

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN FORMA  
ANALÍTICA DE UN ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO  
DE CUATRO NODOS EN ELASTICIDAD PLANA**

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO  
PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
POR EL Br. **GUSTAVO ADOLFO CORONEL DELGADO**  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

Caracas, junio de 2006

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN FORMA  
ANALÍTICA DE UN ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO  
DE CUATRO NODOS EN ELASTICIDAD PLANA**

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO  
PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
POR EL Br. **GUSTAVO ADOLFO CORONEL DELGADO**  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

**Tutor académico:**

Prof. Liber Videla N.

Caracas, junio de 2006

# Agradecimientos

A mi familia por su constante apoyo durante todo este tiempo, por su paciencia y comprensión.

A todos los amigos y compañeros de estudio, y particularmente a Trino por su colaboración e incentivo durante la realización de este trabajo.

Al Profesor y amigo Liber Videla y a muchos otros profesores que de alguna manera contribuyeron a fortalecer mi interés y dedicación.

En general a todos las personas que en el día a día generan en mi una reflexión que contribuye a la búsqueda del rumbo deseado.

**Coronel Delgado Gustavo Adolfo**  
**CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN FORMA ANALÍTICA DE UN**  
**ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO DE CUATRO NODOS EN**  
**ELASTICIDAD PLANA**

**Tutor Académico: Prof. Liber Videla N.**  
**Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Civil 2006,**  
**número de páginas (134)**

Palabras claves: Método de los elementos finitos, Matriz de rigidez, Optimización,  
Integración analítica.

### **RESUMEN**

Los sistemas de álgebra computacional (SAC) son utilizados para optimizar el cálculo de matrices de rigidez de elementos finitos a través de técnicas de integración analítica y semi-analítica que permiten disminuir los tiempos de ejecución computacional.

En esta investigación se realizó el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos a través de la técnica de integración analítica desarrollada por Videla et al (2005). Se integraron cuatro casos en los que fue clasificado el elemento finito estudiado, en los cuales varía la geometría del elemento y el jacobiano de la transformación, haciendo más eficiente el cálculo en los casos donde la geometría es más simple.

De los casos estudiados se obtuvieron cuatro expresiones de integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez de éste elemento finito. Las expresiones se simplificaron y se codificaron como una subrutina en un lenguaje de alto nivel (Fortran 95), separando cada uno de los casos. Dentro del proceso de optimización se estudiaron y analizaron 216 constantes necesarias para el cálculo y se logró simplificarlas y optimizarlas. También se particularizó el cálculo del elemento cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados y se obtuvo una disminución importante de tiempo de ejecución. Luego de un largo estudio se encontró una forma de calcular los valores mínimos tolerables de las constantes del jacobiano. Esto es necesario en la técnica de integración analítica para realizar la selección del caso en aquellos elementos cercanos a la frontera entre un caso y otro, y lograr evitar errores.

Se realizó un programa compuesto por la rutina analítica desarrollada en este trabajo y la rutina semi-analítica desarrollada por Griffiths (1994); con la finalidad de comparar tiempos de ejecución computacional y precisión en el cálculo.

De los resultados, se concluye que la rutina analítica de este trabajo es mucho más eficiente en tiempo que la semi-analítica, y que la rutina de integración numérica utilizada clásicamente. Además, se comprueba la precisión que la integración analítica proporciona en los casos de geometría distorsionada, donde las rutinas semi-analítica y numérica, basadas en la integración numérica de Gauss Legendre, cometen errores.

## ACTA

El día 28 de junio de 2006 se reunió el jurado formado por los profesores:

Liber Videla

\_\_\_\_\_  
Tomás Osers

\_\_\_\_\_  
William Annicchiarico

Con el fin de examinar el Trabajo Especial de Grado titulado: **“CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ EN FORMA ANALÍTICA DE UN ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO DE CUATRO NODOS EN ELASTICIDAD PLANA”**.

Presentado ante la Ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al Título de **INGENIERO CIVIL**.

Una vez oída la defensa oral que el (la, las, los) bachiller(es) hicieron de su Trabajo Especial de Grado, este jurado decidió las siguientes calificaciones:

NOMBRE	CALIFICACIÓN	
	Números	Letras
Br. Gustavo A. Coronel D.		

Recomendaciones:

---

---

---

FIRMAS DEL JURADO

---

---

---

Caracas, 28 de junio de 2006

# Índice general

	Pág.
Portada	
Contraportada	
Agradecimientos .....	iii
Resumen .....	iv
Índice general .....	v
Lista de tablas .....	xi
Lista de gráficos y figuras .....	xiv
Glosario .....	xvi
<b><i>CAPÍTULO I : Introducción</i></b> .....	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema .....	1
1.2. Antecedentes .....	3
1.3. Objetivos de la investigación.....	5
1.3.1. Objetivo general.....	5
1.3.2. Objetivos específicos .....	5
1.4. Aportes.....	6
1.5. Método.....	7
1.5.1. Etapa I: Recopilación de información .....	7
1.5.2. Etapa II: Obtención y optimización de las expresiones analíticas.....	7
1.5.3. Etapa III: Programación de una subrutina de cálculo de la matriz de rigidez a través de las expresiones analíticas.....	8

1.5.4.	Etapas IV: Validación y comparación de los resultados .....	8
<b><i>CAPÍTULO II : Marco teórico</i></b> .....		<b>9</b>
2.1.	Teoría de la elasticidad .....	9
2.1.1.	Elasticidad.....	9
2.1.2.	Tensiones y deformaciones.....	9
2.1.3.	Ecuaciones de la teoría de elasticidad.....	10
2.1.4.	Elasticidad plana .....	11
2.1.4.1.	Tensión plana.....	11
2.1.4.2.	Deformación plana.....	12
2.1.4.3.	Campo de desplazamientos.....	12
2.1.4.4.	Campo de deformaciones.....	13
2.1.4.5.	Campo de tensiones .....	13
2.1.4.6.	Relación tensión-deformación .....	14
2.1.4.7.	Ecuaciones diferenciales de equilibrio .....	15
2.1.4.8.	Principio de los trabajos virtuales (PTV).....	18
2.1.4.9.	Principio de energía potencial total .....	19
2.2.	Método de los elementos finitos (MEF) .....	20
2.2.1.	Desarrollo y definición .....	20
2.2.2.	Métodos basados en los residuos ponderado (Galerkin) .....	21
2.2.3.	El MEF en la mecánica de sólidos.....	21
2.2.3.1.	Modelos en la mecánica de sólido .....	22
2.2.3.2.	Formulación del modelo compatible o método de los desplazamientos ..	23
2.2.3.3.	Obtención de las funciones de forma.....	26
2.2.3.4.	Formulación isoparamétrica .....	29
2.2.3.5.	Requisitos para la convergencia .....	34
2.3.	Formulación para el elementos finito isoparamétrico de cuatro nodos .....	36
2.3.1.	Discretización del campo de desplazamientos.....	36
2.3.2.	Discretización del campo de deformaciones .....	37
2.3.3.	Discretización del campo de tensiones.....	37

2.3.4.	Matriz de rigidez.....	38
2.3.5.	Formulación isoparamétrica .....	38
2.3.5.1.	Relación de interpolación geométrica.....	38
2.3.5.2.	Jacobiano de la transformación.....	38
2.3.5.3.	Integración sobre el dominio normalizado .....	39
2.3.6.	Integración de la matriz de rigidez .....	40
2.3.6.1.	Integración numérica .....	40
2.3.6.2.	Integración numérica, técnica semi-analítica.....	42
2.3.6.3.	Integración exacta, técnica analítica .....	43
2.3.7.	Consideración sobre el comportamiento del elemento finito de cuatro nodos .....	44
	.....	44
	<b><i>CAPÍTULO III : Implementación de la técnica analítica .....</i></b>	<b>45</b>
3.1.	Sistemas de álgebra computacional (SAC).....	46
3.1.1.	Antecedentes .....	46
3.1.2.	Aplicaciones comunes .....	46
3.1.3.	Maple .....	47
3.2.	Técnica de integración analítica .....	48
3.3.	Implementación de la técnica para el elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos .....	49
3.3.1.	Desarrollo de la formulación en Maple .....	49
3.3.2.	Funciones de forma y sus derivadas con respecto a las coordenadas naturales $(\xi, \eta)$ .....	51
3.3.3.	Determinante del jacobiano .....	52
3.3.4.	Interpolación geométrica de las coordenadas cartesianas $(x, y)$ .....	52
3.3.5.	Derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas .....	53
3.3.6.	Desarrollo de los términos de la submatriz.....	54
3.3.7.	Integración de la expresión general para los casos del Jacobiano .....	57
3.3.7.1.	Caso I.....	57



3.3.7.2.	Caso II.....	58
3.3.7.3.	Caso III .....	59
3.3.7.4.	Caso IV .....	59
3.4.	Optimización.....	61
3.4.1.	Etapa I: Optimización de las constantes .....	61
3.4.1.1.	Reducción de las constantes .....	61
3.4.1.2.	Términos iguales en las constantes generales.....	63
3.4.2.	Etapa II: codificación.....	63
3.4.2.1.	Algoritmo de cálculo .....	63
3.4.2.2.	Proceso de codificación .....	64
3.4.2.3.	Términos iguales en la matriz de rigidez .....	64
<b><i>CAPÍTULO IV : Resultados de precisión, eficiencia y tolerancia .....</i></b>		<b>67</b>
4.1.	Precisión.....	68
4.1.1.	Errores de la integración numérica de la matriz de rigidez .....	69
4.1.1.1.	Algunos elementos de los casos I y I.a ( $AJ=BJ=0$ ).....	69
4.1.1.2.	Algunos elementos del caso II ( $AJ=0$ ).....	70
4.1.1.3.	Algunos elementos del caso III ( $BJ=0$ ).....	71
4.1.1.4.	Algunos elementos del caso IV .....	72
4.1.2.	Análisis de resultados .....	73
4.2.	Eficiencia de la rutina analítica.....	74
4.2.1.	Características que hacen posible la comparación.....	74
4.2.2.	Relación de tiempos de ejecución computacional .....	75
4.2.3.	Porcentaje de tiempo optimizado.....	75
4.2.4.	Resultados obtenidos .....	76

4.2.4.1.	La rutina analítica contra la numérica.....	76
4.2.4.2.	La rutina analítica contra la semi-analítica .....	76
4.2.5.	Análisis de resultados .....	77
4.3.	Tolerancia de la rutina analítica.....	78
4.3.1.	Ejemplo # 1 .....	78
4.3.2.	Nulidad de las constantes.....	79
4.3.3.	Ejemplo # 2.....	80
4.3.4.	Ejemplo # 3 .....	82
4.3.5.	Razón del error.....	83
4.3.6.	Valor de la tolerancia.....	85
 <b><i>CAPÍTULO V : Aplicaciones y comparación de resultados</i></b> .....		<b>88</b>
5.1.	Ejemplo comparativo # 1 (prueba general, todos los tipos de elementos) .....	90
5.1.1.	Planteamiento.....	90
5.1.2.	Características del problema y propiedades de los materiales.....	90
5.1.3.	Comparación de resultados para tensión plana.....	91
5.1.4.	Comparación de resultados para deformación plana .....	92
5.2.	Ejemplo comparativo # 2 (tracción pura) .....	93
5.2.1.	Planteamiento.....	93
5.2.2.	Características del problema y propiedades de los materiales.....	93
5.2.3.	Comparación de resultados.....	94
5.3.	Ejemplo comparativo # 3 (flexión pura).....	95
5.3.1.	Planteamiento.....	95
5.3.2.	Características del problema y propiedades de los materiales.....	95

5.3.3.	Comparación de resultados.....	96	
5.4.	Ejemplo comparativo # 4. Presa con cavidad (deformación plana) .....	97	
5.4.1.	Planteamiento.....	97	
5.4.2.	Características del problema y propiedades de los materiales.....	98	
5.4.3.	Cargas nodales .....	98	
5.4.4.	Comparación de resultados.....	99	
5.5.	Ejemplo comparativo # 5. Barra con orificio circular (tensión plana) .....	100	
5.5.1.	Planteamiento.....	100	
5.5.2.	Características del problema y propiedades de los materiales.....	100	
5.5.3.	Cargas nodales .....	101	
5.5.4.	Comparación de resultados.....	101	
5.6.	Análisis de resultados .....	102	
 <b><i>CAPÍTULO VI : Conclusiones</i></b>			
8.1.	Conclusión general .....	103	
8.2.	Conclusiones particulares .....	104	
 <b><i>Referencias bibliográficas.....</i></b>			105
 <b><i>Bibliografía adicional .....</i></b>			107
 <b><i>APÉNDICE A : Expresiones integradas y constantes generales.....</i></b>			109
 <b><i>APÉNDICE B : Uso del programa .....</i></b>			116
 <b><i>APÉNDICE C : Nulidad de las constantes.....</i></b>			119
 <b><i>APÉNDICE D : Código de la rutina analítica.....</i></b>			123

## Lista de tablas

	Pág.
Tabla 2. 10 Coordenadas y pesos de los puntos de integración para cuadraturas de $N \times N$ ...	42
Tabla 3. 1 Términos repetidos en las matrices de rigidez, por inspección de ejemplos. ....	65
Tabla 4. 1 Porcentajes de error en elementos de tipo I.a y tipo I ( $AJ=BJ=0$ ). ....	69
Tabla 4. 2 Porcentajes de error en elementos de tipo II ( $AJ=0$ ). ....	70
Tabla 4. 3 Porcentajes de error en elementos de tipo III ( $BJ=0$ ). ....	71
Tabla 4. 4 Porcentajes de error en elementos de tipo IV ( $AJ \neq 0$ y $BJ \neq 0$ ). ....	72
Tabla 4. 5 Comparación de tiempos de ejecución computacional entre las rutinas numérica y analítica. ....	76
Tabla 4. 6 Comparación de tiempos de ejecución computacional entre las rutinas semi-analítica y analítica. ....	76
Tabla 4. 7 Ejemplo #1 - Magnitud de las constantes ( $AJ$ y $BJ$ ), comparación del porcentaje de diferencia entre los caso IV y I.a, para diferentes valores del parámetro ( $a$ ). ....	79
Tabla 4. 8 Ejemplo #2 – Constantes y porcentaje de diferencia para distintos valores de $ax$ y $ay$ . ....	81
Tabla 4. 9 Ejemplo #3 – Porcentaje de diferencia para distintos valores de $ax_i$ y $ay_i$ . ....	83
Tabla 4. 10 Relación entre $AJ$ y $BJ$ con $CJ$ para el ejemplo # 2 para $ax=ay$ . ....	85
Tabla 4. 11 Relación entre $BJ$ y $CJ$ para el ejemplo # 2 para ( $ay = 0$ ). ....	86
Tabla 4. 12 Relación entre $AJ$ , y $BJ$ con $CJ$ para el ejemplo # 3 para $ax=ay$ . ....	86
Tabla 5. 1 Ejemplo #1. Características del problema. ....	90

## Lista de tablas

---

Tabla 5. 2	Ejemplo #1. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica. ....	90
Tabla 5. 3	Ejemplo #1. Desplazamientos y diferencias para tensión plana.....	91
Tabla 5. 4	Ejemplo #1. Tensiones y diferencias en el pto. de gauss #2, para tensión plana. .....	91
Tabla 5. 5	Ejemplo #1. Porcentajes de diferencias promedios y máximas para tensión plana.....	91
Tabla 5. 6	Ejemplo #1. Desplazamientos y diferencias para deformación plana. ....	92
Tabla 5. 7	Ejemplo #1. Tensiones y diferencias en el pto. de gauss #2, para deformación plana.....	92
Tabla 5. 8	Ejemplo #1. Porcentajes de diferencias promedios y máximas para deformación plana.....	92
Tabla 5. 9	Ejemplo #2- Características del problema. ....	93
Tabla 5. 10	Ejemplo #2. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica. ....	93
Tabla 5. 11	Ejemplo #2. Desplazamientos nodales y diferencias.....	94
Tabla 5. 12	Ejemplo #2. Tensiones y diferencias en los cuatro puntos de gauss. ....	94
Tabla 5. 13	Ejemplo #3. Características del problema. ....	95
Tabla 5. 14	Ejemplo #3. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica. ....	95
Tabla 5. 15	Ejemplo #3. Desplazamientos nodales y diferencias.....	96
Tabla 5. 16	Ejemplo #3. Comparación de la solución con diferentes rutinas.....	96
Tabla 5. 17	Ejemplo #3. Tensiones y diferencias en el punto de gauss #2.....	96
Tabla 5. 18	Ejemplo #3. Diferencias promedios y máximas. ....	96
Tabla 5. 19	Ejemplo #4. Características del problema. ....	98
Tabla 5. 20	Ejemplo #4. Propiedades de los materiales. ....	98
Tabla 5. 21	Cargas nodales. ....	99
Tabla 5. 22	Ejemplo #4. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica. ....	99

Lista de tablas

---

Tabla 5. 23 Ejemplo #4. Diferencias promedios y máximas. ....	99
Tabla 5. 24 Ejemplo #5, características del modelo. ....	101
Tabla 5. 25 Ejemplo #5. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica. ..	101
Tabla 5. 26 Ejemplo #5. Diferencias promedios y máximas. ....	101

## Lista de figuras

	Pág.
Figura 2. 1 Estado de tensiones en un elemento diferencial de un cuerpo. ....	10
Figura 2. 2 Hipótesis de tensión plana. ....	11
Figura 2. 3 Hipótesis de deformación plana. ....	12
Figura 2. 4 Cuerpo sometido a un sistema de fuerzas. ....	16
Figura 2. 5 Tensiones actuantes en elemento diferencial. ....	16
Figura 2. 6 Transformación de coordenadas. ....	27
Figura 2. 7 Términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de elementos rectangulares de la familia Lagrangiana.; a) 4 nodos, b) 9 nodos, c) 16 nodos. ....	28
Figura 2. 8 Términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de elementos rectangulares de la familia Serendípita.; a) 4 nodos, b) 8 nodos, c) 12 nodos. ....	29
Figura 2. 9 Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros: a) 1x1, b) 2x2, c) 3x3 y d) 4x4, puntos de integración. ....	41
Figura 3. 1 Numeración de los nodos y grados de libertad del elemento. ....	49
Figura 3. 2 Parámetros del elemento. ....	61
Figura 3. 3 Valor del índice $f$ para cada término $(i, j)$ de la matriz de rigidez. ....	63
Figura 4. 1 Representación parametrizada de un elemento con pequeña distorsión. ....	78
Figura 4. 2 Representación gráfica del elemento distorsionado y de los parámetros $ax$ y $ay$ . .....	80
Figura 4. 3 Caso más general de distorsión cerca de la frontera. ....	82

Figura 4. 4 Gráfica de valores de $BJ$ contra $CttE2$ del ejemplo #2.....	84
Figura 5. 1 Puntos de gauss para el cálculo de las tensiones. ....	89
Figura 5. 2 Restricciones de desplazamiento utilizadas en los modelos. ....	89
Figura 5. 3 Ejemplo #1. Placa a tracción diagonal con los diferentes tipos de elementos. .	90
Figura 5. 4 Ejemplo #2. Placa en tracción pura. ....	93
Figura 5. 5 Ejemplo #3. Viga en volado a flexión con malla de elementos distorsionados. ...	95
Figura 5. 6 Presa con cavidad en tres dimensiones.....	97
Figura 5. 7 Sección plana de estudio de la presa bajo hipótesis de deformación plana. ....	97
Figura 5. 8 Discretización del problema en elementos finitos.....	98
Figura 5. 9 Detalle de las cargas sobre la presa: (a) distribución triangular de la carga lateral por presión hidrostática; (b) equivalente en cargas nodales de la presión hidrostática. ....	99
Figura 5. 10 Barra con orificio circular en tres dimensiones.....	100
Figura 5. 11 Discretización del problema en elementos finitos.....	100
Figura 5. 12 Ejemplo #5, cargas nodales.....	101



## *GLOSARIO*

**Algoritmo:** Conjunto ordenado y finito de pasos que indican la solución de un problema dado.

**Deformación lineal:** Alargamiento por unidad de longitud.

**Determinante del jacobiano:** Factor de escala necesario para correlacionar un sistema coordenadas con otro sistema cualquiera.

**ECB:** Ecuaciones características básicas que permiten calcular la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento finito.

**ECG:** Ecuación característica general que permite calcular la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento finito.

**Eficiencia:** Cantidad que mide el uso de los recursos del computador por parte de un programa, particularmente la cantidad de memoria que consume y su tiempo de ejecución.

**GDL:** Grados de libertad.

**Isotropía:** Característica de los cuerpos cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección.

**Maple:** Es un programa especializado en sistemas de álgebra por computadora que permite resolver problemas matemáticos muy comunes en científicas e ingeniería.

**Matriz de rigidez:** Relación entre los desplazamientos nodales y las fuerzas para cada elemento.

**MEF:** El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica de aproximación numérica que permite resolver problemas complicados de análisis de medios continuos de manera rápida y eficiente.

**Nulidad relativa:** valores nulos relativos de las constantes del jacobiano.

**Parámetros elásticos:** Son módulos que representan la resistencia elástica y la deformación transversal del material.

**PTV:** Principio de los trabajos virtuales.

**Programa:** Es un algoritmo destinado a dar órdenes (instrucciones) al computador, escrito en términos de uno o varios lenguajes de programación.

**SAC:** Los sistemas de álgebra computacional (SAC) son programas que permiten realizar grandes cantidades de operaciones matemáticas, tanto simbólicas como numéricas.

**Subrutina:** Secuencia invariable de instrucciones que forma parte de un programa y se puede utilizar repetidamente.

**Tensión:** Vector fuerza que actúa sobre un área, (sinónimo de esfuerzo).

**Trabajo:** Producto de la fuerza por el camino que recorre su punto de aplicación y por el coseno del ángulo que forma la una con el otro.

# CAPÍTULO I

## Introducción

### 1.1. Planteamiento del problema

Los avances computacionales y el desarrollo de programas en los últimos veinte años han hecho posible manipular, operar y simplificar expresiones matemáticas en forma simbólica a través de los llamados sistemas de álgebra computacional (SAC). Estos han sido de gran utilidad, ya que sus herramientas han permitido la creación y optimización de métodos y técnicas en múltiples áreas de investigación.

En el análisis de medios continuos existen muchos métodos numéricos basados en técnicas matriciales susceptibles de ser optimizados con el uso de SAC. Entre éstos, el método de elementos finitos (MEF) es el de uso más generalizado. Según lo indicado por Ferrante (1979),

Generalmente se reconoce que el método de elementos finitos fue introducido por Tuner, Clough, Martin y Topp, quienes en 1956 presentaron un trabajo en el cual se ocupaban de la solución aproximada de problemas de estado plano de tensiones, relacionado al análisis estructural en la industria aeronáutica.

Ellos se plantaron para entonces extrapolar el método matricial de análisis de barras a problemas de medios continuos, siendo el objetivo el cálculo en forma aproximada de la matriz de rigidez de elementos bidimensionales. La aproximación consistió en discretizar el continuo que tiene infinitos grados de libertad en una malla de finitos grados de libertad, donde se interpolaban las variables fundamentales de su valor en los nodos.

Dentro de la mecánica del sólido se identifican muchas formulaciones o modelos, siendo el más utilizado el denominado modelo compatible, también conocido como método de los desplazamientos, en el que las variables fundamentales son los desplazamientos.

La correspondencia entre los resultados del problema a través del MEF con los de la solución exacta dependerá del modelo matemático; de la forma y cantidad de elementos utilizados en la discretización y de las funciones de interpolación o funciones de forma que utilicen los elementos usados para el modelo. Parte de la solución consiste en integrar la expresión matricial derivada de la formulación, que se corresponde con la matriz de rigidez de los elementos. En la actualidad los programas desarrollados para el análisis de estructuras por el MEF utilizan métodos numéricos de integración, y se ha encontrado en trabajos anteriores, Kikuchi (1989) y Videla et al (1996), que éstos pueden generar errores en elementos de geometría distorsionada.

La integración analítica de la matriz de rigidez presenta ventaja ante los problemas de precisión de la integración numérica de elementos de geometrías distorsionadas, esto junto al avance de los sistemas de álgebra computacional, hacen que las técnicas de integración analítica sean aplicadas y optimizadas cada día más.

En este trabajo se plantea determinar las expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos por integración analítica. Luego generar, con estas expresiones, una subrutina que sea capaz de calcular la matriz de rigidez con el fin de optimizar el cálculo y así lograr disminuir el tiempo de ejecución computacional con respecto a las rutinas de integración numérica y semi-analítica.

## 1.2. Antecedentes

Los SAC han sido de gran relevancia para el avance de investigaciones orientadas en obtener expresiones semi-analítica y analíticas de la matriz de rigidez de elementos finitos más comunes.

La utilización de integración analítica o semi-analítica nos lleva a los trabajos de destacados investigadores en este campo, entre ellos, Zienkiewicz et al (1971), quien presentó una integración semi-analítica para placas y conchas, reportando una disminución de 50% de tiempo computacional frente a la integración numérica.

En los trabajos referentes al elemento cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, encontramos que, Babu y Pinder (1984), presentan expresiones exactas y aproximadas para las integrales que surgen en estos elementos. No presentan relación de tiempo, pero indican una disminución de la cantidad de operaciones.

Mizukami (1986), muestra algunas fórmulas de integración analítica para elementos finitos rectangulares planos de lados rectos, el mismo no muestra comparaciones de tiempo entre la integración numérica y la analítica.

Rathod (1988), presenta fórmulas de integración analítica para elementos finitos de cuatro nodos isoparamétricos. Las mismas fueron obtenidas por métodos de integración básicos (integración por partes).

Kikuchi (1989), utiliza el programa *Reduce* para obtener expresiones analíticas de elementos finitos isoparamétricos de cuatro nodos. Con esto obtuvo precisión para elementos distorsionados pero no mostró mejoras en los tiempos de cálculo entre integración numérica e integración analítica.

En la investigación de Griffiths (1994), se presentó una técnica general con la cual se obtuvo expresiones semi-analíticas para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito plano de cuatro nodos isoparamétrico, utilizando integración numérica (cuadratura de Gauss). Esto se realizó con la ayuda de un SAC con el cual se simplificaron, factorizaron y agruparon las expresiones. Reportó mejoras en los tiempos de ejecución computacional (el tiempo de la rutina numérica resultó ser cuatro veces mayor al tiempo de la rutina semi-analítica, en procesadores escalares).

Videla et al (1996), utilizó el programa *Derive-89* para obtener fórmulas analíticas de integración para los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito plano de cuatro nodos isoparamétrico, reportando mejoras de un cincuenta por ciento (50%) en los tiempos de cálculo al compararla con integración numérica, además de mejorar la precisión en el cálculo de elementos distorsionados.

En Videla et al (2005), se presenta una novedosa técnica completamente analítica, con la cual se obtuvieron expresiones para los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos, obteniendo mejoras de cincuenta por ciento (50%) al comparar con la integración numérica.

Finalmente, en este trabajo se presenta el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos en elasticidad plana por integración analítica, siguiendo la técnica desarrollada en el trabajo de Videla et al (2005), y con la utilización de un SAC, permitiendo optimizar el cálculo y disminuir el tiempo de ejecución computacional con respecto a rutinas por integración numérica y semi-analítica.

### 1.3. Objetivos de la investigación

#### 1.3.1. *Objetivo general*

Obtener la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos por integración analítica, utilizando un sistema de álgebra computacional.

#### 1.3.2. *Objetivos específicos*

**1.3.2.1.** Obtener y optimizar las expresiones analíticas de los términos de la matriz de rigidez del elemento descrito, mediante la aplicación de un sistema de álgebra computacional.

**1.3.2.2.** Crear una subrutina para el cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica del elemento descrito en un lenguaje de programación de alto nivel.

**1.3.2.3.** Disminuir los tiempos de ejecución computacional para el cálculo de la matriz de rigidez de la subrutina por integración analítica con respecto a los de la subrutina optimizada por integración semi-analítica.

## **1.4. Aportes**

- 1.4.1.* Expresiones optimizadas para el cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos.
- 1.4.2.* Subrutina optimizada por integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito estudiado.
- 1.4.3.* Reducción de tiempo de ejecución computacional del cálculo la matriz de rigidez.
- 1.4.4.* Precisión al utilizar elementos de geometría distorsionada.
- 1.4.5.* Criterios para optimizar constantes y expresiones para el cálculo de matrices de rigidez a través de la técnica de integración analítica.
- 1.4.6.* Criterios para detectar los valores mínimos tolerables para las constantes del jacobiano.



## 1.5. Método

El método seguido para la realización del trabajo está separado por etapas, en las cuales se desarrollaron los distintos aspectos que permitieron la culminación de la investigación.

### 1.5.1. Etapa I: Recopilación de información

Para iniciar la investigación se requirió conocer los fundamentos básicos de la teoría de elasticidad y del método de los elementos finitos. Esto hizo necesario la recopilación de información y búsqueda de referencias pertinentes. Con lo cual se logró un soporte teórico con los fundamentos y conceptos necesarios recopilados de monografías, trabajos especiales de grado y publicaciones en revistas nacionales e internacionales; esto se presenta en los capítulos II y III de este trabajo.

### 1.5.2. Etapa II: Obtención y optimización de las expresiones analíticas

Para implementar la técnica de integración analítica de matrices de rigidez de elementos finitos, particularizarla al elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos y lograr operar, manipular, integrar, y simplificar las expresiones de forma simbólica, se utilizó un SAC de nombre comercial *Maple*.

Se planteo la formulación del MEF para el elemento cuadrilátero de cuatro nodos isoparamétrico, es decir, se establecieron las funciones de forma que dependen de las coordenadas naturales, obteniendo de las mismas las derivadas y el jacobiano de la transformación. Por otra parte se estableció la matriz de deformación-desplazamiento  $\underline{B}$  y la matriz constitutiva  $\underline{D}$  que contiene los parámetros elásticos, necesarias para encontrar las expresiones simbólicas de los términos de la matriz de rigidez  $\underline{K}^{(e)}$ . Luego se precedió a

sustituir los valores simbólicos de las derivadas y desarrollar las expresiones polinómicas de cada término, éstas se englobaron dentro de una expresión general, la cual se integró para cuatro casos del jacobiano. Todas estas operaciones y expresiones se explican con detalle en el capítulo III.

**1.5.3. Etapa III: Programación de una subrutina de cálculo de la matriz de rigidez a través de las expresiones analíticas**

En esta etapa se programó en un lenguaje de alto nivel (*Fortran 95*), con el objeto de obtener una subrutina para cálculo la matriz de rigidez del elemento, para todos los casos. Con las expresiones encontradas se realizaron y analizaron distintos algoritmos para lograr obtener el más óptimo. Esto se incluye dentro del capítulo III.

**1.5.4. Etapa IV: Validación y comparación de los resultados**

Se realizó un programa con la subrutina analítica desarrollada en este trabajo y la subrutina semi-analítica desarrollada por Griffiths (1994), la cual se puede encontrar en la referencia ([www.mines.edu/vgriffiths/main.html](http://www.mines.edu/vgriffiths/main.html)). Con este programa se comparó la precisión del cálculo de la matriz de rigidez y los tiempos de ejecución computacional de cada rutina. A demás se realizaron los ejemplos que permitieron llegar a la solución de la tolerancia para las constantes del jacobiano. Estos resultados son presentados con detalle en el capítulo IV.

Finalmente se realizaron cinco ejemplos comparativos de elasticidad plana, para lo cual se utilizó el programa *P52*, el cual se obtuvo a través de esta página Web ([www.mines.edu/vgriffiths/main.html](http://www.mines.edu/vgriffiths/main.html)). A este programa se le realizaron algunas modificaciones para adaptar las subrutinas analítica y semi-analítica y así comparar los resultados de desplazamiento y tensiones. Esto se presenta en el capítulo V de este trabajo.

## CAPÍTULO II

# Marco teórico

### 2.3. Teoría de la elasticidad

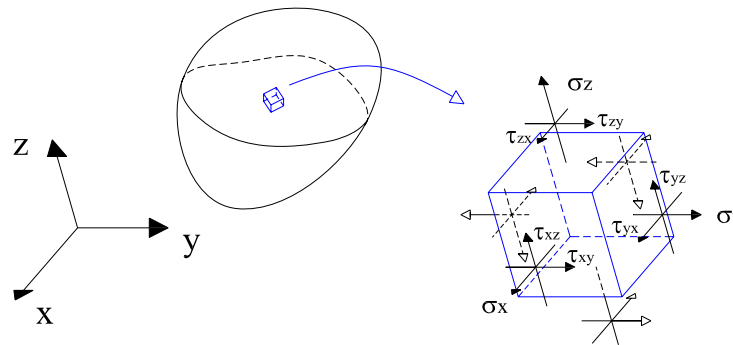
#### 2.3.1. Elasticidad

La elasticidad es una propiedad característica de todos los materiales estructurales, algunos la poseen en mayor grado que otros. Timoshenko (1975) explica que esta propiedad establece que “si las fuerzas exteriores que deforman la estructura no rebasan un cierto límite, la deformación desaparecen cuando se suprimen tales fuerzas.”

Para simplificar un poco, la teoría supone que la materia del cuerpo elástico es homogénea distribuyéndose con continuidad en su volumen, es decir, que cada punto de un mismo material posee las mismas propiedades físicas.

#### 2.3.2. Tensiones y deformaciones

Si suponemos un cuerpo en equilibrio al cual se le secciona con un plano  $\pi$ , evidenciando las fuerzas internas, y a una de las partes se le extrae un cubo diferencial donde se evidencian las tensiones normales  $\sigma$  así como las tensiones cortantes  $\tau$ , como se indica en la Figura (2.1); se requiere entonces de tres tensiones normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , y seis tensiones cortantes  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{zy}$  para definir el estado de tensiones sobre el cubo diferencial. De considerar el equilibrio se deduce que sólo se necesitan tres tensiones tangenciales.



**Figura 2. 1** Estado de tensiones en un elemento diferencial de un cuerpo.

Si suponemos que el cuerpo tiene vínculos suficientes que impiden su movimiento como cuerpo rígido, de forma que al aplicar fuerzas externas se produzcan desplazamientos que impliquen deformación del cuerpo, se puede expresar el estado de deformación del cubo diferencial por tres deformaciones normales  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  y  $\epsilon_z$ , y tres tangenciales  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ .

### 2.3.3. Ecuaciones de la teoría de elasticidad

Se requiere de tres conjuntos de ecuaciones para la adecuada formulación la teoría de elasticidad, los cuales son enunciados a continuación:

- a) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las tensiones internas con las fuerzas externas aplicadas, de manera de garantizar el equilibrio de fuerzas en el cuerpo a nivel global.
- b) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las tensiones con las deformaciones, considerando que el material se comporta de forma elástica, es decir, las tensiones son proporcionales en todo momento a las deformaciones.
- c) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las deformaciones con los desplazamientos, considerando que los desplazamientos que experimenta la estructura son pequeños en relación a la geometría del mismo, por lo que ésta no se ve alterada cuando el cuerpo

se deforma. Agregando que, se deben satisfacer ciertos requerimientos de compatibilidad entre las componentes de las deformaciones, mediante las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones.

### 2.3.4. Elasticidad plana

En el estado bidimensional, deben satisfacerse ocho ecuaciones: tres ecuaciones deformación-desplazamiento, tres ecuaciones tensión-deformación y dos ecuaciones de equilibrio, por lo que se deben calcular ocho incógnitas: tres componentes de deformación, tres componentes de esfuerzos y dos de desplazamientos.

#### 2.3.4.1. Tensión plana

Si una placa delgada es cargada mediante fuerzas aplicadas en su contorno, paralelas al plano de la placa y distribuidas uniformemente en su espesor, siendo éste muy pequeño en comparación con las dos dimensiones restantes como se muestra en la Figura (2.2), las componentes de la tensión ( $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ) son nulas sobre ambas caras de la placa. El estado tensional queda entonces especificado por ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) y es denominado estado de tensión plana. Timoshenko (1975)

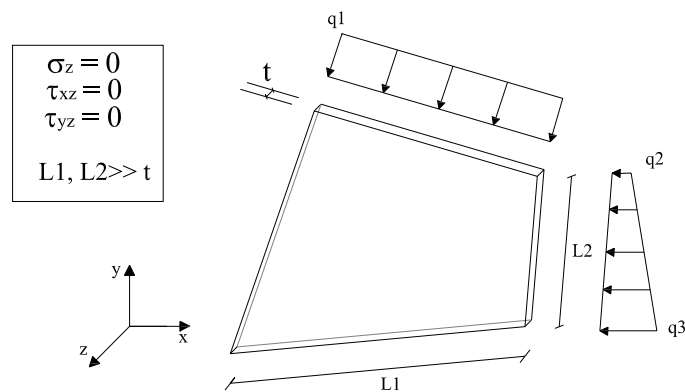


Figura 2. 2 Hipótesis de tensión plana.

### 2.3.4.2. Deformación plana

Una simplificación semejante se da en el caso en el que la dimensión del cuerpo en la dirección del eje  $z$  es muy grande. Si un cuerpo largo cilíndrico o prismático es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal que no varían en esa dirección, puede suponerse que todas las secciones rectas están en iguales condiciones. Entonces se considera el estudio de una rebanada unitaria, esto es un modelo de deformación plana que considera las deformaciones ( $\epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{yz}$ ) nulas. Timoshenko (1975)

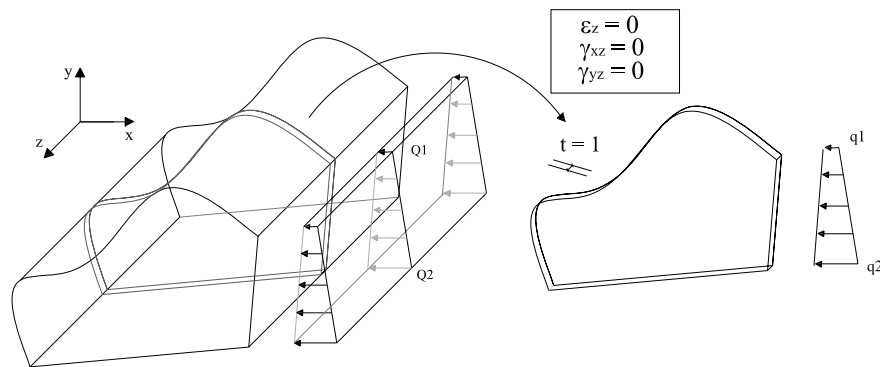


Figura 2.3 Hipótesis de deformación plana.

### 2.3.4.3. Campo de desplazamientos

Las características geométricas y de cargas, en los estados de tensión o deformación plana, permite establecer la hipótesis de que todas las secciones perpendiculares al eje prismático  $z$  se deforman en su plano y de manera idéntica.

El campo de desplazamientos de una sección plana, estará perfectamente definido si se conocen los desplazamientos  $x$  e  $y$  de todos sus puntos. El vector de desplazamientos de un punto se define:

$$U(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

donde  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son los desplazamientos del punto en direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

#### 2.3.4.4. Campo de deformaciones

Del campo de desplazamientos anterior, se deducen las deformaciones, haciendo uso de la teoría general de la elasticidad.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2.2)$$

La deformación longitudinal  $\varepsilon_z$ , en el caso de la deformación plana, se supone que es nula, pero en el caso de un estado de tensión plana no lo es; pero se asume que la tensión es nula ( $\sigma_z=0$ ). Por consiguiente, en ambos casos, no se considera la deformación  $\varepsilon_z$  dado que el producto escalar es nulo ( $\sigma_z \cdot \varepsilon_z = 0$ ). En consecuencia, el vector de deformaciones significativas de un punto se define para tensión y deformación plana como:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (2.3)$$

#### 2.3.4.5. Campo de tensiones

En elasticidad plana el campo de tensiones viene definido por el vector de tensiones siguientes:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (2.4)$$

formado por las tensiones normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y la tensión cortante  $\tau_{xy}$ . Se considera que la tensión normal  $\sigma_z$  y tensiones cortantes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son nulas.

#### 2.3.4.6. Relación tensión-deformación

La relación tensión-deformación de los materiales elásticos se estableció experimentalmente y es denominada Ley de Hooke generalizada, que determina las componentes del estado de deformaciones en función de las componentes del estado de tensiones.

Considerando el material isótropo, lo que quiere decir que las propiedades mecánicas son las mismas en todas las direcciones, se estableció a través de la experiencia que las tensiones normales no producen distorsión angular del elemento, pero si se produce dilatación en la dirección donde se produce la tensión normal, por ejemplo, si se aplica la tensión normal en la dirección  $x$  se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5)$$

Donde  $E$  es el modulo de elasticidad longitudinal de cada material. Esta dilatación viene acompañada de contracción lateral:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.6)$$

Donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson, y relaciona las deformaciones transversales producto de las deformaciones longitudinales.

Estas mismas constantes pueden ser usadas para definir en forma general la relación entre deformaciones y tensiones.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.7)$$

Finalmente se puede definir la relación tensión-deformación en forma matricial:



$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (2.8)$$

donde  $\underline{D}$  es la matriz de parámetros elásticos o matriz constitutiva y se representa de la siguiente manera:

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Se tiene que para elasticidad isótropa los términos de la matriz  $\underline{D}$  son los siguientes:

**Tensión plana**

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1}{(1-\nu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

(2.10a)

**Deformación plana**

$$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1+\nu)} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{11} \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

(2.10b)

Donde el término  $d_{33}$  es el módulo de corte  $G$ , representado como.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.11)$$

**2.3.4.7. Ecuaciones diferenciales de equilibrio**

Sea un cuerpo plano sometido a un sistema cualesquiera de fuerzas aplicadas, siendo  $O$  el punto de origen del sistema de coordenadas  $(x,y)$  donde se consideran los estados de deformación y tensión, como se muestra en la Figura (2.4)

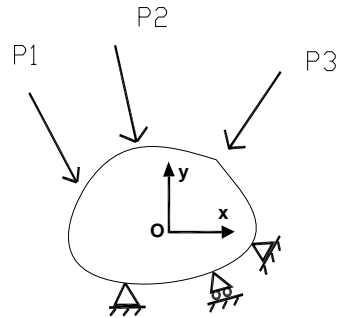


Figura 2. 4 Cuerpo sometido a un sistema de fuerzas.

Donde el estado plano de tensiones queda definido por el vector de tensiones  $\underline{\sigma}$ , de la ecuación (2.4).

Si se aísla del cuerpo un elemento cuadrado de área diferencial, se tiene:

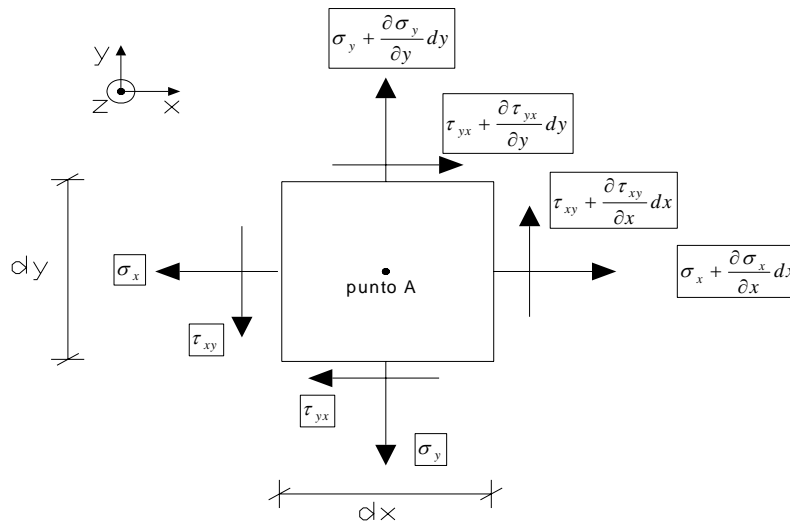


Figura 2. 5 Tensiones actuantes en elemento diferencial.

El cuadrado elemental estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan en cada cara.

Estableciendo las ecuaciones de la estática  $\sum F_x = 0$  ,  $\sum F_y = 0$  se obtienen las ecuaciones de equilibrio del cuadrado elemental.

Resolviendo, la suma de fuerzas respecto al eje  $x$ , se tiene:

$$(-\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx)dydz + (-\tau_{xy} + \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy)dxdz + F_x dxdydz = 0 \quad (2.12)$$

Donde al operar la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (2.13)$$

Si se realiza la misma operación en el eje  $y$ , se obtienen que las ecuaciones de equilibrio para el caso bidimensional son (2.13) y (2.14).

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0 \quad (2.14)$$

donde los términos ( $F_x$  y  $F_y$ ) representan las fuerzas en la dirección de los dos ejes cartesianos.

La ecuación estática  $\sum M_A = 0$ , en el punto  $A$  de la figura (2.5), permite determinar la relación:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.15)$$

que es la expresión analítica de Cauchy. Este teorema simplifica el análisis del problema en dos direcciones reduciendo a tres las componentes independientes de tensiones, siendo estas las componentes que intervienen en el vector de tensiones.

Para demostrar la expresión (2.15), se resuelve la suma de momentos respecto al punto  $A$ , y se tiene:

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx)dydz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy)dxdz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dxdz \frac{dy}{2} = 0 \quad (2.16)$$

Donde al operar la expresión anterior se tiene

$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.17)$$

### 2.3.4.8. Principio de los trabajos virtuales (PTV)

Este principio se emplea para la solución de diversos problemas de elasticidad, Timoshenko (1975), establece para el caso de una partícula que “si un punto material, sometido a un conjunto de fuerzas, se encuentra en equilibrio, el trabajo total de esas fuerzas es nulo en toda traslación virtual.”

Considerando como traslación virtual todo desplazamiento infinitesimal de una partícula que puede moverse libremente. Otras idas de Chandrupatla-Belegundu (1999), sobre este principio expresan que “Un cuerpo está en equilibrio si el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo para todo campo de desplazamiento cinemáticamente admisible.”

$$W_i = W_e \quad (2.18)$$

Donde  $W_i$  indica el trabajo interno y  $W_e$  el externo.

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse haciendo uso del Teorema de los Trabajos Virtuales, teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura. Oñate (1992)

$$\iint_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) t \, dA = \iint_A (\delta u b_x + \delta v b_y) t \, dA + \oint_l (\delta u t_x + \delta v t_y) t \, ds + \sum_i (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i) \quad (2.19)$$

En esta expresión el miembro a la izquierda de la igualdad representa el trabajo interno que las tensiones  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  realizan sobre las deformaciones virtuales  $(\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy})$ . El miembro de la derecha, representa el trabajo externo de las fuerzas repartidas por unidad de volumen  $(b_x, b_y)$  de las fuerzas repartidas sobre el contorno  $(t_x, t_y)$  y de las fuerzas puntuales  $(U_i, V_i)$  sobre los desplazamientos virtuales  $(\delta u_i, \delta v_i)$ .  $A$  y  $l$  indican el área y el

contorno de la sección transversal del sólido y  $t$  el espesor. Para tensión plana el espesor  $t$  coincide con el del sólido, mientras que para deformación plana el  $t$  es unitario. La ecuación (2.19), se escribe en forma matricial como:

$$\iint_A \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} t dA = \iint_A \delta \underline{u}^T \underline{b} t dA + \oint_l \delta \underline{u}^T \underline{t} t ds + \sum_i \delta \underline{u}_i^T \underline{q}_i \quad (2.20)$$

Donde los vectores de la ecuación tienen la forma:

$$\begin{aligned} \delta \underline{\varepsilon} &= [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \tau_{xy}]^T & ; & \quad \delta \underline{u} = [\delta u, \delta v]^T & ; & \quad \underline{b} = [b_x, b_y]^T \\ \underline{t} &= [t_x, t_y]^T & ; & \quad \delta \underline{u}_i = [\delta u_i, \delta v_i]^T & ; & \quad \underline{q}_i = [U_i, V_i]^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

#### 2.3.4.9. Principio de energía potencial total

La suma de la energía potencial  $V$ , de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura y de su energía de deformación  $U$ , se denomina la energía potencial total ( $\Phi$ ):

$$\Phi = V + U \quad (2.22)$$

Este principio permite conocer los desplazamientos de una estructura en equilibrio. Por tanto, el arreglo de la estructura deformada depende únicamente de los desplazamientos  $\delta$  de  $n$  puntos determinados de la estructura. Para que se cumpla lo antes expuesto, se le da a uno de esos puntos un desplazamiento diferencial virtual  $\delta_i$  sin alterarse los  $(n-1)$  desplazamientos restantes. Es sabido que, la variación de la energía potencial ha de ser nula cuando se somete una estructura a unos desplazamientos y deformaciones virtuales compatibles con las vinculaciones.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta_i} = 0 \quad (2.23)$$

En (2.23), se varía ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) y se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones que permiten calcular los  $n$  desplazamientos  $\delta$  y con ello la configuración de la estructura deformada.

## 2.4. Método de los elementos finitos (MEF)

### 2.4.1. Desarrollo y definición

A principios de los años cuarenta debido a la necesidad de resolver problemas de elasticidad de medios continuos y por la complejidad de obtener soluciones analíticas o teóricas que se ajustaran a todos los puntos del continuo, surgen múltiples investigaciones.

Oñate (1992) establece que

En 1943 Courant introdujo por primera vez el concepto de “elemento continuo” al resolver problemas de elasticidad plana mediante la división del dominio de análisis en “elementos” triangulares sobre los que suponía una variación polinómica de la solución.

Tras la incursión de los ordenadores digitales se propició el desarrollo de los métodos basados en técnicas matriciales. Algunos autores reconocen que el desarrollo del MEF comenzó en 1956 cuando Tuner, Clough, Martin y Topp presentaron un trabajo en el cual se ocupaban de la solución aproximada de problemas de estado plano de tensiones de la industria aeronáutica. Donde se planteó entonces extrapolar el método matricial de análisis de barras a problemas de medios continuos, siendo el objetivo el cálculo en forma aproximada de la matriz de rigidez de elementos bidimensionales, utilizando para ello el principio de los desplazamientos virtuales y funciones con parámetros ajustables típico de los métodos de Rayleigh-Ritz y Galerkin.

La aproximación consistió en discretizar el continuo de infinitos grados de libertad en una malla con finitos de grados de libertad, donde se interpolaban las variables fundamentales de su valor en los puntos discretos llamados nodos en los cuales se concentró la masa del continuo.

En los años siguientes, se extendió el MEF, a otros problemas. Logrando resolver problemas de redes hidráulicas y eléctricas, mecánica de suelos, transferencia de calor y otras áreas.

Finalmente se puede decir que el método de los elementos finitos es una técnica que permite resolver problemas de medios continuos con soluciones aproximadas de forma rápida y eficiente.

#### ***2.4.2. Métodos basados en los residuos ponderado (Galerkin)***

En las estructuras donde se conozcan las ecuaciones diferenciales que rigen la solución y ésta sea muy laboriosa, se utilizan los métodos de residuos ponderados. Uno de los métodos de residuos ponderados de mayor uso en problemas estructurales, es el método de Galerkin.

Este método, utiliza las mismas funciones de interpolación para aproximarse al medio continuo que para definir las soluciones aproximadas de los desplazamientos. El método aproxima la solución de un grupo de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde establecidas que son sustituidas por un grupo de funciones que las satisfacen, produciendo así una matriz simétrica y bandeda.

#### ***2.4.3. El MEF en la mecánica de sólidos***

En la mecánica del sólido se identifican varias formulaciones o modelos, siempre basados en principios energéticos, a partir de los cuales se define un funcional cuyo punto estacionario identifica solución del problema.

El método consiste en discretizar el dominio de integración en un número finito de elementos, interconectados por los nodos en los cuales se concentra la masa. Para cada

elemento se establece un comportamiento local aproximado, de forma que las incógnitas en cualquier punto del elemento quedan definidas por su valor en los nodos, esto permite calcular la ecuación matricial característica del problema. Se evalúa el funcional del problema y sumando las contribuciones de cada elemento se llega a un sistema total de ecuaciones cuya solución son los valores de las variables fundamentales en los nodos, y con estos se calculan las incógnitas secundarias. Ferrante (1979)

#### **2.4.3.1. Modelos en la mecánica de sólido**

Se reconocen cuatro formulaciones o modelos dentro de la mecánica de sólido, cada uno se caracteriza por:

##### **a) Modelo Compatible**

Se utiliza como base el principio de energía potencial mínima. Sobre los elementos se adopta un campo aproximado de desplazamientos, de forma que las incógnitas nodales son los desplazamientos. Este modelo se le conoce como método de los desplazamientos y es el más utilizado dentro de la mecánica de sólido.

##### **b) Modelo de Equilibrio**

Sobre cada elemento se adopta un campo de tensiones en equilibrio, de modo que la variable fundamental son las tensiones en los nodos.

##### **c) Modelo Híbrido**

**Tipo I:** en el interior de los elementos se adopta un campo de tensiones en equilibrio, pero en el borde de cada elemento se asume un campo de desplazamientos. Se impone compatibilidad de desplazamiento entre los elementos, las incógnitas básicas son los desplazamientos.



**Tipo II:** En el interior de cada elemento se adoptan campos de desplazamientos aproximados, mientras que en los bordes de los elementos se escoge un campo de tensiones. Se impone equilibrio de tensiones, las incógnita básicas son las tensiones.

**d) Modelo mixtos**

Sobre cada elemento se adopta, simultánea e independientemente, campos aproximados de desplazamientos y tensiones, por lo que las incógnitas básicas son tanto los desplazamientos como las tensiones.

**2.4.3.2. Formulación del modelo compatible o método de los desplazamientos**

Se debe recalcar que el MEF consiste en discretizar el continuo en una malla de elementos finitos que representa una idealización de la geometría real. Por lo tanto el análisis por elementos finitos reproduce el comportamiento de la malla escogida y no de la estructura real.

**2.4.3.2.1. Discretización del campo de desplazamientos**

El campo de desplazamientos establecido se puede discretizar de la siguiente manera:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i \cdot u_i \quad ; \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i \cdot v_i \quad (2.24)$$

Donde  $(u, v)$  representan los desplazamientos horizontales y verticales, respectivamente, y  $N_i$  representan las funciones de forma o de interpolación de los desplazamientos del nodo  $i$  del elemento y  $n$  representa el número de nodos de los elementos. Las funciones de forma suelen ser las mismas para los desplazamientos horizontales y los verticales.

De forma que se puede establecer matricialmente que:

$$U(x, y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

$$U = \underline{N} \cdot \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.26)$$

Donde  $\underline{N}$  se denomina matriz de funciones de forma y  $\mathbf{a}^{(e)}$  es el vector de desplazamiento en los nodos.

#### 2.4.3.2.2. Discretización del campo de deformaciones

Del campo de deformaciones se obtiene que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Lo que matricialmente se representa como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.29)$$

Donde  $\underline{B}$  se denomina matriz de deformación-desplazamiento del elemento.

### 2.4.3.2.3. Discretización del campo de tensiones

La expresión discretizada del vector de tensiones se obtiene de la relación tensión deformación:

$$\sigma = \underline{D} \cdot \varepsilon = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot a^{(e)} \quad (2.30)$$

Si se consideran tensiones y deformaciones iniciales, entonces tenemos:

$$\sigma = \underline{D} \cdot (\varepsilon + \varepsilon^0) + \sigma^0 = \underline{D} \underline{B} a^{(e)} - \underline{D} \cdot \varepsilon^0 + \sigma^0 \quad (2.31)$$

### 2.4.3.2.4. Ecuación de equilibrio de la discretización

Para obtener la ecuación de equilibrio de la discretización se parte de la expresión (2.18) del PTV. Suponiendo que el equilibrio se establece únicamente en los nodos, se definen unas fuerzas nodales que equilibran las fuerzas debido a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas actuantes. Para calcular las fuerzas nodales de equilibrio se aplica el PTV al elemento. Oñate (1992)

$$\iint_{A^{(e)}} (\delta \varepsilon^T \sigma)_t dA = \iint_{A^{(e)}} (\delta U^T b)_t d\mathbf{A} + \oint_{\Gamma_0} (\delta U^T \mathbf{t})_t ds + \sum_{i=1}^n (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i) \quad (2.32)$$

El trabajo virtual de las fuerzas nodales de equilibrio  $U_i$  y  $V_i$ , puede despejarse así:

$$\iint_{A^{(e)}} (\delta \varepsilon^T \sigma)_t dA - \iint_{A^{(e)}} (\delta U^T b)_t d\mathbf{A} - \oint_{\Gamma_0} (\delta U^T \mathbf{t})_t ds = |\delta a^{(e)}|^T q^{(e)} \quad (2.33)$$

De (2.26) y (2.29) se puede escribir:

$$\delta U^T = |\delta a^{(e)}|^T \underline{N}^T \quad \delta \varepsilon^T = |\delta a^{(e)}|^T \underline{B}^T \quad (2.34)$$

Sustituyendo (2.34) en (2.33), se obtiene (2.35) y simplificando (2.36).

$$|\delta a^{(e)}|^T \left[ \iint_{A^{(e)}} (\underline{B}^T \sigma)_t dA - \iint_{A^{(e)}} (\underline{N}^T b)_t d\mathbf{A} - \oint_{\Gamma_0} (\underline{N}^T \mathbf{t})_t ds \right] = |\delta a^{(e)}|^T q^{(e)} \quad (2.35)$$

$$\iint_{A^{(e)}} (\underline{B}^T \sigma)_t dA - \iint_{A^{(e)}} (\underline{N}^T b)_t d\mathbf{A} - \oint_{\Gamma_0} (\underline{N}^T \mathbf{t})_t ds = q^{(e)} \quad (2.36)$$

Sustituyendo el vector de tensiones (2.31) por su valor en función de los desplazamientos, se obtiene (2.37).

$$\iint_{A^{(e)}} B^T (D B a^{(e)} - D \varepsilon^0 + \sigma^0) t dA - \iint_{A^{(e)}} (N^T b) t dA - \oint_{\Gamma^{(e)}} (N^T \mathbf{t}) t ds = q^{(e)} \quad (2.37)$$

Finalmente operando se tiene:

$$\left[ \iint_{A^{(e)}} B^T D B t dA \right] a^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 t dA + \iint_{A^{(e)}} B^T \sigma^0 t dA - \iint_{A^{(e)}} (N^T b) t dA - \oint_{\Gamma^{(e)}} (N^T \mathbf{t}) t ds = q^{(e)} \quad (2.38)$$

#### 2.4.3.2.5. Matriz de rigidez y Vector de cargas nodales equivalentes

La expresión (2.38) se puede expresar de la siguiente manera:

$$K^{(e)} a^{(e)} - f^{(e)} = q^{(e)} \quad (2.39)$$

donde:

$$K^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B^T D B t dA \quad (2.40)$$

es la matriz de rigidez del elemento finito, y

$$f^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B^T D \varepsilon^0 t dA + \iint_{A^{(e)}} B^T \sigma^0 t dA - \iint_{A^{(e)}} (N^T b) t dA - \oint_{\Gamma^{(e)}} (N^T \mathbf{t}) t ds \quad (2.41)$$

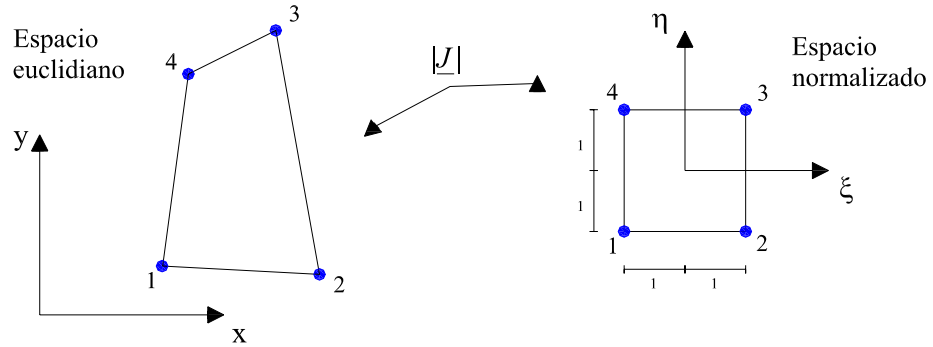
es el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento debido a deformaciones iniciales, tensiones iniciales, fuerzas repartidas por unidad de área y fuerzas repartidas en el contorno.

#### 2.4.3.3. Obtención de las funciones de forma

##### 2.4.3.3.1. Elementos finitos rectangulares (coordenadas naturales)

Para facilitar la obtención de las funciones de forma de varios elementos es necesario adoptar un sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  para definir la geometría del elemento. Estas

coordenadas naturales, están normalizadas de manera que los elementos tienen los lados en  $(\xi = \pm 1)$  y  $(\eta = \pm 1)$ . Como se muestra en la Figura (2.6).



**Figura 2. 6** Transformación de coordenadas.

Para la transformación indicada se define la matriz de rigidez del elemento de la siguiente manera:

$$\underline{K}^{(e)} = \iint_{A^e} \underline{B}_i^T(x,y) \underline{D} \underline{B}_j(x,y) t \, dx dy \longrightarrow \underline{K}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}_i^T(\xi,\eta) \underline{D} \underline{B}_j(\xi,\eta) t |J| \, d\xi d\eta \quad (2.42)$$

Las funciones de forma en coordenadas naturales deben satisfacer los mismos requisitos que en coordenadas cartesianas.

**a) Condición de compatibilidad nodal**

Esto implica que se cumpla:

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases} \quad (2.43)$$

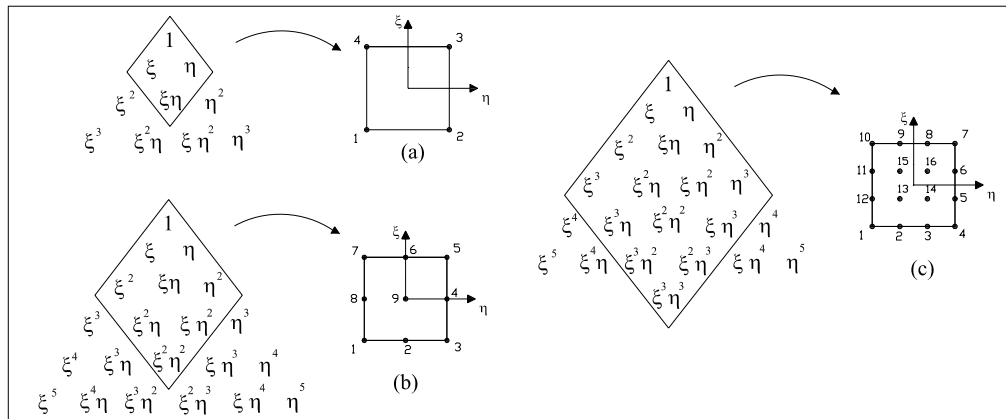
**b) Condición de sólido rígido**

Para un elemento aislado esta condición se satisface siempre y cuando la suma de las funciones de forma en cualquier punto del elemento sea igual a la unidad, esto es:

$$\sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) = 1 \quad (2.44)$$

**2.4.3.3.2. Elementos rectangulares Lagrangianos**

Los términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de un elemento Lagrangiano pueden obtenerse fácilmente del triángulo de pascal a partir del grado de los polinomios en cada dirección, como se indica en la Figura (2.7).



**Figura 2. 7** Términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de elementos rectangulares de la familia Lagrangiana.; a) 4 nodos, b) 9 nodos, c) 16 nodos.

Para el elemento de cuatro nodos las funciones de forma contiene cuatro términos polinómicos, éste elemento es el más sencillo de la familia.

Para los elementos de nueve y dieciséis nodos, es decir, elementos de segundo y tercer grado respectivamente, los términos polinómicos de las funciones de forma coinciden con el número de nodos que estos contienen.

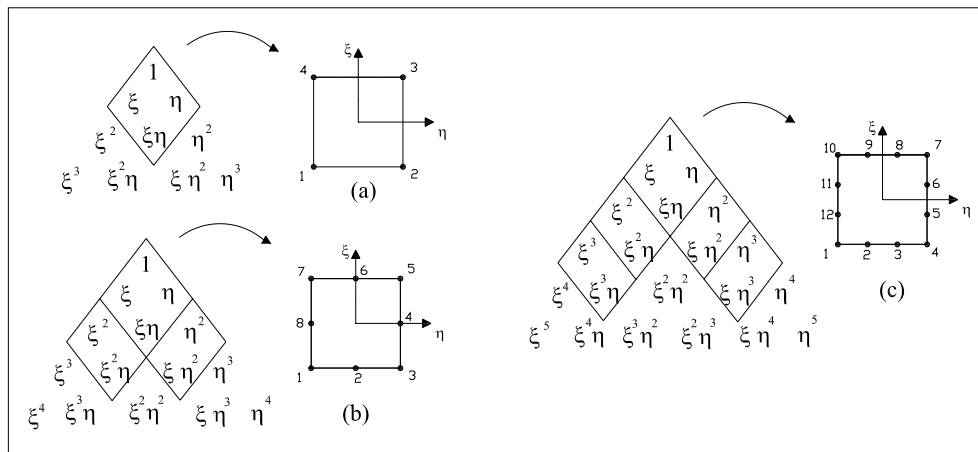
De ésta misma forma se obtienen los términos de los elementos de grados mayores.

**2.4.3.3.3. Elementos rectangulares Serendípitos**

Las funciones de forma de los elementos de esta familia no se pueden obtener de una forma tan sistemática como la anterior. Ésta familia se caracteriza por tener en los bordes del elemento los nodos necesarios para obtener la variación que se desea (lineal, cuadrática, cubica, etc.) y en el interior se escogen el mínimo número de nodos de manera que se

obtenga una variación polinómica de  $\xi$  y  $\eta$  completa y simétrica, del mismo grado que la variación sobre los lados. Oñate (1992)

Los términos de los elementos más populares de esta familia se pueden obtener de forma sencilla, como se aprecia en la Figura (2.8).



**Figura 2. 8** Términos polinómicos contenidos en las funciones de forma de elementos rectangulares de la familia Serendípita.; a) 4 nodos, b) 8 nodos, c) 12 nodos.

Se puede observar que el elemento Serendípito de cuatro nodos contiene los mismos cuatro términos que el elemento de cuatro nodos de la familia Lagrangiana, por consiguiente éste elemento pertenece a ambas familias.

Para un elemento de grado dos se omiten los términos del producto de ambas variables de segundo orden. Es importante resaltar que, para un elemento de tercer orden esta familia también deja de considerar el producto antes mencionado, sólo lo considera cuando el elemento es de cuarto orden.

#### 2.4.3.4. Formulación isoparamétrica

Para que el método de los elementos finitos se desarrollara hasta los niveles en los hoy se encuentra, fue de mucha importancia el concepto de formulación paramétrica.

Las formulaciones paramétricas se caracterizan por interpolar la geometría del elemento a partir de una serie de puntos conocidos. Esto es esencial para encontrar la relación entre las coordenadas naturales y las cartesianas.

#### 2.4.3.4.1. Interpolación paramétrica de la geometría

De la formulación del método, se tiene que para elementos de elasticidad plana el desplazamiento de un punto se expresa por:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot u_i \quad ; \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot v_i \quad (2.45)$$

Donde las  $N_i(\xi, \eta)$  representan las funciones de forma o de interpolación de los desplazamientos en coordenadas naturales y  $n$  es el numero de nodos del elemento. Oñate (1992)

Cuando se expresan las deformaciones, como por ejemplo  $\epsilon_x$ , se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \cdot u_i \quad (2.46)$$

Lo que amerita evaluar la derivada de  $N_i(\xi, \eta)$  con respecto a la variable cartesiana  $x$ . Debido a que las funciones de forma no están en función de las coordenadas cartesianas sino de las coordenadas naturales, se utiliza la regla de la derivación en cadena para representar:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$



La ecuación (2.48) requiere de evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

para lo cual hay que conocer una relación explícita entre las coordenadas naturales y las cartesianas, ésta se puede obtener mediante la interpolación paramétrica del elemento. Oñate (1992)

Si se conocen las coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$  de  $m$  puntos del elemento, se pueden calcular las coordenadas de cualquier punto del mismo interpolando los valores de las coordenadas conocidas.

Esto se escribe como:

$$x = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (2.49)$$

Oñate (1992) explica que “se deduce que  $\hat{N}_i$  son funciones de interpolación de la geometría que satisfacen los mismos requisitos de que las funciones de forma utilizadas para interpolar los desplazamientos.” Es decir deben tomar el valor de uno en punto  $i$  y cero en los demás  $(m-1)$  puntos. Con lo que  $\hat{N}_i(\xi, \eta)$ , se escogen en base al número de puntos  $m$  escogidos. La relación (2.49) puede interpretarse como la transformación de coordenadas  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$ , siendo fundamental que dicha transformación sea biunívoca.

Debido a que las relaciones (2.49) establecen a las variables cartesianas como función de las variables naturales, no se puede evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Pero se pueden evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

para esto se invierte la derivación en cadena:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.50)$$

Y en forma matricial se tiene

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{(e)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Donde  $\underline{J}^{(e)}$  representa la matriz de transformación de coordenadas o Jacobiano, y al multiplicar por la inversa  $(\underline{J}^{(e)})^{-1}$  a ambos lados se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = (\underline{J}^{(e)})^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\underline{J}^{(e)}|} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Donde  $|\underline{J}^{(e)}|$ , es el determinante del jacobiano, el cual permite expresar el diferencial de área en coordenadas naturales como:

$$dA = dx dy = |\underline{J}^{(e)}| d\xi d\eta \quad (2.53)$$

De (2.52) se extrae que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|\underline{J}^{(e)}|} \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|\underline{J}^{(e)}|} \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (2.54)$$

#### 2.4.3.4.2. Tipos de formulaciones

Según lo establecido por Oñate (1992),

hay que considerar dos clases de puntos. Los que se utilizan para interpolar el campo de desplazamiento (nodos), que definen las funciones de forma  $N_i$ , y los que se utilizan para interpolar la geometría del elemento, que definen las funciones de interpolación de la geometría  $\hat{N}_i$ .

Dichos puntos pueden coincidir o no y esto hace que la formulación reciba un determinado nombre:

##### a) *Formulación Superparamétrica*

Si el número de nodos  $n$  usados para la interpolación de los desplazamientos es menor al número de puntos  $m$  utilizados para interpolar la geometría, entonces las funciones de interpolación de los desplazamientos o funciones de forma  $N_i$  serán de menor grado que las funciones de interpolación de la geometría  $\hat{N}_i$  y la formulación se denomina superparamétrica. Esto es ( $n < m$ ). Oñate (1992)

##### b) *Formulación Isoparamétrica*

Si ( $n = m$ ), entonces las funciones de interpolación  $N_i = \hat{N}_i$ , y la formulación se llama isoparamétrica. Oñate (1992)

##### c) *Formulación Subparamétrica*

Si entonces ( $n > m$ ), implica que las funciones de forma  $N_i$  serán de mayor grado que las funciones de interpolación de la geometría  $\hat{N}_i$ . Oñate (1992)

#### **2.4.3.5. Requisitos para la convergencia**

El análisis de una estructura por el MEF es correcto si al aumentar el número de elementos, es decir, discretizar o refinar el medio continuo elástico, las respuestas de la estructura se aproximan cada vez más a la solución exacta de las ecuaciones de gobierno.

Cuando no se conocen las ecuaciones de gobierno y, por tanto, no se conoce la respuesta exacta de la estructura, la convergencia de las soluciones se constata por el hecho de que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio en cualquier punto de la estructura.

##### **2.4.3.5.1. Condición de continuidad**

El campo de desplazamientos debe ser continuo en el interior del elemento.

##### **2.4.3.5.2. Condición de derivabilidad**

La aproximación polinómica de las funciones de forma deben ser derivables al menos hasta el orden de las derivadas que aparecen en las integrales del problema.

##### **2.4.3.5.3. Condición de integrabilidad**

La derivada de orden  $n$  de una función es integrable si son continuas sus  $(n-1)$  primeras derivadas.

##### **2.4.3.5.4. Criterio de la parcela**

En un conjunto de elementos finitos, se considera la aplicación del criterio de la parcela cuando se aplican en los nodos del contorno, movimientos prescritos, correspondiente a un campo de desplazamientos prefijados y conocido en toda ella.

El elemento satisface el criterio de la parcela si la solución obtenida para los desplazamientos y deformaciones en el interior de la parcela coincide con la que se deduciría analíticamente del campo de desplazamientos conocido.

**a) Condición de deformación constante**

Para lograr un estado de deformación constante, es necesario refinar las condiciones de borde de los elementos.

**b) Condición de cuerpo rígido**

Al someter un conjunto de elementos a un campo de movimientos impuesto en su contorno como sólido rígido, debe obtenerse una deformación nula en su interior.

**2.4.3.5.5. Condición de compatibilidad**

Los desplazamientos deben ser continuos en los puntos o nodos situados dentro de los elementos y en sus bordes o contorno. Por tal razón, la compatibilidad dentro de los elementos está garantizada utilizando polinomios como funciones de desplazamientos.

## 2.5. Formulación para el elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

A continuación se presenta la formulación del método de los elementos finitos, para el elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos.

### 2.5.1. Discretización del campo de desplazamientos.

Se establece de la ecuación (2.24) que:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i \quad ; \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i \cdot v_i \quad (2.55)$$

Lo que matricialmente se expresa:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

$$U_{(2 \times 1)} = \underline{N}_{(2 \times 8)} \cdot a^{(e)}_{(8 \times 1)} \quad (2.57)$$

Donde las  $(N_i)$ , son las funciones de forma o de interpolación de los desplazamientos, correspondientes a el elementos de cuatro nodos. Estas son funciones bilineales como se puede apreciar:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.58)$$

### 2.5.2. Discretización del campo de deformaciones

De la ecuación (2.27) se deduce que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i \right]\end{aligned}\quad (2.59)$$

Lo que matricialmente representa:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{(3 \times 1)} = \underline{B}_{(3 \times 8)} \cdot a^{(e)}_{(8 \times 1)} \quad (2.61)$$

### 2.5.3. Discretización del campo de tensiones.

De lo planteado en (2.30) y (2.31) se tiene:

$$\sigma_{(3 \times 1)} = D_{(3 \times 3)} \cdot \varepsilon_{(3 \times 1)} = D_{(3 \times 3)} \cdot B_{(3 \times 8)} \cdot a^{(e)}_{(8 \times 1)} \quad (2.62)$$

$$\sigma_{(3 \times 1)} = D_{(3 \times 3)} \cdot (\varepsilon_{(3 \times 1)} + \varepsilon^0_{(3 \times 1)}) + \sigma^0_{(3 \times 1)} \quad (2.63)$$

Y expresando (2.63) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} \right) + \begin{Bmatrix} \sigma^0_x \\ \sigma^0_y \\ \tau^0_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

#### 2.5.4. Matriz de rigidez.

Siguiendo la formulación y de lo establecido en (2.40), se tiene que la matriz rigidez del elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos viene dada por:

$$K^{(e)}_{(8 \times 8)} = \iint_{A^{(e)}} B^T_{(8 \times 3)} D_{(3 \times 3)} B_{(3 \times 8)} t \, dx dy \quad (2.65)$$

Si se define una submatriz de rigidez ( $k_{ij}$ ) para cada variación entre los nodos del elemento, se tiene que:

$$k_{ij(2 \times 2)} = \iint_{A^e} B_i^T_{(2 \times 3)} D_{(3 \times 3)} B_{j(3 \times 2)} t \, dx dy \quad (2.66)$$

Don de ( $B_i$ ) es una submatriz de deformación desplazamiento asociadas al nodo  $i$ , tal que:

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

#### 2.5.5. Formulación isoparamétrica

Haciendo uso de la formulación isoparamétrica expuesta anteriormente, la cual establece que las mismas funciones de interpolación de los desplazamientos son utilizadas para interpolar la geometría, se define la geometría del de elemento a partir de las coordenadas de sus cuatro nodos.

##### 2.5.5.1. Relación de interpolación geométrica

Para definir la geometría del elemento se utilizan las relaciones:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (2.68)$$



Donde  $(N_i)$  son las mismas funciones de forma, por lo tanto se puede denominar transformación isoparamétrica.

### 2.5.5.2. Jacobiano de la transformación

Para el cálculo de los términos del jacobiano se utiliza la transformación isoparamétrica (2.68), para obtener las derivadas siguientes:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \quad (2.70)$$

De forma que:

$$\underline{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) x_i & \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) y_i \\ \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) x_i & \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) y_i \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Finalmente se expresa la submatriz de deformación-desplazamiento en función de las coordenadas naturales, de la siguiente manera:

$$\underline{B}_i(\xi, \eta) = \frac{1}{|J^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

### 2.5.5.3. Integración sobre el dominio normalizado

Finalmente podemos expresar la ecuación de cálculo de la submatriz de rigidez (2.66) en función de las coordenadas naturales y poder hacer la integración en el dominio normalizado.

$$\underline{k}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j t |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (2.73)$$

Si se sustituye  $(B_i^T$  y  $B_j)$  por sus expresiones en función de las coordenadas naturales, la cual esta dividida por el determinante del jacobiano, luego de simplificar nos queda:

$$\underline{k}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\underline{B}_i^T(\xi, \eta) \underline{D} \underline{B}_j(\xi, \eta)}{|J^{(e)}(\xi, \eta)|} t d\xi d\eta \quad (2.74)$$

Finalmente vemos que los términos de  $(B_i^T$  y  $B_j)$  y el determinante del jacobiano  $|J^{(e)}|$  son función de las variables de integración. La solución de esta integral para cada combinación de nodos resuelve el problema del cálculo de la matriz de rigidez de este elemento.

### 2.5.6. Integración de la matriz de rigidez

En los programas de elementos finitos, el problema de integrar la matriz de rigidez es usualmente resuelto a través de métodos numéricos de integración. Como vimos en los antecedentes ya se ha integrado la expresión de la matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos, tanto en forma analítica como en forma semi-analítica, sin embargo se han desarrollado pocos elementos con estas técnicas, lo que explica su poca utilización. Se presenta a continuación una breve explicación de estas formas de integración.

#### 2.5.6.1. Integración numérica

Es de uso extendido en muchos programas de elementos finitos el método de integración de Gauss-Legendre o cuadratura de Gauss.

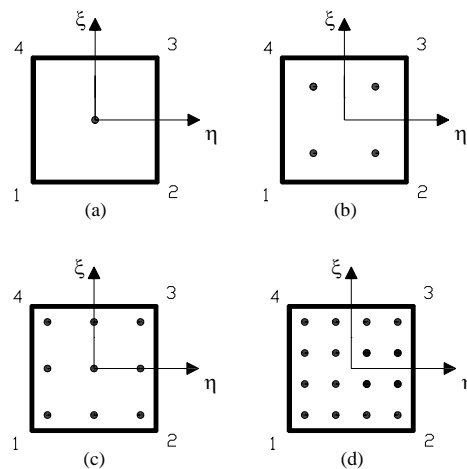
Para elementos cuadriláteros la cuadratura se expresa como:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\xi \cdot \sum_{q=1}^{nq} g(\xi_p, \eta_q) W_q = \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} g(\xi_p, \eta_q) W_p W_q \quad (2.75)$$

Donde  $np$  y  $nq$  son los números de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones  $(\xi, \eta)$  respectivamente. Siendo  $\xi_p$  y  $\eta_q$  las coordenadas naturales de cada punto de integración  $p$  y  $q$ .  $W_p$  y  $W_q$  son los pesos correspondientes a cada dirección en dicho punto.

Es importante resaltar, que una cuadratura de orden  $N$  en cada dirección natural, puede integrar de forma exacta, polinomios de hasta  $(2N-1)$  grado en la correspondiente coordenada natural.

En la Figura (2.9), se muestran algunas de las cuadraturas bidimensionales más comunes sobre dominios cuadriláteros.



**Figura 2.9** Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros: a) 1x1, b) 2x2, c) 3x3 y d) 4x4, puntos de integración.

Complementaria a la ecuación (2.75), es necesaria la utilización de una tabla de coordenadas de los nodos y pesos de ponderación, como la siguiente.

**Tabla 2. 10** Coordenadas y pesos de los puntos de integración para cuadraturas de  $N \times N$ .

N	$\pm \xi$ y $\pm \eta$	$W_i$ y $W_j$
1	0.0	2.0
2	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577350269189626$	1.0
3	0.774596669241183	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888888
4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.65214 51548 62546
5	0.906179845938664	0.236926885056189
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889

Es importante destacar el carácter aproximado de la solución de la integración de expresiones polinómicas de grado mayor a  $(2N-1)$ , y de cualquier otro tipo de expresiones, entre estas, las expresiones racionales típicas de las matrices de rigidez.

**2.5.6.2. Integración numérica, técnica semi-analítica**

La técnica de integración semi-analítica que fue desarrollada en Griffiths (1994), se basa en la el método de Gauss-Legendre para obtener expresiones que fueron denominadas semi-analíticas debido a que son producto de la integración numérica y no de la integración exacta o analítica.

La técnica consiste en realizar las operaciones simbólicas para obtener las expresiones a integrar y con el uso de un sistema de algebra computacional se desarrollan las sumas de las expresiones evaluadas en los puntos de gauss como se indica.

$$k_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{B_i^T(\xi, \eta) D B_j(\xi, \eta)}{|J^{(e)}|(\xi, \eta)} t d\xi d\eta = \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} \frac{B_i^T(\xi_p, \eta_q) D B_j(\xi_p, \eta_q)}{|J^{(e)}|(\xi_p, \eta_q)} W_p W_q \tag{2.76}$$

Con este procedimiento se obtiene una expresión para cada término. Con el objeto de simplificar los cálculos se buscan similitudes en las expresiones semi-analíticas integradas, para esto se agrupan según analogías entre las combinaciones de los grados de libertad (GDL), como por ejemplo combinaciones de GDL paralelos u ortogonales, adyacentes y opuestos. Esto permite que con realizar algunos intercambios de coordenadas, se pueda utilizar una sola expresión para calcular todos los términos de la matriz de rigidez.

Finalmente se entiende que esta técnica reduce el tiempo de cálculo, pero no mejora la precisión para elementos distorsionados, ya que utiliza integración numérica.

### ***2.5.6.3. Integración exacta, técnica analítica***

La integración exacta de la matriz de rigidez puede reducir el tiempo de cálculo y no presenta problemas de precisión esto implica exactitud en las variables fundamentales sólo en los nodos, ya que el método aproxima en el interior de los elementos.

Puede ser laborioso integrar analíticamente, ya que en el integrando se presentan funciones racionales y dependiendo del grado que presenten las variables en el denominador, se incrementará la dificultad.

Se mencionó en los antecedentes que para el elemento finito de cuatro nodos isoparamétricos algunos investigadores habían presentado formulas de integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez, estas se han encontrado a través de diferentes técnicas y la mayoría de ellas han sido con la ayuda de algún sistema de algebra computacional (SAC).

Una de las ultimas técnicas analíticas, es la desarrollada por Videla et al (2005), ésta fue utilizada para integrar analíticamente el elemento finito subparamétrico de ocho nodos

y permitió optimizar el cálculo. En el próximo capítulo se presentará de forma detallada esta técnica y se implementará para el cálculo del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos.

#### ***2.5.7. Consideración sobre el comportamiento del elemento finito de cuatro nodos***

Una importante consideración, que se debería hacer sobre este tipo de elementos cuadriláteros, es el alto grado de precisión que se logra en problemas en los cuales la sollicitación de la estructura es esencialmente de tracción o compresión. Por el contrario, en problemas en los que la sollicitación predominante es de flexión, dicho elemento es de poca precisión. Se hace necesario utilizar mallas muy tupidas para obtener resultados mínimos aceptables. Esta condición para el cálculo, generalmente es poco rentable en el sentido de tiempos de ejecución en computadora. Por ello, se han utilizado técnicas especiales para mejorar su comportamiento, algunas de estas pueden encontrarse en Oñate (1992).

## CAPÍTULO III

# Implementación de la técnica de integración analítica

En este capítulo se resumen todos los pasos seguidos y desarrollados realizados con el sistema de álgebra computacional *Maple*, a través de los cuales se obtuvieron las expresiones de integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos.

En primer lugar se explica a grandes rasgos que son los sistemas de algebra computacional, su importancia en la ingeniería y se detalla un poco sobre el *Maple*, el cual fue el SAC utilizado en este trabajo.

En segundo lugar se describe los pasos de la técnica de integración analítica de matrices de rigidez desarrollada en el trabajo de Videla et al (2005), y que fue seguida en este trabajo para integrar en forma analítica la matriz de rigidez del elemento descrito.

En tercer lugar se presenta en detalle el desarrollo de todas las expresiones y constantes obtenidas durante la implementación de la técnica para este elemento y finalmente se presenta dos etapas dentro del proceso de optimización del cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica, en las cuales se estudiaron múltiples alternativas para optimizar y simplificar las constantes, expresiones, algoritmos y el código; que permitieron una mayor eficiencia en la rutina realizada en esta investigación.

### 3.1. Sistemas de álgebra computacional (SAC)

#### 3.1.1. Antecedentes

Los Sistemas de Álgebra computacional (SAC) son herramientas para realizar cálculos matemáticos tanto en forma numérica como simbólica. Estos programas son utilizados corrientemente, entre los más conocidos están: *Derive*, *Reduce*, *MathCAD*, *Matlab*, *Mathematica*, *Macsyma*, y *Maple* entre otros.

Todos los SAC son capaces de realizar operaciones algebraicas de manera parcial o total, en este mismo sentido la derivación e integración de funciones son muy comunes de analizar en estos programas. Actualmente los SAC tienen rutinas incorporadas de matemática simbólica, permitiendo al usuario un desarrollo mucho más general de las expresiones matemáticas.

Los sistemas de álgebra computacional (SAC) pueden ejecutarse interactivamente; las expresiones que se pueden obtener son tanto numéricas como simbólicas. El usuario introduce las expresiones que requiere, luego realiza las operaciones y se generan resultados en la pantalla.

Otro aspecto de relevancia en los SAC es la manipulación algebraica de polinomios. Además estos sistemas realizan operaciones fundamentales con matrices; también se pueden desarrollar procedimientos y secuencias de códigos, entre otras cosas.

#### 3.1.2. Aplicaciones comunes

En la ingeniería los SAC han sido de gran importancia gracias a la manipulación de grandes cantidad de datos y con resultados rápidos. Por ello el uso de éstos sistemas se esta incrementando día a día en el análisis de problemas que se presentan en la ingeniería y la ciencia.



Actualmente se ha difundido el uso de estos sistemas para analizar y calcular problemas en diferentes ramas de la ingeniería, tales como ingeniería aeroespacial, estructural, geotecnia, fluidos y muchas otras.

En particular los SAC se pueden utilizar para trabajar en diferentes métodos como elementos finitos, diferencias finitas, elementos de contorno, etc.; gracias a sus capacidades simbólicas.

### 3.1.3. *Maple*

El *Maple* es un programa desarrollado desde 1980 por el grupo de cálculo simbólico de la universidad de Waterloo (Ontario, CANADÁ). El nombre proviene de las palabras MATHematical PLEasure. Ochoa et al (2002)

*Maple* es capaz de resolver una amplia gama de problemas entre los cuales los de mayor interés son los basados en el uso de métodos simbólicos. Es capaz de realizar operaciones matemáticas tales como despejar una variable, agrupar términos, simplificar, derivar e integrar, entre otras. Además puede resolver sistemas de ecuaciones y realizar operaciones matriciales en forma simbólica. Todo esto aunado a una interfaz gráfica de fácil manejo, hace de *Maple* una herramienta versátil al igual que otros sistemas.

### 3.2. Técnica de integración analítica

Pasos a seguir para calcular matrices de rigidez de elementos finitos por integración analítica.

#### PASOS

##### 1) Desarrollo simbólico de la formulación matricial

Se toman la submatriz de deformación-desplazamiento  $\underline{B}_i$ , la matriz constitutiva  $\underline{D}$ , la jacobiana  $\underline{J}^{(e)}$  y las funciones de interpolación o funciones de forma, y se realiza:

1.1) Producto matricial  $(\underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_i)$

1.2) Derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas naturales

1.3) Expresión polinómica del determinante jacobiano

1.4) Relaciones de interpolación geométrica

1.5) Derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas

Luego se calculan las expresiones polinómicas de cada término, producto del desarrollo de  $(\underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_i)$ .

##### 2) Cálculo de los términos de la submatriz

##### 3) Identificación de las Ecuaciones Características Básicas ECB

##### 4) Identificación de la Ecuación Característica General ECG

##### 5) Extracción de las constantes generales de cada término

##### 6) Integración exacta o analítica de la ECG

### 3.3. Implementación de la técnica para el elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos

Se toma el elemento de la Figura (3.1), ubicado en el plano cartesiano  $(x,y)$ , con numeración de nodos en sentido antihorario y dos grados de libertad por cada nodo, al cual le corresponde una matriz de rigidez de  $(8 \times 8)$ , con un total de 64 términos, simplificándose el cálculo a sólo 36 por la simetría de la matriz de rigidez.

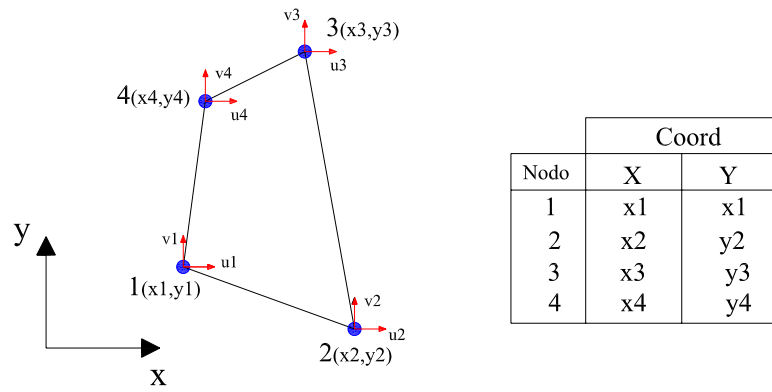


Figura 3. 1 Numeración de los nodos y grados de libertad del elemento.

#### 3.3.1. Desarrollo de la formulación en Maple

Para obtener las expresiones analíticas de la matriz de rigidez se utilizó la formulación del método de los elementos finitos para elasticidad plana presentada en el capítulo anterior, en el cual la matriz de rigidez del elemento  $\underline{K}^{(e)}$  se expresó así:

$$\underline{K}^{(e)} = \iint_{A^e} \underline{B}^T \underline{DB} t dx dy \quad (3.1)$$

Donde  $\underline{B}$  es la matriz de deformación-desplazamiento,  $\underline{D}_{(3 \times 3)}$  es la matriz constitutiva y  $t$  representa el espesor del elemento.

Utilizando la expresión para la submatriz de rigidez  $k_{ij}$  para cada interacción entre los nodos del elemento, luego de la transformación de coordenadas:

$$\underline{k}_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j t \left| \underline{J}^{(e)} \right| d\xi d\eta \quad (3.2)$$

Recordando que  $\left| \underline{J}^{(e)} \right|$  es el determinante de la matriz de transformación de coordenadas o Jacobiano.

Finalmente queda representada la formulación por las submatrices  $\underline{B}_i^T$  y  $\underline{B}_j$  en función de las coordenadas naturales, y la matriz  $\underline{D}$ :

$$\underline{B}_i^T = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{B}_j = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

La matriz  $\underline{D}$  contiene los parámetros elásticos, como se presentó en el capítulo II.

Para elasticidad isótropa los nuevos parámetros se representan así:

Para tensión plana.

$$D_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad D_2 = \nu D_1; \quad D_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.5)$$

Para deformación plana.

$$D_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad D_2 = D_1 \frac{\nu}{1-\nu}; \quad D_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.6)$$

Al multiplicar algebraicamente las matrices  $(\underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j)$  se obtuvieron las siguientes expresiones de los cuatro términos de la submatriz de rigidez para cada una de las interacciones entre los nodos  $i$  y  $j$ , donde  $(i=1..4 \text{ y } j=i..4)$ .

$$\underline{k}_{i,j} = t \cdot \begin{bmatrix} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} D_1 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} D_3}{|J|} d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} D_2 + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} D_3}{|J|} d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} D_2 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} D_3}{|J|} d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} D_1 + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} D_3}{|J|} d\xi d\eta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Por otro lado, se desarrollaron a través de la manipulación simbólica, las derivadas y el determinante del jacobiano, necesarios para calcular los términos de la submatriz de rigidez.

### 3.3.2. Funciones de forma y sus derivadas con respecto a las coordenadas naturales

Considerando las funciones de forma bilineales del capítulo II, correspondientes al elemento finito de cuatro nodos isoparamétrico, se tiene para cada nodo:

Nodo 1

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} + \frac{\eta}{4}; \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} \quad (3.8)$$

Nodo 2

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4} - \frac{\eta}{4}; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} \quad (3.9)$$

Nodo 3

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} + \frac{\xi}{4}; \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \quad (3.10)$$

Nodo 4

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} - \frac{\xi}{4}; \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4} - \frac{\eta}{4} \quad (3.11)$$

### 3.3.3. Determinante del jacobiano

Siguiendo lo establecido en el capítulo II, tenemos que se define la matriz de transformación o Jacobiano, de la siguiente forma:

$$\underline{J}^{(e)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) x_i & \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) y_i \\ \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) x_i & \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) y_i \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Resolviendo el determinante de (3.12), tenemos:

$$|\underline{J}^{(e)}| = \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot x_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot y_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot x_i \right) \quad (3.13)$$

Al desarrollar la ecuación (3.13), se puede expresar el determinante del jacobiano de la siguiente manera:

$$|J| = AJ \cdot \xi + BJ \cdot \eta + CJ \quad (3.14)$$

Donde  $AJ$ ,  $BJ$  y  $CJ$  son denominadas constantes del jacobiano, ya que sólo dependen de las coordenadas euclidianas de los nodos, como se presenta:

$$AJ = \frac{1}{8} \cdot [x_1 \cdot (y_3 + y_4) + x_2 \cdot (y_3 - y_4) + x_3(y_1 - y_2) + x_4(-y_1 + y_2)] \quad (3.15)$$

$$BJ = \frac{1}{8} \cdot [x_1 \cdot (-y_2 + y_3) + x_2 \cdot (y_1 - y_4) - x_3 \cdot (y_1 + y_4) + x_4 \cdot (y_2 - y_3)] \quad (3.26)$$

$$CJ = \frac{1}{8} \cdot [x_1 \cdot (y_2 - y_4) + x_2 \cdot (-y_1 + y_3) + x_3 \cdot (-y_2 + y_4) + x_4 \cdot (y_1 - y_3)] \quad (3.17)$$

### 3.3.4. Interpolación geométrica de la coordenadas cartesianas (x, y)

Se definió en el capítulo II la relación entre la coordenada cartesiana  $\mathbf{x}$  y las naturales de la siguiente manera:

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad (3.18)$$

Al desarrollar la relación (3.18) se obtiene:

$$x = \frac{1}{4} [((x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\eta - x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi + (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + x_1 + x_2 + x_3 + x_4] \quad (3.19)$$

De forma que se pueden obtener las derivadas parciales de la coordenadas cartesiana  $x$  con respecto a las naturales.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \cdot \eta - x_1 + x_2 + x_3 - x_4] \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \cdot \xi - x_1 - x_2 + x_3 + x_4] \quad (3.21)$$

De igual forma que en el caso anterior, se obtuvo el desarrollo de la relación y las derivadas parciales para la coordenada cartesiana  $y$ :

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (3.22)$$

$$y = \frac{1}{4} [((y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\eta - y_1 + y_2 + y_3 - y_4)\xi + (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\eta + y_1 + y_2 + y_3 + y_4] \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \cdot \eta - y_1 + y_2 + y_3 - y_4] \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \cdot \xi - y_1 - y_2 + y_3 + y_4] \quad (3.25)$$

### 3.3.5. Derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas

Para determinar las derivadas de las funciones de forma, con respecto a las variables cartesianas, se utilizó las ecuaciones (2.54) obviando el determinante del jacobiano, y representando las derivadas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (3.26)$$

Del desarrollo para cada nodo se obtuvo:

Nodo 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{1}{8} [(-y_3 + y_4) \cdot \xi + (-y_2 + y_3) \cdot \eta - y_4 + y_2] \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{1}{8} [(x_3 - x_4) \cdot \xi + (x_2 - x_3) \cdot \eta - x_2 + x_4] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nodo 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{8} [(y_3 - y_4) \cdot \xi + (-y_4 + y_1) \cdot \eta - y_1 + y_3] \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{1}{8} [(-x_3 + x_4) \cdot \xi + (-x_1 + x_4) \cdot \eta - x_1 + x_3] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nodo 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{1}{8} [(y_1 - y_2) \cdot \xi + (y_4 - y_1) \cdot \eta + y_4 - y_2] \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{1}{8} [(-x_1 + x_2) \cdot \xi + (x_1 - x_4) \cdot \eta + x_2 - x_4] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nodo 4

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{1}{8} [(-y_1 + y_2) \cdot \xi + (y_2 - y_3) \cdot \eta + y_1 - y_3] \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= \frac{1}{8} [(x_1 - x_2) \cdot \xi + (-x_2 + x_3) \cdot \eta - x_1 + x_3] \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.3.6. Desarrollo de los términos de la submatriz

Si denominamos  $\underline{g}_{i,j}$  a la submatriz que contiene el numerador de las expresiones para calcular la matriz de rigidez antes de ser integrada y a  $\underline{G}^{(e)}$  la matriz que contiene a las submatrices  $\underline{g}_{i,j}$  tenemos entonces que:

$$\underline{k}_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\underline{g}_{ij}}{|J|} d\xi d\eta \quad y \quad \underline{K}^{(e)} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\underline{G}^{(e)}}{|J|} d\xi d\eta \quad (3.31)$$

Donde los términos de la submatriz  $\underline{g}_{i,j}$  son los siguientes:



$$\underline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{x}} D_1 + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{y}} D_3 & \frac{\partial N_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{y}} D_2 + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{x}} D_3 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{x}} D_2 + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{y}} D_3 & \frac{\partial N_i}{\partial \hat{y}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{y}} D_1 + \frac{\partial N_i}{\partial \hat{x}} \frac{\partial N_j}{\partial \hat{x}} D_3 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Con los términos anteriores e interactuando ( $i=1..4$  y  $j=i..4$ ) se desarrollaron las expresiones polinómicas de los términos de la matriz triangular superior de  $\underline{G}^{(e)}$ . Los términos se utilizaron de la siguiente manera:

Con el término  $g_{ij}(1,1)$  se desarrollaron las expresiones polinómicas de los términos ( $G_{11}, G_{13}, G_{15}, G_{17}, G_{33}, G_{35}, G_{37}, G_{55}, G_{57}$  y  $G_{77}$ ) de la matriz  $\underline{G}^{(e)}$ , necesarias para calcular los términos correspondientes de la matriz rigidez del elemento  $\underline{K}^{(e)}$ .

Con el término  $g_{ij}(1,2)$  se desarrollaron las expresiones de los términos ( $G_{12}, G_{14}, G_{16}, G_{18}, G_{34}, G_{36}, G_{38}, G_{56}, G_{58}$  y  $G_{78}$ ) de la matriz  $\underline{G}^{(e)}$ .

Con el término  $g_{ij}(2,1)$  se desarrollaron las expresiones de los términos ( $G_{21}, G_{23}, G_{25}, G_{27}, G_{43}, G_{45}, G_{47}, G_{65}, G_{67}$  y  $G_{87}$ ) de la matriz  $\underline{G}^{(e)}$ , perteneciendo los términos ( $G_{21}, G_{43}, G_{65}$  y  $G_{87}$ ) a la parte simétrica de la matriz y por lo tanto se calcularon sólo ( $G_{23}, G_{25}, G_{27}, G_{45}, G_{47}$  y  $G_{67}$ ).

Y con  $g_{ij}(2,2)$  se desarrollaron las expresiones de los términos ( $G_{22}, G_{24}, G_{26}, G_{28}, G_{44}, G_{46}, G_{48}, G_{66}, G_{68}$  y  $G_{88}$ ) de la matriz.

Prosiguiendo con la técnica analítica, se operaron, factorizaron y simplificaron las treinta y dos expresiones polinómicas  $G_{ij}$ , que conforman la parte triangular superior de la matriz  $\underline{G}^{(e)}$ , con el uso del SAC.

A continuación se muestra el término  $G_{35}$ , a manera de ejemplo de lo extenso de los términos que se generan en la matriz  $\underline{G}^{(e)}$ .

$$\begin{aligned}
 G_{35} = & [(x2x4 + x3x1 - x2x3 - x4x1) \cdot D3 + (-y4y1 + y2y4 + y3y1 - y2y3) \cdot D1] \cdot \xi^2 + \dots \\
 & [ \{ (-x3x1 - x2x1 + x1^2 - x4^2 + x2x4 + x3x4) \cdot D3 + (-y3y1 + y3y4 - y2y1 - y4^2 + \dots \\
 & y2y4 + y1^2) \cdot D1 \} \cdot \eta + (x3x1 + x2x1 - x4^2 + x2x4 + x3x4 - 2 \cdot x2x3 - x1^2) \cdot D3 + \dots \\
 & (-y4^2 - 2 \cdot y2y3 + y2y4 - y1^2 + y3y4 + y2y1 + y3y1) \cdot D1] \cdot \xi + \{ (-x4^2 - x1^2 + \dots \quad (3.33) \\
 & 2 \cdot x4x1) \cdot D3 + (-y1^2 - y4^2 + 2 \cdot y4y1) \cdot D1 \} \cdot \eta^2 + \{ (-x3x1 - x2x1 + x1^2 - x4^2 + \dots \\
 & x2x4 + x3x4) \cdot D3 + (-y3y1 + y3y4 - y2y1 - y4^2 + y2y4 + y1^2) \cdot D1 \} \cdot \eta + \dots \\
 & (x2x1 + x3x4 - x4x1 - x2x3) \cdot D3 + (y2y1 + y3y4 - y4y1 - y2y3) \cdot D1
 \end{aligned}$$

Haciendo uso de las herramientas del *Maple*, se logró extraer los coeficientes y representar la expresión polinómica de la siguiente manera:

$$G_{35} = AK_{35} \cdot \xi^2 + (BK_{35} \cdot \eta + CK_{35}) \cdot \xi + DK_{35} \cdot \eta^2 + EK_{35} \cdot \eta + FK_{35} \quad (3.34)$$

Donde coeficientes  $AK_{35}$ ,  $BK_{35}$ ,  $CK_{35}$ ,  $DK_{35}$ ,  $EK_{35}$  y  $FK_{35}$ , son factores que son función de las coordenadas cartesianas de los nodos y de los términos de la matriz constitutiva  $\underline{D}$ .

$$\begin{aligned}
 AK_{35} &= (x2x4 + x3x1 - x2x3 - x4x1) \cdot D3 + (-y4y1 + y2y4 + y3y1 - y2y3) \cdot D1 \\
 BK_{35} &= (-x3x1 - x2x1 + x1^2 - x4^2 + x2x4 + x3x4) \cdot D3 + \dots \\
 & \quad (-y3y1 + y3y4 - y2y1 - y4^2 + y2y4 + y1^2) \cdot D1 \\
 CK_{35} &= (x3x1 + x2x1 - x4^2 + x2x4 + x3x4 - 2 \cdot x2x3 - x1^2) \cdot D3 + \dots \quad (3.35) \\
 & \quad (-y4^2 - 2 \cdot y2y3 + y2y4 - y1^2 + y3y4 + y2y1 + y3y1) \cdot D1 \\
 DK_{35} &= (-x4^2 - x1^2 + 2 \cdot x4x1) \cdot D3 + (-y1^2 - y4^2 + 2 \cdot y4y1) \cdot D1 \\
 EK_{35} &= (-x3x1 - x2x1 + x1^2 - x4^2 + x2x4 + x3x4) \cdot D3 + \dots \\
 & \quad (-y3y1 + y3y4 - y2y1 - y4^2 + y2y4 + y1^2) \cdot D1 \\
 FK_{35} &= (x2x1 + x3x4 - x4x1 - x2x3) \cdot D3 + (y2y1 + y3y4 - y4y1 - y2y3) \cdot D1
 \end{aligned}$$

Al revisar de forma exhaustiva las expresiones de los treinta y seis términos se noto que estas podían ser representadas por una sola expresión general, como la siguiente:

$$G_{ij} = AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij} \quad (3.36)$$

Donde lo único que varía para cada término  $G_{ij}$  son los coeficientes  $AK_{ij}$ ,  $BK_{ij}$ ,  $CK_{ij}$ ,  $DK_{ij}$ ,  $EK_{ij}$  y  $FK_{ij}$  los cuales se denominaron, constantes de la expresión general, debido a que no dependen de las variables  $(\xi, \eta)$ . Estos seis tipos de constantes generales, están conformados por 36 constantes cada uno, esto se traducen en un total de 216 constantes generales necesarias para el cálculo de la matriz de rigidez.

### 3.3.7. Integración de la expresión general para los casos del Jacobiano

A través de la técnica se obtuvo una expresión general, la cual debe ser dividida entre el determinante del jacobiano para ser integrada con la ayuda del SAC. Con esta integral se representa a todos los términos de la matriz.

$$K_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij}}{|J|} d\xi d\eta \quad (3.37)$$

Variando los subíndices ( $i=1..8$  y  $j=i..8$ ) se representan los treinta y seis términos de la parte triangular superior de la matriz de rigidez del elemento ( $\underline{K}^{(e)}$ ). Se mencionó que las constantes  $AK_{ij}$ ,  $BK_{ij}.. FK_{ij}$ , varían para cada término pero no dependen de las variables a integrar, en cambio el determinante del jacobiano si, y por lo tanto se generaron unas discriminaciones en casos posibles. En trabajos anteriores de Videla et al (1996) y (2005), se han a discriminado en casos donde algunas constantes del jacobiano son nulas y se detectó que estos casos están asociados con particularidades en la geometría de los elementos.

#### 3.3.7.1. Caso I

Caso donde ( $\mathbf{AJ}=\mathbf{BJ}=0$ ). En el apéndice C, se demuestra que cuando esto ocurre estamos en presencia de un elemento paralelogramo, adoptando la hipótesis de que ( $\mathbf{CJ}>0$ ) el jacobiano toma la siguiente característica:

$$|J| = CJ \quad (3.38)$$

La integral queda:

$$K_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij}}{CJ} d\xi d\eta \quad (3.39)$$

Que tiene la siguiente solución:

$$K_{ij} = \frac{(DK_{ij} + AK_{ij} + 3 \cdot FK_{ij})}{CttE1} \quad (3.40)$$

Donde:

$$CttE1 = \frac{CttDen \cdot CJ}{4} \quad \text{y} \quad CttDen = 64 \times 3 = 128 \quad (3.41)$$

### 3.3.7.2. Caso II

Caso donde ( $AJ = 0$ ), de igual forma en el apéndice C se demuestra a que particularidad geométrica está asociado este caso. El jacobiano y la integral se expresan así:

$$|J| = BJ \cdot \eta + CJ \quad (3.42)$$

$$K_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij}}{BJ \cdot \eta + CJ} d\xi d\eta \quad (3.43)$$

Esta integral es racional, pero al ser de una sola variable tiene una solución simple, como se muestra:

$$K_{ij} = \frac{(Actt2_{ij} \cdot \ln(-BJ + CJ) + Bctt2_{ij} \cdot \ln(BJ + CJ) + Cctt2_{ij})}{CttE2} \quad (3.44)$$

$$CttE2 = CttDen \cdot BJ^3 \quad (3.45)$$

En la ecuación integrada los factores ( $Actt2_{ij}$ ,  $Bctt2_{ij}$  y  $Cctt2_{ij}$ ) son constantes que contienen a las constantes de la expresión general y las del jacobiano, como se muestra:

$$\begin{aligned} Actt2_{ij} &= -2 \cdot BJ^2 \cdot AK_{ij} - 6 \cdot BJ^2 \cdot FK_{ij} + 6 \cdot BJ \cdot CJ \cdot EK_{ij} - 6 \cdot CJ^2 \cdot DK_{ij} \\ Bctt2_{ij} &= 2 \cdot BJ^2 \cdot AK_{ij} + 6 \cdot BJ^2 \cdot FK_{ij} - 6 \cdot BJ \cdot CJ \cdot EK_{ij} + 6 \cdot CJ^2 \cdot DK_{ij} \\ Cctt2_{ij} &= -12 \cdot BJ \cdot CJ \cdot DK_{ij} + 12 \cdot BJ^2 \cdot EK_{ij} \end{aligned} \quad (3.46)$$

### 3.3.7.3. Caso III

Caso donde ( $\mathbf{BJ} = 0$ ). El jacobiano y la integral se expresan así:

$$|J| = AJ \cdot \xi + CJ \quad (3.47)$$

$$K_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij}}{AJ \cdot \xi + CJ} d\xi d\eta \quad (3.48)$$

y tiene la siguiente solución:

$$K_{ij} = \frac{(Actt3_{ij} \cdot \ln(-AJ + CJ) + Bctt3_{ij} \cdot \ln(AJ + CJ))}{CttE3} \quad (3.49)$$

$$CttE3 = CttDen \cdot AJ^3 \quad (3.50)$$

Las constantes ( $Actt3_{ij}$ ,  $Bctt3_{ij}$  y  $Cctt3_{ij}$ ), son:

$$\begin{aligned} Actt3_{ij} &= -2 \cdot AJ^2 \cdot DK_{ij} - 6 \cdot AJ^2 \cdot FK_{ij} + 6 \cdot AJ \cdot CJ \cdot CK_{ij} - 6 \cdot CJ^2 \cdot AK_{ij} \\ Bctt3_{ij} &= 2 \cdot AJ^2 \cdot DK_{ij} + 6 \cdot AJ^2 \cdot FK_{ij} - 6 \cdot AJ \cdot CJ \cdot CK_{ij} + 6 \cdot CJ^2 \cdot AK_{ij} \\ Cctt2_{ij} &= -12 \cdot AJ \cdot CJ \cdot AK_{ij} + 12 \cdot AJ^2 \cdot CK_{ij} \end{aligned} \quad (3.51)$$

### 3.3.7.4. Caso IV

Caso general donde ( $\mathbf{AJ} \neq 0$ ) y ( $\mathbf{BJ} \neq 0$ ). El jacobiano y la integral quedan:

$$|J| = AJ \cdot \xi + BJ \cdot \eta + CJ \quad (3.52)$$

$$K_{ij} = t \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK_{ij} \cdot \xi^2 + (BK_{ij} \cdot \eta + CK_{ij}) \cdot \xi + DK_{ij} \cdot \eta^2 + EK_{ij} \cdot \eta + FK_{ij}}{AJ \cdot \xi + BJ \cdot \eta + CJ} d\xi d\eta \quad (3.53)$$

Este es el caso más laborioso para este tipo de elemento, donde se debe resolver una integral doble de una expresión racional de grado uno en ambas variables.

Para la integral (3.53), se logró expresar la solución del *Maple*, de la siguiente manera:

$$K_{ij} = \frac{Actt4 \cdot \ln(AJ + B + CJ) + Bctt4 \cdot \ln(AJ - BJ + CJ) + Cctt4 \cdot \ln(-AJ + BJ + CJ) + Dctt4 \cdot \ln(-AJ - BJ + CJ) + Ectt4}{CttE4} \quad (3.54)$$

$$CttE4 = CttDen \cdot 2 \cdot AJ^3 \cdot BJ^3 \quad (3.55)$$

Donde los factores ( $Actt4_{ij}$ ,  $Bctt4_{ij}$ ,  $Cctt4_{ij}$ ,  $Dctt4_{ij}$  y  $Ectt4_{ij}$ ), son grandes constantes y se presentan en el apéndice A debido a lo extenso de las expresiones.

Además en el apéndice A se muestra con detalle la integración de los cuatro casos con el *Maple*.

### 3.4. Optimización

El proceso de optimizar el cálculo de la matriz de rigidez se realizó en dos etapas, las cuales contemplan varios aspectos con los que se logró que la rutina realizada fuera más eficiente.

#### 3.4.1. Etapa I: Optimización de las constantes

Para lograr eficiencia en la rutina se realizaron las manipulaciones necesarias para factorizar y simplificar las constantes con el objeto de tener el menor número de operaciones de básicas (multiplicaciones, sumas, etc.)

##### 3.4.1.1. Reducción de las constantes

Se redujeron algunos términos al inicio de la formulación, buscando disminuir el volumen de cálculo. Se sustituyeron las diferencias entre las coordenadas del elemento por doce nuevas constantes como se muestra:

$$\begin{aligned}
 &AX1 = x4 - x3; \quad AX2 = x2 - x1; \quad AX3 = x3 - x2; \\
 &AX4 = x4 - x1; \quad AX5 = x4 - x2; \quad AX6 = x3 - x1; \\
 &AY1 = y4 - y3; \quad AY2 = y2 - y1; \quad AY3 = y3 - y2; \\
 &AY4 = y4 - y1; \quad AY5 = y4 - y2; \quad AY6 = y3 - y1.
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

Estas gráficamente representan lo siguiente:

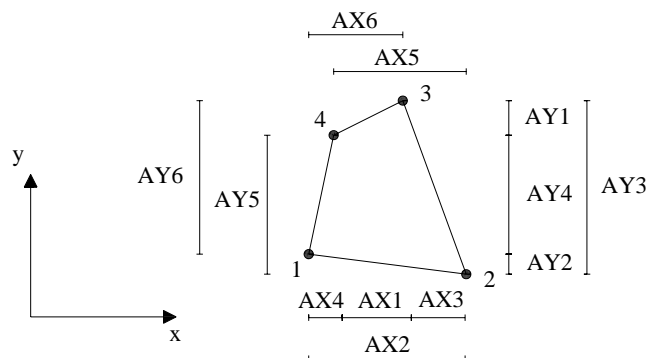


Figura 3.2 Parámetros del elemento.

Estas constantes fueron sustituidas en las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas cartesianas como se muestra a continuación:

Nodo 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x} &= \frac{1}{8} [AY1 \cdot \xi + AY3 \cdot \eta - AY5] \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} &= \frac{1}{8} [-AX1 \cdot \xi - AX3 \cdot \eta + AX5]\end{aligned}\quad (3.57)$$

Nodo 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{8} [-AY1 \cdot \xi + -AY4 \cdot \eta + AY6] \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} &= \frac{1}{8} [AX1 \cdot \xi + AX4 \cdot \eta - AX6]\end{aligned}\quad (3.58)$$

Nodo 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{1}{8} [-AY2 \cdot \xi + AY4 \cdot \eta + AY5] \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{1}{8} [AX2 \cdot \xi - AX4 \cdot \eta - AX5]\end{aligned}\quad (3.59)$$

Nodo 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{1}{8} [AY2 \cdot \xi - AY3 \cdot \eta - AY6] \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= \frac{1}{8} [-AX2 \cdot \xi + AX3 \cdot \eta + AX6]\end{aligned}\quad (3.60)$$

Estas doce constantes permitieron que el número de operaciones básicas de cálculo en las 216 constantes generales disminuyera, logrando mayor eficiencia en el cálculo. Como ejemplo se presenta la constante  $EK_{17}$  antes y después de la reducción, y las cantidades de adiciones, representadas por el comando *Maple* como (*additions*) y multiplicaciones (*multiplications*), de cada una.

$$\begin{aligned}EK_{17} &= (x3x4 + x2^2 - x2x3 + x4x1 - x4^2 - x2x1) \cdot D3 + \dots \\ &\dots (y2^2 + y3y4 + y4y1 - y2y1 - y2y3 - y4^2) \cdot D1 \\ &\dots \\ &\quad \quad \quad 11 \text{ additions} + 14 \text{ multiplications}\end{aligned}\quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}EK_{17} &= AX3 \cdot (-AX6 + AX5) \cdot D3 + AY3 \cdot (AY5 - AY6) \cdot D1 \\ &\quad \quad \quad 3 \text{ additions} + 6 \text{ multiplications}\end{aligned}\quad (3.62)$$



### 3.4.1.2. Términos iguales en las constantes generales

Se inspeccionaron todas las constantes clasificándolas por tipo y se encontró que de los 36 términos que contienen cada una las constantes tipo  $AK_{ij}$ ,  $DK_{ij}$  y  $FK_{ij}$  sólo era necesario calcular 10, ya que el resto se repetían. Para las constantes tipo  $BK_{ij}$ ,  $CK_{ij}$  y  $EK_{ij}$  no se encontraron repetidas. Esto logró una importante disminución en el número de operaciones de la rutina, ya que de las 216 constantes finalmente sólo calculan 138.

### 3.4.2. Etapa II: codificación

Con todas las simplificaciones echas en las constantes, se procedió a realizar el código final, para lo cual se tomaron en cuenta diferentes algoritmos con la finalidad de obtener el más eficiente (ver apéndice D).

#### 3.4.2.1. Algoritmo de cálculo

El algoritmo elegido y codificado para realizar el cálculo de los términos de la parte triangular superior de la matriz de rigidez, se desplaza por las filas del arreglo, para esto se estableció el índice  $f$  que varía de ( $f = 1..36$ ), éste establece cuales son las constantes que se utilizan para cada término y se va incrementando dentro del ciclo  $(i, j)$ ,  $f$  toma los siguientes valores para cada término de la matriz de rigidez:

$j :$	1	2	3	4	5	6	7	8
$i :$	1	2	3	4	5	6	7	8
		9	10	11	12	13	14	15
			16	17	18	19	20	21
				22	23	24	25	26
					27	28	29	30
						31	32	33
							34	35
								36

**Figura 3.3** Valor del índice  $f$  para cada término  $(i, j)$  de la matriz de rigidez.

Se agruparon las constantes de cada tipo dentro de vectores de 36 términos, de forma que los vectores ( $AK(f)$ ,  $BK(f)$ ,  $CK(f)$ ,  $DK(f)$ ,  $EK(f)$  y  $FK(f)$ ), para ( $f=1..36$ ), contiene todas las constantes de cada tipo.

### 3.4.2.2. Proceso de codificación

Al realizar el código se busco no realizar operaciones repetidas dentro de los ciclos cálculo de la matriz de rigidez, para lo cual se asignaron nuevas constantes a aquellas expresiones cuyos valores que no dependían de  $f$  y se colocaron fuera del ciclo. Un ejemplo importante de esto, son las expresiones logarítmicas en cuyo argumento se encuentran sólo las constantes del jacobiano, para el caso IV se tiene:

$$K_{ij} = \frac{(Actt4(f) \cdot A \log 4 + Bctt4(f) \cdot B \log 4 + Cctt4(f) \cdot C \log 4 + Dctt4 \cdot D \log 4 + Ectt4)}{CttE4} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} A \log 4 &= \ln(AJ + BJ + CJ); & B \log 4 &= \ln(AJ - BJ + CJ) \\ C \log 4 &= \ln(-AJ + BJ + CJ); & D \log 4 &= \ln(-AJ - BJ + CJ) \end{aligned} \quad (3.64)$$

### 3.4.2.3. Términos iguales en la matriz de rigidez

Durante el proceso de optimización del cálculo de la matriz de rigidez, se analizó la posibilidad de que existieran términos exactamente iguales dentro de los 36 que conforman la parte triangular superior de la matriz. Ya se observó que existe una expresión general que genera todos los términos de la matriz de rigidez par cada caso, y que las constantes generales  $AK_{ij}$ ,  $BK_{ij}$  ...  $FK_{ij}$ ; varían para cada termino. También se comentó en los tipos  $BK$ ,  $CK$  y  $EK$  existen algunas constantes idénticas analíticamente, pero para los demás tipos no se encontró ninguna igual, con lo cual se asume que no hay términos que tengan todas las constantes analíticamente iguales.

Al ejecutar seguidas veces el programa se pudo observar que numéricamente existían algunos términos iguales dentro de la matriz de rigidez, y la cantidad de términos iguales dependía del caso y forma del elemento como se observa en la tabla (3.1).

**Tabla 3. 1** Términos repetidos en las matrices de rigidez, por inspección de ejemplos.

Matriz del	CASO I		CASO II	CASO III	CASO IV
	<i>Cuadrado paralelo a (x,y)</i>	<i>En general AJ=BJ=0</i>	<i>AJ=0, BJ≠0</i>	<i>AJ≠0, BJ=0</i>	<i>AJ≠0, BJ≠0</i>
Nº de términos repetidos	30	10	4	6	2

Los resultados de la tabla (3.1) son producto de la inspección de los términos de varias matrices de rigidez.

Con la finalidad de obtener un sustento analítico de esto, se clasificaron las constantes por término y se obtuvo que para el caso IV, donde los términos  $K_{16}$  y  $K_{25}$  eran numéricamente iguales, analíticamente no lo eran. Se encontró que todas las constantes de estos términos presentaban los factores de las constantes  $D2$  y  $D3$  intercambiados. Como se observa a continuación.

$$\begin{aligned}
 AK(6) &= AY1 * D2 * AX2 + AX1 * D3 * AY2 \\
 AK(12) &= AX1 * D2 * AY2 + AY1 * D3 * AX2 \\
 BK(6) &= (AY2 * AX3 - AX1 * AY4) * D3 + (AX2 * AY3 - AY1 * AX4) * D2 \\
 BK(12) &= (AX2 * AY3 - AY1 * AX4) * D3 + (AY2 * AX3 - AX1 * AY4) * D2 \\
 CK(6) &= (-AY2 * AX5 - AX1 * AY5) * D3 + (-AY1 * AX5 - AX2 * AY5) * D2 \\
 CK(12) &= (-AX2 * AY5 - AY1 * AX5) * D3 + (-AX1 * AY5 - AY2 * AX5) * D2 \\
 DK(6) &= -D2 * AY3 * AX4 - D3 * AX3 * AY4 \\
 DK(12) &= -D2 * AX3 * AY4 - D3 * AY3 * AX4 \\
 EK(6) &= (-AY5 * AX3 + AX5 * AY4) * D3 + (AY5 * AX4 - AY3 * AX5) * D2 \\
 EK(12) &= (-AY3 * AX5 + AY5 * AX4) * D3 + (AX5 * AY4 - AX3 * AY5) * D2 \\
 FK(6) &= D3 * AY5 * AX5 + D2 * AY5 * AX5 \\
 FK(12) &= D3 * AX5 * AY5 + D2 * AX5 * AY5
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

Debido a el poco beneficio que generaba esta simplificación en la mayoría de los casos y a la complejidad de demostrar analíticamente que al sustituir las constantes de la ecuación (3.65) en la ecuación general se obtuviera que ( $K_{16} = K_{25}$ ), se decidió no tomar en cuenta este criterio en la mayoría de los casos.

Se realizó una nueva discriminación en la rutina, el cálculo del caso particular de un del elemento cuadrado con lados paralelos a los ejes, y se denominó caso I.a. Al analizar las matrices y las expresiones analíticas de los términos de este tipo de elemento, se concluyo que sólo era necesario calcular 6 de los 36 términos de la matriz con lo cual se evitó evaluar el resto de las constantes logrando un ahorro sustancial en tiempo.

El resultado final de este proceso de optimización del cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos, se presenta en el apéndice D. En este se muestra el código de la subrutina analítica realizada en este trabajo llamada *Analitica\_Ke*.

## CAPÍTULO IV

# Resultados de precisión, eficiencia y tolerancia

En este capítulo se presentan los resultados de las comparaciones realizadas con el programa *Analítico-4n*, creado en este trabajo el cual contiene las subrutinas analítica y semi-analítica. El capítulo consta de tres temas fundamentales de esta investigación.

El primero es sobre la precisión, se evalúa el porcentaje de diferencia entre las rutinas de integración numérica y la de integración analítica o exacta, reflejando los errores que la integración numérica comete al calcular las matrices de rigidez de elementos distorsionados.

El segundo tema trata sobre la eficiencia computacional de la rutina analítica; se estudia la eficiencia de las rutinas bajo el enfoque empírico, es decir midiendo y comparando los tiempos de ejecución computacional de las diferentes rutinas.

Por último, se presenta el cálculo de los valores mínimos tolerable de las constantes del jacobiano (tolerancia), siendo esto necesario para evitar errores de precisión de la rutina analítica cuando los elementos se acercan a la frontera entre un caso y otro, y poder elegir el caso mas óptimo para el cálculo de la matriz de rigidez, logrando generalidad en la rutina analítica, aspecto fundamental en cualquier programa.

#### 4.1. Precisión

La integración numérica tiene la cualidad de ser un método aproximado, y en el capítulo III se indicó como el método de integración numérica de Gauss-Legendre, puede integrar de forma exacta polinomios de hasta  $(2N-1)$  grado, donde  $N$  es el número de puntos de Gauss utilizados; por esta razón al integrar las expresiones racionales de los casos II, III y IV a través de este método, se comete un error con respecto a la integración exacta.

Se espera entonces que exista una diferencia entre las matrices de rigidez calculadas por las rutinas que utilizan integración numérica de  $(2 \times 2)$  y la calculada por la rutina de integración analítica desarrollada en este trabajo. Esto puede reflejarse a través del porcentaje que representa dicha diferencia respecto al valor exacto de la rutina analítica.

$$\% Dif (ter) = \frac{|(K_{analítica}(ter) - K_{numérica}(ter))|}{|K_{analítica}(ter)|} \times 100 \quad (4.1)$$

Donde  $K_{analítica}(ter)$  adopta el valor de un término de la matriz de rigidez de la rutina analítica y  $K_{numérica}(ter)$  el valor del término correspondiente de la matriz de rigidez de la rutina numérica o de la semi-analítica, donde el índice  $(ter)$  representa cada uno de los términos de la matriz simétrica, de forma que  $(ter= 1..36)$ .

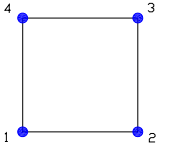
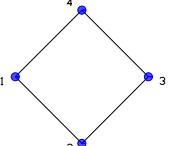
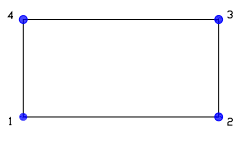
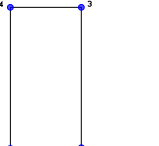
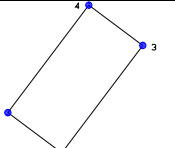
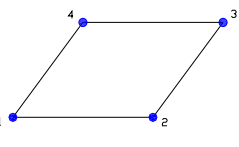
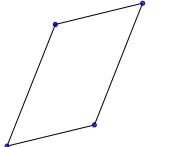
En Videla et al (2005) se demostró que el porcentaje de diferencia o error cometido por la integración numérica, depende del número de puntos de Gauss utilizados para la integración y del grado de distorsión del elemento. Por lo cual en las tablas (4.1, 4.2, 4.3 y 4.4), se presenta el porcentaje de diferencia promedio ( $\%Dif_{Promedio}$ ), el mínimo ( $\%Dif_{min}$ ) y el máximo ( $\%Dif_{máx}$ ) obtenidos para distintos elementos de cada caso.

$$\% Dif_{Promedio} = \frac{\sum_{ter=1}^{36} \% Dif (ter)}{36} \quad (4.2)$$

4.1.1. Errores de la integración numérica de la matriz de rigidez

4.1.1.1. Algunos elementos de los casos I y I.a ( $AJ=BJ=0$ )

Tabla 4. 1 Porcentajes de error en elementos de tipo I.a y tipo I ( $AJ=BJ=0$ ).

Nombre (TIPO)	Descripción	Forma del elemento (sin escala)	Coordenadas de los nodos			% del error de las rutinas que utilizan integración numérica		
			Nodo	X	Y	% Dif. promedio	% Dif. mín	% Dif. máx
CUA1 (I.a)	Elemento cuadrado de lados paralelos a los ejes euclidianos		1	0	0	0,00	0,00	0,00
			2	10	0			
			3	10	10			
			4	0	10			
CUA2 (I)	Elemento cuadrado de rotado 45° con respecto a los ejes		1	0	0	0,00	0,00	0,00
			2	0.7071	-0.7071			
			3	1.4142	0			
			4	0.7071	0.7071			
RECT1 (I)	Elemento rectangular paralelo a los ejes con lado mayor en X		1	0	0	0,00	0,00	0,00
			2	20	0			
			3	20	10			
			4	0	10			
RECT2 (I)	Elemento rectangular paralelo a los ejes con lado mayor en Y		1	0	0	0,00	0,00	0,00
			2	10	0			
			3	10	20			
			4	0	20			
RECT3 (I)	Elemento rectangular rotado con respecto a los ejes 45°		1	-4	3	0,00	0,00	0,00
			2	0	0			
			3	6	8			
			4	2	11			
PARAL1 (I)	Paralelogramo con lado paralelo a X (análogo al paralelo a Y)		1	0	0	0,00	0,00	0,00
			2	10	0			
			3	15	10			
			4	5	10			
PARAL2 (I)	Paralelogramo con lados no paralelos a los ejes		1	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00
			2	27,4541	6,6494			
			3	42,6313	44,8326			
			4	15,1772	38,1832			

4.1.1.2. Algunos elementos del caso II ( $AJ=0$ )

Tabla 4. 2 Porcentajes de error en elementos de tipo II ( $AJ=0$ ).

Nombre (TIPO)	Descripción	Forma del elemento (sin escala)	Coordenadas de los nodos			% del error de las rutinas que utilizan integración numérica		
			Nodo	X	Y	% Dif. promedio	% Dif. mín	% Dif. máx
DIRX1 (II)	Elemento paralelo a X con una pequeña distorsión.		1	0	0	0,24	0,02	1,25
			2	10	0			
			3	15	5			
			4	0	5			
DIRX2 (II)	Elemento paralelo a X con una gran distorsión.		1	0	0	9,73	0,16	33,11
			2	10	0			
			3	100	5			
			4	0	5			
DIRX3 (II)	Elemento paralelo a X distorsionado por ambos lados		1	-10	0	5,57	0,20	18,94
			2	10	0			
			3	100	5			
			4	0	5			
DIRX4 (II)	Elemento paralelo a X simétrico y distorsionado		1	0	0	2,50	0,00	25,00
			2	55	0			
			3	30	5			
			4	25	5			
DIRX5 (II)	Elemento con dos lados paralelos entre si y rotado un Angulo ( $\alpha$ ) $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$		1	3	-4	1,29	0,04	18,93
			2	7	-1			
			3	8	6			
			4	0	0			
DIRX6 (II)	Con lados paralelos entre si y rotado, con ángulos internos $< 150^\circ$		1	0	0	1,78	0,07	14,33
			2	10	5			
			3	11	115			
			4	5,5	8,75			
DIRX7 (II)	Con lados paralelos entre si y rotado, con un ángulo interno $> 150^\circ$		1	0	0	10,12	0,22	103,37
			2	10	5			
			3	11	11,5			
			4	8	10			



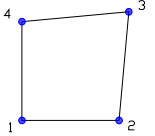
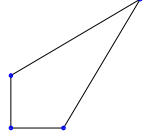
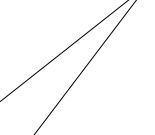
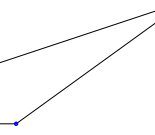
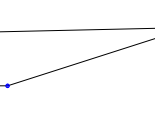
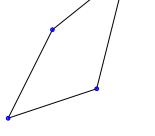
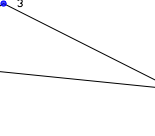
4.1.1.3. Algunos elementos del caso III ( $BJ=0$ )

Tabla 4.3 Porcentajes de error en elementos de tipo III ( $BJ=0$ ).

Nombre (TIPO)	Descripción	Forma del elemento (sin escala)	Coordenadas de los nodos			% del error de las rutinas que utilizan integración numérica		
			Nodo	X	Y	% Dif. promedio	% Dif. mín	% Dif. Máx
DIRY1 (III)	Elemento paralelo a Y con una pequeña distorsión.		1	0	0	<b>0,24</b>	0,02	1,25
2	5	0						
3	5	10						
4	0	15						
DIRY2 (III)	Elemento paralelo a Y con una gran distorsión.		1	0	0	<b>9,73</b>	0,16	33,11
2	5	0						
3	5	10						
4	0	100						
DIRY3 (II)	Elemento paralelo a Y distorsionado por ambos lados		1	0	-10	<b>9,88</b>	0,13	41,00
2	5	0						
3	5	10						
4	0	100						
DIRY4 (III)	Elemento paralelo a Y simétrico y distorsionado		1	0	0	<b>3,98</b>	0,06	20,41
2	5	-25						
3	5	30						
4	0	10						
DIRY5 (III)	Elemento con dos lados paralelos entre si y rotado un Angulo ( $\alpha$ ) $45^\circ < \alpha < 135^\circ$		1	0	0	<b>1,09</b>	0,11	7,71
2	4	-3						
3	7	1						
4	6	8						
DIRY6 (III)	Con lados paralelos entre si y rotado, con ángulos internos $< 150^\circ$		1	-0,85	10,3	<b>1,22</b>	0,10	10,11
2	0	0						
3	5	10						
4	1,9	15,8						
DIRY7 (III)	Con lados paralelos entre si y rotado, con un ángulo interno $> 150^\circ$		1	0,4	12,8	<b>6,69</b>	0,24	64,00
2	0	0						
3	5	10						
4	1,9	15,8						

4.1.1.4. Algunos elementos del caso IV

Tabla 4. 4 Porcentajes de error en elementos de tipo IV ( $AJ \neq 0$  y  $BJ \neq 0$ ).

Nombre (TIPO)	Descripción	Forma del elemento (sin escala)	Coordenadas de los nodos			% del error de las rutinas que utilizan integración numérica		
			Nodo	X	Y	% Dif. promedio	% Dif. mín	% Dif. Máx
GENE1 (IV)	Elemento trapezoidal levemente distorsionado por el nodo #3 simétricamente.		1	0	0	<b>0,03</b>	0,00	0,18
			2	10	0			
			3	11	11			
			4	0	10			
GENE2 (IV)	Elemento trapezoidal distorsionado por el nodo #3 simétricamente.		1	0	0	<b>4,28</b>	0,92	10,98
			2	10	0			
			3	100	100			
			4	0	10			
GENE3 (IV)	Elemento trapezoidal muy distorsionado por el nodo #3 simétricamente.		1	0	0	<b>5,50</b>	1,27	14,33
			2	10	0			
			3	10000	10000			
			4	0	10			
GENE4 (IV)	Elemento cuadrilátero distorsionado por el nodo #3 asimétrico.		1	0	0	<b>10,06</b>	0,16	33,11
			2	10	0			
			3	100	10			
			4	0	10			
GENE5 (IV)	Elemento cuadrilátero distorsionado por el nodo #3 asimétrico.		1	0	0	<b>9,96</b>	0,17	31,17
			2	10	0			
			3	100	11			
			4	0	10			
GENE6 (IV)	Elemento cuadrilátero con un ángulo interno mayor de 150°		1	0	0	<b>3,08</b>	0,07	39,14
			2	30	10			
			3	40	50			
			4	15	30			
GENE7 (IV)	Elemento cuadrilátero con un ángulo interno mayor de 150°		1	0	0	<b>3,62</b>	0,08	22,14
			2	-5	50			
			3	10	15			
			4	2,5	10			

#### 4.1.2. Análisis de resultados

Los resultados de las tablas anteriores comprueban que la rutina analítica, y en general la integración analítica de matrices de rigidez de elementos finitos, posee una ventaja ante la integración numérica de las mismas, ya que las numéricas comete errores para elementos de geometría distorsionada.

En la tabla (4.1) se presentó un elemento del caso I.a y varios del caso I, y se obtuvo que no había diferencia entre los resultados de las rutinas, esto se esperaba ya que como se indicó en la ecuación (4.56) del capítulo anterior, la expresión que rige estos tipos de elementos es polinómica de segundo grado en las variables  $\xi$  y  $\eta$ , y la integración numérica de segundo orden es capaz de calcular esta expresión de forma exacta.

Para los casos II, III y IV presentados en las tablas (4.2, 4.3 y 4.4), se obtuvo que el error cometido por la integración numérica aumenta al incrementar la distorsión, pero toman valores máximos cuando la distorsión es en una sola dirección o cuando algún ángulo interno es mayor a  $150^\circ$ .

Es poco probable que programas generadores de mallas produzcan elementos con el grado de distorsión, de algunos de los presentados aquí, pero si analizamos los elementos DIRX6, DIRY6 y GENE2 de las tablas (4.2, 4.3 y 4.4) respectivamente, los cuales son factible de aparecer en una malla; cometen errores promedios menores al diez por ciento, pero errores máximos bastante elevados, estos pueden acumularse y aumentarse en el ensamblaje de la matriz de rigidez global, heredarse a los desplazamientos y a su vez a las tensiones, podríamos obtener un error en las tensiones de un orden importante, que genere una conclusión e interpretación errada acerca del comportamiento mecánico del medio continuo que ha sido modelado.

## 4.2. Eficiencia de la rutina analítica

La medición del tiempo de ejecución computacional de un programa nos permite mejorar y comparar algoritmos y rutinas con el fin de optimizar los cálculos y obtener un programa más eficiente. Esta herramienta nos permite medir la eficiencia de forma empírica, y por su sencillez es muy utilizada.

En este estudio sólo se realizó la comparación entre los tiempos de ejecución de las diferentes rutinas, lo cual nos da una idea de cual es más eficiente en términos de tiempo. Un estudio más riguroso de la complejidad de los algoritmos a través del denominado enfoque teórico nos proporcionaría cual utiliza menos recursos de espacio/tiempo, y por lo tanto mas eficiente.

En este caso la comparación de tiempo permitió conocer que tan eficiente resulta ser la rutina de integración analítica, realizada y estudiada en este trabajo, con respecto a la rutina de integración numérica y la semi-analítica..

### 4.2.1. Características que hacen posible la comparación

Los tiempos de ejecución de cada rutina que se presentan en las tablas (4.5 y 4.6) fueron calculados en el mismo computador, el cual tiene las siguientes características; *Intel Pentium 4, CPU 2.26 GHz, 512 MB de RAM*. Estas rutinas se encuentran escritas en el mismo lenguaje y están dentro del mismo programa (*Analítico-4n*), por lo tanto fueron compiladas en las mismas condiciones.

Es lógico pensar que durante el tiempo de ejecución, el computador pueda realizar distintos procesos y generar demoras dentro de alguna de las rutinas. Para tomar en cuenta esta posibilidad se tomó como duración el tiempo promedio de varias ejecuciones.

Para todos los tipos de elementos que se puedan presentar, la rutina numérica y la semi-analítica realizan la misma ejecución del código, por lo tanto, los tiempos de ejecución en estas rutinas son los mismos para cualquiera de los casos.

#### 4.2.2. Relación de tiempos de ejecución computacional

Para tener una medida clara de que tan eficiente resulta la rutina analítica, se definió la relación entre los tiempos ( $R$ ) de la siguiente manera:

$$R_{N-A} = \frac{N}{A} \quad \text{y} \quad R_{SA-A} = \frac{SA}{A} \quad (4.3)$$

Donde  $N$ ,  $SA$  y  $A$  son los tiempos ejecución en segundos de las rutinas numérica clásica, numérica semi-analítica y analítica. Si las relaciones ( $R_{N-A}$ ) y ( $R_{SA-A}$ ) son mayores de uno, indican cuantas veces más rápida fue la rutina analítica con respecto a la numérica y a la semi-analítica, respectivamente.

#### 4.2.3. Porcentaje de tiempo optimizado

De igual forma que la relación de tiempo, el porcentaje de tiempo optimizado ( $\%T_{opt}$ ) es una manera de cuantificar la eficiencia, y se define como el porcentaje que representa la diferencia entre los tiempos de ejecución de dos rutinas con respecto al tiempo de una de ellas, para cada caso el porcentaje de tiempo optimizado se representa así:

$$\%T_{opt} = \frac{N - A}{N} \times 100 \quad \text{y} \quad \%T_{opt} = \frac{SA - A}{SA} \times 100 \quad (4.4)$$

Donde  $N$ ,  $SA$  y  $A$  nuevamente son los tiempos de cada rutina. Este porcentaje no puede pasar de cien por ciento ya que esto implicaría que el tiempo ( $A$ ) sea cero, por lo tanto todos los valores entre cero y cien por ciento implican ganancia y valores negativos implican pérdida en tiempo de la rutina analítica frente a las demás.

**4.2.4. Resultados obtenidos**

Para que la magnitud de los tiempos fuera cuantificable, fue necesario establecer un ciclo de repeticiones dentro de cada rutina, de forma que se registrara el tiempo en la entrada y en la salida de cada rutina luego, por lo que la duración de la ejecución de cada rutina se define como el tiempo registrado en la salida menos el de la entrada. Para los resultados de las tablas (4.5 y 4.6) se utilizó 100 mil repeticiones en cada rutina.

**4.2.4.1. La rutina analítica contra la numérica**

**Tabla 4.5** Comparación de tiempos de ejecución computacional entre las rutinas numérica y analítica.

CASO	Descripción	Tiempo de ejecución (seg)		R <sub>N-A</sub>	% Topt. (Ganancia)
		Numérica (N)	Analítica (A)		
<b>I.a</b>	Cuadrado paralelo a x, y	4,550	0,158	<b>28,80</b>	<b>96,53</b>
<b>I</b>	$AJ=0, BJ=0$		0,25	<b>18,20</b>	<b>94,51</b>
<b>II</b>	$AJ=0, BJ \neq 0$		0,451	<b>10,09</b>	<b>90,09</b>
<b>III</b>	$A \neq 0, BJ=0$		0,429	<b>10,61</b>	<b>90,57</b>
<b>IV</b>	$AJ \neq 0, BJ \neq 0$		0,875	<b>5,20</b>	<b>80,77</b>

**4.2.4.2. La rutina analítica contra la semi-analítica**

**Tabla 4.6** Comparación de tiempos de ejecución computacional entre las rutinas semi-analítica y analítica.

CASO	Descripción	Tiempo de ejecución (seg)		R <sub>SA-A</sub>	%Topt. (Ganancia)
		Semi-analítica (SA)	SA A		
<b>I.a</b>	Cuadrado paralelo a x, y	1,269	0,158	<b>8,03</b>	<b>87,55</b>
<b>I</b>	$AJ=0, BJ=0$		0,25	<b>5,08</b>	<b>80,30</b>
<b>II</b>	$AJ=0, BJ \neq 0$		0,451	<b>2,81</b>	<b>64,46</b>
<b>III</b>	$A \neq 0, BJ=0$		0,429	<b>2,96</b>	<b>66,19</b>
<b>IV</b>	$AJ \neq 0, BJ \neq 0$		0,875	<b>1,45</b>	<b>31,05</b>

#### **4.2.5. Análisis de resultados**

De los resultados presentados en las tablas (4.5 y 4.6), se evidencia la mayor eficiencia en términos de tiempo que posee la rutina analítica desarrollada en este trabajo, no sólo frente a la rutina numérica utilizada clásicamente sino también frente a la rutina semi-analítica desarrollada por Griffiths, la cual es considerada muy eficiente.

Se espera que debido a las discriminaciones realizadas en la rutina analítica exista un importante ahorro en tiempo de ejecución computacional durante la solución de problemas de elasticidad plana mediante un programa de elementos finitos. Este ahorro dependerá de la cantidad de elementos de cada caso que posea la malla de elementos finitos.

Realmente no es usual encontrar elementos del caso I.a, pero en los problemas donde estos se encuentren será significativa la disminución del tiempo, debido a la mayor ganancia de tiempo que estos proporcionan.

Analizando el caso mas desfavorable, donde todos los elementos de la malla sean del caso IV, obtendríamos que la relación de tiempos siempre será mayor que uno, ya que todas las demás operaciones dentro un programa de elementos finitos serán idénticas, (entrada, ensamblaje, solución del sistema de ecuaciones, cálculo de tensiones y salida), a excepción del cálculo de la matriz de rigidez. El valor de la relación de tiempo para todo el proceso dependerá del número de elementos que tenga la malla, por estar la relación asociada al porcentaje que represente el tiempo de cálculo de las matrices de rigidez con respecto al tiempo de la ejecución total.

### 4.3. Tolerancia de la rutina analítica

Se pudo notar en la ejecución del programa y en la investigación de Videla et al (2005), que para entrar en los diferentes casos discriminados de la rutina analítica era necesario cierta exactitud en las coordenadas nodales, para así lograr que las constantes del jacobiano  $AJ$  y/o  $BJ$  fuesen nulas, requisito necesario para la selección de los casos.

En problemas cercanos a la frontera entre un caso y otro, se encontró una gran diferencia entre los resultados de la rutina analítica y la semi-analítica.

#### 4.3.1. Ejemplo # 1

En la figura (4.1), se presenta un elemento con una muy pequeña distorsión, el cual ha sido parametrizado de tal forma que se mantenga la geometría para diferentes magnitudes de los lados, representados por el parámetro ( $a$ ).

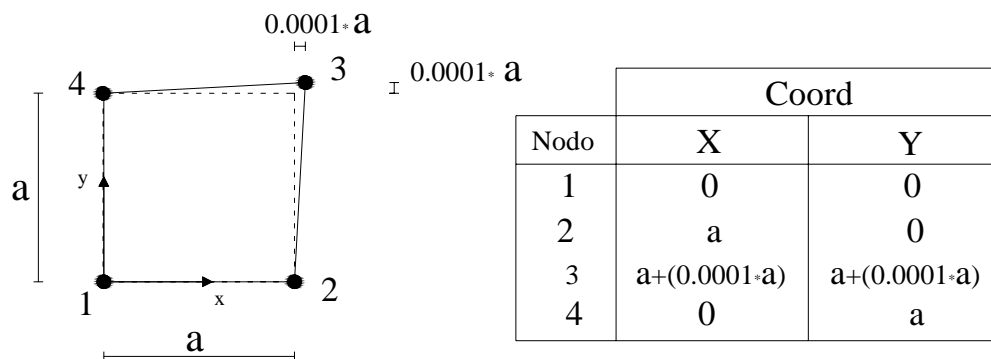


Figura 4. 1 Representación parametrizada de un elemento con pequeña distorsión.

En la tabla (4.7) se presentan los valores de las constantes del jacobiano  $AJ$ ,  $BJ$ ,  $CJ$  y las constantes  $CttE1$  y  $CttE4$  que se encuentra en el denominador de las expresiones para el cálculo de la matriz de rigidez del caso I.a y IV respectivamente. Además se presenta, para distintas magnitudes del parámetro  $a$ , el porcentaje de diferencia entre las rutinas calculado para el caso IV y para el caso I.a.



**Tabla 4.7** Ejemplo #1 - Magnitud de las constantes (*AJ* y *BJ*), comparación del porcentaje de diferencia entre los caso IV y I.a, para diferentes valores del parámetro (*a*).

<b>a</b>	<b>Normal (Caso IV)</b>				<b>Obligando al (Caso I.a)</b>			
	<i>AJ</i> y <i>BJ</i>	<i>CJ</i>	<i>CttE4</i>	% Dif. promedio	<i>AJ</i> y <i>BJ</i>	<i>CJ</i>	<i>CttEI</i>	% Dif. promedio
0,1	1,25E-07	2,50E-03	1,465E-39	<b>104,33</b>	0	2,50E-03	1,20E-01	<b>0,01</b>
1	1,25E-05	2,50E-01	1,465E-27	<b>161,27</b>	0	2,50E-01	1,20E+01	<b>0,01</b>
10	1,25E-03	2,50E+01	1,465E-15	<b>139,05</b>	0	2,50E+01	1,20E+03	<b>0,01</b>
100	1,25E-01	2,50E+03	1,465E-03	<b>100,47</b>	0	2,50E+03	1,20E+05	<b>0,01</b>
1000	1,25E+01	2,50E+05	1,465E+09	<b>100,04</b>	0	2,50E+05	1,20E+07	<b>0,01</b>
10000	1,25E+03	2,50E+07	1,465E+21	<b>100,06</b>	0	2,50E+07	1,20E+09	<b>0,01</b>
100000	1,25E+05	2,50E+09	1,465E+33	<b>103,98</b>	0	2,50E+09	1,20E+11	<b>0,01</b>

La alta diferencia obtenida para el caso IV, se debe a errores en la integración analítica ya que el elemento de la figura (4.1) es prácticamente cuadrado y la integración numérica es muy precisa al calcular estos elementos.

Con estos resultados se concluye que en este caso cercano a la frontera es necesario obligar que las constantes *AJ* y *BJ* sean nulas, y lograr que se calcule la matriz de rigidez con el caso I.a, disminuyendo así el porcentaje de diferencia. A demás se comprueba que las constantes *AJ* y *BJ* pueden tomar valores numéricamente altos, dependiendo de la magnitud de los lados del elemento, y seguir siendo necesario que las constantes sean nulas para poder obtener buenos resultados.

#### 4.3.2. Nulidad de las constantes

Es necesario definir un valor mínimo tolerable (tolerancia) de las constantes *AJ* y *BJ*, que permita hacer la discriminación de los casos para estos problemas límites y lograr generalizar la rutina analítica. Para que la tolerancia sea consistente, en principio, puede ser función del tamaño de los lados, y lograr que los valores de las constantes que estén por debajo de la tolerancia se anulen sin importar su magnitud. Se establece entonces que para

estos casos las constantes presentan un valor nulo relativo al mínimo tolerable. Expresando este mínimo como ( $TOL_{min}$ ), se tiene las siguientes relaciones lógicas:

$$\begin{aligned} \text{Si } (|AJ| < TOL_{min}) \text{ entonces } AJ = 0 \\ \text{Si } (|BJ| < TOL_{min}) \text{ entonces } BJ = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por un valor nulo relativo de las constantes se puede entender en principio que la magnitud del valor es relativamente pequeña en comparación a las demás y por lo tanto disminuye su influencia en el cálculo de la matriz de rigidez, logrando que estos elementos estén mejor representados por los casos donde dicha constante fue contemplada nula. En el apéndice C, se presenta el sustento matemático de cuando las constantes  $AJ$  y  $BJ$  pueden ser nulas o nulas relativamente.

#### 4.3.3. Ejemplo # 2

En la Figura (4.2) se presenta un elemento que tiene dos lados de longitud fija y se varían los otros lados a través de los parámetros  $ax$  y  $ay$ . En la tabla (4.8) se presentan los resultados de las constantes y el porcentaje de diferencia del cálculo con el caso IV, para variaciones de  $ax$  y  $ay$ .

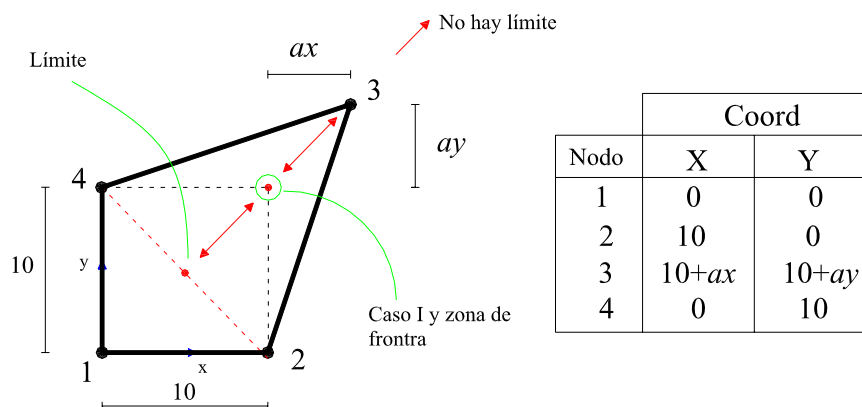


Figura 4. 2 Representación gráfica del elemento distorsionado y de los parámetros  $ax$  y  $ay$ .

Tabla 4. 8 Ejemplo #2 – Constantes y porcentaje de diferencia para distintos valores de  $ax$  y  $ay$ .

		$(ax, ay)$	CASO	AJ	BJ	CJ	CttEi	% Dif. promedio	% Dif. máx	
Alejamiento (Dif. Por error de integración numérica)	ay = 0	ax=ay= 0	Ia	0	0	25	1,2000E+03	0,00	0,00	
		ax=ay= 1	IV	1,25	1,25	27,5	1,4648E+03	0,03	0,18	
		ax=ay= 10		12,5	12,5	50	1,4648E+09	1,86	15,82	
		ax=ay= 100		125	125	275	1,4648E+15	4,37	11,26	
		ax=ay= 1000		1250	1250	2525	1,4648E+21	5,37	14,00	
		ax=ay= 10000		12500	12500	25025	1,4648E+27	5,50	14,33	
	ax= 1	II	0	1,25	26,25	3,7500E+02	0,02	0,13		
	ax= 10		0	12,5	37,5	3,7500E+05	1,21	11,71		
	ax= 100		0	125	150	3,7500E+08	10,75	34,61		
	ax= 1000		0	1250	1275	3,7500E+11	26,54	65,41		
	ax= 10000		0	12500	12525	3,7500E+14	35,90	79,82		
	ax = 0	ay= 1	III	1,25	0	26,25	3,7500E+02	0,02	0,13	
		ay= 10		12,5	0	37,5	3,7500E+05	1,21	11,71	
		ay= 100		125	0	150	3,7500E+08	10,75	34,61	
		ay= 1000		1250	0	1275	3,7500E+11	26,56	65,41	
		ay= 10000		12500	0	12525	3,7500E+14	35,90	79,82	
	Acercamiento (Dif. Por error de precisión de la rutina analítica)	+	ax=ay= 0,5	IV	0,625	0,625	26,2500	2,2888E+01	0,01	0,04
			<b>ax=ay= 0,1</b>		<b>0,125</b>	<b>0,125</b>	<b>25,2500</b>	<b>1,4648E-03</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>
<b>ax=ay= 0,05</b>			<b>6,25E-02</b>		<b>6,25E-02</b>	<b>25,0125</b>	<b>2,2888E-05</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	
<b>ax=ay= 0,03</b>			<b>3,75E-02</b>		<b>3,75E-02</b>	<b>25,0750</b>	<b>1,0679E-06</b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	
<b>ax=ay= 0,01</b>			<b>1,25E-02</b>		<b>1,25E-02</b>	<b>25,0250</b>	<b>1,4648E-09</b>	<b>0,41</b>	<b>2,04</b>	
<b>ax=ay= 0,008</b>			1,00E-02		1,00E-02	25,2000	3,8400E-10	<b>0,60</b>	<b>2,36</b>	
ax=ay= 0,007			8,75E-03		8,75E-03	25,0175	1,7234E-10	1,24	10,13	
ax=ay= 0,006			7,50E-03		7,50E-03	25,015	6,8344E-11	1,07	4,32	
ax=ay= 0,005			6,25E-03		6,25E-03	25,0125	2,2888E-11	4,51	14,83	
ax=ay=0,003			3,75E-03		3,75E-03	25,0075	1,0679E-12	<b>89,72</b>	<b>781,37</b>	
ax=ay=0,0		0	0	25	0	$\infty$	$\infty$			
-		ax=ay= - 0,003	- 3,75E-03	- 3,75E-03	24,9925	1,0679E-12	<b>227,25</b>	*		
		<b>ax=ay= - 0,008</b>	- 1,00E-02	- 1,00E-02	24,9800	3,8400E-10	<b>0,48</b>	<b>2,03</b>		
		<b>ax=ay= - 0,05</b>	<b>- 6,25E-02</b>	<b>- 6,25E-02</b>	<b>24,8750</b>	<b>1,4648E-09</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>		
		ax= 0,5	II y análogo al III	0	0,625	25,6250	4,6875E+01	0,01	0,03	
<b>ax= 0,1</b>		0		<b>0,125</b>	<b>25,1250</b>	<b>3,7500E-01</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>		
<b>ax= 0,05</b>		0		<b>6,25E-02</b>	<b>25,0625</b>	<b>4,6875E-02</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>		
<b>ax= 0,03</b>		0		<b>3,75E-02</b>	<b>25,0375</b>	<b>1,0125E-02</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>		
<b>ax= 0,01</b>	0	<b>1,25E-02</b>		<b>25,0125</b>	<b>3,7500E-04</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>			
ax= 0,008	0	1,00E-02		25,0100	1,9200E-04	0,00	0,00			
ax= 0,005	0	6,25E-03		25,00625	4,6875E-05	0,00	0,01			
ax= 0,001	0	1,25E-03		25,00125	3,7500E-07	0,06	0,68			
ax= 0,0008	0	1,00E-03		25,00100	1,9200E-07	0,08	0,67			
<b>ax= 0,0007</b>	0	8,75E-04		25,000875	1,2863E-07	<b>0,21</b>	<b>2,54</b>			
ax= 0,0005	0	6,25E-04		25,00063	4,6875E-08	0,59	11,62			
ax= 0,0001	0	1,25E-04		25,00013	3,7500E-10	<b>28,93</b>	<b>192,79</b>			

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

Para los casos analizados en la tabla (4.8) se encontró que no se producían diferencias entre las dos rutinas dentro de un rango correspondientes a valores de  $ax$  y/o  $ay$  entre  $(\pm 0.1)$  y  $(\pm 0.01)$  para el tamaño de los lados fijos de 10 unidades. Para generalizar y a manera de independizar los rangos del valor de los lados fijos, se expresa los intervalos de valores de  $ax$  y/o  $ay$  de forma porcentual, entre  $(-1\%, -0.1\%)$  y  $(1\%, 0.1\%)$  del tamaño de los lados fijos.

De igual forma se ubicó una la zona o frontera dentro de la cual comenzó a percibirse los errores de la integración analítica, esta se encuentra dentro de los límites de los rangos anteriores, es decir, entre  $(-0.1\%, 0.1\%)$  del tamaño de los lados fijos. Para este ejemplo se observó que dentro de esta zona los valores de la constante  $CJ$ , tienden hacia el valor de  $CJ$  del elemento perfectamente cuadrado.

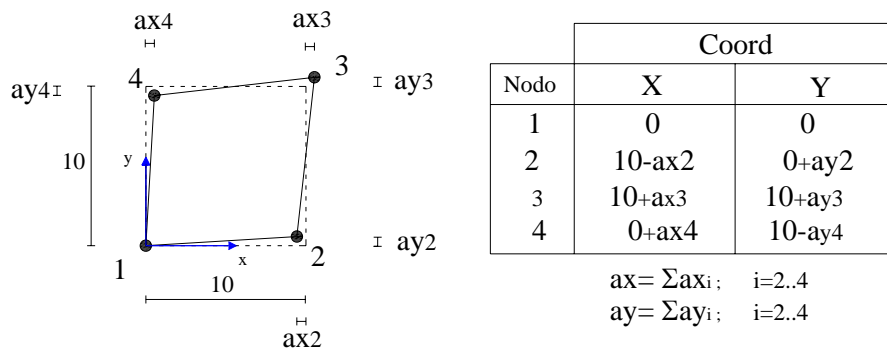
$$\lim_{ax \rightarrow 0} (\lim_{ay \rightarrow 0} [CJ_{casoIV}]) = CJ_{casoI} = 25 \tag{4.6}$$

Y los valores de las constantes  $AJ$  y  $BJ$  tienden a ser cada vez más pequeño:

$$\lim_{ay \rightarrow 0} AJ = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{ax \rightarrow 0} BJ = 0 \tag{4.7}$$

#### 4.3.4. Ejemplo # 3

En la figura (4.3), se muestra un caso más general y desfavorable, donde los nodos 2, 3 y 4 presentan alguna distorsión.



**Figura 4.3** Caso más general de distorsión cerca de la frontera.

Para tener consistencia con el ejemplo anterior se establece que la suma de todas las pequeñas distorsiones ( $ax_i, ay_i$  para  $i= 2...4$ ) debe ser igual a las distorsiones  $ax$  y  $ay$  del ejemplo anterior.

**Tabla 4.9** Ejemplo #3 – Porcentaje de diferencia para distintos valores de  $ax_i$  y  $ay_i$ .

$ax = ay$	Características de $ax_i, ay_i$	CASO	$AJ$	$BJ$	$CJ$	$CttE_i$	% Dif. promedio	% Dif máx.
0,10	Simétrico $ax_i=ay_i= 0,333$	IV	3,889E-01	3,889E-01	2,4111E+01	1,3283E+00	<b>0,00</b>	<b>0,02</b>
	Asimétricos iguales $ax_2=ax_3=ay_2=ay_3=0,3$ y $ax_4=ay_4=0,4$	IV	4,775E-01	2,200E-01	2,3948E+01	4,4516E-01	<b>0,00</b>	<b>0,02</b>
0,05	Simétrico $ax_i=ay_i= 0,16667$	IV	2,076E-02	2,076E-02	2,4958E+01	3,0778E-07	<b>0,03</b>	<b>0,17</b>
	Asimétricos iguales $ax_2=ax_3=ay_2=ay_3=0,015$ y $ax_4=ay_4=0,2$	IV	2,494E-02	1,243E-02	2,4950E+01	1,1432E-08	<b>0,08</b>	<b>0,47</b>
0,03	Simétrico $ax_i=ay_i= 0,01$	IV	1,247E-02	1,247E-02	2,4975E+01	1,4474E-09	<b>0,37</b>	<b>1,96</b>
	Asimétricos iguales $ax_2=ax_3=ay_2=ay_3=0,011$ y $ax_4=ay_4=0,008$	IV	9,970E-03	1,748E-02	2,4980E+01	2,0317E-09	<b>0,22</b>	<b>1,19</b>
0,01	Simétrico $ax_i=ay_i= 0,00333$	IV	4,163E-03	4,163E-03	2,4992E+01	2,0002E-12	<b>39,59</b>	<b>567,33</b>
	Asimétricos iguales $ax_2=ax_3=ay_2=ay_3=0,003$ y $ax_4=ay_4=0,004$	IV	4,998E-03	2,497E-03	2,4990E+01	7,4629E-13	<b>123,24</b>	<b>&gt;1000</b>

En la tabla (4.9), se nota que al igual que en el ejemplo #2, los valores de  $CJ$  oscilan cerca del valor de la constante para el elemento perfectamente cuadrado ( $CJ= 25$ ), mientras que  $AJ$  y  $BJ$  disminuyen su valor a medida que los valores de dispersión son mas pequeños.

#### 4.3.5. Razón del error

La razón del error se encuentra, al analizar la expresión del cálculo de la matriz de rigidez, esta se expresa de la siguiente manera:

$$K_{ij} = \frac{Num_k(i, j)}{CttE_k} \quad \text{para } i=j=1..8 \text{ y } k=1..4 \text{ según el caso.} \quad (4.8)$$

Donde:

**Kij**: indica el término  $(i,j)$  de de la matriz de rigidez.

$Num(i,j)$ : es la expresión del numerador que depende de las diferencias de coordenadas, de los valores de  $AJ$ ,  $BJ$  y  $CJ$ , y de las propiedades mecánicas, varía según el caso (I, II, II y IV).

$CttEk$ : son constantes que depende de los valores de  $AJ$ ,  $BJ$  y  $CJ$ , y dependiendo del caso se representan así:

$$CttE1 = CttDen \cdot CJ / 4 \quad (4.9)$$

$$CttE2 = CttDen \cdot BJ^3 \quad (4.10)$$

$$CttE3 = CttDen \cdot AJ^3 \quad (4.11)$$

$$CttE4 = CttDen \cdot 2 \cdot AJ^3 \cdot BJ^3 \quad (4.12)$$

Es importante precisar que en los problemas cercanos a la frontera la matriz de rigidez toma ciertos valores que pueden cambiar según el menor o mayor grado de distorsión, pero la magnitud de estos siempre debe mantenerse por ser elementos muy parecidos. Para que esto ocurra debe mantenerse la proporcionalidad en las magnitudes de  $Num(i,j)$  y  $CttEk$ .

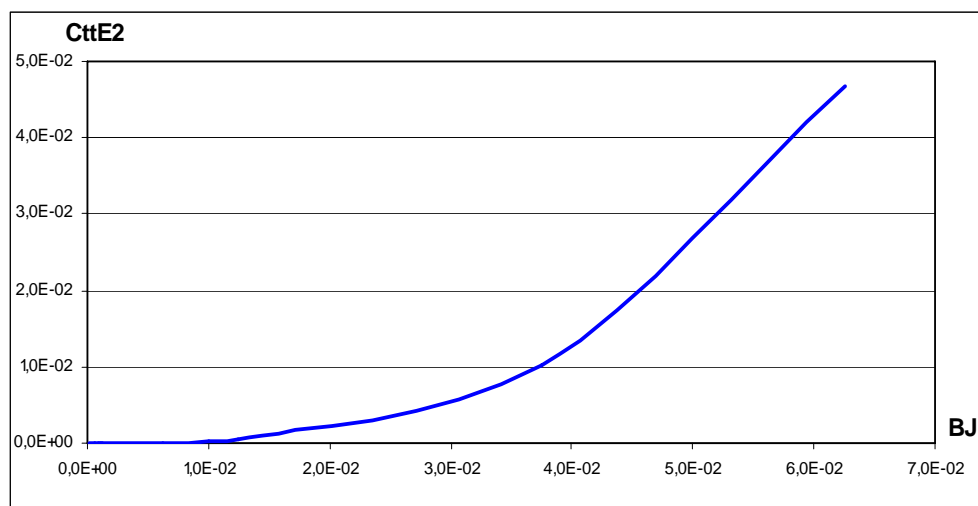


Figura 4. 4 Gráfica de valores de  $BJ$  contra  $CttE2$  del ejemplo #2.

En la fig. (4.4) vemos que para valores lejanos al cero existe cierta proporcionalidad, pero por debajo de cierto valor de  $BJ$  la curva se acelera y los valores de  $CttE2$  tienden con más rapidez a cero, logrando la pérdida de la proporcionalidad. De tal manera que si

tomamos el límite de  $K_{ij}$ , calculado por las expresiones del caso II, cuando  $BJ$  tiende a cero; el valor de  $K_{ij}$  tiende a infinito. Generalizando para los demás casos tenemos:

$$\lim_{AJ \rightarrow 0} (\lim_{BJ \rightarrow 0} [CttE_k]) = 0 \quad \rightarrow \quad \lim_{AJ \rightarrow 0} (\lim_{BJ \rightarrow 0} \left[ \frac{Num_k(i, j)}{CttE_k} \right]) = \infty \quad (4.13)$$

En conclusión existe un valor de  $AJ$  y/o  $BJ$  a partir del cual se comienza a perder la proporcionalidad y por lo tanto aumenta el porcentaje de diferencia entre las rutinas.

#### 4.3.6. Valor de la tolerancia

De los ejemplos dos y tres se logró detectar el rango donde se producen las diferencias producto de los errores de la rutina analítica, el problema era como anular las constantes dentro de este rango para obtener buenos resultados; entonces se determinó la relación entre las constantes  $AJ$  y/o  $BJ$ , con la constante  $CJ$ , ya que si existía un valor a partir del cual  $AJ$  y  $BJ$  comenzaban a ser nulas relativamente, a estos le correspondería un valor de  $CJ$ . En las tablas (4.10), (4.11) y (4.12), se muestran las relaciones entre las constantes.

**Tabla 4. 10** Relación entre  $AJ$  y  $BJ$  con  $CJ$  para el ejemplo # 2 para  $ax=ay$ .

$ax = ay$	$AJ$ y $BJ$	$CJ$	$AJ/CJ = BJ/CJ$	% Dif. promedio
0,5	0,625	26,25	0,02381	0,01
<b>0,1</b>	<b>0,125</b>	<b>25,25</b>	<b>0,00495</b>	<b>0,00</b>
0,05	6,25E-02	25,125	0,00249	<b>0,00</b>
0,03	3,75E-02	25,075	0,00150	<b>0,00</b>
<b>0,01</b>	<b>1,25E-02</b>	<b>25,025</b>	<b>0,00050</b>	<b>0,41</b>
<b>0,008</b>	<b>1,00E-02</b>	<b>25,2</b>	0,00040	<b>0,60</b>
0,007	8,75E-03	25,0175	0,00035	1,24
0,006	7,50E-03	25,015	0,00030	1,07
0,005	6,25E-03	25,0125	0,00025	4,51
0,003	3,75E-03	25,0075	0,00015	<b>89,72</b>
-0,003	-3,75E-03	24,9925	0,00015	<b>227,25</b>
-0,001	-1,00E-02	24,98	0,00040	<b>0,48</b>
<b>-0,05</b>	<b>-6,25E-02</b>	<b>24,875</b>	<b>0,00251</b>	<b>0,00</b>

**Tabla 4. 11** Relación entre *BJ* y *CJ* para el ejemplo # 2 para (*ay* = 0).

<i>ax</i>	<i>BJ</i>	<i>CJ</i>	<i>BJ/CJ</i>	% Dif. promedio
0,5	0,625	25,625	0,02439	0,01
<b>0,1</b>	<b>0,125</b>	<b>25,125</b>	<b>0,00498</b>	<b>0,00</b>
0,05	6,25E-02	25,0625	0,00249	0,00
0,03	3,75E-02	25,0375	0,00150	0,00
<b>0,01</b>	<b>1,25E-02</b>	<b>25,0125</b>	<b>0,00050</b>	<b>0,00</b>
0,008	<b>1,00E-02</b>	<b>25,01</b>	0,00040	0,00
0,005	6,25E-03	25,00625	0,00025	0,00
0,001	1,25E-03	25,00125	0,00005	0,06
0,0008	1,00E-03	25,001	0,00004	0,08
0,0007	8,75E-04	25,000875	0,00003	<b>0,21</b>
0,0005	6,25E-04	25,00063	0,00002	<b>0,59</b>
0,0001	1,25E-04	25,00013	0,00000	<b>28,93</b>

**Tabla 4. 12** Relación entre *AJ*, y *BJ* con *CJ* para el ejemplo # 3 para *ax=ay*.

<i>ax=ay</i>	<i>AJ</i>	<i>BJ</i>	<i>CJ</i>	<i>AJ/CJ</i>	<i>BJ/CJ</i>	% Dif. promedio
0,1	3,89E-01	3,89E-01	2,41E+01	0,01613	0,01613	0,00
0,05	2,08E-02	2,08E-02	2,50E+01	0,00083	0,00083	0,03
<b>0,03</b>	<b>1,25E-02</b>	<b>1,25E-02</b>	<b>2,50E+01</b>	<b>0,00050</b>	<b>0,00050</b>	<b>0,37</b>
0,01	4,16E-03	4,16E-03	2,50E+01	0,00017	0,00017	<b>39,59</b>

Finalmente se pudo notar que existía un valor mínimo en la relación (*AJ/CJ*) o (*BJ/CJ*), a partir del cual los errores de la rutina analítica no eran tolerables, y que a demás este valor coincidía para todos los casos estudiados en (0.0005).

También se determinó el valor máximo de esta relación en (0.005), a partir del cual comenzaban a presentarse los errores de precisión de las rutinas por integración numérica.

Se realizaron múltiples pruebas con el programa, para los valores extremo tolerancia (0.0005, 0.005), y se observó que la diferencias entre las rutinas obligando al cálculo con otro caso, estaba dentro un rango aceptable y variaba poco, por lo que se decidió establecer el valor mínimo aceptable de las constantes *AJ* y/o *BJ* en 0.25% del valor de la constante *CJ*. Quedando resuelto el problema.



Las relaciones lógicas que asigna la nulidad de las constantes se expresan:

$$\begin{array}{l} \mathbf{TOLmin = 0,0025 * CJ} \\ \mathbf{Si ( |AJ| < TOLmin ) entonces AJ= 0} \\ \mathbf{Si ( |BJ| < TOLmin ) entonces BJ= 0} \end{array} \quad (4.14)$$

Es importante resaltar que con esto se logra generalidad en la rutina analítica, con lo cual se considera apta para ser utilizada en un programa de elementos finitos. Resaltando la eficiencia en tiempo que esta rutina proporcionaría al programa.

## CAPÍTULO V

# Aplicaciones y comparación de resultados

En este capítulo se compararan los resultados obtenidos de cinco ejemplos mediante un programa para análisis estructural de medios continuos planos por el MEF desarrollado por Griffiths, llamado *P52* el cual se puede encontrar en ([www.mines.edu/vgriffiths/main.html](http://www.mines.edu/vgriffiths/main.html)). A este programa se le hicieron algunas modificaciones con el fin de incorporar y adaptar las rutinas de cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos por integración analítica y la semi-analítica.

Se presenta en los tres primeros ejemplos una comparación de los resultados obtenidos en problemas simples para comprobar el funcionamiento de ambas rutinas, luego se presentan dos problemas mas complejos, para analizar las diferencias entre las soluciones en problemas con una discretización mas fina y heterogénea, y a demás, verificar el comportamiento de la tolerancia de la rutina analítica en la discriminación de los casos.

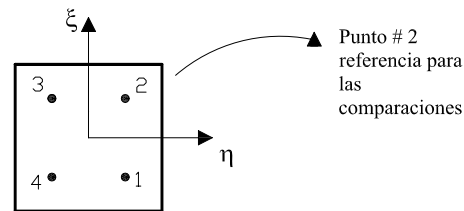
La comparación consiste en medir las diferencias entre los resultados, en este caso los desplazamientos nodales y las tensiones en los puntos de gauss, para esto se realizo un programa con el fin de calcular el porcentaje que representa la diferencia entre las variables a medir con respecto a la variable analítica, ya que esta integración es exacta para todos los casos.

Éste porcentaje se representan de la siguiente manera:

$$\% difV = \frac{|Va - Vsa| * 100}{|Va|} \quad (5.1)$$

Donde el parámetro (V), indica la variable a medir, y en este caso pueden ser los desplazamientos nodales (*desp X*, *desp Y*), o tensiones ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ ) en los puntos de Gauss. Luego se busca la diferencia porcentual promedio y la máxima y con estos valores se cuantifica las diferencias entre los resultados obtenidos por ambas rutinas de cálculo.

Con respecto a las tensiones, el programa P52 puede calcularlas en cuatro puntos de gauss por cada elemento, son los que se muestran en la figura (5.1).

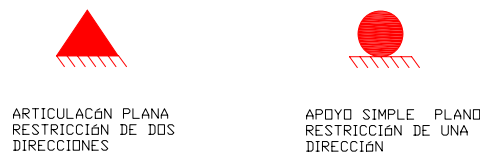


**Figura 5. 1** Puntos de gauss para el cálculo de las tensiones.

La comparación de tensiones que se realiza en algunos ejemplos, están referidas a tensiones en el punto del primer cuadrante (punto #2), el cual esta ubicado en la parte superior derecha del elemento de la figura (5.1).

En los ejemplos realizados se representan las medidas en unidades de longitud y las cargas en unidades de fuerza, por lo que los resultados estarán en las mismas unidades.

Finalmente se presenta en la figura (5.2), los vínculos utilizados para representar las restricciones de desplazamiento en los modelos realizados.



**Figura 5. 2** Restricciones de desplazamiento utilizadas en los modelos.

## 5.1. Ejemplo comparativo # 1 (prueba general, todos los tipos de elementos)

### 5.1.1. Planteamiento

En la figura (5.3) se presenta una placa cuadrada con dos bordes restringidos de desplazamiento y traccionada diagonalmente por equina opuesta. Con este ejemplo se pretende verificar el comportamiento de las rutinas comparando el resultado de la rutina analíticas con el resultado de la rutina semi-analítica. Con la finalidad de utilizar la totalidad de la rutina analítica se realizó la malla de forma tal tuviera al menos un elemento de cada caso.

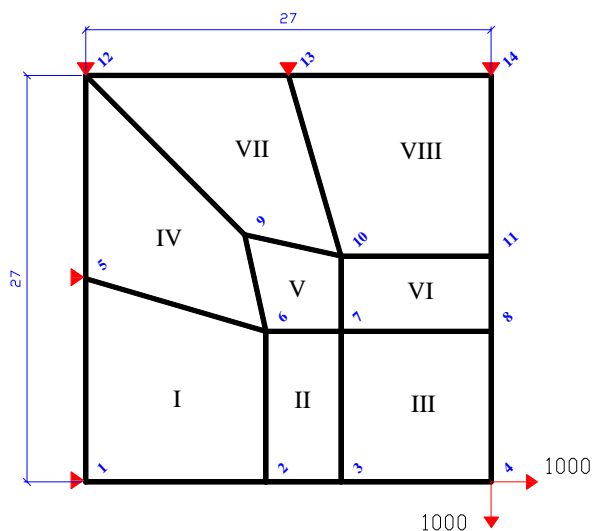


Figura 5. 3 Ejemplo #1. Placa a tracción diagonal con los diferentes tipos de elementos.

### 5.1.2. Características del problema y propiedades de los materiales

Tabla 5. 1 Ejemplo #1. Características del problema.

Características del modelo				Propiedades del material	
N° nodos	N° de elemen.	Nodos restring.	Nodos cargados	$E$	$\nu$
14	8	5	1	1000	0,35

Tabla 5. 2 Ejemplo #1. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica.

TIPO I.a	TIPO I	TIPO II	TIPO III	TIPO IV
1	2	1	1	3

5.1.3. Comparación de resultados para tensión plana

A continuación se presentan las tablas de resultado para el caso de tensión plana. Comenzando con la tabla (5.3) donde se presentan los resultados de los desplazamientos nodales de las rutinas y sus diferencias porcentuales.

Tabla 5.3 Ejemplo #1. Desplazamientos y diferencias para tensión plana.

Nodos	Numérica y semi-analítica		Analítica		% dif desp X	% dif desp Y
	desp X sa	desp Y sa	desp X a	desp Y a		
2	4,20E-01	-2,51E-01	4,20E-01	-2,51E-01	0,000	0,000
3	7,34E-01	-4,52E-01	7,34E-01	-4,51E-01	0,027	0,044
4	2,19E+00	-2,19E+00	2,19E+00	-2,19E+00	0,000	0,000
6	4,62E-01	-3,68E-01	4,61E-01	-3,68E-01	0,130	0,000
7	7,23E-01	-7,23E-01	7,22E-01	-7,22E-01	0,042	0,042
8	4,52E-01	-7,34E-01	4,51E-01	-7,34E-01	0,044	0,027
9	2,64E-01	-2,64E-01	2,65E-01	-2,65E-01	<b>0,302</b>	<b>0,264</b>
10	3,68E-01	-4,62E-01	3,68E-01	-4,61E-01	0,027	0,130
11	2,51E-01	-4,20E-01	2,51E-01	-4,20E-01	0,040	0,000

La tabla (5.4) presenta los resultados de la comparación realizada entre las tensiones evaluadas en el segundo punto de Gauss, como se mencionó anteriormente.

Tabla 5.4 Ejemplo #1. Tensiones y diferencias en el pto. de gauss #2, para tensión plana.

Elemen.	Numérica y semi-analítica			Analítica			% dif $\sigma_x$	% dif $\sigma_y$	% dif $\tau_a$
	$\sigma_{xsa}$	$\sigma_{ysa}$	$\tau_{sa}$	$\sigma_{xa}$	$\sigma_{ya}$	$\tau_a$			
1	4,04E+01	5,58E+00	-1,02E+01	4,03E+01	5,56E+00	-1,02E+01	0,15	0,22	0,20
2	5,26E+01	-5,45E+00	-2,39E+01	5,26E+01	-5,42E+00	-2,39E+01	0,10	0,46	0,04
3	5,44E+01	1,29E+02	-6,50E+01	5,45E+01	1,29E+02	-6,50E+01	0,02	0,00	0,00
4	1,81E+01	1,38E+01	-1,40E+01	1,82E+01	1,38E+01	-1,40E+01	0,88	0,29	0,07
5	2,95E+01	5,16E+01	-3,35E+01	2,94E+01	5,16E+01	-3,34E+01	0,24	0,00	0,30
6	7,18E+00	6,32E+01	-1,61E+01	7,18E+00	6,31E+01	-1,61E+01	0,06	0,03	0,00
7	1,51E+01	4,01E+01	-1,17E+01	1,51E+01	4,00E+01	-1,17E+01	0,13	0,07	0,09
8	1,21E+01	4,00E+01	-8,29E+00	1,21E+01	4,00E+01	-8,30E+00	0,00	0,03	0,06

En la tabla (5.5) se observa la diferencia promedio y máxima para todos los valores.

Tabla 5.5 Ejemplo #1. Porcentajes de diferencias promedios y máximas para tensión plana.

	desp X	desp Y	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
% dif. Medio	0,044	0,036	0,153	0,154	0,122
% dif. Máx.	0,302	0,264	0,879	0,824	0,467

5.1.4. Comparación de resultados para deformación plana

De igual forma se presentan los resultado para el caso de deformación plana, en la tabla (5.6) se encuentran los desplazamientos, en la tabla (5.7) las tensiones, finalmente en la tabla (5.8) se encuentra las diferencias promedios y máximas para todos los valores de cada variable en estudio.

Tabla 5. 6 Ejemplo #1. Desplazamientos y diferencias para deformación plana.

Nodos	Numérica y semi-analítica		Analítica		% dif desp X	% dif desp Y
	desp X sa	desp Y sa	desp X a	desp Y a		
2	4,03E-01	-7,44E-02	4,03E-01	-7,47E-02	0,000	0,402
3	7,06E-01	-2,26E-01	7,06E-01	-2,26E-01	0,028	0,089
4	1,77E+00	-1,77E+00	1,77E+00	-1,77E+00	0,000	0,000
6	3,57E-01	-2,58E-01	3,56E-01	-2,58E-01	0,112	0,039
7	5,54E-01	-5,54E-01	5,54E-01	-5,54E-01	0,036	0,054
8	2,26E-01	-7,06E-01	2,26E-01	-7,06E-01	0,089	0,014
9	2,03E-01	-2,03E-01	2,03E-01	-2,03E-01	0,246	0,197
10	2,58E-01	-3,57E-01	2,58E-01	-3,56E-01	0,078	0,140
11	7,44E-02	-4,03E-01	7,47E-02	-4,03E-01	0,402	0,000

Tabla 5. 7 Ejemplo #1. Tensiones y diferencias en el pto. de gauss #2, para deformación plana.

Elemen.	Numérica y semi-analítica			Analítica			% dif $\sigma_x$	% dif $\sigma_y$	% dif $\tau_a$
	$\sigma_{xsa}$	$\sigma_{ysa}$	$\tau_{sa}$	$\sigma_{xa}$	$\sigma_{ya}$	$\tau_a$			
1	3,61E+01	4,12E+00	-9,17E+00	3,61E+01	4,11E+00	-9,19E+00	0,00	0,24	0,22
2	4,48E+01	-9,78E+00	-2,45E+01	4,48E+01	-9,74E+00	-2,45E+01	0,00	0,41	0,00
3	6,14E+01	1,21E+02	-6,29E+01	6,14E+01	1,21E+02	-6,29E+01	0,00	0,00	0,00
4	1,86E+01	1,35E+01	-1,15E+01	1,88E+01	1,36E+01	-1,15E+01	1,06	0,74	0,00
5	3,38E+01	5,26E+01	-2,76E+01	3,38E+01	5,26E+01	-2,75E+01	0,00	0,00	0,36
6	1,41E+01	7,15E+01	-1,60E+01	1,41E+01	7,15E+01	-1,60E+01	0,00	0,00	0,00
7	2,39E+01	4,34E+01	-8,47E+00	2,39E+01	4,34E+01	-8,47E+00	0,00	0,00	0,00
8	2,34E+01	4,99E+01	-3,85E+00	2,34E+01	4,99E+01	-3,86E+00	0,00	0,00	0,26

Tabla 5. 8 Ejemplo #1. Porcentajes de diferencias promedios y máximas para deformación plana.

	desp X	desp Y	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
% dif. Medio	0,071	0,067	0,205	0,206	0,163
% dif. Máx.	0,402	0,402	1,595	1,576	0,476

## 5.2. Ejemplo comparativo # 2 (tracción pura)

### 5.2.1. Planteamiento

En la figura (5.4) se muestra una placa bajo la hipótesis de tensión plana discretizada en ocho elementos y sometida a una fuerza de tracción, con la restricción mínima necesaria para que se produzcan las deformaciones transversales por la relación de Poisson. Este ejemplo fue extraído de Zienkiewicz (1994), donde se presentan varias soluciones con elementos finitos y además de su solución exacta.

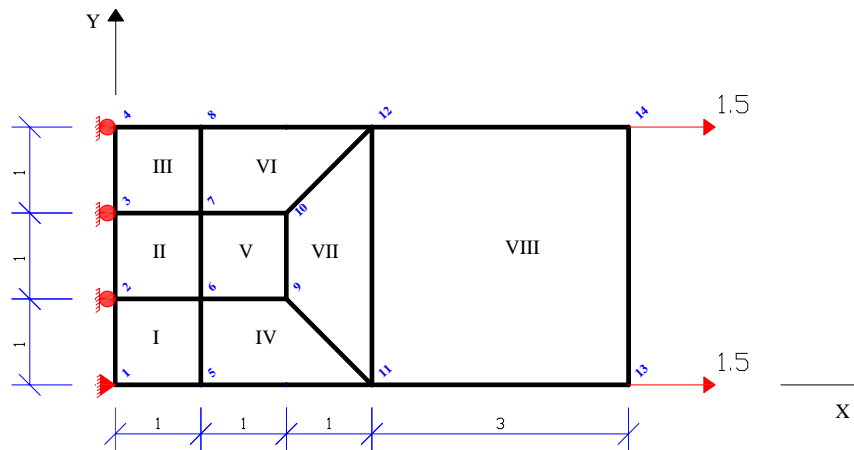


Figura 5. 4 Ejemplo #2. Placa en tracción pura.

### 5.2.2. Características del problema y propiedades de los materiales

Tabla 5. 9 Ejemplo #2- Características del problema.

Características del modelo				Propiedades del material	
Nº nodos	Nº de elemen.	Nodos restring.	Nodos cargados	$E$	$\nu$
14	8	4	2	1.0	0,25

La rutina analítica reflejo los siguientes tipos de elementos según su discriminación:

Tabla 5. 10 Ejemplo #2. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica.

TIPO I.a	TIPO I	TIPO II	TIPO III	TIPO IV
5	0	2	1	0

5.2.3. Comparación de resultados

Tabla 5. 11 Ejemplo #2. Desplazamientos nodales y diferencias.

Nodos	Numérica y semi-analítica		Analítica		% dif desp X	% dif desp Y
	desp X sa	desp Y sa	desp X a	desp Y a		
7	1,00	-0,50	1,00	-0,50	0,00	0,00
9	2,00	-0,25	2,00	-0,25	0,00	0,00
<b>13</b>	<b>6,00</b>	0,00	<b>6,00</b>	0,00	0,00	0,00

El desplazamiento horizontal del nodo (13) es cotejado con los resultados de diferentes rutinas de elementos finitos, presentadas por Zienkiewicz (1994), y con la solución exacta por resistencia de materiales:

$$P = K \cdot X \rightarrow K = \frac{E \cdot A}{L} \rightarrow A = e \cdot h \rightarrow X = \frac{P \cdot L}{E \cdot e \cdot h} \quad (5.2)$$

Con la carga axial ( $P= 3.0$ ), el modulo de elasticidad ( $E= 1.0$ ), la longitud de la barra ( $L= 6.0$ ), el ancho de la sección transversal ( $e= 1.0$ ) y la altura de la sección ( $h= 3.0$ ) se obtiene de la formula (5.2) el desplazamiento longitudinal ( $X= 6.0$ ).

Tabla 5. 12 Ejemplo #2. Tensiones y diferencias en los cuatro puntos de gauss.

Elemen.	Pto. de gauss	Numérica y semi-analítica			Analítica			% dif $\sigma_x$
		$\sigma_{Xsa}$	$\sigma_{Ysa}$	$\tau_{sa}$	$\sigma_{Xa}$	$\sigma_{Ya}$	$\tau_a$	
V	1	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	2	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	3	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	4	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
VIII	5	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	6	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	7	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00
	8	1,00	*	*	1,00	*	*	0,00

El símbolo (\*) indica que el valor numérico es de una magnitud muy pequeña y puede tomarse como nulo.



### 5.3. Ejemplo comparativo # 3 (flexión pura)

#### 5.3.1. Planteamiento

En la (5.5) se muestra una viga en volado de diez unidades de longitud, dos unidades de alto y una de ancho, con un módulo de elasticidad ( $E=1500$ ) y una relación de Poisson ( $\nu=0.25$ ); sometida a un momento el cual es equivalente al par de fuerza de 1000 unidades que se muestra, la viga está discretizada en cinco elementos. Este ejemplo fue extraído de Zienkiewicz (1994), donde se presentan varias soluciones con distintos elementos finitos y además de su solución exacta.

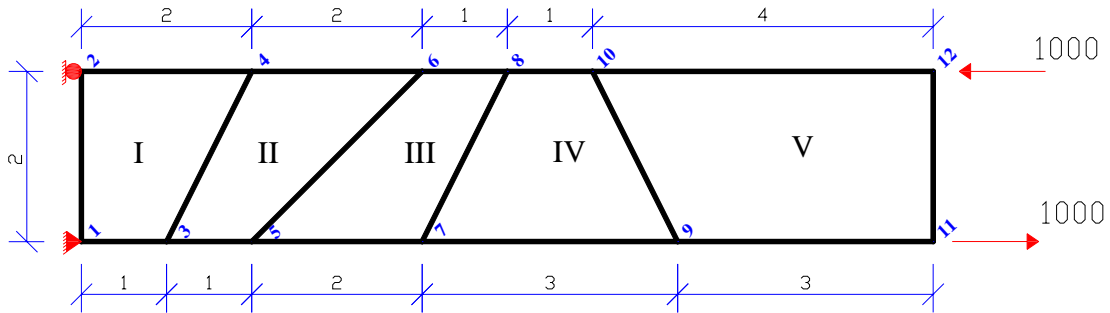


Figura 5.5 Ejemplo #3. Viga en volado a flexión con malla de elementos distorsionados.

#### 5.3.2. Características del problema y propiedades de los materiales

Tabla 5.13 Ejemplo #3. Características del problema.

Características del modelo				Propiedades del material	
Nº nodos	Nº de elemen.	Nodos restring.	Nodos cargados	$E$	$\nu$
12	5	2	2	1500	0.25

Al realizar el análisis la rutina analítica reflejo los siguientes tipos de elementos según su discriminación interna:

Tabla 5.14 Ejemplo #3. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica.

TIPO I.a	TIPO I	TIPO II	TIPO III	TIPO IV
0	0	0	0	5

5.3.3. Comparación de resultados

Ya en el capítulo II se dijo que el elemento de cuatro nodos presenta una buena conducta cuando el comportamiento que predomina es de tracción o de compresión, y esto lo pudimos constatar en los ejemplos anteriores, sin embargo se dijo que este elemento presenta poca precisión cuando el comportamiento predominante es flexión debido a la imposibilidad del elemento de adoptar formas curvas. Con este ejemplo se observa lo comentado.

Tabla 5. 15 Ejemplo #3. Desplazamientos nodales y diferencias.

Nodos	Numérica y semi-analítica		Analítica		% dif desp X	% dif desp Y
	desp X sa	desp Y sa	desp X a	desp Y a		
5	2,591	2,948	2,518	2,893	2,90	1,90
8	-4,286	13,01	-4,200	12,71	2,05	2,36
11	8,403	45,39	8,235	44,56	2,04	2,45

El desplazamiento vertical del nodo (11) fue cotejado con los resultados presentadas por Zienkiewicz (1994), y se muestran en la tabla (5.16).

Tabla 5. 16 Ejemplo #3. Comparación de la solución con diferentes rutinas.

RUTINA	Rutinas utilizadas en este trabajo		Resultados extraídos de Zienkiewicz(1994)		
	GCD (Analítica Ke)	Semi-analítica DVG (stiff4)	Isoparamétrico bilinial (Q4)	Pian-Sumihara (cuadrilátero híbrido)	Exacto (viga)
Desp. Y del nodo #11	44,56	45,39	45,70	96,18	100

Tabla 5. 17 Ejemplo #3. Tensiones y diferencias en el punto de gauss #2.

Elemen.	Pto. de gauss	Numérica y semi-analítica			Analítica			% dif $\sigma_x$	% dif $\sigma_y$	% dif $\tau$
		$\sigma_{xsa}$	$\sigma_{ysa}$	$\tau_{sa}$	$\sigma_{xa}$	$\sigma_{ya}$	$\tau_a$			
II	2	-6,12E+02	-1,42E+02	2,70E+02	-6,01E+02	-1,39E+02	2,65E+02	1,86	2,67	1,58
V	2	-7,49E+02	-2,17E+02	-5,98E+02	-7,49E+02	-2,15E+02	-5,95E+02	0,03	1,12	0,39

Tabla 5. 18 Ejemplo #3. Diferencias promedios y máximas.

	desp X	desp Y	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
% dif. Med.	2,051	2,358	2,631	2,777	8,028
% dif. Máx.	3,145	6,216	8,637	10,525	*

## 5.4. Ejemplo comparativo # 4. Presa con cavidad (deformación plana)

### 5.4.1. Planteamiento

Se presenta en la figura (5.6) el problema a estudiar, se trata de una presa de concreto armado con una cavidad semicircular. Se plantea hacer un modelo por el MEF de la presa y dos estratos de suelos bien definidos sobre los cuales se encuentra la presa. Sólo se estudiará el caso de carga hidrostática (presión lateral sobre la presa). Este ejemplo, es similar a uno encontrado en Zienkiewicz (1994) y cabe destacar que no se pretende hacer un estudio real, sino comparar las soluciones.

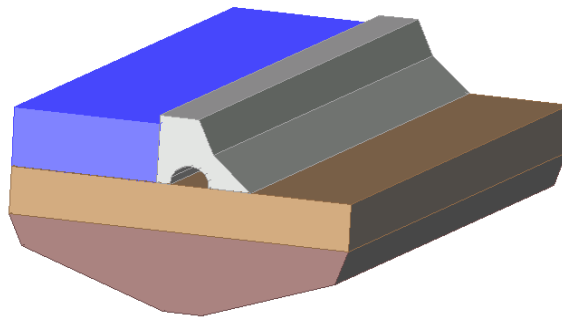


Figura 5. 6 Presa con cavidad en tres dimensiones.

Debido a las características del problema planteado se utilizó la hipótesis de deformación plana; por lo tanto se toma como área de estudio una rebanada de espesor unitario la cual presenta en la figura (5.7).

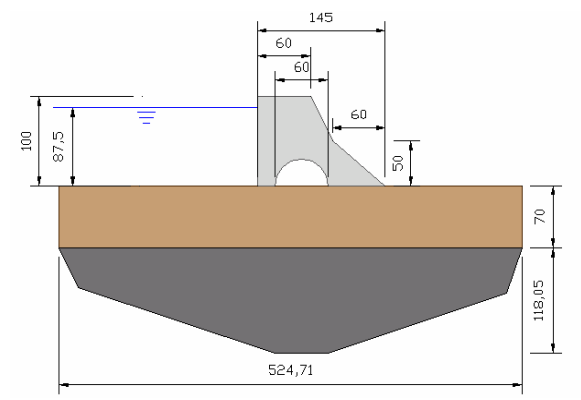
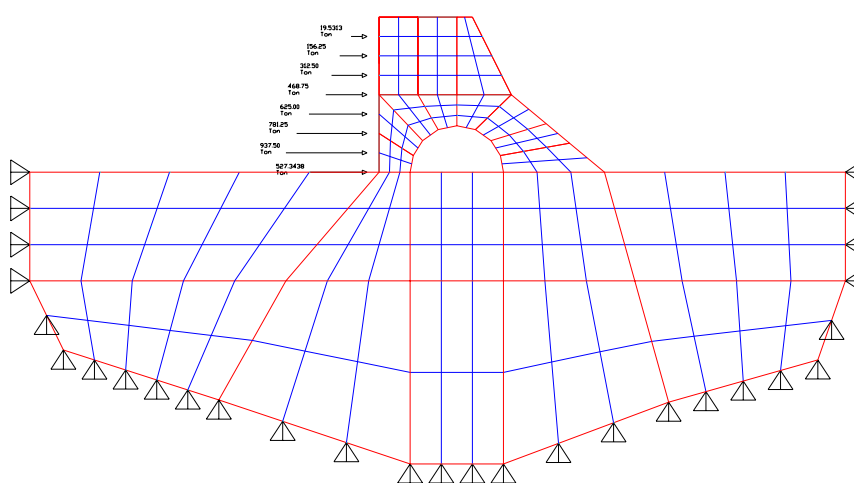


Figura 5. 7 Sección plana de estudio de la presa bajo hipótesis de deformación plana.

**5.4.2. Características del problema y propiedades de los materiales**

Para resolver el problema se discretizó el continuo con 162 elementos, figura (5.8), por simplicidad se estableció a una distancia alejada de la presa, las condiciones de contorno de desplazamiento nulo para nodos del borde de la masa de suelo, no se utilizó ningún criterio para establecer esta distancia, debido a que este ejemplo es sólo para comparar los resultados entre las rutinas.



**Figura 5. 8** Discretización del problema en elementos finitos.

**Tabla 5. 19** Ejemplo #4. Características del problema.

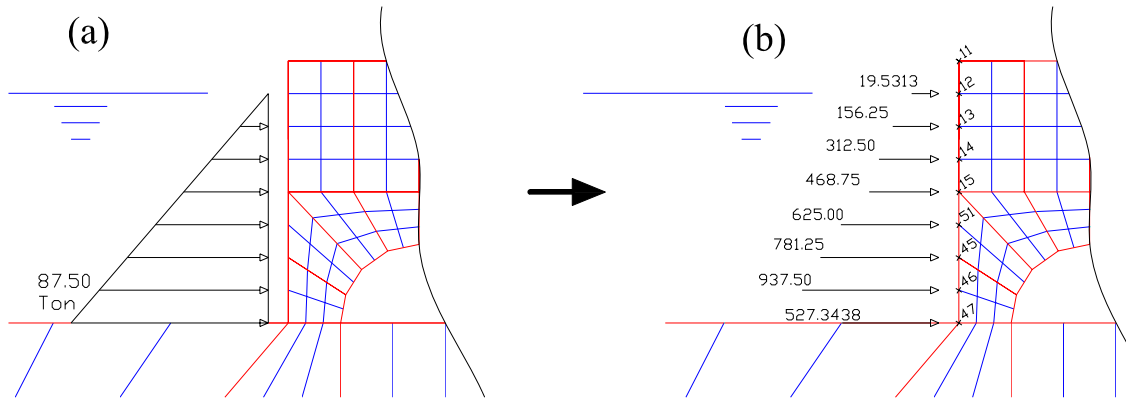
N° nodos	N° de elemen.	Nodos restring.	Nodos cargados
202	162	29	8

**Tabla 5. 20** Ejemplo #4. Propiedades de los materiales.

Presa de concreto		Estrato 1		Estrato 2	
$E$	$\nu$	$E$	$\nu$	$E$	$\nu$
$2.5 \times 10^6$	0.3	$1.5 \times 10^4$	0.35	$2.5 \times 10^4$	0.3

**5.4.3. Cargas nodales**

Se transformo la distribución triangular de la presión lateral del agua a un equivalente de cargas nodales como se muestra en la figura (5.9).



**Figura 5.9** Detalle de las cargas sobre la presa: (a) distribución triangular de la carga lateral por presión hidrostática; (b) equivalente en cargas nodales de la presión hidrostática.

**Tabla 5.21** Cargas nodales.

Nodo #	12	13	14	15	51	45	46	47
<b>Px (Ton)</b>	19,5313	156,25	312,5	468,75	625	781,25	937,5	527,3438

#### 5.4.4. Comparación de resultados

Del análisis con la rutina analítica se obtuvo el número de elementos de cada caso detectados.

**Tabla 5.22** Ejemplo #4. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica.

TIPO I.a	TIPO I	TIPO II	TIPO III	TIPO IV
16	15	53	0	78

De los análisis de ambas rutinas y de la posterior comparación se tiene que las diferencias promedio y máximas de los desplazamientos y de las tensiones son:

**Tabla 5.23** Ejemplo #4. Diferencias promedios y máximas.

	<i>desp X</i>	<i>desp Y</i>	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
<b>% dif. Medio</b>	0,004	0,041	0,051	0,192	0,079
<b>% dif. Máx.</b>	0,058	2,449	2,799	24,089	6,050

## 5.5. Ejemplo comparativo # 5. Barra con orificio circular (tensión plana)

### 5.5.1. Planteamiento

Se presenta en la figura (5.10) el problema a estudiar, se trata de una barra rectangular con un orificio circular sometida a una fuerza uniforme de tracción. Se plantea hacer un modelo de tensión plana por elementos finitos. Este ejemplo fue ideado de uno similar presentado en Zienkiewicz (1994), con pequeñas modificaciones.

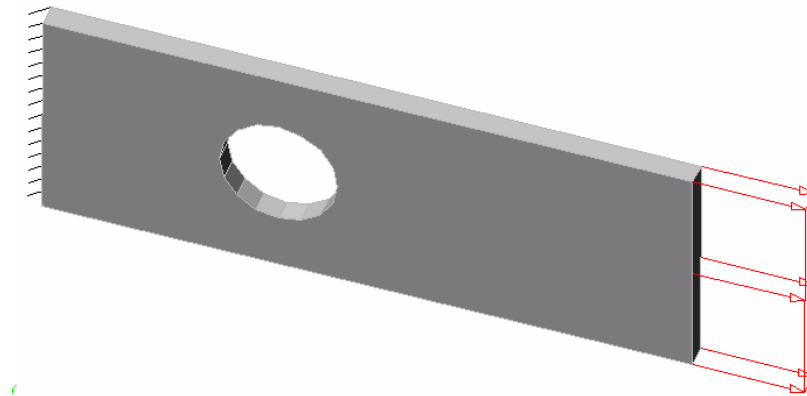


Figura 5. 10 Barra con orificio circular en tres dimensiones.

### 5.5.2. Características del problema y propiedades de los materiales

En la figura (5.11) se muestra la malla realizada y las dimensiones de la barra.

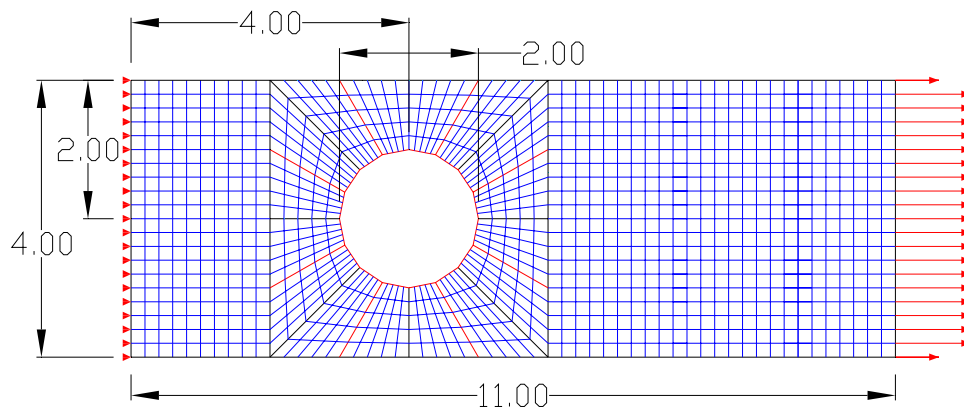


Figura 5. 11 Discretización del problema en elementos finitos.

En la tabla (5.24), se presentan las características del modelo y las propiedades de los materiales que fueron utilizados.

Tabla 5. 24 Ejemplo #5, características del modelo.

Características del modelo				Propiedades del material	
N° nodos	N° de elemen.	Nodos restring.	Nodos cargados	$E$	$\nu$
1100	1215	21	21	2.10E+03	0.25

### 5.5.3. Cargas nodales

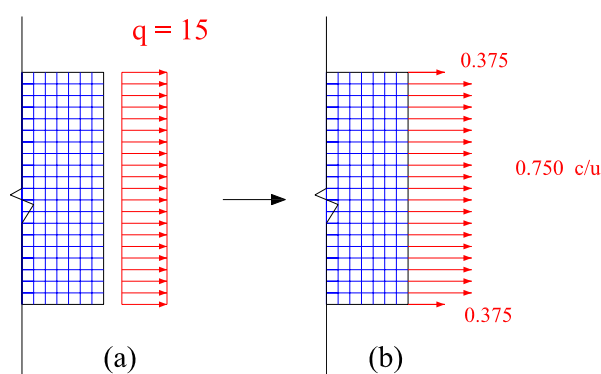


Figura 5. 12 Ejemplo #5, cargas nodales.

### 5.5.4. Comparación de resultados

Del análisis con la rutina analítica se obtuvo el número de elementos de cada caso detectados.

Tabla 5. 25 Ejemplo #5. Número de elementos de cada caso, según la rutina analítica.

TIPO Ia	TIPO I	TIPO II	TIPO III	TIPO IV
102	598	0	0	400

Se tiene que las diferencias promedio y máximas son:

Tabla 5. 26 Ejemplo #5. Diferencias promedios y máximas.

	$desp X$	Desp, Y	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau$
% dif. Medio	0,002	0,019	0,006	0,020	0,022
% dif. Máx.	0,069	1,394	0,624	7,019	2,726

## 5.6. Análisis de resultados

La similitud de los resultados nos indica que la rutina analítica puede utilizarse para resolver problemas de elasticidad plana, siendo la razón de las pequeñas diferencias, errores de cálculo de la integración numérica en elementos con una pequeña distorsión, como se demostró en el capítulo anterior.

La magnitud de las diferencias aquí encontradas, es aceptable, pero con esto podemos ver como pequeños errores en el cálculo de la matriz de rigidez de las rutinas que utilizan integración numérica, se traducen en pequeños errores en los desplazamientos y a su vez en las tensiones, siendo estas últimas las más afectadas debido al proceso de acumulación.



# CAPÍTULO VI

## Conclusiones

### 6.1. Conclusión general

En forma general se concluye que la rutina optimizada de integración analítica para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos, realizada en este trabajo, presenta ventajas en precisión y tiempo de ejecución ante las rutinas de integración numérica y semi-analítica, lo que la hace más eficiente.

### 6.2. Conclusiones particulares

- Se encontraron cuatro ecuaciones para cada uno de los casos discriminados, que permiten calcular los términos de la matriz de rigidez del elemento finitos isoparamétricos de cuatro nodos.
- Se realizó una rutina en un lenguaje de alto nivel para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento estudiado.
- Se generó un programa que permite comparar los tiempos de computacional de ejecución y porcentaje de diferencia entre la subrutina analítica y las subrutinas numérica y semi-analítica.

- Se comparó los tiempos de ejecución computacional de la subrutina analítica con los tiempos de las subrutinas por integración numérica e integración semi-analítica y se comprobó que la subrutina analítica es mucho más eficiente en tiempo que la rutina numérica y que a la rutina semi-analítica.
- Se obtuvo que debido a la discriminación realizada en la subrutina analítica los elementos más sencillos son mucho más rápidos de calcular.
- Se comprobó que las diferencias entre la rutina analítica y la semi-analítica para elementos cercanos a la frontera entre un caso y otro se deben a errores de precisión de la rutina analítica.
- Se encontró una técnica para calcular dentro del programa los valores mínimos tolerable de las constantes del jacobiano y así poder hacer las discriminaciones en los casos cercanos a la frontera y evitar los errores.
- Se comprobó el buen funcionamiento de la subrutina de integración analítica en problemas de elasticidad plana, y se resalta la precisión que esta genera en los cálculos.

## Referencias bibliográficas

Babu D. K. and Pinder G. F. (1984) "Short communications analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements" , *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1153–1166.

Chandrupatla T. and Belegundu A. (1999). "Introducción el estudio del elemento finito en ingeniería", *2<sup>da</sup> ed. Prentice Hall*, México.

Ferrante A. J., "Fundamentos del método de los elementos finitos", *Curso dictado en el IMME U.C.V.*, Caracas, 1979,320 pp.

Griffiths D.V. (1994). "Stiffness Matrix of the four-node quadrilateral element in closed form", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1027-1038.

Kikuchi M. (1989). "Application of the symbolic mathematics system to the finite element program", *Comput. Mech.*, **5**, 41–47.

Mizukami A. (1986). "Some integration formulas for a four-noded isoparametric element", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **59**, 111-121.

Ochoa A., Esnaloa I., Portu E. y Granados E. (2002). "Aprenda Maple 8 como si estuviera en primero", Documento electrónico de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Navarra, San Sebastián – España.

Oñate E. (1992). "Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos", *Cimne*, Barcelona - España.

Rathod H.D. (1988). "Some Analytical integration formulae for a four node isoparametric element", *Comput. & Struct.*, **10**, 1101-1109.

Timoshenko S, Goodier J. (1975). “Teoría de la elasticidad”, *Urmo*, Bilbao - España.

Vázquez M, López E. (2001). “El Método de los Elementos Finitos aplicado al Análisis Estructural”, *1<sup>era</sup> ed. Noela*, Madrid – España.

Videla L, Aparicio N and Cerrolaza M. (1996). “Explicit Integration of the Stiffness Matrix of a Four-Noded-Plane Elasticity Finite Element”, *Communications Int Numerical Methods In Engineering*. **12**, 731-743.

Videla L, Baloa T., Griffiths D.V. and Cerrolaza M. (2005). “ Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation”,. *Journal in Analysis and design in Finite Elements*. (Submitted).

[www.mines.edu/vgriffiths/main.html](http://www.mines.edu/vgriffiths/main.html)

Zienkiewicz W.C., Taylor R.L. and Too J.M. (1971). “Reduced integration technique in general Analysis of plates and shells”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 275-290.

Zienkiewicz W.C., and Taylor R.L (1994). “El Método de los Elementos Finitos”, *4<sup>ta</sup> ed. CIMNE*, Madrid – España.

## Bibliografía adicional

Andersen C.M. and Noor A.K. (1975). “A computerized symbolic integration technique for development of triangular and quadrilateral composite shallow shell finite element”, *Rep.NASA TN D-8067*.

Baloa T., Videla L. (2005). “Integración analítica de la matriz de rigidez de un elemento finito isoparamétrico de 8 nodos en elasticidad plana por simplificación simbólica”, *Memorias II Congreso Internacional de Ingeniería Civil*, Barquisimeto – Venezuela.

Bardel N.S. (1989) “The application of symbolic to computing to the hierarchical finite element method”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 1181–1204.

Cardoso J-P. (1994). “Analytical integration formulation of element stiffness matrices”, *Master’s Thesis*, School of Engineering, University of Manchester.

Dirección de Área Informática, INACAP. “Manual de análisis y diseño de algoritmos”, documento electrónico, INACAP, Copicó, Chile, 2003, 127 pp.

Dpto. de matemática aplicada, facultad de informática UPM. “Instrucciones básicas del programa Maple”, documento electrónico, UPM, 2004, 11 pp.

Griffiths D.V. and Smith I.M. (2004). “Programming the finite element method”, *4<sup>th</sup> ed.* Wiley.

Jensen J. and Niordson F. (1977). “Symbolic and algebraic manipulation languages and their application in mechanics”, *In Perrone & Pilkeg (Eds.), Structural Mechanics Software Series*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville.

Korncoff A. R and Fenves S. J. (1979). “Symbolic generation of finite element stiffness matrices”, *Comput. & Struct.*, **10**, 119-124.

Korncoff A.R. (1977). "Finite element stiffness matrix generation via symbolic manipulation, in C", *Wellford (Ed), Proc. Symposium on Application of Comp.Meth. in Eng.*, Vol.II, **7**, 779-785.

Lozada I.J, Osorio J.C, Griffiths D.V, Cerrolaza M. (2004). "Stiffness Matrix Semi-Analytical Integration Of An 8-Noded Plane Elasticity Finite-Element By Using Symbolic Computation", *J. Numer. Meth. in Partial Diff. Equations*, (in press).

Miriam, M. A. "Complejidad de algoritmos", documento electrónico, facultad de ciencias, UCV, Caracas, 21 pp.

Noor A.K. and Andersen C.M. (1979). "Computerized symbolic manipulation in structural mechanics: Progress and Potential", *Comput. & Struct.*, **10**, 95-118.

Rengarajan G, Knight N. and Aminpour M. (1995). "Comparison of symbolic and numerical integration methods for an assumed-stress hybrid shell element", *Comm. Num. Meth. Eng.*,**11**,307-316.

Vlachoutsis S. (1990). "Explicit integration for three-dimensional degenerate shell finite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **29**,861-880.

Yagawa G, Ye G.W. and Yoshimura S. (1990). "A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **29**,1539-1549.

## APÉNDICE A

# Expresiones integradas y constantes generales

### A.1. Expresiones integradas en Maple

#### A.1.1. Caso I

```
> EB1 := (AKi*xi^2+(BKi*eta+CKi)*xi+DKi*eta^2+EKi*eta+FKi) /
(CJ);
```

$$EB1 := \frac{AKi \xi^2 + (BKi \eta + CKi) \xi + DKi \eta^2 + EKi \eta + FK_i}{CJ}$$

```
> EB1_Kii := Int( ( Int(EB1, xi=-1..1), eta=-1..1) );
```

$$EB1\_Kii := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AKi \xi^2 + (BK_i \eta + CK_i) \xi + DK_i \eta^2 + EK_i \eta + FK_i}{CJ} d\xi d\eta$$

```
> EB1_Kii := (simplify(int( (int(EB1, xi=-1..1), eta=-
1..1) )) : Denomi := denom(%); numer(%) : collect(%, BJ) : collect(%, CJ)
: collect(%, ln(BJ+CJ)) : collect(%, ln(-BJ+CJ)) : : EB1_KiiNum := % ;
Denomi := 3 CJ
```

$$EB1\_KiiNum := 4 DK_i + 4 AK_i + 12 FK_i$$

#### A.1.2. Caso II

```
> EB1 :=
(AK(f)*xi^2+(BK(f)*eta+CK(f))*xi+DK(f)*eta^2+EK(f)*eta+FK(f)) /
(BJ*eta+CJ);
```

$$EB1 := \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{BJ \eta + CJ}$$

```
> EB1_Kii := Int( ( Int(EB1, xi=-1..1), eta=-1..1) );
```

$EB1\_Kii :=$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{BJ \eta + CJ} d\xi d\eta$$

```
> EB1_Kii:=(simplify(int((int(EB1,xi=-1..1),eta=-1..1))) :Denomi:=denom(%);numer(%%):collect(%,BJ):collect(%,CJ):collect(%,ln(BJ+CJ)):collect(%,ln(-BJ+CJ)): EB1_KiiNum:=sort(%);
```

$$Denomi := 3 BJ^3$$

$$\begin{aligned} EB1\_KiiNum := & 12 BJ^2 EK(f) - 12 BJ CJ DK(f) \\ & + (-6 BJ CJ EK(f) + 6 CJ^2 DK(f) + (2 AK(f) + 6 FK(f)) BJ^2) \ln(BJ + CJ) \\ & + (6 BJ CJ EK(f) - 6 CJ^2 DK(f) + (-2 AK(f) - 6 FK(f)) BJ^2) \ln(-BJ + CJ) \end{aligned}$$

### A.1.3. Caso III

>  $EB1 :=$

```
(AK(f)*xi^2+(BK(f)*eta+CK(f))*xi+DK(f)*eta^2+EK(f)*eta+FK(f)) / (AJ*xi+CJ);
```

$$EB1 := \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{AJ \xi + CJ}$$

```
> EB1_Kii:=Int((Int(EB1,xi=-1..1),eta=-1..1));
```

$EB1\_Kii :=$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{AJ \xi + CJ} d\xi d\eta$$

```
> EB1_Kii:=(simplify(int((int(EB1,xi=-1..1),eta=-1..1))) :Denomi:=denom(%);numer(%%):collect(%,AK1):collect(%,BK1):collect(%,CK1):collect(%,ln(AJ+CJ)):collect(%,ln(-AJ+CJ)) : EB1_KiiNum:= sort(%);
```

$$Denomi := 3 AJ^3$$

$$\begin{aligned} EB1\_KiiNum := & 12 AJ^2 CK(f) - 12 AJ CJ AK(f) \\ & + (2 AJ^2 DK(f) + 6 AJ^2 FK(f) - 6 AJ CJ CK(f) + 6 CJ^2 AK(f)) \ln(AJ + CJ) \\ & + (-2 AJ^2 DK(f) - 6 AJ^2 FK(f) + 6 AJ CJ CK(f) - 6 CJ^2 AK(f)) \ln(-AJ + CJ) \end{aligned}$$



**A.1.4. Caso IV**

```
> EB1 :=
(AK(f)*xi^2+(BK(f)*eta+CK(f))*xi+DK(f)*eta^2+EK(f)*eta+FK(f)) /
(AJ*xi+BJ*eta+CJ);
```

$$EB1 := \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{AJ \xi + BJ \eta + CJ}$$

```
> EB1_Kii:=Int((Int(EB1,xi=-1..1),eta=-1..1));
EB1_Kii :=
```

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AK(f) \xi^2 + (BK(f) \eta + CK(f)) \xi + DK(f) \eta^2 + EK(f) \eta + FK(f)}{AJ \xi + BJ \eta + CJ} d\xi d\eta$$

```
> EB1_Kii:=(simplify(int((int(EB1,xi=-1..1),eta=-
1..1)))):Denomi:=denom(%);numer(%%):collect(%,AK):collect(%,BK)
:collect(%,CK):collect(%,DK):collect(%,EK):collect(%,FK):collec
t(%,ln(AJ-BJ+CJ)):collect(%,ln(AJ+BJ+CJ)):collect(%,ln(-
AJ+BJ+CJ)):collect(%,ln(-AJ-BJ+CJ)): EB1_KiiNum:= sort(%);
Denomi := 6 BJ^3 AJ^3
```

$$\begin{aligned} EB1\_KiiNum := & -16 AK(f) AJ BJ^3 CJ + 4 BK(f) AJ^2 BJ^2 CJ + 12 CK(f) AJ^2 BJ^3 \\ & - 16 DK(f) AJ^3 BJ CJ + 12 EK(f) AJ^3 BJ^2 + ( \\ & (-2 AJ^3 BJ^2 - 2 BJ^5 + 6 BJ^4 CJ - 6 BJ^3 CJ^2 + 2 BJ^2 CJ^3) AK(f) \\ & + (2 AJ^4 BJ - 3 AJ^3 BJ CJ + 2 AJ BJ^4 - 3 AJ BJ^3 CJ + AJ BJ CJ^3) BK(f) \\ & + (3 AJ^3 BJ^2 - 3 AJ BJ^4 + 6 AJ BJ^3 CJ - 3 AJ BJ^2 CJ^2) CK(f) \\ & + (-2 AJ^5 + 6 AJ^4 CJ - 6 AJ^3 CJ^2 - 2 AJ^2 BJ^3 + 2 AJ^2 CJ^3) DK(f) \\ & + (-3 AJ^4 BJ + 6 AJ^3 BJ CJ + 3 AJ^2 BJ^3 - 3 AJ^2 BJ CJ^2) EK(f) \\ & + (-6 AJ^3 BJ^2 - 6 AJ^2 BJ^3 + 6 AJ^2 BJ^2 CJ) FK(f)) \ln(-AJ - BJ + CJ) + ( \\ & (-2 AJ^3 BJ^2 + 2 BJ^5 - 6 BJ^4 CJ + 6 BJ^3 CJ^2 - 2 BJ^2 CJ^3) AK(f) \\ & + (2 AJ^4 BJ + 3 AJ^3 BJ CJ - 2 AJ BJ^4 + 3 AJ BJ^3 CJ - AJ BJ CJ^3) BK(f) \\ & + (-3 AJ^3 BJ^2 + 3 AJ BJ^4 - 6 AJ BJ^3 CJ + 3 AJ BJ^2 CJ^2) CK(f) \\ & + (-2 AJ^5 - 6 AJ^4 CJ - 6 AJ^3 CJ^2 + 2 AJ^2 BJ^3 - 2 AJ^2 CJ^3) DK(f) \\ & + (3 AJ^4 BJ + 6 AJ^3 BJ CJ - 3 AJ^2 BJ^3 + 3 AJ^2 BJ CJ^2) EK(f) \\ & + (-6 AJ^3 BJ^2 + 6 AJ^2 BJ^3 - 6 AJ^2 BJ^2 CJ) FK(f)) \ln(AJ - BJ + CJ) + ( \\ & (2 AJ^3 BJ^2 - 2 BJ^5 - 6 BJ^4 CJ - 6 BJ^3 CJ^2 - 2 BJ^2 CJ^3) AK(f) \\ & + (-2 AJ^4 BJ + 3 AJ^3 BJ CJ + 2 AJ BJ^4 + 3 AJ BJ^3 CJ - AJ BJ CJ^3) BK(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-3 AJ^3 BJ^2 + 3 AJ BJ^4 + 6 AJ BJ^3 CJ + 3 AJ BJ^2 CJ^2) CK(f) \\
 &+ (2 AJ^5 - 6 AJ^4 CJ + 6 AJ^3 CJ^2 - 2 AJ^2 BJ^3 - 2 AJ^2 CJ^3) DK(f) \\
 &+ (3 AJ^4 BJ - 6 AJ^3 BJ CJ - 3 AJ^2 BJ^3 + 3 AJ^2 BJ CJ^2) EK(f) \\
 &+ (6 AJ^3 BJ^2 - 6 AJ^2 BJ^3 - 6 AJ^2 BJ^2 CJ) FK(f) \ln(-AJ + BJ + CJ) + ( \\
 &(2 AJ^3 BJ^2 + 2 BJ^5 + 6 BJ^4 CJ + 6 BJ^3 CJ^2 + 2 BJ^2 CJ^3) AK(f) \\
 &+ (-2 AJ^4 BJ - 3 AJ^3 BJ CJ - 2 AJ BJ^4 - 3 AJ BJ^3 CJ + AJ BJ CJ^3) BK(f) \\
 &+ (3 AJ^3 BJ^2 - 3 AJ BJ^4 - 6 AJ BJ^3 CJ - 3 AJ BJ^2 CJ^2) CK(f) \\
 &+ (2 AJ^5 + 6 AJ^4 CJ + 6 AJ^3 CJ^2 + 2 AJ^2 BJ^3 + 2 AJ^2 CJ^3) DK(f) \\
 &+ (-3 AJ^4 BJ - 6 AJ^3 BJ CJ + 3 AJ^2 BJ^3 - 3 AJ^2 BJ CJ^2) EK(f) \\
 &+ (6 AJ^3 BJ^2 + 6 AJ^2 BJ^3 + 6 AJ^2 BJ^2 CJ) FK(f) \ln(AJ + BJ + CJ)
 \end{aligned}$$

## A.2. Constantes generales

$$\begin{aligned}
 AK(1) &= AY1^{**2}*D1 + AX1^{**2}*D3 \\
 AK(2) &= -AY1*D2*AX1 - AX1*D3*AY1 \\
 AK(3) &= -AY1^{**2}*D1 - AX1^{**2}*D3 \\
 AK(4) &= AY1*D2*AX1 + AX1*D3*AY1 \\
 AK(5) &= -AY1*D1*AY2 - AX1*D3*AX2 \\
 AK(6) &= AY1*D2*AX2 + AX1*D3*AY2 \\
 AK(7) &= AY1*D1*AY2 + AX1*D3*AX2 \\
 AK(8) &= -AY1*D2*AX2 - AX1*D3*AY2 \\
 AK(9) &= AX1^{**2}*D1 + AY1^{**2}*D3 \\
 AK(10) &= AX1*D2*AY1 + AY1*D3*AX1 \\
 AK(11) &= -AX1^{**2}*D1 - AY1^{**2}*D3 \\
 AK(12) &= AX1*D2*AY2 + AY1*D3*AX2 \\
 AK(13) &= -AX1*D1*AX2 - AY1*D3*AY2 \\
 AK(14) &= -AX1*D2*AY2 - AY1*D3*AX2 \\
 AK(15) &= AX1*D1*AX2 + AY1*D3*AY2 \\
 AK(16) &= AY1^{**2}*D1 + AX1^{**2}*D3 \\
 AK(17) &= -AY1*D2*AX1 - AX1*D3*AY1 \\
 AK(18) &= AY1*D1*AY2 + AX1*D3*AX2 \\
 AK(19) &= -AY1*D2*AX2 - AX1*D3*AY2 \\
 AK(20) &= -AY1*D1*AY2 - AX1*D3*AX2 \\
 AK(21) &= AY1*D2*AX2 + AX1*D3*AY2 \\
 AK(22) &= AX1^{**2}*D1 + AY1^{**2}*D3 \\
 AK(23) &= -AX1*D2*AY2 - AY1*D3*AX2 \\
 AK(24) &= AX1*D1*AX2 + AY1*D3*AY2 \\
 AK(25) &= AX1*D2*AY2 + AY1*D3*AX2 \\
 AK(26) &= -AX1*D1*AX2 - AY1*D3*AY2 \\
 AK(27) &= AY2^{**2}*D1 + AX2^{**2}*D3 \\
 AK(28) &= -AY2*D2*AX2 - AX2*D3*AY2 \\
 AK(29) &= -AY2^{**2}*D1 - AX2^{**2}*D3 \\
 AK(30) &= AY2*D2*AX2 + AX2*D3*AY2 \\
 AK(31) &= AX2^{**2}*D1 + AY2^{**2}*D3 \\
 AK(32) &= AX2*D2*AY2 + AY2*D3*AX2 \\
 AK(33) &= -AX2^{**2}*D1 - AY2^{**2}*D3 \\
 AK(34) &= AY2^{**2}*D1 + AX2^{**2}*D3 \\
 AK(35) &= -AY2*D2*AX2 - AX2*D3*AY2 \\
 AK(36) &= AX2^{**2}*D1 + AY2^{**2}*D3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BK(1) &= 2*AY1*D1*AY3+2*AX1*D3*AX3 \\
 BK(2) &= (-AX1*AY3-AY1*AX3)*D3+(-AX1*AY3-AY1*AX3)*D2 \\
 BK(3) &= (-AX1*AX3-AX1*AX4)*D3+(-AY1*AY3-AY1*AY4)*D1 \\
 BK(4) &= (AY1*AX3+AX1*AY4)*D3+(AX1*AY3+AY1*AX4)*D2 \\
 BK(5) &= (-AX2*AX3+AX1*AX4)*D3+(-AY2*AY3+AY1*AY4)*D1 \\
 BK(6) &= (AY2*AX3-AX1*AY4)*D3+(AX2*AY3-AY1*AX4)*D2 \\
 BK(7) &= (AX2*AX3-AX1*AX3)*D3+(AY2*AY3-AY1*AY3)*D1 \\
 BK(8) &= (-AY2*AX3+AX1*AY3)*D3+(-AX2*AY3+AY1*AX3)*D2 \\
 BK(9) &= 2*AX1*D1*AX3+2*AY1*D3*AY3 \\
 BK(10) &= (AX1*AY3+AY1*AX4)*D3+(AY1*AX3+AX1*AY4)*D2 \\
 BK(11) &= (-AY1*AY3-AY1*AY4)*D3+(-AX1*AX3-AX1*AX4)*D1 \\
 BK(12) &= (AX2*AY3-AY1*AX4)*D3+(AY2*AX3-AX1*AY4)*D2 \\
 BK(13) &= (-AY2*AY3+AY1*AY4)*D3+(-AX2*AX3+AX1*AX4)*D1 \\
 BK(14) &= (-AX2*AY3+AY1*AX3)*D3+(-AY2*AX3+AX1*AY3)*D2 \\
 BK(15) &= (AY2*AY3-AY1*AY3)*D3+(AX2*AX3-AX1*AX3)*D1 \\
 BK(16) &= 2*AY1*D1*AY4+2*AX1*D3*AX4 \\
 BK(17) &= (-AX1*AY4-AY1*AX4)*D3+(-AX1*AY4-AY1*AX4)*D2
 \end{aligned}$$

## APÉNDICE A. Expresiones integradas y constantes generales

---

$$\begin{aligned}BK(18) &= (AX2*AX4-AX1*AX4)*D3+(AY2*AY4-AY1*AY4)*D1 \\BK(19) &= (-AY2*AX4+AX1*AY4)*D3+(-AX2*AY4+AY1*AX4)*D2 \\BK(20) &= (-AX2*AX4+AX1*AX3)*D3+(-AY2*AY4+AY1*AY3)*D1 \\BK(21) &= (AY2*AX4-AX1*AY3)*D3+(AX2*AY4-AY1*AX3)*D2 \\BK(22) &= 2*AX1*D1*AX4+2*AY1*D3*AY4 \\BK(23) &= (-AX2*AY4+AY1*AX4)*D3+(-AY2*AX4+AX1*AY4)*D2 \\BK(24) &= (AY2*AY4-AY1*AY4)*D3+(AX2*AX4-AX1*AX4)*D1 \\BK(25) &= (AX2*AY4-AY1*AX3)*D3+(AY2*AX4-AX1*AY3)*D2 \\BK(26) &= (-AY2*AY4+AY1*AY3)*D3+(-AX2*AX4+AX1*AX3)*D1 \\BK(27) &= -2*D1*AY2*AY4-2*D3*AX2*AX4 \\BK(28) &= (AX2*AY4+AY2*AX4)*D3+(AX2*AY4+AY2*AX4)*D2 \\BK(29) &= (AX2*AX4+AX2*AX3)*D3+(AY2*AY4+AY2*AY3)*D1 \\BK(30) &= (-AY2*AX4-AX2*AY3)*D3+(-AX2*AY4-AY2*AX3)*D2 \\BK(31) &= -2*D1*AX2*AX4-2*D3*AY2*AY4 \\BK(32) &= (-AX2*AY4-AY2*AX3)*D3+(-AY2*AX4-AX2*AY3)*D2 \\BK(33) &= (AY2*AY4+AY2*AY3)*D3+(AX2*AX4+AX2*AX3)*D1 \\BK(34) &= -2*D1*AY2*AY3-2*D3*AX2*AX3 \\BK(35) &= (AX2*AY3+AY2*AX3)*D3+(AX2*AY3+AY2*AX3)*D2 \\BK(36) &= -2*D1*AX2*AX3-2*D3*AY2*AY3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}CK(1) &= -2*AX1*D3*AX5-2*AY1*D1*AY5 \\CK(2) &= (AY1*AX5+AX1*AY5)*D3+(AY1*AX5+AX1*AY5)*D2 \\CK(3) &= (AX1*AX5+AX1*AX6)*D3+(AY1*AY6+AY1*AY5)*D1 \\CK(4) &= (-AY1*AX5-AX1*AY6)*D3+(-AY1*AX6-AX1*AY5)*D2 \\CK(5) &= (AX2*AX5+AX1*AX5)*D3+(AY1*AY5+AY2*AY5)*D1 \\CK(6) &= (-AY2*AX5-AX1*AY5)*D3+(-AY1*AX5-AX2*AY5)*D2 \\CK(7) &= (-AX2*AX5-AX1*AX6)*D3+(-AY1*AY6-AY2*AY5)*D1 \\CK(8) &= (AY2*AX5+AX1*AY6)*D3+(AY1*AX6+AX2*AY5)*D2 \\CK(9) &= -2*AX1*D1*AX5-2*AY1*D3*AY5 \\CK(10) &= (-AX1*AY5-AY1*AX6)*D3+(-AX1*AY6-AY1*AX5)*D2 \\CK(11) &= (AY1*AY5+AY1*AY6)*D3+(AX1*AX5+AX1*AX6)*D1 \\CK(12) &= (-AX2*AY5-AY1*AX5)*D3+(-AX1*AY5-AY2*AX5)*D2 \\CK(13) &= (AY2*AY5+AY1*AY5)*D3+(AX2*AX5+AX1*AX5)*D1 \\CK(14) &= (AX2*AY5+AY1*AX6)*D3+(AX1*AY6+AY2*AX5)*D2 \\CK(15) &= (-AY2*AY5-AY1*AY6)*D3+(-AX2*AX5-AX1*AX6)*D1 \\CK(16) &= -2*AX1*D3*AX6-2*AY1*D1*AY6 \\CK(17) &= (AY1*AX6+AX1*AY6)*D3+(AY1*AX6+AX1*AY6)*D2 \\CK(18) &= (-AX2*AX6-AX1*AX5)*D3+(-AY1*AY5-AY2*AY6)*D1 \\CK(19) &= (AY2*AX6+AX1*AY5)*D3+(AY1*AX5+AX2*AY6)*D2 \\CK(20) &= (AX2*AX6+AX1*AX6)*D3+(AY1*AY6+AY2*AY6)*D1 \\CK(21) &= (-AY2*AX6-AX1*AY6)*D3+(-AY1*AX6-AX2*AY6)*D2 \\CK(22) &= -2*AX1*D1*AX6-2*AY1*D3*AY6 \\CK(23) &= (AX2*AY6+AY1*AX5)*D3+(AX1*AY5+AY2*AX6)*D2 \\CK(24) &= (-AY2*AY6-AY1*AY5)*D3+(-AX2*AX6-AX1*AX5)*D1 \\CK(25) &= (-AX2*AY6-AY1*AX6)*D3+(-AX1*AY6-AY2*AX6)*D2 \\CK(26) &= (AY2*AY6+AY1*AY6)*D3+(AX2*AX6+AX1*AX6)*D1 \\CK(27) &= -2*D3*AX2*AX5-2*D1*AY2*AY5 \\CK(28) &= (AY2*AX5+AX2*AY5)*D3+(AY2*AX5+AX2*AY5)*D2 \\CK(29) &= (AX2*AX5+AX2*AX6)*D3+(AY2*AY6+AY2*AY5)*D1 \\CK(30) &= (-AY2*AX5-AX2*AY6)*D3+(-AY2*AX6-AX2*AY5)*D2 \\CK(31) &= -2*D1*AX2*AX5-2*D3*AY2*AY5 \\CK(32) &= (-AX2*AY5-AY2*AX6)*D3+(-AX2*AY6-AY2*AX5)*D2 \\CK(33) &= (AY2*AY5+AY2*AY6)*D3+(AX2*AX5+AX2*AX6)*D1 \\CK(34) &= -2*D3*AX2*AX6-2*D1*AY2*AY6 \\CK(35) &= (AY2*AX6+AX2*AY6)*D3+(AY2*AX6+AX2*AY6)*D2 \\CK(36) &= -2*D1*AX2*AX6-2*D3*AY2*AY6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 DK(1) &= D3 * AX3^{**2} + D1 * AY3^{**2} \\
 DK(2) &= -D2 * AY3 * AX3 - D3 * AY3 * AX3 \\
 DK(3) &= -D1 * AY3 * AY4 - D3 * AX3 * AX4 \\
 DK(4) &= D2 * AY3 * AX4 + D3 * AX3 * AY4 \\
 DK(5) &= D1 * AY3 * AY4 + D3 * AX3 * AX4 \\
 DK(6) &= -D2 * AY3 * AX4 - D3 * AX3 * AY4 \\
 DK(7) &= -D1 * AY3^{**2} - D3 * AX3^{**2} \\
 DK(8) &= D2 * AY3 * AX3 + D3 * AY3 * AX3 \\
 DK(9) &= D3 * AY3^{**2} + D1 * AX3^{**2} \\
 DK(10) &= D2 * AX3 * AY4 + D3 * AY3 * AX4 \\
 DK(11) &= -D1 * AX3 * AX4 - D3 * AY3 * AY4 \\
 DK(12) &= -D2 * AX3 * AY4 - D3 * AY3 * AX4 \\
 DK(13) &= D1 * AX3 * AX4 + D3 * AY3 * AY4 \\
 DK(14) &= D2 * AX3 * AY3 + D3 * AX3 * AY3 \\
 DK(15) &= -D1 * AX3^{**2} - D3 * AY3^{**2} \\
 DK(16) &= D3 * AX4^{**2} + D1 * AY4^{**2} \\
 DK(17) &= -D2 * AY4 * AX4 - D3 * AY4 * AX4 \\
 DK(18) &= -D1 * AY4^{**2} - D3 * AX4^{**2} \\
 DK(19) &= D2 * AY4 * AX4 + D3 * AY4 * AX4 \\
 DK(20) &= D1 * AY3 * AY4 + D3 * AX3 * AX4 \\
 DK(21) &= -D2 * AX3 * AY4 - D3 * AY3 * AX4 \\
 DK(22) &= D3 * AY4^{**2} + D1 * AX4^{**2} \\
 DK(23) &= D2 * AX4 * AY4 + D3 * AX4 * AY4 \\
 DK(24) &= -D1 * AX4^{**2} - D3 * AY4^{**2} \\
 DK(25) &= -D2 * AY3 * AX4 - D3 * AX3 * AY4 \\
 DK(26) &= D1 * AX3 * AX4 + D3 * AY3 * AY4 \\
 DK(27) &= D3 * AX4^{**2} + D1 * AY4^{**2} \\
 DK(28) &= -D2 * AY4 * AX4 - D3 * AY4 * AX4 \\
 DK(29) &= -D1 * AY3 * AY4 - D3 * AX3 * AX4 \\
 DK(30) &= D2 * AX3 * AY4 + D3 * AY3 * AX4 \\
 DK(31) &= D3 * AY4^{**2} + D1 * AX4^{**2} \\
 DK(32) &= D2 * AY3 * AX4 + D3 * AX3 * AY4 \\
 DK(33) &= -D1 * AX3 * AX4 - D3 * AY3 * AY4 \\
 DK(34) &= D3 * AX3^{**2} + D1 * AY3^{**2} \\
 DK(35) &= -D2 * AY3 * AX3 - D3 * AY3 * AX3 \\
 DK(36) &= D3 * AY3^{**2} + D1 * AX3^{**2}
 \end{aligned}$$

# APÉNDICE B

## Uso del programa

### B.1. Introducción

En este apéndice se presenta una descripción de cómo utilizar el programa *Analitico-4n* desarrollado en este trabajo para comparar el cálculo de matrices de rigidez de elementos finitos isoparamétricos de cuatro nodos con la rutina semi-analítica y la rutina analítica de esta investigación.

### B.2. Entrada de datos

La entrada de datos se realiza por un archivo destinado para esto denominado *DatosGCD.dat*. En este el usuario debe introducir las coordenadas  $(x,y)$  de cada nodo, el módulo de Young ( $E$ ) y relación de Poisson ( $\nu$ ), el número repeticiones de la rutina y la hipótesis de elasticidad. Todo este se debe hacer en el orden mostrado en la siguiente figura.

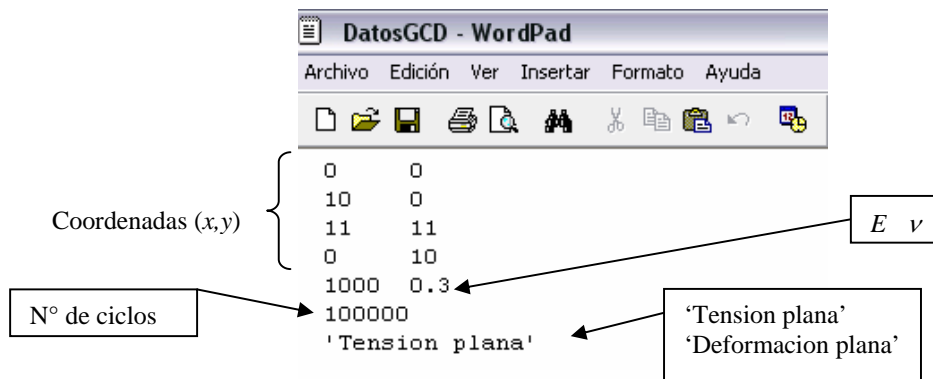


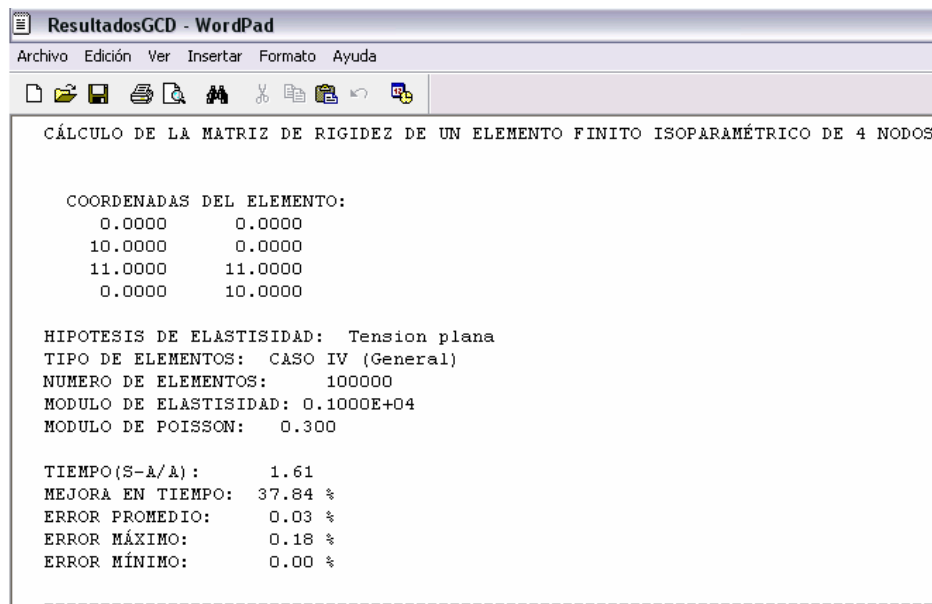
Figura B. 1 – Archivo de entrada de datos del programa.

### B.3. Salida de datos

En las figuras (B.2), (B.3) y (B.4) se presenta los resultados generados por el programa *Analitico-4n* en el archivo *ResultadosGCD.sal*, el cual se ubica en la misma carpeta del programa. Los resultados se presentan por tres partes, la primera contiene los datos del problema y resultados generales, la segunda presentan las matrices calculadas por cada rutina y la tercera presenta una tabla resumen de los tiempos de ejecución y sus relaciones.

#### B.3.1. Datos y resultados generales

A continuación se presenta la primera parte del contenido del archivo de salida de datos del programa, esta contiene los datos de la entrada, el tipo de caso detectado por la rutina analítica, la relación de tiempo, la mejora en tiempo o porcentaje de optimización y los errores promedio, máximo y mínimo.



```

ResultadosGCD - WordPad
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO DE 4 NODOS

COORDENADAS DEL ELEMENTO:
0.0000    0.0000
10.0000   0.0000
11.0000   11.0000
0.0000    10.0000

HIPOTESIS DE ELASTISIDAD: Tension plana
TIPO DE ELEMENTOS: CASO IV (General)
NUMERO DE ELEMENTOS: 100000
MODULO DE ELASTISIDAD: 0.1000E+04
MODULO DE POISSON: 0.300

TIEMPO(S-A/A): 1.61
MEJORA EN TIEMPO: 37.84 %
ERROR PROMEDIO: 0.03 %
ERROR MÁXIMO: 0.18 %
ERROR MÍNIMO: 0.00 %

=====
    
```

Figura B. 2 – Archivo de salida de datos del programa, primera parte.

**B.3.2. Resultados de las matrices**

En la siguiente figura se observa como el programa representa las matrices de rigidez calculada por ambas rutinas.

```

=====
                POR INTEGRACION SEMI-ANALITICA. DVG
=====
TIEMPO DE EJECUCIÓN (sec):  0.5781250E+00

                MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO  ( Ke )
-----
- .4851E+03  - .1557E+03  0.3142E+03  0.7619E+01  0.2138E+03  0.1679E+03  - .4292E+02  - .1985E+02
- .1557E+03  - .4851E+03  - .1985E+02  - .4292E+02  0.1679E+03  0.2138E+03  0.7619E+01  0.3142E+03
0.3142E+03  - .1985E+02  - .5323E+03  0.2020E+03  - .6553E+02  0.8639E+01  0.2836E+03  - .1908E+03
0.7619E+01  - .4292E+02  0.2020E+03  - .5323E+03  - .1883E+02  0.2916E+03  - .1908E+03  0.2836E+03
0.2138E+03  0.1679E+03  - .6553E+02  - .1883E+02  - .4399E+03  - .1577E+03  0.2916E+03  0.8639E+01
0.1679E+03  0.2138E+03  0.8639E+01  0.2916E+03  - .1577E+03  - .4399E+03  - .1883E+02  - .6553E+02
- .4292E+02  0.7619E+01  0.2836E+03  - .1908E+03  0.2916E+03  - .1883E+02  - .5323E+03  0.2020E+03
- .1985E+02  0.3142E+03  - .1908E+03  0.2836E+03  0.8639E+01  - .6553E+02  0.2020E+03  - .5323E+03

=====
                POR INTEGRACION ANALITICA. GCD
=====
TIEMPO DE EJECUCIÓN (sec):  0.3593750E+00

                MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO  ( Ke )
-----
- .4852E+03  - .1557E+03  0.3143E+03  0.7616E+01  0.2138E+03  0.1679E+03  - .4285E+02  - .1986E+02
- .1557E+03  - .4852E+03  - .1986E+02  - .4285E+02  0.1679E+03  0.2138E+03  0.7616E+01  0.3143E+03
0.3143E+03  - .1986E+02  - .5324E+03  0.2020E+03  - .6547E+02  0.8636E+01  0.2836E+03  - .1908E+03
0.7616E+01  - .4285E+02  0.2020E+03  - .5324E+03  - .1884E+02  0.2917E+03  - .1908E+03  0.2836E+03
0.2138E+03  0.1679E+03  - .6547E+02  - .1884E+02  - .4400E+03  - .1577E+03  0.2917E+03  0.8636E+01
0.1679E+03  0.2138E+03  0.8636E+01  0.2917E+03  - .1577E+03  - .4400E+03  - .1884E+02  - .6547E+02
- .4285E+02  0.7616E+01  0.2836E+03  - .1908E+03  0.2917E+03  - .1884E+02  - .5324E+03  0.2020E+03
- .1986E+02  0.3143E+03  - .1908E+03  0.2836E+03  0.8636E+01  - .6547E+02  0.2020E+03  - .5324E+03

```

Figura B. 3 – Archivo de salida de datos del programa, matrices de rigidez.

**B.3.3. Tabla resumen de tiempo de ejecución**

Finalmente en la salida se presenta una tabla resumen de los tiempos de ejecución computacional de cada rutina, la relación y el porcentaje de optimización o ganancia.

```

NUMERO DE ELEMENTOS:      100000
|=====|
|                TABLA RESUMEN DE TIEMPOS                |
|=====|
| TIPO DE ELEMTO | T. S-A (sec) | T. A (sec) | S-A/A | % T.opt |
|-----|-----|-----|-----|-----|
|  CASO IV (Gene | 0.5781250E+00 | 0.3593750E+00 | 1.61 | 37.84 |
|=====|

```

Figura B. 4 - Archivo de salida de datos del programa, tabla resumen de tiempos.



## APÉNDICE C

# Nulidad de las constantes del jacobiano

### C.1. Demostración matemática de nulidad de las constantes

Para dar un soporte matemático de lo expresado en los capítulos de este trabajo acerca de la nulidad de las constantes del jacobiano, se logró representa éstas en función de las diferencias de coordenadas definidas en el capítulo IV que fueron utilizadas para optimizar las constantes de las ecuaciones.

$$AJ = \frac{1}{16} \cdot [(AX2 - AX1) \cdot (-AY4 + AY3) - (AY2 - AY1) \cdot (-AX2 - AX1)] \quad (D.1)$$

$$BJ = \frac{1}{16} \cdot [(-AX2 - AX1) \cdot (AY4 + AY3) - (-AY2 - AY1) \cdot (AX4 + AX3)] \quad (D.2)$$

$$CJ = \frac{1}{16} \cdot [(AX2 - AX1) \cdot (AY4 + AY3) - (-AY2 - AY1) \cdot (AX4 + AX3)] \quad (D.3)$$

Donde:

$$AX1 = x4 - x3; \quad AX2 = x2 - x1; \quad AX3 = x3 - x2; \quad AX4 = x4 - x1 \quad (D.4)$$

$$AY1 = y4 - y3; \quad AY2 = y2 - y1; \quad AY3 = y3 - y2; \quad AY4 = y4 - y1 \quad (D.5)$$

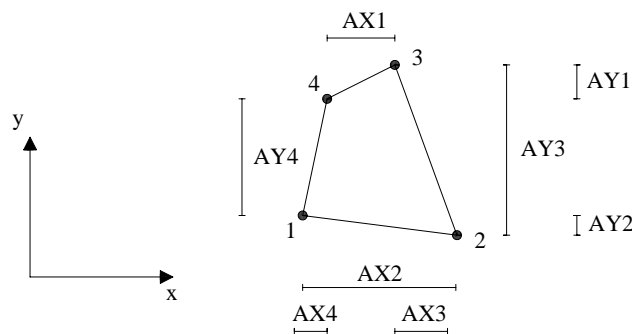


Figura D. 1- Representación grafica de las variables y numeración.

Tomando como referencia la constante  $AJ$ , se procedió a demostrar matemáticamente y de forma general, cuando esta variable puede ser nula o nula relativamente, para esto expresa los valores nulos relativos con el siguiente símbolo ( $\delta$ ) y a  $AJ$  de la siguiente manera:

$$AJ = \frac{1}{16} \cdot [AJ1 - AJ2] \quad (D.6)$$

$$AJ1 = (AX2 - AX1) \cdot (-AY4 + AY3) \quad (D.7)$$

$$AJ2 = (AY2 - AY1) \cdot (-AX2 - AX1) \quad (D.8)$$

Para que la constante tienda a valores nulos relativos hay dos posibles opciones matemáticas.

**C.1.1. Posibilidad I: Elemento con dos lados paralelos al eje X.**

$$AJ1 \rightarrow \delta_1 \quad \text{y} \quad AJ2 \rightarrow \delta_2 ; \quad \text{para que} \quad AJ \rightarrow \delta . \quad (D.9)$$

Donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son valores nulos relativos locales de las constantes  $AJ1$  y  $AJ2$  respectivamente, de manera que se cumpla que:  $\delta = \frac{1}{16} \cdot (\delta_1 - \delta_2)$ .

Geoméricamente podríamos tener un elemento con dos lados paralelos al eje  $x$  de coordenadas globales, esto implicaría que ( $AY1=AY2=0$ ), con lo que el segundo factor de la constante  $AJ2$  se anularía, y si observamos la figura (D.1), cuando esto ocurre necesariamente  $AY3=AY4$ , con lo que el segundo factor de  $AJ2$  se anula y por lo tanto ( $AJ=0$ ). Extendiendo esto al concepto de valores nulos relativos, tendríamos que si las constantes  $AY1$  y/o  $AY2$ , toman valores pequeños con respecto a la magnitud de los lados del elemento, de forma que se acerquen a la frontera, ocasionaría valores nulos relativos locales de las constantes  $AJ1$  y  $AJ2$ , por lo tanto se produciría el nulo relativo de  $AJ$ .

**C.1.2. Posibilidad II: Elemento con dos lados paralelos entre si y rotado entre (-45°,45°) con respecto a X.**

$$AJ1 \neq \delta_1 \quad \text{y} \quad AJ2 \neq \delta_2 ; \quad \text{pero} \quad AJ1 - AJ2 \rightarrow \delta ; \quad \text{para que} \quad AJ \rightarrow \delta . \quad (D.10)$$

Donde las constantes  $AJ1$  y  $AJ2$  pueden tomar un valor cualquiera siempre que su diferencia tienda al nulo relativo, por lo tanto:

$$(AX2 - AX1) \cdot (-AY4 + AY3) \cong (AY2 - AY1) \cdot (-AX2 - AX1) \quad (D.11)$$

Por condiciones de ubicación geométrica las constantes  $AY1$  y  $AY2$  pueden tomar valores negativos, positivos o nulos, pero para elementos con la numeración indicada que tienden a tener los lados (1-2) y (3-4) paralelos, estas constantes siempre tomaran signos opuestos, con lo que el signo de  $(AY2 - AY1)$  dependerá de cual sea la mayor. De igual forma  $AX2$  es positiva y  $AX1$  es negativa, con lo cual el factor  $(AX2 - AX1)$ , es siempre positivo;  $AY3$  y  $AY4$  siempre son positivas y por lo tanto  $(AY3 - AY4)$  se estan restando y el resultado podría ser positivo, negativo o nulo.

La comprobación matemática de esta posibilidad comienza con establecer que las rectas que unen los lados (1-2) y (4-3) deben tener la misma pendiente ( $m_{12} = m_{43}$ ), de esto se extrae la relación entre  $AX1$  y  $AX2$ :

$$m_{12} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{AY2}{AX2} \quad m_{43} = \frac{y4 - y3}{x4 - x3} = \frac{AY1}{AX1} \quad (D.12)$$

$$AX1 = \frac{AX2 \cdot AY1}{AY2} \quad (D.13)$$

Sustituyendo (D.11) en la expresión (D.9) y realizando las operaciones de simplificación necesarias, se llega a la conclusión de que:

$$(AY3 - AY4) = -(AY1 + AY2) \quad (D.14)$$

De forma tal que al sustituir (D.14) y (D.13) en (D.11), se cumple la igualdad.

Para evaluar la posibilidad de que la constante  $AJ$  pudiera ser nula para elementos de lados no paralelos, se utilizó una hoja de cálculo que contiene potentes métodos numéricos de minimización, tal como el método de Newton y el método del gradiente conjugado. Fijando unas coordenadas iniciales, se logró variar las coordenadas de los nodos dos, tres y cuatro

dejando el nodo uno fijo, obligando a respetar las restricciones de signo de los factores y buscar el objetivo de nulidad del valor de la constante  $AJ$  en este caso. De esta manera se evidencio que para cumplir el objetivo ( $AJ \cong 0$ ) respetando las restricciones, las constantes  $AJ1$  y  $AJ2$  pueden tomar un valor cualquiera pero necesariamente  $AJ1 \cong AJ2$ , lo que a la vez implica que los lados (1-2) y (4-3) sean paralelos.

### ***C.1.3. Conclusión sobre la nulidad.***

Con esto se concluye que valores de  $AJ$  tendientes al nulo relativo, están asociados al caso II donde el elemento tiene dos lados paralelos, los cuales pueden estar paralelos al eje  $x$  o en un Angulo  $\alpha$  rotados con respecto a  $x$  acotado entre  $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ , para la numeración mostrada. Es importante aclarar que para otra numeración de nodos en el mismo sentido los resultados son los mismo pero las constantes  $AX1, AY1, \dots$ , ect. se intercambian los signos.

Todo lo anterior se puede aplicar de manera análoga a la constante  $BJ$ , llegando a concluir que valores de  $BJ$  dentro del intervalo nulo relativo, están asociados al caso III donde el elemento tiene dos lados paralelos, los cuales pueden estar paralelos al eje  $y$  o en un ángulo  $\alpha$  rotados con respecto a  $x$ , acotado entre  $45^\circ < \alpha < 135^\circ$ .

Analizando la constante  $CJ$  podemos ver que los dos primeros factores  $(AX2 - AX1) \cdot (AY4 + AY3)$  son siempre positivos y además son de una magnitud mayor a los segundos factores  $(-AY2 - AY1) \cdot (AX4 + AX3)$ , y por tanto se asume la hipótesis de que esta constante no puede ser nula, y además se concluye que el valor absoluto de  $CJ$  siempre será de una magnitud mucho mayor al valor absoluto de las constantes  $AJ$  y  $BJ$ .

## APÉNDICE D

# Código de la rutina analítica

Se presenta en este apéndice la rutina desarrollada en este trabajo para el cálculo de la matriz de rigidez del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos en elasticidad plana. A manera de referencia se presentan identificadas algunas palabras por colores, los cuales representan lo siguiente:

Palabras en:

**Azul:** indican palabras reservadas del lenguaje FORTRAN

**Negro:** variables, operadores, etc.

**Verde:** comentarios (están precedidos del símbolo "!")

```
SUBROUTINE Analitica_Ke (Coord,Ke, TIEMPO3,Nel,Tipo_ele,ELASTI)
```

```
IMPLICIT NONE
```

```
INTEGER,PARAMETER::iwp=SELECTED_REAL_KIND(15)
```

```
! Variables de entrada, jacobiano y elasticidad
```

```
real(iwp),Dimension(5,2):: Coord
```

```
real(iwp):: x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4, E,cg,CttDen
```

```
real(iwp):: AJ,BJ,CJ, D1,D2,D3
```

```
! VARIABLES DE LAS ECUACIONES Y LOGARITMOS
```

```
real(iwp):: AX1,AX2,AX3,AX4,AX5,AX6, AY1,AY2,AY3,AY4,AY5,AY6
```

```
real(iwp):: ALog2,BLog2,ALog3,BLog3,ALog4,BLog4,CLog4,DLog4
```

```
real(iwp):: CttE1,CttE2,CttE3,CttE4
```

```
real(iwp):: A2,B2,C2, A3,B3,C3
```

```
real(iwp):: AA4,BA4,CA4,DA4,EA4, AB4,BB4,CB4,DB4,EB4,AC4, &
```

```
BC4,CC4, DC4, AD4,BD4,CD4,DD4,ED4, AE4,BE4,CE4,DE4, AF4,BF4,CF4
```

```
real(iwp):: AAK2,BFK2,CEK2,DDK2, ADK3,BAK3,CFK3,DCK3
```

```
real(iwp):: AAK4,ABK4,ACK4,ADK4,AEK4, BAK4,BBK4,BCK4,BDK4,BEK4 &
```

```
,CAK4,CBK4,CCK4,CDK4,CAK4,CBK4,CCK4,CDK4,CEK4,EAK4,EBK4, ECK4, &
```

```
EDK4,EEK4, FAK4,FBK4,FCK4,FDK4
```

```
real(iwp):: Actt2,Bctt2,Cctt2, Actt3,Bctt3,Cctt3
```

```
real(iwp):: Actt4,Bctt4,Cctt4,Dctt4, Ectt4
```

```
real(iwp):: AJ2,AJ3,AJ4,AJ5, BJ2,BJ3,BJ4,BJ5, CJ2,CJ3
```

```
real(iwp),dimension(10):: Asimp,Dsimp,Fsimp
```

```
real(iwp),dimension(36):: AK,BK,CK,DK,EK,FK
```

```
real(iwp),dimension(5):: Cuantos
```

```
real(iwp),Dimension(8,8):: Ke
```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```
      real(iwp):: sec3i,sec3f,TIEMPO3 , TOL_AJ,TOL_BJ,TOLmin
      Integer(4):: i,j, m,n, f, Nel, SIG_K
      Character(20) Tipo_ele, ELASTI
!
!===== !
      ! BLOQUE DE ASIGNACIONES DE LAS VARIABLES
!===== !
Ke=0.0
SIG_K=0
!
Asignacion de las corrdenadas del elemento
      x1=Coord(1,1)
      x2=Coord(2,1)
      x3=Coord(3,1)
      x4=Coord(4,1)
      y1=Coord(1,2)
      y2=Coord(2,2)
      y3=Coord(3,2)
      y4=Coord(4,2)
! Asignacion de las ropiedades elásticas del elemento
      E= Coord(5,1)
      cg= Coord(5,2)
! Constantes de las corrdenadas (Introduccion del 1º cambio)
      AX1=x4-x3
      AX2=x2-x1
      AX3=x3-x2
      AX4=x4-x1
      AX5=x4-x2
      AX6=x3-x1
      AY1=y4-y3
      AY2=y2-y1
      AY3=y3-y2
      AY4=y4-y1
      AY5=y4-y2
      AY6=y3-y1

IF (ELASTI=='Tension plana') THEN
      !Hipotesis de tensión plana
      D1= E/(1-cg**2)
      D2= D1*cg
      D3= E/(2*(1+cg))
ELSE IF (ELASTI=='Deformacion plana') THEN
      ! Hipotesis de deformación plana
      D1= (E*(1-cg))/((1+cg)*(1-(2*cg)))
      D2= D1*cg/(1-cg)
      D3= E/(2*(1+cg))
ELSE
      WRITE(*,*) ' ERROR AL INTRODUCIR EN EN ARCHIVO DE ENTRADA DE
DATOS '
      WRITE(*,*) ' EL NOMRE DE LA HIPOTESIS DE ELASTICIDAD: '
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) ' Tension plana '
      WRITE(*,*) ' Deformacion plana '
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,*) ' DEBE IR ENTRE COMILLAS SIMPLES '
      STOP
END IF
```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```
! Constants del jacobiano
AJ= 0.0625*(( AX2-AX1)*(-AY4+AY3)- ( AY2-AY1)*(-AX2-AX1))
BJ= 0.0625*((-AX2-AX1)*( AY4+AY3)-(-AY2-AY1)*( AX4+AX3))
CJ= 0.0625*(( AX2-AX1)*( AY4+AY3)- ( AY2-AY1)*( AX4+AX3))
!
  TOLmin= 0.0025*CJ ! PUEDE VARIAR (0.005 y 0.0005)

  IF ( ABS(AJ)<TOLmin ) AJ=0.0
  IF ( ABS(BJ)<TOLmin ) BJ=0.0
!
  IF ( ABS(CJ)<20.e-20.or.ABS(CJ)<=ABS(AJ+BJ)) THEN
    WRITE(*,*)'POSIBLES ERRORES DE ENTRADA DE DATOS:'
    WRITE(*,*)
    WRITE(*,*)' DATOS DE ENTRADA SON VALORES MUY PEQUEÑOS,
    (CJ<<<1)'
    WRITE(*,*)' , NUMERACION DE LA CONECTIVIDAD NO SIGUE UN
    SENTIDO'
    WRITE(*,*)' O LA GEOMETRIA DEL ELEMENTO PRESENTA UN
    ANGULO INTERNO'
    WRITE(*,*)' MAYOR O IGUAL A 180°.'
    STOP
  End If
  IF (CJ<=0.0) THEN
    CJ=-CJ ! PARA NUMERACION HORARIA
    AJ=-AJ
    BJ=-BJ
    SIG_K=1
  END IF
!
Cuantos= 0
!
sec3i=0.0
CALL cpu_time(sec3i)
  DO n=1,Nel
!
!=====
! CASO 0 AJ=0, BJ= 0, AX1=-AY4, ELEMENTO CUADRADO PARAL
!=====
!
IF(AJ==0.0.and.BJ==0.0.and.abs(AX1)-abs(AY4)==0 .and.AY1==0 &
.and.abs(AX3)==0) THEN
!
Tipo_ele='CASO I.a (Cuadrado)'
!
!Constantes 1,2,3,4,5,7 del k( (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,7) )
AK(1)= AY1**2*D1+AX1**2*D3
AK(2)=-AY1*D2*AX1-AX1*D3*AY1
AK(3)=-AK(1)
AK(4)=-AK(2)
AK(5)=-AY1*D1*AY2-AX1*D3*AX2
AK(6)= 0.0
AK(7)=-AK(5)
DK(1)= AY3**2*D1+AX3**2*D3
DK(2)=-AY3*D2*AX3-AX3*D3*AY3
DK(3)=-AY3*D1*AY4-AX3*D3*AX4
DK(4)= AY3*D2*AX4+AX3*D3*AY4
```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```

DK(5)=-DK(3)
DK(6)= 0.0
DK(7)=-DK(1)
FK(1)= AY5**2*D1+AX5**2*D3
FK(2)=-AY5*D2*AX5-AX5*D3*AY5
FK(3)=-AY5*D1*AY6-AX5*D3*AX6
FK(4)= AY5*D2*AX6+AX5*D3*AY6
FK(5)=-FK(1)
FK(6)= 0.0
FK(7)=-FK(3)
  f= 1
    CttDen= 192.0
    CttE1= (CttDen*CJ)/4.0
    DO j= 1,7
      Ke(1,j)= (DK(f)+AK(f)+3*FK(f))/ CttE1
      f= f+1
    END DO
Ke(1,6)=-Ke(1,2)
Ke(1,8)=-Ke(1,4)
Do i=2,8
  Ke(i,i)=Ke(1,1)
End do
Ke(2,3)=-Ke(1,4)
Ke(2,4)= Ke(1,7)
Ke(2,5)=-Ke(1,2)
Ke(2,6)= Ke(1,5)
Ke(2,7)= Ke(1,4)
Ke(2,8)= Ke(1,3)
Ke(3,4)=-Ke(1,2)
Ke(3,5)= Ke(1,7)
Ke(3,6)= Ke(1,4)
Ke(3,7)= Ke(1,5)
Ke(3,8)= Ke(1,2)
Ke(4,5)=-Ke(1,4)
Ke(4,6)= Ke(1,3)
Ke(4,7)= Ke(1,2)
Ke(4,8)= Ke(1,5)
Ke(5,6)= Ke(1,2)
Ke(5,7)= Ke(1,3)
Ke(5,8)= Ke(1,4)
Ke(6,7)=-Ke(1,4)
Ke(6,8)= Ke(1,7)
Ke(7,8)=-Ke(1,2)
!
Cuantos(1)= Cuantos(1) + 1
!
ELSE
!
!=====
!          !  CONSTANTES PERTENECIENTES A LAS ECUACIONES
!=====
!
Asimp(1)= AY1**2*D1+AX1**2*D3
Asimp(2)=-AY1*D2*AX1-AX1*D3*AY1
Asimp(3)=-AY1*D1*AY2-AX1*D3*AX2
Asimp(4)= AY1*D2*AX2+AX1*D3*AY2
Asimp(5)= AX1**2*D1+AY1**2*D3

```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos



## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```
Asimp(6)= AX1*D2*AY2+AY1*D3*AX2
Asimp(7)=-AX1*D1*AX2-AY1*D3*AY2
Asimp(8)= AY2**2*D1+AX2**2*D3
Asimp(9)=-AY2*D2*AX2-AX2*D3*AY2
Asimp(10)=AX2**2*D1+AY2**2*D3
AK(1)= Asimp(1)
AK(2)= Asimp(2)
AK(3)=-Asimp(1)
AK(4)=-Asimp(2)
AK(5)= Asimp(3)
AK(6)= Asimp(4)
AK(7)=-Asimp(3)
AK(8)=-Asimp(4)
AK(9)= Asimp(5)
AK(10)=-Asimp(2)
AK(11)=-Asimp(5)
AK(12)= Asimp(6)
AK(13)= Asimp(7)
AK(14)=-Asimp(6)
AK(15)=-Asimp(7)
AK(16)= Asimp(1)
AK(17)= Asimp(2)
AK(18)=-Asimp(3)
AK(19)=-Asimp(4)
AK(20)= Asimp(3)
AK(21)= Asimp(4)
AK(22)= Asimp(5)
AK(23)=-Asimp(6)
AK(24)=-Asimp(7)
AK(25)= Asimp(6)
AK(26)= Asimp(7)
AK(27)= Asimp(8)
AK(28)= Asimp(9)
AK(29)=-Asimp(8)
AK(30)=-Asimp(9)
AK(31)= Asimp(10)
AK(32)=-Asimp(9)
AK(33)=-Asimp(10)
AK(34)= Asimp(8)
AK(35)= Asimp(9)
AK(36)= Asimp(10)
```

```
!-----
Dsimp(1)= AY3**2*D1+AX3**2*D3
Dsimp(2)=-AY3*D2*AX3-AX3*D3*AY3
Dsimp(3)=-AY3*D1*AY4-AX3*D3*AX4
Dsimp(4)= AY3*D2*AX4+AX3*D3*AY4
Dsimp(5)= AX3**2*D1+AY3**2*D3
Dsimp(6)=-AX3*D1*AX4-AY3*D3*AY4
Dsimp(7)= AY4**2*D1+AX4**2*D3
Dsimp(8)=-AY4*D2*AX4-AX4*D3*AY4
Dsimp(9)=-AX3*D2*AY4-AY3*D3*AX4
Dsimp(10)=AX4**2*D1+AY4**2*D3
DK(1)= Dsimp(1)
DK(2)= Dsimp(2)
DK(3)= Dsimp(3)
DK(4)= Dsimp(4)
DK(5)=-Dsimp(3)
```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

```

DK(6)=-Dsimp(4)
DK(7)=-Dsimp(1)
DK(8)=-Dsimp(2)
DK(9)= Dsimp(5)
DK(10)=-Dsimp(9)
DK(11)= Dsimp(6)
DK(12)= Dsimp(9)
DK(13)=-Dsimp(6)
DK(14)=-Dsimp(2)
DK(15)=-Dsimp(5)
DK(16)= Dsimp(7)
DK(17)= Dsimp(8)
DK(18)=-Dsimp(7)
DK(19)=-Dsimp(8)
DK(20)=-Dsimp(3)
DK(21)= Dsimp(9)
DK(22)= Dsimp(10)
DK(23)=-Dsimp(8)
DK(24)=-Dsimp(10)
DK(25)=-Dsimp(4)
DK(26)=-Dsimp(6)
DK(27)= Dsimp(7)
DK(28)= Dsimp(8)
DK(29)= Dsimp(3)
DK(30)=-Dsimp(9)
DK(31)= Dsimp(10)
DK(32)= Dsimp(4)
DK(33)= Dsimp(6)
DK(34)= Dsimp(1)
DK(35)= Dsimp(2)
DK(36)= Dsimp(5)

```

```

!-----
Fsimp(1)= AY5**2*D1+AX5**2*D3
Fsimp(2)=-AY5*D2*AX5-AX5*D3*AY5
Fsimp(3)=-AY5*D1*AY6-AX5*D3*AX6
Fsimp(4)= AY5*D2*AX6+AX5*D3*AY6
Fsimp(5)= AX5**2*D1+AY5**2*D3
Fsimp(6)=-AX5*D1*AX6-AY5*D3*AY6
Fsimp(7)= AY6**2*D1+AX6**2*D3
Fsimp(8)=-AY6*D2*AX6-AX6*D3*AY6
Fsimp(9)=-AX5*D2*AY6-AY5*D3*AX6
Fsimp(10)=AX6**2*D1+AY6**2*D3
FK(1)= Fsimp(1)
FK(2)= Fsimp(2)
FK(3)= Fsimp(3)
FK(4)= Fsimp(4)
FK(5)=-Fsimp(1)
FK(6)=-Fsimp(2)
FK(7)=-Fsimp(3)
FK(8)=-Fsimp(4)
FK(9)= Fsimp(5)
FK(10)=-Fsimp(9)
FK(11)= Fsimp(6)
FK(12)=-Fsimp(2)
FK(13)=-Fsimp(5)
FK(14)= Fsimp(9)
FK(15)=-Fsimp(6)

```

```

FK(16)= Fsimp(7)
FK(17)= Fsimp(8)
FK(18)=-Fsimp(3)
FK(19)= Fsimp(9)
FK(20)=-Fsimp(7)
FK(21)=-Fsimp(8)
FK(22)= Fsimp(10)
FK(23)=-Fsimp(4)
FK(24)=-Fsimp(6)
FK(25)=-Fsimp(8)
FK(26)=-Fsimp(10)
FK(27)= Fsimp(1)
FK(28)= Fsimp(2)
FK(29)= Fsimp(3)
FK(30)= Fsimp(4)
FK(31)= Fsimp(5)
FK(32)=-Fsimp(9)
FK(33)= Fsimp(6)
FK(34)= Fsimp(7)
FK(35)= Fsimp(8)
FK(36)= Fsimp(10)
!-----
IF (BJ/=0) THEN
!
EK(1)=-2*D3*AX3*AX5-2*D1*AY3*AY5
EK(2)=(AY5*AX3+AY3*AX5)*D3+(AY5*AX3+AY3*AX5)*D2
EK(3)=(AX3*AX6+AX5*AX4)*D3+(AY5*AY4+AY3*AY6)*D1
EK(4)=(-AX3*AY6-AX5*AY4)*D3+(-AY5*AX4-AY3*AX6)*D2
EK(5)=(AX3*AX5-AX5*AX4)*D3+(-AY5*AY4+AY3*AY5)*D1
EK(6)=(-AY5*AX3+AX5*AY4)*D3+(AY5*AX4-AY3*AX5)*D2
EK(7)=(-AX3*AX6+AX3*AX5)*D3+(AY3*AY5-AY3*AY6)*D1
EK(8)=(AX3*AY6-AY3*AX5)*D3+(-AY5*AX3+AY3*AX6)*D2
EK(9)=-2*D3*AY3*AY5-2*D1*AX3*AX5
EK(10)=(-AY3*AX6-AY5*AX4)*D3+(-AX5*AY4-AX3*AY6)*D2
EK(11)=(AY3*AY6+AY5*AY4)*D3+(AX5*AX4+AX3*AX6)*D1
EK(12)=(-AY3*AX5+AY5*AX4)*D3+(AX5*AY4-AX3*AY5)*D2
EK(13)=(AY3*AY5-AY5*AY4)*D3+(-AX5*AX4+AX3*AX5)*D1
EK(14)=(AY3*AX6-AX3*AY5)*D3+(-AY3*AX5+AX3*AY6)*D2
EK(15)=(-AY3*AY6+AY3*AY5)*D3+(AX3*AX5-AX3*AX6)*D1
EK(16)=-2*D3*AX4*AX6-2*D1*AY4*AY6
EK(17)=(AY6*AX4+AY4*AX6)*D3+(AY6*AX4+AY4*AX6)*D2
EK(18)=(-AX5*AX4+AX4*AX6)*D3+(AY4*AY6-AY5*AY4)*D1
EK(19)=(AY5*AX4-AY4*AX6)*D3+(-AY6*AX4+AX5*AY4)*D2
EK(20)=(AX4*AX6-AX3*AX6)*D3+(-AY3*AY6+AY4*AY6)*D1
EK(21)=(-AY6*AX4+AY3*AX6)*D3+(AX3*AY6-AY4*AX6)*D2
EK(22)=-2*D3*AY4*AY6-2*D1*AX4*AX6
EK(23)=(AX5*AY4-AY6*AX4)*D3+(-AX6*AY4+AY5*AX4)*D2
EK(24)=(-AY5*AY4+AY4*AY6)*D3+(AX4*AX6-AX5*AX4)*D1
EK(25)=(-AX6*AY4+AX3*AY6)*D3+(AY3*AX6-AY6*AX4)*D2
EK(26)=(AY4*AY6-AY3*AY6)*D3+(-AX3*AX6+AX4*AX6)*D1
EK(27)=2*D3*AX5*AX4+2*D1*AY5*AY4
EK(28)=(-AY5*AX4-AX5*AY4)*D3+(-AY5*AX4-AX5*AY4)*D2
EK(29)=(-AX4*AX6-AX3*AX5)*D3+(-AY3*AY5-AY4*AY6)*D1
EK(30)=(AY6*AX4+AY3*AX5)*D3+(AY5*AX3+AY4*AX6)*D2
EK(31)=2*D3*AY5*AY4+2*D1*AX5*AX4
EK(32)=(AX6*AY4+AX3*AY5)*D3+(AY3*AX5+AY6*AX4)*D2
EK(33)=(-AY4*AY6-AY3*AY5)*D3+(-AX3*AX5-AX4*AX6)*D1

```

## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

```
EK(34)=2*D3*AX3*AX6+2*D1*AY3*AY6
EK(35)=(-AX3*AY6-AY3*AX6)*D3+(-AX3*AY6-AY3*AX6)*D2
EK(36)=2*D3*AY3*AY6+2*D1*AX3*AX6
!
END IF
!-----
IF (AJ/=0) THEN
!
CK(1)=-2*AX1*D3*AX5-2*AY1*D1*AY5
CK(2)=(AY1*AX5+AX1*AY5)*D3+(AY1*AX5+AX1*AY5)*D2
CK(3)=(AX1*AX5+AX1*AX6)*D3+(AY1*AY6+AY1*AY5)*D1
CK(4)=(-AY1*AX5-AX1*AY6)*D3+(-AY1*AX6-AX1*AY5)*D2
CK(5)=(AX2*AX5+AX1*AX5)*D3+(AY1*AY5+AY2*AY5)*D1
CK(6)=(-AY2*AX5-AX1*AY5)*D3+(-AY1*AX5-AX2*AY5)*D2
CK(7)=(-AX2*AX5-AX1*AX6)*D3+(-AY1*AY6-AY2*AY5)*D1
CK(8)=(AY2*AX5+AX1*AY6)*D3+(AY1*AX6+AX2*AY5)*D2
CK(9)=-2*AX1*D1*AX5-2*AY1*D3*AY5
CK(10)=(-AX1*AY5-AY1*AX6)*D3+(-AX1*AY6-AY1*AX5)*D2
CK(11)=(AY1*AY5+AY1*AY6)*D3+(AX1*AX5+AX1*AX6)*D1
CK(12)=(-AX2*AY5-AY1*AX5)*D3+(-AX1*AY5-AY2*AX5)*D2
CK(13)=(AY2*AY5+AY1*AY5)*D3+(AX2*AX5+AX1*AX5)*D1
CK(14)=(AX2*AY5+AY1*AX6)*D3+(AX1*AY6+AY2*AX5)*D2
CK(15)=(-AY2*AY5-AY1*AY6)*D3+(-AX2*AX5-AX1*AX6)*D1
CK(16)=-2*AX1*D3*AX6-2*AY1*D1*AY6
CK(17)=(AY1*AX6+AX1*AY6)*D3+(AY1*AX6+AX1*AY6)*D2
CK(18)=(-AX2*AX6-AX1*AX5)*D3+(-AY1*AY5-AY2*AY6)*D1
CK(19)=(AY2*AX6+AX1*AY5)*D3+(AY1*AX5+AX2*AY6)*D2
CK(20)=(AX2*AX6+AX1*AX6)*D3+(AY1*AY6+AY2*AY6)*D1
CK(21)=(-AY2*AX6-AX1*AY6)*D3+(-AY1*AX6-AX2*AY6)*D2
CK(22)=-2*AX1*D1*AX6-2*AY1*D3*AY6
CK(23)=(AX2*AY6+AY1*AX5)*D3+(AX1*AY5+AY2*AX6)*D2
CK(24)=(-AY2*AY6-AY1*AY5)*D3+(-AX2*AX6-AX1*AX5)*D1
CK(25)=(-AX2*AY6-AY1*AX6)*D3+(-AX1*AY6-AY2*AX6)*D2
CK(26)=(AY2*AY6+AY1*AY6)*D3+(AX2*AX6+AX1*AX6)*D1
CK(27)=-2*D3*AX2*AX5-2*D1*AY2*AY5
CK(28)=(AY2*AX5+AX2*AY5)*D3+(AY2*AX5+AX2*AY5)*D2
CK(29)=(AX2*AX5+AX2*AX6)*D3+(AY2*AY6+AY2*AY5)*D1
CK(30)=(-AY2*AX5-AX2*AY6)*D3+(-AY2*AX6-AX2*AY5)*D2
CK(31)=-2*D1*AX2*AX5-2*D3*AY2*AY5
CK(32)=(-AX2*AY5-AY2*AX6)*D3+(-AX2*AY6-AY2*AX5)*D2
CK(33)=(AY2*AY5+AY2*AY6)*D3+(AX2*AX5+AX2*AX6)*D1
CK(34)=-2*D3*AX2*AX6-2*D1*AY2*AY6
CK(35)=(AY2*AX6+AX2*AY6)*D3+(AY2*AX6+AX2*AY6)*D2
CK(36)=-2*D1*AX2*AX6-2*D3*AY2*AY6
!
END IF
!-----
IF (AJ/=0 .AND. BJ/=0) THEN
!
BK(1)=2*AY1*D1*AY3+2*AX1*D3*AX3
BK(2)=(-AX1*AY3-AY1*AX3)*D3+(-AX1*AY3-AY1*AX3)*D2
BK(3)=(-AX1*AX3-AX1*AX4)*D3+(-AY1*AY3-AY1*AY4)*D1
BK(4)=(AY1*AX3+AX1*AY4)*D3+(AX1*AY3+AY1*AX4)*D2
BK(5)=(-AX2*AX3+AX1*AX4)*D3+(-AY2*AY3+AY1*AY4)*D1
BK(6)=(AY2*AX3-AX1*AY4)*D3+(AX2*AY3-AY1*AX4)*D2
BK(7)=(AX2*AX3-AX1*AX3)*D3+(AY2*AY3-AY1*AY3)*D1
BK(8)=(-AY2*AX3+AX1*AY3)*D3+(-AX2*AY3+AY1*AX3)*D2
```

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

```

BK(9)=2*AX1*D1*AX3+2*AY1*D3*AY3
BK(10)=(AX1*AY3+AY1*AX4)*D3+(AY1*AX3+AX1*AY4)*D2
BK(11)=(-AY1*AY3-AY1*AY4)*D3+(-AX1*AX3-AX1*AX4)*D1
BK(12)=(AX2*AY3-AY1*AX4)*D3+(AY2*AX3-AX1*AY4)*D2
BK(13)=(-AY2*AY3+AY1*AY4)*D3+(-AX2*AX3+AX1*AX4)*D1
BK(14)=(-AX2*AY3+AY1*AX3)*D3+(-AY2*AX3+AX1*AY3)*D2
BK(15)=(AY2*AY3-AY1*AY3)*D3+(AX2*AX3-AX1*AX3)*D1
BK(16)=2*AY1*D1*AY4+2*AX1*D3*AX4
BK(17)=(-AX1*AY4-AY1*AX4)*D3+(-AX1*AY4-AY1*AX4)*D2
BK(18)=(AX2*AX4-AX1*AX4)*D3+(AY2*AY4-AY1*AY4)*D1
BK(19)=(-AY2*AX4+AX1*AY4)*D3+(-AX2*AY4+AY1*AX4)*D2
BK(20)=(-AX2*AX4+AX1*AX3)*D3+(-AY2*AY4+AY1*AY3)*D1
BK(21)=(AY2*AX4-AX1*AY3)*D3+(AX2*AY4-AY1*AX3)*D2
BK(22)=2*AX1*D1*AX4+2*AY1*D3*AY4
BK(23)=(-AX2*AY4+AY1*AX4)*D3+(-AY2*AX4+AX1*AY4)*D2
BK(24)=(AY2*AY4-AY1*AY4)*D3+(AX2*AX4-AX1*AX4)*D1
BK(25)=(AX2*AY4-AY1*AX3)*D3+(AY2*AX4-AX1*AY3)*D2
BK(26)=(-AY2*AY4+AY1*AY3)*D3+(-AX2*AX4+AX1*AX3)*D1
BK(27)=-2*D1*AY2*AY4-2*D3*AX2*AX4
BK(28)=(AX2*AY4+AY2*AX4)*D3+(AX2*AY4+AY2*AX4)*D2
BK(29)=(AX2*AX4+AX2*AX3)*D3+(AY2*AY4+AY2*AY3)*D1
BK(30)=(-AY2*AX4-AX2*AY3)*D3+(-AX2*AY4-AY2*AX3)*D2
BK(31)=-2*D1*AX2*AX4-2*D3*AY2*AY4
BK(32)=(-AX2*AY4-AY2*AX3)*D3+(-AY2*AX4-AX2*AY3)*D2
BK(33)=(AY2*AY4+AY2*AY3)*D3+(AX2*AX4+AX2*AX3)*D1
BK(34)=-2*D1*AY2*AY3-2*D3*AX2*AX3
BK(35)=(AX2*AY3+AY2*AX3)*D3+(AX2*AY3+AY2*AX3)*D2
BK(36)=-2*D1*AX2*AX3-2*D3*AY2*AY3
!
END IF
!
!=====
! DETERMINACIÓN Y LLENADO DE LOS TÉRMINOS DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ
!=====
      CttDen= 192.0      ! 64*3
!=====
! CASO I AJ=BJ=0
!=====
IF (AJ==0.0.and.BJ==0.0) THEN
  Tipo_ele='CASO I (AJ=BJ=0)'
  f= 1
  CttE1= CttDen*CJ/4.0
  DO i=1,8
    DO j= i,8
!
      Ke(i,j)=( DK(f)+AK(f)+3*FK(f) )/CttE1
      f= f+1
    END DO
  END DO
Cuantos(2)= Cuantos(2) + 1
!
!=====
! CASO II AJ= 0
!=====
ELSE IF (AJ==0.0.AND.BJ/=0) THEN
  Tipo_ele='CASO II (AJ=0)'
  f= 1

```

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```

    ALog2= LOG(-BJ+CJ)
    BLog2= LOG(BJ+CJ)
    CttE2= CttDen*BJ*BJ*BJ
    A2= 6*BJ*BJ ; B2= 6*CJ*CJ ; C2= 6*BJ*CJ
DO i=1,8
    DO j= i,8
        AAK2= A2*AK(f)/3.0
        BFK2= A2*FK(f)
        CEK2= C2*EK(f)
        DDK2= B2*DK(f)
        Actt2=-AAK2-BFK2+CEK2-DDK2
        Bctt2=+AAK2+BFK2-CEK2+DDK2
        Cctt2=-C2*DK(f)+A2*EK(f)
!
        Ke(i,j)=( Actt2*ALog2+Bctt2*BLog2+2*Cctt2 )/CttE2
        f= f+1
    END DO
END DO
Cuantos(3)= Cuantos(3) + 1
!
!=====
! CASO III BJ= 0
!=====
ELSE IF (BJ==0.00.AND.AJ/=0) THEN
    Tipo_ele='CASO III (BJ=0)'
    f= 1
    ALog3= LOG(-AJ+CJ)
    BLog3= LOG(AJ+CJ)
    CttE3= CttDen*AJ*AJ*AJ
    A3= 6*AJ*AJ ; B3= 6*CJ*CJ ; C3= 6*AJ*CJ
DO i=1,8
    DO j= i,8
        ADK3= A3*DK(f)/3.0
        BAK3= B3*AK(f)
        CFK3= A3*FK(f)
        DCK3= C3*CK(f)
        Actt3= -ADK3-BAK3-CFK3+DCK3
        Bctt3= ADK3+BAK3+CFK3-DCK3
        Cctt3= -C3*AK(f)+A3*CK(f)
!
        Ke(i,j)=( Actt3*ALog3+Bctt3*BLog3+2*Cctt3 )/CttE3
        f= f+1
    END DO
END DO
Cuantos(3)= Cuantos(3) + 1
!
!=====
! CASO IV GENERAL LADOS NO PARALELOS ENTRE SI.
!=====
ELSE IF (BJ/=0.AND.AJ/=0) THEN
    Tipo_ele='CASO IV (General)'
    f= 1
    AJ2=AJ*AJ
    AJ3=AJ*AJ2
    AJ4=AJ*AJ3
    AJ5=AJ*AJ4
    BJ2=BJ*BJ

```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```
BJ3=BJ*BJ2
BJ4=BJ*BJ3
BJ5=BJ*BJ4
CJ2=CJ*CJ
CJ3=CJ*CJ2
!
ALog4= LOG(AJ+BJ+CJ)
BLog4= LOG(AJ-BJ+CJ)
CLog4= LOG(-AJ+BJ+CJ)
DLog4= LOG(-AJ-BJ+CJ)
CttE4= CttDen*2*AJ3*BJ3
!
AA4=2*AJ3*BJ2
BA4=2*BJ5
CA4=6*BJ4*CJ
DA4=6*BJ3*CJ2
EA4=2*BJ2*CJ3
AAK4=AA4+BA4+CA4+DA4+EA4
ABK4=-AA4+BA4-CA4+DA4-EA4
ACK4=AA4-BA4-CA4-DA4-EA4
ADK4=-AA4-BA4+CA4-DA4+EA4
AB4=2*AJ4*BJ
BB4=3*AJ3*BJ*CJ
CB4=2*AJ*BJ4
DB4=3*AJ*BJ3*CJ
EB4=AJ*BJ*CJ3
BAK4=-AB4-BB4-CB4-DB4+EB4
BBK4=AB4+BB4-CB4+DB4-EB4
BCK4=-AB4+BB4+CB4+DB4-EB4
BDK4=AB4-BB4+CB4-DB4+EB4
AC4=3*AJ3*BJ2
BC4=3*AJ*BJ4
CC4=6*AJ*BJ3*CJ
DC4=3*AJ*BJ2*CJ2
CAK4=AC4-BC4-CC4-DC4
CBK4=-AC4+BC4-CC4+DC4
CCK4=-AC4+BC4+CC4+DC4
CDK4=AC4-BC4+CC4-DC4
AD4=2*AJ5
BD4=6*AJ4*CJ
CD4=6*AJ3*CJ2
DD4=2*AJ2*BJ3
ED4=2*AJ2*CJ3
DAK4=AD4+BD4+CD4+DD4+ED4
DBK4=-AD4-BD4-CD4+DD4-ED4
DCK4=AD4-BD4+CD4-DD4-ED4
DDK4=-AD4+BD4-CD4-DD4+ED4
AE4=3*AJ4*BJ
BE4=6*AJ3*BJ*CJ
CE4=3*AJ2*BJ3
DE4=3*AJ2*BJ*CJ2
EAK4=-AE4-BE4+CE4-DE4
EBK4=AE4+BE4-CE4+DE4
ECK4=AE4-BE4-CE4+DE4
EDK4=-AE4+BE4+CE4-DE4
AF4=6*AJ3*BJ2
BF4=6*AJ2*BJ3
```

---

Cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos

## APÉNDICE D. Código de la rutina analítica

---

```
CF4=6*AJ2*BJ2*CJ
  FAK4=AF4+BF4+CF4
  FBK4=-AF4+BF4-CF4
  FCK4=AF4-BF4-CF4
  FDK4=-AF4-BF4+CF4
AEK4=-16*AJ*BJ3*CJ
BEK4=4*AJ2*BJ2*CJ
CEK4=12*AJ2*BJ3
DEK4=-16*AJ3*BJ*CJ
EEK4=12*AJ3*BJ2
!
  DO i=1,8
    DO j= i,8
      !
      Actt4=AAK4*AK(f)+BAK4*BK(f)+CAK4*CK(f)+DAK4*DK(f)+EAK4*EK(f)+FAK4*FK(f)
      Bctt4=ABK4*AK(f)+BBK4*BK(f)+CBK4*CK(f)+DBK4*DK(f)+EBK4*EK(f)+FBK4*FK(f)
      Cctt4=ACK4*AK(f)+BCK4*BK(f)+CCK4*CK(f)+DCK4*DK(f)+ECK4*EK(f)+FCK4*FK(f)
      Dctt4=ADK4*AK(f)+BDK4*BK(f)+CDK4*CK(f)+DDK4*DK(f)+EDK4*EK(f)+FDK4*FK(f)
      Ectt4=AEK4*AK(f)+BEK4*BK(f)+CEK4*CK(f)+DEK4*DK(f)+EEK4*EK(f)
      !
      Ke(i,j)=(Actt4*ALog4+Bctt4*BLog4+Cctt4*CLog4+Dctt4*DLog4+Ectt4)/CttE4
      !
      f=f+1
    END DO
  END DO
Cuantos(5)= Cuantos(5) + 1
!
  END IF ! Fin de los casos

END IF ! Salida del cuadrado
!
!-----
! LLENADO DE LA PARTE SIMETRICA Y SIGNO DE LA MATRIZ
!-----
  DO i= 2,8
    DO j= 1,(i-1)
      Ke(i,j)= Ke(j,i)
    END DO
  END DO
  IF ( (SIG_K==0) ) Ke=-Ke !Para que tengan el mismo SIGNO y hacer
comparacion de diferencia
!-----
!
END DO ! Fin Nel
!
CALL cpu_time(sec3f)
!
TIEMPO3= sec3f-sec3i
!
END SUBROUTINE Analitica_Ke
```