

Un Método de Ordenamiento Vectorial para el Análisis de Imágenes Multidimensionales

W. Torres

Centro de Procesamiento Digital de Imágenes, Instituto de Ingeniería, Caracas, Venezuela
Laboratorio de Computación Gráfica y Geometría Aplicada, Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias UCV, Caracas, Venezuela

RESUMEN

Las imágenes multivariadas son utilizadas para el análisis de fenómenos que dependen de diferentes variables dándole un carácter multidimensional, como es el caso de las imágenes obtenidas por los satélites de observación terrestre o en los sistemas de adquisición de imágenes médicas. Cuando los fenómenos estudiados se destacan espacialmente por su forma y topología, la Morfología Matemática se presenta como la herramienta adecuada para su estudio. Sin embargo, las bases de la Morfología Matemática en la teoría de retículos completos requiere que se establezca un orden total en el conjunto de datos bajo análisis, objetivo que no puede ser alcanzado de manera absoluta en imágenes multidimensionales. En este trabajo se propone un método de ordenamiento total vectorial que organiza los píxeles-vector de una imagen multidimensional mediante una secuencia de métricas que se adapta fácilmente cualquiera sea su dimensión. Fundamentándose en el esquema de ordenamiento que se propone, se programan los operadores morfológicos y se aplican en imágenes adquiridas por el satélite SPOT y en imágenes adquiridas por Resonancia Magnética Nuclear.

ABSTRACT

Multivariate images are increasingly used for the analysis of phenomena present in the scene that are identified by their multidimensional character. This is the case of the images obtained by multispectral remote sensing platforms or medical imaging system. When these phenomena are spatially defined by their shape or topology, mathematical morphology is an essential tool for their study. However, since mathematical morphology has its basis in the complete lattice theory, it is necessary to introduce a total order between the elements of the dataset under analysis, a goal that in the case of multivariate images can not be accomplished in an absolute manner. This paper proposes a method of total vector ordering that groups the vectors of the multivariate image pixels through a sequence of distance measurements that are easily adapted to images of any dimension. Based on this ordering scheme the morphological operators were programmed and applied to the images acquired by the SPOT satellite and also to nuclear magnetic resonance imaging.

Keywords: Mathematical morphology, multivariate image, vector ordering.

1. Introducción

En muchas áreas del conocimiento se utilizan imágenes multivariadas para poner en evidencia la dependencia de un fenómeno con respecto a un conjunto de variables como tiempo, temperatura, presión, longitud de onda, etc.. En las imágenes multidimensionales cada píxel es representado por un vector cuya dimensión corresponde al número de variables consideradas. Tal es el caso de las imágenes multi e hiperespectrales en teledetección, o el de las imágenes médicas que se obtienen bajo diferentes modalidades, resonancia magnética, PET, etc. En muchas aplicaciones, el análisis de las imágenes se orienta a la identificación de elementos que se caracterizan por tener píxeles con valores semejantes, por su forma y por la relación con los píxeles vecinos. Como ejemplos de aplicación, se tiene en percepción remota la identificación de rubros de producción en

espacios agrícolas utilizando imágenes satelitales, o la identificación de tejidos con diferentes niveles de afectación en imágenes de resonancia magnética. En las imágenes satelitales, los objetos en la superficie terrestre se caracterizan por su firma espectral, definida por la secuencia de valores que componen cada píxel; la Figura 1a presenta los valores para tres píxeles particulares (suelo, vegetación y agua), donde se muestra la energía reflejada en función de la longitud de onda. En las imágenes de resonancia magnética, la secuencia de los valores de cada píxel permite determinar el tiempo de relajación de un tejido y en consecuencia su caracterización. La Figura 1b muestra la curva típica de la respuesta de tres tejidos con diferentes concentraciones de líquido.

La Morfología Matemática (MM), introducida por G. Matheron y J. Serra en 1964, es una técnica no lineal para el tratamiento de imágenes que facilita el análisis donde la

forma y la topología de los objetos presentes en ella son el principal parámetro que los caracteriza. Los fundamentos teóricos de la MM fueron ampliamente desarrollados para el caso de imágenes binarias y en las imágenes en niveles digitales o tonos de gris [Ser82, Soi04]. La MM se fundamenta en la teoría de los retículos completos, que se define como un conjunto parcialmente ordenado dotado de un ínfimo y un supremo [GH00]. Para el análisis de cada píxel de la imagen, se consideran los vecinos delimitados espacialmente por una estructura geométrica de referencia denominada Elemento Estructurante (EE). Para establecer los operadores morfológicos en las imágenes monodimensionales, los niveles digitales de los píxeles cubiertos por el EE se ordenan naturalmente de acuerdo a su valor, asignando al píxel de salida el menor de ellos en el caso de la erosión, o el máximo en el caso de la dilatación. Estas dos operaciones constituyen los operadores elementales de la MM.

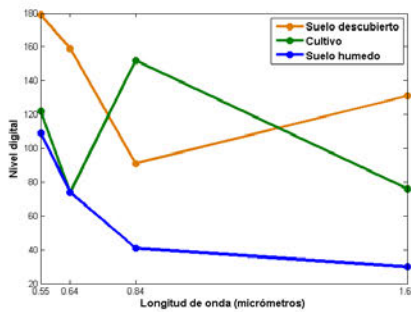


Figura 1a: Píxeles de suelo, vegetación y agua en una imagen satelital

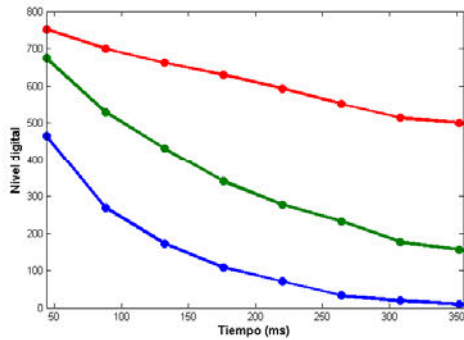


Figura 1b: Píxeles de tres tejidos en una imagen RMN

En las imágenes multidimensionales, no es posible establecer un orden absoluto de los píxeles-vector por lo que diversos autores han propuesto diferentes esquemas de ordenamiento: marginal, lexicográfico, reducido, parcial, entrelazamiento de bits, Pareto, etc., [AL08, AL07, CL97, KNG00]. Algunos de los esquemas de ordenamiento propuestos son específicos para las imágenes a color [Ang07, Ang10], y son de difícil adecuación cuando la dimensión de las imágenes es superior a tres.

En este trabajo, se propone un esquema para el ordenamiento de los píxeles-vector que se ejecuta en varias etapas. De forma consecutiva, los píxeles-vector se van agrupando utilizando una medida de distancia respecto al ori-

gen. Al final, los vectores que mantienen la igualdad se ordenan siguiendo el orden lexicográfico. Una vez desarrollado el algoritmo para ordenar los vectores, se pueden programar los operadores morfológicos. Se muestran algunos resultados en imágenes multi-espectrales e imágenes de Resonancia Magnética (RM) ponderadas en T2.

2. Orden vectorial

Sea \mathbf{P} un conjunto de M vectores $\mathbf{p}_i, 1 \leq i \leq M$, seleccionados por un EE dentro de una imagen multidimensional conformada por N componentes:

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_M\}; \text{ con } \mathbf{p}_i = [p_{i,1} \ p_{i,2} \ \dots \ p_{i,N}]$$

El ordenamiento de los vectores en \mathbf{P} se hace comparando pares de vectores $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ siguiendo la estrategia definida en la Ecuación 1:

- Sean dos vectores \mathbf{r} y \mathbf{q} de $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}^N$; y sus componentes respectivas r_i et $q_i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq N$:

$$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]; \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_N]$$

- Al ordenar en forma decreciente los componentes de \mathbf{r} et \mathbf{q} se obtienen dos vectores \mathbf{r}' et \mathbf{q}' , donde:

$$\mathbf{r}' = [r'_1, r'_2, \dots, r'_N]; \text{ avec } r'_j \geq r'_{j+1} \ 1 \leq j \leq N-1$$

$$\mathbf{q}' = [q'_1, q'_2, \dots, q'_N]; \text{ avec } q'_j \geq q'_{j+1} \ 1 \leq j \leq N-1$$

La comparación de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{q} se realiza en varias fases siguiendo el siguiente esquema, donde $\mathbf{r} < \mathbf{q}$ si:

- 1) $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j < \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j \quad \circ$
- 2) $\sum_{j=1}^N r_j = \sum_{j=1}^N q_j$ y $r'_1 > q'_1 \quad \circ$
- 3) $\sum_{j=1}^N r_j = \sum_{j=1}^N q_j, r'_1 = q'_1$ y $r'_2 > q'_2 \quad \circ \quad (1)$
-
- N) $\sum_{j=1}^N r_j = \sum_{j=1}^N q_j, r'_i = q'_i, 1 \leq i \leq N-2$ y $r'_{N-1} > q'_{N-1}$
- N+1) Si $r'_i = q'_i, 1 \leq i \leq N-1$, orden lexicográfico

Para ordenar el conjunto de vectores en \mathbf{P} se identifican vectores que sean iguales para considerar sólo uno de ellos.

La primera condición de la Ecuación 1, establece un preorden en \mathbf{P} que permite agrupar los vectores \mathbf{p}_i que tienen el mismo promedio. La Figura 1a ilustra, para el caso de dimensión 3, tres grupos de vectores que poseen el mismo valor promedio. Con esta condición, los vectores localizados sobre el plano rojo son menores a los vectores en azul y éstos a su vez inferiores los que se encuentran en el plano verde.

La segunda condición permite ordenar los vectores con un mismo valor promedio; se comparan los máximos de las componentes de los vectores, que ya están ordenados \mathbf{r}' y \mathbf{q}' . Esta condición genera subgrupos ordenados de manera concéntrica partiendo desde el centro a la periferia. En la Figura 1b se muestra la forma en que son ordenados los

vectores para uno de los grupos obtenidos con la primera condición; los vectores en el centro del plano (en azul) son menores a los que se encuentran en su periferia (en magenta).

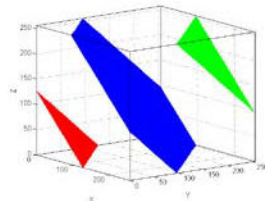


Figura 1a: Grupos de vectores con el mismo promedio

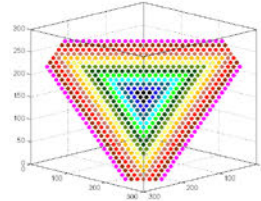


Figura 1b: Orden asignado por el máximo de los vectores.

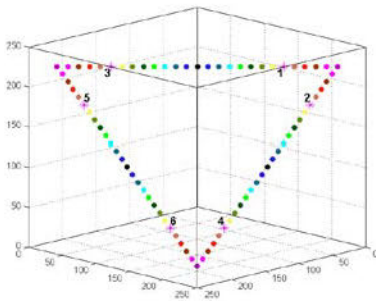


Figura 1c: Orden lexicográfico

Para ordenar los vectores que son iguales bajo las condiciones anteriores, se procede a comparar los máximos siguientes r_i y q_i tal como lo expresan las condiciones 3 hasta N de la Ecuación 1. La Figura 1c ilustra este resultado, los vectores iguales bajo la condición precedente son ordenados desde el centro de cada segmento hacia el vértice, así los vectores en color azul son inferiores a los de color magenta. Los vectores que tienen los mismos componentes pero en diferente orden no pueden ser ordenados y mantienen la igualdad.

Para obtener un orden total, los vectores que aún conservan la igualdad son comparados por el orden lexicográfico asignando la prioridad en el mismo orden que se presenta cada componente. En la Figura 1c se indica el orden asignado a seis vectores por medio de cifras. Denominaremos el orden propuesto como Orden PML (Promedio-Máximo-Lexicográfico), O_{PML} .

3. Morfología matemática multidimensional

Los operadores morfológicos elementales son la *erosión* y la *dilatación*. La erosión ($\varepsilon_B(f)(x)$) asigna al píxel de salida el ínfimo de los píxeles vector que se encuentran en la vecindad definida por el elemento estructurante B, mientras que la dilatación ($\delta_B(f)(x)$) le asigna el supremo.

La Figura 2 muestra el efecto de estos operadores sobre una imagen sintética utilizando como elemento estructurante un círculo de radio 5.

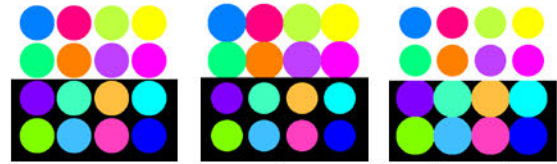


Figura 2: Imagen sintética, erosión y dilatación

El gradiente morfológico es un operador derivado de los anteriores que permite la detección del borde de los objetos presentes en la imagen; se determina mediante la resta entre la dilatación y la erosión. También se han propuesto gradientes por composición de una secuencia de gradientes como el gradiente multiescala, utilizado para la segmentación; su expresión se presenta en la Ecuación 2 [NKV*07].

$$MG(f) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^K \left[\varepsilon_{B_{j-1}}(\delta_{B_k}(f)) - \varepsilon_{B_k}(f) \right] \quad (2)$$

Los filtros morfológicos y los operadores morfológicos empleados en este trabajo se construyen por composición de los operadores morfológicos elementales obtenidos utilizando el esquema de ordenamiento propuesto.

4. Aplicaciones

El primer ejemplo corresponde a una imagen multiespectral con cuatro bandas adquirida por el satélite SPOT en Turen, Estado Portuguesa. La MM es de gran utilidad en la determinación de las superficies de las plantaciones para la elaboración de estadísticas de producción agrícola [TS10]. La Figura 3a presenta una subimagen en falso color infrarrojo, la Figura 3b muestra el resultado de la erosión utilizando como EE un círculo de radio 3. La erosión realza las zonas menos brillantes de la imagen. La Figura 3c presenta la dilatación donde se aprecia el realce de las zonas brillantes de la imagen. Cada píxel de la imagen multiespectral puede ser representado mediante una gráfica que muestra la radiación emitida en las cuatro longitudes de onda que captura el satélite. En la Figura 3d se muestran los valores correspondientes a los píxeles cubiertos por el elemento estructurante, se destacan entre ellos los vectores de salida en el caso de la erosión y de la dilatación.

El siguiente ejemplo corresponde a la aplicación de algunos operadores morfológicos en una imagen de resonancia magnética ponderada en T2 con ocho canales codificados en 16 bits. En esta imagen, el interés es caracterizar los tejidos de acuerdo a su tiempo de relajación con la finalidad de diferenciar los tejidos normales de aquellos que estén afectados por alguna lesión [TMP*09]. La Figura 4a muestra la imagen del canal 5 y en la Figura 4b los valores asociados a los tiempos de relajación de los ocho vectores vecinos de un píxel particular de la imagen, destacando el píxel-vector asignado a la erosión y a la dilatación.



Figura 3a: Image SPOT IRC

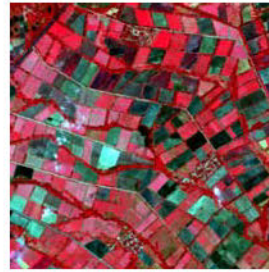


Figura 3b: Erosión



Figura 3c: Dilatación

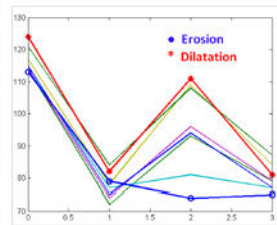


Figura 3d: Erosión y dilatación

En la Figura 4c se muestra la imagen del gradiente que se obtiene al aplicar el gradiente morfológico multiescala. La Figura 4d presenta el resultado de otro operador morfológico denominado reconstrucción geodésica por apertura.

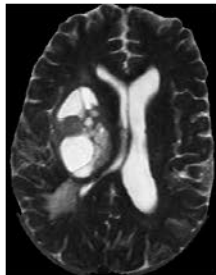


Figura 4a: Canal 5 de una imagen RM

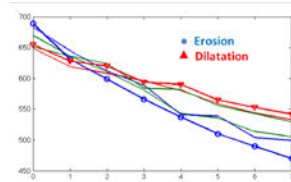


Figura 4b: Erosión y dilatación



Figura 4c: Gradiente multiescala

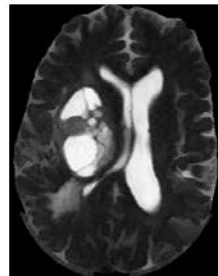


Figura 4d: reconstrucción por apertura

5. Resultados

Cualquiera sea el esquema utilizado para ordenar los vectores, siempre se van a introducir distorsiones en el

orden asignado. Estas se evidencian al asignar un orden consecutivo o cercano a vectores cuya distancia euclídea es grande, o bien al asignar ordenes relativamente alejados cuando su distancia euclídea es pequeña. En el esquema de ordenamiento que aquí se propone, las distorsiones se ocasionan especialmente en el orden lexicográfico y en los saltos entre dos condiciones. Hemos denominado su medida como distorsión morfológica.

Para evaluar la distorsión morfológica, se propone comparar el orden asignado por el O_{PML} con el orden obtenido de acuerdo a la distancia euclídea respecto al menor de ellos. Colocamos en o las posiciones asignadas a los k píxeles ordenados, y en d las posiciones que se obtienen al ordenar utilizando la distancia euclídea respecto al primer vector del O_{PML} . Determinamos el promedio de las diferencias en las posiciones como medida de la distorsión morfológica.

$$o = [1 \quad 2 \quad \dots \quad k]$$

$$d = [1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_k] \quad (3)$$

$$D = \frac{1}{k-1} \sum_{j=2}^k |d_j - o_j|$$

En la Tabla 1 se resume el resultado de esta medida en una imagen SPOT de 600 x 600 píxeles con cuatro canales codificados con 8 bits y en una imagen de resonancia magnética de 512x512 píxeles con 8 canales codificados en 10 bits. Se utilizaron elementos estructurantes cuadrados de 3x3, 5x5 y 7x7 píxeles. Los valores indicados en la tabla representan el promedio de las distorsiones morfológicas D obtenidas para cada píxel.

(Min-Max)	3x3 (0 - 4)	5x5 (0 -12)	7x7 (0 -24)
SPOT	0.88	2.51	4.88
RMN	0.49	1.44	2.79

Tabla1. Evaluación de la distorsión morfológica

Una de las limitaciones que presentan los esquemas de ordenamiento reportados en la literatura, es la alta dependencia de la distorsión con respecto al orden en que son considerados los canales de la imagen. El esquema de ordenamiento O_{PML} tiene un comportamiento simétrico que asigna el mismo peso a todos los canales para el ordenamiento. En la Tabla 2 se muestra la distorsión morfológica introducida por el ordenamiento lexicográfico donde se le ha dado prioridad diferente a los canales de la imagen multispectral, poniendo en evidencia la dependencia de la prioridad asignada a los canales.

(Min-Max)	5x5 (0 -12)	5x5 (0 -12)	5x5 (0 -12)
Prioridad	[1 2 3 4]	[3 2 1 4]	[4 3 2 1]
SPOT	2.2	4.4	4.36

Tabla 2. Evaluación de la distorsión al ordenar utilizando entrelazado de bits

6. Conclusión

La morfología matemática vectorial permite el procesamiento de imágenes multidimensionales con la particulari-

dad de generar imágenes cuyos píxeles vector están presentes en la imagen inicial, es decir no se introducen nuevos vectores como resultado de un cálculo aritmético. Esto permite, por ejemplo, conservar en las imágenes satelitales la firma espectral de los objetos en la superficie de la tierra, y en las imágenes de RMN no se introducen tejidos con tiempos de decaimiento diferente a los presentes en la imagen.

Las distorsiones morfológicas intrínsecas a los esquemas de ordenamiento vectorial fueron evaluadas bajo diferentes condiciones en imágenes reales, no se percibe en las imágenes obtenidas el efecto introducido. En la Figura 5 se presenta un detalle de la imagen de satélite que muestra el efecto de la distorsión morfológica sobre la erosión; la flecha muestra una serie de píxeles brillantes que no se corresponden con el valor esperado.

Una característica interesante del ordenamiento propuesto es la facilidad de utilizarlo en imágenes con un número importante de canales sin depender del número de bits con el cual están representados los píxeles.

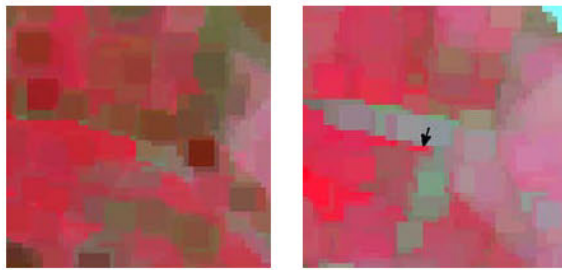


Figura 5. Imagen original y distorsión morfológica en la erosión

Referencias

- [AL07] APTOULA, E. S. Lefevre. A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition* 40. 2914-2929, 2007.
- [AL08] APTOULA, E., LEFEVRE, S.: On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition Letters* 29, 2, 109-118, 2008.
- [Ang07] ANGULO, J.: Morphological color operators in totally ordered lattices based on distances : application to image filtering, enhancement and analysis. *Computer Vision and Image Understanding*, 107 56-73, 2007
- [Ang10] ANGULO, J.: Geometric algebra colour image representations and derived total orderings for morphological operators - Part I: Colour Quaternions. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, Vol. 21, 33--48, 2010.
- [CL97] CHANUSSOT, J., LAMBERT, P.: Entrelacement de Bits et "Space Filling Curves": une Extension des Filtres de Rang aux Images Couleur. *GRETSI 1997*, Grenoble
- [GH00] GOUTSIAS, J. , HEIJMANS, H.: Fundamenta Morphologicae Mathematicae. *Fundamenta Informaticae* 41, 1-31, 2000.
- [KNG00] KÖPPEN, M., NOWACK, Ch., RÖSEL, G. :Pareto-Morphology for Color Image Processing: A Comparative Study of Multivariate Morphologies. *Pattern Recognition and Image Analysis*, Vol. 10, No. 4, pp. 478-491, 2000
- [NKV*07] NALLAPERUMAL, K., KRISHNAVENI, K., VARGHESE, J., SAUDIA, S., ANNAM, S., KUMAR, P.: A novel Multi-scale Morphological Watershed Segmentation Algorithm. *International journal of imaging science and engineering*, Vol 1, 2,60-64, 2007
- [Soi04] SOILLE, P.: *Morphological Image Analysis*, Springer-Berlag Berlin, 2004
- [Ser82] SERRA, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982
- [TS10] TORRES, W., SALCEDO, R.: Object oriented image segmentation by means of multichannel mathematical morphology. *Proc. SPIE 7830, 783009*, 2010
- [TMP*09] TORRES, W., MARTÍN-LANDROVE, M., PALUSZNY, FIGUEROA, G., PADILLA, G.: Tumor segmentation of multi-echo MR T2-weighted images with morphological operators. *Proc. SPIE 7259, 72594E*, 2009