

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**CÁLCULO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ POR  
INTEGRACIÓN ANALÍTICA DE ELEMENTOS FINITOS  
CUADRILÁTEROS ISOPARAMÉTRICOS DE OCHO NODOS**

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO  
PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
POR EL BACHILLER **TRINO ANTONIO BALOA MONTILLA**  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

Tutor Académico:  
Prof. Liber Videla N.

Caracas, mayo de 2006

**Baloa Montilla Trino Antonio**  
**CÁLCULO DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ POR INTEGRACIÓN**  
**ANALÍTICA DE ELEMENTOS FINITOS CUADRILÁTEROS**  
**ISOPARAMÉTRICOS DE OCHO NODOS**  
**Tutor Académico: Prof. Liber Videla**  
**Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Civil 2006,**  
**número de páginas (151)**

Palabras claves: Integración analítica, matriz de rigidez, elementos finitos, elasticidad plana, tiempo de ejecución computacional.

**RESUMEN**

Este trabajo tiene por objeto integrar analíticamente cinco casos de matrices de rigidez de un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos en elasticidad plana. Para lograr este objetivo se aplicó una técnica novedosa desarrollada por Videla et al (2005), además de utilizar herramientas poderosas de Sistemas de Álgebra por Computadora (SAC). La técnica y SAC permiten integrar analíticamente las matrices de rigidez de los elementos finitos más utilizados en el análisis de medios continuos porque se pueden obtener ecuaciones generales, las cuales varían según las formas válidas posibles que adoptan los diversos elementos finitos en dos dimensiones.

Para el elemento finito en estudio se obtuvo una (1) ecuación general constante para cualquier forma válida posible que pueda adoptar el elemento finito, así como treinta y nueve (39) ecuaciones particulares pertenecientes al determinante del Jacobiano. De las ecuaciones encontradas se integraron cinco (5) de ellas, las cuales, se ordenaron al crear cinco subrutinas en un lenguaje de programación de alto nivel (ForTran 95), que permitieron comparar los tiempos de ejecución computacional con respecto a la integración numérica de Gauss-Legendre de tercer y cuarto orden, aparte, se estudió el error de precisión producido por las distorsiones en la geometría que pueden presentar los elementos finitos. Luego, las subrutinas se adherieron a un programa de análisis de medios continuos elásticos lineales (FE2D), lo que permitió calcular desplazamientos y esfuerzos de tres problemas de medios continuos de contornos curvos.

Finalmente, se demuestra que la integración analítica de los cinco (5) casos del elemento finito son menos eficiente en tiempo de ejecución que la integración numérica de tercer orden, distinto cuando se compararon estos cinco (5) casos del elemento finito integrados analíticamente contra la integración numérica de cuarto orden porque la ganancia en tiempo de ejecución que se obtuvo para la integración analítica fue en tres de los cinco tipos de elementos finitos.

Un ser integral, conoce sin viajar, ve sin mirar y realiza sin hacer.

**Lao – T – Se**

## AGRADECIMIENTOS

A mi Madre por su dedicación, su comprensión y apoyo permanente.

A Mariluz Arias, mi Compañera, Amiga y Confidente por estar junto a mi siempre en las buenas y las malas.

A mi Maestro y Amigo, Liber Videla por su permanente deseo de enseñar y tener un buen consejo siempre que lo necesito.

A mis tios Lorenzo y Marta por la atención que le prestan a mi madre.

A mi sobrino Giresse Volcán por apoyarme en las diligencias necesarias para los tratamientos de mi Madre.

A los profesores de la Facultad de Ingeniería, William Annicchiaricco y José de Jesús Gaspar, a quienes les solicite ayuda y la aportaron sin ningún interés.

Al personal del Instituto de Materiales y Modelos Estructurales por su colaboración, además del préstamo de las instalaciones y computadoras para la realización de esta investigación.

En fin, a todos aquellos que hicieron posible que este trabajo se llevará a cabo.

## **DEDICATORIA**

A mi Madre quién se dedicó a darme todo su amor y apoyo. Asimismo, a la memoria de mi Padre quien me inculcó el deseo a estudiar.

## ÍNDICE

Portada	
Resumen	
Frase	
Agradecimientos	
Dedicatoria	
Índice.....	<b>i - v</b>
Índice de ecuaciones.....	<b>vi – xii</b>
Índice de tablas.....	<b>xii</b>
Índice de figuras.....	<b>xiv – xvi</b>
Glosario.....	<b>xvii - xvii</b>

### CAPÍTULO 1

## **Introducción**

1.1 Planteamiento del problema.....	<b>1</b>
1.2 Antecedentes.....	<b>3</b>
1.3 Objetivos de la investigación	
1.3.1 Objetivo general.....	<b>7</b>
1.3.2 Objetivos específicos.....	<b>7</b>
1.3.3 Aportes.....	<b>8</b>
1.4 Metodología.....	<b>9</b>
1.4.1 Teoría.....	<b>9</b>
1.4.2 Fase I.....	<b>9</b>
1.4.3 Fase II.....	<b>11</b>

1.4.4 Fase III.....	11
1.4 Líneas futuras de investigación.....	11
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>Teoría</b>	
2.1 Conceptos básicos.....	12
2.1.1 Conceptos de elasticidad.....	12
2.1.1.1 Ecuaciones de equilibrio.....	13
2.1.1.2 Elasticidad plana.....	17
2.1.1.2.1 Tensión plana.....	17
2.1.1.2.2 Deformación plana.....	18
2.1.1.3 Relaciones esfuerzos – deformaciones.....	18
2.1.1.4 Relaciones deformaciones – desplazamientos.....	18
2.1.1.5 Relaciones esfuerzos – deformaciones.....	21
2.1.2 Conceptos energéticos.....	22
2.1.2.1 Teorema de los trabajos virtuales.....	22
2.1.2.2 Principio de la energía potencial.....	24
2.1.3 Conceptos matemáticos.....	25
2.1.3.1 Coordenadas naturales de longitud.....	25
2.1.3.2 Jacobiano.....	27
2.1.3.3 Integración numérica bidimensional de elementos cuadriláteros.....	29
2.2 Formulación del método de los elementos finitos	
2.2.1 Concepto y origen del Método de los elementos finitos.....	33
2.2.2 Método basado en los residuos ponderados: Galerkin.....	34
2.2.3 Modelo de los desplazamientos	
2.2.3.1 Campo de desplazamientos.....	37
2.2.3.2 Campo de deformaciones.....	38
2.2.3.3 Campo de tensiones.....	38
2.2.4 Elementos finitos cuadriláteros curvos.....	39
2.2.4.1 Obtención de las funciones de forma.....	40
2.2.5 Tipos de elementos convergentes.....	43

2.2.5.1	Subparamétricos.....	43
2.2.5.2	Isoparamétricos.....	43
2.2.5.3	Superparamétricos.....	43
2.2.6	Criterios de convergencia.....	44
2.2.6.1	Criterios de continuidad.....	44
2.2.6.2	Criterios de derivabilidad.....	44
2.2.6.3	Criterios de integrabilidad.....	44
2.2.6.4	Criterios de la parcela.....	45
2.2.6.5	Criterios de deformación unitario.....	45
2.2.6.6	Criterios de cuerpo rígido.....	45
2.2.6.7	Criterios de compatibilidad.....	45
2.3	Uso de los Sistemas de Álgebra por Computadora (SAC)	
2.3.1	Antecedentes.....	46
2.3.2	Uso en la ingeniería.....	47
2.3.3	SAC utilizado en este trabajo: Maple.....	48
2.3.3.1	Factorización.....	52
2.3.3.2	Matrices.....	54
2.3.3.4	Definición de procedimientos.....	54
2.3.3.5	Conversión de expresiones simbólicas a Fortran.....	55

## CAPÍTULO 3

---

### Formulación isoparamétrica

3.1	Introducción.....	57
3.2	Transformación de un elemento finito de un plano euclidiano a uno normalizado y viceversa.....	58
3.3	Funciones de forma para un elemento finito cuadrilátero de ocho nodos.....	59
3.4	Transformación isoparamétrica.....	60
3.5	Sistema matricial de derivadas parciales.....	62

3.6 Matriz de rigidez.....	63
3.6.1 Sub matriz de rigidez.....	65
3.7 Técnica para la obtención de las matrices de rigidez por integración analítica de los elementos finitos más utilizados en medios continuos elásticos.....	66
3.7.1 Elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos.....	67
3.7.1.1 Ecuación del determinante del Jacobiano dependiendo de la geometría del elemento finito cuadrilátero de 8 nodos....	72

## CAPÍTULO 4

### **Comparación de distorsión geométrica y de tiempo de ejecución computacional**

4.1 Elementos finitos de geometría distorsionada.....	74
4.2 Tiempos de ejecución computacional.....	76

## CAPÍTULO 5

### **Aplicaciones..... 77**

5.1 Ejemplos	
5.1.1 Placa cuadrada con orificio elíptico.....	78
5.1.1.1 Planteamiento del problema.....	78
5.1.1.2 Características del problema.....	78
5.1.1.3 Problema discretizado.....	79
5.1.1.4 Resultados.....	79
5.1.2 Viga en voladizo de sección variable.....	80
5.1.2.1 Planteamiento del problema.....	80
5.1.2.2 Características del problema.....	80
5.1.2.3 Problema discretizado.....	81
5.1.2.4 Resultados.....	81
5.1.3 Presa en arco.....	82
5.1.3.1 Planteamiento del problema.....	82

5.1.3.2 Características del problema.....	82
5.1.3.3 Problema discretizado.....	83
5.1.3.4 Resultados.....	84
<b>CAPÍTULO 6</b>	
<b>Conclusiones.....</b>	<b>85</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>88</b>
<b>Anexos</b>	
<hr/>	
<b><u>A</u>: Manual del usuario.....</b>	<b>92</b>
<b><u>B</u>: Detalles de las expresiones ECB.....</b>	<b>95</b>
<b><u>C</u>: Elementos isoparamétricos.....</b>	<b>98</b>
<b><u>D</u>: Códigos de elementos integrados.....</b>	<b>124</b>
<b><u>E</u>: Consistencia de cargas nodales.....</b>	<b>135</b>

## **ÍNDICE DE ECUACIONES**

Ecuación 2.1	
Vector de esfuerzo.....	<b>14</b>
Ecuación 2.2	
Primera ecuación de equilibrio en la dirección x.....	<b>14</b>
Ecuación 2.3	
Ecuación de equilibrio en las direcciones X e Y.....	<b>15</b>
Ecuación 2.4a	
Relación de la expresión analítica de Cauchy.....	<b>15</b>
Ecuación 2.4b	
Demostración: Relación de la expresión analítica de Cauchy.....	<b>16</b>
Ecuación 2.5	
Vector de deformaciones.....	<b>18</b>
Ecuación 2.6	
Fórmulas de las componentes del vector deformaciones.....	<b>19</b>
Ecuación 2.7	
Ley de Hooke en forma matricial.....	<b>20</b>
Ecuación 2.8	
Matriz constitutiva o elástica.....	<b>20</b>
Ecuación 2.9 a	
Términos de la matriz elástica en tensión plana.....	<b>20</b>
Ecuación 2.9 b	
Términos de la matriz elástica en deformación plana.....	<b>20</b>

Ecuación 2.10	
Módulo de corte.....	<b>20</b>
Ecuación 2.10 a	
Deformaciones normales.....	<b>20</b>
Ecuación 2.11	
Fórmulas para la transformación de tensión plana a deformación plana y viceversa.....	<b>21</b>
Ecuación 2.12	
Campos de desplazamientos definidos en un punto del cuerpo.....	<b>21</b>
Ecuación 2.13 a	
Componentes de la deformaciones lineales al plano de deformación.....	<b>22</b>
Ecuación 2.13 b	
Componente de la deformación angular contenida en el plano de deformación.....	<b>22</b>
Ecuación 2.14	
Teorema de los Trabajos Virtuales.....	<b>23</b>
Ecuación 2.15	
Teorema de los Trabajos Virtuales.....	<b>23</b>
Ecuación 2.16	
Representación de las matrices que posee la ecuación del Teorema de los Trabajos Virtuales .....	<b>23</b>
Ecuación 2.17	
Energía potencial total de la estructura.....	<b>24</b>
Ecuación 2.18	
Variación de la energía potencial total.....	<b>24</b>

Ecuación 2.19	
Determinación de una posición de un punto cualquiera en un sistema de coordenadas naturales: coordenadas de longitud.....	26
Ecuación 2.20	
Representación matricial de la ecuación 2.19.....	27
Ecuación 2.21	
Deducción de la ecuación 2.20.....	27
Ecuación 2.22	
Relación lineal entre coordenadas euclidianas y las de longitud.....	27
Ecuación 2.23	
Representación matricial de la relación entre las derivadas respecto a un sistema de ejes euclidianos con las derivadas respecto a otro sistema de ejes $\xi, \eta$ .....	28
Ecuación 2.24	
Representación sintetizada de la ecuación 2.23.....	28
Ecuación 2.25	
Matiz de transformación del sistema de coordenadas euclidianos al sistema de coordenadas $\xi, \eta$ .(Jacobiano).....	28
Ecuación 2.26	
Deducción de la ecuación 2.25.....	28
Ecuación 2.27	
La inversa del Jacobiano.....	29
Ecuación 2.28	
Determinante del Jacobiano.....	29

Ecuación 2.29	
La cuadratura de Gauss - Legendre.....	29
Ecuación 2.29 a	
Fórmula para obtener la tabla de la cuadratura de Gauss -Legendre.....	31
Ecuación 2.30	
Ecuación diferencial.....	35
Ecuación 2.31	
Función que satisface las condiciones de bordes de la ecuación 2.30.....	35
Ecuación 2.32	
Funciones de aproximación.....	35
Ecuación 2.33	
Sistema de ecuaciones cuya solución provee los valores de las funciones de ponderación.....	36
Ecuación 2.34	
Expresión de Galerkin.....	36
Ecuación 2.35	
Campo de desplazamientos.....	37
Ecuación 2.36	
Campo de deformaciones.....	38
Ecuación 2.37	
Vector de deformaciones significativas de un punto.....	38

Ecuación 2.38	
Campo de tensiones.....	<b>38</b>
Ecuación 3.1	
Funciones de forma para un elemento finito de ocho nodos, Serendipity.....	<b>59</b>
Ecuación 3.2	
Desplazamientos nodales.....	<b>60</b>
Ecuación 3.3	
Coordenadas de interpolación.....	<b>60</b>
Ecuación 3.4	
Deformación total plana.....	<b>61</b>
Ecuación 3.5	
Matriz de deformación nodal.....	<b>61</b>
Ecuación 3.6	
Matriz de transformación deformación - desplazamiento.....	<b>61</b>
Ecuación 3.7	
Coefficientes de la matriz de rigidez.....	<b>62</b>
Ecuación 3.8	
Derivación parcial de las funciones de forma respecto a las coordenadas adimensionales.....	<b>62</b>
Ecuación 3.9	
Representación en forma matricial de la ecuación 3.8.....	<b>63</b>

Ecuación 3.10	
Coefficientes de la matriz de rigidez para coordenadas euclidianas y adimensionales.....	<b>63</b>
Ecuación 3.11	
Matriz de transformación deformación – desplazamiento.....	<b>64</b>
Ecuación 3.12	
Matriz elástica en tensión plana.....	<b>64</b>
Ecuación 3.13	
Representación matricial del Jacobiano.....	<b>64</b>
Ecuación 3.13 a	
Determinante del Jacobiano.....	<b>65</b>
Ecuación 3.14	
Sub matriz de rigidez.....	<b>65</b>
Ecuación 3.15	
Ecuación General (EG) simbólica de un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos expresados en constantes que dependen de las coordenadas euclidianas y los parámetros elásticos.....	<b>71</b>
Ecuación 3.16	
Determinante del jacobiano de expresiones simbólicas para un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos expresados en constantes que dependen de las coordenadas euclidianas.....	<b>71</b>
Ecuación 3.17	
Jacobiano para elementos finitos de lado(s) curvo(s) cuya(s) traza(s) de los nodos extremos es (son) paralelo(s) al eje de las ordenadas.....	<b>73</b>

Ecuación 3.18

Jacobiano para elementos finitos de lado(s) curvo(s) donde una traza es inclinada y la otra es paralela al eje de las ordenadas..... 73

Ecuación 3.19

Jacobiano para elementos finitos de lado(s) curvo(s) cuya(s) traza(s) de los nodos extremos es (son) paralelo(s) al eje de las abscisas..... 73

Ecuación 3.20

Jacobiano para elementos finitos de lado(s) curvo(s) donde una traza es inclinada y la otra es paralela al eje de las abscisas..... 73

Ecuación 3.21

Jacobiano para elementos finitos de lados curvos cuyas trazas de los nodos extremos son paralelas al eje de las abscisas ó al eje de las ordenadas..... 73

Ecuación 4.1

Porcentaje de error de distorsión geométrica entre la integración analítica y la numérica..... 74

## **ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 2.1.-	
Abscisas y coeficientes de peso de la fórmula de cuadratura de Gauss.....	<b>32</b>
Tabla 3.1.-	
Formas y características de los cinco elementos finitos integrados con su respectivo Jacobiano.....	<b>73</b>
Tabla 4.1.-	
Porcentaje de error de precisión al integrar analíticamente E.F. Isoparamétricos de ocho nodos...	<b>75</b>
Tabla 4.2.-	
Relación del tiempo de ejecución entre integración analítica y la numérica.....	<b>76</b>
Tabla 5.1.-	
Desplazamiento del nodo 28 y esfuerzos en el elemento 10 del problema discretizado.....	<b>79</b>
Tabla 5.2.-	
Desplazamiento del nodo 177 y esfuerzos en el elemento 48 de la viga en voladizo.....	<b>81</b>
Tabla 5.3.-	
Desplazamiento del nodo 143 y esfuerzos en el elemento 36 de la presa en arco.....	<b>84</b>
Tabla C.1.-	
Elementos finitos de lados rectos.....	<b>102 - 107</b>
Tabla C.2.-	
Elementos finitos de lados curvos.....	<b>108 - 113</b>
Tabla C.3.-	
Elementos finitos de lados combinados: rectos y curvos.....	<b>114 – 123</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1.- Cuerpo sometido a un sistema de fuerzas cualesquiera.....	13
Figura 2.2.- Proyección $x,y$ de un cubo de volumen diferencial.....	14
Figura 2.3.- Tensión plana.....	17
Figura 2.4.- Deformación plana.....	18
Figura 2.5.- Cuadrado elemental deformado en el contorno del punto A.....	19
Figura 2.6.- Coordenada natural de longitud.....	26
Figura 2.7.- Variación de la posición de las coordenadas naturales $\xi_1$ y $\xi_2$ .....	26
Figura 2.8.- Sistemas de ejes.....	27
Figura 2.9.- Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros: a) 1 x 1 b) 2 x 2 c) 3 x 3 d) 4 x 4 puntos de integración.....	30
Figura 2.10.- a) Elemento curvo de ocho nodos, b) Elemento curvo de nueve nodos y, c) Elemento curvo de doce nodos.....	39

Figura 2.11.- Triángulo de Pascal para determinar las funciones de forma de un elemento cuadrilátero de 9 nodos por la familia Lagrangiana.....	41
Figura 2.12.- Triángulo de Pascal para determinar las funciones de forma de un elemento cuadrilátero de 8 nodos por la familia Serentipita.....	42
Figura 3.1.- Transformación de un plano euclidiano a uno normalizado y viceversa.....	58
Figura 3.2.- Procedimientos que permiten obtener las expresiones de la sub matriz de rigidez.....	68
Figura 3.3.- Términos de la matriz de rigidez calculados por las seis EBC.....	71
Figura 5.1.- Dimensiones de la placa con orificio elíptico.....	78
Figura 5.2 .- Discretización de un cuarto de placa con orificio elíptico por la simetría del problema.....	79
Figura 5.3.- Dimensiones de la viga en voladizo de sección variable.....	80
Figura 5.4 .- Discretización de la viga en voladizo de sección variable.....	81
Figura 5.5.- Extremo libre de la viga en voladizo: nodo 177 y el elemento 48 que lo contiene.....	81

Figura 5.6.- Dimensiones de la presa en arco.....	82
Figura 5.7.- Discretización de la presa en arco.....	83
Figura 5.8.- Extremo libre de la presa en arco: nodo 143 y el elemento 36 que lo contiene.....	84
Figura A.1.- Archivo COORD.txt que contiene las coordenadas euclidianas, los parámetros elásticos, número de elementos a iterar y el modelo de elasticidad plana.....	93
Figura A.2.- Archivo MATRIZ.sal que contiene el tiempo de ejecución computacional, el número de elementos iterados y los términos de la matriz de rigidez calculada.....	94
Figura C.1.- Numeración y sentido de los nodos de un E. F. Isoparamétrico de ocho nodos.....	100
Figura E.1.- Distribución de cargas nodales en elementos finitos cuadriláteros.....	135

## **GLOSARIO**

**Deformación lineal:** alargamiento por unidad de longitud.

**Determinante del jacobiano:** Factor de escala necesario para correlacionar un sistema coordenadas con otro sistema cualquiera.

**ECB:** Ecuaciones características básicas que permiten calcular la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos.

**ECG:** Ecuación característica general que permite calcular la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos.

**Esfuerzo:** Vector fuerza que actúa sobre un área.

**Isotropia:** Característica de los cuerpos cuyas propiedades físicas no dependen de la dirección.

**Maple:** Es un programa especializado en sistemas de álgebra por computadora que permite resolver problemas matemáticos muy comunes en carreras científicas y de ingeniería.

**Matriz de rigidez:** Relación entre los desplazamientos nodales y las fuerzas para cada elemento.

**Método de los elementos finitos:** Es una técnica de aproximación numérica que permite resolver problemas complicados de análisis de medios continuos de manera rápida y eficiente.

**Parámetros elásticos:** son módulos que representan la resistencia elástica y la deformación transversal del material.

**SAC:** Sistema de álgebra por computadora que permiten realizar grandes cantidades de operaciones matemáticas, tanto simbólicas como numéricas.

**Subrutina:** Secuencia invariable de instrucciones que forma parte de un programa y se puede utilizar repetidamente.

**Trabajo:** Producto de la fuerza por el camino que recorre su punto de aplicación y por el coseno del ángulo que forma la una con el otro.

**Traza:** Línea imaginaria intermitente que une los nodos extremos del elemento finito para darles características de las diversas formas geométricas que puede adoptar el elemento finito isoparamétrico de ocho nodos.

# *CAPÍTULO I*

# Introducción

## 1.1 Planteamiento del problema

El resolver problemas en los medios continuos resulta complicado porque existen infinitos grados de libertad en los dominios del continuo, por esta razón se utilizan técnicas numéricas que discretizan al mismo. Ferrante (1979), afirma que el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) es una técnica introducida por Turner, Clough, Martín y Topp, quienes en 1956 presentaron un trabajo en el cual se ocupaban de la solución aproximada de problemas de estado plano de tensiones. La idea fue extender los métodos de análisis matricial de estructuras de barras, para tratar los problemas de medios continuos en dos y tres dimensiones. La dificultad era calcular la matriz de rigidez de elementos bidimensionales y tridimensionales, de geometría arbitraria. Esta matriz es de gran importancia en el análisis de estructuras, aparte de tener su analogía con otros sistemas existentes en la ingeniería, tales como redes hidráulicas y redes eléctricas. La propuesta fue calcular la matriz de rigidez aproximada a partir del principio de los desplazamientos virtuales, empleando funciones con parámetros ajustables. En el método de los elementos finitos se destacan dos familias: Serendipity y Lagrangiana que permiten obtener funciones de interpolación geométrica de los

elementos finitos en dos y tres dimensiones, siendo éstos de gran importancia para resolver de una manera eficiente y rápida los problemas de medios continuos a discretizar. La aproximación utilizada por este método se hace con el diseño de una malla de elementos finitos convergentes: Sub-paramétrica, Iso-paramétrica o Super-paramétrica.

La geometría de los elementos finitos más comunes son los triangulares o cuadriláteros para el plano y tetraédricos o hexaédricos en el espacio. La respuesta más aproximada de estos análisis depende en gran medida de la cantidad, tipo de convergencia y funciones de interpolación geométrica de los elementos finitos que se consideren en la malla a estudiar. Como consecuencia de esto, se hace necesario obtener resultados precisos y rápidos. La solución disponible actualmente para el método de los elementos finitos es la integración numérica por Cuadratura de Gauss - Legendre, la cual puede generar errores de precisión en desplazamientos y esfuerzos al trabajar con elementos finitos muy distorsionados en su geometría, por lo tanto, los avances computacionales han posibilitado el trabajo de los investigadores para obtener soluciones por integración semi-analítica y/o analítica, utilizando por lo general Sistemas de Álgebra Computacional (SAC), tales como: MAPLE, DERIVE, MATHEMATICA, MATLAB, MATHCAD, REDUCE entre otros. Los sistemas mencionados tienen en mayor o menor grado posibilidades de manipular grandes y complicadas expresiones matemáticas tales como ecuaciones integro-diferenciales, tanto en forma numérica como simbólica.

## 1.2 Antecedentes

La manipulación simbólica ha logrado obtener grandes avances en la mecánica de análisis de medios continuos. Los lectores de este trabajo pueden referirse a los trabajos de Korncoff (1977), Korncoff and Fenves (1979), Noor and Andersen (1979).

En aplicaciones de análisis dinámico no lineal en placas y conchas requieren de mucho tiempo de ejecución computacional, debido a los numerosos cálculos de matrices de rigidez en forma recursiva, las cuales involucran cálculos de integrales, entre los más destacados investigadores en este campo están Zienkiewicz et al (1971), quien presentó una integración semi-analítica para placas y conchas, reportando una disminución del 50% de tiempo computacional frente a la integración numérica utilizada. Rengarajan et al (1995), presenta una integración analítica con elementos finitos híbridos para análisis de conchas, en este trabajo no se reporta comparaciones de tiempo de cálculo entre integración numérica y analítica, pero el trabajo con elementos finitos híbridos permite eliminar la aparición de la matriz de transformación de coordenadas, (Jacobiano), del denominador de las integrales, esto no se puede evitar en elementos finitos formulados bajo el método de los desplazamientos. Vlachoutsis (1990), propone la integración analítica para elementos de conchas degeneradas con espesor considerable, logrando descomponer la matriz del Jacobiano en dos términos que representan al comportamiento de las variables en la superficie media de la concha pero deja de considerar los efectos en la superficie fuera de la superficie media de la concha, este trabajo reporta mejoras de 9% de velocidad de cálculo entre la integración numérica y la integración

analítica, además muestra que pierde precisión con la integración analítica frente a la integración numérica que considera efectos adicionales en el análisis de concha.

En el trabajo de Yagawa et al (1990), se discute combinar técnicas de integración numérica y analítica en elasticidad plana, este trabajo muestra mejoras en los tiempos de cálculo de 15% en matrices de rigidez. Bardel (1989), trabaja con elementos finitos P-Adaptables, mostrando polinomios de alto grado en las funciones de forma típicas en este tipo de elementos finitos, se muestran mejoras en los tiempos de ejecución computacional. Mizukami (1986), muestra fórmulas de integración analítica, para elementos finitos rectangulares planos de lados rectos y no muestra comparaciones de tiempo entre los dos tipos de integración. Kikuchi (1989) utiliza el programa REDUCE, para obtener expresiones analíticas de elementos finitos isoparamétricos de cuatro nodos, obteniendo buenas precisiones para elementos distorsionados y no muestra mejoras en los tiempos de cálculo entre integración numérica e integración analítica, sin embargo justifica que los bajos tiempos de cálculo obtenidos por el REDUCE se deben a que el programa no genera códigos optimizados para programar las operaciones de cálculo computacional. Rathod (1988), presenta fórmulas de integración analítica para elementos finitos de cuatro nodos isoparamétricos, las mismas fueron obtenidas por métodos de integración básicos, (Integración por Partes).

El trabajo de Griffiths (1994), presenta una metodología general, basada en transformaciones de coordenadas, utilizando relaciones entre los grados de libertad de los nodos del elemento finito obteniendo expresiones semi-analíticas para el cálculo de la matriz

de rigidez en un elemento finito plano de cuatro nodos isoparamétrico. La metodología desarrollada por el autor se basa en obtener expresiones semi-analíticas de los términos de la matriz de rigidez, utilizando integración numérica, (Cuadratura de Gauss), reportando mejoras en los tiempos de cálculo entre la integración numérica e integración semi-analítica. Videla et al (1996), presenta unas fórmulas analíticas de integración para los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito plano de cuatro nodos isoparamétrico, reportando mejoras de un 50% en los tiempos de cálculo al comparar la integración numérica con la integración analítica, además de mejorar la precisión en el cálculo de elementos distorsionados. El autor utilizó el programa DERIVE-1989 para obtener las expresiones analíticas de la matriz de rigidez. Las expresiones obtenidas se optimizaron para no realizar cálculos innecesarios en el proceso. En el trabajo de Lozada et al (2004), presentan fórmulas semi-analítica que asumen la fórmula obtenida por Griffiths (1994) para un elemento finito de cuatro nodos isoparamétrico, aplicando en forma similar para el elemento finito de ocho nodos plano subparamétrico, obteniendo mejoras de 37% en los tiempos de cálculo al comparar la integración numérica con las fórmulas obtenidas por integración numérica optimizada (semi-analítica). Videla et al (2005) presenta una técnica novedosa que junto con la aplicación de SAC permite integrar analíticamente la matriz de rigidez de un elemento finito subparamétrico de ocho nodos, obteniendo mejoras de hasta un 50% en los tiempos de cálculo al comparar la integración numérica

La respuesta en la actualidad a los problemas de precisión presentados por la integración numérica, utilizada ampliamente en la solución de las ecuaciones integro – diferenciales propias de los métodos numéricos actuales, tales como el Método de Elementos

Finitos (MEF) y el Método de Elementos de Contorno (MEC), entre otros, son las respuestas analíticas, las cuales son el futuro, estas respuestas pueden superar sustancialmente en tiempos de ejecución computacional, a las respuestas numéricas, además de aumentar la precisión de los cálculos ante elementos muy distorsionados, que pueden aparecer por deficiencias en los generadores de malla, se entiende que la solución no es totalmente exacta debido a la discretización de los medios continuos, pero es la mejor aproximación que se puede obtener en el campo de los métodos numéricos.

El propósito de esta investigación es calcular los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero por integración analítica, de función de interpolación geométrica cuadrática que tiene convergencia isoparamétrica de la familia Serendipity lo cual permite tener elementos más versátiles porque se adecuan a medios continuos de bordes curvos obteniendo mayor precisión de cálculo matemático para elementos finitos de geometría muy distorsionada y posible reducción del tiempo de ejecución computacional al reducirse las iteraciones que se producen al integrar numéricamente por Cuadratura de Gauss – Legendre.

## 1.3 Objetivos de la investigación

### 1.3.1 OBJETIVO GENERAL

- Calcular los términos de la matriz de rigidez por integración analítica de cinco casos de los 39 casos encontrados al modificar la posición geométrica de los nodos de un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos en elasticidad plana.

### 1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Aplicar un sistema de álgebra por computadora, (Maple©) que permita obtener las expresiones y constantes de los términos de las matrices de rigidez por integración analítica a cinco geometrías distintas del elemento finito de la forma y tipo descrito.
2. Plantear una ecuación general para cada elemento de la forma y tipo descrito que permita calcular los términos de las matrices de rigidez por integración analítica.
3. Elaborar subrutinas en un lenguaje de programación de alto nivel, (Fortran©) para sistematizar los términos de las matrices de rigidez por integración analítica a cinco geometrías distintas del elemento finito de la forma y tipo descrito.
4. Optimizar tiempo de CPU al calcular la matriz de rigidez por integración analítica con respecto a la integración numérica por cuadratura de Gauss - Legendre.

### 1.3.3 APORTES

1. Aplicar y validar una técnica novedosa que permite calcular las matrices de rigidez de elementos finitos cuadriláteros por integración analítica.
2. Indicar en los códigos, los cambios de variables más factibles para la disminución de líneas de códigos de programación.
3. Introducir las subrutinas generadas en este trabajo en una biblioteca virtual pública.

## 1.4 Metodología

Este trabajo presenta el procedimiento para desarrollar la investigación especial de grado que tiene por objetivo calcular la matriz de rigidez en tensión plana de un elemento finito cuadrilátero de ocho nodos de lados curvos por integración analítica para después compararlo con la integración numérica de Gauss-Legendre.

### 1.4.1 TEORÍA

Para iniciar la investigación es requerido el conocimiento de los fundamentos básicos del método de los elementos finitos y teoría de elasticidad, lo que hace necesario la recopilación de información y búsqueda de referencias e información referente a la investigación que se desea realizar utilizando para ello bibliotecas especializadas, revistas nacionales e internacionales, así como el uso intensivo de redes electrónicas nacionales e internacionales.

### 1.4.2 FASE I

La primera fase consiste en utilizar un programa de Sistemas de Álgebra por Computadora (SAC) llamado MAPLE, el cual es un programa comercial que utiliza matemática simbólica con el cual se puede obtener expresiones simbólicas particulares y generales. Cabe destacar que, el programa Maple fue el que más se ajustó a los requerimientos para realizar la investigación.

Las expresiones simbólicas particulares obtenidas son ecuaciones simbólicas patrones que están en función de variables de un sistema coordinado natural que rigen a los grupos de términos de la matriz de rigidez y se llaman en este trabajo de investigación: Ecuaciones Características Básicas (ECB). Luego de trabajar con las ECB, se reducirán a una Ecuación

Característica General (ECG) de sexto grado que permita calcular todos los términos de la matriz de rigidez.

La ECG antes de ser integrada se debe dividir por el determinante de la matriz de transformación (Jacobiano), el cual, para el elemento finito isoparamétrico de ocho (8) nodos general es de tercer grado, esto significa que se tendrá una ecuación racional donde el numerador es de mayor grado que el grado del denominador, para simplificar la ecuación racional, se aplica División de Polinomios porque es la herramienta que permite obtener expresiones más sencillas para integrar.

Es importante resaltar que, los coeficientes de la ECG son constantes simbólicas que contienen a las coordenadas euclidianas y a los parámetros elásticos del elemento. Asimismo, los coeficientes del jacobiano contienen solo a las coordenadas euclidianas ya que éstas, son las que se correlacionan con el sistema de coordenadas naturales para la transformación de un sistema a otro. El aspecto más importante de la primera fase es la complejidad que adquiere la ecuación racional porque se modifica solo el denominador, es decir, solo varía el jacobiano al modificar la geometría del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho (8) nodos, obteniendo hasta treinta y nueve (39) casos distintos solo al modificar la posición geométrica de los nodos.

Entonces, de los treinta y nueve (39) casos encontrados, se lograron integrar analíticamente cinco (5) de ellos, teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación se reduce solo a la integración cerrada de dos casos.

### **1.4.3 FASE II**

La fase dos consiste en programar en un lenguaje de alto nivel (ForTran 95), subrutinas de los cinco (5) casos integrados analíticamente, las cuales permiten organizar los términos de la matriz de rigidez de forma matricial. Al obtener las matrices de rigidez por solución cerrada

de los cinco (5) casos, se comparan elementos finitos geoméricamente distorsionados y los tiempos de ejecución computacional con respecto a la integración numérica por cuadratura de Gauss – Legendre.

#### **1.4.4 FASE III**

Esta fase consiste en validar las respuestas obtenidas con ejemplos de aplicación en dos dimensiones, tales como una placa con orificio elíptico, una viga en voladizo cuyo contorno es curvo y finalmente, una presa en arco. Los ejemplos se integrarán numérica y analíticamente para validar las subrutinas a realizar. Esta validación se realiza al comparar el error de precisión y tiempo de ejecución computacional de los resultados obtenidos.

### **1.5 Líneas futuras de investigación**

1. Calcular la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento cuadrilátero con campo de desplazamiento cuadrático por el Método de Elementos de Contorno.
2. Comparar los resultados y tiempos de ejecución de las matrices de rigidez del elemento finito del tipo y forma antes descrita entre el Método de los Elementos finitos y el Método de Elementos de Contorno.



## **CAPÍTULO II**

# **Teoría**

## **2.1 Conceptos básicos**

### **2.1.1 Conceptos de elasticidad**

La teoría de elasticidad requiere de tres conjuntos de ecuaciones para su adecuada formulación, los cuales son enunciados a continuación:

- a) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las tensiones internas con las fuerzas externas aplicadas, de manera de garantizar el equilibrio de fuerzas en el cuerpo a nivel global.
  
- b) Un conjunto de ecuaciones que relacionen los esfuerzos con las deformaciones, considerando que el material se comporta de forma lineal, es decir, los esfuerzos son proporcionales en todo momento a las deformaciones.
  
- c) Un conjunto de ecuaciones que relacionen las deformaciones con los desplazamientos, considerando que los desplazamientos que experimenta la estructura son pequeños en relación a la geometría del mismo, por lo que ésta no se ve alterada cuando el cuerpo se deforma. Agregando que, se debe satisfacer ciertos requerimientos de compatibilidad entre las componentes de las deformaciones, mediante las ecuaciones de compatibilidadde

deformaciones. En el estado bidimensional, (caso que ocupa a esta investigación) deben satisfacerse ocho ecuaciones: tres ecuaciones deformación-desplazamiento, tres ecuaciones esfuerzo-deformación y dos ecuaciones de equilibrio, por lo que se deben calcular ocho incógnitas: tres componentes de deformación, tres componentes de esfuerzos y dos de desplazamientos. Cerrolaza (2005)

### 2.1.1.1 Ecuaciones de equilibrio

Sea un plano sometido a un sistema de fuerzas aplicadas cualesquiera, siendo O el punto del cuerpo cuyos estados de deformación y tensiones se consideran. Eligiendo el punto O como origen de los ejes coordenados X,Y. Como se muestra en la figura 2.1.

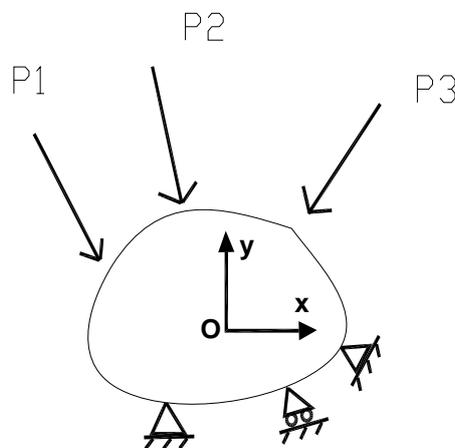


Figura 2.1.- Cuerpo sometido a un sistema de fuerzas cualesquiera.

Donde el estado de esfuerzos en el punto O para problemas bidimensionales queda definido por el vector de esfuerzos.

$$\sigma = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad (2.1)$$

formados por los esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$ .

A continuación, se aísla del cuerpo un elemento cuadrado de área diferencial, siendo éste, la proyección de los ejes coordenados X,Y de un cubo de volumen diferencial. Figura 2.2

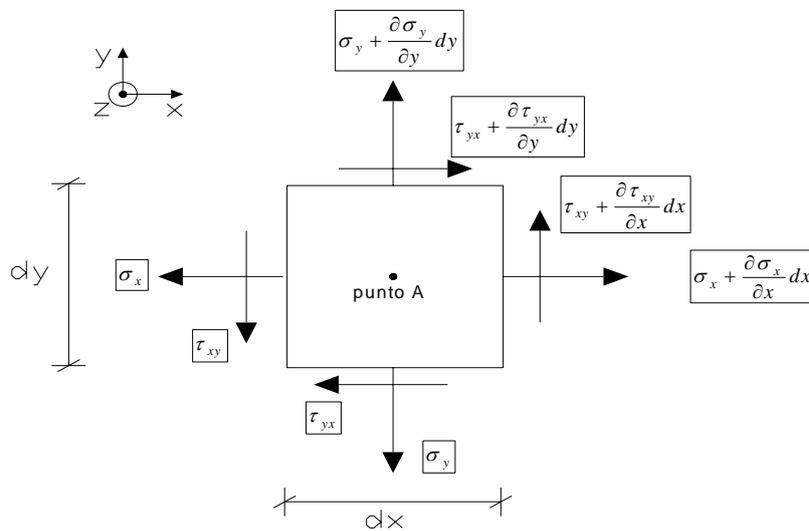


Figura 2.2.- Proyección x,y de un cubo de volumen diferencial.

El cuadrado elemental estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas que actúan cada cara y de las fuerzas de volumen  $F \, dx \, dy \, dz$ . Estableciendo las ecuaciones de la Estática

$\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  se obtienen las ecuaciones de equilibrio del cuadrado elemental.

Resolviendo, la sumatoria de fuerzas respecto al eje X, se tiene:

$$(-\sigma_{xx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx) dydz + (-\tau_{xy} + \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dx dz + F_x dx dy dz = 0$$

Donde al operar la expresión anterior se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) constituye la primera ecuación de equilibrio en la dirección X. Si se realiza la misma operación en el eje Y, se obtienen las ecuaciones de equilibrio para el caso bidimensional

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde los términos  $F_i$  representan las fuerzas en la dirección de los dos ejes cartesianos X,Y.

La ecuación Estática  $\sum M_A = 0$ , en el punto A de la figura 2.2., permite determinar la relación

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.4a)$$

que es la expresión analítica de Cauchy. Este teorema reduce a 3 componentes independientes de esfuerzos el análisis de problemas en dos dimensiones, siendo componentes que intervienen en el vector de esfuerzos. Ecuación (2.1).

A continuación, se presenta la demostración de la expresión (2.4a), utilizando la figura 2.2. Resolviendo, la sumatoria de momentos respecto al punto A, se tiene:

$$\tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

Donde al operar la expresión anterior se tiene

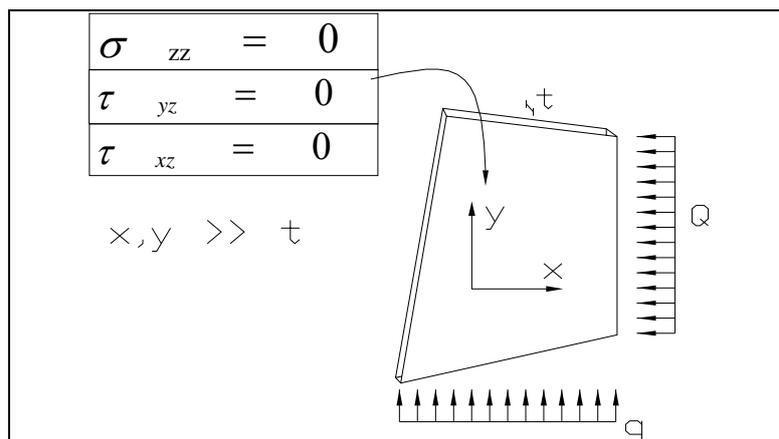
$$\tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.4b)$$

**2.1.1.2 Elasticidad plana**

En circunstancias particulares, los problemas de elasticidad en tres dimensiones pueden ser idealizados mediante modelos en dos dimensiones, estos modelos pueden ser por tensión plana o por deformación plana.

**2.1.1.2.1 Tensión plana**

Si una placa delgada es cargada mediante fuerzas aplicadas en su contorno, paralelas al plano de la placa y distribuidas uniformemente en su espesor siendo éste muy pequeño en comparación con la dos dimensiones restantes como se muestra en la figura 2.3, las componentes de la tensión  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  son nulas sobre ambas caras de la placa. El estado tensional queda entonces especificado por  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  y es denominado estado de tensión plana. Timoshenko–Goodier (1975)



**Figura 2.3.- Tensión o esfuerzo plano**

### 2.1.1.2.2 Deformación plana

Una simplificación semejante se da en el caso extremo, en el que la dimensión del cuerpo en la dirección del eje z es muy grande. Si un cuerpo largo cilíndrico o prismático es cargado mediante fuerzas perpendiculares a la dirección longitudinal que no varían en esa dirección, puede suponerse que todas las secciones rectas están en iguales condiciones.

Entonces, se encuentra que el modelo es de deformación plana. Timoshenko–Goodier (1975)

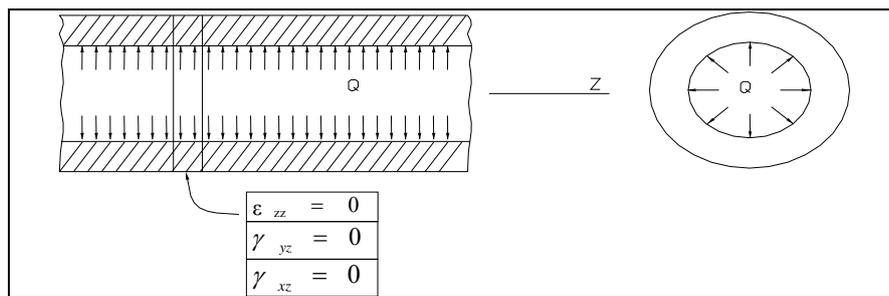


Figura 2.4.- Deformación plana.

### 2.1.1.3 Relaciones esfuerzos-deformaciones

Asimismo, el estado de deformaciones planas en el punto A está definido por el vector de deformaciones

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad (2.5)$$

formados por las deformaciones lineales  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$  la deformación angular.

Para materiales elásticos lineales, las relaciones esfuerzo-deformación provienen de la Ley de Hooke generalizada que determina las componentes del estado de deformaciones en función de las componentes del estado de esfuerzos. Figura 2.3

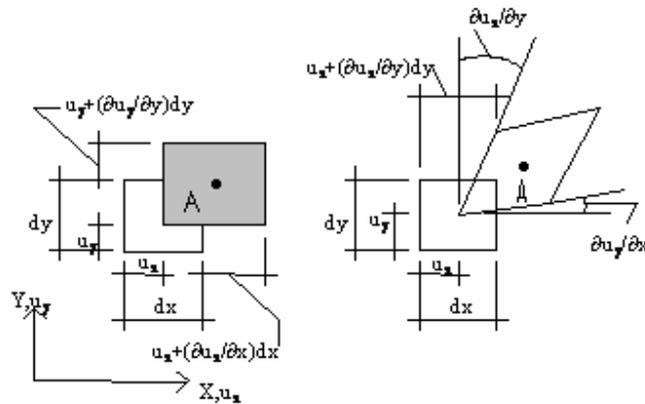


Figura 2.5.- Cuadrado elemental deformado en el contorno del punto A.

La experiencia demuestra que en el caso de un material isótropo, para el modelo de tensión plana se tiene que las tensiones normales no producen distorsión angular del elemento, pero si se produce dilatación del elemento en la dirección donde se produce la tensión normal, entonces ésta viene acompañada de contracción lateral  $-\nu \sigma_{ii}$ , siendo  $i = y$  cuando la tensión normal es en la dirección  $x$ . En caso que la tensión normal sea en la dirección  $y$ , por lo tanto  $i = x$ . Siendo  $E$  el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson. Estas mismas constantes pueden ser usadas para definir la relación entre deformaciones y tensiones tangenciales.

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}]; \quad \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}]; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.6)$$

Ahora, al tener conocimiento de la elasticidad plana se expresara la siguiente relación matricial entre esfuerzos y deformaciones.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (2.7)$$

$\underset{\sim}{D}$  es la matriz de constantes elásticas ( o matriz constitutiva ).

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Para elasticidad isótropa se tiene:

<b>Tensión plana</b>	<b>Deformación plana</b>
$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1}{(1-\nu)}$	$d_{11} = d_{22} = \frac{E}{(1+\nu)} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}$
$d_{12} = d_{21} = \nu d_{11}$	$d_{12} = d_{21} = d_{11} \frac{\nu}{1-\nu}$
$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$	$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$
(2.9a)	(2.9b)

Siendo E el módulo de elasticidad , $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $d_{33}$  es el módulo de corte expresado a continuación como G.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

La matriz constitutiva  $\tilde{D}$  varía según sea el caso: tensión plana o deformación plana.

Por tal razón, a continuación se presentan las ecuaciones para pasar del caso tensión plana al de deformación plana:

$$\text{Para } d_{11}, d_{22} \text{ se realiza el siguiente cambio } \frac{1}{(1-\nu)} \Rightarrow \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)},$$

$$\text{Mientras que, para los términos } d_{12}, d_{21} \text{ se tiene } \frac{\nu}{(1-\nu)} \Rightarrow \frac{\nu}{(1-2\nu)} \quad (2.11)$$

#### 2.1.1.4 Relaciones deformaciones-desplazamientos

La deformación de un cuerpo bidimensional o tridimensional sujeto a cargas externas puede ser descrita mediante los campos de desplazamiento definidos en un punto del cuerpo

$$u_x = u_x(x, y); \quad u_y = u_y(x, y) \quad (2.12)$$

donde  $x, y$  son las coordenadas del punto y  $u_x, u_y$  son los desplazamientos del punto según las coordenadas euclidianas  $X, Y$ . Las deformaciones del cuerpo en el punto son normales y tangenciales en la superficie de deformación que se estudia, donde pueden ser expresadas como una combinación lineal de las primeras derivadas parciales de los campos de desplazamiento, mediante  $\varepsilon_{xx}$  y  $\varepsilon_{yy}$  que son las componentes de las deformaciones normales al plano de

deformación, (2.13a), siendo  $\gamma_{xy}$  la componente de la deformación angular contenida en el plano de deformación, (2.13b).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.13a)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.13b)$$

### 2.1.2 Conceptos energéticos

Este apartado presenta dos conceptos de gran importancia en la mecánica de sólidos, los cuales son el teorema de los trabajos virtuales y el principio de energía potencial total.

#### 2.1.2.1 Teorema de los trabajos virtuales

*“Un cuerpo está en equilibrio si el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo para todo campo de desplazamiento cinemáticamente admisible”*

Chandrupatla-Belegundu (1999)

La expresión integral de equilibrio en problemas de elasticidad bidimensional puede obtenerse haciendo uso del Teorema de los Trabajos Virtuales, Oñate (1992), teniendo en cuenta las tensiones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura.

$$\iint_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) t \, dA = \iint_A (\delta u b_x + \delta v b_y) t \, dA + \oint_G (\delta u t_x + \delta v t_y) t \, ds + \sum_i (\delta u_i U_i + \delta v_i V_i) \quad (2.14)$$

En esta expresión, el miembro a la izquierda de la igualdad, representa el trabajo que las tensiones  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  realizan sobre las deformaciones virtuales  $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$  y  $\delta \gamma_{xy}$ . El miembro de la derecha de la igualdad, representa el trabajo de las fuerzas repartidas por unidad de área  $b_x, b_y$  de las fuerzas repartidas sobre el contorno  $t_x, t_y$  y de las fuerzas puntuales  $U_i, V_i$  sobre los desplazamientos virtuales  $\delta u, \delta v$ .  $A$  y  $G$  son el área y el contorno de la sección transversal del sólido y  $t$  su espesor. De acuerdo al problema que se estudie:  $t$  coincide con el espesor real en el caso de tensión plana o, a  $t$  se le asigna un valor unidad en el caso de deformación plana. La ecuación anterior (2.14), se escribe más sintetizada en forma matricial como:

$$\iint_A \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} t \, dA = \iint_A \delta \underline{u}^T \underline{b} t \, dA + \oint_G \delta \underline{u}^T \underline{t} t \, ds + \sum_i \delta \underline{u}_i^T \underline{q}_i \quad (2.15)$$

cada matriz representada en la ecuación tiene la forma:

$$\begin{aligned} \underline{\delta \varepsilon} &= [\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \gamma_{xy}]^T & ; & \quad \underline{\delta u} = [\delta u, \delta v]^T & ; & \quad \underline{b} = [b_x, b_y]^T \\ \underline{t} &= [t_x, t_y]^T & ; & \quad \underline{\delta u}_i = [\delta u_i, \delta v_i]^T & ; & \quad \underline{q}_i = [U_i, V_i]^T \end{aligned} \quad (2.16)$$

Donde las ecuaciones (2.16) son el punto de partida para la obtención de las ecuaciones de la discretización, para los diferentes tipos de elementos finitos.

### ***2.1.2.2 Principio de la energía potencial total***

La suma de la energía potencial  $V$  de las fuerzas externas que actúan sobre una estructura y de su energía de deformación  $U$  se denomina la energía potencial total de la estructura. Es decir,

$$\Phi = V + U \quad (2.17)$$

Este principio permite conocer los desplazamientos de una estructura en equilibrio. Por tanto, el arreglo de la estructura deformada depende únicamente de los desplazamientos ( $\delta$ ) de  $n$  puntos determinados de la estructura. Para que se cumpla lo antes expuesto, se le da a uno de esos puntos un desplazamiento diferencial virtual  $d\delta_i$  sin alterarse los  $n-1$  desplazamientos restantes. Es sabido que, la variación de la energía potencial ha de ser nula cuando se somete a una estructura a unos desplazamientos y deformaciones virtuales compatibles con las vinculaciones.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \delta_i} = 0 \quad (2.18)$$

En (2.18), se hace  $i=1,2,3,\dots,n$  donde se obtiene un sistema de  $n$  ecuaciones que permiten calcular los  $n$  desplazamientos ( $\delta$ ) y con ello la configuración de la estructura deformada.

### **2.1.3 Conceptos matemáticos**

Los conceptos matemáticos presentados en este trabajo facilitan la comprensión de los capítulos siguientes, ya que, permiten conocer los fundamentos básicos de las matemáticas aplicadas para realizar el objetivo de esta investigación. A continuación se presentan los siguientes apartados: coordenadas naturales de longitud, obtención del Jacobiano y la integración numérica bidimensional de elementos cuadriláteros.

#### ***2.1.3.1 Coordenadas naturales de longitud***

Las coordenadas adimensionales que definen la posición de un punto se denominan coordenadas naturales. Según sea el caso, estas coordenadas se determinan por inspección, por relaciones de longitudes, de áreas o de volúmenes. En este apartado se explicará la relación de longitud. En caso que, el lector quiera profundizar más en las coordenadas naturales se recomienda la siguiente bibliografía. Vázquez-López (2001).

Sea una línea recta limitada por los puntos extremos 1 y 2. Además, sea P un punto cualquiera definido por su coordenada euclidiana  $x$ , como se muestra en la figura 2.6. La posición del punto P se determina en un sistema de coordenadas naturales  $\xi_1, \xi_2$ , llamadas coordenadas de longitud, mediante relaciones de longitudes.



Figura 2.6.- Coordenada natural de longitud

$$\xi_1 = \frac{x_2 - x}{L}, \quad \xi_2 = \frac{x - x_1}{L} \quad (2.19)$$

Entonces, si evaluamos las posiciones de los puntos 1 y 2, se observa en la figura 2.7, que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  varían entre cero y uno. Siendo cero o uno en los extremos, esto depende del nodo que se estudie.

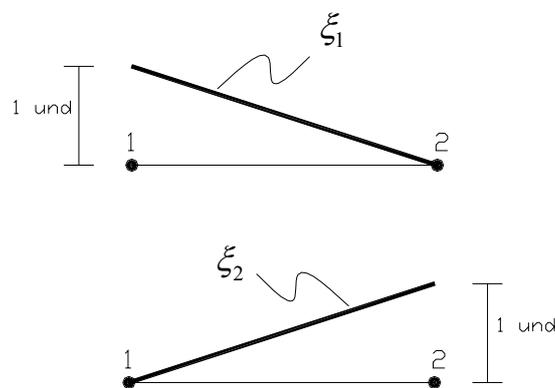


Figura 2.7.- Variación de la posición de las coordenadas naturales  $\xi_1$  y  $\xi_2$

La expresión matricial de las ecuaciones (2.19) es

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad (2.20), \quad \text{de la que se deduce} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) relacionan linealmente la coordenada euclidiana  $x$  y las coordenadas de longitud  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Si el origen de coordenadas está situado en el extremo 1, entonces  $x_1=0$  y  $x_2=L$ , y las ecuaciones (2.19) se reducen a

$$\xi_1 = 1 - \frac{x}{L}, \quad \xi_2 = \frac{x}{L} \quad (2.22)$$

### 2.1.3.2 Jacobiano

Las derivadas respecto a un sistema de ejes euclidianos  $x,y$  están relacionadas con las derivadas respecto a otro sistema de ejes. Como se muestra en la figura 2.8, según la regla de la derivación en cadena. Vázquez-Lopez (2001)

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

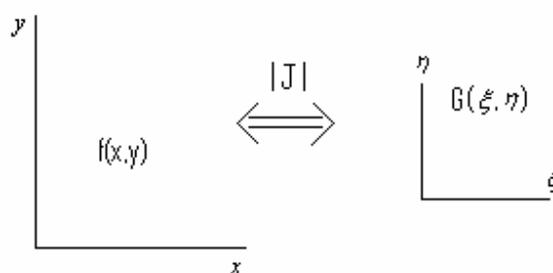


Figura 2.8.- Sistemas de ejes

Las expresiones antes mostradas se expresan en forma matricial

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial \xi} \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2.23)$$

Es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial \xi} \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} \end{vmatrix} = [J] \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (2.24)$$

Siendo  $[J]$  el Jacobiano de transformación del sistema de coordenadas  $x,y$  al sistema de coordenadas  $\xi,\eta$  definido según (2.20) y (2.21) por

$$[J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

De la ecuación (2.24) se deduce

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = [J]^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial \xi} \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (2.26)$$

Siendo la inversa del Jacobiano

$$[J]^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{vmatrix}}{\det[J]} \quad (2.27)$$

Donde  $\det[J]$  representa el determinante del Jacobiano, de valor

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (2.28)$$

### 2.1.3.3 Integración numérica bidimensional de elementos cuadriláteros

El cálculo numérico de una integral se conoce por cuadratura, siendo la cuadratura de Gauss-Legendre la más utilizada para determinar las integrales en el método de los elementos finitos. Se explicará dicha cuadratura para dominios cuadriláteros.

La cuadratura de GAUSS-LEGENDRE, para elementos cuadriláteros se expresa como:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta = \int_{-1}^1 d\varepsilon \left[ \sum_{q=1}^{nq} g(\varepsilon_p, \eta_q) W_p \right] = \sum_{p=1}^{np} \sum_{q=1}^{nq} g(\varepsilon_p, \eta_q) W_p W_q \quad (2.29)$$

Donde  $n_p$  y  $n_q$  son los números de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones  $\xi, \eta$ . Siendo  $\xi_p$  y  $\eta_q$  las coordenadas naturales del punto de integración  $p, q$ .  $W_p, W_q$ , son los pesos correspondientes a cada dirección en dicho punto.

Es importante resaltar, que una cuadratura de orden  $N$  en cada dirección natural, integra exactamente un polinomio de grado  $\leq 2N - 1$  en la correspondiente coordenada natural.

En la Fig 2.9, se muestran algunas de las cuadraturas bidimensionales más comunes sobre dominios cuadriláteros.

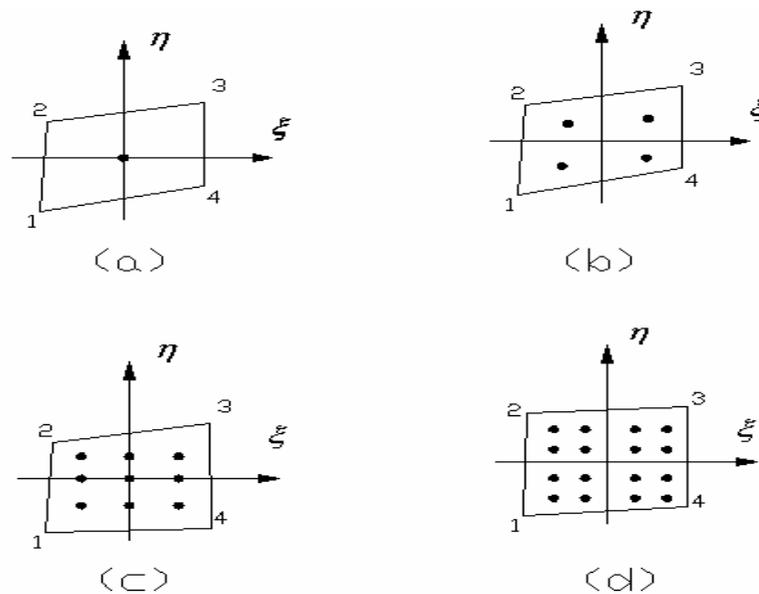


Fig 2.9.- Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros:

a) 1 x 1 b) 2 x 2 c) 3 x 3 d) 4 x 4 puntos de integración.

Complementariamente a la ecuación (2.29), es necesaria la utilización de una tabla de pesos de ponderación.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{j=1}^n H_j f(a_j) \quad (2.29 \text{ a})$$

En la siguiente página se presenta la tabla 2.1, la cual, contiene las abscisas, ordenadas y coeficientes de pesos de la fórmula de la cuadratura de Gauss – Legendre.

(2.29 a)

**Tabla 2.1.- Abscisas y coeficientes de pesos de la fórmula de cuadratura de Gauss.**

N	$\pm a$	H
1	0	2.00000 00000 00000
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.77459 66692 41183 0.00000 00000 00000	0.35555 55555 55556 0.88888 88888 88888
4	0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889

## 2.2 Formulación del método de los elementos finitos

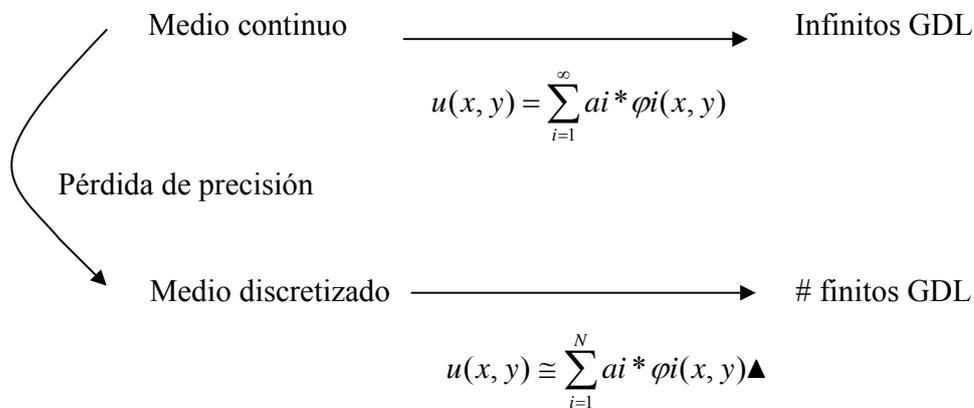
### 2.2.1 Concepto y origen del Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) es una técnica que permite resolver problemas de medios continuos con soluciones aproximadas de forma rápida y eficiente. Según Ferrante (1979), el M.E.F. fue introducido en 1956 por Clough, Turner, Martin y Topp. La idea fue extender los métodos de análisis matricial de estructuras de barras, para tratar los problemas de medios continuos, bi y tridimensionales. La dificultad consistía en lograr calcular la matriz de rigidez de elementos en dos y tres dimensiones, de geometría arbitraria. Esta matriz es de gran importancia en el análisis de estructuras, aparte de tener su analogía con otros sistemas existentes en la ingeniería, tales como redes hidráulicas, redes eléctricas y análisis de transiente en fluidos o flujo de calor. La propuesta hecha por los investigadores antes mencionados fue calcular la matriz de rigidez aproximada a partir del principio de los desplazamientos virtuales, empleando funciones con parámetros ajustables, característico de los métodos de Galerkin y Rayleigh – Ritz.

Para realizar el análisis de medios continuos por el M.E.F. es necesario discretizarlo, es decir, pasar de infinitos grados de libertad a un número finito de grados de libertad. La discretización del dominio en estudio se realiza generando una malla o modelado gráfico, quedando el dominio de integración del problema subdividido en regiones o elementos finitos interconectados entre si a través de un número discreto de puntos nodales o nodos. Para cada elemento se establece un comportamiento local aproximado para que las incógnitas del

problema en cualquier punto del elemento queden definidas en función de los valores de las mismas incógnitas en los puntos nodales del elemento., Ferrante (1979).

A continuación, se muestra un esquema que representa la discretización de un medio continuo elástico.



### 2.2.2 Método basado en los residuos ponderados: Método de Galerkin

En las estructuras donde se conozcan las ecuaciones diferenciales de gobierno, donde la solución es muy laboriosa, se utilizan los métodos de residuos ponderados. Uno de los métodos de residuos ponderados de aplicación en problemas estructurales, es el método de Galerkin.

Este método, utiliza las mismas funciones de interpolación para aproximarse al medio continuo que para definir las soluciones aproximadas. El método aproxima la solución de un

grupo de ecuaciones diferenciales con condiciones de borde establecidas que son sustituidas por un grupo de funciones que las satisfacen.

A continuación, se realiza un resumen de la formulación del Método de Galerkin.

Consideremos una ecuación diferencial que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= P \\ \mathcal{L}(f) - P &= 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Siendo  $\mathcal{L}(\ )$  un operador diferencial y  $P$  un término que no depende de la función, ni de sus derivadas.

Ahora, si queremos una solución aproximada, podemos obtener una  $\bar{f}$  que satisfaga las condiciones de borde, quedando la expresión modificada:

$$\mathcal{L}(\bar{f}) - P = \varepsilon(x) \tag{2.31}$$

Donde  $\varepsilon(x) \neq 0$  es el error cometido.

Para el Método de los Residuos Ponderados, las funciones de aproximación  $\bar{f}$  se pueden expresar como:

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \tag{2.32}$$

Luego los parámetros ajustables  $\alpha_i$ , se determinan anulando en un sentido promedio el residuo  $\epsilon$ , haciendo:

$$\int_x \epsilon N_i dx = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.33)$$

Donde las  $\alpha_i$  son funciones de peso o ponderación. La expresión (2.33) representa el sistema de ecuaciones cuya solución provee los valores de las funciones de ponderación. Utilizando las expresiones anteriores y simplificando según Galerkin, el uso de una misma función de ponderación, tanto para las funciones de aproximación como para sus parámetros, se obtiene:

$$\int [\mathcal{L}(\alpha_i N_i) - P] N_i dx = 0 \quad (2.34)$$

La ventaja de este enfoque, como se ha visto, sólo utiliza una familia  $N_i$  como funciones de interpolación de la  $f$  aproximada y sus parámetros; lo que a su vez va a producir una matriz simétrica y bandeda.

## 2.2.3 Modelo de los desplazamientos

### 2.2.3.1 Campo de desplazamientos

Las características geométricas y de cargas, definen un estado plano de tensiones. Este plano permite establecer la hipótesis que todas las secciones perpendiculares al eje prismático  $Z$  se deforman en su plano y de manera idéntica.

Para el efecto de su estudio, se supone inicialmente, una sección genérica contenida en el plano " $XY$ ".

El campo de desplazamientos de la sección estaría definido, si se conocen los desplazamientos en las direcciones  $x$  e  $y$  de todos sus puntos. El vector de desplazamientos de un punto se define como:

$$U(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{u}(x, y)$  y  $\mathbf{v}(x, y)$  son los desplazamientos del punto en direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

### 2.2.3.2 Campo de deformaciones

Del campo de desplazamientos anterior (2.35), se deduce las deformaciones haciendo uso de la teoría general de la elasticidad.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \quad (2.36)$$

La deformación longitudinal, en el caso de la deformación plana, se supone que es nula ( $\varepsilon_z = 0$ ). Pero en el caso de un estado de tensión plana la deformación longitudinal no es nula; y sin embargo, se supone que la tensión es nula ( $\sigma_z = 0$ ). Por consiguiente, en ambos casos, no se considera la deformación  $\varepsilon_z$  dado que el producto es igual a cero ( $\sigma_z \varepsilon_z = 0$ ). En concordancia, el vector de deformaciones significativas de un punto se define para tensión y deformación plana como:  $\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$  (2.37)

### 2.2.3.3 Campo de tensiones

Se deduce de (2.36) que las tensiones cortantes  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son nulas. Por otra parte, por los mismos motivos explicados en el apartado anterior, para la deformación y tensión en la dirección  $\mathbf{z}$ , éstas no trabajan quedando el vector de tensiones significativas como:

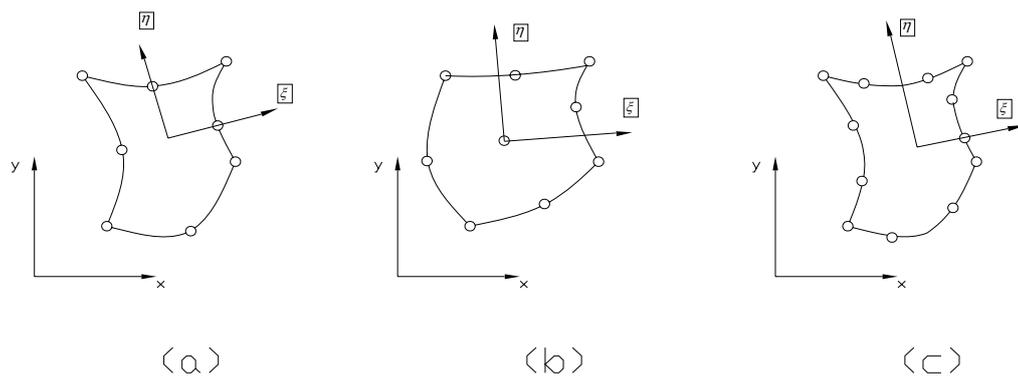
$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (2.38)$$

### 2.2.4 Elementos finitos cuadriláteros curvos

Los elementos de lados curvos permiten utilizar un menor número de elementos de mayor tamaño y además conseguir una representación de los bordes del medio en estudio más ajustada a la realidad. Los elementos finitos curvos son aquellos que poseen funciones de interpolación o de forma de grado superior que de forma general suministrarán una mayor exactitud en las funciones de desplazamiento.

Al ser funciones de orden superior, los elementos tendrán nodos en el interior de los lados. Es decir, se necesita por lo menos tres nodos por lado para generar una curva que en este caso será una parábola.

A continuación, en la figura 2.10 se muestran tres elementos curvos: a) y b) son funciones cuadráticas, mientras que, c) es una función cúbica.



**Figura 2.10.-a) Elemento curvo de ocho nodos, b) Elemento curvo de nueve nodos y, c) Elemento curvo de doce nodos.**

Cuando se usan las funciones de formas cúbicas las condiciones o reglas antes mencionadas son impracticables, entonces se hace necesario comprobar numéricamente el signo de del determinante del jacobiano.

#### ***2.2.4.1 Obtención de funciones de forma***

Las funciones de forma representan a cada nodo que posee el elemento, donde se concentran las masas que se aplican en el medio elástico continuo. Además, este trabajo considera dos grados de libertad traslacionales por nodo para elementos contenidos en el plano, distinto a los elementos usados para determinar medios continuos tales como placas delgadas, vigas continuas y estructuras reticulares donde los nodos poseen más de dos grados de libertad.

Para obtener las funciones de forma en los sistemas de dos o tres dimensiones es conveniente recurrir a algunas de las dos familias que posee el método de los elementos finitos, tales como la familia Lagrangiana y la Serentipita. Es importante resaltar que, ambas familias utilizan el triangulo de Pascal como herramienta para la colocación de las variables y el grado de los polinomios, según sea la interpolación del elemento que se necesite.

### 2.2.4.1.1 La Lagrangiana en dos dimensiones

Se obtiene tomando el polinomio completo del grado que se desea utilizar, como se muestra en la figura 2.11.

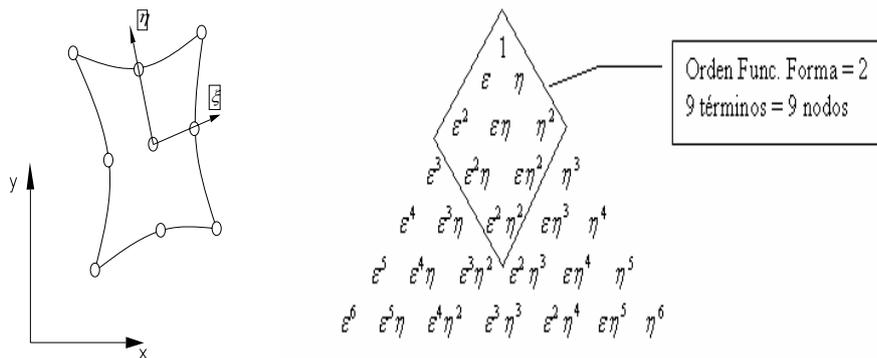


Figura 2.11.- Triángulo de Pascal para determinar las funciones de forma de un elemento cuadrilátero de 9 nodos por la familia Lagrangiana.

Sea un elemento bidimensional de segundo grado, este posee nueve términos, que se representan por combinaciones de estos términos que cumplen con el método de los desplazamientos. Cabe destacar que, las combinaciones antes mencionadas son las funciones de forma de las coordenadas naturales. Por tanto, se afirma que el elemento sea de la forma que fuera posee nueve nodos, un nodo por cada función de forma.



## **2.2.5 Tipos de elementos convergentes**

Al realizar análisis por el método de los elementos finitos es necesario utilizar elementos convergentes en una, dos y tres dimensiones para asegurar resultados idóneos. Los tipos de elementos convergentes pueden ser subparamétrico, isoparamétrico o superparamétrico.

### ***2.2.5.1 Subparamétrico***

Es cuando las funciones de interpolación o de forma geométrica son de orden inferior a las funciones de interpolación de los desplazamientos.

### ***2.2.5.2 Isoparamétrico***

Es cuando las funciones de interpolación o de forma geométrica son del mismo orden que las funciones de interpolación de los desplazamientos.

### ***2.2.5.3 Superparamétrico***

Es cuando las funciones de interpolación o de forma geométrica son de orden superior a las funciones de interpolación de los desplazamientos.

### **2.2.6 Criterios de convergencia**

El análisis de una estructura por el método de los elementos finitos es correcto si al aumentar el número de elementos, es decir, discretizar o refinar el medio continuo elástico, las respuestas de la estructura se aproximan cada vez más a la solución exacta de las ecuaciones de gobierno.

Cuando no se conocen las ecuaciones de gobierno y, por tanto, no se conoce la respuesta exacta de la estructura, la convergencia de las soluciones se constata por el hecho de que se verifiquen las ecuaciones de equilibrio en cualquier punto de la estructura. Vázquez-López (2001).

#### ***2.2.6.1 Criterio de continuidad***

El campo de desplazamientos debe ser continuo en el interior del elemento.

#### ***2.2.6.2 Criterio de derivabilidad***

La aproximación polinómica de las funciones de forma deben ser derivables al menos hasta el orden de las derivadas que aparecen en las integrales del problema.

#### ***2.2.6.3 Criterio de integrabilidad***

La derivada de orden  $N$  de una función es integrable si son continuas sus  $N - 1$  primeras derivadas.

#### ***2.2.6.4 Criterio de la parcela***

En un conjunto de elementos finitos, se considera la aplicación del criterio de la parcela cuando se aplican en los nodos del contorno, movimientos prescritos, correspondiente a un campo de desplazamientos prefijados y conocido en toda ella.

#### ***2.2.6.5 Criterio de deformación constante***

Para lograr un estado de deformación constante, es necesario refinar las condiciones de borde de los elementos.

#### ***2.2.6.6 Criterio de cuerpo rígido***

Al someter un conjunto de elementos a un campo de movimientos impuesto en su contorno como sólido rígido, debe obtenerse un estado de deformación nula en su interior.

#### ***2.2.6.7 Criterio de compatibilidad***

Los desplazamientos deben ser continuos en los puntos o nodos situados dentro de los elementos y en sus bordes o contorno. Por tal razón, la compatibilidad dentro de los elementos está garantizada utilizando polinomios como funciones de desplazamientos.

## 2.3 Uso de los Sistemas de Álgebra por Computadora (SAC)

### 2.3.1 Antecedentes

Los Sistemas de Álgebra por Computadoras (SAC) son herramientas para calcular expresiones tanto numéricas como simbólicas.

Estos paquetes son utilizados corrientemente en el mercado, para sistemas analíticos de uso en computadoras personales siendo el caso de Maple, Derive, Mathematica entre otros. Todos los SAC son capaces de realizar operaciones algebraicas elementales de manera parcial o total, en este mismo sentido la derivación e integración de funciones son muy comunes de analizar y graficar en estos paquetes Cardoso (1994). Hoy día, los SAC tienen rutinas incorporadas de matemática simbólica, permitiendo al usuario un desarrollo mucho más general de las expresiones matemáticas porque se obtiene ventaja con relación a programas ya existentes que sólo manejan la parte numérica para la resolución de problemas.

El uso de los programas SAC pueden ejecutarse interactivamente; las expresiones que se pueden obtener son tanto numérica como simbólicas. El usuario teclea las expresiones que requiere y se realiza la presentación en pantalla de los teclados. Por ejemplo, una matriz (2x2), B es mostrada en pantalla como:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Otro aspecto de relevancia en los programas SAC es la manipulación de polinomios; tales como la simplificación, expansión, factor común, entre otras operaciones. Además se puede realizar sustituciones de valores numéricos en funciones ya insertadas.

Todos los SAC están provistos de paquetes internos para las operaciones fundamentales con matrices; también se pueden desarrollar procedimientos y secuencias de códigos. Las expresiones y comandos pueden ser leídas de archivos, siendo esto muy útil para procesar programas muy extensos en líneas de código. Los resultados también pueden ser escritos en archivos de salida.

### **2.3.2 Uso en la ingeniería**

La manipulación de gran cantidad de datos obteniendo resultados rápidos, con operaciones que serían muy tediosas de no haber programas SAC. Por ello el uso de SAC se está incrementando día a día en el análisis de problemas que se les presentan a los ingenieros y científicos.

En particular, SAC pueden ser aplicados en el estudio de métodos, tales como elementos de contorno, diferencias finitas, elementos finitos y otros métodos numéricos. También, por su versatilidad y eficiencia en la manipulación de datos y expresiones de tipo simbólica es de gran ayuda. El análisis y diseño de sólidos es fundamental en la ingeniería, actualmente los programas de computación facilitan el resolver problemas en las ramas de ingeniería aeroespacial, estructural, geotecnia, fluidos y muchos otros. Los sistemas de álgebra

por computadora (SAC) son herramientas que permiten simplificar trabajo en cálculo al crear los programas comerciales utilizados.

### 2.3.3 SAC utilizado en este trabajo: MAPLE

MAPLE es un programa especializado en sistemas de álgebra por computadora que permite resolver problemas matemáticos muy comunes en carreras científicas y de ingeniería. Este apartado posee una síntesis del funcionamiento de MAPLE explicando como resolver derivadas e integrales utilizando esta poderosa herramienta. Para emplear el MAPLE se describirán a continuación sus elementos fundamentales:

- El programa tiene los siguientes nombres reservados que no pueden ser utilizados para designar variables: **and, else, if, mod, or, stop, by, end, in, not, proc, then, do, fi, intersect, od, quit, to, done, for, local, option, read, union, elseif, from, minus, options, save, while, return, break, next.**
- Para declarar una variable se coloca el nombre de la variable seguido de dos puntos y el signo igual (: =). Luego se coloca la expresión o valor. Además se debe utilizar punto y coma ( ; ) al finalizar la escritura de la operación que se necesita desarrollar.

### Ejemplo A: Declaración de la variable ejemplo1

> **ejemplo1 := 3\*x\*y ;**

$$ejemplo1 \quad := \quad 3 \ x \ y$$

- La letra inicial de los comandos que se colocan en mayúscula indican la operación que se desea realizar.

### Ejemplo B: Operación que se desea realizar: Se ilustra con una derivada y una integral

> **ejemplo2\_der := Diff (ejemplo1,x) ;**

**ejemplo2\_int := Int (ejemplo1,x) ;**

$$ejemplo2\_der \quad := \quad \frac{\partial}{\partial x} ( 3 \ x \ y )$$

$$ejemplo2\_int \quad := \quad \int 3 \ x \ y \ d \ x$$

Dentro del argumento se coloca la variable ejemplo1, siendo ésta la función a derivar o integrar y la letra x, la variable respecto a la cual se deriva o integra. Para obtener el resultado del Ejemplo 2, se utiliza el comando **diff** o **int**, siendo minúscula la primera letra del comando.

### Ejemplo C: Resultado de la operación

Para obtener el resultado del Ejemplo B, se utiliza el comando **diff** o **int**, siendo minúscula la primera letra del comando.

> **ejemplo3\_der := diff (ejemplo1,x) ;**

```
ejemplo3_int := int (ejemplo1,x) ;
```

$$\begin{aligned} \text{ejemplo3\_der} &:= 3 y \\ \text{ejemplo3\_int} &:= \frac{3 x^2 y}{2} \end{aligned}$$

Se observa en este ejemplo el resultado de la derivación e integración de la variable ejemplo1. En el Ejemplo C se deriva e integra respecto a la variable x. A continuación se presentan ejemplos de expresiones que permiten calcular derivadas ordinarias y parciales:

**Ejemplo D: Función a ser utilizada para derivarla e integrarla**

```
> ejemplo4:= 5*sin(x)*sin(3*y) + 3*x**4/(cos(y) + 5);
```

$$\text{ejemplo4} := 5 \sin(x) \sin(3y) + \frac{3x^4}{\cos(y) + 5}$$

La función asignada a la variable ejemplo4 se utilizará para realizar las derivadas e integrales con respecto a y; como se muestra a continuación en las variables ejemplo5\_der y ejemplo5\_int.

```
> ejemplo5_der := diff (ejemplo4,y) ;
```

```
ejemplo5_int := int (ejemplo4,y) ;
```

$$\begin{aligned} \text{ejemplo5\_der} &:= 15 \sin(x) \cos(3y) + \frac{3x^4 \sin(y)}{(\cos(y) + 5)^2} \\ \text{ejemplo5\_int} &:= -\frac{5}{3} \sin(x) \cos(3y) + \frac{1}{2} x^4 \sqrt{6} \arctan\left(\frac{1}{3} \tan\left(\frac{y}{2}\right) \sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

El argumento del comando diff en la siguiente variable (ejemplo8\_der4) presenta una variante no vista en los ejemplos anteriores, la derivación respecto a la variable x tiene el símbolo dólar (\$) intercalado entre la variable x y el número 4. Esto significa que el programa realiza la derivada cuarta de la función asignada a la variable ejemplo4.

> **ejemplo8\_der4 := diff (ejemplo4,x\$4) ;**

$$\text{ejemplo8\_der4} \quad := \quad 5 \sin ( x ) \sin ( 3 y ) + \frac{72}{\cos ( y ) + 5}$$

Las variables que se presentan a continuación son la representación y solución de la derivada parcial del Ejemplo D asignadas a las variables ejemplo9\_der y ejemplo10\_der.

> **ejemplo9\_der := Diff (ejemplo5,x,y) ;**

$$\text{ejemplo9\_der} \quad := \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( 5 \sin ( x ) \sin ( 3 y ) + \frac{3 x^4}{\cos ( y ) + 5} \right)$$

> **ejemplo10\_der := diff (ejemplo5,x,y) ;**

$$\text{ejemplo10\_der} \quad := \quad 15 \cos ( x ) \cos ( 3 y ) + \frac{12 x^3 \sin ( y )}{(\cos ( y ) + 5)^2}$$

Para finalizar este apartado, vale decir que es necesario tener el conocimiento teórico de las matemáticas básicas, ya que esto permite analizar los resultados obtenidos y verificar si realmente son los valores correctos o simplemente un error producto del desconocimiento de los conceptos básicos.

### 2.3.3.1 Factorización

El factorizar expresiones con Maple resulta sencillo porque se utilizan comandos preestablecidos, tal es el caso del comando “factor”. En polinomios con una o múltiples variables se utiliza el comando “factor” para lograr un orden más compacto de la expresión. A continuación se muestra una simplificación con este comando.

```
> f:=x^5-x^4-7*x^3+x^2+6*x;
```

```
> F:=factor(f);
```

$$f := x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x$$

$$F := x(x-1)(x-3)(x+2)(x+1)$$

```
> g:=x^4+4*x^3*y-7*x^2*y^2-22*x*y^3+24*y^4;
```

```
> G:=factor(g);
```

$$g := x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 22xy^3 + 24y^4$$

$$G := (-y+x)(-2y+x)(3y+x)(4y+x)$$

> **r:=f/g; R:=factor(r);**

$$r := \frac{x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x}{x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 22xy^3 + 24y^4}$$

$$R := \frac{x(x-1)(x-3)(x+2)(x+1)}{(-y+x)(-2y+x)(3y+x)(4y+x)}$$

También, existe otro comando llamado “collect” de gran utilidad en este trabajo. A continuación, se muestra el comando “collect” para simplificar expresiones simbólicas.

La función “f” es una función simbólica donde A,B y C son constantes y x,y son variables.

> **f:=(x+y+A)^3\*(x+B\*y+C);**

$$f := (x + y + A)^3 (x + B y + C)$$

Se realiza una factorización a la expresión f respecto al eje x.

> **fx:=collect(%,x);**

$$\begin{aligned} fx := & x^4 + (3y + 3A + By + C)x^3 \\ & + ((y + A)(2y + 2A) + (y + A)^2 + (3y + 3A)(By + C))x^2 \\ & + ((y + A)^3 + ((y + A)(2y + 2A) + (y + A)^2)(By + C))x + (y + A)^3(By + C) \end{aligned}$$

Se realiza una factorización a la expresión f respecto al eje y.

> **fy:=collect(%,y);**

$$\begin{aligned} fy := & By^4 + ((3x + 3A)B + x + C)y^3 \\ & + (((x + A)(2x + 2A) + (x + A)^2)B + (3x + 3A)(x + C))y^2 \\ & + ((x + A)^3B + ((x + A)(2x + 2A) + (x + A)^2)(x + C))y + (x + A)^3(x + C) \end{aligned}$$

### 2.3.3.2 Matrices

El estudio de vectores y matrices es el corazón del álgebra lineal. En esta oportunidad, se utilizan las matrices como herramientas para organizar y representar ciertos objetos en el plano o el espacio. A continuación, se muestra la notación de los comandos “matriz” y “array” para utilizar matrices en el Maple.

```
> m:=matrix([ [a,7,h],[c,9,g],[d,5,8] ]);
```

$$m := \begin{bmatrix} a & 7 & h \\ c & 9 & g \\ d & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

```
> n:=array([ [a,h],[c,g],[d,8] ]);
```

$$n := \begin{bmatrix} a & h \\ c & g \\ d & 8 \end{bmatrix}$$

### 2.3.3.3 Definición de procedimientos

Maple posee comandos donde se pueden crear subrutinas o programas que permiten optimizar las operaciones que se realizan para resolver gran variedad de problemas tanto en matemáticas, ingeniería, estadísticas entre otros. El comando “proc” permite crear este tipo de subrutinas.

```
> f:=proc(i,j,k,l);
```

```
    3 * i^2 + 4.2 * j^5 - ( 5*k^3 ) / ( 7*l+5*k ) ;
```

```
end proc;
```

```
f:= proc (i, j, k, l) 3×i2 + 4.2×j5 – 5×k3/(7×l + 5×k) end proc
```

El procedimiento anterior, presenta una ecuación donde intervienen cuatro variables (i, j, k, l). La ecuación es programada para facilitar los resultados con solo expresar el nombre del procedimiento y los valores de las variables, como se presenta a continuación:

```
> f(1,2,5,8);
```

129.6839506

#### 2.3.3.4 Conversión de expresiones simbólicas a ForTran

Convertir las expresiones y resultados simbólicos arrojados por Maple es conveniente cuando se necesitan resolver los diferentes problemas que pueden ser sistematizados y/o programados. La conversión desde Maple hasta fortran se realiza utilizando los siguientes comandos:

```
> with(codegen,fortran);
```

[codegen:-fortran]

Este comando activa la librería que tiene Maple para la conversión de expresiones a código a fortran.

```
> f:= A * i^2 + B * j^5 - ((C * k^3)/(D * l + E * k));
```

$$f := A i^2 + B j^5 - \frac{C k^3}{D l + E k}$$

f es la expresión polinómica que se va a convertir a código fortran, con el comando “fortran”.

> **fortran(f);**

```
t0 = A*i**2+B*j**5-C*k**3/(D*l+E*k)
```

El comando fortran agrega el nombre t0 a la expresión convertida. Ahora bien, cuando se tienen expresiones muy extensas el comando anteriormente utilizado puede combinarse con una opción llamada “optimized”, como se muestra en el siguiente ejemplo:

> **fortran(f,optimized);**

```
t1 = i**2
t3 = j**2
t4 = t3**2
t7 = k**2
t15 = A*t1+B*t4*j-C*t7*k/(D*l+E*k)
```

Las variables “t#” son colocadas aleatoriamente por el comando, siendo # = 1,3,4,7 y 15. Esta opción optimiza las expresiones, lo que permite al computador calcular mucho más rápida las variables obteniendo mejoras en tiempo de ejecución computacional.



## **CAPÍTULO III**

# **Formulación isoparamétrica**

### **3.1 Introducción**

La formulación isoparamétrica regulariza la forma de los elementos, es decir, para un elemento cuadrilátero de lados rectos o curvos se transforma en un cuadrado, mientras que, para un elemento hexaédrico la transformación será un cubo.

Esta formulación simplifica el cálculo de la matriz de rigidez de los elementos, además, facilita el modelar con elementos arbitrarios permitiendo una mejor adaptación a la forma del medio.

Básicamente, el procedimiento utilizado en la formulación del Método de los Elementos Finitos consiste en expresar las coordenadas del elemento y los desplazamientos del mismo, con funciones de interpolación o de forma, usando un sistema de coordenadas naturales o adimensional. Es decir, la formulación isoparamétrica exige la utilización de coordenadas naturales o normalizadas, lo que hace necesario, aplicar las propiedades del Jacobiano debido a que las derivadas que figuran en las matrices de deformación son derivadas respecto a las coordenadas euclidianas.

El sistema de coordenadas utilizado puede ser uni, bi o tridimensional de acuerdo con el elemento en estudio.

### 3.2 Transformación de un elemento finito de un plano euclidiano a uno normalizado y viceversa

El plano normalizado que desde ahora en adelante se llamara plano gaussiano, se representa como un cuadrado regular de lado igual a dos unidades de longitud, definido con las coordenadas  $\xi, \eta$ . Los ejes adimensionales pasan por el baricentro del elemento. De manera que las funciones de forma que interpolan la geometría del elemento (coordenadas  $x, y$ ) y las funciones de forma que interpolan las incógnitas nodales ( $u, v$ ) pueden ser calculadas más fácilmente en este plano. A continuación, se muestra la transformación de elementos de ocho nodos (dos grados de libertad por nodo) desde un plano euclidiano hasta uno gaussiano y viceversa. Figura 3.1.

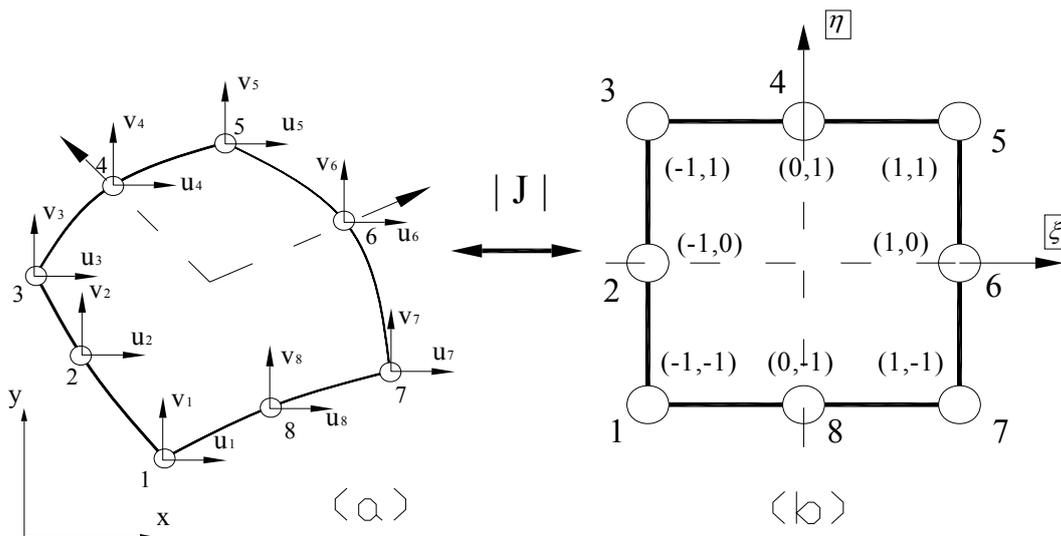


Figura 3.1.- Transformación de un plano euclidiano a uno normalizado y viceversa.

En la figura 3.1,  $|J|$  representa el determinante de la matriz de transformación de coordenadas. (Ver apartado 2.1.3.2)

Cabe destacar que, la numeración de los nodos en el elemento finito es en el sentido horario y consecutiva, (figura 3.1), de manera que el nodo 1 del elemento unidimensional ubicado en el tercer cuadrante tiene coordenadas  $\xi = -1, \eta = -1$ , lo que obliga al nodo 2 a estar en la posición  $\xi = -1, \eta = 0$ . De manera similar, siguiendo el sentido y numeración antes explicado se tiene la posición de los nodos restantes.

### 3.3 Funciones de forma para un elemento cuadrilátero de ocho nodos

A continuación, se consideran funciones de forma de la familia serendipita para un elemento finito de 8 nodos. (Ver apartado 2.2.4.1.2). Las funciones de forma que representan a los ocho nodos están en función de las coordenadas naturales  $(\xi, \eta)$  y tienen como propiedad fundamental adoptar el valor uno “1” en el nodo que se estudia y cero “0” en los demás nodos.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) & N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) & N_4 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2) \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) & N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) & N_8 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1-\xi^2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

### 3.4 Transformación isoparamétrica

En el método de los elementos finitos, los desplazamientos de un elemento  $\{U_e\}$  se expresan en función de los desplazamientos nodales  $\{\delta_e\}$  mediante la matriz de interpolación  $[N_e]$ , tal que

$$\{U_e\} = [N_e]\{\delta_e\} \quad (3.2)$$

Igualmente, las coordenadas de un punto del elemento  $\{x_e\}$ , pueden expresarse en función de las coordenadas nodales  $\{c_e\}$  mediante la matriz de interpolación  $[N_e^*]$ , tal que

$$\{x_e\} = [N_e^*]\{c_e\} \quad (3.3)$$

Entonces, el elemento finito es isoparamétrico cuando son iguales las matrices de interpolación  $[N_e]$  y  $[N_e^*]$  expresadas en función de las coordenadas naturales.

La transformación isoparamétrica facilita el tratamiento donde estén involucrados elementos irregulares; ya que, en el nuevo sistema de coordenadas naturales estos elementos irregulares se transforman en elementos regulares, porque se reproducen las mismas condiciones de contorno en el elemento. Al utilizar la transformación isoparamétrica para representar la deformación que le ocurre al elemento finito en cualquier punto, la deformación se puede definir mediante tres componentes que contribuyen al trabajo interno:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \tilde{L} \cdot \tilde{U} \quad (3.4)$$

Reescribiendo (3.3) en forma matricial se obtiene la expresión de  $\tilde{U} = \tilde{N} \tilde{a}^e$ , donde  $\tilde{a}^e$  representa la matriz de desplazamientos nodales de un elemento y  $\tilde{N}$  representa la variación de las posiciones nodales en el plano x,y.

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \cdot \tilde{a}^e \quad (3.5)$$

donde  $\tilde{B}$  es una matriz definida por :

$$\tilde{B}_i = \tilde{L} \cdot \tilde{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Aplicando el teorema de los trabajos virtuales, (ver apartado 2.1.2.1), los coeficientes de la matriz de rigidez de un elemento vienen definidos por la relación siguiente:

$$K_{ij}^{(e)} = \int_V \tilde{B}_i^T \tilde{D} \tilde{B}_j dv \quad (3.7)$$

Donde  $\tilde{B}$  representa la matriz de transformación deformación – desplazamiento y  $\tilde{D}$  representa la matriz elástica del problema.

### 3.5 Sistema matricial de derivadas parciales

Para poder evaluar la matriz de rigidez  $\tilde{K}^{(e)}$  según la expresión (3.7), es necesario calcular la matriz deformación – desplazamiento realizando la transformación de coordenadas del plano euclidiano a un plano adimensional. Al derivar parcialmente las funciones de forma (3.1) respecto a las variables adimensionales  $(\xi, \eta)$ , la regla de la derivación en cadena permite escribir:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \qquad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \qquad (3.8)$$

Y en forma matricial se tiene

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^{(e)}} * \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{(e)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{Bmatrix} \qquad (3.9)$$

Donde  $\mathbf{J}^{(e)}$  es la matriz de transformación de sistemas coordenados, o simplemente la matriz del Jacobiano de la transformación de las coordenadas euclidianas a la natural.

La matriz del Jacobiano es la que enlaza de manera biunívoca el plano euclidiano con el plano gaussiano. Como se explica en el apartado (2.1.3.2).

Es importante resaltar que, el determinante de la matriz del jacobiano varía según las distintas geometrías que puede adoptar un elemento finito en específico. En el apartado 3.7.1.2 se detallan las posibles variaciones que sufre el determinante del jacobiano al variar las posiciones de los nodos del elemento en estudio.

### 3.6 Matriz de rigidez

Los coeficientes de la matriz de rigidez de un elemento cualquiera  $\mathbf{ij}$  se deduce del principio de los trabajos virtuales expresado en el apartado (2.1.2.1), y se representa en la ecuación:

$$\tilde{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} B_i^T DB_j t dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_i^T(\varepsilon, \eta) DB_j(\varepsilon, \eta) |J^{(e)}| t d\varepsilon d\eta \quad (3.10)$$

Donde la matriz  $B_i$ , transformación deformación-desplazamiento, ya explicada oportunamente el apartado (2.2.4.5), la cual tiene la siguiente forma:

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

La matriz  $\tilde{D}$  de constantes elásticas por tensión plana, explicada en el apartado (2.1.1.4) es la siguiente:

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$d_{11} = \frac{1}{1-\nu}; \quad d_{12} = d_{21}; \quad d_{21} = \nu \cdot d_{11}; \quad d_{33} = \frac{1}{2}$$

y la matriz Jacobiana  $J^{(e)}$ , explicada en el apartado (2.1.3.2) es como sigue:

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Donde el determinante de la matriz jacobiana es:

$$|J| = \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) x_i * \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) y_i - \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) y_i * \sum_{i=1}^8 \left( \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) x_i \quad (3.13.a)$$

### 3.6.1 Sub matriz de rigidez

La sub matriz de rigidez del elemento bidimensional estudiado posee dos grados de libertad por nodo, permite obtener cuatro términos cuando interactúan los grados de libertad del nodo “i” con los del nodo “j”. Siendo “i” y “j” los indicadores de los nodos que están interactuando para determinar los términos.

Para el efecto de hacer factible el cálculo, se realizan las multiplicaciones de las derivadas parciales y se dividen por el Jacobiano, obteniendo la siguiente submatriz del elemento finito en tensión plana.

$$K_{i,j} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \begin{array}{cc} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{1}{(1-\nu)} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}}{|J|} d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\nu}{(1-\nu)} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x}}{|J|} d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\nu}{(1-\nu)} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y}}{|J|} d\xi d\eta & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{1}{(1-\nu)} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}}{|J|} d\xi d\eta \end{array} \right] \quad (3.14)$$

### **3.7 Técnica para la obtención de las matrices de rigidez por integración analítica de los elementos finitos más utilizados en medios continuos elásticos**

En la actualidad, los programas para el análisis de medios continuos por el método de elementos finitos utilizan la integración numérica para resolver diversos problemas. En investigaciones anteriores Videla et al (2005), desarrolló una técnica que permite integrar analíticamente las matrices de rigidez de los elementos finitos más utilizados en los análisis de medios continuos.

La técnica consiste en determinar los grados y coeficientes de los polinomios que aparecen al interactuar los nodos del elemento, agrupando en ecuaciones simbólicas similares según la interacción de los nodos, llamadas según los autores Ecuaciones Básicas Características (EBC), aparte, se estudia el determinante del jacobiano encontrando asimismo el grado y los coeficientes simbólicos del polinomio.

Las EBC aparecen al hacer interactuar los nodos del elemento que se quiere estudiar, específicamente, las EBC son producto de la multiplicación de las derivadas parciales de las funciones de forma respecto a las coordenadas  $(\xi, \eta)$  y de las propiedades elásticas del elemento, es decir, el desarrollo de los numeradores de los cuatro términos de la sub-matriz presentada en el apartado anterior (Ver apartado 3.6.1). Es importante resaltar que las EBC no se modifican al alterar la forma del elemento.

El jacobiano se estudia de manera exhaustiva porque la expresión general de éste se modifica al variar la forma del elemento, adquiriendo gran relevancia al tratar de calcular la

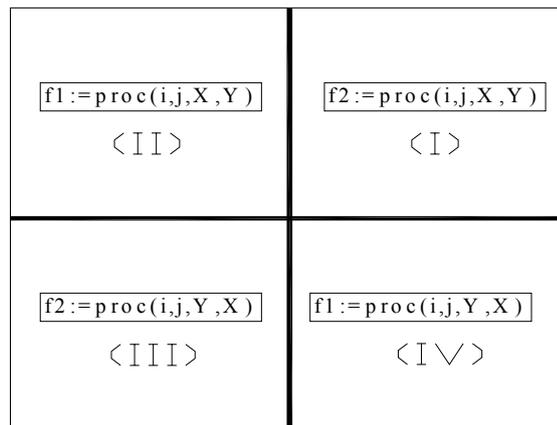
matriz de rigidez del elemento, ya que, la forma del elemento finito la rige el determinante del jacobiano que se puede interpretar como el factor de escala que correlaciona las coordenadas euclidianas con las coordenadas adimensionales y viceversa. El jacobiano siempre se encuentra en el denominador de los términos de la sub matriz de rigidez, por lo tanto, se estudia por separado y se determina el grado y los coeficientes del polinomio, ya sea, en dos o tres dimensiones. (Ver apartado 3.5). El polinomio encontrado representa el elemento general a estudiar, este elemento se puede particularizar en casos según la forma que el elemento adquiera, por ejemplo, para un elemento donde uno de sus lados sea paralelo a uno de los ejes coordenadas, el jacobiano deja de ser general y se convierte en particular reduciéndose el grado del polinomio, por lo tanto, se demuestra que la técnica a ser empleada permite identificar los casos en los que se pueden particularizar el elemento finito.

### 3.7.1 Elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos

Este trabajo estudia el elemento finito isoparamétrico de ocho nodos, cada nodo posee dos grados de libertad siendo la numeración en sentido horario y consecutiva. A continuación se presenta un procedimiento realizado en el programa de Sistemas de Álgebra por Computadora, llamado: Maple.

```
f1:=proc(i,j,X,Y)
option inline;
DNODO[i][X]*DNODO[j][X]*d11+DNODO[i][Y]*DNODO[j][Y]*d33
end proc
```

Este procedimiento llamado f1 permite obtener los numeradores de los términos del segundo y cuarto cuadrante de la sub matriz de rigidez (3.14), siendo “(i,j,...” letras índices de los nodos.  $i=1..8, j=1..8$ . Mientras que, “...,X,Y)” son índices que permiten al usuario decidir cual cuadrante del término desarrollar, con “...,X,Y)” se determina el segundo cuadrante, en tanto, para determinar el cuarto cuadrante se intercambian las letras como se muestra a continuación: “...,Y,X)”. Para determinar los cuadrantes uno y tres se desarrollo un procedimiento análogo a f1, llamado f2. En la figura 3.2, se muestran los procedimientos asignados a cada uno de los cuadrantes análogos a la sub matriz de rigidez.



**Figura 3.2.- Procedimientos que permiten obtener las expresiones de la sub matriz de rigidez.**

Las seis ECB permiten obtener los 136 términos de 256 que posee la matriz de rigidez del elemento, por ser ésta simétrica. A continuación, se presentan los términos que generan cada una de las ECB. (Ver anexo B. Detalles de las expresiones ECB).

**ECB1: Interacción entre nodos esquinas (1, 3, 5 y 7)**

Los 36 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB1 son:

$$k_{1,1} \ k_{1,2} \ k_{1,5} \ k_{1,6} \ k_{1,9} \ k_{1,10} \ k_{1,13} \ k_{1,14} \ k_{2,2} \ k_{2,5} \ k_{2,6} \ k_{2,9} \ k_{2,10} \ k_{2,13} \ k_{2,14} \ k_{5,5} \ k_{5,6} \ k_{5,9} \ k_{5,10} \\ k_{5,13} \ k_{5,14} \ k_{6,6} \ k_{6,9} \ k_{6,10} \ k_{6,13} \ k_{6,14} \ k_{9,9} \ k_{9,10} \ k_{9,13} \ k_{9,14} \ k_{10,10} \ k_{10,13} \ k_{10,14} \ k_{13,13} \ k_{13,14} \ k_{14,14}$$

**ECB2: Interacción entre nodos esquinas (1, 3, 5 y 7) y nodos internos (2 y 6)**

Los 32 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB2 son:

$$k_{1,3} \ k_{1,4} \ k_{1,11} \ k_{1,12} \ k_{2,3} \ k_{2,4} \ k_{2,11} \ k_{2,12} \ k_{3,5} \ k_{3,6} \ k_{3,9} \ k_{3,10} \ k_{3,13} \ k_{3,14} \ k_{4,5} \ k_{4,6} \ k_{4,9} \\ k_{4,10} \ k_{4,13} \ k_{4,14} \ k_{5,11} \ k_{5,12} \ k_{6,11} \ k_{6,12} \ k_{9,11} \ k_{9,12} \ k_{10,11} \ k_{10,12} \ k_{11,13} \ k_{11,14} \ k_{12,13} \ k_{12,14}$$

**ECB3: Interacción entre nodos esquinas (1, 3, 5 y 7) y nodos internos (4 y 8)**

Los 32 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB3 son:

$$k_{1,7} \ k_{1,8} \ k_{1,15} \ k_{1,16} \ k_{2,7} \ k_{2,8} \ k_{2,15} \ k_{2,16} \ k_{5,7} \ k_{5,8} \ k_{5,15} \ k_{5,16} \ k_{6,7} \ k_{6,8} \ k_{6,15} \ k_{6,16} \ k_{7,9} \\ k_{7,10} \ k_{7,13} \ k_{7,14} \ k_{8,9} \ k_{8,10} \ k_{8,13} \ k_{8,14} \ k_{9,15} \ k_{9,16} \ k_{10,15} \ k_{10,16} \ k_{13,15} \ k_{13,16} \ k_{14,15} \ k_{14,16}$$

**ECB4: Interacción entre nodos internos (2 y 6)**

Los 10 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB4 son:

$$k_{3,3} \ k_{3,4} \ k_{3,11} \ k_{3,12} \ k_{4,4} \ k_{4,11} \ k_{4,12} \ k_{11,11} \ k_{11,12} \ k_{12,12}$$

**ECB5: Interacción entre nodos internos (4 y 8)**

Los 10 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB5 son:

$$k_{7,7} \quad k_{7,8} \quad k_{7,15} \quad k_{7,16} \quad k_{8,8} \quad k_{8,15} \quad k_{8,16} \quad k_{15,15} \quad k_{15,16} \quad k_{16,16}$$

**ECB6: Interacción entre nodos internos sucesivos (2, 4, 6 y 8)**

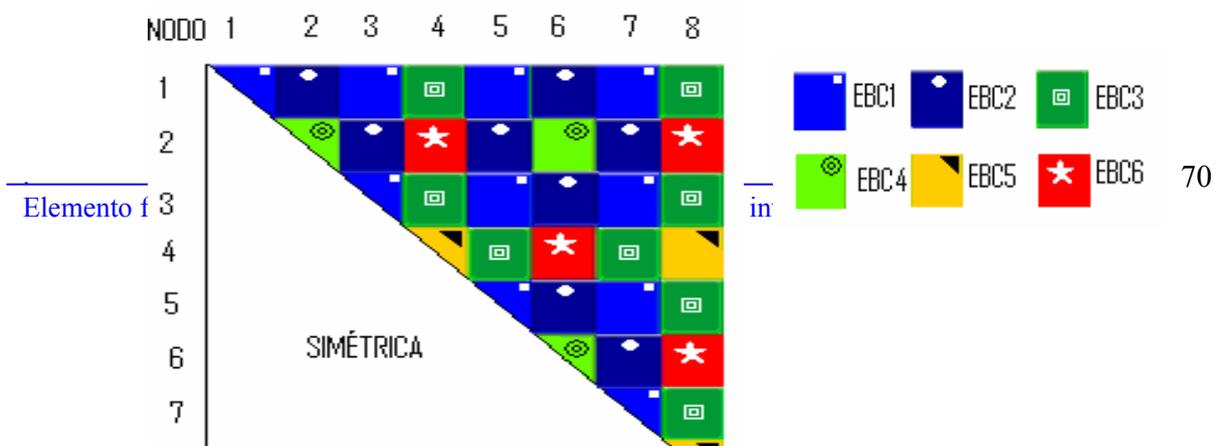
Los 16 términos de la matriz de rigidez generados por la ECB6 son:

$$k_{3,7} \quad k_{3,8} \quad k_{3,15} \quad k_{3,16} \quad k_{4,7} \quad k_{4,8} \quad k_{4,15} \quad k_{4,16} \quad k_{7,11} \quad k_{7,12} \quad k_{8,11} \quad k_{8,12} \quad k_{11,15} \quad k_{11,16} \quad k_{12,15} \quad k_{12,16}$$

Todas las expresiones de las ECB, contienen términos AKm(i), BKm(i), CKm(i), DKm(i),...,AGKm(i) que son constantes que dependen de las coordenadas euclidianas y las propiedades elásticas. La letra m representa el número de la ECB que se evalúa. (m=1..6). Mientras que, el índice “i” indica el término de la matriz de rigidez a ser calculado. A continuación, se presenta la expresión de la constante AK del término de rigidez 1, de los 36 que genera la ECB1.

$$AK1(1) = \left( \frac{y_1 + y_3}{16} - \frac{y_2}{16} - \frac{y_4}{16} \right) \left( \frac{y_1}{8} - \frac{y_3}{8} + \frac{y_2}{8} + \frac{y_4}{8} \right) d_{11} + \left( \frac{x_1}{16} - \frac{x_3}{16} + \frac{x_2}{16} + \frac{x_4}{16} \right) \left( \frac{x_1}{8} + \frac{x_3}{8} - \frac{x_2}{8} - \frac{x_4}{8} \right) d_{33}$$

La figura 3.2 que se muestra a continuación contiene los 136 términos de la matriz de rigidez que calcula cada una de las seis ECB. Vale decir, que cada cuadro contiene la submatriz que corresponde a los nodos que interactúan entre si.



**Figura 3.3.- Términos de la matriz de rigidez calculados por las seis EBC.**

Las ECB pueden generalizarse en una sola ecuación. La ecuación general (3.15) se representa como  $EG(i,j, |J|, \xi, \eta, \tilde{x})$ , donde el índice “i” es el número de la ECB, “j” es el término de rigidez a calcular,  $|J|$  es el determinante del jacobiano,  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas del plano gaussiano y  $\tilde{x}$  son las coordenadas euclidianas y los parámetros elásticos del elemento.

$$EG(i, |J|, \xi, \eta, \tilde{x}) = (AK(i,j))\eta^6 + (BK(i,j)\xi^2 + CK(i,j)\xi + DK(i,j))\eta^5 + (EK(i,j)\xi^4 + FK(i,j)\xi^3 + GK(i,j)\xi^2 + HK(i,j)\xi + IK(i,j))\eta^4 + (JK(i,j)\xi^4 + KK(i,j)\xi^3 + LK(i,j)\xi^2 + MK(i,j)\xi + NK(i,j))\eta^3 + (OK(i,j)\xi^5 + PK(i,j)\xi^4 + QK(i,j)\xi^3 + RK(i,j)\xi^2 + SK(i,j)\xi + TK(i,j))\eta^2 + (UK(i,j)\xi^5 + VK(i,j)\xi^4 + WK(i,j)\xi^3 + XK(i,j)\xi^2 + YK(i,j)\xi + ZK(i,j))\eta^1 + (AAK(i,j)\xi^6 + ABK(i,j)\xi^5 + ACK(i,j)\xi^4 + ADK(i,j)\xi^3 + AEK(i,j)\xi^2 + AFK(i,j)\xi + AGK(i,j))\eta^0 / |J| \quad (3.15)$$

donde

$$|J| = (AJ\xi + BJ)\eta^3 + (CJ\xi^2 + DJ\xi + EJ)\eta^2 + (FJ\xi^3 + GJ\xi^2 + HJ\xi + IJ)\eta + (JJ\xi^3 + KJ\xi^2 + LJ\xi + MJ) \quad (3.16)$$

La ecuación (3.16) representa el jacobiano de un elemento finito isoparamétrico de ocho nodos general como se muestra en la figura 3.1.a. Además, las constantes simbólicas AJ,

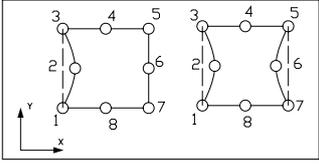
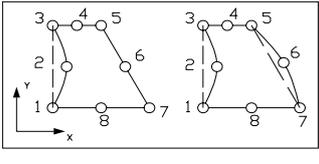
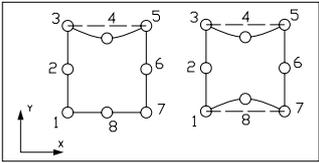
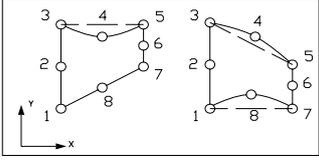
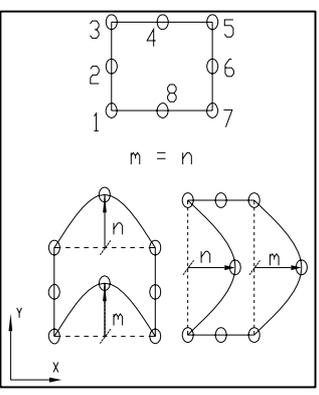
BJ, CJ,..., MJ que posee esta ecuación son constantes que dependen de las coordenadas euclidianas. Estas constantes pueden ser cero en casos donde la posición geométrica de los nodos del elemento finito tenga alguna característica particular respecto a los ejes coordenados euclidianos. Balboa – Videla (2005). El jacobiano (3.16) es el denominador de la ecuación general, el cual, esta en función de las variables adimensionales de tercer grado para la variable  $\eta$  y de segundo grado para la variable  $\xi$ , por lo tanto, al tratar de integrar analíticamente (3.15) cuando (3.16) posee más de cuatro coeficientes con variables de grado mayor que dos, no se presenta la respuesta al utilizar herramientas de SAC.

### ***3.7.1.1 Ecuación del determinante del Jacobiano dependiendo de la geometría del elemento finito cuadrilátero de ocho nodos.***

Al estudiar detalladamente el determinante del jacobiano (3.16), se obtienen de éste, treinta y nueve (39) ecuaciones o casos relacionados de las sesenta (60) formas válidas que puede adoptar el Elemento Finito Isoparamétrico de ocho nodos. (Ver anexo C: **E. F. Isoparamétrico de ocho nodos**). Cabe destacar que, han sido integrada y programada cinco (5) casos de los treinta y nueve (39) encontrados en un lenguaje de alto nivel llamado ForTran 95, (Ver Anexo D: **Códigos de los elementos integrados**).

En la siguiente página, se presenta la tabla 3.1 que contiene la forma y tipo de los elementos finitos integrados, la ecuación del Jacobiano y la característica que cada elemento posee. Es importante resaltar que, los nodos interiores de los cinco (5) casos integrados son nodos medios de cada lado.

**Tabla 3.1 Formas y características de los cinco elementos finitos integrados con su Jacobiano.**

Forma del Elemento finito	Tipo	Ecuación $ J  =$	Característica
	A	$EJ\eta^2 + MJ$ ( 3.17 )	Elementos de lado(s) curvo(s) cuya(s) traza(s) de los nodos extremos es (son) paralelo(s) al eje de las ordenadas
	B	$EJ\eta^2 + IJ\eta + MJ$ ( 3.18 )	Elementos de lado(s) curvo(s) donde una traza es inclinada y la otra es paralela al eje de las ordenadas
	C	$KJ\xi^2 + MJ$ ( 3.19 )	Elementos de lado(s) curvo(s) cuya(s) traza(s) de los nodos extremos es (son) paralelo(s) al eje de las abscisas
	D	$KJ\xi^2 + LJ\xi + MJ$ ( 3.20 )	Elementos de lado(s) curvo(s) donde una traza es inclinada y la otra es paralela al eje de las abscisas
	E	$MJ$ ( 3.21 )	Cuando $m = n$ , entonces los elementos finitos curvos con las características mostradas poseen la misma ecuación jacobiano que los elementos finitos rectangulares.



## **CAPÍTULO IV**

# **Comparación de distorsión geométrica y de tiempo de ejecución computacional**

## **4.1 Elementos finitos de geometría distorsionada**

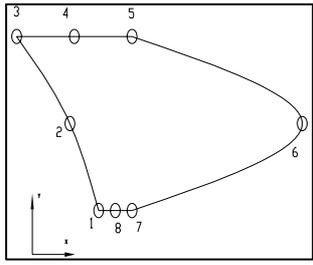
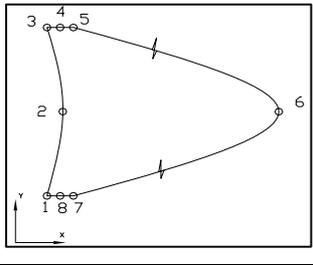
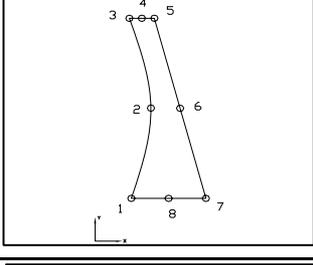
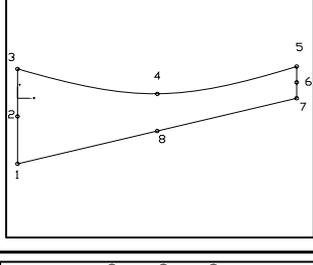
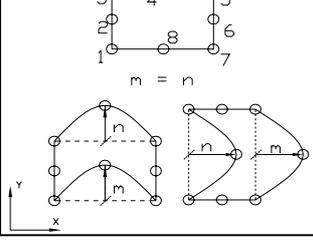
La precisión de los cálculos se medirá usando ordenes de integración numérica por puntos de Gauss, (3x3) y (4x4). (Ver apartado 2.1.3.3). Vale decir que, los elementos finitos a ser comparados en esta investigación, tienen la característica particular que las distorsiones a estudiar se producen al cambiar únicamente la posición geométrica de los nodos intermedios de los lados del elemento. El porcentaje de error de distorsión geométrica entre la integración analítica y la integración numérica se calcula utilizando la expresión, (4.1).

$$\%Error = \frac{\sqrt{\sum_{ter=1}^{256} (K_{Analítica}(ter) - K_{Numérica}(ter))^2}}{\sum_{ter=1}^{256} |K_{Analítica}(ter)|} * 100 \quad (4.1)$$

Donde,  $K_{Analítica}(ter)$ , es la matriz de rigidez analítica y  $K_{Numérica}(ter)$ , es la matriz de rigidez numérica, donde el índice (ter) representa cada uno de los términos de la matriz de rigidez analítica y numérica. A continuación, se presenta la tabla 4.1 que tienen cinco elementos finitos distorsionados donde los nodos interiores tienen una posición geométrica distintos a la traza que forman los nodos extremos de los nodos.

**Tabla 4.1 Porcentaje de error de precisión al integrar analíticamente E.F.**

**Isoparamétricos de 8 nodos.**

Forma del elemento	Coordenadas		% de error de precisión	
	X	Y	(Int-Analit) Vs (Int-Num)	
	102.40	46.30	<b>13.49</b>	<b>4.43</b>
	153.90	46.30		
	153.90	229.60		
	-24.20	229.60		
	128.15	46.30		
	416.70	137.95		
	64.85	229.60		
	58.10	137.95		
	-28.90	69.60	<b>39.43</b>	<b>18.75</b>
	-14.40	69.60		
	-14.40	173.40		
	-28.90	173.40		
	-21.65	69.60		
	297.70	121.50		
	-21.65	173.40		
	-20.20	121.50		
	11.30	10.60	<b>5.34</b>	<b>0.78</b>
	63.50	10.60		
	27.40	151.40		
	10.00	151.40		
	37.40	10.60		
	45.50	81.00		
	18.70	151.40		
	25.00	81.00		
	0.00	-360.20	<b>5.34</b>	<b>0.78</b>
	1408.30	0.00		
	1408.30	174.80		
	0.00	161.10		
	704.15	-180.10		
	1408.30	87.40		
	704.15	24.00		
	0.00	-99.55		
	0.00	0.00	<b>5.93</b>	<b>0.00</b>
	10.00	0.00		
	10.00	10.00		
	0.00	10.00		
	5.00	5.50		
	10.00	5.00		
	5.00	15.50		
	0.00	5.00		

**NOTA:** Cuando  $m = n$ , los elementos finitos curvos con las características mostradas poseen la misma ecuación jacobiana del rectángulo.



## 4.2 Tiempos de ejecución computacional

La comparación de tiempo de ejecución computacional permite conocer que tan eficiente resulta la integración analítica estudiada en este trabajo con respecto a la integración numérica de Gauss – Legendre de tercer y cuarto orden. Es importante resaltar que, los tiempos de ejecución computacional se calculan en un mismo computador. Para esta investigación se utilizó un computador con la siguiente configuración:; Procesador AMD Athlon(tm) 64 Procesador 2800+ 1.8 Ghz, 512 Mb de memoria RAM. Se deduce que en computadores más veloces los tiempos serán menores, pero los porcentajes de ganancia serán los mismos.

A continuación, se presenta la tabla 4.2 que contiene los tiempos de ejecución computacional de los cinco casos (A, B, C, D Y E) de elementos finitos integrados. (Ver apartado 3.7.1.1, Tabla 3.1). Asimismo, la cantidad de elementos y relación entre integración analítica y las integraciones numéricas de Gauss – Legendre de tercer y cuarto orden.

**Tabla 4.2 Relación del tiempo de ejecución entre integración analítica y la numérica.**

Caso del elemento finito	Cantidad de elementos	Tiempo Analítico (seg)	Tiempo Numérico 3x3 (seg)	Tiempo Numérico 4x4 (seg)	$\frac{T_{3x3}}{T_{analítico}}$	$\frac{T_{4x4}}{T_{analítico}}$
A	10.000	0,266	0,172	0,297	0,647	1,118
B	10.000	0,375	0,172	0,297	0,458	0,792
C	10.000	0,266	0,172	0,297	0,647	1,118
D	10.000	0,375	0,172	0,297	0,458	0,792
E	10.000	0,172	0,172	0,297	1	1,728



## *CAPÍTULO V*

# Aplicaciones

En este capítulo se describen tres ejemplos prácticos, los cuales se resolvieron con el programa FE2D, a éste, se le adhirieron las subrutinas analíticas desarrolladas en este trabajo para calcular los desplazamientos y esfuerzos necesarios para la comparación. Para desarrollar los ejemplos, se presenta un orden lógico de resolución de problemas, como se muestra a continuación:

- a) Planteamiento del problema
- b) Características del problema
- c) Problema discretizado
- d) Resultados

El planteamiento del problema presenta las dimensiones y forma del problema. Las características indican los nodos que se encuentran cargados y restringidos, además de los parámetros elásticos de los materiales, la geometría y la discretización del problema. El problema discretizado presenta la figura con el mallado, los elementos y las cargas nodales. (Ver Anexo E: **Consistencia de cargas nodales**). Por último, en los resultados se muestran los valores resultantes de los desplazamientos en uno de los nodos y los esfuerzos del elemento al que este nodo pertenece.

## 5.1 Ejemplos

### 5.1.1 Placa cuadrada con orificio elíptico

#### 5.1.1.1 Planteamiento del problema

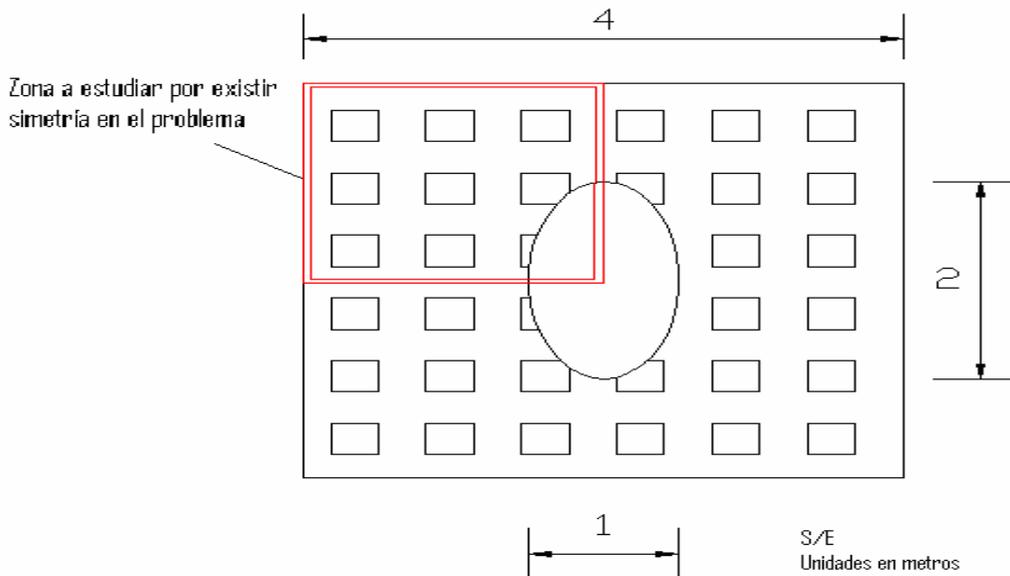


Figura 5.1.- Dimensiones de la placa con orificio elíptico.

#### 5.1.1.2 Características del problema

CARGAS		MATERIAL		RESTRICCIONES	
NODOS	Py (Ton)			NODOS	DIRECCIÓN
1	-0.50	Poisson	0.2	1 al 11	Y
12	-2.00	Young (Ton/cm <sup>2</sup> )	250	45	X
18	-1.00	<b>DISCRETIZACION</b>		51	X
29	-2.00	# de nodos	79	62	X
35	-1.00	# de elementos	20	68	X
46	-2.00	Tipos de integración	Analítica y numérica	79	X
52	-1.00	Orden de integrac. Gauss	3 y 4		
63	-2.00	<b>GEOMETRIA</b>			
69	-0.50	Long. x (m)	4		
		Long. y (m)	4		

5.1.1.3 Problema discretizado

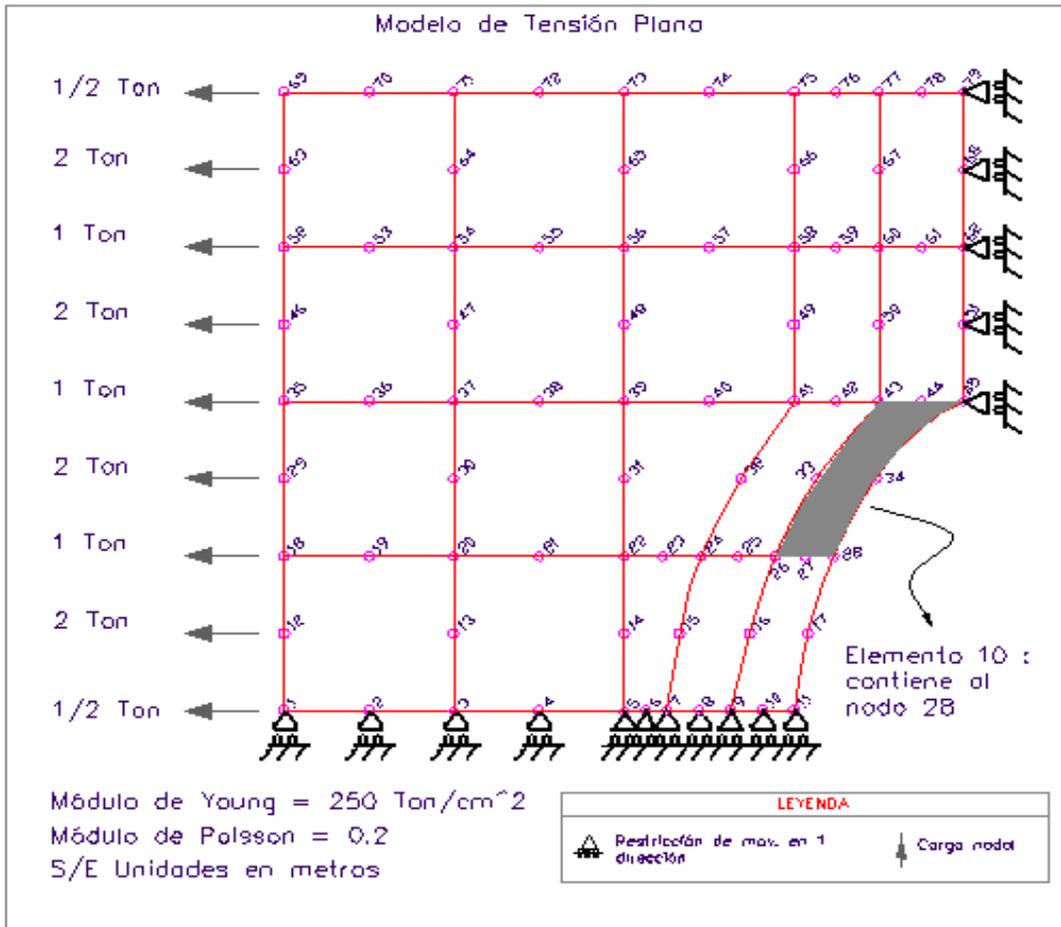


Figura 5.2.- Discretización de un cuarto de placa con orificio elíptico por la simetría del problema.

5.1.1.4 Resultados

Tabla 5.1.- Desplazamiento del nodo 28 y esfuerzos en el elemento 10 del problema discretizado.

<i>Placa cuadrada con orificio elíptico</i>		<i>3 x 3</i>		<i>4 x 4</i>	
		<i>Numérica</i>	<i>Analítica</i>	<i>Numérica</i>	<i>Analítica</i>
Desplazamiento del nodo # 28 (cm)	u	-0.766E-01	-0.766E-01	-0.766E-01	-0.766E-01
	v	-0.277E-01	-0.277E-01	-0.277E-01	-0.277E-01
Esfuerzos: Elemento 10 (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_x$	0.162E+01	0.162E+01	0.162E+01	0.162E+01
	$\sigma_y$	0.535E+00	0.535E+00	0.535E+00	0.535E+00

## 5.1.2 Viga en voladizo de sección variable

### 5.1.2.1 Planteamiento del problema

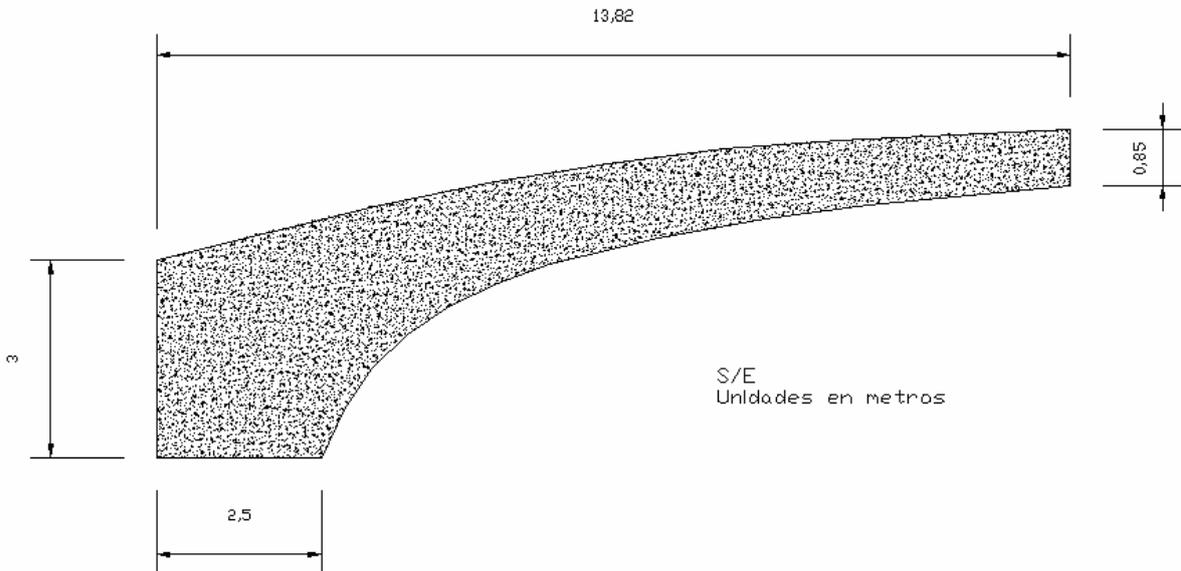


Figura 5.3.- Dimensiones de la viga en voladizo de sección variable.

### 5.1.2.2 Características del problema

CARGAS		MATERIAL		RESTRICCIONES	
NODOS	Py (Ton)	Poisson	0.2	NODOS	DIRECCIÓN
25	0.1667	Young (Ton/cm <sup>2</sup> )	500	1 al 5	X,Y
38	0.6667	<b>DISCRETIZACION</b>			
63	0.3333	# de nodos	177		
76	0.6667	# de elementos	48		
101	0.3333	Tipos de integración	Analítica y numérica		
114	0.6667	Orden de integrac. Gauss	3 y 4		
139	0.3333	<b>GEOMETRIA</b>			
152	0.6667	Long. x (m)	14 apróx.		
177	0.1667	Long. y (m)	3		

5.1.2.3 Problema discretizado

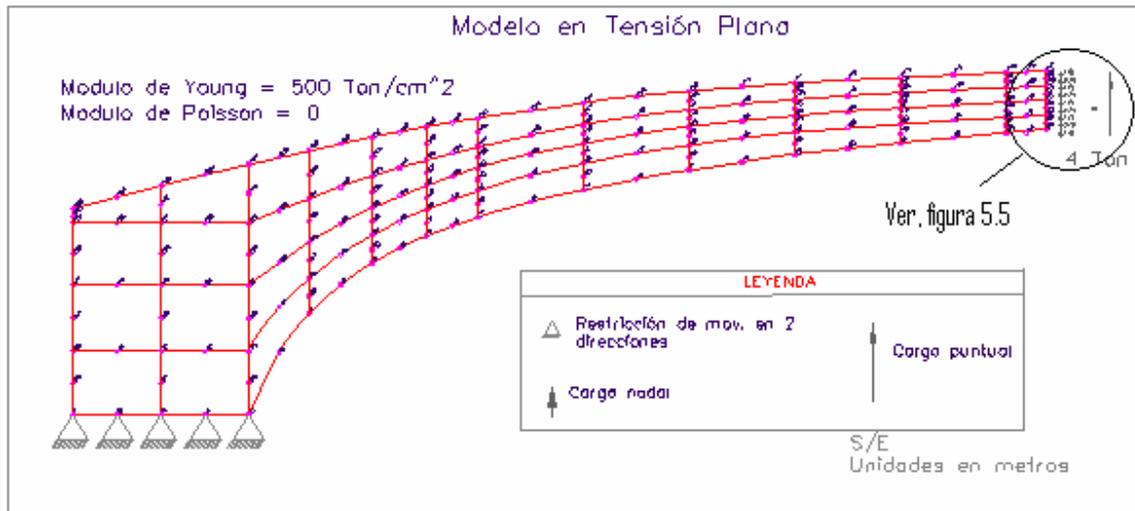


Figura 5.4.- Discretización de la viga en voladizo de sección variable.

5.1.2.4 Resultados

Tabla 5.2.- Desplazamiento del nodo 177 y esfuerzos en el elemento 48 de la viga en voladizo.

Viga en voladizo de sección variable		3 x 3		4 x 4	
		Numérica	Analítica	Numérica	Analítica
Desplazamiento del nodo # 177 (cm)	U	-0.707E-02	-0.707E-02	-0.707E-02	-0.707E-02
	V	0.352E-01	0.352E-01	0.352E-01	0.352E-01
Esfuerzos: Elemento 48 (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_x$	0.138E+02	0.138E+02	0.138E+02	0.138E+02
	$\sigma_y$	0.481E+01	0.481E+01	0.481E+01	0.481E+01

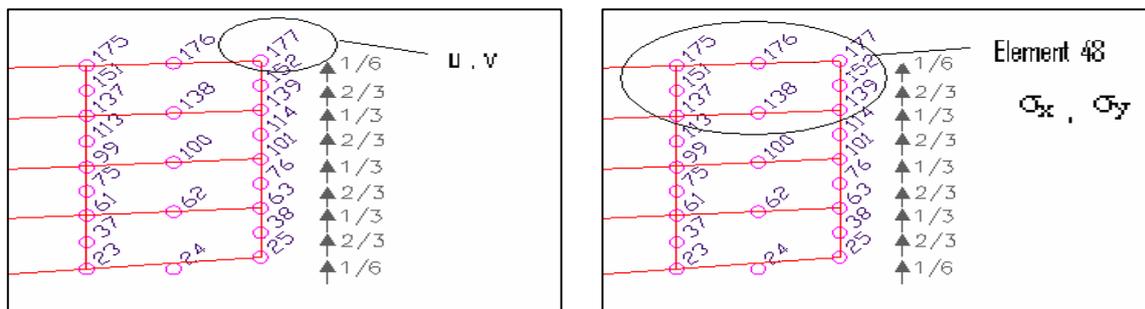


Figura 5.5.- Extremo libre de la viga en voladizo: nodo 177 y el elemento 48 que lo contiene.

### 5.1.3 Presa en arco

#### 5.1.3.1 Planteamiento del Problema

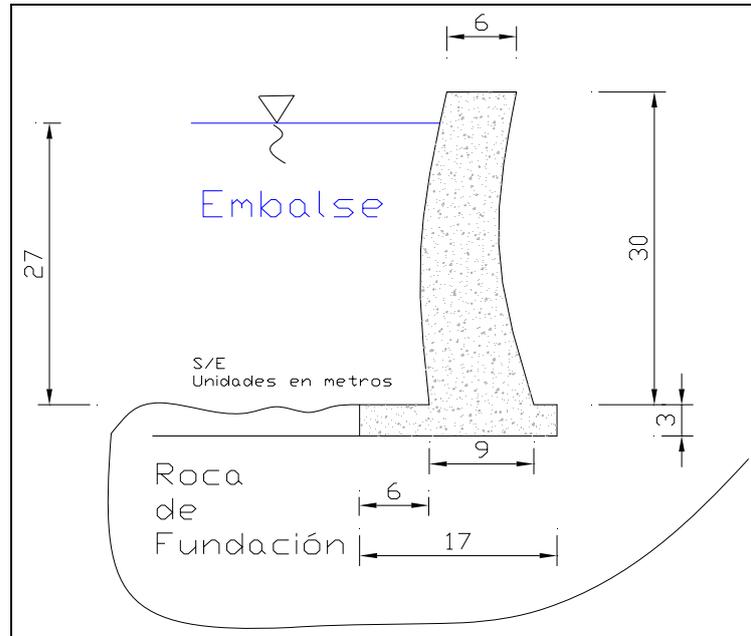


Figura 5.6.- Dimensiones de la presa en arco.

#### 5.1.3.2 Características del problema

CARGAS (Ton)		MATERIAL		RESTRICCIONES	
NODOS	Px	Poisson	0.2	NODOS	DIRECCIÓN
71, 100	7.0	Young (Ton/cm <sup>2</sup> )	500	1 al 33	X,Y
115, 122	1.0	<b>DISCRETIZACION</b>			
93, 111	4.0	# de nodos	143		
49, 89	10.0	# de elementos	36		
34	25.0	Tipos de integración	Analítica y numérica		
38	11.5	Orden de integrac. Gauss	3 y 4		
45	22.0	<b>GEOMETRIA</b>			
49	10.0	Long. x (m)	17		
56	19.0	Long. y (m)	33		
60	8.5				
67	16.0				
78	18.0				
82	5.5				

5.1.3.3 Problema discretizado

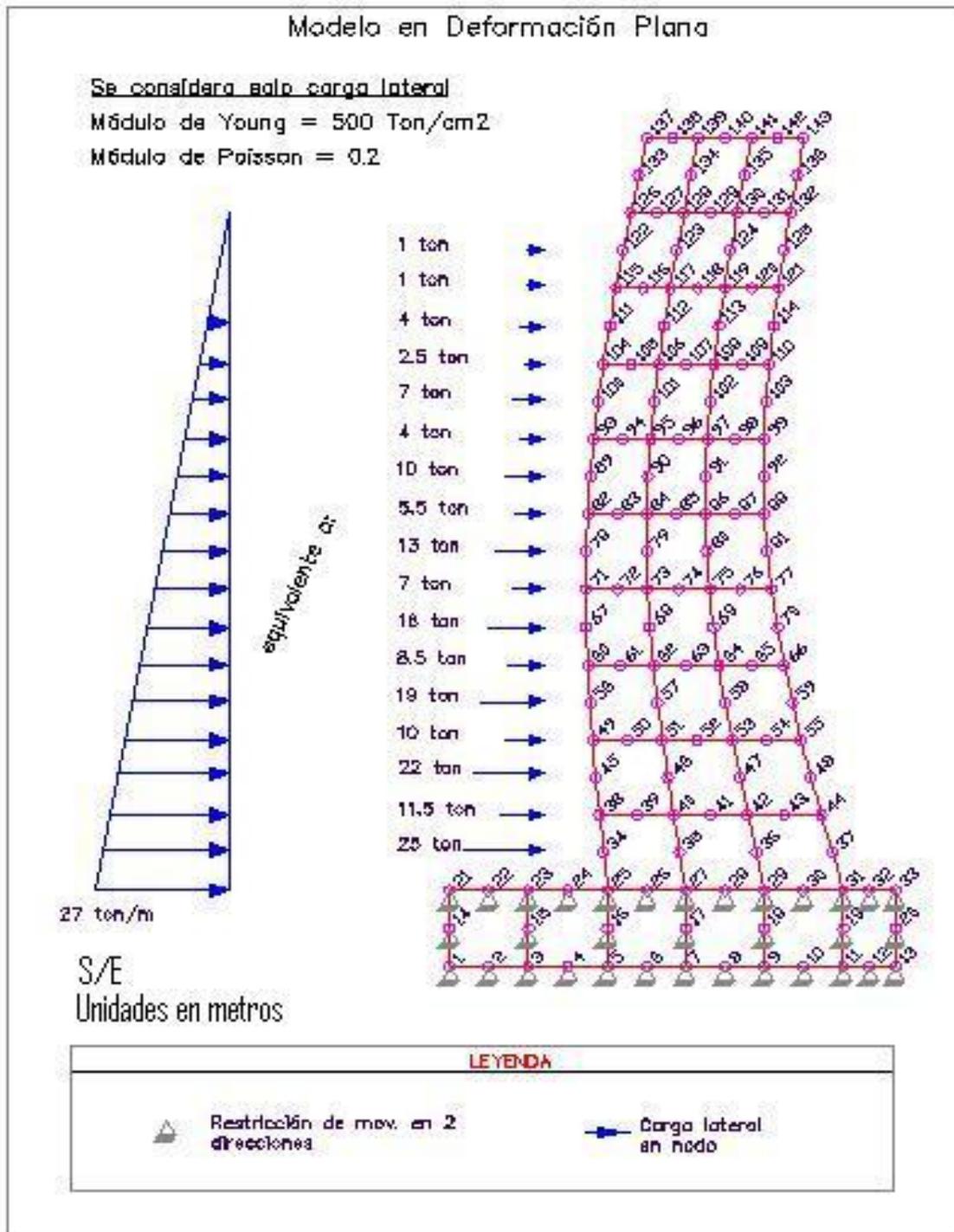


Figura 5.7.- Discretización de la presa en arco.

5.1.3.4 Resultados

Tabla 5.3.- Desplazamiento del nodo 143 y esfuerzos en el elemento 36 de la presa en arco.

<i>Presa en arco</i>		<b>3 x 3</b>		<b>4 x 4</b>	
		<i>Numérica</i>	<i>Analítica</i>	<i>Numérica</i>	<i>Analítica</i>
Desplazamiento del nodo # 143 (cm)	u	0.121E+01	0.121E+01	0.121E+01	0.121E+01
	v	-0.183E+00	-0.183E+00	-0.183E+00	-0.183E+00
Esfuerzos: Elemento 36 (Kg/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_x$	0.129E+02	0.129E+02	0.129E+02	0.129E+02
	$\sigma_y$	0.302E+02	0.302E+02	0.302E+02	0.302E+02

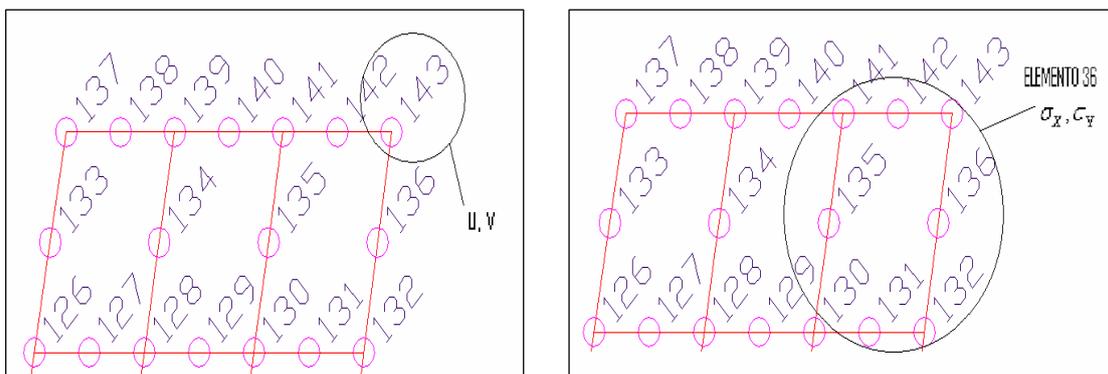


Figura 5.8.- Extremo libre de la presa en arco: nodo 143 y el elemento 36 que lo contiene.



## **CAPÍTULO VI**

# **Conclusiones**

En este trabajo se calcularon los términos de las matrices de rigidez por integración analítica de cinco (5) elementos finitos cuadriláteros de ocho (8) nodos, isoparamétricos, Serendipity. De los elementos finitos integrados se obtienen las siguientes conclusiones generales y particulares:

### ✓ **CONCLUSIONES GENERALES**

- Se obtuvo una ecuación general que permite calcular por integración analítica los elementos finitos cuadriláteros isoparamétricos de 8 nodos en elasticidad plana.
- Se obtuvo que la ecuación general tiene 33 constantes que están en función de las coordenadas euclidianas y los parámetros elásticos del elemento.
- Se demuestra que la dificultad de la integración analítica se debe al grado del polinomio y a la cantidad de términos que posee el determinante del jacobiano.
- Al modificar solo la posición de los nodos intermedios se encontraron treinta y nueve (39) ecuaciones jacobianas de las sesenta (60) posibles formas válidas que puede

adoptar el elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho (8) nodos, es decir, se encontraron treinta y nueve (39) casos del elemento finito isoparamétrico de ocho (8) nodos al modificar solo la posición de los nodos intermedios.

- Se integraron cinco (5) casos del elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho (8) nodos.

#### ✓ CONCLUSIONES PARTICULARES

- Se codificaron en ForTran 95, cinco (5) subrutinas de los casos integrados.
- Se demostró que los cinco (5) casos integrados analíticamente son menos eficientes en tiempo de ejecución al comparar con la integración numérica de tercer orden.
- Se demostró que tres (3) de los cinco (5) casos integrados analíticamente son más eficientes en tiempo de ejecución al comparar con la integración numérica de cuarto orden.
- Se demostró que al realizar grandes distorsiones a los elementos finitos se obtienen errores de precisión considerables al compararlos con la integración numérica de Gauss.Legendre.

- Se demostró que el error de precisión disminuye a medida que se incrementa el número de puntos Gauss-Legendre.
- Se analizaron tres ejemplos bidimensionales de medios continuos elásticos entre la integración analítica y la integración numérica de tercer y cuarto orden.
- Se observó que para elementos finitos de poca distorsión, es decir, elementos regulares como los presentados en los ejemplos bidimensionales, el error de precisión tiende a al valor cero, por lo tanto, los resultados obtenidos son iguales.



## **Bibliografía**

Andersen C.M. and Noor A.K. (1975). “A computerized symbolic integration technique for development of triangular and quadrilateral composite shallow shell finite element”, *Rep.NASA TN D-8067*.

Balao T., Videla L. (2005). “Integración analítica de la matriz de rigidez de un elemento finito isoparamétrico de 8 nodos en elasticidad plana por simplificación simbólica”, *Memorias II Congreso Internacional de Ingeniería Civil*, Barquisimeto – Venezuela.

Bardel N.S. (1989) “The application of symbolic to computing to the hierarchical finite element method”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **28**, 1181–1204.

Cardoso J-P. (1994). “Analytical integration formulation of element stiffness matrices”, *Master’s Thesis*, School of Engineering, University of Manchester.

Chandrupatla T. and Belegundu A. (1999). “Introducción el estudio del elemento finito en ingeniería”, *2<sup>da</sup> ed. Prentice Hall*, México.

Cerrolaza Miguel (2005). “Elementos finitos en ingeniería y ciencias aplicadas”, *1<sup>era</sup> ed. C.D.C.H.*, Caracas - Venezuela.

Ferrante A. J., “Fundamentos del método de los elementos finitos”, *Curso dictado en el IMME U.C.V.*, Caracas, 1979,320 pp.

Griffiths D.V. (1994). “Stiffness Matrix of the four-node quadrilateral element in closed form”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 1027-1038.

Griffiths D.V. and Smith I.M. (2004). “Programming the finite element method”, 4<sup>th</sup> ed. *Wiley*.

Jensen J. and Niordson F. (1977). “Symbolic and algebraic manipulation languages and their application in mechanics”, *In Perrone & Pilkeg (Eds.), Structural Mechanics Software Series*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville.

Kikuchi M. (1989). “Application of the symbolic mathematics system to the finite element program”, *Comput. Mech.*, **5**, 41–47.

Korncoff A. R and Fenves S. J. (1979). “Symbolic generation generation of finite element stiffness matrices”, *Comput. & Struct.*, **10**, 119-124.

Korncoff A.R. (1977). “Finite element stiffness matrix generation via symbolic manipulation, in C”, *Wellford (Ed), Proc. Symposium on Application of Comp.Meth. in Eng.*, Vol.II, **7**, 779-785.

Lozada I.J, Osorio J.C, Griffiths D.V, Cerrolaza M. (2004). “Stiffness Matrix Semi-Analytical Integration Of An 8-Noded Plane Elasticity Finite-Element By Using Symbolic Computation”, *J. Numer. Meth. in Partial Diff. Equations*, (in press).

Mizukami A. (1986). “Some integration formulas for a four-noded isoparametric element”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **59**, 111-121.

Noor A.K. and Andersen C.M. (1979). “Computerized symbolic manipulation in structural mechanics: Progress and Potential”, *Comput. & Struct.*, **10**, 95-118.

Oñate E. (1992). “Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos”, *Cimne*, Barcelona - España.

Rathod H.D. (1988). “Some Analytical integration formulae for a four node isoparametric element”, *Comput. & Struct.*, **10**, 1101-1109.

Rengarajan G, Knight N. and Aminpour M. (1995). “Comparison of symbolic and numerical integration methods for an assumed-stress hybrid shell element”, *Comm. Num. Meth. Eng.*, **11**, 307-316.

Timoshenko S, Goodier J. (1975). “Teoría de la elasticidad”, *Urmo*, Bilbao - España.

Vázquez M, López E. (2001). “El Método de los Elementos Finitos aplicado al Análisis Estructural”, *1<sup>era</sup> ed. Noela*, Madrid – España.

Videla L, Aparicio N and Cerrolaza M. (1996). “Explicit Integration of the Stiffness Matrix of a Four-Noded-Plane Elasticity Finite Element”, *Communications Int Numerical Methods In Engineering*. **12**, 731-743.

Videla L, Baloa T., Griffiths D.V. and Cerrolaza M. (2005). “ Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation”, *Journal in Analysis and design in Finite Elements*. (Submitted).

Vlachoutsis S. (1990). “Explicit integration for three-dimensional degenerate shell finite element”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **29**,861-880.

Yagawa G, Ye G.W. and Yoshimura S. (1990). “A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **29**,1539-1549.

Zienkiewicz W.C., Taylor R.L. and Too J.M. (1971). “Reduced integration technique in general Analysis of plates and shells”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 275-290.

Zienkiewicz W.C., and Taylor R.L (1994). “El Método de los Elementos Finitos”, 4<sup>ta</sup> ed. CIMNE, Madrid – España.



## **ANEXO A**

# **Manual del usuario**

### **SUBROUTINAS PARA CALCULAR LAS MATRICES DE RIGIDEZ DE LOS CINCO ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS DE OCHO NODOS EN ELASTICIDAD PLANA INTEGRADOS EN ESTE TRABAJO**

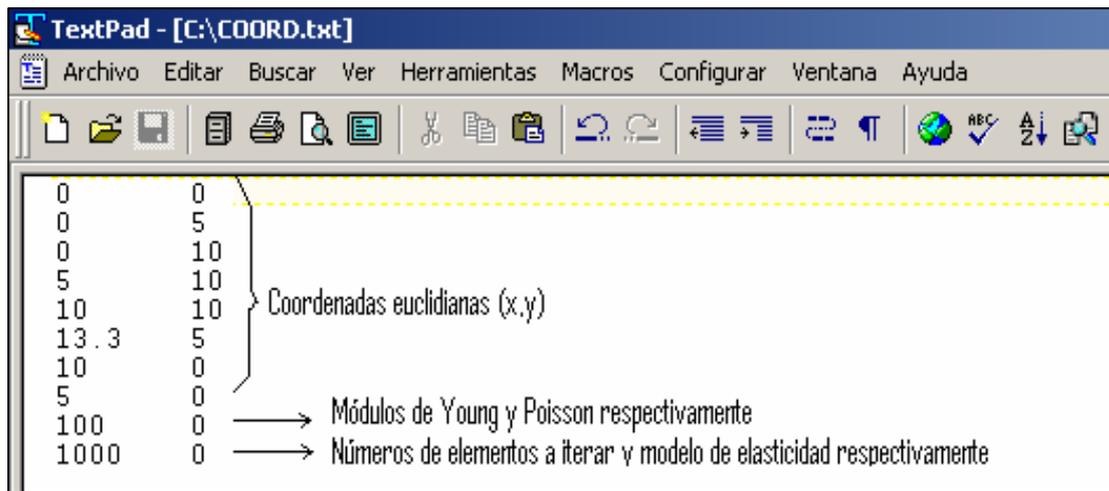
Para realizar la integración analítica de las matrices de rigidez con el programa ejecutable realizado en esta investigación por el método de los elementos finitos se debe tener el conocimiento de cuales elementos finitos isoparamétricos cuadriláteros de ocho nodos en elasticidad plana están integrados. (Ver apartado 3.7.1.1)

Considerando la sugerencia anterior, es fundamental para el cálculo tener o crear una carpeta (sin importar su ubicación y el nombre), con dos archivos fundamentales que a continuación se enumeran:

1. Archivo ejecutable llamado: NOMBRE.exe
2. Archivo de texto llamado: COORD.txt

El archivo ejecutable se debe copiar en la carpeta antes mencionada, además de crear el archivo de texto: COORD.txt.

El archivo COORD.txt contiene las coordenadas euclidianas, los parámetros elásticos llamados Young y Poisson. Asimismo, el número de elementos finitos a iterar y el modelo de elasticidad plana. A continuación se muestra en la figura A.1, el orden que tienen estos valores en el archivo.



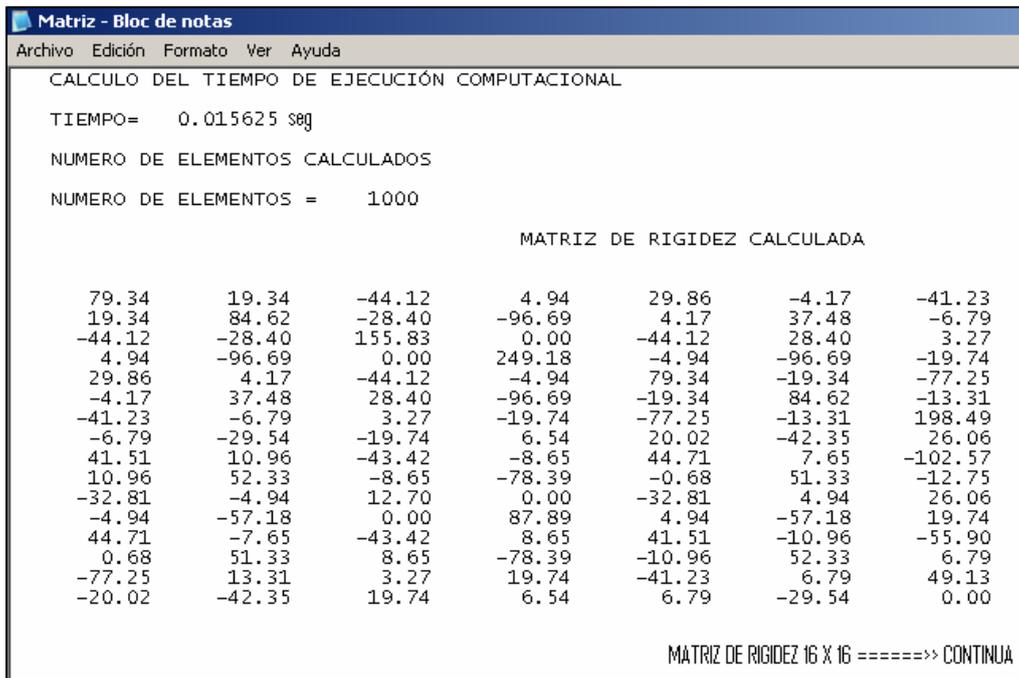
**Figura A.1- Archivo COORD.txt que contiene las coordenadas euclidianas, los parámetros elásticos, número de elementos a iterar y el modelo de elasticidad plana.**

En la figura A.1, se muestra el archivo COORD.txt que está compuesto por una matriz de diez filas por dos columnas. Donde las ocho primeras filas son las coordenadas euclidianas (x,y) del elemento, la fila nueve contiene los módulos de Young y Poisson respectivamente. Por último, la fila diez está compuesta por el número de elementos que la subrutina va a iterar para conocer el tiempo de ejecución computacional y el modelo de elasticidad respectivamente. Cabe destacar que, el modelo de elasticidad puede ser en Tensión plana al colocar el valor cero o Deformación plana si el valor es distinto de cero.

Luego, al tener el archivo COORD.txt bien definido y en la misma dirección que el archivo ejecutable: NOMBRE.exe, éste se ejecuta y se obtiene automáticamente un archivo de respuesta llamado: MATRIZ.sal.

3. Archivo de respuesta llamado: MATRIZ.sal

La figura A.2 muestra el archivo MATRIZ.sal, el cual contiene el tiempo de ejecución computacional (seg), el número de elementos iterados y el cálculo de los términos de la matriz de rigidez calculada (kgf/m).



**Figura A.2- Archivo MATRIZ.sal que contiene el tiempo de ejecución computacional, el**

**número de elementos iterados y los términos de la matriz de rigidez calculada.**



## **ANEXO B**

# Detalles de las expresiones ECB

Las Ecuaciones Características Básicas son seis, las cuales se presentan a continuación:

### **ECB1: Interacción entre los nodos esquinas (1, 3, 5, 7)**

$$\begin{aligned}
 ECB1(j, |J|, \xi, \eta, x) = & ((AK1(j))\eta^6 + (BK1(j)\xi^2 + CK1(j)\xi + DK1(j))\eta^5 + (EK1(j)\xi^4 + FK1(j)\xi^3 + \\
 & GK1(j)\xi^2 + HK1(j)\xi + IK1(j))\eta^4 + (JK1(j)\xi^4 + KK1(j)\xi^3 + LK1(j)\xi^2 + MK1(j)\xi + \\
 & NK1(j))\eta^3 + (OK1(j)\xi^5 + PK1(j)\xi^4 + QK1(j)\xi^3 + RK1(j)\xi^2 + SK1(j)\xi + TK1(j))\eta^2 + \\
 & (UK1(j)\xi^5 + VK1(j)\xi^4 + WK1(j)\xi^3 + XK1(j)\xi^2 + YK1(j)\xi)\eta^1 + (AAK1(j)\xi^6 + \\
 & ABK1(j)\xi^5 + ACK1(j)\xi^4 + ADK1(j)\xi^3 + AEK1(j)\xi^2) \eta^0 / |J|
 \end{aligned}$$

### **ECB 2: Interacción entre los nodos esquinas (1, 3, 5, 7) y los nodos internos (2, 6)**

$$\begin{aligned}
 ECB2(j, |J|, \xi, \eta, x) = & ((AK2(j))\eta^6 + (BK2(j)\xi^2 + CK2(j)\xi + DK2(j))\eta^5 + (EK2(j)\xi^4 + FK2(j)\xi^3 + \\
 & GK2(j)\xi^2 + HK2(j)\xi + IK2(j))\eta^4 + (JK2(j)\xi^4 + KK2(j)\xi^3 + LK2(j)\xi^2 + MK2(j)\xi + \\
 & NK2(j))\eta^3 + (OK2(j)\xi^5 + PK2(j)\xi^4 + QK2(j)\xi^3 + RK2(j)\xi^2 + SK2(j)\xi + TK2(j))\eta^2 + \\
 & (UK2(j)\xi^5 + VK2(j)\xi^4 + WK2(j)\xi^3 + XK2(j)\xi^2 + YK2(j)\xi + ZK2(j))\eta^1 + (ABK2(j)\xi^5 + \\
 & ACK2(j)\xi^4 + ADK2(j)\xi^3 + AEK2(j)\xi^2 + AFK2(j)\xi) \eta^0 / |J|
 \end{aligned}$$



### ECB 3: Interacción entre los nodos esquinas (1, 3, 5, 7) y los nodos internos (4, 8)

$$\begin{aligned}
 ECB3(j, |J|, \xi, \eta, \tilde{x}) = & ((BK3(j)\xi^2 + CK3(j)\xi + DK3(j))\eta^5 + (EK3(j)\xi^4 + FK3(j)\xi^3 + \\
 & GK3(j)\xi^2 + HK3(j)\xi + IK3(j))\eta^4 + (JK3(j)\xi^4 + KK3(j)\xi^3 + LK3(j)\xi^2 + MK3(j)\xi + \\
 & NK3(j))\eta^3 + (OK3(j)\xi^5 + PK3(j)\xi^4 + QK3(j)\xi^3 + RK3(j)\xi^2 + SK3(j)\xi + TK3(j))\eta^2 + \\
 & (UK3(j)\xi^5 + VK3(j)\xi^4 + WK3(j)\xi^3 + XK3(j)\xi^2 + YK3(j)\xi + ZK3(j))\eta^1 + (AAK3(j)\xi^6 + \\
 & ABK3(j)\xi^5 + ACK3(j)\xi^4 + ADK3(j)\xi^3 + AEK3(j)\xi^2 + AFK3(j)\xi) \eta^0) / |J|
 \end{aligned}$$

### ECB 4: Interacción entre los nodos internos (2, 6)

$$\begin{aligned}
 ECB4(j, |J|, \xi, \eta, \tilde{x}) = & ((AK4(j))\eta^6 + (BK4(j)\xi^2 + CK4(j)\xi + DK4(j))\eta^5 + (EK4(j)\xi^4 + FK4(j)\xi^3 + \\
 & GK4(j)\xi^2 + HK4(j)\xi + IK4(j))\eta^4 + (JK4(j)\xi^4 + KK4(j)\xi^3 + LK4(j)\xi^2 + MK4(j)\xi + \\
 & NK4(j))\eta^3 + (PK4(j)\xi^4 + QK4(j)\xi^3 + RK4(j)\xi^2 + SK4(j)\xi + TK4(j))\eta^2 + \\
 & (VK4(j)\xi^4 + WK4(j)\xi^3 + XK4(j)\xi^2 + YK4(j)\xi + ZK4(j))\eta^1 + (ACK4(j)\xi^4 + ADK4(j)\xi^3 + \\
 & AEK4(j)\xi^2 + AFK4(j)\xi + AGK4(j)) \eta^0) / |J|
 \end{aligned}$$

### ECB 5: Interacción entre los nodos internos (4, 8)

$$\begin{aligned}
 ECB5(j, |J|, \xi, \eta, \tilde{x}) = & (((EK5(j)\xi^4 + FK5(j)\xi^3 + GK5(j)\xi^2 + HK5(j)\xi + IK5(j))\eta^4 + (JK5(j)\xi^4 + \\
 & KK5(j)\xi^3 + LK5(j)\xi^2 + MK5(j)\xi + NK5(j))\eta^3 + (OK5(j)\xi^5 + PK5(j)\xi^4 + \\
 & QK5(j)\xi^3 + RK5(j)\xi^2 + SK5(j)\xi + TK5(j))\eta^2 + (UK5(j)\xi^5 + VK5(j)\xi^4 + \\
 & WK5(j)\xi^3 + XK5(j)\xi^2 + YK5(j)\xi + ZK5(j))\eta^1 + (AAK5(j)\xi^6 + ABK5(j)\xi^5 + \\
 & ACK5(j)\xi^4 + ADK5(j)\xi^3 + AEK5(j)\xi^2 + AFK5(j)\xi + AGK5(j)) \eta^0) / |J|
 \end{aligned}$$

### ECB 6: Interacción entre los nodos internos (2, 4, 6, 8)

$$\begin{aligned}
 ECB6(j, |J|, \xi, \eta, \underline{x}) = & ((BK6(j)\xi^2 + CK6(j)\xi + DK6(j))\eta^5 + (EK6(j)\xi^4 + FK6(j)\xi^3 + \\
 & GK6(j)\xi^2 + HK6(j)\xi + IK6(j))\eta^4 + (JK6(j)\xi^4 + KK6(j)\xi^3 + LK6(j)\xi^2 + MK6(j)\xi + \\
 & NK6(j))\eta^3 + (OK6(j)\xi^5 + PK6(j)\xi^4 + QK6(j)\xi^3 + RK6(j)\xi^2 + SK6(j)\xi + TK6(j))\eta^2 + \\
 & (UK6(j)\xi^5 + VK6(j)\xi^4 + WK6(j)\xi^3 + XK6(j)\xi^2 + YK6(j)\xi + ZK6(j))\eta^1 + (ABK6(j)\xi^5 + \\
 & ACK6(j)\xi^4 + ADK6(j)\xi^3 + AEK6(j)\xi^2 + AFK6(j)\xi + AGK6(j)) \eta^0) / |J|
 \end{aligned}$$

Donde  $j$  es el número de términos que calcula la ECB en estudio,  $|J|$  es el determinante del jacobiano,  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas adimensionales y  $\underline{x}$  contiene las coordenadas euclidianas del elemento y sus parámetros elásticos.



## **ANEXO C**

# **E. F. Isoparamétrico de ocho nodos**

De la ecuación (3.16) se obtienen treinta y nueve (39) ecuaciones de las sesenta (60) posibles formas válidas que puede adoptar el elemento finito isoparamétrico de ocho nodos, las cuales se presentan en este anexo como tablas que contienen las figuras de los elementos finitos cuadriláteros, ecuaciones del determinante del Jacobiano, particularidades del elemento finito respecto a los ejes coordenados euclidianos y las posiciones de los nodos.

Al estudiar las formas que adopta el elemento finito cuadrilátero de ocho (8) nodos se obtienen tres grandes grupos, tales como los elementos finitos con todos sus lados rectos, otro con todos sus lados curvos y por último los elementos finitos combinados, es decir, de lados curvos y rectos.

Además, se encuentran particularidades del elemento finito cuadrilátero con respecto a los ejes de coordenadas euclidianas. Las particularidades son: elementos finitos paralelos a ambos ejes de las coordenadas euclidianas, paralelos al eje de las abscisas, paralelos al eje de las ordenadas y la no existencia de paralelismos.

A continuación, se presenta la numeración y sus respectivas particularidades para cada grupo y se identifica en las tablas como una celda llamada grupo:

### **1. Elemento finito de lados rectos**

- 1.1. Paralelos a ambos ejes de las coordenadas euclidianos.
- 1.2. Paralelos al eje de las abscisas
- 1.3. Paralelos al eje de las ordenadas
- 1.4. No existe paralelismo con los ejes

### **2. Elemento finito de lados curvos**

- 2.1. Trazas de los nodos extremos son paralelos a ambos ejes de las coordenadas euclidianos.
- 2.2. Trazas de los nodos extremos son paralelos al eje de las abscisas
- 2.3. Trazas de los nodos extremos son paralelos al eje de las ordenadas
- 2.4. Trazas de los nodos extremos no son paralelos a los ejes coordenados euclidiano

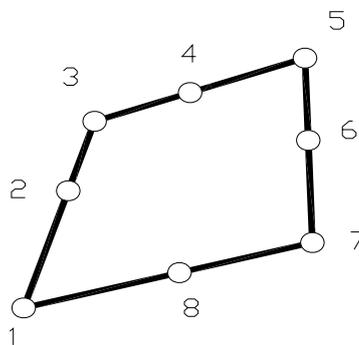
### **3. Elemento finito de lados combinados: rectos y curvos**

- 3.1. Paralelos a ambos ejes de las coordenadas euclidianos.
- 3.2. Paralelos al eje de las abscisas
- 3.3. Paralelos al eje de las ordenadas
- 3.4. No existe paralelismo con los ejes

Por último, para interpretar las tablas se tienen las posiciones de los nodos interiores de los lados del elemento finito, las cuales son cuatro (4) y se identifican en la tabla como característica y se presentan a continuación:

- [ 1 ] Nodos 2,4,6 y 8 son nodos medios de los nodos extremos 1,3,5 y 7 que conforma cada lado del elemento.
- [ 2 ] Nodos 2 y 6 **no** son nodos medios y **sí**, los nodos 4 y 8 de los nodos extremos que conforma cada lado del elemento.
- [ 3 ] Nodos 4 y 8 **no** son nodos medios y **sí**, los nodos 2 y 6 de los nodos extremos que conforma cada lado del elemento.
- [ 4 ] Ninguno de los nodos 2,4,6 y 8 son nodos medios de los nodos extremos que conforma cada lado del elemento.

Cabe destacar que, la numeración de nodos es horaria y el comienzo del nodo uno (1) es en el vértice inferior izquierdo (tercer cuadrante) del elemento finito como se muestra en la figura (C-1).



**Figura C.1 Numeración y sentido de los nodos de un E. F. Isoparamétrico de ocho nodos.**

En las siguientes veintidós (22) páginas se muestran los grupos según la forma que adopta el elemento finito isoparamétrico de ocho nodos con su respectiva figura, así como las características de las posiciones de los nodos y la ecuación del determinante del jacobiano que lo rige.















































# **ANEXO D**

# **Códigos de los elementos integrados**

## **CÓDIGOS DE LOS CINCO ELEMENTOS FINITOS CUADRILÁTEROS ISOPARAMÉTRICOS DE OCHO NODOS EN ELASTICIDAD PLANA INTEGRADOS ANALÍTICAMENTE**

Inicialmente es importante resaltar que, la subrutina esta compuesta por un bloque cuya estructura es la siguiente:

1. Declaración de Librerías y Variables

2. Cuerpo del programa

2.1. Asignación de nuevas variables para simplificar las coordenadas euclidianas. Ejemplo:

$$x11 = x1*x1; x12=x1*x2; \dots; x1y1=x1*y1; x1y2=x1*y2; \dots; x8y8=x8*y8.$$

2.2. Constantes del Jacobiano y de las ECB: AJ,BJ,...,MJ y AK, BK, CK,..., AGK, respectivamente.

2.3. Códigos de la integración analítica de cada uno de los elementos finitos cuadriláteros isoparamétricos de ocho nodos en elasticidad plana. (Ver apartado 3.7.1.1)

2.4. Por último, la creación de la matriz cuadrada de orden dieciséis.

### 3. Fin del programa

Este anexo presenta en las siguientes dos páginas las declaraciones de las librerías y variables de las constantes, iteraciones, tiempo, ECB entre otras que se utilizan en la subrutina. Luego, se presentan siete páginas que contienen los códigos de las cinco integrales analíticas de los elementos finitos cuadriláteros isoparamétricos de ocho nodos en elasticidad plana. (Ver apartado 3.7.1.1).



















# ANEXO E

## Consistencia de Cargas Nodales

El anexo E en la figura E.1 presenta la distribución nodal de cargas en elementos finitos cuadriláteros de cuatro (4), ocho (8) y nueve (9) nodos tanto para cargas uniformes como para las triangulares.

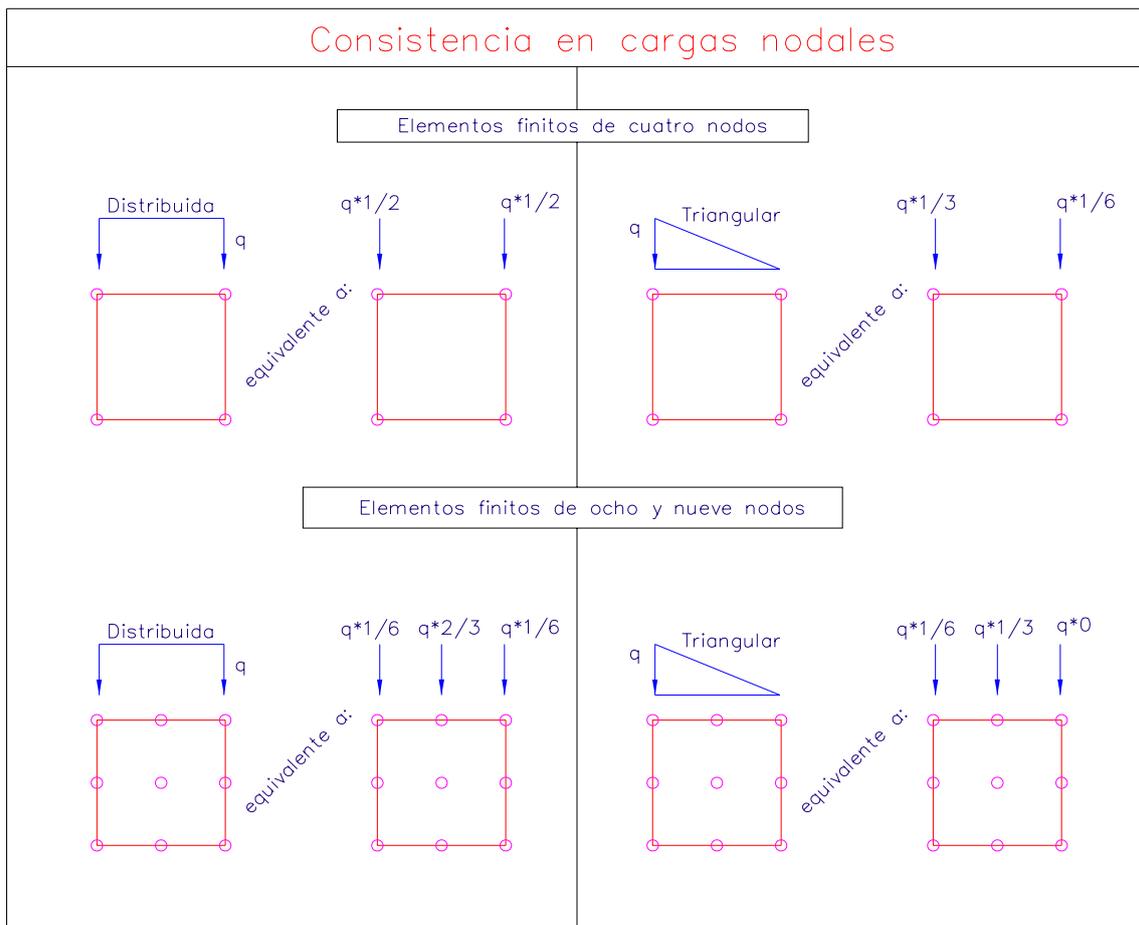


Figura E.1.- Distribución de cargas nodales en elementos finitos cuadriláteros.