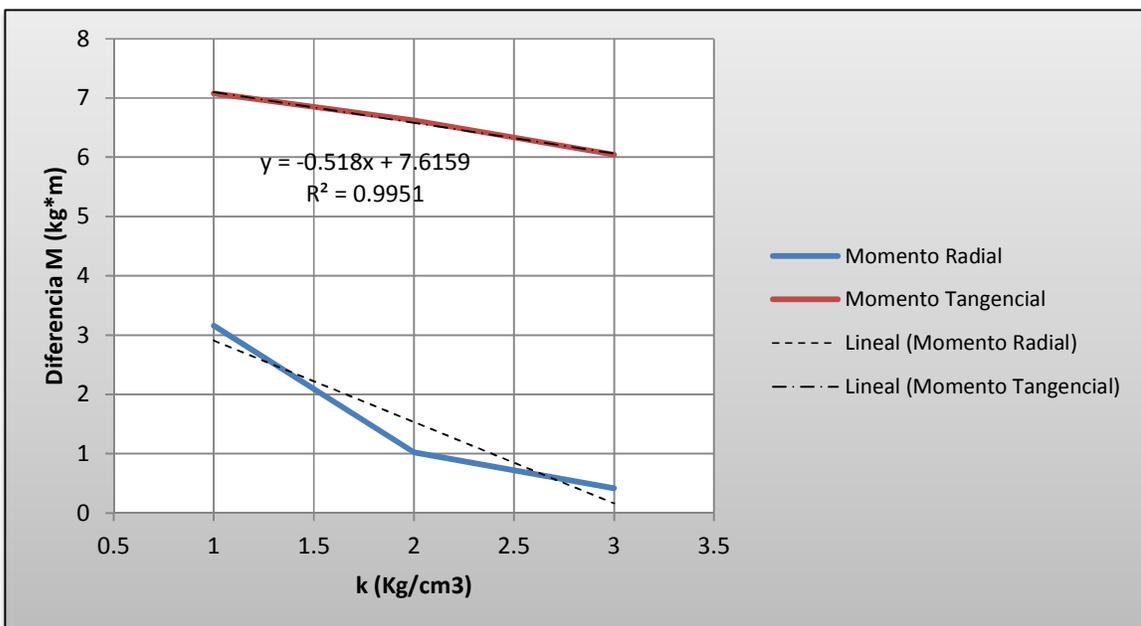
Gráfica Nº 4.3.9. Diferencia de magnitudes de momentos vs. módulo de balasto para un radio $r=25\text{cm}$, $e=30\text{ cm}$ y $P=25\text{ Ton}$



Gráfica Nº 4.3.10. Diferencia de magnitudes de momentos vs.módulo de balasto para un radio $r=50$ cm, $e=30$ cm y $P=25$ Ton



Gráfica Nº 4.3.11. Diferencia de magnitudes de momento tangencial vs.módulo de balasto para un radio $r=300$ cm, $e=30$ cm y $P=25$ Ton



El módulo de reacción del suelo influye de forma errática en los momentos.

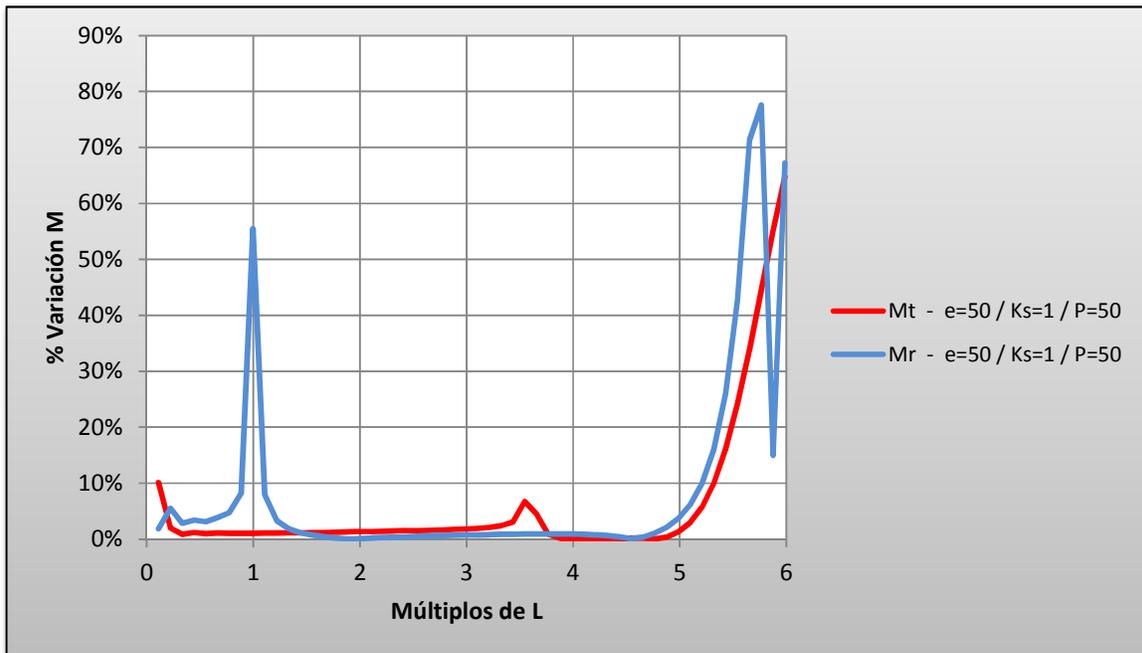
De la Gráfica N°4.3.9. y la Gráfica N°4.3.10. pareciera poder concluirse que la variación de k influye de forma lineal en la diferencia de momentos obtenidos. Sin embargo, comprobando esta variación a distintos radios se observa que no solo no es lineal (ver Gráfica N°4.3.11.) sino que en algunos casos es directamente proporcional a las diferencias y en otros es inversamente proporcional.

4.3.4. Porcentaje de variación de momentos entre métodos en función de múltiplos de radio de rigidez efectiva

Para observar qué porcentaje representan las diferencias de momentos en cada uno de los radios se presenta la Gráfica N°4.3.12.

Para cada radio de estudio se obtuvo el porcentaje que representa la diferencia entre ambos métodos con respecto al valor absoluto máximo de momento de dicho radio. Con esto para cada múltiplo de L que analicemos podremos decir que el valor absoluto del momento obtenido por un método es un porcentaje menor que el obtenido por el otro método.

Gráfica N° 4.3.12. *Porcentaje de variación de momentos entre métodos en función de los múltiplos de L*



Es evidente que existe un gran porcentaje de variación de momentos a múltiplos de L mayores que 5. Sin embargo, como se observó previamente, a valores mayores de radios que 4 veces L se considera una disipación absoluta del efecto de una carga puntual en una losa. Es por ello que esta variación brusca no es pertinente.

Con respecto al momento tangencial, podemos afirmar que el mayor porcentaje de variación ocurre al menor radio de estudio, siendo este aproximadamente un 10 %. Luego los porcentajes se mantienen en valores muy bajos con un ligero incremento alrededor de 3.5 veces L .

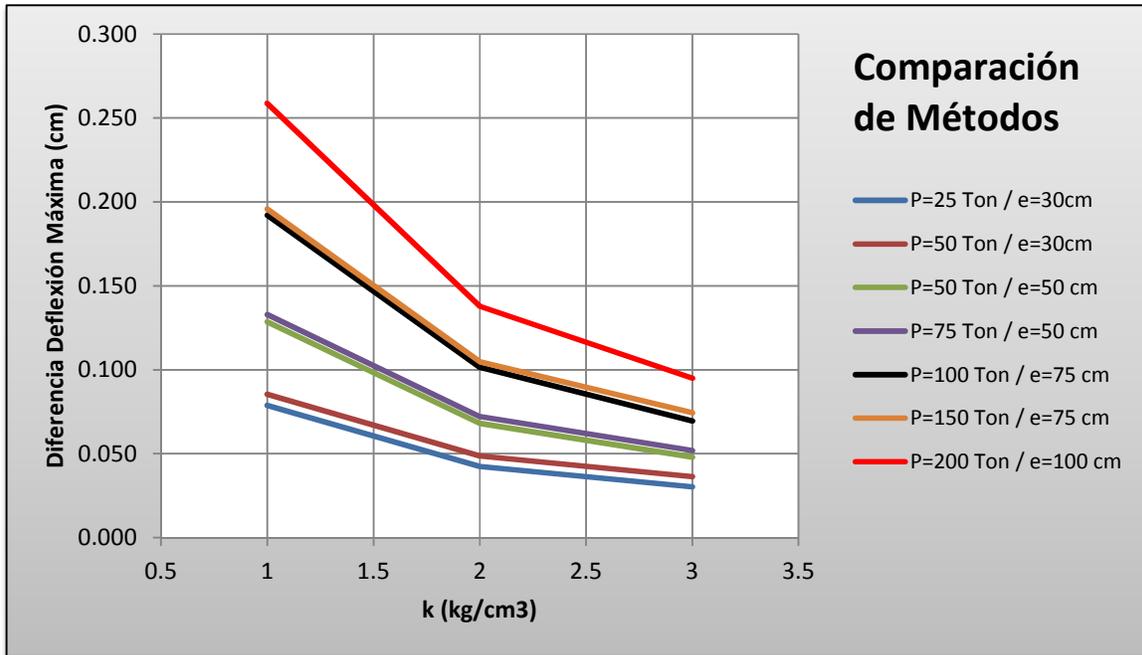
El momento radial evidencia un aumento significativo a una distancia L . Como se analizó previamente en este punto el valor de M_r es igual a cero y se genera la transición de momentos positivos a negativo. Por ello es lógico que la variación sea tan brusca, ya que al haber magnitudes de momento muy bajas, valores de discrepancia representan un porcentaje más alto con respecto al mayor de los momentos. Por ejemplo, una diferencia de $50 \text{ kg}\cdot\text{m}$ entre métodos (considerada despreciable) representa el 50% de $100 \text{ kg}\cdot\text{m}$ que sería hipotéticamente el mayor momento obtenido para ese radio (de longitud cercana a L).

En los puntos de mayor interés de estudio (donde ocurre el mayor y menor momento), es decir, en las proximidades del punto de aplicación de P y a una distancia 2 veces L , el porcentaje de variación de momentos entre métodos es menor al 10 %.

Únicamente se presentaron los datos de porcentajes de variación correspondientes a un caso de estudio debido a que el orden de magnitudes y el comportamiento de las gráficas obtenidas para el resto de los casos es igual al presentado en la Gráfica N°4.3.12.

4.3.5. Diferencia de magnitudes de deflexión máxima entre ambos métodos en función de espesores, cargas y módulos de balasto

Gráfica Nº 4.3.13. Diferencia de magnitudes de deflexión máxima vs. módulos de balasto, espesores y cargas



La magnitud de las diferencias de deflexión máxima entre métodos es directamente proporcional a las cargas e inversamente proporcional al módulo de balasto. Es decir, el comportamiento de las diferencias tiene el mismo comportamiento que las deflexiones de cada método y por ello son dependientes de las magnitudes de las mismas.

4.4. Aportes adicionales: Estudio de losas semi-infinitas por ambos métodos

Se propuso extender la investigación al estudio de las placas al considerarse como de longitud semi-infinita. Es decir, obtener la respuesta de plateas al colocar la carga puntual a una distancia menor a 4 veces L del borde y de la esquina de las mismas.

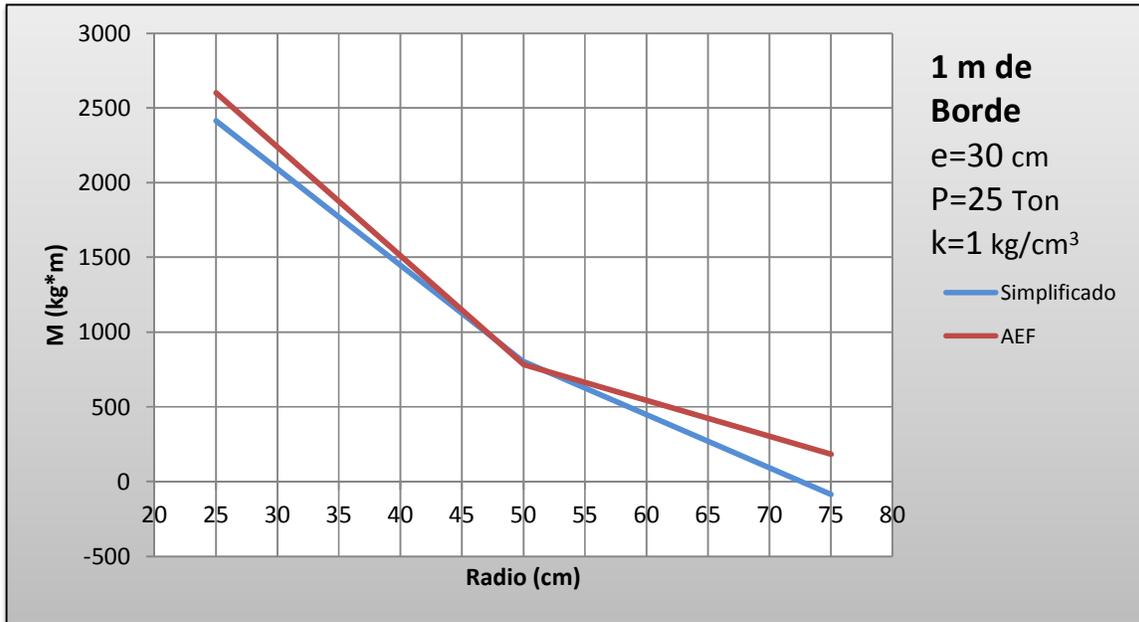
Según lo expresado en el marco teórico (Subcapítulo 2.2.1.), para el Método Simplificado, esto implica el estudio de la losa como vigas de longitud semi-infinita.

Los resultados obtenidos se presentan de forma directamente cotejables entre metodologías y agrupados por casos de ubicación de carga; primero en borde y luego en esquina.

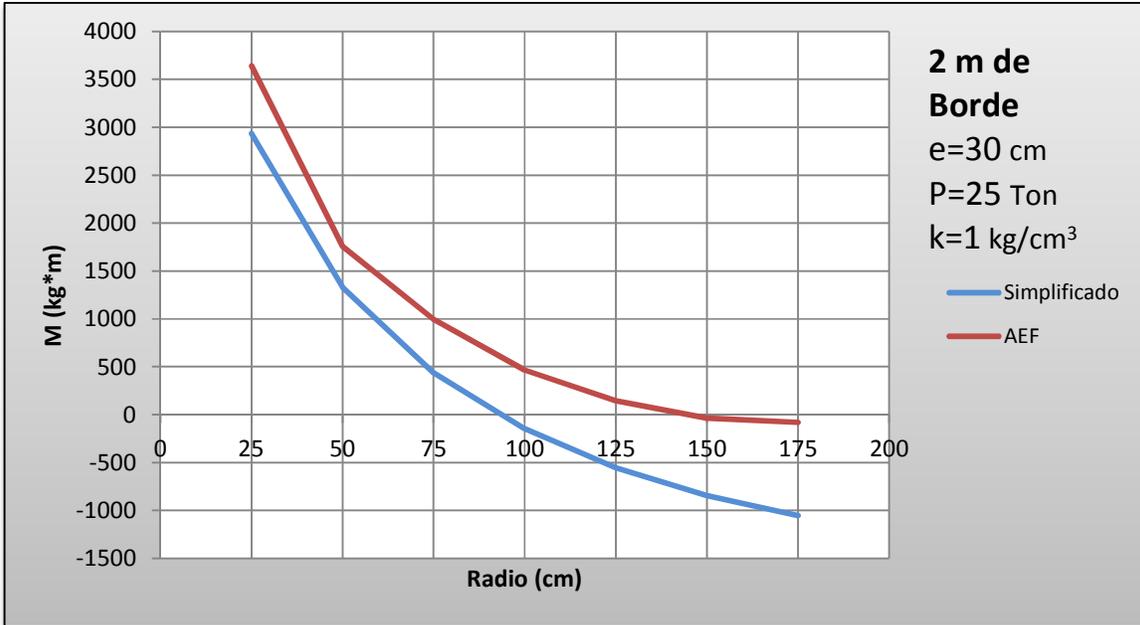
En ambos casos se evaluó la carga puntual a uno y a dos metros de el/los extremo/s de las losas.

4.4.1. Carga en borde

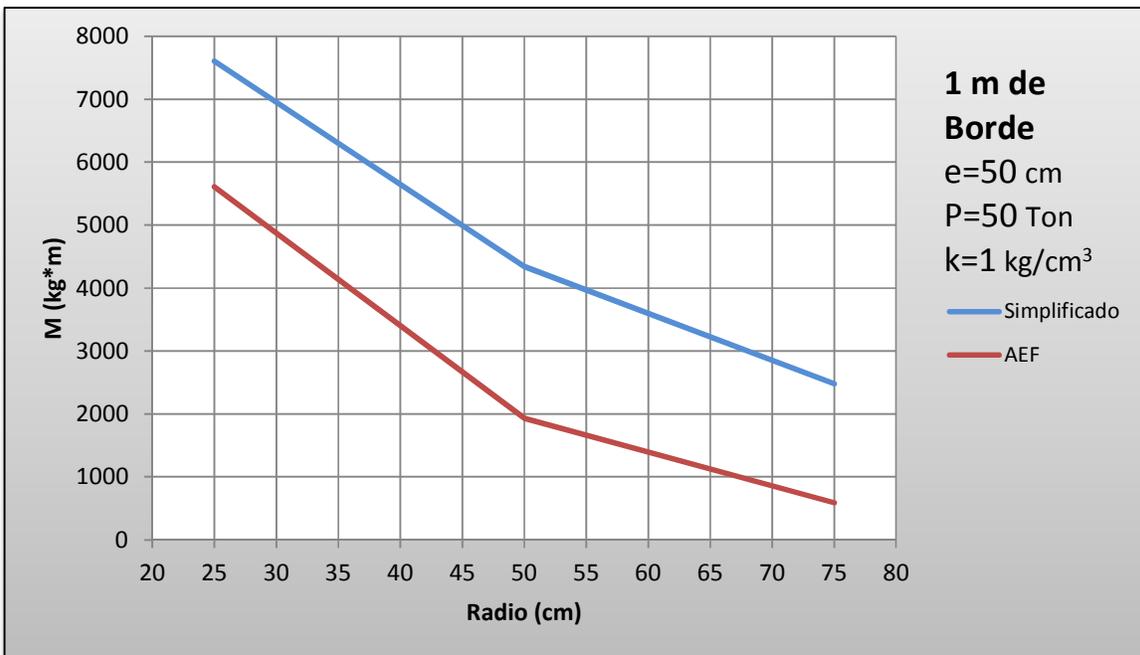
Gráfica Nº 4.4.1. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=30$ cm, $k=1$ kg/cm³ y carga $P=25$ Ton a 1 m de borde



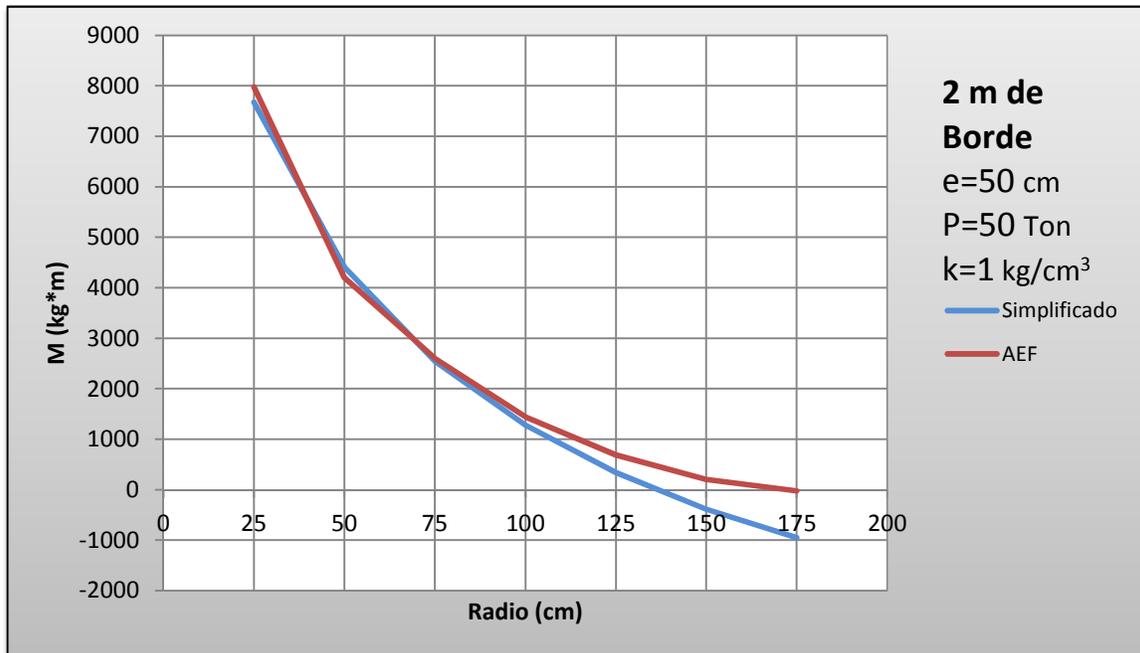
Gráfica Nº 4.4.2. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=30\text{ cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y carga $P=25\text{ Ton}$ a 2 m de borde



Gráfica Nº 4.4.3. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=50\text{ cm}$, $k=1\text{ kg/cm}^3$ y carga $P=50\text{ Ton}$ a 1 m de borde



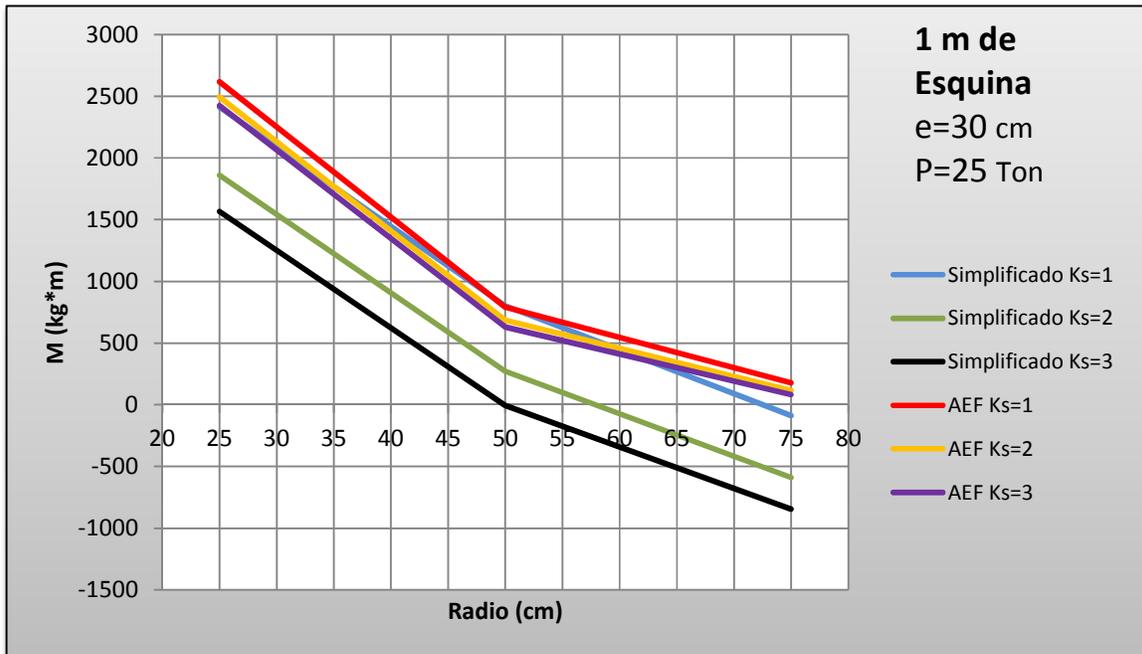
Gráfica N° 4.4.4. Momentos en función del radio en losa semi-infinita de $e=50$ cm, $k=1$ kg/cm³ y carga $P=50$ Ton a 2 m de borde



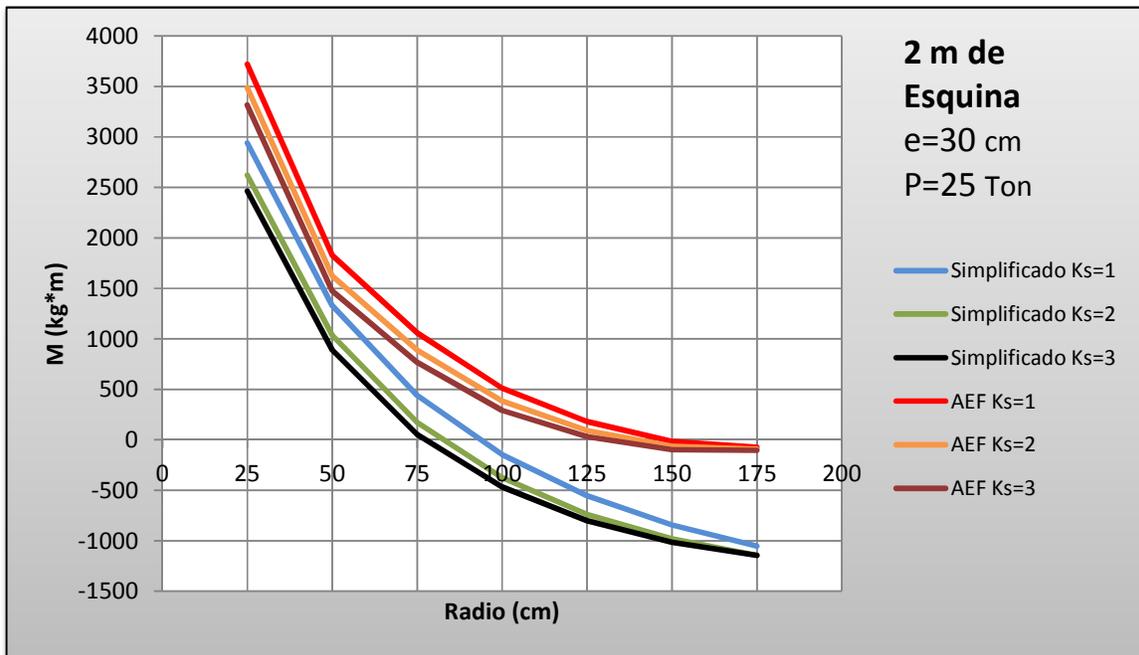
Las curvas por ambos métodos presentan un comportamiento similar. Sin embargo, estas difieren en mayor o menor medida según los valores de las variables. Tanto el espesor como las cargas son directamente proporcionales a las magnitudes de los momentos.

4.4.1. Carga en esquina

Gráfica Nº 4.4.5. Momentos en función del radio y k en losa semi-infinita de $e=30$ cm y carga $P=25$ Ton a 1 m de esquina

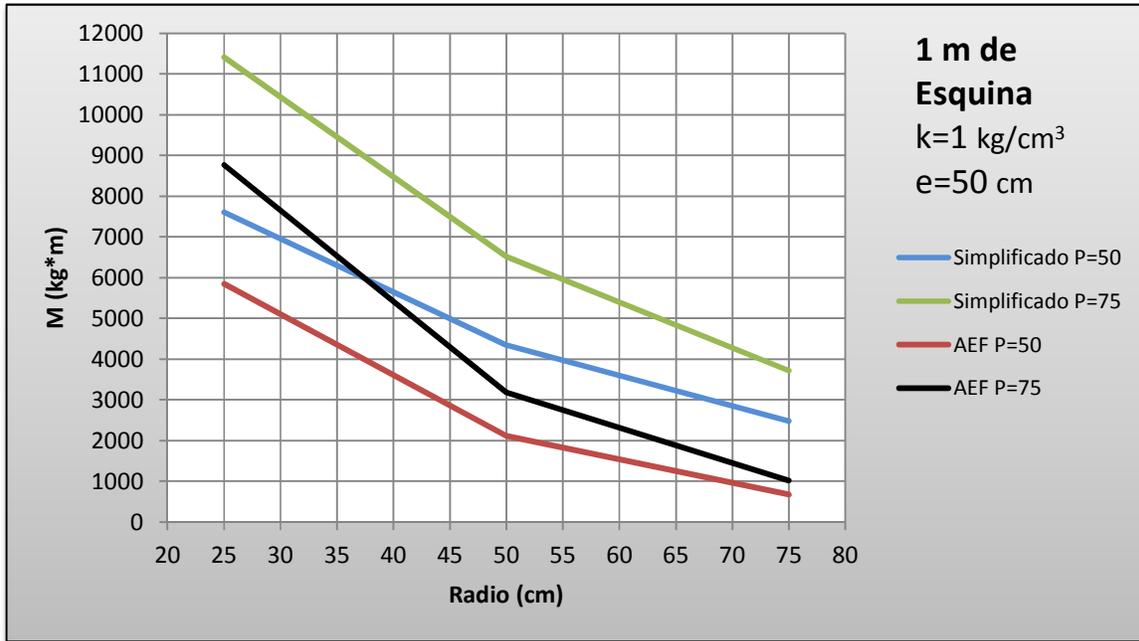


Gráfica Nº 4.4.6. Momentos en función del radio y k en losa semi-infinita de $e=30$ cm y carga $P=25$ Ton a 2 m de esquina

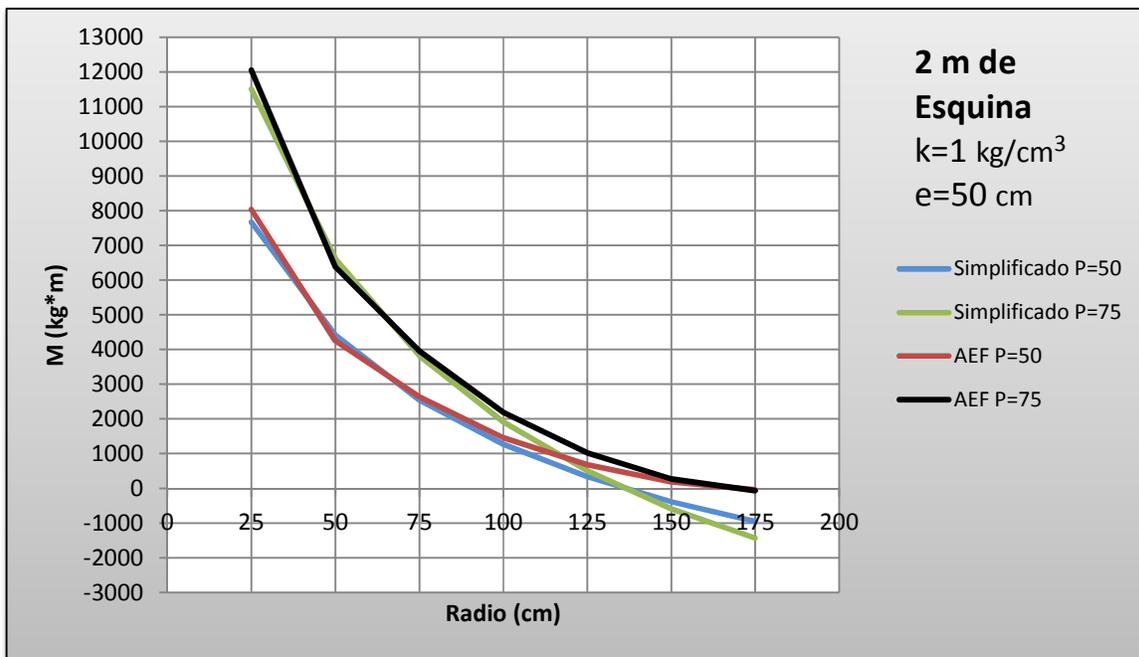


El módulo de balasto es inversamente proporcional a la magnitud de los momentos.

Gráfica Nº 4.4.7. Momentos en función del radio y cargas en losa semi-infinita de $e=30$ cm, $k=1$ kg/cm³ y P a 1 m de esquina



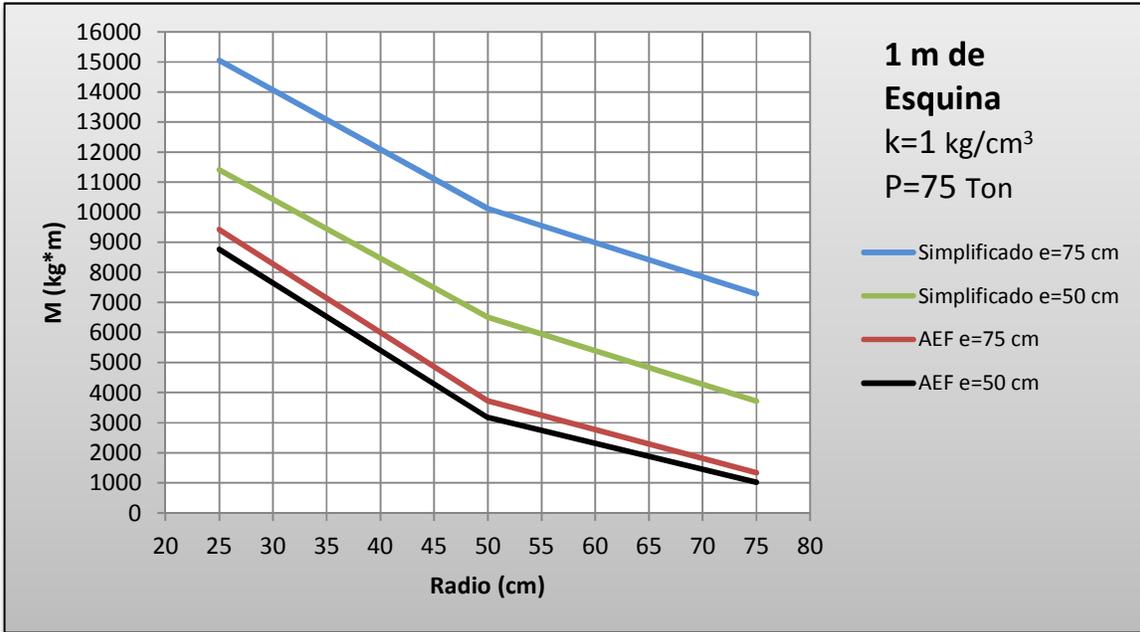
Gráfica Nº 4.4.8. Momentos en función del radio y cargas en losa semi-infinita de $e=30$ cm, $k=1$ kg/cm³ y P a 2 m de esquina



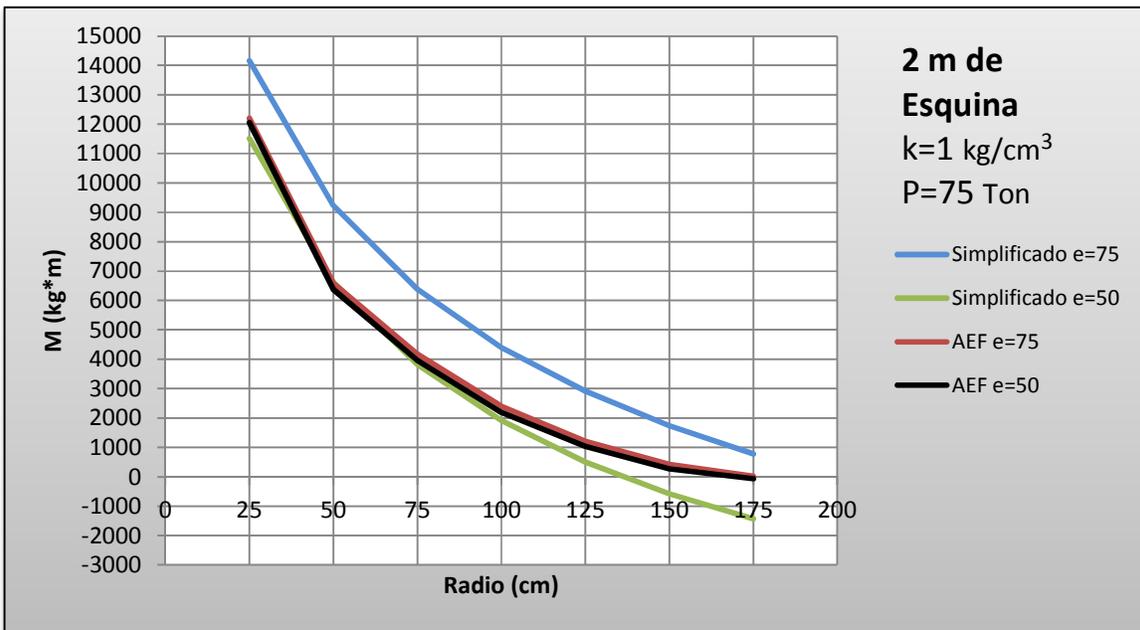
Como era lógico esperar, la magnitud de las cargas es directamente proporcional a los momentos.

De igual forma, las pendientes de las curvas se ven afectadas por la variación de P. Al aumentar dicho factor las pendientes se hacen más pronunciadas. Es decir, para un mismo intervalo de estudio sucede una variación mayor de momento.

Gráfica N° 4.4.9. Momentos en función del radio y espesores en losa semi-infinita de $k=1$ kg/cm^3 y $P=75$ Ton a 1 m de esquina



Gráfica N° 4.4.10. Momentos en función del radio y espesores en losa semi-infinita de $k=1$ kg/cm^3 y $P=75$ Ton a 2 m de esquina



En la Gráfica N°4.4.9. y N°4.4.10. se observa que el espesor es directamente proporcional a la magnitud de los momentos, tanto para el caso de distanciamiento de 1 m como en el de 2 m.

La influencia del espesor en los momentos es apreciablemente mayor para el Método Simplificado que para el método de AEF, ya que para una misma variación de magnitud de espesor, las curvas del primer método difieren mucho más que las del segundo.

Para el Método Simplificado los valores de momento al estudiar una carga en esquina o en borde son iguales (bajo las mismas condiciones).

En el caso del método de AEF, las magnitudes de momento obtenidas bajo las mismas condiciones para el caso de cargas en borde y en esquina difieren muy poco.(alrededor de 150 kg*m) pudiéndose considerar como iguales.

CAPÍTULO V

5.1. CONCLUSIONES

De acuerdo a las limitaciones establecidas en el presente Trabajo se observan las tendencias expuestas a continuación:

5.1.1. Estudio de losas infinitas

- Las curvas de momento radial tienen tres zonas con comportamientos e influencia de variables particulares.
- El comportamiento de las curvas de momento radial en función de los radios es igual para todos los casos de estudio, sólo varían las magnitudes según los valores que adopten las variables.
- Las curvas de momento tangencial presentan un comportamiento e influencia de variables uniforme a lo largo del estudio en función de los radios.
- El comportamiento de las curvas de momento tangencial es igual para todos los casos de estudio de forma que sólo varían las magnitudes según los valores que adopten las variables.
- El comportamiento de las curvas de deflexiones es igual para todos los casos de estudio, únicamente varían las magnitudes según los valores que adopten las variables.
- Los mayores valores positivos de momento radial y tangencial ocurren en las proximidades del punto de aplicación de la carga.
- Los momentos radiales mínimos no dependen de los valores de módulo de reacción del suelo sino de la magnitud de la carga puntual y del espesor de la placa en menor medida.

- La magnitud de momentos radiales es directamente proporcional al valor de la carga puntual, del espesor de la placa e inversamente proporcional al módulo de balasto en la Zona 1 y Zona 3 de la curva y al contrario en la Zona 2.
- Los valores de momentos tangenciales son directamente proporcionales a la magnitud de la carga puntual, espesor de la placa e inversamente proporcionales al módulo de reacción del suelo.
- A mayores radios de estudio los momentos tangenciales disminuyen hasta disiparse por completo sin llegar a presentar valores negativos.
- Las curvas de momento tangencial y momento radial en función de múltiplos de L son idénticas para valores iguales de espesor y P indiferentemente del valor de k. Al variar P cambian las magnitudes más no el comportamiento de la curva.
- Los momentos radiales son iguales a cero a una distancia igual al radio de rigidez efectiva desde el punto de aplicación de la carga.
- El menor momento radial generado por una carga sucede a una distancia igual a dos veces el radio de rigidez efectiva desde el punto de aplicación de la misma.
- A una distancia igual a cuatro veces el radio de rigidez efectiva ocurren momentos radiales menores al 5% del momento radial a 25 cm del punto de aplicación de P y por ende se puede considerar disipado el efecto de la misma.
- A una distancia igual a dos veces el radio de rigidez efectiva ocurren momentos tangenciales menores al 5% del momento tangencial a 25 cm del punto de aplicación de P y por ello se puede considerar disipado el efecto de la misma.
- La magnitud de las deflexiones máximas es directamente proporcional a los valores de P e inversamente proporcional al módulo de balasto.
- Los valores de radio de rigidez efectiva son directamente proporcionales al espesor de placa e inversamente proporcionales al módulo de balasto.

- Los porcentajes de variación de momento radial y momento tangencial entre métodos es menor al 10 % en los puntos de mayor y menor momento (proximidades de la carga para M_r y M_t positivos, radio igual a $2L$ para M_r negativos).
- A un radio igual a 50 centímetros sucede un incremento de la diferencia de momentos radiales entre métodos. Siendo este radio en donde difieren más los M_r .
- La diferencia de magnitudes de deflexión máxima es proporcional a las magnitudes de deflexión en cada método.

5.1.1. Estudio de losas semi-infinitas

- La influencia del espesor en los momentos obtenidos para losas semi-infinitas en casos de carga en borde y esquina, es mayor en el Método Simplificado que en el de AEF.
- Tanto para el método de AEF como el Método Simplificado, bajo iguales condiciones de distanciamiento y variables, los momentos obtenidos de cargas en borde y esquina a distintos radios son los mismos.

5.2. RECOMENDACIONES

En el análisis estructural de placas de fundación es válido considerar que a una distancia desde el punto de aplicación de la carga igual a 4 veces L el efecto de la misma en los momentos radiales es nulo. De igual forma se puede asumir con los momentos tangenciales pero a una distancia igual a 2 veces L .

Para confirmar por completo la hipótesis de longitud de disipación de la carga, es necesario procesar la data y conocer si los momentos en este punto arrojan áreas de acero menores al área de acero mínima por norma de la sección. De ser así la hipótesis sería correcta en términos prácticos.

Es de suma importancia la obtención precisa del espesor de la placa y de las cargas a las que está sometido el sistema de fundaciones debido a que las magnitudes de dichos factores influyen de forma considerable en las solicitaciones de los elementos. Sin embargo, la obtención de un k puede no ser tan rigurosa ya que como se observó su influencia en los momentos obtenidos no es tan significativa.

Se puede afirmar que los resultados obtenidos para losas infinitas tanto por el método Simplificado como por el método de análisis por elementos finitos no discrepan de manera significativa el uno del otro bajo las condiciones estudiadas en este Trabajo Especial de Grado. Sin embargo, para el caso de losas semi-infinitas se observaron discrepancias erráticas; es por ello que se debería realizar un estudio más amplio al respecto y con una discretización mayor de las áreas en el método de AEF.

Es necesario estudiar la razón por la que, en el estudio de losas infinitas, específicamente a un radio de 50 cm sucede la mayor diferencia entre valores de momentos obtenidos por ambos métodos.

De igual forma se propone estudiar lo planteado en este Trabajo Especial de Grado considerando módulos de reacción del suelo variables a lo largo de la placa ya que el uso de un solo k puede ser incorrecto bajo ciertas condiciones (ACI-336.2R, 1988).

También debe ser estudiada la influencia de la rigidez de la superestructura en el sistema de fundaciones incluyendo la que puede aportar la columna o pedestal bajo distintas condiciones de geometría, ya que el método simplificado no especifica ninguna consideración al respecto.

Adicionalmente, lo investigado en este Trabajo debe ser complementado con el estudio de la variación de módulo de elasticidad del concreto por fenómenos de fluencia (ACI-336.2R, 1988). De igual manera, debe ser considerado el problema de hundimiento de resortes acoplados duplicando el número de los mismos en el contorno de la losa en el método de AEF (Ulrich, 1995) y el uso del momento de inercia efectiva de las secciones para el análisis (Ulrich, 1995).

Por último se recomienda estudiar cómo se traducen los resultados obtenidos en este Trabajo Especial de Grado en el diseño en términos de área de acero colocada. Al igual que realizar el análisis de la influencia de variables en el corte a flexión y las deflexiones a distintos radios.

6. REFERENCIAS

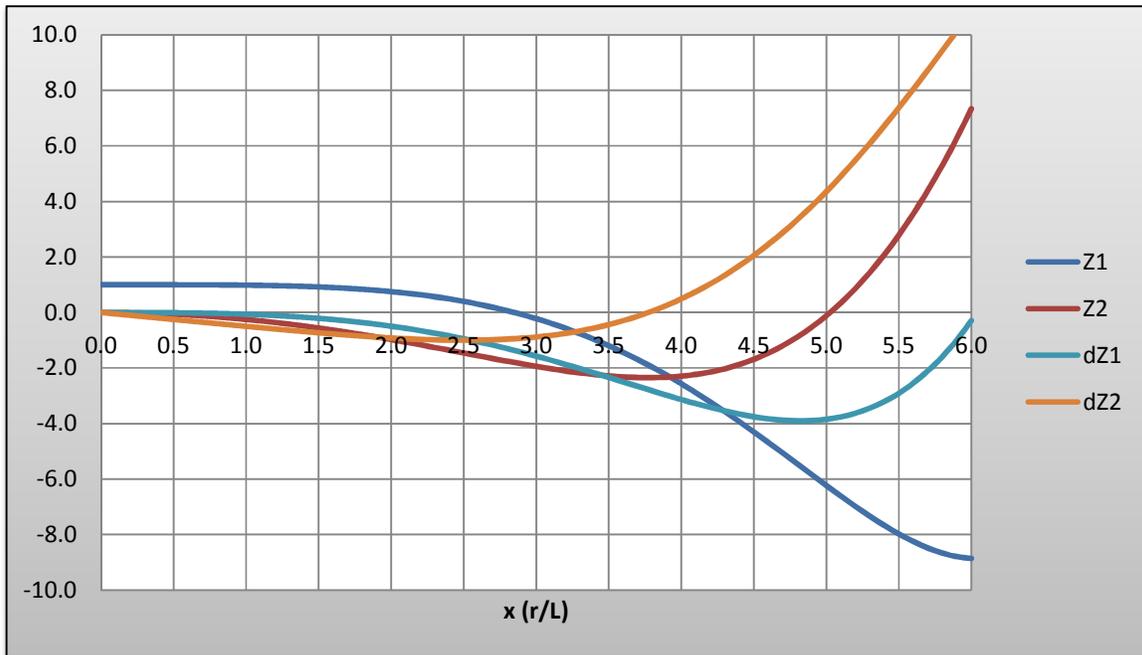
- Calavera, J. (2000). *Cálculo de Estructuras de Cimentación* (4ta ed.). Madrid, España: Instituto Técnico de Materiales y Construcciones. 529 p.
- Comité 436. American Concrete Institute. (1966), Reporte "*Procedimientos de Diseño Sugerido para Zapatas Combinadas y Placas de Fundación*".
- Computer & Structures, Inc. (2010). *Defining the Work Flow*. Berkeley Autor.
- Computer & Structures, Inc. (2010). *Key Features and Terminology*. Berkeley Autor.
- Computer & Structures, Inc. (2010). *RC Design*. Berkeley Autor.
- Computer & Structures, Inc. (2010). *Tutorial*. Berkeley Autor.
- Computer & Structures, Inc. (2010). *Verification*. Berkeley Autor.
- Frederick, D. (1957). *Thick Rectangular Plates on an Elastic Foundation*. ASCE: *Transactions*. 122 p.
- Hetenyi, M. (1946). *Beams on Elastic Foundation*. (10ma ed.). Michigan: Prensa de la Universidad de Michigan. 255 p.
- Imam, H. M. (2011). *Influence of structural and soil parameters on Mat deflection*. International Journal of Civil and Structural Engineering, 2(1), 10 p.
- Morales, A. E. (2012). *Estadística y Probabilidades* (pp. 39-52). Concepción, Chile: Universidad Católica de la Santísima Concepción. Recuperado Septiembre 16, 2012, de <http://es.scribd.com/doc/104834714/Estadistica-y-Probabilidad>.

- Norma 1753. COVENIN. (2003). *Proyecto y Construcción de Obras de Concreto Estructura*". Venezuela.
- Norma 336.2R-88. American Concrete Institute. (1988). *Procedimientos de Análisis y Diseño Sugerido para Zapatas Combinadas y Placas de Fundación*. USA: ACI.
- Norma 318-08. American Concrete Institute. (2008). *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural*. USA: ACI.
- Shukla, S. N. (1984, Septiembre-Octubre). *A Simplified Method for Design of Mats on Elastic Foundations*. Journal of the American Concrete Institute, 81(39), 469-475 p.
- Terzaghi, K. (1955). *Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction (5ta ed.)*. Londres: Geotechnique.
- Timoshenko, S; S Woinowsky-Krieger. (1959) *Theory of Plates and Shells*. (2da ed.). Singapur: McGraw-Hill.
- Ulrich, E. (1995). *SP-152. Design and Performance of Mat Foundations "State of Review"*. Detroit, MI: ACI.
- Zienkiewicz; Taylor. (2000). *Finite Element Method, The Basis. (5ta ed.)*. Vol. 1. Gales: MPG Books Ltd.

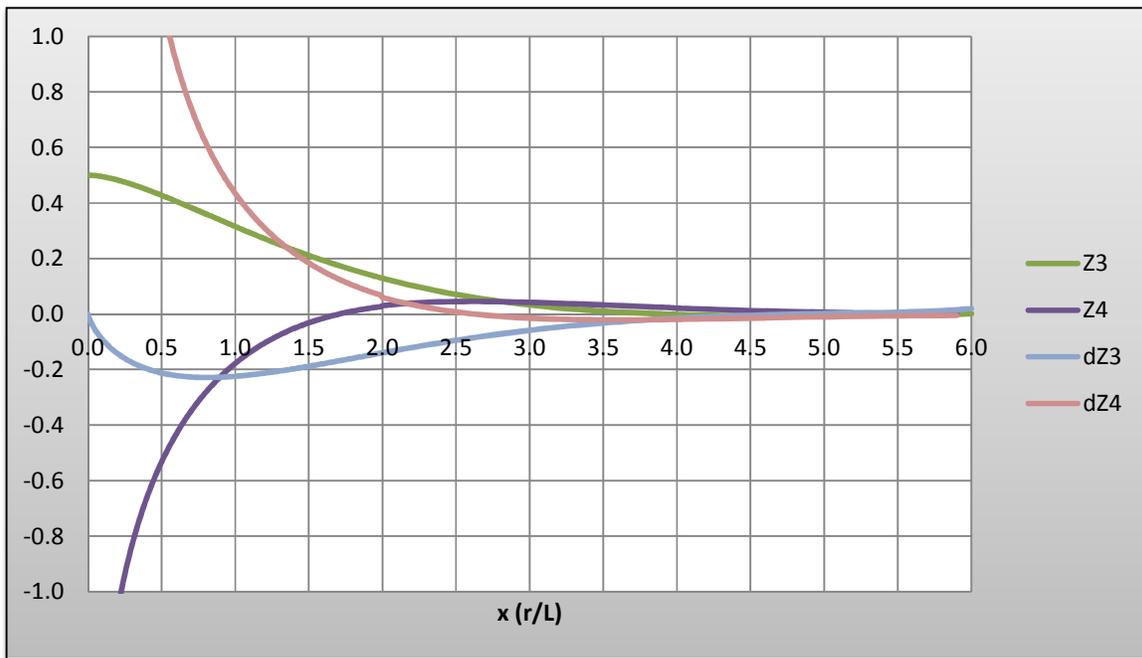
7. APÉNDICES

7.1. Funciones Z y sus derivadas

Gráfica Nº 7.1. Funciones Z1, Z2 y sus derivadas



Gráfica N° 7.2. Funciones Z3, Z4 y sus derivadas



x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
0.00	1.0000000	0.0000000	0.5000000	- ∞	0.0000000	0.0000000	0.0000000	+ ∞
0.01	1.0000000	-0.0000250	0.4999089	-3.0055590	-0.0000001	-0.0050000	-0.0166193	63.6594775
0.02	1.0000000	-0.0001000	0.4996799	-2.5643253	-0.0000005	-0.0100000	-0.0288261	31.8259903
0.03	1.0000000	-0.0002250	0.4993379	-2.3062606	-0.0000017	-0.0150000	-0.0393677	21.2131643
0.04	1.0000000	-0.0004000	0.4988961	-2.1232040	-0.0000040	-0.0200000	-0.0488283	15.9055060
0.05	0.9999999	-0.0006250	0.4983640	-1.9812587	-0.0000078	-0.0250000	-0.0574853	12.7199171
0.06	0.9999998	-0.0009000	0.4977486	-1.8653264	-0.0000135	-0.0300000	-0.0655023	10.5953655
0.07	0.9999996	-0.0012250	0.4970557	-1.7673531	-0.0000214	-0.0350000	-0.0729875	9.0771231
0.08	0.9999994	-0.0016000	0.4962903	-1.6825312	-0.0000320	-0.0400000	-0.0800177	7.9378264
0.09	0.9999990	-0.0020250	0.4954567	-1.6077597	-0.0000456	-0.0450000	-0.0866504	7.0511625
0.10	0.9999984	-0.0025000	0.4945585	-1.5409214	-0.0000625	-0.0500000	-0.0929304	6.3413437
0.11	0.9999977	-0.0030250	0.4935991	-1.4805059	-0.0000832	-0.0550000	-0.0988935	5.7601417
0.12	0.9999968	-0.0036000	0.4925816	-1.4253981	-0.0001080	-0.0599999	-0.1045688	5.2754045
0.13	0.9999955	-0.0042250	0.4915086	-1.3747511	-0.0001373	-0.0649999	-0.1099807	4.8648730
0.14	0.9999940	-0.0049000	0.4903828	-1.3279067	-0.0001715	-0.0699999	-0.1151500	4.5126480
0.15	0.9999921	-0.0056250	0.4892064	-1.2843430	-0.0002109	-0.0749998	-0.1200944	4.2070701
0.16	0.9999898	-0.0064000	0.4879816	-1.2436392	-0.0002560	-0.0799997	-0.1248291	3.9393950
0.17	0.9999869	-0.0072250	0.4867104	-1.2054512	-0.0003071	-0.0849996	-0.1293677	3.7029358
0.18	0.9999836	-0.0081000	0.4853948	-1.1694939	-0.0003645	-0.0899995	-0.1337221	3.4924916
0.19	0.9999796	-0.0090250	0.4840366	-1.1355284	-0.0004287	-0.0949994	-0.1379029	3.3039567
0.20	0.9999750	-0.0100000	0.4826373	-1.1033527	-0.0005000	-0.0999992	-0.1419196	3.1340464
0.21	0.9999696	-0.0110250	0.4811987	-1.0727943	-0.0005788	-0.1049989	-0.1457807	2.9801017
0.22	0.9999634	-0.0121000	0.4797222	-1.0437048	-0.0006655	-0.1099987	-0.1494941	2.8399471
0.23	0.9999563	-0.0132249	0.4782093	-1.0159554	-0.0007604	-0.1149983	-0.1530667	2.7117856
0.24	0.9999482	-0.0143999	0.4766613	-0.9894341	-0.0008640	-0.1199979	-0.1565051	2.5941197
0.25	0.9999390	-0.0156249	0.4750796	-0.9640423	-0.0009766	-0.1249975	-0.1598152	2.4856914
0.26	0.9999286	-0.0168999	0.4734654	-0.9396930	-0.0010985	-0.1299969	-0.1630025	2.3854364
0.27	0.9999170	-0.0182248	0.4718200	-0.9163093	-0.0012302	-0.1349963	-0.1660720	2.2924480
0.28	0.9999040	-0.0195998	0.4701444	-0.8938225	-0.0013720	-0.1399955	-0.1690286	2.2059492
0.29	0.9998895	-0.0210247	0.4684397	-0.8721710	-0.0015243	-0.1449947	-0.1718764	2.1252700
0.30	0.9998734	-0.0224997	0.4667072	-0.8512996	-0.0016875	-0.1499937	-0.1746197	2.0498299
0.31	0.9998557	-0.0240246	0.4649477	-0.8311586	-0.0018619	-0.1549925	-0.1772623	1.9791232
0.32	0.9998362	-0.0255995	0.4631623	-0.8117028	-0.0020480	-0.1599913	-0.1798078	1.9127076
0.33	0.9998147	-0.0272244	0.4613518	-0.7928914	-0.0022460	-0.1649898	-0.1822595	1.8501943
0.34	0.9997912	-0.0288993	0.4595174	-0.7746871	-0.0024565	-0.1699882	-0.1846206	1.7912402
0.35	0.9997655	-0.0306242	0.4576597	-0.7570558	-0.0026797	-0.1749863	-0.1868942	1.7355415
0.36	0.9997376	-0.0323991	0.4557798	-0.7399663	-0.0029160	-0.1799843	-0.1890830	1.6828283
0.37	0.9997072	-0.0342239	0.4538783	-0.7233901	-0.0031658	-0.1849819	-0.1911898	1.6328597
0.38	0.9996742	-0.0360987	0.4519562	-0.7073007	-0.0034294	-0.1899794	-0.1932170	1.5854201
0.39	0.9996385	-0.0380235	0.4500143	-0.6916739	-0.0037074	-0.1949765	-0.1951672	1.5403163

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
0.40	0.9996000	-0.0399982	0.4480531	-0.6764872	-0.0039999	-0.1999733	-0.1970427	1.4973742
0.41	0.9995585	-0.0420229	0.4460736	-0.6617197	-0.0043075	-0.2049698	-0.1988456	1.4564368
0.42	0.9995138	-0.0440976	0.4440765	-0.6473522	-0.0046304	-0.2099660	-0.2005780	1.4173620
0.43	0.9994658	-0.0462223	0.4420623	-0.6333667	-0.0049690	-0.2149617	-0.2022419	1.3800210
0.44	0.9994144	-0.0483969	0.4400318	-0.6197464	-0.0053238	-0.2199571	-0.2038393	1.3442965
0.45	0.9993593	-0.0506214	0.4379857	-0.6064757	-0.0056951	-0.2249519	-0.2053720	1.3100820
0.46	0.9993004	-0.0528959	0.4359246	-0.5935401	-0.0060833	-0.2299464	-0.2068418	1.2772799
0.47	0.9992376	-0.0552203	0.4338491	-0.5809257	-0.0064887	-0.2349403	-0.2082503	1.2458012
0.48	0.9991706	-0.0575947	0.4317598	-0.5686199	-0.0069117	-0.2399336	-0.2095991	1.2155640
0.49	0.9990993	-0.0600190	0.4296573	-0.5566106	-0.0073527	-0.2449264	-0.2108899	1.1864935
0.50	0.9990235	-0.0624932	0.4275422	-0.5448864	-0.0078121	-0.2499186	-0.2121241	1.1585205
0.51	0.9989430	-0.0650174	0.4254150	-0.5334367	-0.0082902	-0.2549102	-0.2133031	1.1315815
0.52	0.9988576	-0.0675914	0.4232763	-0.5222515	-0.0087874	-0.2599010	-0.2144284	1.1056177
0.53	0.9987672	-0.0702154	0.4211266	-0.5113213	-0.0093042	-0.2648911	-0.2155013	1.0805748
0.54	0.9986714	-0.0728892	0.4189665	-0.5006371	-0.0098408	-0.2698804	-0.2165232	1.0564026
0.55	0.9985703	-0.0756130	0.4167963	-0.4901905	-0.0103976	-0.2748689	-0.2174951	1.0330545
0.56	0.9984634	-0.0783866	0.4146167	-0.4799734	-0.0109751	-0.2798566	-0.2184184	1.0104871
0.57	0.9983507	-0.0812101	0.4124281	-0.4699783	-0.0115735	-0.2848433	-0.2192943	0.9886604
0.58	0.9982319	-0.0840835	0.4102310	-0.4601979	-0.0121933	-0.2898291	-0.2201238	0.9675367
0.59	0.9981068	-0.0870067	0.4080258	-0.4506253	-0.0128348	-0.2948138	-0.2209082	0.9470812
0.60	0.9979751	-0.0899798	0.4058130	-0.4412541	-0.0134985	-0.2997975	-0.2216483	0.9272612
0.61	0.9978367	-0.0930026	0.4035930	-0.4320781	-0.0141846	-0.3047801	-0.2223453	0.9080464
0.62	0.9976913	-0.0960753	0.4013662	-0.4230913	-0.0148936	-0.3097614	-0.2230002	0.8894082
0.63	0.9975388	-0.0991979	0.3991331	-0.4142881	-0.0156258	-0.3147416	-0.2236139	0.8713199
0.64	0.9973788	-0.1023702	0.3968941	-0.4056631	-0.0163816	-0.3197204	-0.2241874	0.8537565
0.65	0.9972111	-0.1055923	0.3946495	-0.3972113	-0.0171614	-0.3246979	-0.2247216	0.8366945
0.66	0.9970354	-0.1088641	0.3923998	-0.3889276	-0.0179655	-0.3296739	-0.2252174	0.8201119
0.67	0.9968517	-0.1121857	0.3901453	-0.3808075	-0.0187944	-0.3346484	-0.2256757	0.8039880
0.68	0.9966595	-0.1155571	0.3878864	-0.3728464	-0.0196484	-0.3396214	-0.2260972	0.7883031
0.69	0.9964586	-0.1189782	0.3856234	-0.3650401	-0.0205278	-0.3445927	-0.2264829	0.7730389
0.70	0.9962488	-0.1224489	0.3833568	-0.3573843	-0.0214330	-0.3495623	-0.2268336	0.7581781
0.71	0.9960299	-0.1259694	0.3810869	-0.3498752	-0.0223645	-0.3545302	-0.2271499	0.7437042
0.72	0.9958014	-0.1295395	0.3788139	-0.3425090	-0.0233226	-0.3594962	-0.2274327	0.7296019
0.73	0.9955633	-0.1331593	0.3765383	-0.3352820	-0.0243076	-0.3644602	-0.2276828	0.7158565
0.74	0.9953152	-0.1368287	0.3742604	-0.3281907	-0.0253199	-0.3694222	-0.2279007	0.7024541
0.75	0.9950568	-0.1405478	0.3719804	-0.3212318	-0.0263599	-0.3743821	-0.2280873	0.6893818
0.76	0.9947879	-0.1443164	0.3696987	-0.3144020	-0.0274281	-0.3793398	-0.2282433	0.6766270
0.77	0.9945082	-0.1481345	0.3674157	-0.3076982	-0.0285246	-0.3842952	-0.2283692	0.6641780
0.78	0.9942173	-0.1520023	0.3651315	-0.3011175	-0.0296500	-0.3892482	-0.2284658	0.6520237
0.79	0.9939151	-0.1559195	0.3628464	-0.2946568	-0.0308045	-0.3941988	-0.2285337	0.6401534

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
0.80	0.9936011	-0.1598862	0.3605609	-0.2883135	-0.0319886	-0.3991468	-0.2285735	0.6285571
0.81	0.9932752	-0.1639024	0.3582751	-0.2820848	-0.0332027	-0.4040921	-0.2285858	0.6172251
0.82	0.9929370	-0.1679681	0.3559893	-0.2759681	-0.0344470	-0.4090346	-0.2285713	0.6061485
0.83	0.9925862	-0.1720831	0.3537037	-0.2699610	-0.0357220	-0.4139743	-0.2285304	0.5953184
0.84	0.9922224	-0.1762475	0.3514187	-0.2640610	-0.0370280	-0.4189110	-0.2284639	0.5847267
0.85	0.9918455	-0.1804613	0.3491345	-0.2582657	-0.0383654	-0.4238447	-0.2283722	0.5743654
0.86	0.9914550	-0.1847244	0.3468514	-0.2525729	-0.0397346	-0.4287751	-0.2282559	0.5642271
0.87	0.9910507	-0.1890368	0.3445695	-0.2469804	-0.0411360	-0.4337022	-0.2281156	0.5543045
0.88	0.9906322	-0.1933985	0.3422891	-0.2414861	-0.0425698	-0.4386259	-0.2279517	0.5445908
0.89	0.9901992	-0.1978093	0.3400105	-0.2360879	-0.0440366	-0.4435461	-0.2277648	0.5350795
0.90	0.9897514	-0.2022694	0.3377339	-0.2307839	-0.0455366	-0.4484625	-0.2275553	0.5257643
0.91	0.9892884	-0.2067786	0.3354595	-0.2255720	-0.0470702	-0.4533752	-0.2273238	0.5166392
0.92	0.9888098	-0.2113369	0.3331875	-0.2204505	-0.0486377	-0.4582840	-0.2270708	0.5076985
0.93	0.9883155	-0.2159442	0.3309182	-0.2154175	-0.0502397	-0.4631887	-0.2267967	0.4989368
0.94	0.9878049	-0.2206006	0.3286516	-0.2104712	-0.0518763	-0.4680892	-0.2265019	0.4903486
0.95	0.9872778	-0.2253060	0.3263882	-0.2056099	-0.0535481	-0.4729854	-0.2261870	0.4819291
0.96	0.9867339	-0.2300603	0.3241280	-0.2008320	-0.0552552	-0.4778771	-0.2258524	0.4736734
0.97	0.9861726	-0.2348635	0.3218712	-0.1961359	-0.0569982	-0.4827642	-0.2254986	0.4655769
0.98	0.9855938	-0.2397156	0.3196181	-0.1915200	-0.0587774	-0.4876466	-0.2251259	0.4576350
0.99	0.9849969	-0.2446164	0.3173687	-0.1869827	-0.0605931	-0.4925241	-0.2247347	0.4498436
1.00	0.9843818	-0.2495660	0.3151234	-0.1825226	-0.0624458	-0.4973965	-0.2243255	0.4421986
1.01	0.9837479	-0.2545643	0.3128823	-0.1781383	-0.0643357	-0.5022637	-0.2238988	0.4346959
1.02	0.9830949	-0.2596113	0.3106455	-0.1738283	-0.0662632	-0.5071256	-0.2234548	0.4273318
1.03	0.9824225	-0.2647068	0.3084132	-0.1695912	-0.0682287	-0.5119819	-0.2229940	0.4201027
1.04	0.9817302	-0.2698509	0.3061857	-0.1654258	-0.0702326	-0.5168326	-0.2225168	0.4130051
1.05	0.9810177	-0.2750435	0.3039630	-0.1613307	-0.0722752	-0.5216774	-0.2220235	0.4060355
1.06	0.9802846	-0.2802844	0.3017453	-0.1573046	-0.0743569	-0.5265162	-0.2215145	0.3991908
1.07	0.9795305	-0.2855738	0.2995327	-0.1533464	-0.0764781	-0.5313488	-0.2209902	0.3924677
1.08	0.9787549	-0.2909114	0.2973255	-0.1494549	-0.0786390	-0.5361750	-0.2204509	0.3858633
1.09	0.9779575	-0.2962973	0.2951238	-0.1456288	-0.0808401	-0.5409946	-0.2198970	0.3793746
1.10	0.9771380	-0.3017313	0.2929276	-0.1418670	-0.0830818	-0.5458076	-0.2193288	0.3729989
1.11	0.9762958	-0.3072134	0.2907372	-0.1381684	-0.0853643	-0.5506136	-0.2187466	0.3667334
1.12	0.9754305	-0.3127435	0.2885527	-0.1345320	-0.0876881	-0.5554124	-0.2181509	0.3605755
1.13	0.9745419	-0.3183216	0.2863743	-0.1309566	-0.0900534	-0.5602040	-0.2175418	0.3545226
1.14	0.9736293	-0.3239476	0.2842019	-0.1274412	-0.0924608	-0.5649881	-0.2169198	0.3485724
1.15	0.9726925	-0.3296213	0.2820359	-0.1239848	-0.0949104	-0.5697645	-0.2162851	0.3427225
1.16	0.9717310	-0.3353428	0.2798763	-0.1205864	-0.0974027	-0.5745329	-0.2156381	0.3369706
1.17	0.9707443	-0.3411120	0.2777232	-0.1172451	-0.0999380	-0.5792933	-0.2149791	0.3313144
1.18	0.9697321	-0.3469287	0.2755767	-0.1139598	-0.1025167	-0.5840453	-0.2143083	0.3257519
1.19	0.9686938	-0.3527929	0.2734371	-0.1107297	-0.1051391	-0.5887888	-0.2136260	0.3202810

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
1.20	0.9676292	-0.3587044	0.2713043	-0.1075539	-0.1078056	-0.5935235	-0.2129326	0.3148996
1.21	0.9665376	-0.3646633	0.2691784	-0.1044314	-0.1105166	-0.5982492	-0.2122283	0.3096059
1.22	0.9654187	-0.3706694	0.2670597	-0.1013615	-0.1132723	-0.6029658	-0.2115134	0.3043980
1.23	0.9642720	-0.3767226	0.2649482	-0.0983432	-0.1160732	-0.6076728	-0.2107882	0.2992740
1.24	0.9630971	-0.3828228	0.2628440	-0.0953757	-0.1189195	-0.6123703	-0.2100529	0.2942322
1.25	0.9618934	-0.3889699	0.2607472	-0.0924583	-0.1218117	-0.6170578	-0.2093078	0.2892709
1.26	0.9606607	-0.3951639	0.2586579	-0.0895901	-0.1247500	-0.6217351	-0.2085532	0.2843884
1.27	0.9593983	-0.4014046	0.2565761	-0.0867703	-0.1277349	-0.6264021	-0.2077894	0.2795831
1.28	0.9581058	-0.4076919	0.2545021	-0.0839981	-0.1307667	-0.6310584	-0.2070165	0.2748535
1.29	0.9567828	-0.4140257	0.2524358	-0.0812729	-0.1338456	-0.6357038	-0.2062348	0.2701980
1.30	0.9554287	-0.4204060	0.2503774	-0.0785939	-0.1369722	-0.6403381	-0.2054446	0.2656152
1.31	0.9540432	-0.4268325	0.2483270	-0.0759604	-0.1401466	-0.6449610	-0.2046460	0.2611036
1.32	0.9526257	-0.4333051	0.2462845	-0.0733716	-0.1433693	-0.6495721	-0.2038395	0.2566619
1.33	0.9511756	-0.4398239	0.2442502	-0.0708269	-0.1466406	-0.6541714	-0.2030251	0.2522886
1.34	0.9496927	-0.4463885	0.2422241	-0.0683256	-0.1499608	-0.6587584	-0.2022031	0.2479826
1.35	0.9481763	-0.4529990	0.2402062	-0.0658671	-0.1533302	-0.6633329	-0.2013737	0.2437425
1.36	0.9466259	-0.4596551	0.2381966	-0.0634506	-0.1567493	-0.6678947	-0.2005372	0.2395671
1.37	0.9450411	-0.4663569	0.2361955	-0.0610755	-0.1602183	-0.6724434	-0.1996937	0.2354551
1.38	0.9434214	-0.4731040	0.2342028	-0.0587413	-0.1637376	-0.6769787	-0.1988435	0.2314055
1.39	0.9417662	-0.4798964	0.2322186	-0.0564472	-0.1673075	-0.6815004	-0.1979868	0.2274170
1.40	0.9400751	-0.4867339	0.2302431	-0.0541927	-0.1709283	-0.6860082	-0.1971238	0.2234886
1.41	0.9383475	-0.4936165	0.2282762	-0.0519772	-0.1746004	-0.6905017	-0.1962547	0.2196191
1.42	0.9365829	-0.5005439	0.2263180	-0.0498002	-0.1783242	-0.6949807	-0.1953797	0.2158075
1.43	0.9347808	-0.5075161	0.2243686	-0.0476609	-0.1820998	-0.6994448	-0.1944989	0.2120528
1.44	0.9329407	-0.5145328	0.2224280	-0.0455589	-0.1859277	-0.7038937	-0.1936127	0.2083540
1.45	0.9310621	-0.5215939	0.2204963	-0.0434936	-0.1898083	-0.7083272	-0.1927211	0.2047102
1.46	0.9291444	-0.5286993	0.2185736	-0.0414645	-0.1937417	-0.7127448	-0.1918244	0.2011202
1.47	0.9271871	-0.5358487	0.2166599	-0.0394711	-0.1977284	-0.7171463	-0.1909227	0.1975833
1.48	0.9251896	-0.5430421	0.2147552	-0.0375127	-0.2017686	-0.7215314	-0.1900163	0.1940985
1.49	0.9231515	-0.5502793	0.2128596	-0.0355889	-0.2058627	-0.7258996	-0.1891053	0.1906650
1.50	0.9210722	-0.5575601	0.2109731	-0.0336992	-0.2100110	-0.7302507	-0.1881898	0.1872818
1.51	0.9189511	-0.5648843	0.2090958	-0.0318431	-0.2142139	-0.7345843	-0.1872701	0.1839481
1.52	0.9167877	-0.5722517	0.2072277	-0.0300201	-0.2184715	-0.7389000	-0.1863463	0.1806632
1.53	0.9145815	-0.5796622	0.2053689	-0.0282297	-0.2227844	-0.7431975	-0.1854186	0.1774262
1.54	0.9123319	-0.5871156	0.2035193	-0.0264714	-0.2271527	-0.7474765	-0.1844872	0.1742363
1.55	0.9100383	-0.5946117	0.2016791	-0.0247448	-0.2315768	-0.7517365	-0.1835522	0.1710927
1.56	0.9077001	-0.6021502	0.1998483	-0.0230494	-0.2360569	-0.7559773	-0.1826137	0.1679948
1.57	0.9053169	-0.6097311	0.1980269	-0.0213848	-0.2405935	-0.7601984	-0.1816720	0.1649417
1.58	0.9028881	-0.6173541	0.1962149	-0.0197504	-0.2451868	-0.7643995	-0.1807272	0.1619328
1.59	0.9004130	-0.6250191	0.1944123	-0.0181460	-0.2498370	-0.7685801	-0.1797794	0.1589674

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
1.60	0.8978911	-0.6327257	0.1926193	-0.0165709	-0.2545446	-0.7727399	-0.1788288	0.1560448
1.61	0.8953219	-0.6404738	0.1908358	-0.0150249	-0.2593098	-0.7768785	-0.1778755	0.1531643
1.62	0.8927047	-0.6482632	0.1890618	-0.0135075	-0.2641330	-0.7809956	-0.1769197	0.1503252
1.63	0.8900391	-0.6560936	0.1872974	-0.0120183	-0.2690143	-0.7850906	-0.1759615	0.1475269
1.64	0.8873243	-0.6639649	0.1855426	-0.0105568	-0.2739542	-0.7891632	-0.1750011	0.1447689
1.65	0.8845598	-0.6718768	0.1837974	-0.0091228	-0.2789528	-0.7932130	-0.1740385	0.1420504
1.66	0.8817450	-0.6798291	0.1820618	-0.0077157	-0.2840105	-0.7972395	-0.1730740	0.1393709
1.67	0.8788794	-0.6878215	0.1803359	-0.0063352	-0.2891277	-0.8012425	-0.1721076	0.1367298
1.68	0.8759623	-0.6958539	0.1786197	-0.0049810	-0.2943045	-0.8052213	-0.1711396	0.1341265
1.69	0.8729931	-0.7039259	0.1769131	-0.0036526	-0.2995412	-0.8091756	-0.1701699	0.1315605
1.70	0.8699712	-0.7120373	0.1752163	-0.0023496	-0.3048382	-0.8131049	-0.1691988	0.1290312
1.71	0.8668961	-0.7201879	0.1735291	-0.0010718	-0.3101957	-0.8170089	-0.1682264	0.1265380
1.72	0.8637671	-0.7283774	0.1718517	0.0001812	-0.3156140	-0.8208871	-0.1672527	0.1240804
1.73	0.8605836	-0.7366055	0.1701841	0.0014099	-0.3210934	-0.8247389	-0.1662780	0.1216580
1.74	0.8573450	-0.7448721	0.1685262	0.0026145	-0.3266342	-0.8285640	-0.1653023	0.1192701
1.75	0.8540507	-0.7531767	0.1668780	0.0037954	-0.3322365	-0.8323619	-0.1643257	0.1169164
1.76	0.8507001	-0.7615192	0.1652397	0.0049529	-0.3379008	-0.8361322	-0.1633484	0.1145962
1.77	0.8472925	-0.7698993	0.1636111	0.0060874	-0.3436272	-0.8398743	-0.1623705	0.1123092
1.78	0.8438274	-0.7783166	0.1619923	0.0071992	-0.3494161	-0.8435878	-0.1613920	0.1100548
1.79	0.8403040	-0.7867709	0.1603832	0.0082887	-0.3552676	-0.8472721	-0.1604131	0.1078326
1.80	0.8367218	-0.7952620	0.1587840	0.0093560	-0.3611821	-0.8509270	-0.1594339	0.1056422
1.81	0.8330801	-0.8037894	0.1571946	0.0104016	-0.3671598	-0.8545517	-0.1584546	0.1034830
1.82	0.8293784	-0.8123529	0.1556149	0.0114258	-0.3732010	-0.8581458	-0.1574751	0.1013547
1.83	0.8256159	-0.8209522	0.1540451	0.0124288	-0.3793059	-0.8617089	-0.1564956	0.0992568
1.84	0.8217921	-0.8295870	0.1524850	0.0134110	-0.3854747	-0.8652404	-0.1555162	0.0971888
1.85	0.8179062	-0.8382569	0.1509347	0.0143727	-0.3917077	-0.8687398	-0.1545370	0.0951505
1.86	0.8139577	-0.8469616	0.1493943	0.0153141	-0.3980052	-0.8722066	-0.1535581	0.0931414
1.87	0.8099459	-0.8557009	0.1478636	0.0162356	-0.4043674	-0.8756402	-0.1525796	0.0911610
1.88	0.8058701	-0.8644743	0.1463427	0.0171374	-0.4107945	-0.8790402	-0.1516016	0.0892090
1.89	0.8017298	-0.8732816	0.1448315	0.0180199	-0.4172868	-0.8824059	-0.1506241	0.0872850
1.90	0.7975242	-0.8821223	0.1433302	0.0188832	-0.4238445	-0.8857370	-0.1496473	0.0853886
1.91	0.7932527	-0.8909962	0.1418386	0.0197277	-0.4304678	-0.8890327	-0.1486712	0.0835194
1.92	0.7889146	-0.8999029	0.1403568	0.0205537	-0.4371570	-0.8922926	-0.1476960	0.0816771
1.93	0.7845093	-0.9088419	0.1388847	0.0213614	-0.4439122	-0.8955161	-0.1467217	0.0798614
1.94	0.7800361	-0.9178131	0.1374223	0.0221510	-0.4507338	-0.8987026	-0.1457484	0.0780717
1.95	0.7754944	-0.9268159	0.1359697	0.0229229	-0.4576218	-0.9018516	-0.1447761	0.0763079
1.96	0.7708835	-0.9358500	0.1345268	0.0236772	-0.4645766	-0.9049626	-0.1438050	0.0745696
1.97	0.7662026	-0.9449150	0.1330936	0.0244144	-0.4715983	-0.9080348	-0.1428352	0.0728564
1.98	0.7614513	-0.9540105	0.1316701	0.0251345	-0.4786872	-0.9110678	-0.1418667	0.0711679
1.99	0.7566287	-0.9631362	0.1302563	0.0258378	-0.4858434	-0.9140609	-0.1408995	0.0695040

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
2.00	0.7517342	-0.9722916	0.1288521	0.0265246	-0.4930671	-0.9170136	-0.1399339	0.0678642
2.05	0.7261595	-1.0185001	0.1219757	0.0297192	-0.5302057	-0.9311492	-0.1351300	0.0600164
2.10	0.6986850	-1.0653882	0.1153383	0.0325356	-0.5690608	-0.9441813	-0.1303730	0.0527269
2.15	0.6692244	-1.1128985	0.1089375	0.0350006	-0.6096529	-0.9560292	-0.1256706	0.0459606
2.20	0.6376905	-1.1609699	0.1027702	0.0371398	-0.6520002	-0.9666086	-0.1210300	0.0396850
2.25	0.6039949	-1.2095368	0.0968333	0.0389768	-0.6961181	-0.9758316	-0.1164573	0.0338700
2.30	0.5680489	-1.2585290	0.0911233	0.0405340	-0.7420189	-0.9836067	-0.1119582	0.0284873
2.35	0.5297631	-1.3078717	0.0856362	0.0418323	-0.7897119	-0.9898387	-0.1075377	0.0235106
2.40	0.4890478	-1.3574855	0.0803681	0.0428914	-0.8392027	-0.9944286	-0.1032003	0.0189152
2.45	0.4458129	-1.4072855	0.0753147	0.0437298	-0.8904938	-0.9972741	-0.0989497	0.0146782
2.50	0.3999684	-1.4571820	0.0704716	0.0443648	-0.9435834	-0.9982688	-0.0947896	0.0107776
2.55	0.3514246	-1.5070797	0.0658342	0.0448128	-0.9984661	-0.9973030	-0.0907226	0.0071933
2.60	0.3000921	-1.5568778	0.0613978	0.0450891	-1.0551318	-0.9942629	-0.0867513	0.0039059
2.65	0.2458820	-1.6064695	0.0571575	0.0452081	-1.1135663	-0.9890316	-0.0828777	0.0008974
2.70	0.1887063	-1.6557424	0.0531084	0.0451832	-1.1737502	-0.9814884	-0.0791035	-0.0018492
2.75	0.1284782	-1.7045778	0.0492454	0.0450272	-1.2356593	-0.9715089	-0.0754300	-0.0043501
2.80	0.0651121	-1.7528506	0.0455637	0.0447520	-1.2992641	-0.9589655	-0.0718581	-0.0066205
2.85	-0.0014759	-1.8004294	0.0420579	0.0443688	-1.3645294	-0.9437271	-0.0683885	-0.0086747
2.90	-0.0713678	-1.8471761	0.0387231	0.0438879	-1.4314141	-0.9256593	-0.0650217	-0.0105263
2.95	-0.1446435	-1.8929459	0.0355541	0.0433193	-1.4998711	-0.9046246	-0.0617576	-0.0121882
3.00	-0.2213802	-1.9375868	0.0325456	0.0426721	-1.5698466	-0.8804823	-0.0585961	-0.0136725
3.05	-0.3016525	-1.9809399	0.0296927	0.0419548	-1.6412803	-0.8530888	-0.0555369	-0.0149907
3.10	-0.3855315	-2.0228390	0.0269902	0.0411756	-1.7141044	-0.8222977	-0.0525794	-0.0161538
3.15	-0.4730849	-2.0631106	0.0244331	0.0403419	-1.7882442	-0.7879598	-0.0497228	-0.0171720
3.20	-0.5643764	-2.1015734	0.0220163	0.0394606	-1.8636170	-0.7499237	-0.0469662	-0.0180551
3.25	-0.6594656	-2.1380387	0.0197348	0.0385385	-1.9401319	-0.7080354	-0.0443085	-0.0188124
3.30	-0.7584070	-2.1723101	0.0175838	0.0375814	-2.0176900	-0.6621391	-0.0417484	-0.0194526
3.35	-0.8612502	-2.2041832	0.0155584	0.0365950	-2.0961834	-0.6120770	-0.0392844	-0.0199840
3.40	-0.9680390	-2.2334458	0.0136538	0.0355846	-2.1754952	-0.5576898	-0.0369152	-0.0204145
3.45	-1.0788112	-2.2598774	0.0118653	0.0345551	-2.2554991	-0.4988167	-0.0346391	-0.0207514
3.50	-1.1935982	-2.2832500	0.0101884	0.0335109	-2.3360591	-0.4352962	-0.0324544	-0.0210018
3.55	-1.3124240	-2.3033269	0.0086184	0.0324563	-2.4170291	-0.3669657	-0.0303593	-0.0211723
3.60	-1.4353053	-2.3198637	0.0071510	0.0313949	-2.4982525	-0.2936624	-0.0283519	-0.0212693
3.65	-1.5622507	-2.3326075	0.0057818	0.0303305	-2.5795620	-0.2152236	-0.0264302	-0.0212985
3.70	-1.6932600	-2.3412977	0.0045065	0.0292661	-2.6607790	-0.1314868	-0.0245924	-0.0212657
3.75	-1.8283239	-2.3456652	0.0033212	0.0282048	-2.7417135	-0.0422902	-0.0228362	-0.0211761
3.80	-1.9674233	-2.3454331	0.0022216	0.0271494	-2.8221639	0.0525266	-0.0211596	-0.0210348
3.85	-2.1105286	-2.3403162	0.0012039	0.0261022	-2.9019160	0.1531225	-0.0195605	-0.0208463
3.90	-2.2575995	-2.3300219	0.0002643	0.0250654	-2.9807434	0.2596541	-0.0180367	-0.0206151

x	Z ₁	Z ₂	Z ₃	Z ₄	dZ ₁	dZ ₂	dZ ₃	dZ ₄
3.95	-2.4085836	-2.3142493	-0.0006010	0.0240413	-3.0584069	0.3722755	-0.0165859	-0.0203455
4.00	-2.5634166	-2.2926903	-0.0013955	0.0230315	-3.1346540	0.4911374	-0.0152060	-0.0200412
4.10	-2.8843057	-2.2309428	-0.0027860	0.0210613	-3.2818214	0.7481668	-0.0126495	-0.0193435
4.20	-3.2194798	-2.1421680	-0.0039339	0.0191660	-3.4199512	1.0318621	-0.0103489	-0.0185489
4.30	-3.5679109	-2.0236471	-0.0048637	0.0173540	-3.5465197	1.3432519	-0.0082854	-0.0176809
4.40	-3.9283066	-1.8725638	-0.0055983	0.0156316	-3.6587653	1.6832508	-0.0064400	-0.0167604
4.50	-4.2990866	-1.6860172	-0.0061583	0.0140031	-3.7536813	2.0526345	-0.0047929	-0.0158053
4.60	-4.6783569	-1.4610369	-0.0065628	0.0124711	-3.8280104	2.4520124	-0.0033237	-0.0148314
4.70	-5.0638856	-1.1946009	-0.0068283	0.0110369	-3.8782398	2.8817988	-0.0020106	-0.0138526
4.80	-5.4530762	-0.8836570	-0.0069693	0.0097004	-3.9005992	3.3421806	-0.0008306	-0.0128807
4.90	-5.8429425	-0.5251470	-0.0069980	0.0084602	-3.8910606	3.8330843	0.0002421	-0.0119263
5.00	-6.2300825	-0.1160347	-0.0069235	0.0073142	-3.8453395	4.3541389	0.0012361	-0.0109987
5.10	-6.6106534	0.3466627	-0.0067523	0.0062593	-3.7589011	4.9046386	0.0021846	-0.0101065
5.20	-6.9803464	0.8658389	-0.0064869	0.0052915	-3.6269669	5.4835013	0.0031266	-0.0092576
5.30	-7.3343635	1.4442589	-0.0061256	0.0044061	-3.4445275	6.0892267	0.0041089	-0.0084601
5.40	-7.6673944	2.0845148	-0.0056619	0.0035975	-3.2063568	6.7198512	0.0051886	-0.0077224
5.50	-7.9735966	2.7889773	-0.0050824	0.0028593	-2.9070326	7.3729017	0.0064360	-0.0070539
5.60	-8.2465762	3.5597423	-0.0043662	0.0021840	-2.5409603	8.0453476	0.0079387	-0.0064660
5.70	-8.4793726	4.3985728	-0.0034825	0.0015629	-2.1024027	8.7335509	0.0098061	-0.0059724
5.80	-8.6644458	5.3068353	-0.0023882	0.0009858	-1.5855149	9.4332161	0.0121757	-0.0055910
5.90	-8.7936676	6.2854321	-0.0010249	0.0004403	-0.9843857	10.1393382	0.0152204	-0.0053445
6.00	-8.8583172	7.3347269	0.0006855	-0.0000886	-0.2930849	10.8461514	0.0191574	-0.0052627

Tabla Nº 7.1. Ábaco de funciones Z1, Z2, Z3, Z4 y sus derivadas

7.2. Tablas tipo de manejo de datos

P = 25 Ton			
Deflexión Máx. (cm)	0.2108	Ks (Kg/cm ³)	1
L (m)	153.80	e (cm)	30
r (cm)	r/L	Mr (Kg*m)	Mt (Kg*m)
25	0.162546	3948.79	6129.34
50	0.325091	2056.61	3712.84
75	0.487637	1274.52	2826.38
100	0.650183	701.12	2188.00
125	0.812728	314.32	1731.93
150	0.975274	30.10	1374.87
175	1.137820	-170.23	1096.94
200	1.300365	-312.97	873.03
225	1.462911	-408.95	693.85
250	1.625457	-470.49	548.18
275	1.788003	-504.40	430.67
300	1.950548	-517.69	335.18
325	2.113094	-514.86	258.28
350	2.275640	-500.26	196.21
375	2.438185	-476.93	146.65
400	2.600731	-447.66	107.13
425	2.763277	-414.45	76.04
450	2.925822	-379.09	51.70
475	3.088368	-342.85	32.98
500	3.250914	-306.83	18.72
525	3.413459	-271.79	8.13
550	3.576005	-238.36	0.41
575	3.738551	-206.93	-4.99
600	3.901096	-177.80	-8.60
625	4.063642	-151.12	-10.82
650	4.226188	-126.98	-12.01
675	4.388734	-105.37	-12.41
700	4.551279	-86.25	-12.27
725	4.713825	-69.52	-11.75
750	4.876371	-55.05	-11.00
775	5.038916	-42.69	-10.13
800	5.201462	-32.28	-9.21

Tabla Nº 7.2. Ejemplo de tabla de manejo de data exportada y depurada de SAFE®

e (cm)	30	Ks (Kg/cm³)	1.0	P (Kg)	25000
		L (cm)	153.8	μc	0.2

r (cm)	r/L	Z ₃ '	Z ₄	Z ₄ '	Mr (Kg*m)	Mt (Kg*m)
15	0.0975	-0.09139	-1.55698	6.505195	5045.78	6631.56
20	0.1300	-0.10998	-1.37475	4.864873	4363.43	5947.20
25	0.1625	-0.12598	-1.23387	3.876392	3836.54	5417.48
50	0.3251	-0.18107	-0.80203	1.880376	2227.83	3787.39
75	0.4876	-0.21059	-0.55947	1.193235	1337.44	2858.59
100	0.6502	-0.22473	-0.39704	0.836367	753.33	2224.47
125	0.8127	-0.22858	-0.28042	0.614161	346.40	1756.75
150	0.9753	-0.22530	-0.19368	0.461355	55.46	1397.14
175	1.1378	-0.21706	-0.12821	0.349848	-152.51	1114.09
200	1.3004	-0.20541	-0.07849	0.265438	-299.24	887.91
225	1.4629	-0.19156	-0.04088	0.200075	-399.21	705.81
250	1.6255	-0.17639	-0.01268	0.148785	-463.33	558.43
275	1.7880	-0.16061	0.00807	0.108266	-499.58	439.03
300	1.9506	-0.14472	0.02297	0.076206	-514.53	342.25
325	2.1131	-0.12914	0.03321	0.050900	-513.13	264.05
350	2.2757	-0.11414	0.03981	0.031051	-499.59	201.01
375	2.4382	-0.09994	0.04355	0.015644	-477.13	150.51
400	2.6008	-0.08669	0.04509	0.003857	-448.47	110.30
425	2.7633	-0.07447	0.04497	-0.004977	-415.81	78.53
450	2.9259	-0.06332	0.04360	-0.011409	-380.71	53.71
475	3.0884	-0.05326	0.04136	-0.015898	-344.73	34.53
500	3.2510	-0.04426	0.03852	-0.018826	-308.82	19.92
525	3.4135	-0.03629	0.03531	-0.020515	-273.84	9.02
550	3.5761	-0.02930	0.03190	-0.021232	-240.34	1.09
575	3.7386	-0.02323	0.02845	-0.021201	-208.88	-4.49
600	3.9012	-0.01800	0.02504	-0.020609	-179.57	-8.23
625	4.0637	-0.01355	0.02177	-0.019609	-152.73	-10.54
650	4.2263	-0.00978	0.01868	-0.018327	-128.33	-11.77
675	4.3888	-0.00664	0.01582	-0.016865	-106.44	-12.21
700	4.5514	-0.00402	0.01320	-0.015306	-86.91	-12.09
725	4.7139	-0.00184	0.01085	-0.013717	-69.76	-11.61
750	4.8765	0.00000	0.00874	-0.012149	-54.65	-10.93
775	5.0390	0.00161	0.00689	-0.010646	-41.48	-10.21
800	5.2016	0.00314	0.00528	-0.009245	-29.96	-9.62

Tabla Nº 7.3. Ejemplo de hoja de cálculo de solicitaciones del método simplificado

DATA ENTRADA		DATA SALIDA																																																																																																																																																																																																																													
f_c (kg/cm ²)	250	μ_c	0.2																																																																																																																																																																																																																												
ϵ_c	238752	μ_s	0.2																																																																																																																																																																																																																												
		MÓDULO DE BALASTOS (kg/cm²)																																																																																																																																																																																																																													
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0																																																																																																																																																																																																
30	5.596E+08	273.50	229.98	207.82	193.40	182.90	174.75	168.15	162.63	157.91	153.80	150.18	146.96	144.04	141.39	138.98	136.75	134.70	132.78	131.00	129.33	127.76	126.29	124.90	123.57	122.31	121.11	119.98	118.90	117.86	116.86	115.89	114.94	114.00	113.09	112.20	111.33	110.48	109.64	108.81	107.99	107.19	106.40	105.62	104.85	104.09	103.34	102.59	101.85	101.12	100.40	99.69	98.99	98.30	97.61	96.93	96.26	95.59	94.93	94.27	93.62	92.97	92.33	91.69	91.05	90.42	89.79	89.17	88.55	87.93	87.32	86.71	86.10	85.50	84.90	84.30	83.70	83.11	82.52	81.93	81.34	80.75	80.16	79.57	78.98	78.40	77.81	77.23	76.65	76.07	75.49	74.91	74.33	73.75	73.17	72.60	72.02	71.44	70.86	70.29	69.71	69.14	68.56	67.99	67.41	66.84	66.26	65.69	65.11	64.54	63.97	63.40	62.83	62.26	61.69	61.12	60.55	59.98	59.41	58.84	58.27	57.70	57.13	56.56	55.99	55.42	54.85	54.28	53.71	53.14	52.57	52.00	51.43	50.86	50.29	49.72	49.15	48.58	48.01	47.44	46.87	46.30	45.73	45.16	44.59	44.02	43.45	42.88	42.31	41.74	41.17	40.60	40.03	39.46	38.89	38.32	37.75	37.18	36.61	36.04	35.47	34.90	34.33	33.76	33.19	32.62	32.05	31.48	30.91	30.34	29.77	29.20	28.63	28.06	27.49	26.92	26.35	25.78	25.21	24.64	24.07	23.50	22.93	22.36	21.79	21.22	20.65	20.08	19.51	18.94	18.37	17.80	17.23	16.66	16.09	15.52	14.95	14.38	13.81	13.24	12.67	12.10	11.53	10.96	10.39	9.82	9.25	8.68	8.11	7.54	6.97	6.40	5.83	5.26	4.69	4.12	3.55	2.98	2.41	1.84	1.27	0.70	0.13
35	8.886E+08	307.03	258.19	233.29	217.10	205.32	196.17	188.76	182.56	177.26	172.65	168.59	164.96	161.69	158.72	155.99	153.51	151.20	149.06	147.06	145.18	143.42	141.76	140.20	138.71	137.31	135.97	134.69	133.47	132.30	131.19	130.12	129.09	128.09	127.11	126.16	125.24	124.34	123.46	122.60	121.76	120.93	120.12	119.32	118.54	117.77	117.01	116.26	115.51	114.77	114.04	113.31	112.59	111.87	111.16	110.45	109.74	109.03	108.33	107.62	106.92	106.22	105.52	104.82	104.12	103.42	102.72	102.02	101.32	100.62	99.92	99.22	98.52	97.82	97.12	96.42	95.72	95.02	94.32	93.62	92.92	92.22	91.52	90.82	90.12	89.42	88.72	88.02	87.32	86.62	85.92	85.22	84.52	83.82	83.12	82.42	81.72	81.02	80.32	79.62	78.92	78.22	77.52	76.82	76.12	75.42	74.72	74.02	73.32	72.62	71.92	71.22	70.52	69.82	69.12	68.42	67.72	67.02	66.32	65.62	64.92	64.22	63.52	62.82	62.12	61.42	60.72	60.02	59.32	58.62	57.92	57.22	56.52	55.82	55.12	54.42	53.72	53.02	52.32	51.62	50.92	50.22	49.52	48.82	48.12	47.42	46.72	46.02	45.32	44.62	43.92	43.22	42.52	41.82	41.12	40.42	39.72	39.02	38.32	37.62	36.92	36.22	35.52	34.82	34.12	33.42	32.72	32.02	31.32	30.62	29.92	29.22	28.52	27.82	27.12	26.42	25.72	25.02	24.32	23.62	22.92	22.22	21.52	20.82	20.12	19.42	18.72	18.02	17.32	16.62	15.92	15.22	14.52	13.82	13.12	12.42	11.72	11.02	10.32	9.62	8.92	8.22	7.52	6.82	6.12	5.42	4.72	4.02	3.32	2.62	1.92	1.22	0.52										
40	1.326E+09	339.37	285.37	257.86	239.97	226.95	216.84	208.64	201.79	195.93	190.84	186.34	182.34	178.72	175.44	172.44	169.68	167.13	164.76	162.55	160.48	158.53	156.70	154.97	153.33	151.77	150.29	148.88	147.53	146.24	145.01	143.84	142.71	141.61	140.53	139.47	138.43	137.41	136.40	135.41	134.43	133.46	132.50	131.56	130.63	129.71	128.80	127.90	127.01	126.13	125.26	124.40	123.55	122.70	121.86	121.03	120.20	119.38	118.56	117.74	116.93	116.12	115.32	114.52	113.72	112.92	112.12	111.32	110.52	109.72	108.92	108.12	107.32	106.52	105.72	104.92	104.12	103.32	102.52	101.72	100.92	100.12	99.32	98.52	97.72	96.92	96.12	95.32	94.52	93.72	92.92	92.12	91.32	90.52	89.72	88.92	88.12	87.32	86.52	85.72	84.92	84.12	83.32	82.52	81.72	80.92	80.12	79.32	78.52	77.72	76.92	76.12	75.32	74.52	73.72	72.92	72.12	71.32	70.52	69.72	68.92	68.12	67.32	66.52	65.72	64.92	64.12	63.32	62.52	61.72	60.92	60.12	59.32	58.52	57.72	56.92	56.12	55.32	54.52	53.72	52.92	52.12	51.32	50.52	49.72	48.92	48.12	47.32	46.52	45.72	44.92	44.12	43.32	42.52	41.72	40.92	40.12	39.32	38.52	37.72	36.92	36.12	35.32	34.52	33.72	32.92	32.12	31.32	30.52	29.72	28.92	28.12	27.32	26.52	25.72	24.92	24.12	23.32	22.52	21.72	20.92	20.12	19.32	18.52	17.72	16.92	16.12	15.32	14.52	13.72	12.92	12.12	11.32	10.52	9.72	8.92	8.12	7.32	6.52	5.72	4.92	4.12	3.32	2.52	1.72	0.92	0.12																
45	1.889E+09	370.71	311.73	281.68	263.13	247.91	236.86	227.91	220.42	214.03	208.46	203.56	199.18	195.23	191.65	188.37	185.35	182.57	179.98	177.56	175.30	173.17	171.17	169.28	167.49	165.79	164.17	162.63	161.15	159.75	158.40	157.09	155.81	154.56	153.34	152.14	150.96	149.80	148.66	147.54	146.44	145.35	144.28	143.22	142.17	141.13	140.10	139.08	138.07	137.07	136.07	135.08	134.09	133.10	132.11	131.13	130.15	129.17	128.20	127.23	126.26	125.29	124.32	123.35	122.38	121.41	120.44	119.47	118.50	117.53	116.56	115.59	114.62	113.65	112.68	111.71	110.74	109.77	108.80	107.83	106.86	105.89	104.92	103.95	102.98	102.01	101.04	100.07	99.10	98.13	97.16	96.19	95.22	94.25	93.28	92.31	91.34	90.37	89.40	88.43	87.46	86.49	85.52	84.55	83.58	82.61	81.64	80.67	79.70	78.73	77.76	76.79	75.82	74.85	73.88	72.91	71.94	70.97	70.00	69.03	68.06	67.09	66.12	65.15	64.18	63.21	62.24	61.27	60.30	59.33	58.36	57.39	56.42	55.45	54.48	53.51	52.54	51.57	50.60	49.63	48.66	47.69	46.72	45.75	44.78	43.81	42.84	41.87	40.90	39.93	38.96	37.99	37.02	36.05	35.08	34.11	33.14	32.17	31.20	30.23	29.26	28.29	27.32	26.35	25.38	24.41	23.44	22.47	21.50	20.53	19.56	18.59	17.62	16.65	15.68	14.71	13.74	12.77	11.80	10.83	9.86	8.89	7.92	6.95	5.98	5.01	4.04	3.07	2.10	1.13	0.16																																
50	2.591E+09	401.19	337.36	304.84	283.68	268.29	256.34	246.65	238.55	231.63	225.61	220.29	215.55	211.28	207.41	203.86	200.60	197.58	194.77	192.16	189.71	187.41	185.24	183.20	181.28	179.42	177.61	175.84	174.11	172.41	170.73	169.08	167.46	165.87	164.31	162.77	161.26	159.77	158.30	156.85	155.42	154.00	152.60	151.21	149.84	148.48	147.13	145.80	144.48	143.17	141.87	140.58	139.30	138.03	136.76	135.50	134.25	133.00	131.76	130.53	129.30	128.07	126.84	125.61	124.38	123.15	121.92	120.69	119.46	118.23	117.00	115.77	114.54	113.31	112.08	110.85	109.62	108.39	107.16	105.93	104.70	103.47	102.24	101.01	99.78	98.55	97.32	96.09	94.86	93.63	92.40	91.17	89.94	88.71	87.48	86.25	85.02	83.79	82.56	81.33	80.10	78.87	77.64	76.41	75.18	73.95	72.72	71.49	70.26	69.03	67.80	66.57	65.34	64.11	62.88	61.65	60.42	59.19	57.96	56.73	55.50	54.27	53.04	51.81	50.58	49.35	48.12	46.89	45.66	44.43	43.20	41.97	40.74	39.51	38.28	37.05	35.82	34.59	33.36	32.13	30.90	29.67	28.44	27.21	25.98	24.75	23.52	22.29	21.06	19.83	18.60	17.37	16.14	14.91	13.68	12.45	11.22	9.99	8.76	7.53	6.30	5.07	3.84	2.61	1.38	0.15																																																									
55	3.448E+09	430.92	362.36	327.43	304.71	288.17	275.33	264.92	256.23	248.79	242.32	236.62	231.53	226.94	222.74	218.96	215.46	212.22	209.21	206.40	203.77	201.30	198.97	196.77	194.69	192.71	190.83	188.94	187.13	185.39	183.69	182.02	180.38	178.76	177.16	175.57	174.00	172.45	170.91																																																																																																																																																																																								

$P = 50 \text{ Ton}$		$k = 1$		$e = 50 \text{ cm}$
		% Variación		
$r \text{ (cm)}$	M_r	M_t		
25	1.3%	8.5%		
50	4.1%	1.8%		
75	2.0%	0.7%		
100	2.1%	1.0%		
125	1.7%	0.8%		
150	1.8%	0.8%		
175	1.7%	0.8%		
200	1.9%	0.8%		
225	2.0%	0.8%		
250	2.2%	0.8%		
275	2.6%	0.8%		
300	3.1%	0.8%		
325	4.1%	0.8%		
350	6.6%	0.9%		
375	21.6%	0.9%		
400	10.8%	0.9%		
425	3.9%	0.9%		
450	2.2%	0.9%		
475	1.3%	0.9%		
500	0.8%	1.0%		
525	0.5%	1.0%		
550	0.3%	1.0%		
575	0.1%	1.0%		
600	0.0%	1.0%		
625	0.2%	1.0%		
650	0.3%	1.0%		
675	0.3%	1.0%		
700	0.4%	1.1%		
725	0.5%	1.1%		
750	0.5%	1.1%		
775	0.6%	1.1%		
800	0.7%	1.1%		
825	0.7%	1.1%		
850	0.7%	1.1%		
875	0.8%	1.1%		
900	0.8%	1.0%		
925	0.9%	1.0%		
950	0.9%	1.0%		
975	0.9%	1.0%		
1000	1.0%	0.9%		

Tabla Nº 7.5. Ejemplo de hoja de cálculo de porcentaje de variación de momentos entre métodos

$P = 50 \text{ Ton}$		$k = 1$		$e = 50 \text{ cm}$
		Diferencia entre valores de momento ($\text{kg}\cdot\text{m}$)		
$r \text{ (cm)}$	M_r	M_t		
25	616.2	5658.2		
50	1405.7	833.1		
75	528.9	290.6		
100	452.0	325.6		
125	301.7	236.2		
150	256.8	219.1		
175	202.9	183.4		
200	176.5	169.9		
225	148.5	150.8		
250	130.4	140.5		
275	112.0	128.0		
300	98.2	119.6		
325	84.5	110.2		
350	73.3	103.1		
375	62.3	95.5		
400	52.9	89.2		
425	43.8	82.7		
450	35.7	77.1		
475	28.1	71.5		
500	21.2	66.5		
525	14.8	61.5		
550	8.9	57.0		
575	3.5	52.5		
600	1.4	48.5		
625	5.9	44.5		
650	10.0	40.9		
675	13.7	37.4		
700	17.0	34.1		
725	20.0	31.0		
750	22.6	28.1		
775	24.9	25.4		
800	26.9	22.9		
825	28.7	20.5		
850	30.1	18.2		
875	31.3	16.1		
900	32.3	14.2		
925	33.1	12.4		
950	33.6	10.8		
975	34.0	9.2		
1000	34.2	7.8		

Tabla Nº 7.6. Ejemplo de hoja de cálculo de diferencia de momentos obtenidos por métodos

DATA ENTRADA		DATA SALIDA										
$D = \frac{E_c * t^3}{12 * (1 - \mu^2)}$	$\rho = \sqrt[4]{\frac{k_s}{D}}$	$y_o = \frac{P}{8\rho^2 D}$										

<table border="1"> <tr><td>k (Kg/cm³)</td><td>3</td></tr> <tr><td>f'c (Kg/cm²)</td><td>250</td></tr> <tr><td>P "carga" (Kg)</td><td>200000</td></tr> <tr><td>e "espesor t" (cm)</td><td>100</td></tr> <tr><td>μ "Coeficiente Poisson"</td><td>0.2</td></tr> </table>			k (Kg/cm ³)	3	f'c (Kg/cm ²)	250	P "carga" (Kg)	200000	e "espesor t" (cm)	100	μ "Coeficiente Poisson"	0.2
k (Kg/cm ³)	3											
f'c (Kg/cm ²)	250											
P "carga" (Kg)	200000											
e "espesor t" (cm)	100											
μ "Coeficiente Poisson"	0.2											

<table border="1"> <tr><td>Ec</td><td>238752</td></tr> <tr><td>D</td><td>2.0725E+10</td></tr> <tr><td>ρ</td><td>0.003</td></tr> </table>			Ec	238752	D	2.0725E+10	ρ	0.003				
Ec	238752											
D	2.0725E+10											
ρ	0.003											
Deflexión Máxima de la Placa												
<table border="1"> <tr><td>yo "Deflexión Máxima" (cm)</td><td>0.100</td></tr> </table>			yo "Deflexión Máxima" (cm)	0.100								
yo "Deflexión Máxima" (cm)	0.100											

Tabla N° 7.7. Hoja de cálculo de deflexión máxima en el método simplificado

AEF			SIMPLIFICADO	
e=30 cm / P=25 Ton				
k (Kg/cm ³)	yo (cm)	Diferencia	k (Kg/cm ³)	yo (cm)
1	0.210812	0.0787065	1	0.1321055
2	0.135748	0.0423353	2	0.0934127
3	0.106401	0.03012985	3	0.07627115

Tabla N° 7.8. Hoja de cálculo de diferencia de deflexiones máximas entre métodos

Diferencia Mr (kg*m)	k (kg/cm ³)
112.3	1
107.5253528	2
102.543186	3
r=25cm	
P=25 / k=1 / e=30	
Diferencia Mt (kg*m)	k (kg/cm ³)
711.9	1
704.2959527	2
698.9241266	3

Tabla N° 7.9. Hoja de cálculo de diferencias de momentos entre métodos para un radio específico

1m del borde		
P = 50 Ton / e=50cm / k=1 kg/cm ³		
r (cm)	Momento (kg*m)	
	Simplificado	AEF
25	7605	5605
50	4341	1934
75	2479	588
2m del borde		
P = 50 Ton / e=50cm / k=1 kg/cm ³		
r (cm)	Momento (kg*m)	
	Simplificado	AEF
25	7673	7972
50	4409	4196
75	2547	2602
100	1274	1440
125	335	687
150	-387	200
175	-954	-27

Tabla N° 7.10. Hoja de cálculo de momentos a 1m y 2m de borde para ambos métodos

1m de esquina

P = 50 Ton / e=50cm / k=1 kg/cm³

r (cm)	Momento (kg*m)	
	Simplificado	AEF
25	7605	5843
50	4341	2116
75	2479	676

2m de esquina

P = 50 Ton / e=50cm / k=1 kg/cm³

r (cm)	Momento (kg*m)	
	Simplificado	AEF
25	7673	8034.34
50	4409	4251.88
75	2547	2640.64
100	1274	1458.17
125	335	684
150	-387	184
175	-954	-43

Tabla N° 7.11. Hoja de cálculo de momentos a 1m y 2m de esquina para ambos métodos

7.3. Cálculos tipo

$$\frac{d}{dx} \left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{(6!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{16}}{(8!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{20}}{(10!)^2} \right] \rightarrow -0.0000055447834809554134362 - 5.545 \times 10^{-6}$$

Figura N° 7.3. Derivada de función Z1 obtenida para un x=0.446 en el programa Mathcad®

$$\frac{d}{dx} \left[-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{(5!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{14}}{(7!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{18}}{(9!)^2} \right] \rightarrow -0.022299999540439102688 - 0.022$$

Figura N° 7.4. Derivada de función Z1 obtenida para un x=0.446 en el programa Mathcad®

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{\binom{4}{x} \binom{8}{1-x} \binom{12}{1-2x} \binom{16}{1-3x} \binom{20}{1-4x}}{(2x)^2 (4x)^2 (6x)^2 (8x)^2 (10x)^2} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{\binom{2}{x} \binom{4}{1-x} \binom{6}{1-2x} \binom{8}{1-3x} \binom{10}{1-4x} \binom{12}{1-5x} \binom{14}{1-6x} \binom{16}{1-7x} \binom{18}{1-8x}}{(1x)^2 (2x)^2 (3x)^2 (4x)^2 (5x)^2 (6x)^2 (7x)^2 (8x)^2} + (0.577216 + \ln(5) - \ln(2)) \cdot \frac{\binom{2}{x} \binom{6}{1-x} \binom{10}{1-2x} \binom{14}{1-3x} \binom{18}{1-4x}}{(1x)^2 (3x)^2 (5x)^2 (7x)^2 (9x)^2} - 0.01419620631231310115 \ln(2) - 0.04305856004387376915 = -0.053 \right]$$

Figura Nº 7.5. Derivada de función Z3 obtenida para un x=0.446 en el programa Mathcad®

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{\binom{2}{x} \binom{6}{1-x} \binom{10}{1-2x} \binom{14}{1-3x} \binom{18}{1-4x}}{(1x)^2 (3x)^2 (5x)^2 (7x)^2 (9x)^2} + \frac{2}{x}}{1 + \frac{\binom{4}{x} \binom{8}{1-x} \binom{12}{1-2x} \binom{16}{1-3x} \binom{20}{1-4x}}{(2x)^2 (4x)^2 (6x)^2 (8x)^2 (10x)^2} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{\binom{2}{x} \binom{4}{1-x} \binom{6}{1-2x} \binom{8}{1-3x} \binom{10}{1-4x} \binom{12}{1-5x} \binom{14}{1-6x} \binom{16}{1-7x} \binom{18}{1-8x}}{(1x)^2 (2x)^2 (3x)^2 (4x)^2 (5x)^2 (6x)^2 (7x)^2 (8x)^2} + (0.577216 + \ln(5) - \ln(2)) \cdot \frac{\binom{4}{x} \binom{8}{1-x} \binom{12}{1-2x} \binom{16}{1-3x} \binom{20}{1-4x}}{(2x)^2 (4x)^2 (6x)^2 (8x)^2 (10x)^2} - 0.00000529818797133606029 \ln(2) + 14.263496280749976308 = 14.263 \right]$$

Figura Nº 7.6. Derivada de función Z4 obtenida para un x=0.446 en el programa Mathcad®

7.4. Hoja de cálculo Mathcad® en digital de funciones Z y dZ